

TESIS DOCTORAL

Autor: Pedro José García Gil

Director: Dr. Pedro Albertos Pérez

SISTEMAS DINÁMICOS CON RETARDOS TEMPORALES

Contribución al desarrollo de predictores
robustos para el control de sistemas inestables

Enero 2007



Grupo de Sistemas Híbridos

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad Politécnica de Valencia

A mi familia

Resumen

Una de las mayores dificultades en el diseño de un sistema de control es sin duda la presencia de retardos, máxime si el sistema que se pretende controlar es inestable en bucle abierto y/o de fase no mínima.

Los retardos temporales pueden ser intrínsecos a los procesos a controlar, véase por ejemplo los procesos químicos, biológicos, columnas de destilación, procesos con intercambios térmicos, etc., o bien introducirse en el sistema de control por el propio diseño del mismo (tiempo de cómputo del algoritmo de control, sistemas distribuidos, control remoto, redes de comunicaciones, retardos introducidos por los sensores y/o actuadores, etc.).

En general, las prestaciones de los sistemas de control son muy sensibles a todos estos retardos, más incluso que a otros parámetros del modelo. De hecho, un sistema de control en bucle cerrado puede llegar a inestabilizarse como consecuencia de los mismos. La principal limitación de los sistemas con retardos en el bucle de control se deriva del decremento de fase, lo cual conduce a una inestabilidad del bucle de control a ganancias relativamente menores que sin la presencia de esos retardos, lo que implica una limitación en la magnitud de la acción de control. Los sistemas con retardos temporales son de dimensión infinita, y su función de transferencia en bucle cerrado posee un número infinito de polos. Es por tanto muy difícil para un regulador convencional realizar un ajuste de estos polos.

El Predictor de Smith [113], así como sus múltiples extensiones, y la técnica de Asignación Finita del Espectro [71], pueden considerarse como las estrategias de control más extendidas para el control de sistemas lineales sometidos a retardos de actuación y/o medida [105, 42].

Tanto el Predictor de Smith, como la técnica de Asignación Finita del Espectro, tienen en común que realizan una compensación del retardo en base a una predicción de la salida, o del estado, a partir de un modelo del sistema considerado. Si el proceso a controlar es inestable, los esquemas de control resultantes no cumplen la condición de estabilidad interna y por tanto serán inestables.

Con objeto de poder aplicar estas técnicas al control de sistemas inestables con retardos temporales, se han propuesto diferentes modificaciones del esquema original del Predictor de Smith, denominadas genéricamente Compensadores de Tiempo Muerto (DTC), así como diferentes intentos de bus-

car una implementación numéricamente estable de la técnica de Asignación Finita del Espectro. Destacar sin embargo, que todas estas modificaciones han consistido en soluciones parciales del problema planteado, tanto en lo concerniente a la utilización de DTC para el control de sistemas inestables de fase mínima o no mínima, como en lo concerniente a la implementación numéricamente estable de la integral de predicción utilizada en la técnica de Asignación Finita del Espectro.

En esta tesis, se plantea una solución genérica para ambos problemas. En concreto se han desarrollado los siguientes puntos:

- Se ha presentado una nueva metodología para el diseño de DTCs para el control de sistemas estables y/o inestables de fase mínima o no mínima con retardos temporales. A diferencia de propuestas anteriores, esta metodología permite un diseño de todos los controladores sin consideración del retardo, tanto en el ajuste de la ecuación característica correspondiente al seguimiento de la referencia, como en la correspondiente al rechazo de perturbaciones de carga. La robustez de los esquemas presentados, así como las prestaciones obtenidas al rechazo de perturbaciones, muestran una sustancial mejora con respecto a propuestas previas presentadas en la literatura.
- El desarrollo de un esquema de predicción-observación robusto para la implementación digital de la técnica de Asignación Finita del Espectro, eliminando el problema de la inestabilidad producido por la aproximación numérica de la integral de predicción.
- La validación experimental de los algoritmos propuestos, para el control de un mini-helicóptero de 4 rotores en vuelo libre y un prototipo de laboratorio de un helicóptero de 4 motores, sometidos ambos a retardos de actuación y/o medida. El desarrollo de un sistema empotrado para la implementación de los algoritmos propuestos sobre el mini-helicóptero de 4 rotores. Destacar que hasta la fecha de publicación de esta tesis no se ha encontrado en la literatura ninguna implementación real de un esquema de predicción o DTC sobre un proceso inestable.

Resum

Una de les majors dificultats en el disseny d'un sistema de control és sense dubte la presència de retards, especialment si el sistema que es preten controlar és inestable en bucle obert i/o de fase no mínima.

Els retards temporals poden ser intrínsecs als processos a controlar, vegeu per exemple els processos químics, biològics, columnes de destil·lació, processos amb intercanvis tèrmics, etc, o bé introduir-se al sistema de control pel propi disseny del mateix (temps de còmput de l'algorisme de control, sistemes distribuïts, control remot, xarxes de comunicacions, retards introduïts pels sensors i/o actuadors, etc.).

En general, les prestacions dels sistemes de control són molt sensibles a tots aquests retards, més encara que a altres paràmetres del model. De fet, un sistema de control en bucle tancat pot arribar a inestabilitzar-se com a conseqüència dels mateixos. La principal limitació dels sistemes amb retards al bucle de control es deriva del decrement de fase, la qual cosa porta a una inestabilitat del bucle de control a guany relativament menors que sense la presència d'eixos retards, i això implica una limitació en la magnitud de l'acció de control. Els sistemes amb retards temporals són de dimensió infinita, i la seua funció de transferència en bucle tancat té un nombre infinit de pols. És per tant molt difícil per a un regulador convencional realitzar un ajust d'aquests pols.

El Predictor de Smith [113], així com les seues múltiples extensions, i la tècnica d'Assignació Finita de l'Espectre [71], poden considerar-se com les estratègies de control més exteses per al control de sistemes lineals sotmessos a retards d'actuació i/o mesura [105, 42].

Tant el Predictor de Smith, com la tècnica d'Assignació Finita de l'Espectre, tenen en comú que realitzen una compensació del retard en base a una predicció de l'eixida, o de l'estat, a partir d'un model del sistema considerat. Si el procés a controlar és inestable, els esquemes de control resultants no compleixen la condició d'estabilitat interna i per tant seran inestables.

Amb l'objectiu de poder aplicar aquestes tècniques al control de sistemes inestables amb retards temporals, s'han proposat diferents modificacions de l'esquema original del Predictor de Smith, anomenades genèricament Compensadors de Temps Mort (DTC), així com diferents intents de cercar una implementació numèricament estable de la tècnica d'Assignació Finita

de l'Espectre. Tanmateix cal destacar que totes aquestes modificacions han consistit en solucions parcials del problema plantejat, tant pel que fa a la utilització de DTC per al control de sistemes inestables de fase mínima o no mínima, com pel que fa a la implementació numèricament estable de la integral de predicció emprada en la tècnica d'Assignació Finita de l'Espectre.

En aquesta tesi, es planteja una solució genèrica per a ambdós problemes. En concret s'han desenvolupat els següents punts:

- S'ha presentat una nova metodologia per al disseny de DTCs per al control de sistemes estables i/o inestables de fase mínima o no mínima amb retards temporals. A diferència de propostes anteriors, aquesta metodologia permet un disseny de tots els controladors sense consideració del retard, tant en l'ajust de l'equació característica corresponent al seguiment de la referència, com en la corresponent al rebuig de perturbacions de càrrega. La robustesa dels esquemes presentats, així com les prestacions obteses al rebuig de perturbacions, mostren una substancial millora respecte a propostes prèvies presentades en la literatura.
- El desenvolupament d'un esquema de predicció-observació robust per a la implementació digital de la Tècnica d'Assignació Finita de l'Espectre, eliminant el problema de la inestabilitat produït per l'aproximació numèrica de la integral de predicció.
- La validació experimental dels algorismes proposats, per al control d'un mini-helicòpter de 4 rotors en vol lliure i un prototipus de laboratori d'un helicòpter de 4 motors, sotmesos ambdós a retards d'actuació i/o mesura. El desenvolupament d'un sistema encastat per a la implementació dels algorismes proposats sobre el mini-helicòpter de 4 rotors. Cal destacar que fins a la data de publicació d'aquesta tesi no s'ha trobat en la literatura cap implementació real d'un esquema de predicció o DTC sobre un procés inestable.

Abstract

One of the main difficulties in control systems design is undoubtedly the presence of delays, and more if the system to be controlled is unstable in open loop and/or non minimum phase.

Temporal delays may be intrinsic to the process to be controlled, such as in chemical and biological processes, distillation columns, processes with thermal exchanges, and so on. Delays can also be introduced in the controller design itself (computation time of the control algorithm, distributed systems, remote control, communication networks, sensors and/or actuators induced delays, etc.).

In general, the control system performance is very sensitive to all these delays, even more than to other parameters in the model. In fact, a closed-loop control system may become unstable as a consequence of delays. The main limitation of systems with delays in the control loop is due to the induced phase change, which leads to instability with smaller gains than in the absence of delay. This implies a limitation in the control action magnitude. Systems with delay are infinite-dimensional, and thus their transfer function has an infinite number of poles. It is thus very difficult for a conventional regulator adjust these poles.

The Smith Predictor [113], as well as their multiple extensions, and the technique of Finite Spectrum Assignment [71], may be considered as the control strategies more widespread for the control of linear systems with a delay in the actuation and/or measurement [105, 42].

Smith Predictor and Finite Spectrum Assignment, have in common that they are based on a delay compensation by means of an output or state prediction from a model of the process in consideration. If the process to be controlled is unstable, the resulting controls schemes do not fulfill the internal stability condition and thus they will become unstable.

To be able to apply these techniques to the control of unstable systems with delay, several modification of the original Smith Predictor scheme have been proposed, generically denoted as Dead Time Compensators (DTC). There also have been different approaches to find a numerically stable implementation of the Finite Spectrum Assignment technique. However, all these modifications consist on partial solutions to the problem posed in both cases.

In this thesis, a generic solution for both problems has been proposed. More concretely, the following items have been developed:

- A new methodology has been developed for the DTCs design for the control of stable and/or unstable systems, either minimum or non minimum phase, with delays. Contrary to other proposals, this methodology allows the controller design without taking into consideration the delay in the tuning of the characteristic equation for reference tracking as well as in disturbance rejection. With it, a substantial improvement is achieved with respect to previous approaches.
- The development of a robust prediction scheme for the implementation of the Finite Spectrum Assignment technique, avoiding the problem of numerical instability originated by the approximation of the prediction integral.
- The experimental validation of all the developed algorithms with a 4 rotor mini-helicopter in free flight (with the development of an embedded system), and a lab prototype of a 4 rotor helicopter. To remark that, up to date, no real implementation of a prediction scheme or DTC for unstable systems has been found in the literature.

Agradecimientos

Ha sido mucha gente la que me ha apoyado de una u otra forma durante estos últimos años de intenso trabajo, si bien quisiera manifestar un especial agradecimiento al Prof. Pedro Albertos Pérez, sin cuya inestimable paciencia y ayuda nunca hubiera podido concluir esta tesis.

Esta tesis se ha desarrollado parcialmente durante una estancia de investigación en el *Laboratorio Heudiasyc de la Universidad Tecnológica de Compiègne (Francia)*, con una duración de dos meses, y en el *Departamento de Control Automático de la Universidad de Lund (Suecia)* dentro del marco de la red europea “*ARTIST2 FP6 Network of Excellence*”, por un período de cuatro meses y medio. Agradecer por ello al Prof. Alfons Crespo (Valencia), al Prof. Rogelio Lozano (Compiègne) y al Prof. Karl-Erik Arzen (Lund) el apoyo prestado en el desarrollo de la misma.

Un cariñoso recuerdo para todas las personas con las cuales compartí aquellos días, en especial para mis amigos Alejandro Dzul, Rosa y Nani, José Luis Guzmán y Oskar Nilsson, y en general para todo el personal y compañeros del Laboratorio *Heudiasyc* y del Departamento de Control Automático de Lund.

También quisiera mostrar mi agradecimiento al Prof. Tore Hägglund, Dr. Pedro Castillo y Dr. Jorge Bondía, por su inestimable apoyo en algunos momentos claves de mi tarea investigadora.

Por último, y no menos importante, quisiera mostrar mi más sincero agradecimiento a todos mis compañeros del DISA, que de una u otra forma me han ayudado al desarrollo final de esta tesis.

Agradecer al Dr. Enric Picó i Marco la traducción al valenciano del resumen de esta tesis.

Gracias a todos.

Pedro García

Índice general

Justificación y objetivos de la tesis	XIX
---	-----

Parte I Sistemas lineales con retardos temporales

1. Modelado	3
1.1. Sistemas dinámicos con retardos temporales	3
1.2. Ecuaciones diferenciales retardadas	4
1.3. Modelos lineales en variables de estado.	6
1.3.1. Modelos continuos en variables de estado.	6
1.3.2. Modelo en bucle cerrado.	8
1.3.3. Modelos discretizados en variables de estado.	9
1.3.4. Sistemas con retardos no múltiplos del periodo de muestreo:	12
1.4. Modelos en representación entrada-salida	16
2. Criterios de estabilidad	19
2.1. Introducción	19
2.1.1. Concepto de estabilidad para sistemas con retardos ...	19
2.1.2. Estabilidad dependiente o independiente del retardo ..	20
2.2. Aproximaciones en frecuencia	22
2.3. Aproximaciones temporales	26
2.3.1. Criterios de estabilidad derivados del teorema de Razimukhin	28
2.3.2. Criterios de estabilidad derivados del teorema de Krasovskii	33
2.4. Criterios de estabilidad para sistemas discretos	36
3. Estrategias de control	39
3.1. Introducción.	39
3.2. Aproximaciones a partir de reguladores con estructura fija ...	40
3.3. Esquemas basados en la compensación del retardo (DTC) ...	42
3.3.1. El Predictor de Smith.....	42
3.3.2. DTC para sistemas con un modo integrador	47
3.3.3. DTC para sistemas inestables	59

3.4. Asignación Finita del Espectro (FSA). 70

Parte II Compensadores de tiempo muerto para sistemas estables o inestables con retardos

4. DTC para el control de sistemas estables o con un modo integrador 77

4.1. Planteamiento del problema 77

4.2. Esquema de predicción estable 79

4.2.1. Esquema básico de estabilización: 80

4.2.2. Un simple DTC (SDTC) 82

4.2.3. Mejora de la robustez 83

4.3. Rechazo de perturbaciones 84

4.3.1. Sistemas estables 85

4.3.2. Sistemas integrativos 86

4.3.3. Efectos del filtro F_2 sobre el IAE 86

4.4. Ajuste del DTC propuesto 87

4.5. Simulaciones 88

4.6. Resultados experimentales 102

5. DTC para el control de sistemas estables o inestables 109

5.1. Predicción estable de un proceso inestable 109

5.2. DTC para sistemas inestables de fase mínima 110

5.2.1. Esquema de predicción 110

5.2.2. Estabilidad interna 114

5.2.3. Estabilidad robusta 116

5.2.4. Simulaciones y comparación con otros DTCs 117

5.2.5. Control de sistemas con acción integral 127

5.2.6. Rechazo de perturbaciones tipo rampa 136

5.3. DTC para sistemas de fase no mínima 138

5.3.1. Esquema de predicción 138

5.3.2. Simulaciones y comparaciones 141

5.3.3. Resultados experimentales 143

Parte III Predictor de estados MIMO para el control de sistemas estables o inestables con retardos

6. Predictor-observador de estados MIMO para el control de sistema inestables 153

6.1. Introducción 153

6.2. Errores en el retardo modelado menores que un periodo de muestreo 154

6.2.1. Esquema de predicción d-pasos hacia delante 160

6.2.2.	Esquema de control en bucle cerrado.....	161
6.2.3.	Estabilidad robusta del sistema en bucle cerrado	163
6.2.4.	Principio de separación del predictor-observador.....	164
6.2.5.	Resultados experimentales	166
6.3.	Errores en el retardo modelado mayores que un periodo de muestreo	170
6.3.1.	Sistema en bucle cerrado	173
6.3.2.	Estabilidad dependiente del retardo.....	173
6.3.3.	Estabilidad robusta del sistema en bucle cerrado	176
6.3.4.	Resultados experimentales	179
6.4.	Sistemas con multiples retardos, en las entradas/salidas y/o estados.	180

Parte IV Otras técnicas

7.	Transformaciones lineales para el control de sistemas con retardados temporales	191
7.1.	Introducción	191
7.2.	Control parcial de sistemas SISO	192
7.3.	Control parcial de sistemas con retardos temporales.....	197
8.	Predicción basada en los coeficientes del modelo a partir de la representación externa.	205
8.1.	Medidas escasas	205
8.2.	Predictor basado en los coeficientes de la representación externa	206

Parte V Plataformas experimentales

9.	Sistemas de control empotrados	217
9.1.	MaRTE OS para el desarrollo de sistemas empotrados	217
9.1.1.	Desarrollo de la plataforma.	219
9.1.2.	Evaluación.	222
9.2.	Control de un mini-helicóptero de 4 rotores	225
9.2.1.	Descripción del prototipo	225
9.2.2.	Plataforma experimental	225
9.2.3.	Esquema de control.....	227
9.3.	Control de fuerza e impacto de un robot lineal	230
9.3.1.	Descripción de la plataforma.....	230
9.3.2.	Sistema de control	231
10.	Prototipo de laboratorio de un helicóptero de 4 rotores de Quanser[©]	235

Parte VI Conclusions

11. Conclusions and future work	243
11.1. Conclusions	243
11.2. Publications derived from this thesis	245
11.3. Future work	246

Parte VII Apéndices

A. Pruebas de teoremas y lemas	249
B. Funciones de sensibilidad de los DTCs propuestos	257
Notación y acrónimos	265
Referencias	267

Justificación y objetivos de la tesis

Una de las mayores dificultades en el diseño de un sistema de control es sin duda la presencia de retardos, máxime si el sistema que se pretende controlar es inestable en bucle abierto y/o de fase no mínima.

Esta tesis se enmarca dentro del control de sistemas con retardos, y aborda el caso particular del desarrollo de predictores robustos para el control de sistemas estables y/o inestables de fase mínima o no mínima con retardos temporales.

Mención aparte de aproximaciones a partir de reguladores de estructura fija [92, 43], o soluciones polinomiales como los algoritmos de Control Predictivo [19], el Predictor de Smith (SP) [113], así como sus múltiples extensiones [97], y la técnica de Asignación Finita del Espectro (FSA) [71] o reducción del modelo de “Artstein” [12], pueden considerarse como las estrategias de control más extendidas para el control de sistemas lineales sometidos a retardos de actuación y/o medida [105, 42].¹

Tanto el Predictor de Smith, como la técnica de asignación finita del espectro, tienen en común que realizan una compensación del retardo en base a una predicción de la salida, o del estado, a partir de un modelo del sistema considerado. Si el proceso a controlar es inestable, los esquemas de control resultantes no cumplen la condición de estabilidad interna, por lo que no son viables para el control de este tipo de sistemas.

Con objeto de poder aplicar estas técnicas al control de sistemas inestables con retardos, se han propuesto diferentes modificaciones del esquema original del Predictor de Smith, denominadas genéricamente “Compensadores de Tiempo Muerto” (DTC), [123, 97, 90, 139, 121, 61, 68], así como diferentes intentos de buscar una implementación numéricamente estable de la integral de predicción utilizada en la técnica de Asignación Finita del Espectro [76, 78, 77, 79, 137].

Con objeto de poder extender el uso de los DTC al control de sistemas inestables con retardos temporales, se han propuesto diferentes modificaciones del original SP. Destacar sin embargo que todas estas soluciones han consistido en soluciones parciales del problema:

¹ La técnica de asignación finita del espectro también puede utilizarse cuando el sistema posee retardos internos o en los estados.

- bien porque sólo tratan el caso de sistemas integrativos con un único modo integral
- bien porque fallan para el control de sistemas de fase no mínima
- bien porque no consiguen “eliminar” el retardo de la ecuación característica de todas las funciones de sensibilidad del esquema propuesto

En lo concerniente a la implementación numéricamente estable de la integral de predicción utilizado en la técnica del FSA, igualmente utilizada en los esquemas de predicción propuestos en [123, 97], también han sido múltiples los intentos de búsqueda de una solución genérica del problema, si bien como apuntan varios autores [105, 137] las mismas presentan problemas de implementación numérica independientemente del nivel de aproximación de la integral utilizado [117]. En [137] se presentan dos nuevas técnicas de aproximación de la integral de predicción, mostrando por simulación que a diferencia de propuestas previas, con estas aproximaciones sí que se obtiene una respuesta estable.

En esta tesis, se plantea una solución genérica para todos estos casos. En concreto, para el desarrollo de esta tesis se plantearon los siguientes objetivos:

- El desarrollo de Compensadores de Tiempo Muerto (DTCs), para el control de sistemas estables y/o inestables de fase mínima o no mínima con retardos temporales
- El desarrollo de un esquema de predicción robusto para una implementación digital numéricamente estable de la técnica de Asignación Finita del Espectro
- La validación experimental de los algoritmos propuestos

La redacción de esta tesis se ha dividido en tres partes, con un total de 10 capítulos:

1. **Revisión del Estado del Arte:** (capítulos 1-3), donde se presentan los fundamentos de los sistemas con retardos temporales, modelado de los mismos, criterios de estabilidad y una revisión de las principales estrategias de control mencionadas anteriormente.
2. **Principales Aportaciones Teóricas:** (capítulos 4-8), donde se presentan las principales aportaciones de esta tesis en el desarrollo de predictores robustos para el control de sistemas estables o inestables.
3. **Plataformas experimentales:** (capítulos 9 y 10), donde se presentan las principales características de las plataformas desarrolladas, así como de los prototipos utilizados para la validación de los algoritmos aquí propuestos.

A continuación se realiza un desglose por capítulos del contenido de esta tesis:

En el capítulo 1 se presenta una revisión del modelado de sistemas dinámicos con retardos temporales a partir de ecuaciones diferenciales funcionales [45]. En el mismo se realiza una introducción a las ecuaciones diferenciales

funcionales retardadas, en base a las cuales es posible modelar la mayoría de los sistemas dinámicos sometidos a retardos temporales. Como caso particular, se analiza el modelado en espacio de estados de los sistemas lineales sometidos a retardos puntuales, en la entrada, en la salida, en los estados, o en cualquiera de sus combinaciones. De igual forma, se plantean los modelos derivados de la discretización de los sistemas anteriores, tanto si el periodo de muestreo es un múltiplo entero del retardo como en el caso contrario.

En el capítulo 2 se realiza una revisión de los principales fundamentos utilizados en la mayoría de los criterios de estabilidad para el análisis de los sistemas lineales con retardos temporales. Dada su relevancia, este capítulo se centra en una revisión de las principales bases de los criterios de estabilidad a partir de aproximaciones temporales [85, 55, 83, 84, 41, 42]. Estos principios son utilizados para el análisis de la estabilidad del esquema de predicción propuesto en el capítulo 6.

En el capítulo 3 se realiza una revisión de las principales estrategias de control utilizadas para el control de los sistemas lineales con retardos temporales de actuación y/o medida. Dado que las principales aportaciones de esta tesis hacen referencia al desarrollo de esquemas de predicción robustos para el control de sistemas inestables, se realiza un detallado análisis de los principales esquemas de predicción propuestos, hasta la fecha, para el control de este tipo de sistemas.

En el capítulo 4 se presentan una de las principales aportaciones de esta tesis. En concreto se propone un nuevo y sencillo esquema de predicción o DTC para el control de sistemas que presenten un modo integrador.

En el capítulo 5 se presenta otra importante aportación de esta tesis, en concreto, se propone una nueva metodología para el diseño de DTCs, para el control de sistemas estables o inestables sometidos a retardos temporales, sean estos de fase mínima o no mínima. Como se ha mencionado anteriormente, los esquemas propuestos, aparte de mostrar un mayor grado de robustez y rechazo de perturbaciones, cumplen con el "*principio de Smith*". Es decir, el diseño de todos los controladores implicados en el esquema de control, se puede realizar sin consideración del retardo. Este diseño, se podrá realizar a partir de cualquier técnica convencional de diseño de reguladores sobre un bucle simple, tanto en el dominio continuo como discreto.

En el capítulo 6 se presenta el esquema de predicción-observación propuesto para una implementación numéricamente estable de la técnica del FSA. El análisis del esquema de predicción-observación se demuestra robustamente estable ante errores de modelado en todos los parámetros del sistema de control, así como a variaciones en el periodo de muestreo. Para determinar el margen de estabilidad en función de los errores en el retardo modelado "*Delay-Dependent Stability*", se desarrolla un teorema basado en la técnica de "*Krasovski-Lyapunov*", resultando un conjunto de LMIs cuyo cumplimiento asegura la estabilidad del sistema en bucle cerrado.

En los capítulos 7 y 8 se presentan otras técnicas para el control de este tipo de sistemas. En el capítulo 7 se desarrolla una metodología que a partir de transformaciones lineales permite tratar con sistemas inestables en bucle abierto resultando en una estructura internamente estable, y en el capítulo 8 se desarrolla otra técnica, que a partir de los coeficientes de la representación entrada/salida permite realizar una predicción de la salida, permitiendo igualmente una estructura de control internamente estable. Estas técnicas, se comparan con los esquemas propuestos en los capítulos precedentes, mostrándose un menor grado de robustez de las mismas con respecto a las primeras.

Por último, en los capítulos 9 y 10 se presenta la plataforma de tiempo real y los prototipos utilizados para la validación de los algoritmos propuestos. Destacar que, en nuestro conocimiento, hasta la fecha de publicación de esta tesis no existía en la literatura ninguna implementación real de un esquema de predicción o DTC sobre un proceso inestable.

Parte I

**Sistemas lineales con
retardos temporales**

1 Modelado

1.1. Sistemas dinámicos con retardos temporales

Los retardos temporales pueden ser intrínsecos a los procesos a controlar, véase por ejemplo los procesos químicos, biológicos, columnas de destilación, procesos con intercambio térmico, etc., o bien introducirse en el sistema de control por el propio diseño del mismo (tiempo de cómputo del algoritmo de control, sistemas distribuidos, control remoto, redes de comunicaciones, retardos introducidos por los sensores y/o actuadores, etc.).

En general, las prestaciones de los sistemas de control son muy sensibles a todos estos retardos, más incluso que a otros parámetros del modelo. De hecho, un sistema de control en bucle cerrado puede llegar a inestabilizarse como consecuencia de los mismos. La principal limitación de los sistemas con retardos en el bucle de control se deriva del decremento en la fase de los mismos, lo cual conduce a una inestabilidad del bucle de control a ganancias relativamente menores que sin la presencia de esos retardos, lo que implica una limitación en la magnitud de la acción de control.

Por contra, en algunas aplicaciones de control, introducir retardos en el proceso puede que no presente ningún problema, e incluso puede contribuir a mejorar la respuesta en bucle cerrado [7, 42]. Los retardos, también se pueden introducir en el modelo del sistema para modelar procesos de orden elevado por otros de menor orden con retardos. De forma general, los sistemas de control pueden contener retardos no solamente en la entrada y/o salida del sistema, sino también en los estados.

Los sistemas con retardos temporales son de dimensión infinita, y su función de transferencia en bucle cerrado posee un número infinito de polos. Es por tanto muy difícil para un regulador convencional realizar un ajuste de estos polos. Mayores problemas aparecen cuando tratamos con sistemas multivariables con múltiples retardos, donde la normal dificultad de la interacción entre los diferentes bucles de control se ve agravada por la presencia de los mismos. La presencia de retardos de tiempo también complica el análisis teórico del diseño del bucle de control, dado que éstos son descritos por expresiones matemáticas más complejas, respecto al uso normal en control lineal de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. Éste el principal motivo por el cual el diseño de controladores para sistemas con retardos temporales es considerablemente más complejo en comparación con sistemas sin retardos.

Los sistemas con retardos temporales, pueden modelarse a partir de ecuaciones diferenciales funcionales (FDEs), aproximaciones sobre funciones de transferencia (a través del operador $e^{-\tau s}$), y en menor grado, representaciones polinomiales sobre anillos [82] y reducciones a través de transformaciones y aproximaciones algebraicas, [18, 54]. En los tutoriales dedicados a los sistemas con retardos temporales [106, 105], se puede encontrar una detallada clasificación de todos estos métodos.

En esta tesis sólo se va a considerar el modelado a partir de FDEs y funciones de transferencia.

1.2. Ecuaciones diferenciales retardadas

Es posible utilizar ecuaciones diferenciales funcionales, con terminología en inglés “*Functional Differential Equations*” (FDE), para describir el comportamiento dinámico de sistemas o procesos sometidos a retardos temporales [45]. En este tipo de funciones, el estado $x(t)$, y sus derivadas $x^{m_i}(t)$ no depende sólo del instante de tiempo “ t ”, sino que también de valores pasados de “ t ”. El modelo general de una ecuación con estas características se puede representar como:

$$x^{(m)}(t) = f(t, x^{(m_1)}(t - \tau_1(t)), \dots, x^{(m_k)}(t - \tau_k(t)))$$

Donde: $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ y $m_i \geq 0$, $\tau_i \geq 0$.

- Una primera clasificación de este tipo de sistemas podría hacerse en relación al argumento de la máxima derivada:

a) Cuando el máximo exponente de la derivada se sitúa en la variable libre de retardo $m > \max(m_1, \dots, m_k)$, la ecuación funcional se define como ecuación diferencial de tipo retardado, o ecuaciones diferenciales retardadas, con terminología en inglés respectivamente “*Retarded Functional Differential Equation*” (RFDE), o “*Delay Differential Equations*” (DDE).

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t_0)) \quad t_0 < t \quad (1.1)$$

b) Cuando $m = \max(m_1, \dots, m_k)$ la ecuación funcional se define como “*functional differential equation of neutral type*” (NDE).

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t_0), \dot{x}(t_0)) \quad t_0 < t \quad (1.2)$$

Un ejemplo de sistema neutral es:

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) + A_d x(t - \tau_d)$$

c) Cuando $m < \max(m_1, \dots, m_k)$ se define “*Functional differential equation of advanced type*” (ADE).

- Para sistemas modelados como DDEs¹, también es posible realizar una clasificación según el tipo de retardo considerado, según su número o su naturaleza.

a) **Retardos puntuales:** Un sistema con un único retardo se puede modelar como:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (1.3)$$

Donde: $x \in \mathfrak{R}^n$, $f : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $\tau > 0$

Un sistema con multiples retardos podría modelarse por la expresión:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m))$$

Un sistema con retardos múltiplos todos ellos de un retardo base:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - m\tau))$$

Donde: $m \in \mathbb{Z}^+$.

b) **Retardos distribuidos.** Algunos sistemas también pueden representarse a partir de modelos con retardos distribuidos [85]:

$$\dot{x}(t) = f(t, \int_{-\tau}^0 g(x(t+s))ds)$$

Para el caso particular de sistemas lineales, si el sistema presenta retardos distribuidos, tanto en el estado como en la entrada, éste puede ser modelado por la expresión:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{m_1} \int_{-\tau_i}^0 \tilde{A}_i(s)x(t+s)ds + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 \tilde{B}_j(s)u(t+s)ds,$$

donde $\tilde{A}(s)$ y $\tilde{B}(s)$, representan matrices funcionales.

c) **Retardos puntuales y distribuidos.** Un modelado lineal con retardos puntuales y distribuidos podría modelarse a partir de la expresión:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & A_0x(t) + \sum_{i=1}^{m_1} A_i x(t - \tau_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 \tilde{A}_j(s)x(t+s)ds \\ & + \sum_{i=1}^{m_3} A_i u(t - \tau_i) + \sum_{j=1}^{m_4} \int_{-\tau_j}^0 \tilde{A}_j(s)u(t+s)ds, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales:

$$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad \tau = \max_{i,j}(\tau_i, \tau_j)$$

¹ En esta tesis sólo se van a tratar sistemas susceptibles de ser modelados por este tipo de funciones.

- **Otros casos**, como por ejemplo aquellos que incorporen una dependencia en el retardo del tiempo y/o del estado,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t, x(t))))$$

y todas las posibles combinaciones de los casos anteriores son posibles.

Destacar, que las ecuaciones diferenciales con retardos temporales son de naturaleza infinito-dimensional, contrariamente a las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), las cuales son de naturaleza finita.

1.3. Modelos lineales en variables de estado.

1.3.1. Modelos continuos en variables de estado.

De forma genérica, un sistema lineal considerando retardos puntuales en los estados, en la acción de control y/o en la medida, se podrá modelar por las siguientes expresiones:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m_1} A_i x(t - \tau_i) + \sum_{j=0}^{m_2} B_j u(t - \tau_j) \quad (1.4)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m_3} C_k x(t - \tau_k) \quad (1.5)$$

Donde m_1, m_2, m_3 , es igual al número de retardos considerados respectivamente.

EJEMPLO 1.3.1. *Un sistema definido por las ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= bu(t - \tau) + a_1 x_2(t - \theta) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_2(t - \theta) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

es posible reescribirlo como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \theta) + B_1 u(t - \tau) \\ y &= [0 \ 1] x(t) \end{aligned}$$

Donde:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; x(t - \theta) = \begin{bmatrix} x_1(t - \theta) \\ x_2(t - \theta) \end{bmatrix}$$

◇

EJEMPLO 1.3.2. Dado el sistema definido por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_1x_2(t - \theta) + b_1u(t - \tau_1) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + a_2x_2(t) + a_3x_2(t - \theta) + bu(t) \\ y(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

es posible reescribirlo como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^1 A_i x(t - \theta_i) + \sum_{j=0}^1 B_j u(t - \tau_j)$$

Donde:

$$\begin{aligned}A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}; B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; x(t - \theta) = \begin{bmatrix} x_1(t - \theta) \\ x_2(t - \theta) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

◇

EJEMPLO 1.3.3. Dado el sistema sometido a diferentes retardos de actuación y en los estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_1x_2(t - \theta) + b_1^1u_1(t - \tau_1) + b_2^1u_2(t - \tau_2) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + a_2x_2(t) + a_3x_2(t - \theta) + b_1^2u_1(t) + b_2^2u_2(t - \tau_2) \\ y(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

es posible reescribirlo como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^1 A_i x(t - \theta_i) + \sum_{j=0}^1 B_j u(t - \tau_j)$$

Donde:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}; B_0 = \begin{bmatrix} b_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} b_1^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_2^1 \\ 0 & b_2^2 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; x(t - \theta) = \begin{bmatrix} x_1(t - \theta) \\ x_2(t - \theta) \end{bmatrix}; u(t - \tau_j) = \begin{bmatrix} u_1(t - \tau_j) \\ u_2(t - \tau_j) \end{bmatrix};$$

◇

1.3.2. Modelo en bucle cerrado.

Lema 1.3.1. *Dado el modelo lineal, con retardos de actuación, de medida y/o en los estados, representado por (1.4-1.5), y ley de control $u(t) = Kx(t)$, siempre podrá realizarse un estudio de su estabilidad a partir de la expresión:*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=0}^m A_i x(t - \tau_i) \quad (1.6)$$

Demostración: Sin ninguna pérdida de generalidad, se considera la existencia de un único retardo y ley de control $u(t) = Kx(t)$. Donde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- Modelo con retardos en los estados,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1 x(t - \tau_1) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

en bucle cerrado y con ley de control $u(t) = Kx(t)$, se obtiene:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_1 x(t - \tau_1)$$

Expresión que se ajusta a la representación (1.6).

- Modelos con retardos de medida,

$$y(t) = Cx(t - \tau_2)$$

en bucle cerrado con ley de control $u(t) = Kx(t)$, se obtiene:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t - \tau_1) + BKx(t - \tau_2)$$

o de forma compacta, con $A_2 = BK$, como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^2 A_i x(t - \tau_i)$$

Esta expresión también se ajusta a la representación (1.6).

- Modelos con retardos de actuación,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t - \tau_1) + Bu(t - \tau_2)$$

en bucle cerrado con ley de control $u(t) = Kx(t)$, se obtiene ²:

² Con este desarrollo, y de cara al estudio de estabilidad, también se puede comprobar la equivalencia en bucle cerrado de un sistema con retardo en la acción de control o en la medida.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^2 A_i x(t - \tau_i)$$

con $A_2 = BK$.

Dicha expresión se ajusta a la representación (1.6). ■

1.3.3. Modelos discretizados en variables de estado.

Dado que el retenedor más utilizado es el retenedor de orden cero (ZOH), a continuación se va a realizar una revisión de la discretización del modelo lineal (1.4-1.5) considerando únicamente este tipo de retenedor, así como las distintas situaciones que pueden presentarse.

a) Retardos en la entrada al proceso.

Sin pérdida de generalidad, se va a considerar el sistema genérico (1.4-1.5) con un único retardo de actuación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (1.7)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.8)$$

$$u_0(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (1.9)$$

Donde: $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, con τ retardo de actuación³.

Discretización: Reescribiendo la ecuación (1.7),

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t - \tau)$$

premultiplicando ambos lados por e^{-At} ,

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t - \tau) \quad (1.10)$$

e integrando la expresión entre t_0 y t , se obtiene:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda - \tau)d\lambda \quad (1.11)$$

Considerando un periodo de muestreo $T = t - t_0$, múltiplo entero del retardo ($hT = \tau$), (tal que: $kT = t_0$; $kT + T = t$), y dado que la acción de control puede considerarse constante entre intervalos de muestreo⁴, se tiene que:

³ Notar que para el modelo MIMO se está considerando que todas las entradas al sistema presentan el mismo retardo. En otro caso, se podría modelar el sistema a partir de la ecuación (1.4), considerando $\sum_{i=1}^m A_i = 0$, y los valores apropiados de las matrices B_j (ver ejemplo 1.3.3).

⁴ Se asume un retenedor de orden cero ZOH.

$$x(kT + T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\lambda)} d\lambda B u(kT - hT) \quad (1.12)$$

Aplicando el cambio de variable $kT + T - \lambda = s$, y sustituyendo, se obtiene:

$$x(kT + T) = e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{As} ds B u(kT - hT) \quad (1.13)$$

expresión que se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k-h) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

Donde:

$$\phi = e^{AT}; \quad \Gamma = \int_0^T e^{As} ds B$$

Sistema aumentado: En algunos casos va a ser de interés “eliminar” el retardo de la expresión de control, de forma que se obtenga un modelo equivalente donde el retardo desaparezca de forma explícita. Para ello, basta con realizar una ampliación de los estados del sistema incorporando las entradas pasadas desde u_{k-1} hasta u_{k-h} :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_{k-h+1} \\ u_{k-h+2} \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}_l = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{l \times l} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-h} \\ u_{k-h+1} \\ \vdots \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix} u_k$$

$$y(k) = [C \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-h} \\ u_{k-h+1} \\ \vdots \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{pmatrix}$$

Donde: $l = n + (m * h)$ (siendo n en número de estados del sistema más m entradas por h retardos).

Esta expresión es posible reescribirla como:

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A\bar{x}(k) + Bu(k) \\ y(k) &= C\bar{x}(k) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Sistema aumentado con multiples retardos: Considerando un sistema con multiples retardos de actuación:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=0}^m B_j u(t - \tau_j)$$

y operando igual que para (1.7), se puede obtener el sistema discretizado equivalente:

$$x(k+1) = \phi x(k) + \sum_{j=0}^m \Gamma_j u(k - h_j)$$

con ϕ ya definida y :

$$\Gamma_j = \int_0^T e^{As} ds B_j$$

Esta expresión, por extensión del caso anterior, también es posible reescribirla como:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_{k-h+1} \\ u_{k-h+2} \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}_l = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_h & \Gamma_{h-1} & \Gamma_{h-2} & \cdots & \Gamma_1 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{l \times l} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-h} \\ u_{k-h+1} \\ \vdots \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{pmatrix} u_k$$

$$y(k) = [C \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-h} \\ u_{k-h+1} \\ \vdots \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{pmatrix}$$

Donde: $hT = \tau$, definiéndose $\tau := \max_j(\tau_j)$.
 Notar que este sistema también admite la representación (1.14), considerando las apropiadas dimensiones de las matrices \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} .

EJEMPLO 1.3.4. Sea un sistema con dos retardos de actuación:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_0 u(t) + B_1 u(t - 0,1) + B_2 u(t - 0,2)$$

Discretizado con periodo de muestreo $T = 0,1$, se obtiene:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma_0 u(k) + \Gamma_1 u(k-1) + \Gamma_2 u(k-2)$$

que también se puede representar como:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ u(k-1) \\ u(k) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_2 & \Gamma_1 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} u(k)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \phi &= e^{AT}; & \Gamma_0 &= \int_0^T e^{As} B ds \\ \Gamma_1 &= \int_0^T e^{As} B_1 ds & \Gamma_2 &= \int_0^T e^{As} B_2 ds \end{aligned}$$

◇

b) **Retardos en la medida:** Considerando el modelo discretizado de un proceso con retardos en la medida:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k-h)$$

También es posible reescribirlo según el modelo (1.14), con nuevo vector de estados:

$$\bar{x}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-h) \end{pmatrix}$$

y los valores y dimensiones apropiadas de las matrices \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} .

1.3.4. Sistemas con retardos no múltiplos del periodo de muestreo:

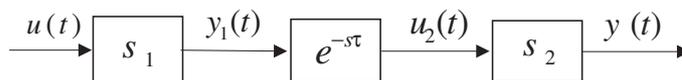


Figura 1.1. Sistema con retardo.

Para este estudio, considérese el esquema de la figura 1.1, con modelos dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S_1 : \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ y_1(t) &= C_1 x_1(t) + D_1 u(t) \end{aligned}$$

$$S_2 : \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t)$$

$$y(t) = C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t)$$

Considérese igualmente las siguientes suposiciones:

$$u_2(t) = y_1(t - \tau)$$

$$\tau = (h - 1)T + \tau'$$

$$0 < \tau' \leq T$$

Donde se define: $h \in \mathbb{Z}^+$, T como período de muestreo y τ' una fracción del período de muestreo. De esta forma, siempre se podrá representar el retardo de un sistema por un múltiplo del período de muestreo más una fracción del mismo.

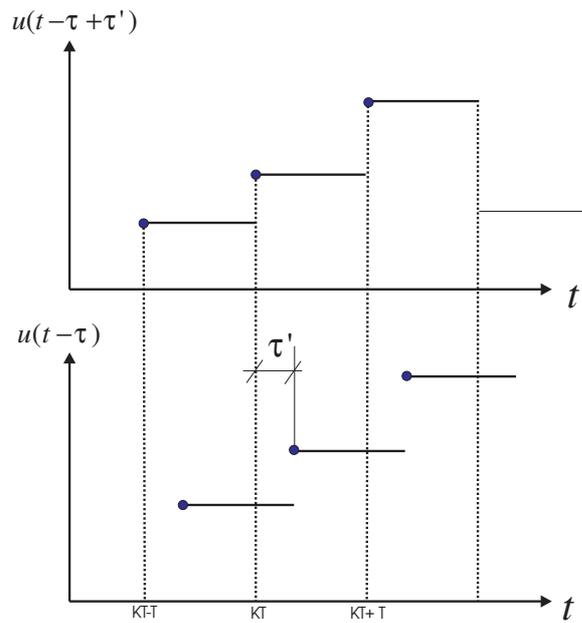


Figura 1.2. Esquema de actuación con un retardo no múltiplo del periodo de muestreo.

Para el estudio de este supuesto se van a considerar tres situaciones: que el retardo se sitúe en la entrada, en la salida o en los estados internos del sistema.

Caso 1) Retardo en la entrada al sistema. Se considera la siguiente situación:

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0$$

$$D_1 = I$$

Por simplificación, suponemos que no existe acoplamiento directo entre la entrada y la salida en el segundo sistema ($D_2 = 0$).

Discretización del sistema “S₂” (se supone conocido el estado x_2 para $t = kT$):

$$x_2(kT + T) = e^{A_2 T} x_2(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A_2(kT+T-s)} B_2 u_2(s) ds$$

Siendo $u_2(t) = u(t - \tau)$, con $u(t)$ constante entre períodos de muestreo⁵. Como se puede apreciar en la figura 1.2, y debido a la fracción del periodo de muestreo τ' , la acción de control aplicada al sistema cambia entre dos períodos de muestreo, por tanto la integral anterior puede dividirse entre esos dos intervalos. Mediante los oportunos cambios de variable en los límites de integración [15], se obtiene:

$$x_2(kT + T) = e^{A_2 T} x_2(kT) + \int_0^{\tau'} e^{A_2(T-\tau')} e^{A_2 s} B_2 ds' u(kT - dT) + \int_0^{T-\tau'} e^{A_2 s} B_2 ds u(kT - (h-1)T)$$

Omitiendo, por claridad de lectura, el parámetro T , se obtiene:

$$x_2(k+1) = \phi(T)x_2(k) + \phi(T-\tau')\Gamma(\tau')u(k-h) + \Gamma(T-\tau')u(k-h+1)$$

Donde:

$$\phi(t) = e^{A_2 t}$$

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{A_2 s} B_2 \cdot ds$$

Definiendo: $\Gamma_0 = \Gamma(T - \tau')$; $\Gamma_1 = \phi(T - \tau')\Gamma(\tau')$.

También se puede representar como:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_{k-h+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ I \end{pmatrix} u(k-h+1)$$

Si se desea eliminar completamente el retardo del modelo considerado, también se puede reescribir como:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_{k-h+1} \\ u_{k-h+2} \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}_l = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{l \times l} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-h} \\ u_{k-h+1} \\ \vdots \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{pmatrix} u_k$$

⁵ Se asume un ZOH.

Notar que este sistema también admite la representación (1.14), con las apropiadas dimensiones y valores de las matrices \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} .

Caso 2) Retardo en la salida del sistema: Por simplificación, se supone que no existe acoplamiento directo entre la entrada y la salida $D_1 = 0$.

$$\begin{aligned} A_2 &= B_2 = C_2 = 0 \\ D_2 &= I \end{aligned}$$

La discretización del sistema “ S_1 ”, es inmediata (suponemos conocido el estado x_1 para $t = kT$):

$$x_1(kT + T) = e^{A_1 T} x_1(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A_1(kT+T-s)} B_1 u(s) ds$$

Donde:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= e^{A_1 t} \\ \Gamma_1(t) &= \int_0^t e^{A_1 s} B_1 \cdot ds \end{aligned}$$

Que se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \phi_1(T)x_1(k) + \Gamma_1(T)u(k) \\ y(k) &= C_1 x_1(k - \tau) \end{aligned}$$

Este sistema también admite la representación (1.14), con la apropiada dimensión del vector de estados \bar{x} , y las apropiadas dimensiones y valores de las matrices \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} .

Caso 3) Retardo interno al sistema: Considérese el sistema de forma matricial para $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde: $A_{21} = B_2 C_1$

Discretizando este sistema, para un periodo T , se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_1(T) & 0 \\ \phi_{21}(T) & \phi_2(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_1(T) \\ \Gamma_2(T) \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\phi_{21}(T) &= \int_0^T e^{A_2\varsigma} A_{21} e^{A_1(T-\varsigma)} d\varsigma \\ \Gamma_2(T) &= \int_0^T e^{A_2\varsigma} A_{21} \Gamma_1^{(T-\varsigma)} d\varsigma\end{aligned}$$

Considerando un retardo $0 < \tau \leq T$, se obtienen las siguientes expresiones [126]:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= \phi_1(T)x_1(k) + \Gamma_1(T)u(k) \\ x_2(k+1) &= \phi_{21}(T)x_2(k-1) + \phi_2(T)x_2(k) \\ &\quad + \Gamma_2(k-1)u(k-1) + \Gamma_2(T-\tau)u(k)\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\phi_{21}(T) &= \phi_{21}(T)\phi_1(T-\tau) \\ \Gamma_2(k-1) &= \phi_{21}(T)\Gamma_1(T-\tau) + \phi_{21}(T-\tau)\Gamma_1(\tau) + \phi_2(T-\tau)\Gamma_2(\tau)\end{aligned}$$

Expresión que también es posible reescribir como::

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \Gamma_1 \\ \phi_{21} & \phi_2 & \Gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_2 \\ I \end{bmatrix} u(k) \\ \begin{pmatrix} x_1(k) \\ y(k) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Gamma_1 \\ 0 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k) \\ u(k-1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Este sistema también admite la representación (1.14), con las apropiadas dimensiones del vector \bar{x} , y de las matrices \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} .

1.4. Modelos en representación entrada-salida

Algunos sistemas lineales, o susceptibles de linealización, pueden presentar un retardo en su entrada o salida. En la mayoría de estos casos, es posible modelar ese retardo a través de las siguientes expresiones:

- Retardo en la entrada del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + b_c u(t-\tau) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1.15}$$

- Retardo en la salida del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + b_c u(t) \\ y(t) &= Cx(t-\tau)\end{aligned}\tag{1.16}$$

Donde: $A_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $b_c \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$, $\tau \in \mathbb{Z}^+$.

La función de transferencia de ambos casos (1.15) y (1.16) es:

$$G_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = G(s)e^{-\tau s} \quad (1.17)$$

Donde:

$$G(s) = C(sI - A_c)^{-1}b_c$$

Para un caso general (por ejemplo, con retardos en los estados), también es posible realizar un modelado del sistema mediante una representación entrada/salida. Dado el sistema (1.4-1.5), considerando condiciones iniciales nulas y aplicando la transformada de Laplace, se tiene:

$$y(s) = C(sI_n - A)^{-1}Bu(s)$$

Donde:

$$A = \sum_{i=0}^{m_1} A_i e^{-\tau_i s}; \quad B = \sum_{j=0}^{m_2} B_j e^{-\tau_j s}; \quad C = \sum_{k=0}^{m_3} C_k e^{-\tau_k s}$$

Con función de transferencia matricial dada por:

$$T(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$$

Comentario 1.4.1 En esta tesis sólo se van a modelar sistemas mediante funciones de transferencia cuando los retardos considerados se sitúen en la entrada y/o salida del proceso, dejando el tratamiento de sistemas con retardos en los estados para modelos en ecuaciones de estados.

2 Criterios de estabilidad

2.1. Introducción

Existen una gran variedad de métodos para determinar la estabilidad de los sistemas lineales con retardos. Entre otros, destacar los métodos analíticos derivados de una generalización del método de Hurwitz, el criterio de Nyquist y diferentes métodos para la determinación de las raíces o los autovalores del sistema en bucle cerrado. En [83, 84, 85, 42, 41] se pueden encontrar una revisión del estado del arte de todos estos métodos. Mención aparte tienen los sistemas discretos, donde pueden aplicarse tanto métodos específicos para sistemas discretos, derivados directamente de sus equivalentes continuos, como los mismos criterios de estabilidad que para los sistemas discretos sin retardo, sin más que considerar un estado ampliado de los mismos.

Existen un elevado número de trabajos concernientes a la estabilidad de los sistemas lineales con retardos. Siendo el mayor interés de los mismos establecer algún criterio de estabilidad independiente del retardo (la condición de estabilidad se mantiene para todo valor positivo y finito del retardo), o establecer algún criterio de estabilidad que sí que dependa del valor del retardo (la estabilidad se mantiene para ciertos valores del retardo, siendo inestable para otros valores).

Una posible clasificación de estos métodos sería según que las condiciones de estabilidad se deriven de aproximaciones en el dominio frecuencial (“Polynomial criteria”, “small gain theorem”, “Matrix pencils techniques”, etc.), o en el dominio temporal (principalmente métodos derivados de Lyapunov).

2.1.1. Concepto de estabilidad para sistemas con retardos

Sin pérdida de generalidad, se supone que la expresión (2.1), admite la solución trivial $x(t) = 0$, de no ser así, bastaría con realizar el cambio de variable $z(t) = x(t) - y(t)$, de forma que el nuevo sistema $\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t)$, admitiera la solución trivial $z(t) = 0$.

El sistema descrito por (2.1), con punto de equilibrio $x(t) = 0$, será estable si dado un $t_o \in \mathfrak{R}$, y un $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(t_o, \epsilon)$ tal que:

$$\|x(t_o)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_o$$

Asintóticamente estable si:

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Exponencialmente estable si existen dos números positivos $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, tal que:

$$\forall t > t_0, \|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda t}$$

Uniformemente estable si es estable y $\delta(t_0, \epsilon)$ puede ser elegido independientemente de t_0 .

Uniforme asintóticamente estable si es uniformemente estable y existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $\eta > 0$, existe un $T = T(\delta, \eta)$ tal que:

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \eta \quad \forall t \geq t_0 + T$$

Y global (uniformemente) asintóticamente estable si es uniformemente asintóticamente estable y δ , puede ser arbitrariamente grande. La estabilidad no depende de las condiciones iniciales.

Para sistemas lineales, la estabilidad asintótica siempre implica estabilidad global y exponencial.

2.1.2. Estabilidad dependiente o independiente del retardo

Al igual que para las ecuaciones diferenciales ordinarias, para la resolución de una DDE, es necesario que las condiciones iniciales se encuentren unívocamente definidas.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x_t) \\ x_{t_0} &= \phi(t) \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pero a diferencia que para una EDO donde las condiciones iniciales se definen a partir de un vector en \mathfrak{R}^n , las DDE están formuladas en el espacio finito \mathfrak{R}^n , pero de forma implícita están describiendo sistemas de dimensión infinita. De hecho, cuando la parte derecha de la ecuación (2.1), es continua en todos sus argumentos, y Lipschitz, una solución sobre el tiempo t está únicamente definida si está especificada la condición inicial sobre el segmento $[t - \tau, t]$. Las condiciones iniciales se deben definir a partir de una función $\phi \in \mathbb{C}_{n,\tau}$, donde $\mathbb{C}_{n,\tau}$, se define como el espacio de “Banach”, tal que: $\mathbb{C}_{n,\tau} \equiv \mathbb{C}([-\tau, t_0], \mathfrak{R}^n)$, sobre el intervalo $t \in [-\tau, t_0]$, donde τ , se define como el máximo retardo del modelo y t_0 , como el instante inicial (que generalmente, y sin ninguna pérdida de generalidad se considera cero).

Si consideramos, a modo de ejemplo, la ecuación escalar definida por:

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t - \tau) + u(t) \tag{2.2}$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \tag{2.3}$$

Con la función $\phi(t)$, conocida sobre el intervalo $t \in [-\tau, 0]$, es posible resolver la ecuación a tramos, como si de una EDO se tratara, para cada uno de esos intervalos considerados.

Por ejemplo, para resolver (2.2) en el intervalo $t \in [0, \tau]$, únicamente es necesario conocer $x(t - \tau)$, para $t \in [0, \tau]$, expresión conocida a partir de (2.3),

$$x(t) = e^{a_0 t} x(0) + \int_0^t e^{a_0(t-u)} [a_1 x(u - \tau) + u(u)] du \quad (2.4)$$

De igual forma, se puede volver a calcular un segundo tramo. Dado que ya se conoce la solución de $x(t)$, definida en el tramo $t \in [0, \tau]$, es posible calcular el siguiente tramo, $t \in [\tau, 2\tau]$,

$$x(t) = e^{a_0(t-\tau)} x(\tau) + \int_\tau^t e^{a_0(t-u)} [a_1 x(u - \tau) + u(u)] du \quad (2.5)$$

y así sucesivamente. Este método de resolución es conocido, con la terminología inglesa, como “*the method of steps*”.

Es posible demostrar ([45], teorema 3.1, página 16), que la solución de (2.2) se encuentra acotada exponencialmente, por lo que es posible aplicar la Transformada de Laplace con condiciones iniciales definidas por (2.3), de tal forma que:

$$sX(s) - \phi(0) = a_0 X(0) + a_1 \left[e^{-s\tau} X(0) + \int_{-\tau}^0 e^{-s(u+\tau)} \phi(u) du \right] + U(s)$$

Operando adecuadamente:

$$X(s) = \frac{1}{s - a_0 - a_1 e^{-s\tau}} \left[\phi(0) + a_1 \int_{-\tau}^0 e^{-s(u+\tau)} \phi(u) du + U(s) \right]$$

Donde:

$$\Delta(s) = s - a_0 - a_1 e^{-s\tau} \quad (2.6)$$

con terminología en inglés “*characteristics quasipolynomial*”, determinará, de forma análoga a los sistemas sin retardo, la estabilidad del sistema.

Definición 2.1.1 *Se define el exponente de estabilidad como:*

$$\alpha_0 = \max (Re(s) | \det[\Delta(s)] = 0).$$

De tal forma que, dado un $\alpha > \alpha_0$, existe un $L > 1$, tal que cualquier solución $x(t)$ de (2.2), con $h(t) = 0$ y la condición inicial (2.3) está acotada por:

$$\|x(t)\| < L e^{\alpha t} \|\phi\|_c$$

El número α_0 , es conocido como el exponente de estabilidad (“stability exponent”)

Definición 2.1.2 *Condición de estabilidad: El sistema (2.2), será estable si y sólo si $\alpha_0 < 0$.*

Esta condición es equivalente a decir que todos los polos del sistema poseen parte real negativa, que es exactamente el mismo criterio que, en el dominio de la frecuencia se utiliza para sistemas sin retardo. La diferencia radica en que, a diferencia de los sistemas sin retardo donde la ecuación característica es racional, para los sistemas con retardos la presencia del factor exponencial $e^{-s\tau}$, hace que el número de raíces del sistema sea infinito.

Si bien es importante puntualizar que esta expresión es un quasi-polinomio real en “s”, de tal forma que será posible extender las propiedades de los polinomios al estudio de los sistemas con retardos, en concreto la principal propiedad para el estudio en frecuencia de los TDS se basa en la *propiedad de continuidad del exponente de estabilidad* “ α_0 ”, con respecto al retardo τ .

Definición 2.1.3 *Estabilidad dependiente del retardo: Considérese el sistema libre de retardo $\tau = 0$, tal que el polinomio característico sea Hurwitz “ $\Delta(s) = s - a_0 - a_1$ ”, entonces, por la condición de continuidad del exponente de estabilidad se plantea, si existe, cual va a ser el mínimo valor de retardo $\bar{\tau}$, a partir del cual el exponente de estabilidad deja de ser negativo.*

$$\bar{\tau} = \text{mín}(\tau > 0 \mid \alpha_0 \geq 0).$$

Definición 2.1.4 *Estabilidad independiente del retardo: Para las mismas condiciones que el caso anterior si, $\bar{\tau} = \infty$, entonces se dice que el sistema es estable independientemente del retardo.*

Una sencilla forma de verificar el valor de $\bar{\tau}$, va a ser desarrollando diferentes métodos para determinar si existe corte del eje imaginario con la función característica $\Delta(s)$. Lo que por el principio de continuidad del exponente de estabilidad, implica que para valores de retardo $\tau \geq \bar{\tau}$, hacen que el sistema sea inestable.

2.2. Aproximaciones en frecuencia

Considérese un sistema con retardos puntuales y múltiplos enteros de un retardo base. Caso particular del modelo (1.6), definido en inglés con la terminología “*commensurate-delays*” :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{k=1}^m A_kx(t - k\tau), \quad \tau > 0 \quad (2.7)$$

Definición 2.2.1 *Es posible representar la función característica del modelo (2.7) como:*

$$a(s, e^{-s\tau}) = \sum_{k=0}^q a_k(s)e^{-ks\tau} \quad (2.8)$$

Donde:

$$a_0(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{0i}s^i, \quad a_k(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{ki}s^i, \quad k = 1, \dots, q.$$

Asumiendo que el sistema (2.7), es estable libre de retardo, el objetivo que se plantea es determinar si existe algún valor $\bar{\tau}$, para el cual las raíces de la función característica (2.8), cortan el eje imaginario. Dado que todas las raíces complejas de (2.8), están presentes junto con sus complejas conjugadas, únicamente será necesario determinar si existe corte sobre la parte positiva del eje imaginario.

$$\bar{\tau} = \text{mín} (\tau > 0 \mid a(jw, e^{-jw\tau}) = 0 \text{ para algun } w \in \Re).$$

Si bien, dado que la función $e^{-jw\tau}$ es una función periódica, esta condición también se podrá expresar como:

$$a(jw_i, e^{-\theta_i}) = 0, \quad w_i > 0, \quad \theta_i \in [0, 2\pi], \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Definiendo: $\eta_i = \frac{\theta_i}{w_i}$, se tiene que:

$$\bar{\tau} = \text{mín}_{1 \leq i \leq N} \eta_i = \text{mín} \left(\frac{\theta_i}{w_i} \mid w_i > 0 \right). \quad (2.9)$$

Criterios polinomiales: Para modelos con retardos proporcionales, el objetivo es determinar si existe algún valor de retardo $\bar{\tau}$, para el cual la función característica (2.8), posea raíces en el eje imaginario. Realizando el cambio de variable $z = e^{-s\tau}$, y escribiendo (2.8), como:

$$a(s, z) = \sum_{k=0}^q a_k(s)z^{-k}, \quad (2.10)$$

Si existe corte de la función característica (2.8), con el eje imaginario, será posible calcular el rango de estabilidad $\bar{\tau}$, a partir de la solución del polinomio $a(s, z) = 0$, para $s \in \partial\mathbb{C}_+$, $z \in \partial\mathbb{D}$. Donde el operador ∂ , se define como el límite, el contorno, del semiplano complejo \mathbb{C}_+ y del círculo unidad \mathbb{D} .

Esta condición también se puede ver a partir de la ecuación característica de (2.7),

$$\det \left(jwI_n - A - \sum_{k=1}^m A_k e^{-jwk\tau} \right) = 0, \quad w \in \Re \quad (2.11)$$

la cual se puede interpretar como una ecuación con dos variables independientes:

- una en el eje imaginario: $jw \in j\Re$,
- la segunda en el círculo unidad: $z = e^{-jw\tau}$.

Test de estabilidad 2-D: Las ideas básicas de los métodos en frecuencia, consisten en asumir la estabilidad asintótica del sistema libre de retardo, y chequear si la ecuación característica posee raíces en el eje imaginario. Entre otras, una forma consiste en reducir el número de variables de dos a uno, reduciendo entonces el problema de la estabilidad al estudio de las raíces del sistema respecto al círculo unidad.

Definición 2.2.2 *Dada la transformación bilineal:*

$$s = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$$

la cual mapea “s” desde \mathbb{C}_+ , en el círculo unidad abierto \mathbb{D} , se define:

$$b(\lambda, z) := (1 - \lambda)^n a\left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}, z\right) \quad (2.12)$$

La condición $a(s, z) = 0$, para algún $(s, z) \in \partial\mathbb{C}_+ \times \partial\mathbb{D}$, es equivalente a $b(\lambda, z) = 0$, para algún $(\lambda, z) \in \partial\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$.

Bajo esta transformación, el sistema $a(s, e^{-s\tau})$ será estable si y sólo si $b(\lambda, z)$ es estable. Es decir, si todas las raíces de $b(\lambda, z)$ se sitúan fuera del círculo unidad (pertenecen al dominio $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$). Donde \mathbb{D} , se define como el círculo unidad cerrado.

Definición 2.2.3 *Si se define el polinomio conjugado de $a(s, z)$, como:*

$$\bar{a}(s, z) := z^q a(-s, z^{-1}) \quad (2.13)$$

Por la propiedad de simetría de los números complejos, se tiene que $(s, z) \in \partial\mathbb{C}_+ \times \partial\mathbb{D}$, será una solución de $a(s, z)$, si y sólo si lo es también de $\bar{a}(s, z)$, lo cual lleva a plantear el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} a(z, z) &= 0 \\ \bar{a}(z, z) &= 0 \end{aligned}$$

de tal forma que si no existe solución, el sistema será estable independientemente del retardo, en otro caso, cuando el sistema admita solución, será posible eliminar una variable obteniendo como resultado un polinomio en una única variable. Por ejemplo, se puede eliminar “s”, obteniéndose un polinomio en “z” tal que $b(z)$, bajo este supuesto, si $b(z)$ no posee raíces unitarias el sistema será estable independiente del retardo, en otro caso se podrá determinar $\bar{\tau}$, a partir del siguiente procedimiento:

- determinar las raíces z_i , de $b(z)$,
- para cada raíz z_i , construir el polinomio $a(s, z_i)$ y determinar sus raíces $s_i \in \partial\mathbb{C}_+$

- dado que se satisface la propiedad de simetría, únicamente es necesario considerar las raíces situadas en la parte positiva del eje imaginario, $s_i = jw_i$, $z_i = e^{-\theta_i}$, para $w_i > 0$, y $\theta_i \in [0, 2\pi]$, por tanto el rango de estabilidad podrá calcularse a partir de (2.9):

$$\bar{\tau} = \min_{1 \leq i \leq N} \eta_i = \min \left(\frac{\theta_i}{w_i} \mid w_i > 0 \right).$$

Criterio de Tsytkin El sistema estable y SISO definido por:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-s\tau} \quad (2.14)$$

será estable en bucle cerrado independientemente del retardo, si y solo si:

$$|D(jw)| > |N(jw)|, \quad \forall w \in \mathfrak{R} \quad (2.15)$$

Demostración: Dado que $D(s)$ es Hurwitz, se cumple que $D(s) \neq 0$, $\forall s \in \mathbb{C}_+$, y por tanto, se debe analizar la solución de la ecuación:

$$1 + \frac{N(s)}{D(s)} e^{-s\tau} = 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+ \quad (2.16)$$

para determinar la estabilidad en bucle cerrado.

Dado que $\frac{N(s)}{D(s)} e^{-s\tau}$ es analítica en \mathbb{C}_+ , se deduce que:

$$\sup \left| \frac{N(s)}{D(s)} e^{-s\tau} \right|$$

nunca pertenecerá a ningún punto de \mathbb{C}_+ , y en conclusión:

$$\sup_{s \in \mathbb{C}_+} \left| \frac{N(s)}{D(s)} e^{-s\tau} \right| = \sup_{w \in \mathfrak{R}} \left| \frac{N(jw)}{D(jw)} e^{-jw\tau} \right| \quad (2.17)$$

y asumiendo que (2.15) se cumple, entonces:

$$\sup_{w \in \mathfrak{R}} \left| \frac{N(jw)}{D(jw)} e^{-jw\tau} \right| < 1$$

lo cual significa, en función de (2.17), que:

$$1 + \frac{N(s)}{D(s)} e^{-s\tau} \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+ \quad (2.18)$$

Este criterio indica que siendo estable el sistema en bucle abierto, este permanecerá estable para cualquier valor del retardo, si cumple la condición (2.15).

Criterios basados en el teorema de la pequeña ganancia Sin pérdida de generalidad, considérese el siguiente sistema con un único retardo:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) \quad (2.19)$$

Teorema 2.2.1 *El sistema (2.19), será estable independiente del retardo si A_0 es estable y se cumple que:*

$$\|(sI - A_0)^{-1}A_1\|_\infty < 1$$

Demostración: Se define el operador $\Delta x(t) = x(t - \tau)$, de tal forma que el sistema (2.19), con $M = (sI - A_0)^{-1}A_1$, y $\Delta(s) = e^{-s\tau}$, se puede representar según la estructura $M - \Delta$ típica utilizada en el teorema de la pequeña ganancia.

A partir del “Small gain theorem”, es conocido que la condición suficiente de estabilidad es que:

$$\|M\Delta\|_\infty < 1$$

Pero si Δ , es una perturbación no estructurada con norma $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, la condición de estabilidad sobre $M - \Delta$, se puede reformular de tal forma que, el sistema será estable si y sólo si:

$$\|M\|_\infty < 1$$

La condición de necesidad se justifica, dado que si para alguna frecuencia w , se cumple que $M(jw) \geq 1$, podrá existir una incertidumbre $\Delta(jw)$, tal que el sistema se haga inestable, es decir:

$$\det(I - M(jw)\Delta(jw)) = 0$$

Dado que $\Delta(jw) = e^{-jw\tau}$, puede tener cualquier valor para $w > 0$, pero posee un valor fijo para $w = 0$, $\Delta(0) = 1$, la condición de estabilidad del Teorema 2.2.1, se restringe a una condición suficiente, y sólo será una condición necesaria y suficiente, cuando la condición de necesidad para la frecuencia $w = 0$, se vea satisfecha con la restricción sobre $M(s)$, tal que $|M(0)| < 1$. De esta forma, se puede asegurar que se cumple el criterio de Nyquist, no existe corte con el círculo unidad y por ende con el número -1 . ■

2.3. Aproximaciones temporales

El teorema de estabilidad de Lyapunov es un método eficaz para el estudio de los sistemas dinámicos sin retardo, de igual forma, como se va a estudiar en este capítulo, también lo será para los sistemas con retardos.

Considerando el modelo general:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0 \quad (2.20)$$

$$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (2.21)$$

bajo las condiciones:

- $x_t(\cdot)$, para $t \geq t_0$, denota la restricción de $x(\cdot)$, sobre el intervalo $[t - \tau, t]$, trasladado a $[-\tau, 0]$.
- Se asume que $\phi \in \mathbb{C}_{n,\tau}$, y la función $f(t, \phi) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}_{n,\tau} \rightarrow \mathbb{R}^n$, es continua y Lipschitz en ϕ y en $f(t, 0) = 0$.
- Denotamos la solución de (2.20), por $x(t_0, \phi)$, con condiciones iniciales $(t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}_{n,\tau}$.

Existen básicamente dos ideas de como aplicar el teorema de estabilidad de Lyapunov a los sistemas con retardos temporales (TDS):

- Teorema de Razumikhin [104], al igual que para el estudio de estabilidad de los sistemas sin retardos se define una función de Lyapunov. La negatividad de la derivada de la función de Lyapunov se requiere sólo para las trayectorias definidas sobre el intervalo $[t - \tau, t]$.
- Teorema de Lyapunov-Krasovskii [55], en vez de definir una función de Lyapunov, se define una expresión funcional que dependa de x_t . La condición suficiente para la estabilidad es que la derivada de la función de Lyapunov \dot{V} , sea negativa a lo largo de toda la trayectoria del sistema.

El objetivo para ambos métodos, es poder determinar la estabilidad de un sistema, y bajo qué condiciones podrá estabilizarse el mismo. Dos tipos de condiciones son interesantes:

- Una condición que garantice la estabilidad del sistema para cualquier valor en el retardo (“*Delay Independent Stability*”).
- Una condición que garantice la estabilidad del sistema en función del retardo (“*Delay Dependent Stability*”).

Teorema 2.3.1 [Teorema de Krasovskii] *Este teorema puede considerarse como una generalización del teorema de estabilidad de Lyapunov. Considerando el modelo (2.20)-(2.21), con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, y considerando las funciones continuas y no decrecientes; $u, v, w : \bar{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$, con $u(s), v(s)$ positivas $\forall s > 0$, $u(0) = v(0) = 0$, si existe una función de Lyapunov $V(t, \phi)$, tal que:*

- a.) $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_{\mathbb{C}}), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]$
- b.) $\dot{V}(t, x_t) \leq -w(\|x(0)\|)$

Si se cumple a y b, entonces la solución trivial $x = 0$, será uniformemente estable.

Si además $w(s) > 0, \forall s > 0$, la solución trivial $x = 0$, será uniforme y asintóticamente estable.

Y por último si también se cumple que, $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$, entonces la solución trivial $x = 0$, será global uniforme y asintóticamente estable.

La condición “a”, significa que la función candidata V , es definida positiva y puede ser acotada de forma infinitesimal. La condición “b”, implica que la función candidata no va a incrementarse a lo largo de la trayectoria del sistema.

Demostración: Ver [41]. ■

Teorema 2.3.2 [Teorema de Razimukhin] Considerando de nuevo el modelo (2.20)-(2.21), y las funciones continuas y no decrecientes $u, v, w, p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $u(s), v(s), w(s)$ positivas $\forall s > 0$, $u(0) = v(0) = 0$ y $p(s) > s$ para $s > 0$, entonces, si existe una función continua $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

- a.) $u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
 b.) $\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|)$
 con $V(t + \theta, x(t + \theta)) < p(V(t, x(t))); \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]$

La solución de (2.20)-(2.21) será uniforme y asintóticamente estable. Las condiciones “a” y “b”, implican que la condición de negatividad de la función candidata V , sólo es necesaria para algunas trayectorias definidas por la evolución del sistema sobre el intervalo $[t - \tau, t]$.

Demostración: Ver [41]. ■

2.3.1. Criterios de estabilidad derivados del teorema de Razimukhin

El mayor problema se sitúa en que la derivada de la función de Lyapunov depende tanto del estado actual $x(t)$, como de $x(t - \tau)$. Por ello, la clave de este método radica en poder obtener la derivada de la función candidata sin que la misma dependa explícitamente de $x(t - \tau)$.

Este método trata de reducir las limitaciones introducidas por la naturaleza infinito-dimensional de las DDEs, introduciendo una condición más relajada respecto a la derivada de la función de Lyapunov, tal que $\dot{V} \leq 0$. Como función candidata de Lyapunov, se tiene usualmente:

$$V(x) = x^T P x \tag{2.22}$$

con P una matriz simétrica definida positiva, y con la dimensión apropiada, tal que se creen las condiciones para comprobar si el sistema en estudio es estable o no, y si éste es estabilizable o no.

Proposición 2.3.1 *Si la función de Lyapunov candidata V , se restringe a funciones cuadráticas acotadas, es posible simplificar el teorema de Razumihin como sigue:*

Un sistema sometido a un máximo retardo τ , sera asintóticamente estable si existe la función de Lyapunov V , tal que para algún $\varepsilon > 0$, se cumple:

$$V(x) \geq \varepsilon \|x\|^2 \quad (2.23)$$

y su derivada a lo largo de la trayectoria $\dot{V}(x(t))$, cumple que:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\varepsilon \|x(t)\|^2 \quad (2.24)$$

De tal forma que, para algún $p > 1$, siempre se cumplirá que:

$$V(x(t + \xi)) \leq pV(x(t)), \quad -\tau \leq \xi \leq 0 \quad (2.25)$$

Estabilidad independiente del retardo:

El modelo planteado para el estudio de estabilidad es:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) \quad (2.26)$$

Con condición inicial $x_0 = \phi$, y matrices $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Teorema 2.3.3 *El sistema representado por (2.26), sera asintóticamente estable si existe el escalar $\alpha > 0$, y la matriz simétrica P , tal que cumpla:*

$$\begin{pmatrix} PA_0 + A_0P^T + \alpha P & PA_1 \\ A_1^T P & -\alpha P \end{pmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

Demostración: Es suficiente con demostrar que se cumplen las condiciones planteadas en la proposición (2.3.1).

Dado que para que se cumpla (2.27)¹, con $\alpha > 0$, P debe ser definida positiva, se cumple la primera condición de la proposición (2.3.1).

Respecto a la segunda condición, sea la derivada de la función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= [A_0x(t) + A_1x(t - \tau)]^T Px(t) + x(t)^T P[A_0x(t) + A_1x(t - \tau)] \\ &= 2x(t)^T P[A_0x(t) + A_1x(t - \tau)] \end{aligned} \quad (2.28)$$

A partir de la expresión (2.28) no se puede determinar directamente la estabilidad, pero por la condición (2.27), de la proposición (2.3.1), se tiene que para algún $\alpha > 0$, se cumple que:

¹ Para que una matriz sea definida negativa/positiva, todos sus menores principales deben ser definidos negativos/positivos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq 2x(t)^T P[A_0x(t) + A_1x(t - \tau)] \\ &\quad + \alpha[p_x(t)^T Px(t) - x(t - \tau)^T Px(t - \tau)] \end{aligned} \quad (2.29)$$

El segundo término de la parte derecha de la desigualdad siempre va a ser positivo.

De tal forma que si se cumple (2.27) también se cumplirá la segunda condición de la proposición (2.3.1):

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\varepsilon \|x(t)\|^2 \quad (2.30)$$

■

Es necesario puntualizar que aunque (2.27) es lineal con respecto a P , para un α dado, y lineal respecto a α , para un P dado, no lo es para el par (P, α) . La forma de proceder por tanto constaría de dos pasos, en un primer paso se debería calcular el máximo $\bar{\alpha}$ tal que:

$$\begin{aligned} PA_0 + A_0P^T + \alpha P &> 0 \\ P &> 0 \end{aligned}$$

y posteriormente con un α dado entre los valores $0 < \alpha < \bar{\alpha}$, computar la LMI (2.27).

Sistema con retardos distribuidos El modelo planteado para el estudio de su estabilidad es:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \int_{-\tau}^0 A(\theta)x(t + \theta)d\theta \quad (2.31)$$

Donde $A(\theta)$ representa una función matricial de $\theta \in [-\tau, 0]$

Teorema 2.3.4 *El sistema definido por (2.31), será asintóticamente estable si existe la matriz simétrica P , la función escalar $\alpha(\theta) > 0$, para $0 \leq \theta \leq \tau$, y la función matricial simétrica $R(\theta)$, tal que:*

$$PA_0 + A_0^T P + \int_{-\tau}^0 R(\theta)d\theta < 0 \quad (2.32)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(\theta)P - R(\theta) & PA(\theta) \\ A(\theta)^T P & -\alpha(\theta)P \end{pmatrix} < 0 \quad (2.33)$$

Demostración: De forma similar a la demostración del teorema anterior se tiene que:

$$\dot{V}(x(t)) = 2x(t)^T P[A_0x(t) + \int_{-\tau}^0 A(\theta)x(t + \theta)d\theta]$$

A partir de la condición (2.48) y de la proposición (2.3.1):

$$\dot{V}(x(t)) \leq 2x(t)^T P[A_0 x(t) + \int_{-\tau}^0 A(\theta)x(t+\theta)d\theta] \quad (2.34)$$

$$+ \int_{-\tau}^0 \alpha(\theta)[px(t)^T Px(t) - x(t+\theta)^T Px(t+\theta)]d\theta \quad (2.35)$$

Y operando adecuadamente para agrupar términos, se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & x(t)^T [PA_0 x(t) + A_0^T P + \int_{-\tau}^0 R(\theta)d\theta]x(t) \\ & + \int_{-\tau}^0 (x(t) \ x(t+\theta)) \begin{pmatrix} \alpha(\theta)P - R(\theta) & PA(\theta) \\ A(\theta)^T P & -\alpha(\theta)P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t+\theta) \end{pmatrix} d\theta \end{aligned}$$

■

Estabilidad dependiente del retardo:

Para poder determinar un criterio de estabilidad función del máximo retardo, se hace uso de la fórmula de Leibnitz-Newton que establece que:

$$x(t-\tau) = x(t) - \int_{-\tau}^0 \dot{x}(t+\theta)d\theta \quad (2.36)$$

Sustituyendo adecuadamente se cumple que:

$$x(t-\tau) = x(t) - \int_{-\tau}^0 [A_0 x(t+\theta) + A_1 x(t-\tau+\theta)]d\theta \quad (2.37)$$

De tal forma que es posible reescribir el sistema (2.26) como:

$$\dot{x}(t) = [A_0 + A_1]x(t) + \int_{-\tau}^0 [-A_1 A_0 x(t+\theta) - A_1 A_1 x(t-\tau+\theta)]d\theta \quad (2.38)$$

Realizando un desplazamiento temporal, este sistema también se puede representar por:

$$\dot{y}(t) = \bar{A}_0 y(t) + \int_{-2\tau}^0 \bar{A}(\theta)y(t+\theta)d\theta \quad (2.39)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= A_0 + A_1 \\ \bar{A}(\theta) &= -A_1 A_0, \theta \in [-\tau, 0] \\ \bar{A}(\theta) &= -A_1 A_1, \theta \in [-2\tau - \tau] \end{aligned}$$

Con la condición inicial: $y(\theta) = \psi(\theta)$, $-2\tau \leq \theta \leq 0$.

Claramente se puede apreciar que la estabilidad del sistema representado por (2.39), va a implicar la estabilidad del sistema original (2.26), si bien la inversa no es cierta. Dado que el sistema transformado (2.39), es claramente un sistema con retardos distribuidos, su estudio de estabilidad será similar al caso estudiado de retardos distribuidos.

Teorema 2.3.5 *El sistema definido por (2.26), será asintóticamente estable si existen los escalares $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, y la matrices simétricas $P > 0$, R_0 , R_1 , ta que:*

$$P(A_0 + A_1) + (A_0 + A_1)^T P + r(R_0 + R_1) < 0 \quad (2.40)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_k P - R_k & P A_1 A_k \\ A_k^T A_1^T P & -\alpha_k P \end{pmatrix} < 0, \quad k = 0, 1 \quad (2.41)$$

Demostración: De forma similar a la demostración del teorema (2.3.4), se tiene que el sistema definido por (2.39), y por ende el sistema (2.26), será asintóticamente estable si existe la matriz simétrica P , $R(\theta)$ la función escalar $\alpha(\theta) > 0$, que haga que se cumpla que:

$$P\bar{A}_0 + \bar{A}_0^T P + \int_{-2\tau}^0 R(\theta) d\theta < 0 \quad (2.42)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(\theta)P - R(\theta) & P\bar{A}(\theta) \\ \bar{A}(\theta)^T P & -\alpha(\theta)P \end{pmatrix} < 0 \quad (2.43)$$

Con la matriz $R(\theta)$, y la función $\alpha(\theta) > 0$, constantes a trozos tal que:

$$\alpha(\theta) = \begin{cases} \alpha_0, & -\tau \leq \theta \leq 0 \\ \alpha_1, & -2\tau \leq \theta \leq -\tau \end{cases}$$

$$\mathbb{R}(\theta) = \begin{cases} \mathbb{R}_0, & -\tau \leq \theta \leq 0 \\ \mathbb{R}_1, & -2\tau \leq \theta \leq -\tau \end{cases}$$

■

Esta condición de estabilidad dependiente del retardo, se puede reformular de forma más sencilla según el siguiente corolario.

Corolario 2.3.1 *El sistema definido por (2.26), será asintóticamente estable si existen los escalares $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, y la matriz simétricas $P > 0$, tal que se cumpla:*

$$\begin{pmatrix} M & -P A_1 A_0 & -P A_1 A_1 \\ -A_0^T A_1^T P & -\alpha_0 P & 0 \\ -A_1^T A_1^T P & 0 & -\alpha_1 P \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Donde: $M = \frac{1}{\tau} [P(A_0 + A_1) + (A_0 + A_1)^T P] + (\alpha_0 + \alpha_1)P$

Demostración: Dividiendo la expresión (2.40) por r , y eliminando las matrices R_0 y R_1 de las expresiones (2.40)-(2.41) para $k = 0$ y $k = 1$ respectivamente se obtiene la expresión (2.44). La eliminación de las matrices R_0 y R_1 se realiza a partir de manipulaciones sobre LMIs (ver [41], página 159). ■

2.3.2. Criterios de estabilidad derivados del teorema de Krasovskii

Este método trata de extender la función de Lyapunov, tal que la misma dependa explícitamente del retardo $V(x_t)$. Se sustituye la función de Lyapunov, por una expresión funcional, donde la función candidata V depende explícitamente de la función x_t . En el caso más simple la función candidata presenta la forma:

$$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-\tau}^t x(\xi)^T S x(\xi) d\xi \quad (2.45)$$

con P y S , matrices simétricas definidas positivass.

Proposición 2.3.2 *De igual forma que para el teorema de Razumikhin, si la función candidata se restringe a una función de Lyapunov cuadrática y acotada, es posible realizar la siguiente simplificación:*

Un sistema sometido a retardos sera asintóticamente estable si existe la expresión funcional cuadrática y acotada $V(\phi)$, tal que para algún $\varepsilon > 0$, se cumple:

$$V(\phi) \geq \varepsilon \|\phi(0)\|^2 \quad (2.46)$$

y su derivada a lo largo de la trayectoria del sistema,

$$\dot{V}(\phi) = \dot{V}(x_t)|_{x_t=\phi} \quad (2.47)$$

cumple que:

$$\dot{V}(\phi) \leq -\varepsilon \|\phi(0)\|^2 \quad (2.48)$$

Demostración: La única condición omitida del teorema de Krasovskii (2.3.1), es la condición:

$$V(\phi) \leq v(\|\phi\|_c)$$

Pero dado que V , es una función cuadrática y acotada de ϕ , la condición anterior se cumple para:

$$v(\|\phi\|_c) = K \|\phi\|_c^2$$

Para un $K > 0$, suficientemente grande. ■

Sistemas sometidos a un único retardo

Teorema 2.3.6 *El sistema definido por (2.26), será asintóticamente estable si existen las matrices simetría $P > 0$, $S > 0$, y se cumple la siguiente desigualdad matricial:*

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + S P A_d \\ A_d^T P & -S \end{pmatrix} < 0 \quad (2.49)$$

Demostración:

Se propone como función de Lyapunov candidata la siguiente expresión:

$$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{-\tau}^0 x(t+\theta)^T S x(t+\theta) d\theta$$

Definiendo $P > 0$ y derivando V :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) + x^T(t) S x(t) - x^T(t-\tau) P x(t-\tau) \\ &= (Ax(t) + A_d x(t-\tau))^T P x(t) + x(t)^T P (Ax(t) + A_d(t-\tau)) \\ &\quad + x^T(t) S x(t) - x^T(t-\tau) S x(t-\tau) \end{aligned}$$

y de forma matricial:

$$\dot{V}(x_t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA + S P A_d \\ A_d^T P & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}$$

Para que se cumpla (2.49), S debe ser definida positiva $S > 0$, de tal forma que junto con $P > 0$, implica que:

$$V(\phi) \geq \varepsilon \|\phi(0)\|^2$$

Por otro lado si se cumple (2.49), implica que para un $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño se cumple que:

$$\dot{V}(\phi) \leq -\varepsilon \|\phi(0)\|^2$$

■

Comentario 2.3.1 Notar que la condición de estabilidad (2.49), es equivalente a la condición (2.27), del teorema 2.3.3 derivado de Razumikhin, con la equivalencia $S = \alpha P$. Si bien aquí, la condición de estabilidad se expresa directamente como una LMI, con lo cual su aplicación es más sencilla y útil que en el teorema 2.3.3. La desventaja con respecto a Razumikhin, es que el manejo de “time-varying delays” no es posible, siendo por contra de fácil manejo a partir de Razumikhin.

Sistema con retardos distribuidos

Teorema 2.3.7 *El sistema definido por (2.31), será asintóticamente estable si existe la matriz simétrica $P > 0$, y las funciones matriciales simétricas $R(\theta)$ y $S(\theta)$ tal que:*

$$PA_0 + A_0^T P + \int_{-\tau}^0 R(\theta) d\theta < 0 \quad (2.50)$$

$$\begin{pmatrix} \xi(\theta) - R(\theta) PA(\theta) \\ A(\theta)^T P & -\xi(\theta) \end{pmatrix} < 0 \quad \theta \in [-\tau, 0] \quad (2.51)$$

Demostración: Se propone la expresión funcional candidata:

$$V(\phi) = \phi(0)^T P \phi(0) + \int_{-\tau}^0 \left[\int_{\theta}^0 \phi(\xi)^T S(\theta) \phi(\xi) d\xi \right] d\theta$$

Con derivada a lo largo de la trayectoria del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \phi(0)^T \left[PA_0 + A_0^T P + \int_{-\tau}^0 S(\theta) d\theta \right] \phi(0) \\ &\quad + 2\phi(0)^T \int_{-\tau}^0 PA(\theta) \phi(\theta) d\theta - \int_{-\tau}^0 \phi(\theta)^T S(\theta) \phi(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Si a esta expresión se le suma y resta el término $\int_{-\tau}^0 R(\theta)$, operando adecuadamente para agrupar términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \phi(0)^T \left[PA_0 + A_0^T P + \int_{-\tau}^0 R(\theta) d\theta \right] \phi(0) \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 (\phi(0)^T \phi(\theta)^T) \begin{pmatrix} S(\theta) - R(\theta) PA(\theta) \\ A(\theta)^T P & -S(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(\theta) \end{pmatrix} d\theta \end{aligned}$$

De forma similar a la demostración del teorema (2.3.6), para que se cumpla (2.51), implica que $S(\theta) > 0$, de tal forma que:

$$V(\phi) \geq \varepsilon \|\phi(0)\|^2$$

Por otro lado si se cumple (2.50) y (2.51), implica que para un $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, se cumple que:

$$\dot{V}(\phi) \leq -\varepsilon \|\phi(0)\|^2$$

■

Comentario 2.3.2 Si se establece la equivalencia $S(\theta) = \alpha(\theta)P$, se demuestra que esta condición es similar a la equivalente del teorema (2.3.4) según Razumikhin.

Estabilidad dependiente del retardo

Teorema 2.3.8 *El sistema definido por (2.26), será asintóticamente estable si existen las matrices simétricas $P > 0$, R_0 , R_1 , S_0 , S_1 , tal que:*

$$\begin{pmatrix} M & -PA_1A_0 & -PA_1A_1 \\ -A_0^T A_1^T P & -S_0 & 0 \\ -A_1A_1P & 0 & -S_1 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.52)$$

Donde: $M = \frac{1}{\tau} [P(A_0 + A_1) + (A_0 + A_1)^T P] + S_0 + S_1$

Demostración: Se tiene que si el sistema definido por (2.39) es estable, también lo será el sistema (2.26). Si se aplica el teorema anterior (teorema 2.3.8) sobre el sistema equivalente con matrices:

$$R(\theta) = \begin{cases} R_0, & -\tau \leq \theta \leq 0 \\ R_1, & -2\tau \leq \theta \leq -\tau \end{cases}$$

$$S(\theta) = \begin{cases} S_0, & -\tau \leq \theta \leq 0 \\ S_1, & -2\tau \leq \theta \leq -\tau \end{cases}$$

Se obtiene la condición:

$$P(A_0 + A_1) + (A_0 + A_1)^T P + r(R_0 + R_1) < 0 \quad (2.53)$$

$$\begin{pmatrix} S_k P - R_k P A_1 A_k \\ A_k^T A_1^T P & -S_k P \end{pmatrix} < 0, \quad k = 0, 1 \quad (2.54)$$

De forma similar a la demostración del corolario (2.3.1), si se divide (2.53) por τ , y se eliminan las matrices R_0 , R_1 de las expresiones (2.53) y (2.54), se obtiene la condición (2.52) ■

Comentario 2.3.3 La correspondiente condición de estabilidad según Razumikhin (corolario 2.3.1), se puede obtener con la restricción $S_k = \alpha_k P$. La condición derivada de Krasovskii es menos conservativa, y computacionalmente menos costosa (la condición 2.52 es ya una LMI), que la correspondiente condición de Razumikhin (2.44), si bien, esta última condición sí que va a ser válida para el tratamiento de “time-delay varying”, mientras que la derivada de Krasovskii no lo será.

2.4. Criterios de estabilidad para sistemas discretos

El máximo interés práctico de los criterios de estabilidad sobre sistemas con retardos temporales hacen referencia a la estabilidad dependiente del retardo. Como se ha visto anteriormente, la clave para la obtención de criterios

de estabilidad dependientes del retardo radica en la bien conocida fórmula de Leibnitz-Newton:

$$x(t - \tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds = x(t) - \int_{t-\tau}^t \sum_{l=0}^m A_l x(s - \tau_l) ds$$

De forma similar, la clave para el desarrollo de criterios de estabilidad dependientes del retardo, sobre modelos discretizados radica en la siguiente equivalencia:

$$x_{k-h} = \left(x_k - \sum_{j=k-h+1}^k [x(j) - x(j-1)] \right)$$

Donde: $\tau = hT$. El resto del procedimiento es exactamente igual que para su equivalente en continuo, y consiste en buscar una función candidata de Lyapunov $V(k)$, tal que se cumpla que $\Delta V(k) < 0$.

Para más detalles, véase el Teorema del Apéndice A, desarrollado en esta tesis para el análisis de estabilidad del esquema de predicción propuesto en el capítulo 6.

3 Estrategias de control

3.1. Introducción.

El desarrollo de estrategias para el control de sistemas con retardos temporales es una disciplina ampliamente tratada . En el monográfico de Niculescu [85], y en los tutoriales de Richard et al. [106], y Richard [105] se puede encontrar una detallada clasificación de todas ellas.

Las principales aportaciones de esta tesis se enmarcan dentro del estudio de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo sometidos a retardos de actuación y/o medida. Por tanto, en este capítulo únicamente se va a realizar una revisión de las principales, o más populares, estrategias de control existentes para el control de este tipo de sistemas.

Mención aparte de aproximaciones a partir de reguladores de estructura fija [92, 43], o soluciones algebraicas en el dominio discreto como los algoritmos de Control Predictivo [19], el Predictor de Smith (SP) [113], así como sus múltiples modificaciones [123, 97, 14], y la técnica de Asignación Finita del Espectro (FSA) [71], pueden considerarse como las estrategias de control más extendidas para el control de sistemas lineales sometidos a retardos de actuación y/o medida [105, 42], si bien todas estas técnicas tienen en común que realizan una compensación del retardo en base a una predicción de la salida, o del estado, a partir de un modelo del sistema considerado. El problema surge cuando el proceso a controlar es inestable, dado que, los esquemas de control resultantes no cumplen la condición de estabilidad interna, lo que implica un sistema en bucle cerrado inestable.

Destacar, por tanto, que el control de procesos inestables con retardos temporales se consideraba todavía un tema sin resolver satisfactoriamente [42, 105], y es en base a esta limitación, sobre la cual se ha desarrollado la mayor parte de esta tesis, habiéndose obtenido resultados novedosos al respecto.

3.2. Aproximaciones a partir de reguladores con estructura fija

Los reguladores tipo PID (3.1), son los de mayor implantación en las aplicaciones industriales. Éstos pueden ajustarse tanto usando métodos empíricos (reglas de Ziegler & Nichols), como analíticamente [14].

$$PID(t) = k \left(1 + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(L)dL + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (3.1)$$

Para el control de sistemas sometidos a retardos temporales, los reguladores tipo PID pueden ser utilizados como elementos de predicción, donde la predicción sobre la evolución del proceso se realiza mediante el término derivativo T_d , por lo tanto la acción de control obtenida es proporcional a la estimación del error de control en el instante de tiempo $t + T_d$.

En [93], y en las referencias que ahí se citan, se puede encontrar un detallado estudio del estado del arte en la aplicación de los reguladores tipo PID al control de procesos con retardos temporales. Recientemente en [43], también se presenta un monográfico dedicado a este campo.

Destacar que la predicción obtenida mediante la derivada de las variables medidas no es muy efectiva cuando el retardo de tiempo del proceso es elevado, con respecto a la constante de tiempo dominante del sistema, en estos casos la derivada de la variable de salida del proceso no ofrece suficiente información sobre su evolución, además se debe tener en cuenta el efecto perjudicial del ruido sobre la derivada de una variable medida [14].

La aproximación de Padé

Considerando el esquema de la figura 3.1, donde $K(s)$ puede representar cualquier regulador convencional, se obtiene la siguiente expresión de bucle cerrado:

$$M(s) = \frac{K(s)G(s)e^{-Ls}}{1 + K(s)G(s)e^{-Ls}} \quad (3.2)$$

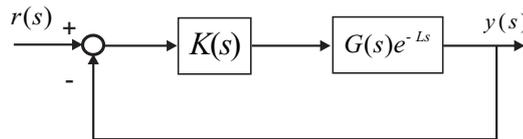


Figura 3.1. Esquema de control de un bucle simple.

Si se desea realizar un diseño analítico del regulador $K(s)$, el denominador de la expresión (3.2) debe ser una expresión racional (número finito de

ceros y polos), por contra la presencia de un retardo convierte dicha expresión en una de naturaleza irracional (número infinito de polos y ceros).

Una posible solución consiste en realizar una aproximación del retardo por una expresión racional. Esta idea da lugar a la técnica de aproximación de Padé. La técnica de Padé se utiliza para la aproximación de un retardo por una función de transferencia racional. Esta aproximación puede ser utilizada, tanto en la fase de análisis como de diseño del sistema en bucle cerrado.

Dado que esta aproximación convierte un modelo con retardo a un expresión racional libre de retardo, es posible aplicar tanto los métodos de análisis como de diseño sobre sistemas libres de retardo.

Es conocido que la expansión según Taylor del término e^{-Ls} es:

$$e^{-Ls} = \frac{e^{-\frac{Ls}{2}}}{e^{\frac{Ls}{2}}} = \frac{1 - \frac{Ls}{2} + \frac{(\frac{Ls}{2})^2}{2} + \dots + \frac{(\frac{Ls}{2})^n}{n!} + \dots}{1 + \frac{Ls}{2} + \frac{(\frac{Ls}{2})^2}{2} + \dots + \frac{(\frac{Ls}{2})^n}{n!} + \dots}$$

A partir de esta expresión, se define la aproximación de Padé como:

$$e^{-Ls} \cong \frac{1 - \frac{Ls}{2} + \dots + \frac{(\frac{Ls}{2})^n}{n!}}{1 + \frac{Ls}{2} + \dots + \frac{(\frac{Ls}{2})^n}{n!}} \quad (3.3)$$

Donde: n representa el orden de aproximación de la misma.

Por ejemplo, usando la aproximación de Padé de primer orden:

$$e^{-Ls} \cong \frac{2 - Ls}{2 + Ls} \quad (3.4)$$

La expresión $G(s)e^{-Ls}$, también se puede representar como:

$$G(s)e^{-Ls} \cong G(s) \frac{(2 - Ls)}{(2 + Ls)} \quad (3.5)$$

De forma que, tanto el diseño del regulador $K(s)$, como el análisis del sistema en bucle cerrado podrá realizarse sobre un modelo libre de retardo.

Destacar sin embargo, que esta aproximación no es válida para retardos elevados¹, y que la misma puede ser causa de una bajas prestaciones e incluso de inestabilidad [43].

Concluir por tanto que los reguladores convencionales, como el PID, pueden ser empleados cuando el sistema presenta retardos no muy elevados con respecto a la constante de tiempo dominante del sistema, pero si el proceso incorpora retardos de tiempo significativos se obtendrá un rendimiento pobre o incluso puede darse la inestabilidad del sistema [43]. En estos casos, es conveniente usar algún tipo de esquema de compensación del retardo [46, 50].

¹ A partir de este punto cuando se hable de retardos pequeños o elevados, siempre se hará en referencia a la constante de tiempo dominante del sistema considerado.

3.3. Esquemas basados en la compensación del retardo (DTC)

Para sistemas con retardos elevados, si se desea realizar un diseño analítico del regulador, una alternativa al bucle simple (con una aproximación de la exponencial), se basa en una “compensación” de los retardos. Esta metodología fue propuesta inicialmente por Smith en 1957 [113], y se conoce popularmente como Predictor de Smith (SP). Destacar que el SP es una estructura de control predictiva, con un horizonte de predicción igual al retardo del sistema considerado, por lo que en la actualidad no se considera un controlador predictivo, sino un compensador de tiempo muerto, con terminología en inglés “*Dead-Time Compensator*” (*DTC*).

3.3.1. El Predictor de Smith

Esta estrategia asume que el retardo puede representarse tanto en la entrada del proceso como en la salida.

Suponiendo que todos los retardos del sistemas se sitúan en la entrada y/o salida del proceso y que su magnitud es conocida, la función de transferencia del mismo se puede representar como:

$$G_p(s) = G_r(s)e^{-L_r s}$$

cuya representación en diagrama de bloques admite la descomposición de la figura 3.2, donde se puede observar que la variable $y(t)$ tendrá los valores de $y_p(t)$, con L_r instantes de tiempo de retraso.

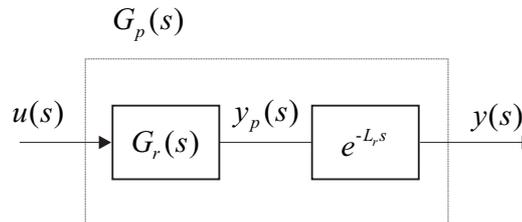


Figura 3.2. Descomposición del modelo del proceso en parte racional y retardo.

Dado que un retardo no provoca ningún cambio de magnitud, si se pudiera obtener el valor de la variable en el punto $y_p(t)$, y realimentar ésta sobre el proceso, tal y como se muestra en la figura 3.3, se podría realizar el diseño del controlador sin consideración del retardo. Pero evidentemente, esta variable es inaccesible, sólo es posible disponer de la medida de la salida $y(t)$.

Como solución a este problema, se plantea la posibilidad de obtener los valores de $y_p(t)$, a través de una predicción de los mismos. Si bien, en principio esto sólo será posible si se dispone de un modelo del proceso,

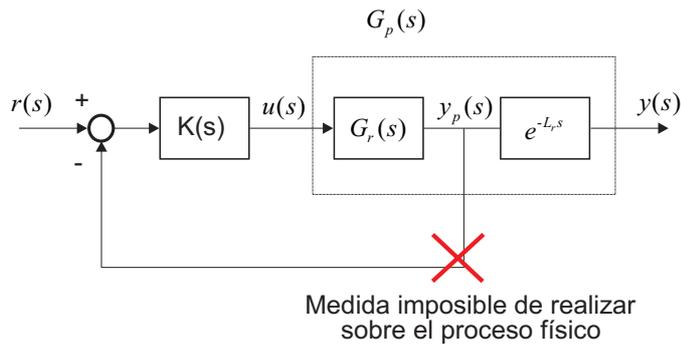


Figura 3.3. Esquema de medida ficticio para sistemas con retardos temporales.

$$G_p(s) = G(s)e^{-Ls} \quad (3.6)$$

A partir de un modelo del proceso sin retardo, si se aplica la acción de control, se obtiene la predicción de la salida sin retardo $\hat{y}_p(s) = G(s)u(s)$, lo que permite realizar una predicción de los valores de la salida, con L instantes de tiempo de adelanto sobre la salida del proceso real.

Si se representa esta idea (figura 3.4), se observa que se está realizando un control en bucle abierto, con lo cual no se estarían aprovechando las ventajas de los sistemas realimentados.

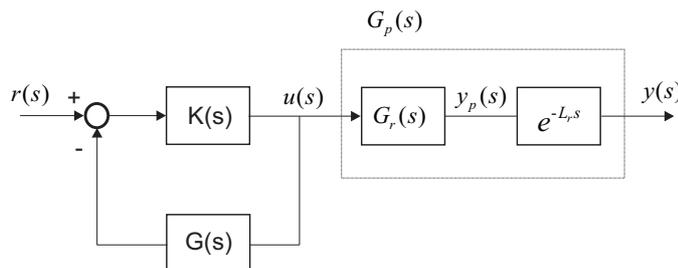


Figura 3.4. Control a partir de una predicción de la variable controlada.

Para incorporar la medida de la variable controlada, y obtener en consecuencia un sistema realimentado, se plantea la estructura de la figura 3.5, donde la variable controlada $y(t)$, se compara con la predicción retrasada L instantes de tiempo $\hat{y}_p(t - L)$, de tal forma, que las posibles discrepancias o perturbaciones entre el modelo y el proceso real se realimentan sobre el sistema de control como un factor corrector sobre las discrepancias en la predicción.

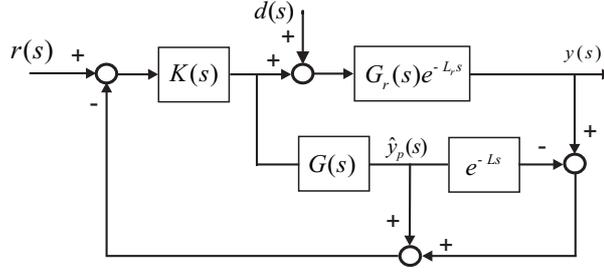


Figura 3.5. Control a partir del Predictor de Smith.

La realización de este tipo de control requiere un modelo, y al igual que en todos los diseños, cuanto más preciso sea el modelo, mejor será la predicción.

Limitación del Predictor de Smith: A partir del esquema de la figura 3.5, se obtienen las siguientes expresiones:

$$y(s) = \frac{K(s)G_r(s)e^{-L_r s}}{1 + K(s)(G(s) - G(s)e^{-L s} + G_r(s)e^{-L_r s})}r(s) + \frac{(1 + K(s)G(s) - K(s)G(s)e^{-L s})G_r(s)e^{-L_r s}}{1 + K(s)(G(s) - G(s)e^{-L s} + G_r(s)e^{-L_r s})}d(s) \quad (3.7)$$

Donde $G_r(s)e^{-L_r s}$ representa el proceso real, $K(s)$ cualquier controlador, y los bloques $G(s)$, $e^{-L s}$ el modelo del proceso libre de retardo y el modelo del retardo respectivamente.

Como es habitual cuando se derivan las fórmulas de ajuste del controlador, se asume que el modelo es una perfecta representación del proceso real $G(s)e^{-L s} = G_r(s)e^{-L_r s}$, entonces la expresión (3.7) se puede reescribir como:

$$y(s) = \frac{K(s)G(s)e^{-L s}}{1 + K(s)G(s)}r(s) \quad (3.8)$$

$$+ \left(1 - \frac{K(s)G(s)e^{-L s}}{1 + K(s)G(s)}\right)G(s)e^{-L s}d(s) \quad (3.9)$$

A partir de la expresión de la ecuación (3.8), se puede observar que el controlador $K(s)$ se puede diseñar sin consideración del retardo. Notar que la expresión del retardo no aparece en el denominador de la f.d.t. en bucle cerrado.

Es importante destacar que el Predictor de Smith tiene algunas limitaciones, entre otras, es muy sensible a perturbaciones, no es viable para el tratamiento de retardos en los estados, presenta problemas de rechazo de perturbaciones en procesos con acción integral y sobre todo no puede utilizarse en sistemas con polos inestables [97, 74].

Inestabilidad del Predictor de Smith: Notar que en la expresión de la ecuación (3.9), incluso para el caso ideal, si $G(s)$ tuviera algún polo inestable, el sistema en bucle cerrado también sería inestable.

Esta situación también se puede apreciar en una representación discretizada del esquema del SP en espacio de estados. Considérese, por ejemplo, el siguiente sistema:

$$G(s)e^{-0,1s}$$

Si se realiza una discretización, con un periodo de muestreo $T = 0,1s$, se obtiene:

$$G(z)z^{-1},$$

con representación en el espacio de estados:

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_{k-1}, \quad (3.10)$$

que también es posible reescribir como:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k = \bar{A}X_k + \bar{B}u_k \quad (3.11)$$

Implementando un SP, y considerando el caso ideal, es decir el modelo es exacto al proceso, se obtiene:

$$\hat{G}(z) - \hat{G}(z)z^{-1} + G(z)z^{-1} = \hat{G}(z)$$

con representación en el espacio de estados:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + bu_k \quad (3.12)$$

y ley de control $u_k = -K\hat{x}_k$. Sustituyendo la ley de control sobre el predictor (3.12) y el sistema ampliado (3.11), se obtiene:

$$\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{B}K \\ 0 & (A - bK) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{x}_k \end{pmatrix}$$

donde se puede apreciar que en bucle cerrado se mantienen los autovalores del sistema original en bucle abierto, y por tanto la inestabilidad del sistema en bucle cerrado.

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & b & 0 \\ 0 & 0 & -K \\ 0 & 0 & (A - bK) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-1} \\ \hat{x}_k \end{pmatrix}$$

Procesos con un modo integrador: Mediante una sencilla manipulación algebraica, es posible reescribir la expresión (3.9) como:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{G(s)e^{-Ls}}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.13)$$

$$+ \frac{K(s)G(s)e^{-Ls}}{1 + K(s)G(s)} (G(s) - G(s)e^{-Ls})d(s) \quad (3.14)$$

Teorema 3.3.1 *Sea $G(s)$ cualquier función de transferencia estable, considérese un regulador genérico $K(s)$ con acción integral. El sistema en bucle cerrado, tendrá error nulo en régimen permanente, ante perturbaciones de tipo escalón en $d(s)$, sí y sólo sí:*

$$\lim_{s \rightarrow 0} (G(s) - G(s)e^{-Ls}) = 0 \quad (3.15)$$

Demostración: La condición suficiente es obvia, dado que la acción integral del controlador $K(s)$ implica que la expresión (3.13) se anula en régimen permanente. Por tanto será suficiente que el límite (3.15) sea cero para que la expresión (3.14) también sea cero en régimen permanente. Para probar la necesidad, notar que la parte integral del controlador $K(s)$ en la expresión (3.14) se cancela, por tanto, para que esta expresión (3.14) se anule en régimen permanente el límite (3.15) también debe ser cero. ■

Lema 3.3.1. *Considérese un sistema $G(s)$ con un polo en el origen, tal que $G(s) = \frac{G_s(s)}{s}$, entonces se cumple que:*

$$\lim_{s \rightarrow 0} (G(s) - G(s)e^{-Ls}) = \lim_{s \rightarrow 0} G_s(s)L$$

Demostración: ²

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} (G(s) - G(s)e^{-Ls}) &= \lim_{s \rightarrow 0} G_s(s) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ls} \right) = \\ \lim_{s \rightarrow 0} G_s(s) \left(\frac{1 - e^{-Ls}}{s} \right) &= \lim_{s \rightarrow 0} G_s(s)L \end{aligned}$$

■

Comentario 3.3.1 *Por el Lema anterior se puede concluir que, para un sistema con un modo integral, la implementación de una estructura de control a partir de un SP, implicará un error en régimen permanente no nulo ante perturbaciones en la entrada del sistema.*

² Este límite se resuelve por L'Hopital.

El esquema básico del Predictor de Smith, posee importantes propiedades para el tratamiento de los sistemas con retardos, pero es importante añadir que también tiene importantes limitaciones [1, 97, 74].

El problema del SP radica en que éste se desarrolla bajo un esquema con un único grado de libertad, y a partir de un modelo del proceso. Bajo tales circunstancias, un SP diseñado para un buen seguimiento de la referencia posee bajas prestaciones al rechazo de perturbaciones y viceversa. Igualmente un mal modelado va a implicar una bajas prestaciones, y como se ha visto anteriormente, si el proceso es inestable el sistema resultante en bucle cerrado también será inestable.

En este sentido, desde la aparición del primer artículo sobre el SP, han sido y siguen siendo muchos los artículos que tratan de superar, o mejorar, estas carencias. El objetivo de los mismos se basa principalmente en:

- Mejora de la robustez frente a errores de modelado.
- Ajuste óptimo de los parámetros del regulador.
- Control de procesos con un modo integrador.
- Control de procesos inestables.

En esta tesis se van a tratar las dos últimas limitaciones.

3.3.2. DTC para sistemas con un modo integrador

La principal ventaja del esquema de predicción del SP es que el retardo es eliminado de la ecuación característica. Con lo cual, el problema original de un sistema con retardo se puede transformar en uno equivalente sin retardo. Sin embargo, como ya fue observado por Watanabe e Ito [123], el SP no puede ser utilizado para sistemas integradores si se desea un rechazo de perturbaciones en régimen permanente (ver Lema 3.3.1).

Para solucionar esta limitación, en [123] se propuso una modificación del modelo libre de retardo utilizado en la implementación del bucle interno del SP. El controlador principal podía ser un PI o un PID. Posteriormente, en un trabajo presentado por Astrom [13] se propuso una modificación de la estructura del original SP, esta nueva estructura tiene la propiedad de que permite desacoplar la respuesta del sistema ante perturbaciones con respecto al set-point, y como consecuencia, permite un diseño que mejorará la respuesta del sistema ante perturbaciones.

Matausek et al. [72, 73] también presentan una estructura similar a la previamente presentada por Astrom, pero incluyendo una realimentación del error de predicción³ sobre la entrada a la planta.

En [115], se presenta un esquema similar al previamente presentado por Astrom, pero con un bucle adicional entorno al proceso a controlar. Si bien se obtienen resultados similares que con los esquemas previos, la estructura es más compleja, y la adición de una acción derivada, sobre el error de

³ Diferencia entre la salida de la planta y la salida del modelo de la planta.

predicción, representa una desventaja dada la amplificación de los ruidos de medida.

En el trabajo presentado por Normey-Rico et al. [89] se presentó un esquema de predicción con dos grados de libertad, “*Two-Degree-of-Freedom*” (2DoF), para el control de sistemas con un modo integrador. Este esquema es similar al previamente propuesto por [123], pero con un filtro en el set-point. Los resultados obtenidos son similares a los obtenidos con propuestas previas [13, 123, 72, 73], pero las fórmulas de ajuste del DTC son más simples y tienen en cuenta la robustez en las prestaciones del regulador.

En [90], Normey-Rico y Camacho presentaron una modificación del esquema inicialmente presentado en [89], pero usando un filtro diferente en el set-point. Este esquema también se presentó como una unificación para el control de sistemas estables o con un modo integrador. El esquema propuesto se demuestra superior a los previamente propuestos en la literatura, pero en principio y al igual que los esquemas previos, su aplicación se restringe sólo a procesos modelados por sistemas de primer orden más un retardo (FOPDT) o sistemas integradores más un retardo (IPDT).

En esta línea, mencionar también el esquema presentado en [24], si bien destacar, que posteriormente en [88] es matizada su originalidad.

En el artículo de Zhong et al. [139] se presenta un esquema de predicción que no se deriva directamente del clásico SP, ni de su principio básico (estimación de la variable controlada a partir de un modelo libre de retardo). Este esquema, con dos grados de libertad, se diseña como un observador sobre la variable de perturbación de entrada al proceso. Como inconvenientes del esquema propuesto, destacar que el esquema original es no casual y puede presentar problemas de estabilidad interna, como consecuencia de ello, es necesario realizar la implementación a partir de un esquema equivalente. En esta línea, en [136] se presenta una nueva propuesta de implementación que se justifica como una mejora sobre la inicialmente propuesta en [139]. Como principales ventajas de esta estructura destacar que, hasta la fecha de su publicación, se presenta como el DTC con el que mejores prestaciones se obtienen, a partir de un diseño sencillo y todo ello a partir de una estructura relativamente simple. Destacar también que, permite un diseño a partir del modelo nominal del proceso, y que puede ser diseñado para el rechazo de perturbaciones de naturaleza arbitraria.

Paralelamente al trabajo presentado en [139], el mismo autor, también presenta otro esquema de predicción en [136], si bien se demuestra que la función de transferencia entre la perturbación y la referencia es la misma, y que si el diseño de los reguladores correspondiente al set-point de ambos esquemas se realiza adecuadamente también es posible obtener la misma respuesta y grado de robustez. Destacar que estos esquemas, sólo permiten el diseño sobre sistemas con un único modo integrador y de fase mínima.

En cualquier aplicación real los algoritmos de control son implementados sobre algún tipo de dispositivo digital [15]. A pesar de este hecho, la ma-

yoría de las contribuciones concernientes a los DTC únicamente analizan el caso continuo. El primer trabajo que trató con el análisis de estabilidad de DTC discretizados fue presentado por Palmor [96], y después del mismo, sólo algunos autores han analizado esta materia [116].

Recientemente en [116], se trata este asunto, donde se realiza un exhaustivo análisis del proceso de discretización del esquema inicialmente presentado en [139]. Las reglas de diseño de los controladores presentadas en [116], determinan un compromiso entre robustez y pérdida de prestaciones, permitiendo a su vez una mínima degradación de las prestaciones del bucle cerrado manteniendo un determinado grado de robustez cuando exista una limitación en el periodo de muestreo.

A continuación se realiza un análisis detallado de los métodos referenciados anteriormente más relevantes.

DTC propuesto por Watanabe e Ito [123]: Disponer de modelos sencillos que representen el comportamiento del proceso real es muy importante en el mundo industrial. Por ello, algunos procesos industriales son comúnmente modelados como sistemas de primer orden más un retardo, o simplemente como un integrador más un retardo (IPDT):

$$G(s) = \frac{k_v}{s} e^{-Ls}$$

En este tipo de modelos, el retardo no sólo representa la posible existencia de retardos intrínsecos al propio proceso, sino que también sirven para modelar la dinámica no modelada del proceso.

Para estos modelos, han sido varias las modificaciones que sobre el original SP se han presentado en la literatura. El primer trabajo relevante en este sentido fue el presentado por Watanabe e Ito [123] (figura 3.6).

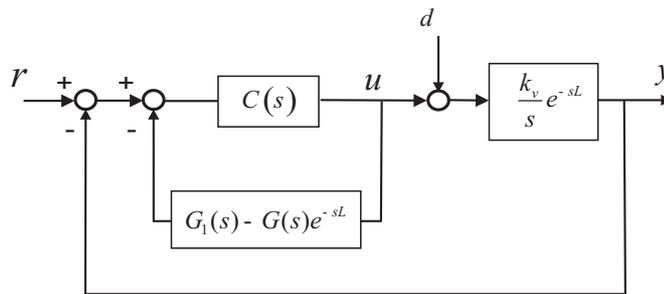


Figura 3.6. DTC propuesto por Watanabe e Ito.

La modificación propuesta, consistió en considerar el siguiente modelo:

$$G_1(s) = \frac{k_v(1 - Ls)}{s} \tag{3.16}$$

Siendo la relación entre la variable controlada y la perturbación de carga:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{G(s)e^{-Ls}}{1 + C(s)G_1(s)} + \frac{C(s)G(s)e^{-Ls}}{1 + C(s)G_1(s)}(G_1(s) - G(s)e^{-Ls})d(s)$$

De tal forma que al aplicar el límite sobre la expresión $(G_1(s) - G(s)e^{-Ls})$, considerando el nuevo modelo libre de retardo propuesto por Watanabe e Ito (3.16), se obtiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{k_v(1 - Ls)}{s} - \frac{k_v}{s} e^{-Ls} \right) = 0 \quad (3.17)$$

Con lo cual se asegura un error en régimen permanente nulo ante errores de tipo escalón en la perturbación $d(s)$.

DTC propuesto por Astrom et al. [13]: En la estructura propuesta por Astrom et al. (figura 3.7), la función de transferencia entre la referencia $r(s)$ y variable controlada $y(s)$ es:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k}{s + k} e^{-sL} \frac{(1 + M(s)\frac{1}{s}e^{-sL})}{(1 + M(s)\frac{1}{s}e^{-sL})} = \frac{k}{s + k} e^{-sL} \quad (3.18)$$

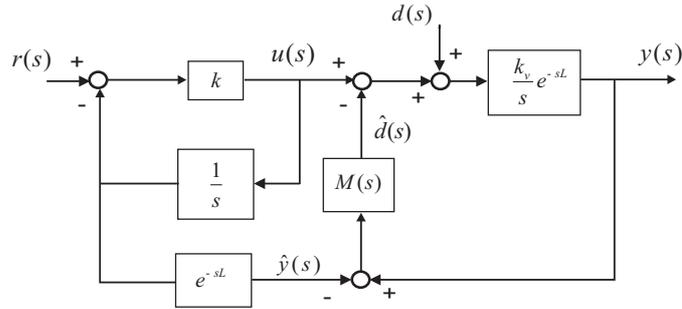


Figura 3.7. DTC propuesto por Astrom et al.

Y la función de transferencia entre la perturbación d y la variable controlada y :

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{\frac{1}{s}e^{-sL}}{1 + M(s)\frac{1}{s}e^{-sL}} \quad (3.19)$$

Si se diseña adecuadamente $M(s)$, es posible “eliminar” el retardo del denominador. Por ejemplo, para:

$$M(s) = \frac{k_4 + \frac{k_3}{s}}{1 + k_1 + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s^2} - \left(\frac{k_4}{s} + \frac{k_3}{s^2}\right) - \left(\frac{k_4}{s} + \frac{k_3}{s^2}\right)e^{-sL}} \quad (3.20)$$

Donde: $k_4 = k_2 + k_3L$. Se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{e^{-sL}(s^2(1 + K_1) + k_2s + K_3 - (K_4s + K_3)e^{-sL})}{s(s^2(1 + k_1) + sK_2 + k_3)} \quad (3.21)$$

Como puede apreciarse en (3.21), con la propuesta de Astrom es posible ajustar todos los polos de la respuesta ante perturbaciones, notar también que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{y(s)}{d(s)} = 0$, lo cual implica error en régimen permanente nulo ante perturbaciones de tipo escalón.

Como ventajas de esta estructura destacar, que la respuesta del set-point esta desacoplada de la respuesta ante perturbaciones en d . Las funciones de transferencia que representa ambas relaciones permiten un diseño sin consideración del retardo, permitiendo un ajuste de los polos en bucle cerrado arbitrario. Como inconvenientes, destacar que no existe una metodología genérica de diseño del bloque $M(s)$, y que para el caso desarrollado, el elevado número de parámetros complica el diseño de la respuesta ante perturbaciones.

Si bien en [135] se presenta un procedimiento sistemático para el diseño del bloque $M(s)$, la generación del mismo incluye la realización de una realimentación positiva, la cual es una fuente potencial de inestabilidad, limitando la robustez del mismo [115].

DTC propuesto por Matausek y Micié [73]: En la figura 3.8, se muestra el esquema propuesto por Matausek y Micié.

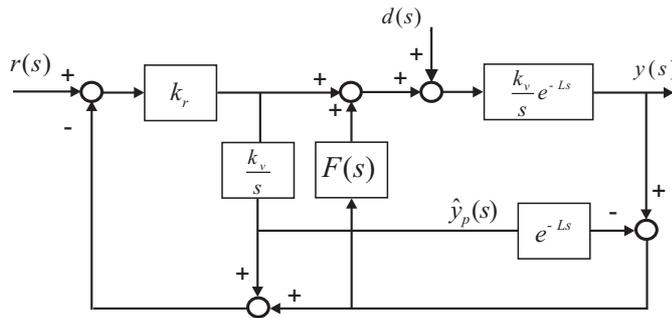


Figura 3.8. DTC propuesto por Matausek y Micié.

En el caso nominal, es decir, si no existen errores de modelado, a partir del esquema de la figura 3.8, donde $F(s) = \frac{K_0(T_d s + 1)}{(T_d/10s + 1)}$, se obtiene la siguiente expresión:

$$y(s) = \frac{k_v k_r e^{-Ls}}{(s + k_v k_r)} r(s) \quad (3.22)$$

$$+ \frac{k_v [s + k_v k_r (1 - e^{-Ls})] e^{-Ls}}{(s + k_v k_r) (s + \frac{K_o k_v (T_d s + 1)}{T_f s + 1}) e^{-Ls}} d(s) \quad (3.23)$$

Expresión a partir de la cual es muy fácil verificar que el error en régimen permanente, ante errores de tipo escalón en d , es cero dado que se verifica que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s + k_v k_r (1 - e^{-Ls})) = 0$$

Esta estructura es similar a la inicialmente presentada en [72], pero con $T_d = 0$, entonces $F(s) = K_0$. Notar también que si $F(s) = 0$, o lo que es lo mismo, si $K_0 = 0$, este esquema es equivalente al convencional SP.

El diseño de k_r , se propone según la siguiente fórmula: $k_r = \frac{1}{k_v T_r}$, donde T_r , se define como la constante de tiempo deseada en bucle cerrado [72]. El diseño de los parámetros K_0 , y T_d se realizará en función del ajuste de los polos de la ecuación característica. En [73] las reglas de diseño para estos parámetros se definen como:

$$T_d = \alpha L$$

$$K_0 = \frac{\frac{\pi}{2} - \Phi_{pm}}{k_v L \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (\frac{\pi}{2} - \Phi_{pm})^2 \alpha^2}}$$

Donde los parámetros $\alpha = 0,5$ y el margen de fase $\Phi_{pm} = 64^\circ$, has sido definidos después de numerosas simulaciones [73].

Comentario 3.3.2 Notar que para el caso particular $F(s) = K_0$, si existen errores de modelado, la función de transferencia entre la referencia y la variable controlada es:

$$G_{ry}(s) = \frac{k_r \Delta(s) G(s) e^{-Ls}}{1 + k_r \frac{k_v}{s} - k_r \frac{k_v}{s} e^{\hat{L}} + k_r \Delta(s) G(s) e^{-Ls}}$$

$$\text{Donde: } \Delta(s) := \frac{(1 + K_0 \hat{G}(s) e^{\hat{L}s})}{(1 + K_0 G(s) e^{Ls})}$$

DTC propuesto por Normey-Rico y Camacho [89]: En la figura 3.9, se muestra el esquema propuesto por Normey-Rico y Camacho. El esquema propuesto se basa en una modificación del inicialmente propuesto por Watanabe e Ito [123], pero con la adición de un filtro en el set-point. Al igual que en el trabajo presentado por Watanabe e Ito, los modelos utilizados son:

$$G_1(s) = \frac{k_v (1 - Ls)}{s}; \quad G(s) = \frac{k_v}{s} \quad (3.24)$$

La estructura del regulador, un convencional PI, y el filtro se definen como:

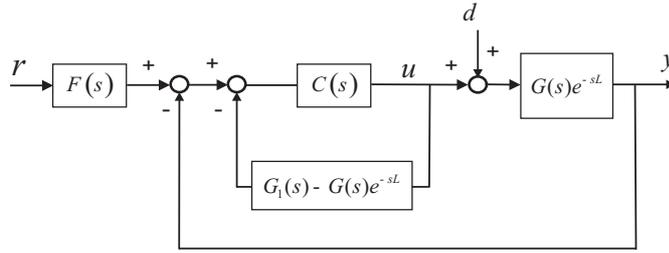


Figura 3.9. DTC propuesto por Normey-Rico y Camacho.

$$C(s) = \frac{k_c(1 + T_i s)}{T_i s}; \quad F(s) = \frac{1 + \alpha T_i s}{1 + T_i s}; \quad \alpha < 1 \quad (3.25)$$

Lo más común en el diseño de un sistema de control, es diseñar el mismo para que sea lo más rápido posible sin sobreoscilación. Bajo estas premisas, el controlador $C(s)$, se diseña para obtener las mejores prestaciones ante perturbaciones en d . Por ejemplo, si se desea obtener un polo doble en $s = -1/T_0$, en [89] se indican las siguientes fórmulas de ajuste del controlador:

$$T_i = 2T_0 + L; \quad k_c = \frac{2T_0 + L}{k_v(T_0 + L)^2} \quad (3.26)$$

Dado que la función de transferencia entre la variable controlada y el set-point o referencia es:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G(s)} F(s) \quad (3.27)$$

El filtro se diseñará de forma que se cancele el cero del controlador. El parámetro α , se utiliza para ajustar la respuesta del set-point. Obtenido de forma experimental, en [89] se indica como valor más adecuado $\alpha = 0,4$.

En las simulaciones presentadas, se mostraba como el mejor DTC, hasta la fecha, para el control de sistemas tipo IPDT, tanto en el rechazo de perturbaciones tipo escalón como en el set-point. El estudio de robustez, muestra también la superioridad del mismo frente a trabajos previos.

En [90], se presentó una mejora de esta estructura. Esta mejora ya se puede considerar como un esquema con dos grados de libertad (2DoF). La misma consiste esencialmente en extender el estudio del esquema propuesto para el caso de sistemas estables modelados por FOPDT, e introducir un nuevo filtro en el set-point del esquema propuesto. Con esto último se consigue desacoplar completamente la respuesta del set-point de la respuesta ante perturbaciones.

El nuevo filtro propuesto es:

$$F(s) = \frac{(1 + sT_0)^2}{(1 + sT_i)(1 + sT_r)} \quad (3.28)$$

Donde T_r y T_0 se definen según se aprecia en la ecuación (3.29) y (3.30) respectivamente.

A partir de las fórmulas de ajuste del regulador $C(s)$ definidas anteriormente, y la definición del nuevo filtro $F(s)$, la relación entre la variable controlada y el set-point, y la variable controlada y la perturbación se definen como:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{e^{-sL}}{T_r s + 1} \quad (3.29)$$

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{k_v e^{-sL}}{s} \left(1 - \frac{e^{-sL}(1 + s(L + 2T_0))}{(1 + T_0 s)^2} \right) \quad (3.30)$$

Un análisis comparativo con esquemas precedentes muestran que esta estructura es superior, tanto por la sencillez de ajuste de parámetros, como por las prestaciones obtenidas en el rechazo de perturbaciones tipo escalón, como en robustez ante errores de modelado en el retardo y parámetros de la planta, y/o dinámica no modelada.

DTC propuesto por Zhong y Normey-Rico [139]: En la figura 3.10, se muestra el esquema propuesto por Zhong y Normey-Rico [139]. Este esquema originalmente presentado dentro de otro contexto en [94], es un efectivo y sencillo esquema de dos grados de libertad para el control de sistemas con un modo integrador. A diferencia de esquemas precedentes, donde los modelos se representaban por IPDT, esta metodología puede tratar con modelos más genéricos, tal que:

$$G(s)e^{-sL} = \frac{G_0(s)}{s} e^{-sL} \quad (3.31)$$

Donde $G_0(s)$, es una función de transferencia estrictamente propia, Hurwitz (estable) y de fase mínima. Evidentemente, también se debe cumplir que $G_0(s) \neq 0$.

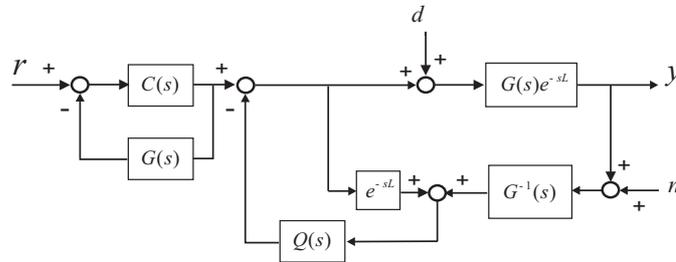


Figura 3.10. DTC propuesto por Zhong y Normey-Rico.

A partir del esquema de la figura 3.10, es posible obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}e^{-sL} \\ \frac{y(s)}{d(s)} &= G(s)e^{-sL}(1 - Q(s)e^{-sL}) \\ \frac{y(s)}{n(s)} &= Q(s)e^{-sL}\end{aligned}$$

A partir de las mismas es posible observar que se cumple el “*principio de Smith*”, es decir, es posible realizar el diseño del controlador $C(s)$ sin consideración del retardo L . Notar también que para que el error en régimen permanente sea cero, se debe cumplir que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (1 - Q(s)e^{-sL}) = 0 \quad (3.32)$$

Otra de las novedades de este esquema, sobre propuestas previas, es que es posible un diseño para el rechazo de perturbaciones de naturaleza arbitraria, es decir, no sólo de tipo escalón. Por ejemplo, para un diseño de perturbaciones tipo rampa, el diseño del filtro $Q(s)$ debería realizarse según las siguientes consideraciones:

$$\begin{aligned}(1 - Q(s)e^{-sL})|_s &= 0 \\ \frac{d}{ds}(1 - Q(s)e^{-sL})|_s &= 0 \\ \frac{d^2}{ds^2}(1 - Q(s)e^{-sL})|_s &= 0\end{aligned}$$

En [139], se propone el siguiente filtro:

$$Q(s) = \frac{(1 + \mu s + \beta s^2)}{(\lambda s + 1)^{d_r + 2}} \quad (3.33)$$

Los parámetros μ y β se determinan según las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\mu &= (d_r + 2)\lambda + L \\ \beta &= \frac{L^2 + \lambda(d_r + 2)((d_r + 1)\lambda + 2L)}{2}\end{aligned}$$

Donde d_r se define como el grado relativo⁴ de $G(s)$, y λ se define como el parámetro de ajuste o de diseño para obtener un compromiso entre robustez y rechazo ante perturbaciones. Considerando incertidumbres multiplicativas $\Delta(s) \in H_\infty$, notar que la condición de estabilidad robusta se define como:

$$\|Q(s)\|_\infty < 1/\|\Delta(s)\|_\infty \quad (3.34)$$

⁴ Diferencia entre el orden del polinomio del denominador y el orden del polinomio del numerador.

Destacar que el esquema de la figura 3.10 es no causal, y que en algunos casos es internamente inestable [139]. Por ello, si bien el desarrollo del diseño se puede realizar a partir del esquema de la figura 3.10, la implementación del mismo requiere de una estructura equivalente (ver figura 3.11). En este sentido se hace necesario el ajuste de un filtro $F(s)$. De forma genérica este filtro puede determinarse como:

$$F(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^{d_r}} \quad (3.35)$$

De tal forma que haga posible la causalidad de todos los bloques del esquema propuesto (ver figura 3.11).

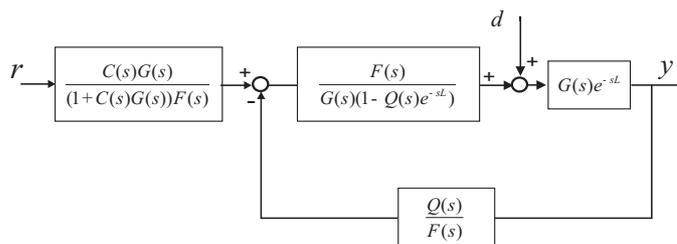


Figura 3.11. Esquema para la implementación del DTC propuesto en [139](figura 3.10).

Comentario 3.3.3 Para el caso particular $G(s) = \frac{k}{s}$, $d_r = 1$, y considerando perturbaciones de tipo escalón, el filtro $Q(s)$, y $F(s)$, pueden ser elegidos respectivamente como:

$$Q(s) = \frac{(2\lambda + L)s + 1}{(\lambda s + 1)^2}; \quad F(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)} \quad (3.36)$$

De tal forma que, el único parámetro de ajuste es λ , el cual se diseñará como un compromiso entre robustez, y mejora del rechazo de perturbaciones.

Comentario 3.3.4 Como se manifiesta en [139] el esquema de la figura 3.10 es no causal, y en algunos casos es internamente inestable, por lo tanto la condición de estabilidad robusta (3.34) representa realmente una aproximación del comportamiento del DTC propuesto, pero no se corresponde con la condición real de estabilidad robusta de los esquemas propuestos para su implementación.

En [136] se propone una mejora para la implementación del esquema propuesto inicialmente en [139] con objeto de obtener una respuesta de tiempo mínimo (ver figura 3.12). Donde los factores q_1, q_2, T_1, T_2 , son parámetros de diseño, y el regulador $Z(s)$, presenta la siguiente estructura:

$$Z(s) = \frac{1 - e^{-Ls}}{s} + q_1 \frac{1 - e^{-T_1s}}{s} + q_2 \frac{1 - e^{-T_2s}}{s}$$

Este esquema, implica un diseño e implementación más complejos que los inicialmente propuestos en [139], lo cual contradice algunas de las principales ventajas del inicialmente propuesto en [139]: “un esquema sencillo de implementar y sencillo de diseñar”.

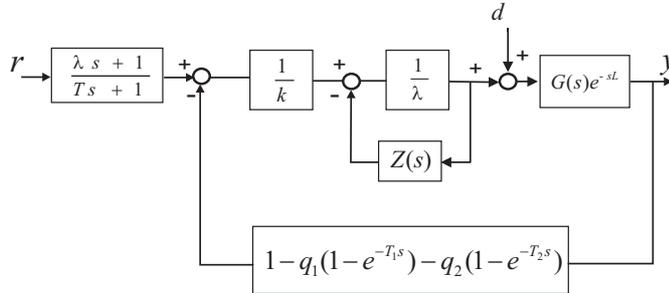


Figura 3.12. DTC propuesto por Zhong en [136] para la implementación.

Comentario 3.3.5 El esquema analizado de la figura 3.10 es similar al presentado por el mismo autor en [138] (Figure 3.13). Notar que la función de transferencia entre la perturbación y la variable controlada para ambos esquemas es:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = G(s)e^{-Ls}(1 - Q(s)e^{-Ls})$$

Y si se ajusta apropiadamente el filtro $F_z(s)$ es trivial que también se obtendrá similar respuesta ante cambios en el set-point.

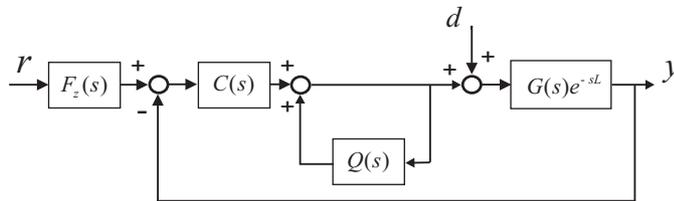


Figura 3.13. DTC propuesto por Zhong et al. [138].

DTC propuesto por Torrico y Normey-Rico [116]: En la figura 3.14, se muestra el esquema propuesto. A partir del mismo es posible obtener las siguientes expresiones:

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} z^{-d}$$

$$\frac{y(z)}{d(z)} = G(z)z^{-d}(1 - V(z)z^{-d})$$

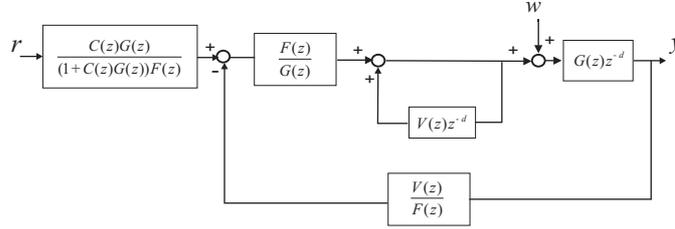


Figura 3.14. DTC propuesto por Torrico y Normey-Rico.

Como es evidente, dada la lógica perdida de prestaciones en una implementación digital con respecto a su ideal analógico, en [116], se demuestra que existe una degradación de la robustez y de las prestaciones ante el rechazo de prestaciones del esquema discretizado en [139], frente a su equivalente continuo. Con esta limitación en mente, y considerando el supuesto de una restricción en el periodo de muestreo, en [116] se desarrolla una metodología para la determinación del mejor periodo de muestreo para un compromiso entre robustez y prestaciones ante el rechazo de perturbaciones.

Los resultados presentados muestran que, a partir de una discretización según la metodología propuesta se obtienen mejores resultados que de una discretización directa del esquema propuesto en [139], tanto para sistemas estables como con un modo integrador. El esquema propuesto, también es comparado con el presentado por Normey-Rico et al. [90], mostrando igualmente mejores prestaciones.

Como principal inconveniente del esquema propuesto, notar que $G(z)$ posee un modo integrador, por lo que si no se cumple que,

$$\lim_{z \rightarrow 1} V(z) = 1,$$

la siguiente expresión será inestable:

$$\frac{y(z)}{d(z)} = G(z)z^{-d}(1 - V(z)z^{-d})$$

Para solucionar este problema, en esta tesis proponemos la implementación del esquema de la figura 3.15, donde $W(z)$ se define como:

$$W(z) = \frac{V(z)}{1 - V(z)}(1 - z^{-1})$$

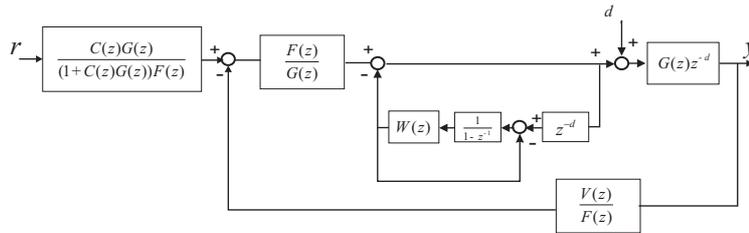


Figura 3.15. Modificación propuesta en esta tesis para evitar la inestabilidad del DTC propuesto por Torrico y Normey-Rico [116].

3.3.3. DTC para sistemas inestables

Como es bien sabido, los sistemas inestables son más difíciles de controlar que los sistemas estables [112]. A todo esto hay que añadir que la existencia de un retardo, complica todavía más la estabilización de los mismos.

Con objeto de realizar un control de este tipo de sistemas, sistemas inestables con retardos de actuación y/o medida, se han ido presentado diferentes propuestas, aquí vamos a revisar únicamente las más populares, derivadas éstas del convencional PID y del SP.

Un gran número de estas propuestas han sido enfocadas a un adecuado diseño o ajuste de los parámetros del convencional PID. Entre otros, destacar el trabajo de Ho et al. [49] donde se derivan una fórmulas de ajuste de un PID en función de las especificaciones del margen de fase y de ganancia. Visioli [119], propuso una reglas de ajuste de un PID óptimo vía un algoritmo genético. Sin embargo estos esquemas basados en un único grado de libertad muestran un excesivo tiempo de establecimiento y una excesiva sobreoscilación. Para resolver este problema, se proponen esquemas con dos grados de libertad 2DoF. Destacar por ejemplo, los trabajos presentados en [122, 99].

Dada la popularidad del “Internal Model Control” (IMC) [38], en un entorno industrial, y la posibilidad de su aplicación a sistemas con retardos. Ha habido diferentes intentos de adaptar el mismo al control de sistemas inestables con retardos temporales. Si bien es conocido que el IMC no es más que un simple SP, por lo que al igual que este último, el primero tampoco es útil para controlar sistemas inestables. Por ello, diferentes aproximaciones que se basan en el principio del IMC, lo que hacen realmente es obtener un esquema equivalente del IMC en forma de bucle simple, y una vez calculado el regulador resultante, aproximar el mismo por un convencional PID, mediante una típica aproximación a partir de una expansión en serie de Maclaurin (obteniendo únicamente los tres primeros términos del desarrollo) [58], o a partir de algún método de reducción específico como el presentado en [130]. En un reciente estudio comparativo presentado en [121], de los principales métodos existentes hasta la fecha de publicación del mismo, estos dos últimos

métodos [58, 130], se presentan como unos de los más efectivos, tanto en robustez como en prestaciones ante el rechazo de perturbaciones.

Uno de los primeros esquemas a considerar para el control de sistemas inestables fue el presentado por DePaor [25], otra estructura a considerar es la presentada en [56] donde se realiza una modificación basada en el original SP. En esta línea, Majhi et al. [69] presentan un original DTC, que ha obtenido posteriormente una considerable aceptación en la literatura. Este esquema permite un fácil diseño a la vez que se obtienen unas buenas prestaciones.

Otras estrategias a considerar son las presentadas por Tan et al. [114], donde se realiza una aproximación derivada de la técnica del IMC, y la estructura representada por Zhang et al. [134], donde se realiza una modificación de la estructura previamente presentada en [56], para evitar los típicos problemas de estabilidad interna, que suelen aparecer en un elevado número de las propuestas presentadas en la literatura referentes al tratamiento de sistemas inestables con retardos y que en muchos casos no son analizadas adecuadamente.

Destacar que, en general, en la mayoría de las propuestas mencionadas únicamente se consideran tres tipos de modelos sobre el proceso a controlar; modelos de primer orden con retardo, con terminología en inglés “*first-order plus dead time*” (*FOPDT*); modelos de segundo orden con retardo, con terminología en inglés “*second-order plus dead time*” (*SOPDT*), o sistemas de segundo orden con un modo integrador y retardo, con terminología en inglés “*integrating second-order plus dead time*” (*ISOPDT*).

Recientemente, en Xiang et al. [68], y de forma simultánea en dos trabajos publicados por Tao et al. [61, 59], se han presentado dos nuevas estructuras para el control de procesos inestables sometidos a grandes retardos, que hasta la fecha de su publicación se demostraban como muy superiores a todos los previamente presentados en la literatura. Destacar que si bien no realizamos una comparación directa entre ambos esquemas, una comparación indirecta sobre nuestra propuesta de DTC para el control de sistemas inestables (ver sección 5.1) muestra que el esquema presentado por Tao et al. es ligeramente superior al presentado por Xiang et al., tanto en robustez como en prestaciones ante rechazo de perturbaciones. Si bien la sencillez de diseño del esquema presentado por Xiang puede parecer más simple, está metodología sólo está desarrollada para sistemas de orden reducido, mientras que un diseño con el esquema de Tao et al. permite un diseño a partir de cualquier modelo del proceso, si bien la complejidad de los reguladores también aumenta con la complejidad del modelo.

Destacar que el esquema propuesto por Xiang et al. es realmente una generalización del previamente propuesto por Matausek et al. [72]. Respecto al esquema propuesto por Tao et al. [61, 59], en [59] se afirma que el esquema propuesto se basa en una modificación del previamente propuesto en [69].

DTC propuesto por Majhi et al. [69]: En la figura 3.16, se muestra el esquema propuesto por Majhi et al.

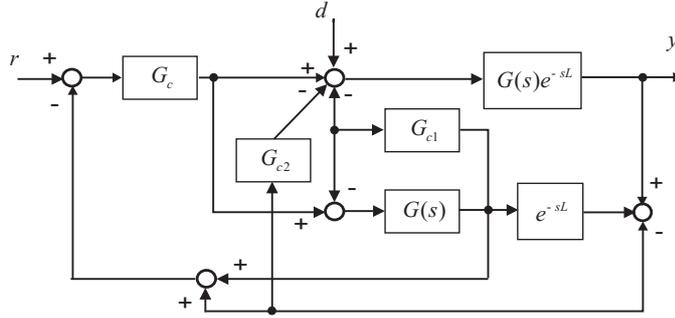


Figura 3.16. DTC propuesto por Majhi et al.

Si no se consideran errores de modelado, la f.d.t. entre el set-point y la variable controlada es:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{GG_c e^{-sL}}{1 + G(G_c + G_{c1})} \quad (3.37)$$

Y entre la perturbación y la variable controlada:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{Ge^{-sL}}{1 + G(G_c + G_{c1})} \frac{1 + G(G_c + G_{c1}) - GG_c e^{-sL}}{1 + GG_{c2} e^{-sL}} \quad (3.38)$$

Los tres reguladores se diseñan con objeto de alcanzar tres objetivos diferentes: G_{c1} se utiliza para estabilizar posibles sistemas inestables o con acción integral, G_c se diseña para el ajuste del set-point, y por último el diseño de G_{c2} se realiza con objeto de obtener una adecuada respuesta ante el rechazo de perturbaciones.

En este mismo trabajo [69], se apunta la similitud del esquema presentado con el previamente propuesto por Matausek et al. Si $G_{c1} = 0$, se obtiene la misma estructura presentada en [72]. Notar también que si $G_{c1} = G_{c2} = 0$ se obtiene el original SP.

En este trabajo, el diseño de G_{c2} se diferencia para sistemas estables, IPDT e inestables tipo FOPDT: Para sistemas estables no es necesario el regulador G_{c2} . Para sistemas IPDT, el regulador G_{c2} se determina como un regulador proporcional, y se diseña aplicando el criterio de estabilidad de Nyquist, en base al margen de fase introducido previamente por Matausek et al. para este tipo de sistemas [72].

Para sistemas inestables, tipo FOPDT, el criterio de diseño de G_{c2} es el mismo que el previamente presentado por De Paor et al. [26], para este tipo de sistemas. De Paor et al. propusieron un regulador proporcional $G_{c2} = K_d$, para la estabilización de un sistema inestable tipo FOPDT, basado en el margen de fase óptimo [26].

Como principal inconveniente de este esquema, citar los ya mencionados para el esquema de Matausek y similares, es decir; si bien se ha eliminado el

retardo de la f.d.t. entre el set-point y la variable controlada, éste todavía se mantiene en la f.d.t. entre la perturbación y la variable controlada, y por tanto se deberá considerar un diseño considerando la aproximación del retardo o bien diseñar a partir de algún método no analítico. Si bien como se puede apreciar en este trabajo, donde se ha utilizado la última técnica, el diseño para cada modelo necesita del desarrollo de una metodología específica, con las limitaciones que ello conlleva para una generalización del mismo.

DTC propuesto por Xiang et al. [68]: En la figura 3.17, se muestra el esquema propuesto por Xiang et al. Como es habitual siempre que se derivan las funciones de sensibilidad en este tipo de sistemas, se consideran que no existen errores de modelado, de tal forma que la función de transferencia existente entre la variable controlada y el set-point, y la variable controlada y la perturbación se definen como:

$$y(s) = \frac{K_4 G(s)}{1 + K_1 G(s)} e^{-Ls} r(s) \quad (3.39)$$

$$+ \frac{G(s)e^{-Ls}(1 + K_1 G(s) - K_2 G(s)e^{-Ls})}{(1 + K_1 G(s))(1 + K_3 G(s)e^{-Ls})} d(s) \quad (3.40)$$

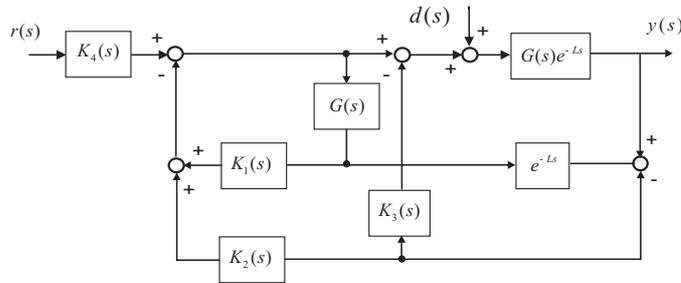


Figura 3.17. DTC propuesto por Xiang et al.

A partir de la expresión (3.39), se puede deducir que, con un diseño adecuado de los reguladores K_4 y K_1 es posible asignar tanto los ceros como los polos de la respuesta ante cambios en el set-point. Respecto a la respuesta ante perturbaciones, notar que el regulador K_3 debe ser ajustado para estabilizar el factor $(1 + K_3 G(s)e^{-Ls})$. El regulador K_2 puede ser empleado como factor adicional para el ajuste de la respuesta al rechazo ante perturbaciones.

Notar que en la expresión $(1 + K_3 G(s)e^{-Ls})$, se debe diseñar el regulador K_3 sobre una expresión con retardo, por tanto, el principio en el cual se base el SP, diseño sobre un sistema libre de retardo no se cumple. Aquí únicamente se ha “eliminado” el retardo de la ecuación característica de la expresión (3.39). Esto implica que en el proceso de diseño va a ser necesario realizar una

aproximación del retardo, y que cuanto más compleja sea esta aproximación, con el objeto de obtener un modelo más real del comportamiento del mismo, más complejo serán los reguladores resultantes.

Otra importante limitación de esta metodología es que es específica para cada modelo considerado. En el trabajo presentado por los autores se desarrolla para tres modelos, IPDT e inestables FOPDT y SOPDT. Dado el aumento de complejidad en función del modelo considerado, en esta tesis sólo vamos a detallar de forma simplificada el diseño para los dos primeros modelos.

Diseño para sistemas tipo IPDT: Considérese el siguiente modelo:

$$G_i(s) = \frac{k_0}{s} e^{-sL}$$

Si se desea obtener una determinada dinámica en bucle cerrado, por ejemplo, una determinada constante de tiempo λ , se deberán ajustar los siguientes reguladores: $K_1 = \frac{1}{k_0\lambda}$, $K_4 = \frac{1}{k_0\lambda}$, de forma que se obtenga la siguiente función de transferencia en bucle cerrado:

$$G_{yr}(s) = \frac{K_4 k_0}{s + k_0 K_1} e^{-sL} = \frac{1}{\lambda s + 1} e^{-sL}$$

Notar que el regulador K_3 se debe diseñar para estabilizar el factor $(s + K_3 k_0 e^{-Ls})$. Tal y como se demuestra en [72], para obtener un margen de fase de 60° , se debe cumplir que:

$$K_3 = \frac{\pi}{6k_0L}$$

Con base a obtener una adecuada respuesta ante perturbaciones de tipo escalón, el regulador K_2 se diseña con el objeto de minimizar la integral del error cuadrático (ISE). Considerando el regulador K_2 como un PD, tal que:

$$K_2(s) = \frac{K_{2d}s + K_{2p}}{\frac{K_{2d}}{N}s + 1}$$

Donde: $K_{2p} = \frac{T}{k_0\lambda}$, N se define como el factor de filtrado de la acción derivada y K_{2d} va a depender del grado de aproximación de e^{-Ls} . En [68] se justifica el diseño de K_{2d} con objeto de obtener el mínimo ISE, y en función de la aproximación del retardo realizada.

Si el retardo se aproxima por $e^{-Ls} \approx (1 - Ls)$, los parámetros del regulador obtenidos son:

$$K_{2d} = \frac{(6 - \pi)(\lambda + L)}{\lambda k_0(6 - \pi) + k_0 L \pi}$$

Si el retardo considerado se aproxima por $e^{-Ls} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}Ls}{1 + \frac{1}{2}Ls}$, los parámetros obtenidos son:

$$K_{2d} = \frac{(\frac{1}{2}L + \lambda - \frac{1}{2}\lambda k_0 K_3 L)(1 + \frac{L}{\lambda}) - \frac{1}{4}k_0 K_3 L^2}{k_0(\frac{1}{2}L + \lambda - \frac{1}{2}\lambda k_0 K_3 L) + \frac{1}{4}k_0^2 K_3 L^2}$$

Diseño para sistemas inestables tipo FOPDT: Considérese el siguiente modelo:

$$G_p(s) = \frac{k_0}{Ts - 1} e^{-Ls}$$

Para obtener una determinada dinámica en bucle cerrado:

$$G_{ry} = \frac{1}{\lambda s + 1} e^{-Ls}$$

El ajuste de los controladores K_1 y K_4 debería realizarse según las siguientes relaciones: $K_1 = \frac{1+\frac{T}{\lambda}}{k_0}$, and $K_4 = \frac{T}{k_0\lambda}$.

Respecto al rechazo de perturbaciones, el regulador K_3 se diseñó con el objeto de estabilizar la expresión $G(s)e^{-Ls}$ en la ecuación (4.14). El criterio de diseño fue presentado previamente por De Paor et al. [26], el cual se basa en una optimización del margen de fase:

$$K_3 = \sqrt{\frac{T}{Lk_0^2}}$$

El regulador K_2 , se diseñó siguiendo los mismos criterios que para el caso anterior:

$$K_2(s) = \frac{K_{2d}s + K_{2p}}{\frac{K_{2d}}{N}s + 1}$$

Donde: $K_{2p} = \frac{T}{k_0\lambda}$, y K_{2d} va a depender del grado de aproximación de e^{-Ls} .

Si el retardo se aproxima por $e^{-Ls} \approx (1-Ls)$, los parámetros del regulador obtenidos son:

$$K_{2d} = \frac{\lambda(T - \sqrt{TL})(T + \frac{TL}{\lambda})}{k_0\lambda(T - \sqrt{TL}k_0L^2)(\sqrt{\frac{T}{L}} - 1)}$$

Si el retardo considerado se aproxima por $e^{-Ls} \approx \frac{1-\frac{1}{2}Ls}{1+\frac{1}{2}Ls}$, los parámetros obtenidos son:

$$K_{2d} = \frac{\left[\frac{1}{2}TL + \lambda(T - \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}\sqrt{TL})\right] (T + \frac{TL}{\lambda}) - \frac{1}{4}L^2L(\sqrt{\frac{T}{L}} - 1)}{k_0 \left[\frac{1}{2}TL + \lambda(T - \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}\sqrt{TL})\right] + \frac{1}{4}L^2k_0(\sqrt{\frac{T}{L}} - 1)}$$

Destacar que si existen errores de modelado, a partir de la figura 3.17 es fácil ver que la función de transferencia entre la variable controlada y el set-point es:

$$G_{yr}(s) = \frac{K_4 \Delta(s) G(s) e^{-Ls}}{(1 + K_1 \hat{G}(s) - K_2 \hat{G}(s) e^{\hat{L}} + K_2 \Delta(s) G(s) e^{-Ls}}$$

Donde: $\Delta(s) := \frac{(1+K_3 \hat{G}(s) e^{\hat{L}s})}{(1+K_3 \hat{G}(s) e^{Ls})}$, y $\hat{G}(s) e^{\hat{L}}$ se define como el modelo del proceso.

A partir del esquema de la Figure 3.8, es fácil demostrar que si se define $K_1 = K_2 = K_4 = K_r$, y $K_4 = K_0$ la estructura aquí propuesta es una generalización del esquema previamente propuesto por Matausek et al. [72]. Por otro lado, si se define $K_1 = K_2 = K_4 = K(s)$, y $K_4 = 0$, la misma coincide exactamente con el original SP.

DTC propuesto por Tao et al. [61]: En la figura 3.18 se muestra el esquema propuesto en [59, 60, 61]. A partir del mismo se obtiene que la función de transferencia entre la variable controlada y el set-point es:

$$H_{yr} = \frac{CG_p}{(1 + G_c G)} \frac{(1 + FG e^{-Ls})}{(1 + FG_p)} \quad (3.41)$$

Notar que en el caso nominal, $G_p \equiv G e^{-Ls}$, por lo que la expresión anterior se puede simplificar tal que:

$$H_{yr} = \frac{CG_p}{(1 + G_c G)} \quad (3.42)$$

El retardo se ha “eliminado” de la ecuación característica del set-point, por tanto, se cumple el principio de Smith requerido.

Por otro lado, se tiene que la función de transferencia entre la perturbación de carga “w”, y la salida del sistema es:

$$H_{yw} = \frac{G_p}{(1 + FG_p)} \quad (3.43)$$

De esta relación se puede apreciar que, al igual que en la totalidad de DTC propuestos para sistemas inestables hasta la fecha, ya no es posible un diseño del controlador F sin consideración del retardo. En (3.43) se puede apreciar que la ecuación característica es dependiente del retardo real del proceso. Notar que, con respecto a una perturbación a la salida del sistema también se obtiene la misma ecuación característica.

A partir de las expresiones (3.42) y (3.43), se puede apreciar que va a ser necesario el ajuste de tres controladores: G_c para el ajuste de la ecuación característica del set-point; C para el ajuste del seguimiento de la respuesta al set-point; F para el ajuste de la ecuación característica de la respuesta ante perturbaciones. A continuación se describen los criterios de diseño y finalidad de cada uno de ellos.

En [61] se afirma que sin pérdida de generalidad, el diseño de los controladores sólo se desarrolla para los siguientes modelos:

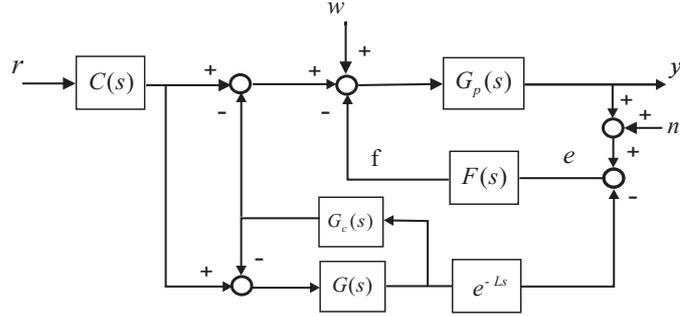


Figura 3.18. DTC propuesto por Tao et al.

$$G_{p1}(s) = \frac{ke^{-Ls}}{(\tau s - 1)}; \quad G_{p2}(s) = \frac{ke^{-Ls}}{(\tau_1 s - 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$G_{p3}(s) = \frac{ke^{-Ls}}{s(\tau s - 1)}; \quad G_{p4}(s) = \frac{ke^{-Ls}}{(\tau_1 s - 1)(\tau_2 s - 1)}$$

Diseño del regulador G_c : A partir de la ecuación característica en (3.42), y con el único objetivo de estabilizar la misma, la estructura del regulador G_c se puede determinar como sigue:

- Modelo $G_{p1}(s)$: El regulador G_c se puede determinar como un simple regulador proporcional, es decir $G_c = k_c$. De tal forma que la ecuación característica en (3.42) será:

$$\tau s + k_c k - 1 = 0 \tag{3.44}$$

- Modelo $G_{p2}(s)$: Si $\tau_1 > \tau_2$, el regulador G_c se puede determinar tal que $G_c = k_c$, donde $k_c > 1/k$. Si $\tau_1 \leq \tau_2$, el regulador G_c se puede determinar tal que $G_c = k_c + k_d s$, donde $k_d > (\tau_2 - \tau_1)/k$, y $k_c > 1/k$.
- Modelo $G_{p3}(s)$: El regulador G_c se puede determina tal que $G_c = k_c + k_d s$, donde $k_d > 1/k$, $k_c > 0$.
- Modelo $G_{p4}(s)$: El regulador G_c se puede determina tal que $G_c = k_d s$, donde $k_d > (\tau_1 + \tau_2)/k$.

Con objeto de hacer realizables los reguladores anteriores, la parte derivativa de los mismos se deberá implementar en cascada junto a un filtro paso bajo de primer orden, tal que la constante de tiempo del mismo cumpla la siguiente relación $(0,01 - 0,1)k_d$. Por tanto el regulador genérico para todos los casos anteriores quedaría como:

$$G_c = k_c + \frac{k_d s}{(N_T k_d s + 1)} \tag{3.45}$$

Donde N_T se define tal que $N_T \in [0,01 - 0,1]$.

Diseño del regulador C: Este regulador se diseñará para obtener las prestaciones requeridas sobre el seguimiento de la referencia. El criterio de diseño utilizado se basa en el ISE del error de predicción, es decir $\min \|e\|_2^2 = \|W(s)(1 - H_r(s))\|_2^2$ (ver figura 3.18).

Donde la función de ponderación $W(s)$ se ha determinado como $W(s) = 1/s$, y el retardo se sustituye por una aproximación de Padé tal que el orden de la misma garantice un error despreciable con respecto a los propios errores de modelado del sistema.

Si a partir de estas restricciones se realiza un diseño analítico del controlador se obtienen los siguientes resultados:

- Modelo $G_{p1}(s)$: El regulador obtenido es,

$$C(s) = \frac{\tau s + k - ck - 1}{k(\lambda_c s + 1)} \quad (3.46)$$

donde el filtro λ_c se ha introducido con objeto de hacer realizable el controlador. Notar que si se sustituye este regulador en (3.42) se obtiene:

$$H_{r1} = \frac{e^{-Ls}}{(\lambda_c s + 1)} \quad (3.47)$$

Siendo λ_c el parámetro final de ajuste del set-point.

- Modelo $G_{p2}(s)$: Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, se tiene que para $\tau_1 > \tau_2$:

$$C(s) = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 - \tau_2)s + k_c k - 1}{k(\lambda_c s + 1)^2} \quad (3.48)$$

y para $\tau_1 \leq \tau_2$,

$$C(s) = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2 + (k_d k + \tau_1 - \tau_2)s + k_c k - 1}{k(\lambda_c s + 1)^2} \quad (3.49)$$

Siendo, en ambos casos, la función de transferencia de la respuesta al set-point:

$$H_{r1} = \frac{e^{-Ls}}{(\lambda_c s + 1)^2} \quad (3.50)$$

- Modelo $G_{p2}(s)$: Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, se tiene que para $\tau_1 > \tau_2$:

$$C(s) = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 - \tau_2)s + k_c k - 1}{k(\lambda_c s + 1)^2} \quad (3.51)$$

y para $\tau_1 \leq \tau_2$,

$$C(s) = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2 + (k_d k + \tau_1 - \tau_2)s + k_c k - 1}{k(\lambda_c s + 1)^2} \quad (3.52)$$

Siendo, en ambos casos, la función de transferencia de la respuesta al set-point:

$$H_{r2} = \frac{e^{-Ls}}{(\lambda_c s + 1)^2} \quad (3.53)$$

- Modelo $G_{p3}(s)$: Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, se tiene:

$$C(s) = \frac{\tau_2 s^2 + (k_d k - 1)s + k_c k}{k(\lambda_c s + 1)^2} \quad (3.54)$$

- Modelo $G_{p3}(s)$: Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, se tiene:

$$C(s) = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2 + (k_d k - \tau_1 - \tau_2)s + 1}{k(\lambda_c s + 1)^2} \quad (3.55)$$

Siendo, en ambos casos, la función de transferencia de la respuesta al set-point:

$$H_{r3,4} = \frac{e^{-Ls}}{(\lambda_c s + 1)^2} \quad (3.56)$$

Diseño del regulador F : La función de sensibilidad complementaria entre la perturbación de carga w y la señal f es:

$$T_d = \frac{f}{w} = \frac{FG_p}{1 + FG_p} \quad (3.57)$$

En el caso ideal, está relación debería ser tal que $T_d = e^{-Ls}$, lo cual implicaría que ante una perturbación en w , el controlador F , o el estimador de la perturbación como se denota en [61], detectaría la misma exactamente después del inevitable retardo del proceso. Con objeto de alcanzar esta situación, despejando apropiadamente de (3.57), se puede obtener el siguiente controlador:

$$F_{im} = \frac{T_d}{1 - T_d} \frac{1}{G_p} \quad (3.58)$$

Sin embargo, para realizar un diseño a partir de las limitaciones impuestas sobre los sistemas con polos inestables [81], y con objeto de cumplir los requisitos de estabilidad interna, la función de sensibilidad (3.57) debe resultar tal que:

$$T_d = \frac{\sum_{i=1}^m a_i s^i + 1}{(\lambda_f s + 1)^{l+m}} e^{-Ls}$$

Donde l se define como el grado relativo del proceso, m denota el número de polos inestables, y λ_f representa el parámetro de ajuste.

Por ejemplo, para el sistema $G_{p1}(s)$, esta relación sería:

$$T_d = \frac{a_1 s + 1}{(\lambda_f s + 1)^2} e^{-Ls}$$

Sustituyendo adecuadamente ésta en (3.58), se obtiene:

$$F_{im} = \frac{(\tau s - 1)(a_1 s + 1)}{k[(\lambda_f s + 1)^2 - (a_1 s + 1)e^{-Ls}]}$$
 (3.59)

Sin embargo, notar que para el proceso $G_{p1}(s) = \frac{ke^{-Ls}}{(\tau s - 1)}$, existe una cancelación polo/cero del polo del proceso. Por tanto, y con objeto de evitar esta cancelación de un polo inestable, en [61] se plantea una expansión en series de Maclaurin que resulta en un convencional PID, o bien una aproximación basada en la expansión de Padé [39] a partir de la cual se obtiene un controlador con la siguiente estructura:

$$F_{N/N}(s) = \frac{\sum_{j=0}^N d_j s^j}{s \sum_{i=0}^{N-1} c_i s^i}$$
 (3.60)

Donde N se define como el orden del controlador deseado, y c_i y d_j se determinan a partir de un complejo procedimiento basado en dos ecuaciones matriciales, y los coeficientes de la expansión de Maclaurin del controlador previamente diseñado en (3.59) [61].

En este caso, así como en los otros modelos analizados en [61], el regulador resultante siempre puede ser reducido a un convencional PID o implementarse como un controlador de orden N (ecuación 3.60). En [61], se detalla una tabla con los controladores y las fórmulas utilizadas para su ajuste en función de cada uno de los modelos analizados.

Estabilidad robusta en bucle cerrado: En base al bien conocido teorema de la pequeña ganancia, se establece que una condición necesaria y suficiente para que el esquema de la figura 3.18 sea robustamente estable es que se cumpla la siguiente condición:

$$\|T_d(s)\Delta_m(s)\|_\infty < 1$$
 (3.61)

Donde $\Delta_m(s)$ se define como la incertidumbre multiplicativa tal que:

$$\Delta_m(s) = \frac{[G_p(s) - G(s)]}{G(s)}$$

De forma que, por ejemplo para el caso particular del modelo G_{p1} , es posible establecer una condición suficiente tal que si se cumple la siguiente relación:

$$\left\| \frac{(a_1 s + 1)}{(\lambda_f s + 1)^2} \right\|_\infty < 1 / \|\Delta_m(s)\|_\infty$$
 (3.62)

se asegurará que el sistema es robustamente estable para incertidumbres multiplicativas acotadas por $\|\Delta_m(s)\|_\infty$.

Donde según las fórmulas derivadas en [61], el parámetro a_1 , será tal que $a_1 = \tau[(\lambda_f/\tau + 1)^2 e^{L/\tau} - 1]$. De forma similar se obtiene la condición de estabilidad robusta para el resto de modelos analizados [61].

3.4. Asignación Finita del Espectro (FSA).

El tratamiento de los retardos en la entrada de control, ha sido ampliamente estudiado en la literatura, siendo el Predictor de Smith la solución más popular para el tratamiento de este tipo de retardos, si bien pronto fue revisado dada sus carencias iniciales [74]. Con objeto de cubrir algunas de las limitaciones del SP, se propuso la técnica de Asignación Finita del Espectro, con terminología en inglés “Finite Spectrum Assignment”, (FSA) [71]. Otros autores desarrollaron esta idea y propusieron otras similares [12, 120].

La técnica del FSA se basa en una realimentación del estado para “eliminar” los retardos de la ecuación característica del sistema en bucle cerrado, y poder asignar así los “ n ” polos del sistema en bucle cerrado de forma arbitraria. El principio de esta técnica es similar a la técnica del SP, si bien la primera va a permitir el tratamiento de una mayor gama de modelos de sistemas con retardos. Este método puede considerarse también como una extensión de la clásica realimentación del estado para sistemas con retardos.

Una de las primeras aproximaciones en esta dirección puede encontrarse en Fuller [30]. Fuller estudió el caso SISO, con un retardo en la acción de control descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{3.63}$$

y ley de control:

$$u(t) = Ke^{A\tau} \left(x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\tau-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma \right)\tag{3.64}$$

Considerando el caso ideal, es decir no existen ni errores de modelado ni perturbaciones, se “elimina” la expresión del retardo en bucle cerrado:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)\tag{3.65}$$

En principio este controlador no aportaría ninguna ventaja sustancial sobre el SP.

Un paso más importante en el control de sistemas retardados, se deriva del trabajo de Manitius y Olbrot [71]. En este artículo el problema del FSA, es resuelto para un sistema con retardos distribuidos en la acción de control, es decir, para sistemas representados por el modelo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-\tau}^0 d\beta(\tau)u(t + \tau)\tag{3.66}$$

Donde $x \in R^n$, $u \in R^m$.

Comentario 3.4.1 Esta notación, denominada “Stieltje integral”, la cual es utilizada habitualmente, es equivalente a la representación:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=0}^N B_i u(t - \tau_i) + \int_{-\tau}^0 \tilde{B}(\theta) u(t + \theta) d\theta$$

Donde $0 \leq \tau_i \leq \tau_N = \tau$, y $\theta \rightarrow \tilde{B}(\theta) \in L^\infty((-\tau, 0), R^{m \times n})$

Con ley de control dada por⁵:

$$u(t) = K \left(x(t) + \int_{-\tau}^0 \int_{\vartheta}^0 e^{A(\vartheta-\theta)} d\beta(\vartheta) u(t + \theta) d\theta \right) \quad (3.67)$$

Se prueba, [71], que el espectro del sistema en bucle cerrado, con ley de control (3.67), coincide con el espectro de la matriz $(A + \beta(A)K)$, donde:

$$\beta(A) = \int_{-\tau}^0 e^{A\vartheta} d\beta(\vartheta)$$

y si el par $(A, \beta(A))$ es controlable, el espectro del sistema (3.66), con ley de control (3.67) puede ser asignado en un conjunto de “n” puntos en el plano complejo previo y adecuado diseño de la matriz de realimentación K .

Posteriormente [123, 124, 125], extienden la idea del FSA a los sistemas con retardos en los estados y en el control, los cuales pueden ser expresados como un múltiplo entero de un retardo base. A esta subclase de sistemas con retardo los denomina sistemas con multiples y commensurables retardos en los estados y control (“System with multiple commensurate delays in states and control”), éstos se representan por la expresión:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^n A_i x(t - i\tau) + \sum_{j=0}^k B_j u(t - j\tau) \quad (3.68)$$

Retardos en la entrada de control: Para el caso particular de múltiples retardos en la entrada de control:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=0}^k B_i u(t - i\tau)$$

La ley de control resultante sería:

$$u(t) = K \left(x(t) + \sum_{j=0}^k \int_{t-j\tau}^t e^{A(t-\theta-j\tau)} B_j u(\theta) d\theta \right)$$

⁵ La variable ϑ es la variable de integración de la integral de “Stieltje”

Retardos en los estados y en la entrada: Por ejemplo, para el caso particular referenciado en [105]:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau_1) + B_0u(t) + B_1u(t - \tau_2)$$

La ley de control implica la siguiente expresión:

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau_1}^t e^{A(t-\tau_1-\theta)} A_1x(\theta)d\theta + \int_{t-\tau_2}^t e^{A(t-\tau_2-\theta)} B_1u(\theta)d\theta$$

La técnica de “Finite Spectrum Assignment” [29] cubre algunas de los principales limitaciones del Predictor de Smith, ésta también se puede aplicar a un mayor rango de sistemas con retardo, sin embargo la ley de control resultante es muy compleja y complicada de obtener, lo cual limita su aplicación. Tampoco se ha evaluado con rigurosidad ni la robustez ni la sensibilidad del mismo. Aunque la más importante limitación de esta estrategia radica en la imposibilidad de aplicación a sistemas inestables con retardo de tiempo elevados [78, 75].

En general, la implementación de la técnica del FSA, implica la realización de una integral de predicción, denotada en inglés como “Distributed Delay system”, esta integral (ver ecuación 3.64) también se puede representar como:

$$v(t) := \int_0^\tau e^{A\xi} Bu(t - \xi)d\xi \quad (3.69)$$

Esta integral también aparece en otros esquemas de predicción, como por ejemplo en el “observer-predictor” propuesto por Furukawa et al. [31], o en el denotado como “modified/generalized Smith Predictor”, una modificación del bucle interno del SP, desarrollado en la llamada forma integral, con objeto de poder aplicar el SP al control de sistemas inestables [123, 97].

Sin embargo tal y como se demuestra en [118, 117, 111, 75], cuando la integral (3.69) es calculada para una implementación digital, tal implementación produce un comportamiento inestable, independientemente del nivel de aproximación utilizado. En el tutorial dedicado a los sistemas con retardos temporales presentado por Richard en [105], el problema de la implementación numéricamente estable de la integral de predicción, se consideraba todavía una de las grandes cuestiones por resolver.

En este sentido, parte del trabajo presentado en el Capítulo 6 de esta tesis, publicado en [36, 65, 66], junto con el trabajo presentado en [137], consideramos que se sitúan como unas de las soluciones más efectivas a este problema. La propuesta presentada en [137] consiste en la obtención de dos nuevas técnicas de aproximación de la integral de predicción, una de ellas desarrollada en el dominio “s”, y una segunda desarrollada en el dominio “z”, en [137] se demuestra por simulación que a diferencia de propuestas previas, con estas aproximaciones se obtiene una respuesta estable.

Nuestra propuesta consiste directamente en un planteamiento desde el dominio discreto, mostrando que el esquema de predicción-observación resultante es robustamente estable ante errores de modelado en todos los parámetros del sistema, incluido errores de sincronismo en el periodo de muestreo. Dado que la mayor problemática de la técnica del FSA se refiere a su implementación digital. Para una adecuada validación del esquema propuesto, éste se ha implementado sobre el control de un mini-helicóptero y un prototipo de laboratorio de un helicóptero de 4 rotores sometido a retardos de actuación y/o medida.

Parte II

Compensadores de tiempo muerto para sistemas estables o inestables con retardos

4 DTC para el control de sistemas estables o con un modo integrador

4.1. Planteamiento del problema

En este capítulo se considera que la relación entre la salida y la entrada de un sistema SISO sometido a un retardo se puede representar como:

$$P(s) = G(s)e^{-Ls} \quad (4.1)$$

donde L representa el retardo de actuación y/o medida y $G(s)$ representa la dinámica del sistema sin consideración del retardo.

Bucle ideal libre de retardo.

Considérese el sistema ideal de la figura 4.1, con el bucle de realimentación libre de retardo, tal que sea posible definir la salida del sistema a partir de la siguiente expresión:

$$y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} e^{-Ls} C(s) r(s) \quad (4.2)$$

$$+ \frac{G(s)e^{-Ls}}{1 + G(s)K(s)} w(s) \quad (4.3)$$

$$- \frac{G(s)K(s)e^{-Ls}}{1 + G(s)K(s)} n(s) \quad (4.4)$$

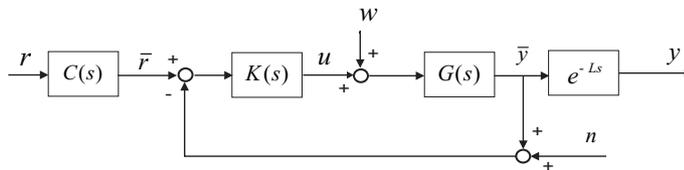


Figura 4.1. Bucle ideal libre de retardo

donde el regulador $K(s)$ se diseña para satisfacer unas determinadas prestaciones en la función de transferencia entre la perturbación de carga y la salida del sistema sin retardo:

$$\frac{y(s)}{w(s)} = \frac{G(s)e^{-Ls}}{1 + G(s)K(s)} \quad (4.5)$$

El pre-filtro $C(s)$ se puede ajustar para cumplir los requerimientos sobre la referencia o set-point:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G(s)K(s)e^{-Ls}}{1 + G(s)K(s)}C(s) \quad (4.6)$$

Modelos reducidos de un proceso

Con objeto de obtener un modelo lo más simple posible, algunos procesos industriales se pueden modelar por alguna de las siguientes funciones de transferencia [14]:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = P_i(s) = \frac{k_v}{s}e^{-Ls} \quad (4.7)$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = P_s(s) = \frac{k_p}{(\tau s + 1)}e^{-Ls} \quad (4.8)$$

Definición 4.1.1 *En el caso estable, se define “the average residence time” [14], como: $T_{ar} = L + \tau$, tal que para un determinado tiempo de respuesta, T_{ar} , es posible modelar el proceso considerando los valores de L y τ , que se consideren más apropiados.*

Sin pérdida de generalidad, se asume $L = dT$ ($d \in \mathbb{Z}^+$). Obteniéndose los siguientes modelos discretizados de (4.7) y (4.8):

$$\frac{y(z)}{u(z)} = P_i(z) = k_v T \frac{1}{z-1} z^{-d} \quad (4.9)$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = P_s(z) = k_p \frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}} z^{-d} \quad (4.10)$$

O de forma general:

$$\frac{y(z)}{u(z)} = P(z) = \frac{b}{z-a} z^{-d} = G(z)z^{-d} \quad (4.11)$$

siendo $a = 1$, $b = k_v T$ para el caso (4.9); y $a = e^{-T/\tau}$, $b = k_p(1 - e^{-T/\tau})$ para el caso (4.10).

En un entorno industrial lo más deseable es obtener modelos y estructuras de control lo más simples posibles. Con esta finalidad, en este capítulo se plantea un nuevo DTC para el control de sistemas estables o con un modo integrador, que permita un diseño de los controladores a partir de la estructura de la figura 4.1 haciendo uso del modelo simplificado (4.11).

4.2. Esquema de predicción estable

Predicción de la salida:

Si se denota como $\bar{y}(z)$ la salida del sistema libre de retardo, es decir, la respuesta del sistema:

$$\bar{y}(z) = G(z)u(z) \quad (4.12)$$

Haciendo uso de la identidad:

$$1 - \gamma^{-d} \equiv (\gamma - 1)(\gamma^{-d} + \dots + \gamma^{-2} + \gamma^{-1})$$

y definiendo:

$$\Phi(\gamma) \doteq \frac{1 - \gamma^{-d}}{\gamma - 1} = \gamma^{-d} + \dots + \gamma^{-2} + \gamma^{-1} \quad (4.13)$$

se deriva el siguiente Lema:

Lema 4.2.1. *La salida libre de retardo $\bar{y}(z)$, del sistema (4.11) se puede estimar como:*

$$\hat{y}(z) = \frac{b}{a} \Phi\left(\frac{z}{a}\right)u(z) + a^d y(z) \quad (4.14)$$

Con los parámetros a, b y d , definidos anteriormente.

Demostración: Haciendo uso de la expresión (4.13) con $\gamma = \frac{z}{a}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{y}(z) &= \frac{b}{a} \left[\frac{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-d}}{\frac{z}{a} - 1} \right] u(z) + a^d y(z) \\ &= (G(z) - G(z)a^d z^{-d})u(z) + G(z)a^d z^{-d}u(z) \\ &= G(z)u(z) \end{aligned}$$

■

Si no existen errores de modelado, ni ningún tipo de perturbación, se cumplirá que $\hat{y} \equiv \bar{y}$. Por lo que a partir de (4.14) se obtendrá una predicción perfecta de $\bar{y}(z)$.

Comentario 4.2.1 Si se realiza una expansión de la expresión (4.14), la predicción de la salida se puede obtener a partir de filtro FIR:

$$\hat{y}(z) = \left(\sum_{i=1}^d a^{i-1} b z^{-i} \right) u(z) + a^d y(z) = \Phi_{ab}(z)u(z) + a^d y(z) \quad (4.15)$$

De tal forma que la ley de predicción será estable aunque el modelo del proceso no lo sea.

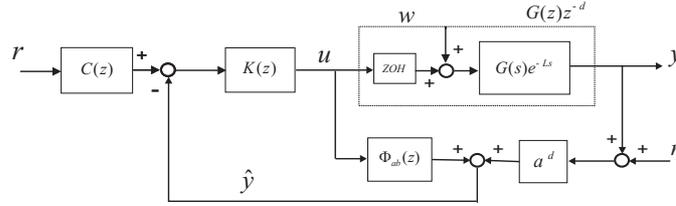


Figura 4.2. Esquema de control basado en la predicción de la salida

4.2.1. Esquema básico de estabilización:

Considérese el esquema de la figura 4.2, donde la predicción de la salida $\hat{y}(z)$, se estima a partir de la expresión (4.15), y el regulador $K(z)$ se corresponde con la versión discretizada de $K(s)$ diseñado según el esquema de la figura 4.1. Haciendo uso del Lema 4.2.1, la expresión que relaciona la salida del sistema en función de la perturbación de carga w , el ruido de medida n , y el set-point es:¹:

$$y = \frac{GKz^{-d}}{(1+GK)}C(z)r \quad (4.16)$$

$$+ \frac{Gz^{-d}}{(1+GK)}w + \frac{GKz^{-d}}{(1+GK)}\Phi_{ab}(z)w \quad (4.17)$$

$$- \frac{a^dGKz^{-d}}{(1+GK)}n \quad (4.18)$$

Demostración: La demostración es inmediata, basta con considerar que la ley de control-predicción se obtiene a partir de las expresiones:

$$u = K[Cr - \hat{y}]; \quad \hat{y} = \Phi_{ab}u + a^d(y + n) \quad (4.19)$$

y hacer uso del Lema 4.2.1. ■

Estabilidad interna y estabilidad robusta

Todas las funciones de sensibilidad (4.16-4.18), poseen el mismo denominador, por tanto, si se diseña el regulador K para estabilizar (4.16), se cumplirá la condición de estabilidad interna.

Respecto a la estabilidad robusta, si se considera incertidumbres multiplicativas, es decir, si se considera una planta real tal que: $P_r(z) = P(z)(1 + W_m(z))$, la condición de estabilidad robusta se obtiene a partir de la función de sensibilidad entre el ruido de medida y la salida del sistema [57].

¹ Con objeto de simplificar la notación, en lo que sigue y siempre que la notación quede suficientemente clara, se omitirá el argumento (z).

En el caso ideal del esquema de la figura 4.1, es bien conocido que ésta es:

$$\left\| \frac{KG}{1 + KG} \right\|_{\infty} < \delta \quad (4.20)$$

donde se define: $\delta \doteq 1/\|W_m\|_{\infty}$.

Para el esquema de la figura 4.2, esta condición se obtiene a partir de la expresión (4.18):

$$\left\| a^d \frac{KG}{1 + KG} \right\|_{\infty} < \delta \quad (4.21)$$

Comentario 4.2.2 Para el caso integral, donde $a = 1$, ambos esquemas, el ideal libre de retardo y el esquema básico de estabilización, presentan el mismo índice de robustez.

Comentario 4.2.3 Para el modelo de primer orden, donde $a^d = e^{-\frac{L}{\tau}}$, el índice de robustez se incrementará así como el retardo modelado L se incrementa con respecto a la constante de tiempo τ , tal que $L + \tau = T_{ar}$ se mantenga constante.

A partir de la expresión (4.16), está claro que el esquema básico de predicción se comporta igual que bucle libre de retardo con respecto al set-point, y por tanto si se diseña adecuadamente $K(z)$ se obtendrá un error de posición nulo con respecto a cambios en el set-point. Pero, si se observa la función de sensibilidad de la perturbación de carga, se puede apreciar un comportamiento distinto al del bucle libre de retardo. En concreto, para el modelo integral, $a = 1$, se tendrá un error en régimen permanente tal que²:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \Phi_{ab}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} b \frac{(1 - z^{-d})}{(z - 1)} = k_v L \quad (4.22)$$

y para el sistema de primer orden:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \Phi_{ab}(z) = b \frac{(1 - a^d)}{(1 - a)} = k_p (1 - e^{-\frac{L}{\tau}}) \quad (4.23)$$

Con objeto de superar esta limitación, en la siguiente sección se plantea un nuevo DTC que de una forma sencilla, permite un diseño de los controladores sin consideración del retardo (en ninguna de sus ecuaciones características), con unos resultados superiores o cuanto menos similares que en propuestas previas.

² Este límite resulta en una indeterminación y se resuelve aplicando la regla de *L'Hôpital*.

4.2.2. Un simple DTC (SDTC)

Considérese el esquema de la figura 4.3, donde la señal \bar{y}_c , se obtiene a partir de la predicción de la salida \hat{y} , compensada con la señal del error de predicción:

$$\bar{y}_c = \hat{y} + \hat{e}_y \tag{4.24}$$

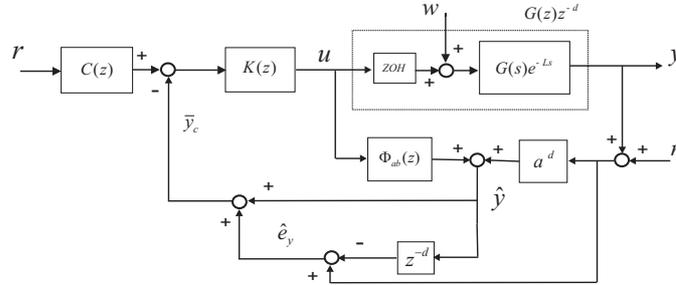


Figura 4.3. Un simple DTC (SDTC).

A partir de este esquema, y haciendo uso del Lema 4.2.1, se obtienen las siguientes expresiones:

$$y = \frac{GKz^{-d}}{(1 + GK)}Cr \tag{4.25}$$

$$+ \frac{Gz^{-d}}{(1 + GK)}w + \frac{GKz^{-d}}{(1 + GK)}(\Phi_{ab} - \Phi_{ab}z^{-d})w \tag{4.26}$$

$$- \frac{GKz^{-d}}{(1 + GK)}n + \frac{Ka^dGz^{-d}}{(1 + GK)}(z^{-d} - 1)n \tag{4.27}$$

Como se puede apreciar de las mismas, y al igual que para el esquema básico, el sistema es internamente estable. Por otro lado si se analizan las funciones de sensibilidad de la perturbación (4.26) y del ruido de medida (4.27), se puede apreciar que en régimen permanente, el esquema de predicción propuesto (SDTC), se comporta como el bucle ideal sin retardo de la figura 4.1. Notar que el segundo término de las expresiones (4.26) y (4.27), se anula en régimen permanente, es decir:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (\Phi_{ab} - \Phi_{ab}z^{-d}) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z^{-d} - 1) = 0$$

Para este esquema de predicción, la condición de estabilidad robusta es:

$$\left\| T_1 \frac{KG}{1 + KG} \right\|_{\infty} < \delta \tag{4.28}$$

donde:

$$T_1 \doteq \frac{(a^d - z^d)}{z^d} - a^d \quad (4.29)$$

Notar que para $|a| > 0$, el índice de robustez se reduce $\forall \omega \neq 0$

Para sistemas estables dado que se debe cumplir $\tau = T_{ar} - L$, si $L \gg \tau$, $a^d = e^{-\frac{L}{\tau}} \rightarrow 0$, entonces $\|T_1\|_\infty \rightarrow 1$.

Lema 4.2.2. Para sistemas con un modo integral $\|T_1\|_\infty = 3$, $\forall d > 0$.

Demostración:

$$|T_1(z)| = |-2 + z^{-d}|, \quad z = e^{jw} \quad \forall w \in [0, \pi/T]$$

Es trivial demostrar que el $\sup_\omega |T_1(e^{jw})|$ se obtiene para una frecuencia $\omega d = \pi$ así como que

$$\lim_{w \rightarrow \pi/d} e^{-jwd} = -1.$$

Con lo cual, $\|T_1\|_\infty = 3 \quad \forall d > 0$. ■

Por otro lado, notar que $\lim_{w \rightarrow 0} e^{-jwd} = 1$, siendo $|T_1(e^{jw})| = 1$, $\forall d > 0$. Por tanto $w d \simeq 0 \rightarrow |T_1(e^{jw})| \simeq 1$,

Si bien, y para ambos casos, cuanto mayor sea el valor del retardo considerado, L , menor será la frecuencia a la cual se alcanza el primer máximo de la función $|T_1|$.

El uso del error de predicción es necesario, si se desea cancelar el error en régimen permanente, pero ello implica una reducción del índice de robustez (4.28). Esta limitación será superará en la Sección 4.2.3.

4.2.3. Mejora de la robustez

Con objeto de mejorar la robustez del SDTC, de forma similar a [87], es posible filtrar el error de predicción \hat{e}_y , tal que:

$$\bar{y}_c(z) = \hat{y}(z) + F_2(z)\hat{e}_y(z) \quad (4.30)$$

A partir de la figura 4.4, y haciendo uso del Lema 4.2.1, se obtienen las siguientes expresiones:

$$y = \frac{GKz^{-d}}{(1 + GK)}Cr \quad (4.31)$$

$$+ \frac{Gz^{-d}}{(1 + GK)}w + \frac{GKz^{-d}}{(1 + GK)}(\Phi_{ab} - F_2\Phi_{ab}z^{-d})w \quad (4.32)$$

$$- \frac{F_2GKz^{-d}}{(1 + GK)}n + \frac{Ka^dGz^{-d}}{(1 + GK)}(F_2z^{-d} - 1)n \quad (4.33)$$

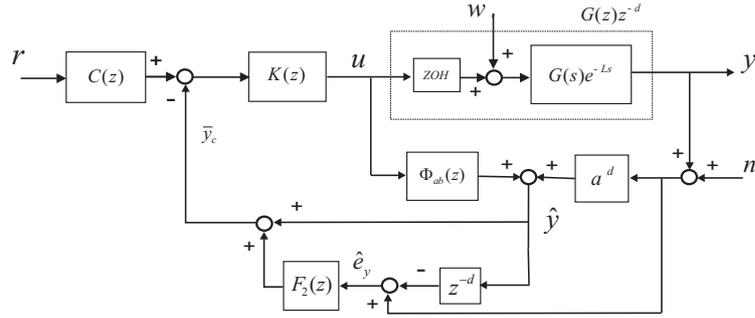


Figura 4.4. SDTC con filtrado del error de predicción.

El filtro F_2 , no afecta a la estabilidad interna del SDTC. Pero la nueva condición de estabilidad robusta es:

$$\left\| T_2 \frac{KG}{1 + KG} \right\|_{\infty} < \delta \quad (4.34)$$

donde:

$$T_2 \doteq \frac{F_2(a^d - z^d)}{z^d} - a^d \quad (4.35)$$

siendo la nueva relación entre la perturbación y la salida:

$$\frac{y}{w} = \frac{Gz^{-d}}{(1 + KG)} + \frac{KGz^{-d}}{(1 + KG)} (\Phi_{ab} - F_2\Phi_{ab}z^{-d}) \quad (4.36)$$

En base a estas nuevas condiciones, y con objeto de aumentar el índice de robustez, es posible diseñar un filtro F_2 tal que:

$$\left| T_2 \frac{KG}{1 + KG} \right| < \left| T_1 \frac{KG}{1 + KG} \right|$$

entorno al rango de frecuencias deseado. De igual forma, y con objeto de obtener un error en régimen permanente nulo se deberá cumplir $F_2(1) = 1$.

4.3. Rechazo de perturbaciones

Una de las especificaciones más comunes a la hora de diseñar un sistema de control, es obtener una respuesta sobre-amortiguada.

Para el Predictor de Smith (SP), si se diseña el regulador K , tal que la respuesta de la salida ante cambios en la perturbación de tipo escalón sea de tipo sobre-amortiguado, entonces es posible computar el error absoluto integral (IAE) como el error integral (IE) [14]. En [50, 14], se obtiene la siguiente expresión analítica del IAE para un simple DTC:

$$IAE_{SP} = k_p(T_r + L) \quad (4.37)$$

donde T_r se define como la constante de tiempo deseada en bucle cerrado.

Siguiendo estas consideraciones, para el SDTC se obtiene la siguiente expresión:

$$IAE = \lim_{z \rightarrow 1} G_{yw}(z) \frac{T}{(z-1)} \quad (4.38)$$

donde:

$$G_{yw}(z) = \frac{Gz^{-d}}{(1+GK)} + \frac{GKz^{-d}}{(1+GK)}(\Phi_{ab} - \Phi_{ab}z^{-d}) \quad (4.39)$$

Definición 4.3.1 *Del esquema de la figura 4.1, se define la constante de tiempo deseada del sistema en bucle cerrado entre las variables \bar{r} y la salida sin retardo \bar{y} como T_r , es decir:*

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} = \frac{1}{T_r s + 1}$$

A partir de esta definición se considera el siguiente regulador PI:

$$K(z) = \frac{(1-\alpha)(z-q_0)}{b(z-1)} = \mathcal{Z} \left[k \frac{(t_i s + 1)}{t_i s} \right] \quad (4.40)$$

donde $\alpha = e^{-T/T_r}$.

4.3.1. Sistemas estables

Para sistemas estables, y si se considera el SDTC, es posible diseñar el regulador K , tal que $q_0 = a$, de forma que la expresión (4.38) se puede computar como³:

$$\begin{aligned} IAE &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{bT}{z^2 - (a+\alpha)z + a\alpha} + (\Phi_{ab} - \Phi_{ab}z^{-d}) \frac{T}{z-1} \right) \\ &= \frac{k_p T}{(1-\alpha)} + \lim_{z \rightarrow 1} (\Phi_{ab} - \Phi_{ab}z^{-d}) \frac{T}{z-1} \end{aligned}$$

Comentario 4.3.1 *El segundo término de la expresión anterior es una indeterminación, que se resuelve por L'Hopital:*

$$\lim_{z \rightarrow 1} (\Phi_{ab} - \Phi_{ab}z^{-d}) \frac{T}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \Phi_{ab} dT$$

Notar que $d = L/T$, entonces:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \Phi_{ab}(z) dT = k_p (1 - e^{-\frac{L}{T}}) L \quad (4.41)$$

Por lo anterior el IAE se puede computar como:

$$IAE = \frac{T}{(1-\alpha)} k_p + k_p (1 - e^{-\frac{L}{T}}) L \quad (4.42)$$

³ Para el caso estable notar que $a \neq 1$

Caso ideal $T \rightarrow 0$ En (4.42), o equivalentemente en el esquema de la figura 4.3, se considera que la situación ideal es cuando $T \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{T \rightarrow 0} = \frac{T}{(1 - e^{-T/T_r})} k_p = k_p T_r$$

lo cual implica que:

$$IAE_c = k_p T_r + k_p (1 - e^{-\frac{L}{\tau}}) L = t_i/k + k_p (1 - e^{-\frac{L}{\tau}}) L \quad (4.43)$$

Notar que para el SDTC, si se modela tal que $L \gg \tau$, $e^{-\frac{L}{\tau}} \rightarrow 0$, entonces el IAE del SDTC converge al del convencional SP (ver ecuación 4.37), pero en caso contrario lo mejora.

4.3.2. Sistemas integrativos

Para sistemas integrativos, $a = 1$, $q_0 \neq a$, entonces (4.38) se computa como:

$$\begin{aligned} IAE &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{bTz^{-d}}{((z-1)^2 + (1-\alpha)(z-q_0))} + \Phi_{ab} dT \right) \\ &= \frac{k_v T^2}{(1-\alpha)(1-q_0)} + k_v L^2 \end{aligned}$$

Caso ideal $T \rightarrow 0$ Notar que $\frac{(1-\alpha)}{b} = k \frac{(T+t_i)}{t_i}$, y $q_0 = \frac{t_i}{T+t_i}$, entonces si $T \rightarrow 0$, se obtiene⁴:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{bT}{(1-\alpha)(1-q_0)} = t_i/k$$

Tal que el IAE se puede computar como:

$$IAE_c = t_i/k + k_v L^2 \quad (4.44)$$

4.3.3. Efectos del filtro F_2 sobre el IAE

Respecto al rechazo de perturbaciones, en [52], se realiza un estudio del esquema de predicción con un filtro de primer orden en el error de predicción, propuesto inicialmente en [87]. Considerando respuesta sobreamortiguada, se obtiene que IAE se puede obtener de forma analítica a partir de la siguiente expresión:

$$IAE = K_p (T_r + L + \lambda_1)$$

donde λ_1 es la constante de tiempo del filtro considerado.

⁴ Este límite es una indeterminación que se resuelve por L'Hopital

Para nuestra propuesta, si se considera el siguiente filtro sobre el error de predicción:

$$F_2(z) = \alpha \frac{(z - \alpha_0)}{(z - \beta)} = \mathcal{Z} \left[\frac{\lambda_0 s + 1}{\lambda_1 s + 1} \right] \quad (4.45)$$

donde: $\alpha = (\lambda_0/\lambda_1)$, $\beta = e^{-\frac{T}{\lambda_1}}$, and, $\alpha_0 = \beta + (\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0})(1 - \beta)$

En el SDTC, para el caso ideal, $T \rightarrow 0$, y operando de forma similar que en los casos anteriores, se obtiene:

Para el caso estable:

$$IAE_c = t_i/k + k_p(1 - e^{-\frac{L}{T}})(L + \lambda_1 - \lambda_0) \quad (4.46)$$

Para el caso integrativo:

$$IAE_c = t_i/k + k_v L(L + \lambda_1 - \lambda_0) \quad (4.47)$$

Como se puede apreciar, la consideración de un cero en el filtro F_2 mejora la respuesta al rechazo de perturbaciones (reduce el IAE), y si se realiza un adecuado diseño del filtro, esta mejora no implica necesariamente una reducción del índice de robustez (ver ejemplos en las secciones 4.5 y 4.6).

4.4. Ajuste del DTC propuesto

Tanto para sistemas estables como integrativos la metodología de diseño es similar. En el diagrama de la figura 4.1 se ajusta el regulador $K(s)$ para obtener una respuesta críticamente sobre-amortiguada. En el ajuste de los parámetros del controlador, podrá utilizarse cualquiera de las técnicas clásicas de diseño de controladores o, para sistemas estables, a partir de algún método específico de ajuste de DTCs [47, 73, 90, 52]. Con objeto de poder realizar una posterior ajuste on-line, un PI es una buena opción. Dado que para este tipo de sistemas se supone que el retardo es dominante, no es crítico si el ajuste se realiza con objeto de obtener una respuesta más o menos rápida. Para sistemas integrativos, el sistema en bucle cerrado será:

$$M(s) = \frac{GK}{1 + GK} = \frac{k_c k_v (s + 1/t_i)}{s^2 + k_c K_v s + k_c k_v / t_i}$$

Notar que cuanto menor sea la relación t_i/k_c , menor será el índice de robustez del DTC propuesto.

Por contra, y para ambos sistemas cuanto menor sea la relación t_i/k mayor será el rechazo ante perturbaciones de carga (ver ecuaciones 4.43 y 4.44, para sistemas estables e integrativos respectivamente). Estas relaciones, podrán ser utilizadas para un posterior ajuste on-line, con objeto de mejorar la robustez o la respuesta al rechazo de perturbaciones.

Una vez ajustado el controlador $K(s)$, se realizara el ajuste del regulador $C(s)$ a partir del esquema de la figura 4.1, con la técnica de diseño que se considere más apropiada, y con objeto de obtener la respuesta deseada al seguimiento de la referencia.

De forma genérica, cuando se realiza el ajuste de un DTC, una mejora en la respuesta a las perturbaciones implica un decremento del índice de robustez, y viceversa [116]. Para superar esta restricción, es posible utilizar el filtro de predicción (4.45), tal que el índice de robustez (4.35) se incremente a las frecuencias deseadas.

De forma cualitativa, destacar que el ajuste del filtro F_2 modifica la función del índice de robustez como sigue: si $\lambda_0 > \lambda_1$, T_2 decrece ligeramente a bajas frecuencias pero aumenta a frecuencias altas. Por contra, si $\lambda_0 < \lambda_1$ se obtiene el comportamiento inverso, es decir, se aumenta el índice de robustez a altas frecuencias y se disminuye a bajas. La relación λ_0/λ_1 determinará el incremento o decremento en el índice de robustez, y la frecuencia a la cual se produce el punto de inflexión. Para el rechazo de perturbaciones tipo rampa, el filtro F_2 se diseñará según los mismos criterios propuestos en [139]. En la siguiente sección se muestran varios ejemplos numéricos del diseño de estos parámetros.

Notar que, algunos sistemas pueden presentar su pico de resonancia o mayor grado de incertidumbre a bajas frecuencias (ver resultados experimentales, sección 4.6), con lo cual un diseño tal que $\lambda_1 < \lambda_0$ mejorará ambos, el índice de robustez (4.35), y el rechazo de perturbaciones (ver ecuación 4.47).

Para mostrar el procedimiento de diseño, se presentan a continuación una serie de ejemplos, comparando los resultados obtenidos con las mejores propuestas de DTC presentadas hasta la fecha, para el control de este tipo de sistemas.

4.5. Simulaciones

En esta sección, el SDTC se va a comparar con las tres soluciones más efectivas, hasta la fecha, para el control de sistemas integrativos. En el primer ejemplo, el SDTC se compara con el esquema propuesto por Normey-Rico y Camacho [90], en el segundo y tercer ejemplos el SDTC se compara con el reciente trabajo publicado por Torrico y Normey-Rico [116], y por último, ejemplo 4.5.4, el SDTC se compara con el esquema propuesto por Zhong y Normey-Rico [139], el cual, junto a una mejora propuesta para su implementación en [136], se considera como la mejor solución para el control de este tipo de sistemas.

En este último ejemplo, la comparación se realiza mostrando que el SDTC, al igual que el esquema propuesto por Zhong y Normey-Rico, es capaz de obtener un error nulo en régimen permanente ante perturbaciones de tipo rampa.

Comparación con el DTC propuesto en Normey-Rico y Camacho.

EJEMPLO 4.5.1. *Considérese el proceso estudiado en [90]:*

$$P(s) = \frac{0,1}{s(s+1)(0,5s+1)(0,1s+1)} e^{-8s}$$

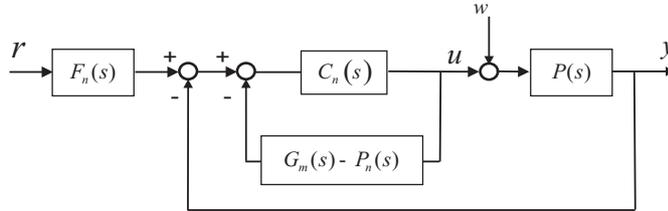


Figura 4.5. Estructura del esquema 2DoF propuesto en [90].

En [90], los modelos utilizados para la implementación del esquema de predicción (ver figura 4.5), fueron:

$$G_m(s) = 0,1 \frac{(1 - 9,7s)}{s}; \quad P_n(s) = \frac{0,1}{s} e^{-9,7s}$$

Y los reguladores diseñados:

$$C_n(s) = 0,91638 \frac{(s + 0,05155)}{s}$$

$$F_n(s) = 0,71324 \frac{(s + 0,2062)^2}{(s + 0,5882)(s + 0,05155)}$$

Para la implementación del SDTC (figura 4.3) se considera el siguiente modelo simplificado⁵:

$$P_i(s) = \frac{0,1}{s} e^{-9,6s}$$

Para este modelo, y a partir del esquema de la figura 4.1, se diseñan el siguiente regulador PI y pre-filtro:

$$K(s) = 3 \frac{(s + 0,05)}{s}; \quad C(s) = M(s)^{-1} \frac{1}{(1,8s + 1)}$$

⁵ Este modelo se ha obtenido considerando las constantes de tiempo desestimadas como parte del retardo. Esta simplificación ya fue introducida por Matausek y Micié [72].

donde:

$$M(s) = \frac{GK}{1 + GK} = \frac{0,3(s + 0,05)}{(s + 0,2366)(s + 0,0634)}$$

Para un periodo de muestreo $T = 0,1s$, y considerando el caso nominal, se obtiene los resultado de la figura 4.6. En la figura 4.7, a semejanza de [90], se muestra la acción de control para ambos esquemas

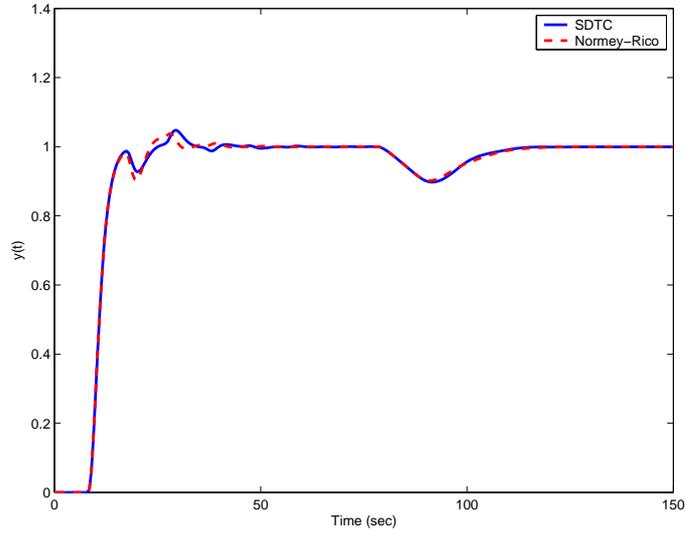


Figura 4.6. Respuesta nominal para una perturbación $w = -0,1$ en el instante de tiempo $t = 70s$ (ejemplo 4.5.1).

Si se considera la misma incertidumbre que en [90], es decir, si se considera que el retardo real es $L = 9s$, los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.8. Pero si el retardo real considerado es $L_r = 10s$, y se considera un error del 10% en la ganancia y en la constante de tiempo dominante, es decir, si la planta real es:

$$P_r(s) = \frac{0,11}{s(1,1s + 1)(0,5s + 1)(0,1s + 1)} e^{-10s} \quad (4.48)$$

se obtiene los resultados de la figura 4.9, donde se puede apreciar la mayor robustez del SDTC frente al esquema propuesto por Normey-Rico et al.

Comentario 4.5.1 En el caso nominal, y a partir de la ecuación (4.44), es posible determinar el IAE correspondiente al rechazo de la perturbación como:

$$IAE_c = t_i/k + k_v L^2 = 6,6667 + 9,2160 = 15,8827 \quad (4.49)$$

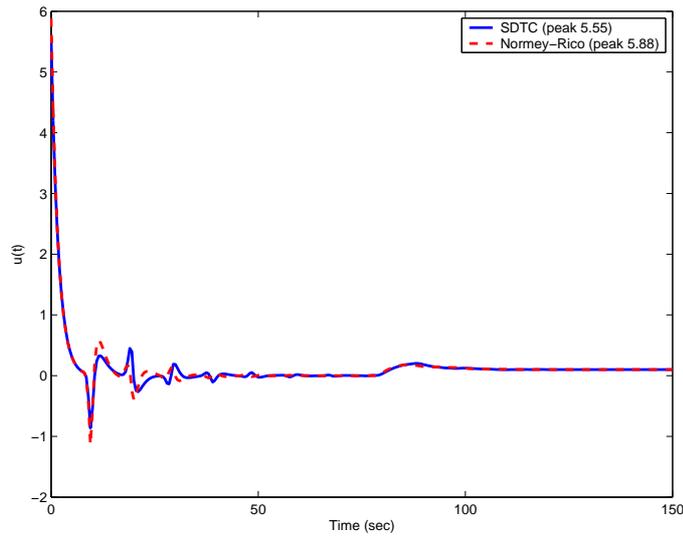


Figura 4.7. Acción de control (ejemplo 4.5.1).

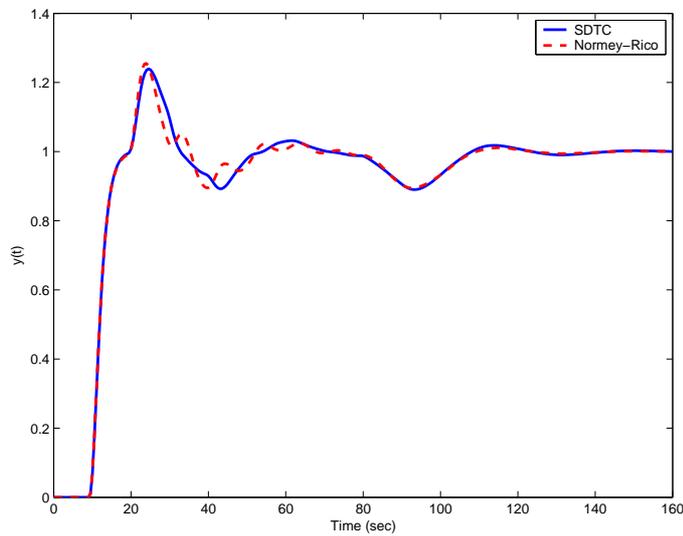


Figura 4.8. Respuesta del sistema, para un proceso real con un retardo $L_r = 9s$, y una perturbación $w = -0,1$, en el instante de tiempo $t = 70s$ (ejemplo 4.5.1).

De la simulación del esquema de la figura 4.3, se determina que el IAE real es 15,8820, y el correspondiente al esquema propuesto por Normey-Rico es 16,4658. Notar que si la acción integral t_i se reduce, o la constante k se incrementa, se puede reducir el IAE en el SDTC. Si fuera necesario un incremento

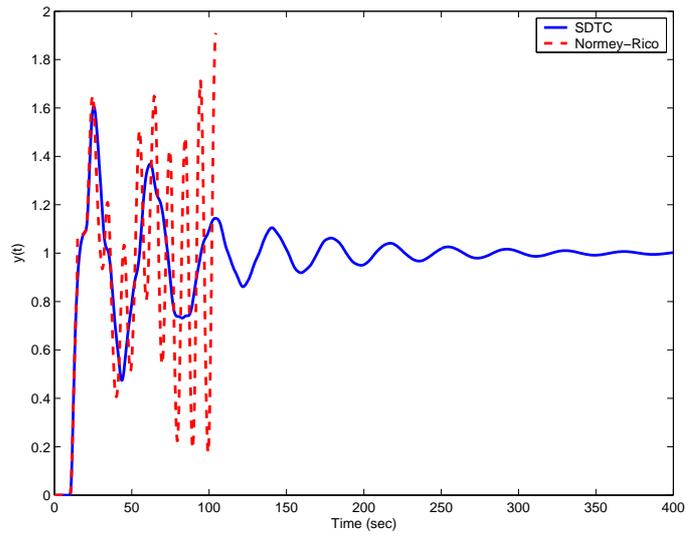


Figura 4.9. Respuesta del sistema cuando el proceso real es el de la expresión (4.48) (ejemplo 4.5.1).

en el índice de robustez, también es posible aumentar el mismo a través del diseño del filtro F_2 (4.35).

◇

Comparación con el DTC propuesto en Torrico y Normey-Rico [116].

En esta sección se va a comparar el SDTC con el reciente esquema propuesto en [116] (figura 4.10). Este esquema es una versión discretizada del previamente propuesto por Zhong y Normey-Rico [139].

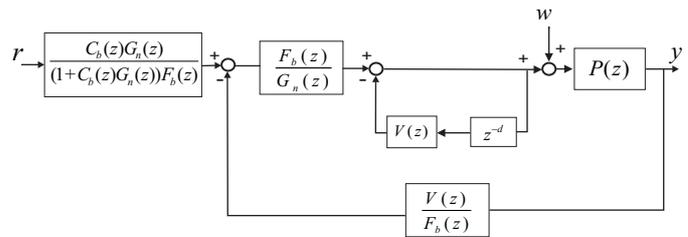


Figura 4.10. DTC propuesto en [116] para la implementación.

EJEMPLO 4.5.2. *Considérese la siguiente planta estable, previamente estudiada en [116]:*

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(0,5s+1)(0,25s+1)(0,125s+1)} e^{-9,7s}$$

En [116] el modelo reducido considerado es:

$$P_n(s) = G_n(s)e^{-10s} = \frac{1}{(s+1)(0,6s+1)} e^{-10s}$$

Para un periodo de muestreo $T = 1s$, en [116], los controladores fueron ajustados como:

$$C_b(z) = \frac{0,5448z - 0,2}{z - 1}; \quad V(z) = \frac{0,5654}{z - 0,4346}; \quad F_b(z) = \frac{0,9179}{z - 0,08208}$$

El filtro $F_b(z)$ debe ser incluido con objeto de obtener una función de transferencia $F_b(z)/G_n(z)$ realizable (ver figura 4.10).

Para el diseño del SDTC, se considera como modelo del proceso a controlar la siguiente función de transferencia:

$$P_s(s) = \frac{1}{(s+1)} e^{-10,6s}$$

El regulador PI y pre-filtro diseñados sobre el modelo libre de retardo son:

$$K(s) = 0,8 \frac{s+1}{s}; \quad C(s) = M(s)^{-1} \frac{1}{(s+1)}$$

donde $M(s) = \frac{GK}{1+GK} = \frac{0,8}{(s+0,8)}$.

Para un periodo de muestreo $T = 0,1s$, se obtienen los resultados mostrados en la figura 4.11. Tal y como se indica en [116], si se considera un error del 10% en la estimación del retardo, los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.12. De ambas simulaciones se pueden apreciar unas prestaciones similares.

◇

EJEMPLO 4.5.3. *Considérese el sistema previamente estudiado en [116]:*

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(0,5s+1)(0,2s+1)(0,1s+1)} e^{-5s}$$

En [116], el modelo considerado es:

$$P_n(s) = \frac{1}{s(1,2s+1)} e^{-5,6s}$$

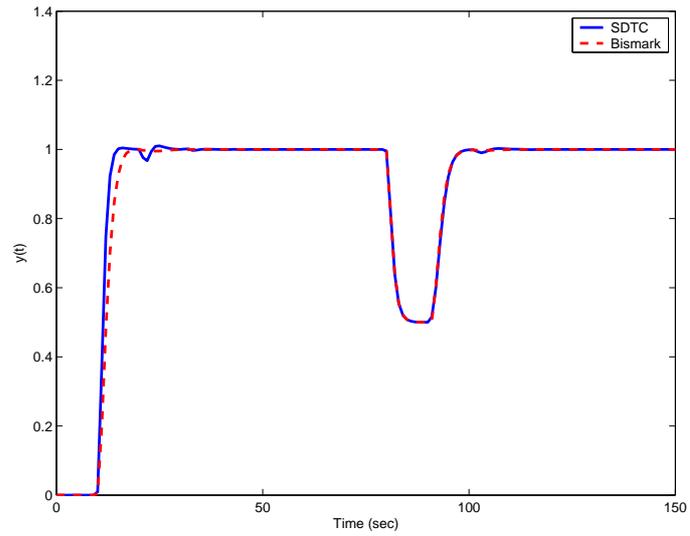


Figura 4.11. Respuesta nominal para una perturbación $w = -0,5$, en el instante de tiempo $t = 70$ s (ejemplo 4.5.2).

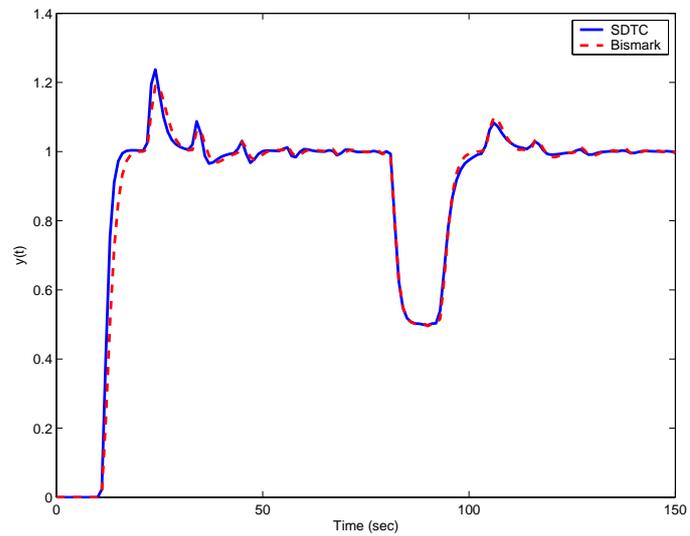


Figura 4.12. Respuesta del sistema ante errores en el retardo modelado (ejemplo 4.5.2).

Con un periodo de muestreo $T = 0,5$ s, los reguladores diseñados fueron:

$$C_b(z) = 0,2; \quad V(z) = \frac{0,332z - 0,321}{(z - 0,895)^2}; \quad F_b(z) = \frac{0,7135}{z - 0,2865}$$

Para la implementación del esquema aquí propuesto (SDTC), el modelo utilizado es:

$$P_i(s) = \frac{1}{s} e^{-6,8s}$$

El regulador PI y pre-filtro diseñados sobre el modelo libre de retardo son:

$$K(s) = 1,2 \frac{s + 0,1}{s}; \quad C(s) = M(s)^{-1} \frac{1}{(2s + 1)^2}$$

$$\text{donde } M(s) = \frac{1,2(s+0,1)}{(s+1,09)(s+0,1101)}.$$

Con objeto de aumentar la robustez en el SDTC, se introduce el filtro F_2 . El ajuste del mismo se realiza teniendo en consideración la influencia del parámetro λ_0 tanto en el índice de robustez (4.34), como en el IAE (4.47).

A partir de la norma infinito, $\|\frac{KG}{1+KG}\|_\infty$, se obtiene la frecuencia del máximo de la función $|\frac{KG}{1+KG}|$, siendo ésta: $w_{peak} = 0,1694$. Por lo que una primera aproximación sería diseñar un filtro tal que su frecuencia de corte incluyera esta frecuencia. Es decir, siendo $F_2(s) = \frac{\lambda_0 s + 1}{\lambda_1 s + 1}$, $\frac{1}{w_{peak}} \simeq \lambda_1 = 6$. Con objeto de mostrar la influencia del cero del filtro, tanto en el índice de robustez como en el IAE, se diseña el filtro para $\lambda_0 = 0, 1, 2$. Los efectos del filtro sobre el factor corrector del índice de robustez T_2 , se muestran en la figura 4.13.

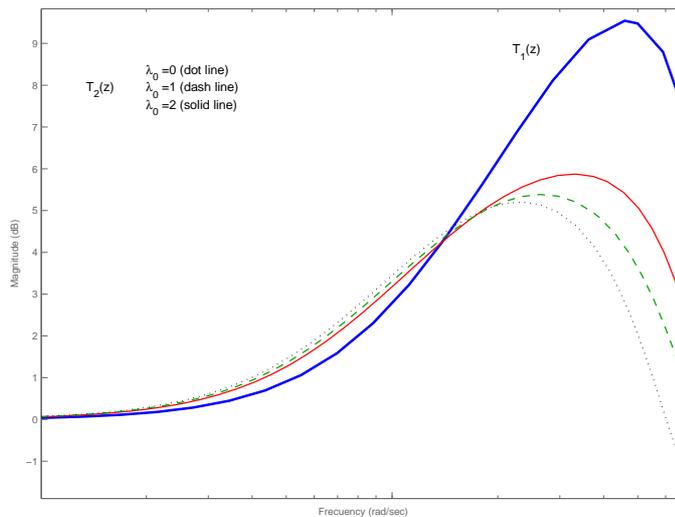


Figura 4.13. Respuesta en frecuencia del factor T_2 .

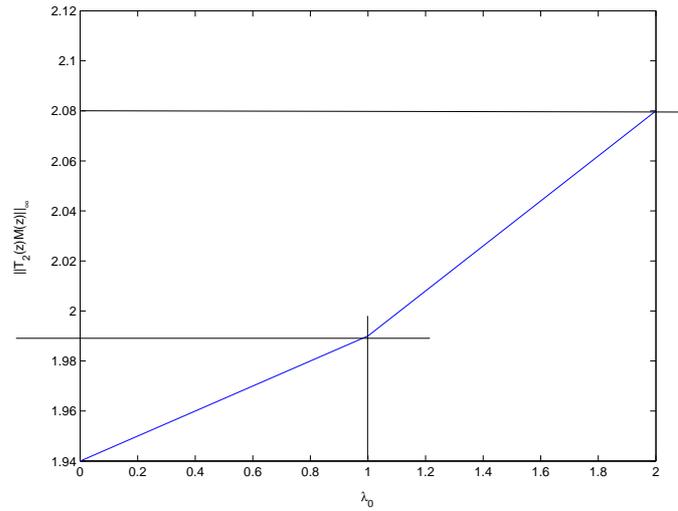


Figura 4.14. Cota máxima del índice de robustez en función de $\lambda_0 = \{0, 1, 2\}$.

Notar que el índice de robustez no se reduce significativamente, esto es: 1,94, 1,99 y 2,08 para $\lambda_0 = \{0, 1, 2\}$ respectivamente (ver figura 4.14). Mientras que el IAE sí que lo hace (ver figura 4.15). El IAE para los tres diferentes valores de $\lambda_0 = \{0, 1, 2\}$ es : 9,51, 8,82 y 8,14 respectivamente.

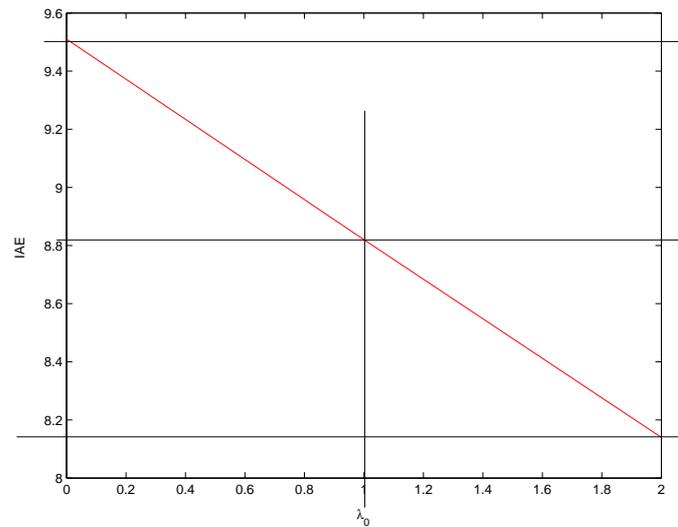


Figura 4.15. IAE en función de $\lambda_0 = \{0, 1, 2\}$.

Por todo ello se determina:

$$F_2(s) = \frac{2s + 1}{6s + 1}$$

Para un periodo de muestreo $T = 0,1s$, se obtienen los resultados de la figura 4.16. Si el error considerado es del 20 % en la estimación del retardo, y del 50 % en la constante de tiempo dominante, los mismos errores considerados en [116], los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.17. Pero si se considera un error 50 % en la constante de tiempo dominante, y el retardo es tal que $L_r = 6,6s$, se obtienen los resultados de la figura 4.18. Notar que el esquema propuesto por Torrico et al. se hace inestable, mientras que la respuesta del SDTC no lo es.

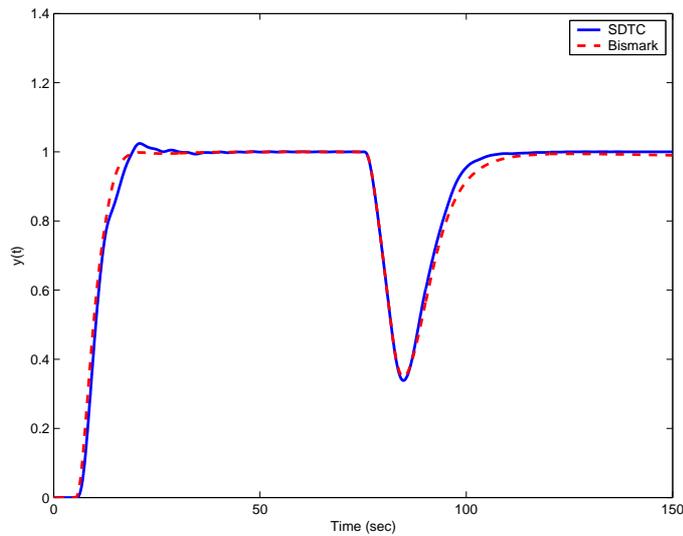


Figura 4.16. Respuesta nominal para una perturbación $w = -0,1$, en el tiempo $t = 70s$ (ejemplo 4.5.3).

Comentario 4.5.2 Notar que en el DTC propuesto por Torrico et al., la función de transferencia entre la perturbación y la salida del sistema es:

$$\frac{y(z)}{w(z)} = P_n(z)(1 - V(z)z^{-d}) \quad (4.50)$$

De forma que, si debido a errores numéricos, de implementación o de cualquier otro tipo, no se cumple la condición $V(1) \neq 1$, el sistema será inestable. Notar que $P_n(z)$ posee un integrador, y que por tanto la expresión anterior crecerá indefinidamente.

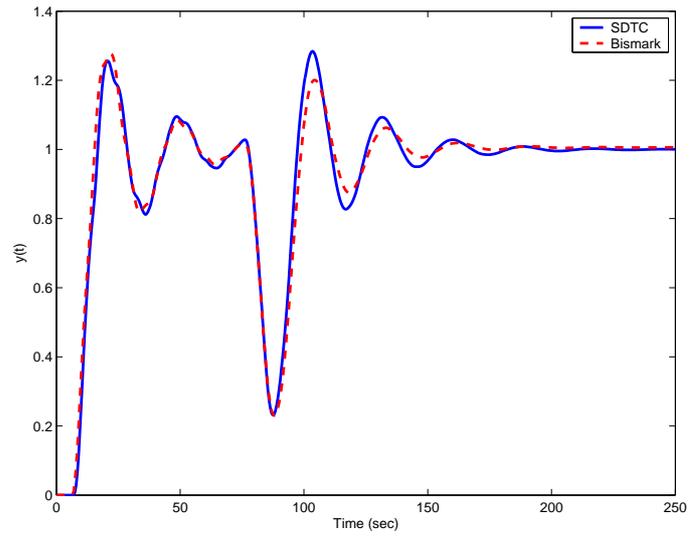


Figura 4.17. Respuesta para un error en la estimación del retardo del 20%, y del 50% en la constante de tiempo dominante (ejemplo 4.5.3).

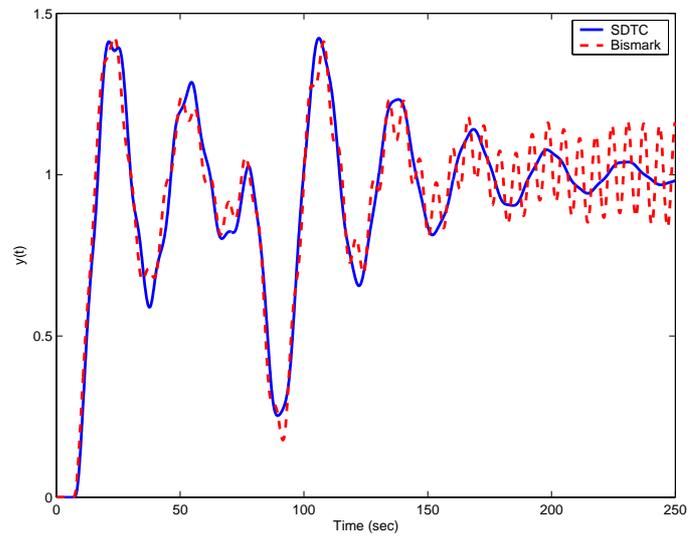


Figura 4.18. Respuesta para un error del 50% en la constante de tiempo dominante, y un retardo real $L_r = 6,6s$ (ejemplo 4.5.3).

Para solucionar este problema de inestabilidad numérica, en esta tesis se propone el esquema equivalente de la figura 4.19, donde:

$$W(z) = \frac{V(z)}{1 - V(z)}(1 - z^{-1})$$

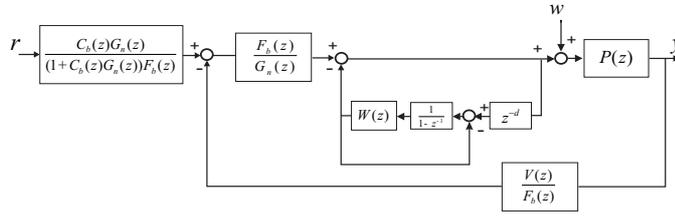


Figura 4.19. Esquema propuesto en esta tesis para evitar la inestabilidad del esquema propuesto por Torrico et al. (figura 4.10).

◇

Rechazo de perturbaciones tipo rampa

En esta sección, y a través de un ejemplo, se va a mostrar como es posible un diseño del SDTC para el rechazo de perturbaciones tipo rampa. El ejemplo se desarrolla en comparación con el diseño propuesto por Zhong y Normey-Rico en [139], mostrándose una equivalencia en la simplicidad del diseño de los controladores, para una ligera mejora de la respuesta obtenida a partir del SDTC, tanto en la mejora del IAE respecto al rechazo de perturbaciones, como en la robustez ante errores de modelado.

EJEMPLO 4.5.4. El esquema propuesto en [139] (figura 4.20), se considera como el mejor DTC, para el control de procesos integrativos con retardos temporales. Entre sus ventajas, con respecto a métodos precedentes, está que el mismo se puede diseñar para el rechazo de perturbaciones de naturaleza arbitraria.

En este ejemplo, y de forma similar que en [139], vamos a mostrar que el SDTC también puede ser diseñado para el rechazo de perturbaciones tipo rampa.

Considérese el proceso estudiado en [139]:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(0,5s+1)(0,2s+1)(0,1s+1)} e^{-5s}$$

En [139], y con objeto de obtener unos controladores más sencillos, se considera un diseño de los mismos a partir de un modelo reducido:

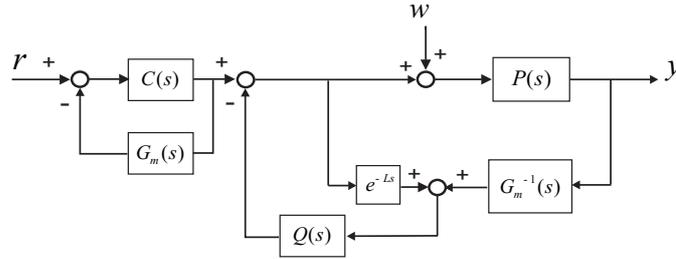


Figura 4.20. Esquema de observación propuesto en [139].

$$P_m(s) = G_m(s)e^{-6,5s} = \frac{1}{s}e^{-6,5s}$$

Para el rechazo de perturbaciones tipo rampa, el filtro $Q(s)$ se define como:

$$Q(s) = \frac{(1 + \mu s + \beta s^2)}{(\lambda s + 1)^3}$$

donde los parámetros μ , y β se determinan como función del retardo modelado, del grado relativo del modelo considerado, y del parámetro de diseño λ , tal que:

$$\begin{aligned} \mu &= (d_r + 2)\lambda + L_m \\ \beta &= \frac{(L_m)^2 + \lambda(d_r + 2)((d_r + 1)\lambda + 2L_m)}{2} \end{aligned}$$

donde $L_m = 5$ se define como el retardo del modelo, $d_r = 1$ como el grado relativo del modelo, y $\lambda = 5$, como un parámetro de ajuste. Cuanto mayor es el valor de λ más robusto es el sistema, si bien también se obtiene una respuesta más lenta al rechazo de perturbaciones (ver sección 3.3.2 para más detalles).

Para el diseño del SDTC, el modelo considerado es:

$$P_i(s) = \frac{1}{s}e^{-6,8s}$$

El regulador K se diseña a partir del esquema de la figura 4.1, para el rechazo de perturbaciones de tipo rampa:

$$K(s) = 10 \frac{(s + 0,1)^2}{s^2}$$

El pre-filtro sobre el set-point se determina como:

$$F_1(s) = \frac{1}{4s + 1}$$

Para el ajuste del filtro $F_2(s)$, notar que la función de transferencia entre la perturbación y la variable controlada es:

$$G_{yw}(z) = \frac{Gz^{-d}}{(1+GK)} + \frac{GKz^{-d}}{(1+GK)}(\Phi_{ab} - F_2(z)\Phi_{ab}z^{-d})$$

De forma que si $F_2(s)$ se ajusta de forma similar a $Q(s)$ pero con $\lambda = 7$, se obtiene:

$$F_2(s) = \frac{0,9123(s^2 + 0,08884s + 0,003196)}{(s + 0,1429)^3}$$

Para un periodo de muestreo $T = 0,05s$, se obtiene los resultados de la figura 4.21. Notar que el IAE para el rechazo de la perturbación en el SDTC es 5,76, mientras que en el esquema propuesto por Zhong es 5,85.

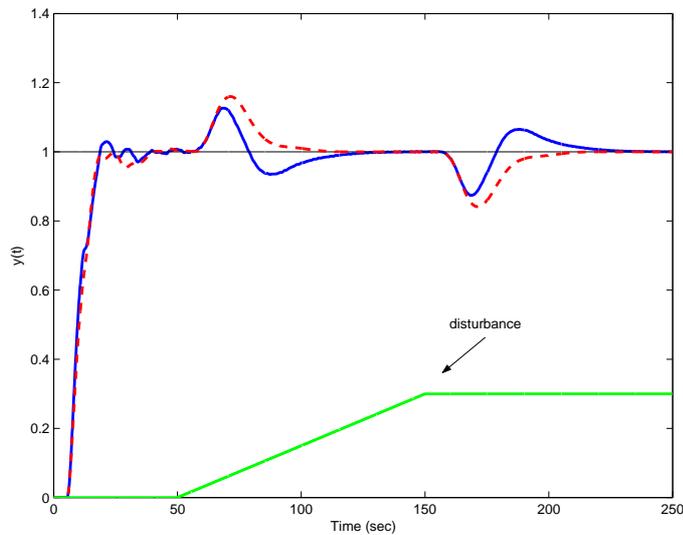


Figura 4.21. Respuesta nominal al rechazo de perturbaciones tipo rampa SDTC (solid line), Zhong (dash line)

Sin embargo, cuando se considera un error sobre el retardo modelado, tal que el retardo real sea 5,9 s, las respuestas obtenidas, con los mismos controladores y ante un escalón unitario en el set-point, se muestran en la figura 4.22. Notar que la respuesta en el esquema de Zhong se hace inestable. \diamond

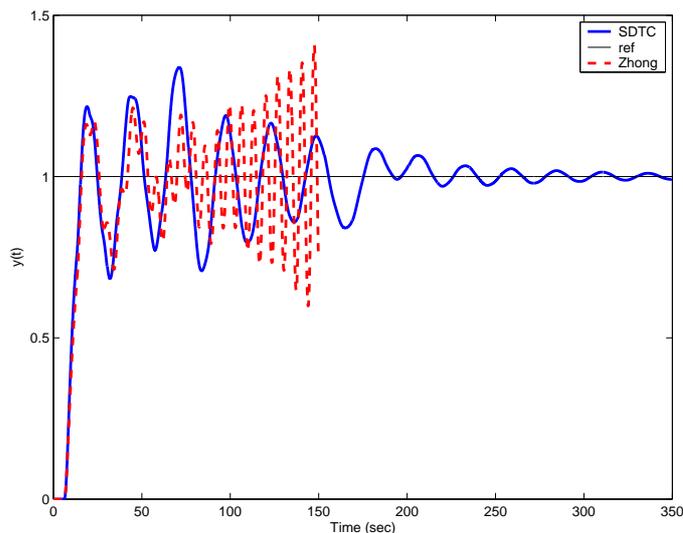


Figura 4.22. Respuesta del sistema para un retardo real $L_r = 5,9s$.

4.6. Resultados experimentales

Con objeto de validar las prestaciones del SDTC en una aplicación real, a continuación se presenta una implementación del SDTC para el control del ángulo del roll sobre un prototipo de un helicóptero de 4 motores de *Quanser*[®]. Destacar, que el objeto de experimento es la validación del esquema de predicción propuesto, y no el control del mencionado prototipo.

Considérese el prototipo de la figura 10.1 (ver Sección 10 para más detalles). El ángulo del “roll” se define como la rotación entorno al eje “X”. Asumiendo que el “pitch” es cero, es posible obtener el siguiente modelo:

$$\ddot{r} = (F_r - F_l) \frac{d_r}{J_r} = (V_r - V_l) K_{fc} \frac{l}{J_r}$$

Si se define $u := (V_r - V_l)$, es posible definir la función de transferencia entre la variable auxiliar u y el ángulo del roll r , como:

$$G(s) = \frac{r(s)}{u(s)} = \frac{K_{fcl}/J_r}{s^2} \quad (4.51)$$

Sustituyendo los correspondientes valores numéricos (ver Sección 10), se obtiene:

$$G(s) = \frac{2,1176}{s^2} \quad (4.52)$$

Como ley de control, se transforma un regulador LQR diseñado en [102], en un un PD equivalente. Con objeto de obtener un error de posición nulo, se añade una acción integral, tal que el regulador resultante es:

$$K(s) = \frac{(s + 1/t_i) k_1(0,002 + k_2/k_1)s + 1}{s(0,002s + 1)}$$

Sustituyendo valores del LQR diseñado (ver Sección 10), y para una acción integral $t_i = 20$, se obtiene:

$$K(s) = 0,3044 \frac{(s + 0,5)}{s} \frac{(s + 5,734)}{(0,002s + 1)}$$

Considerando este regulador, si se implementa un simple bucle de control, sin ningún tipo de retardo, con un pre-filtro en el set-point tal que: $C(s) = \frac{1}{s+1}$, se obtienen los resultados de la figura 4.23.

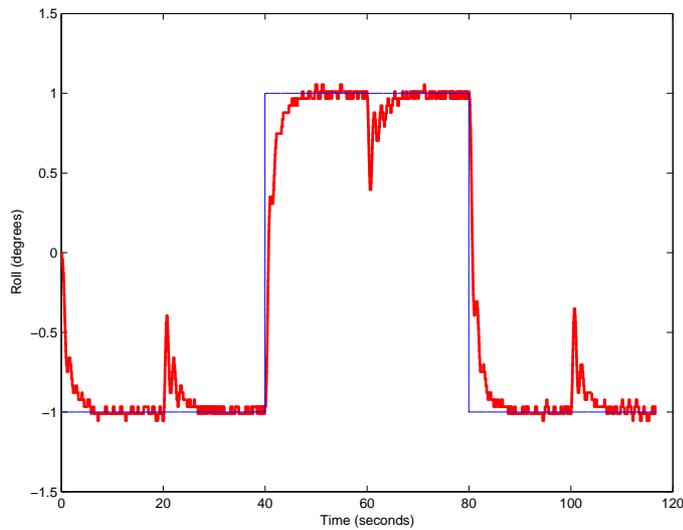


Figura 4.23. Respuesta del sistema en bucle cerrado sin retardo.

Considérese ahora, que existe un retardo de medida⁶ en el ángulo del roll. Inicialmente, este retardo se considera $L_r = 0,07$ s, y en el instante de tiempo $t = 70$ s, se incrementa a $L_r = 0,08$ s. Para estas condiciones, los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.24. Notar que para $L_r = 0,08$ s, el sistema se hace inestable.

Para la validación del SDTC, considérese el esquema de la figura 4.25. Si se considera un modelo simplificado tal que:

⁶ Este retardo se ha introducido de forma artificial, pero es muy común que en un sistema de control por visión se de este tipo de retardos en el procesado de imágenes.

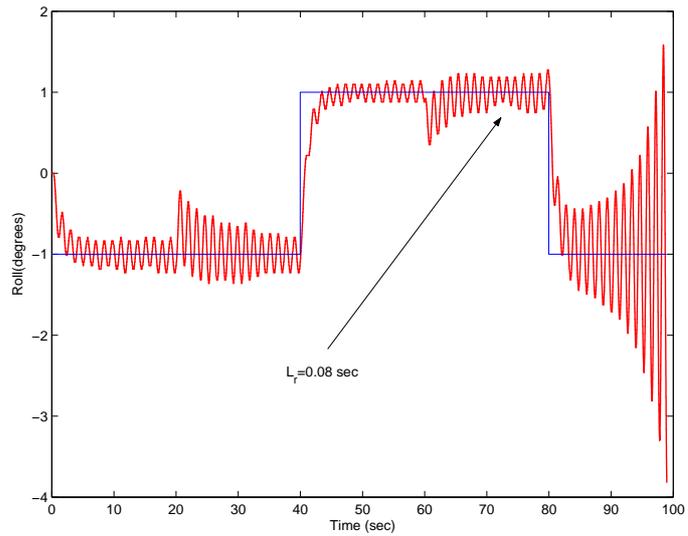


Figura 4.24. Respuesta del sistema en bucle cerrado sometido a un retardo de medida. En el instante inicial este retardo es $L_r = 0,07s$, siendo de $L_r = 0,08s$ en el instante de tiempo $t = 70s$.

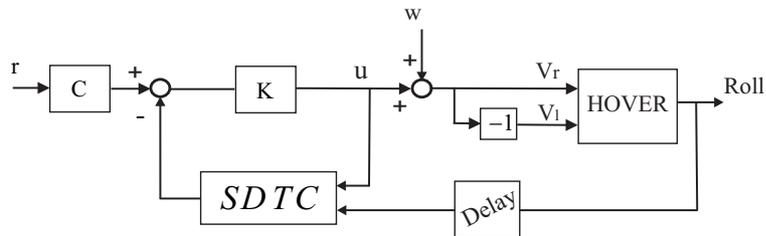


Figura 4.25. Implementación del SDTC sobre el prototipo del helicóptero de 4 motores de *Quanser*[©].

$$P_i(s) = 2,1176 \frac{1}{s} e^{-0,08s} \tag{4.53}$$

con el mismo pre-filtro $C(s)$, y controlador $K(s)$ diseñados anteriormente⁷, y para un periodo de muestreo $T = 0,001$ s, se obtienen los resultados de la figura 4.26.

Pero si se considera un retardo real $L_r = 0,11s$, el sistema se hace inestable. Por ello, y con objeto de aumentar el índice de robustez del sistema en bucle cerrado, se diseña el siguiente filtro: $F_2 = \frac{0,2s+1}{0,1s+1}$, obteniéndose los resultados de la figura 4.27.

⁷ Notar que la metodología de diseño planteada para el SDTC se hace sin consideración del retardo, por lo que es posible utilizar el mismo controlador y pre-filtro que en el caso anterior.

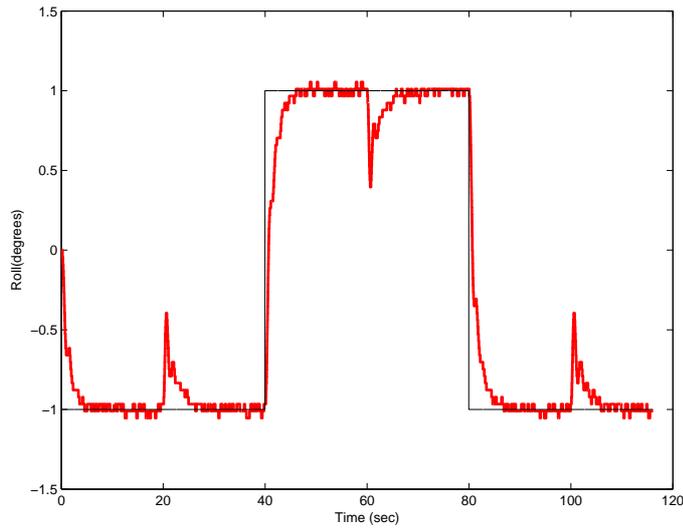


Figura 4.26. Respuesta nominal del SDTC para un retardo $L_r = 0,08s$.

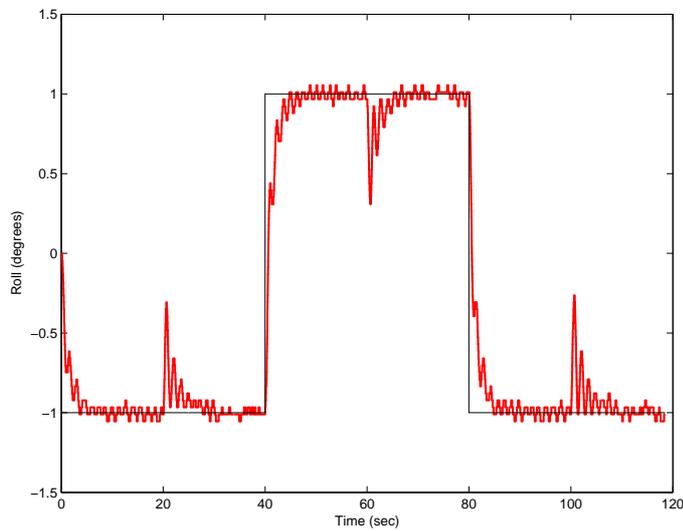


Figura 4.27. Respuesta robusta del SDTC, con filtro de predicción $F_2 = \frac{0,2s+1}{0,1s+1}$, para un retardo modelado de $L = 0,08s$, y un retardo real $L_r = 0,11s$.

Comentario 4.6.1 En todos los experimentos se ha introducido una perturbación $w = 0,2$, en los instantes de tiempo $t = 20s$, y $t = 100s$, y de $w = -0,2$ en el instante de tiempo $t = 60s$. La resolución del encoder de medida del ángulo del roll es de $0,04$ grados, de ahí el escalonado de las respuestas obtenidas.

Mejora del modelo considerado

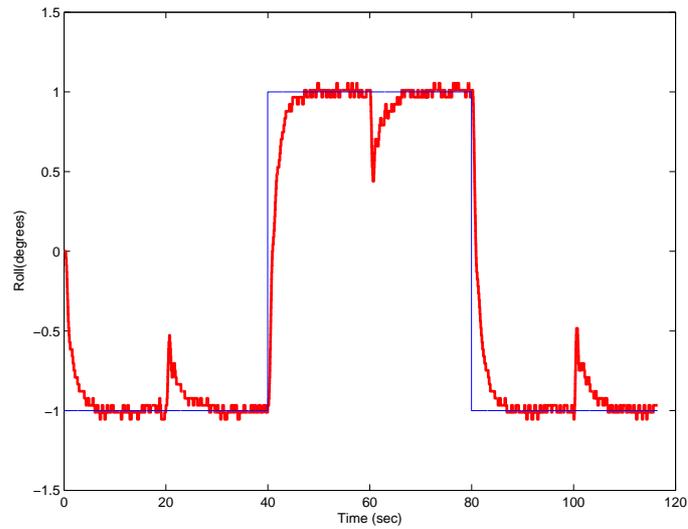


Figura 4.28. Respuesta del SDTC para un retardo modelado $L = 0,16s$, y un retardo real $L_r = 0,08s$.

Es conocido que a una determinada frecuencia, un integrador se puede aproximar por un retardo, de tal forma que si el modelo se incrementara con un retardo cabría esperar una mayor aproximación del modelo utilizado. Con tal objeto, vamos a considerar el siguiente modelo, donde el retardo considerado se ha incrementado en el doble del retardo real:

$$P_{i_1}(s) = 2,1176 \frac{1}{s} e^{-0,16s} \quad (4.54)$$

Repitiendo los mismo ensayos que en el caso anterior se obtienen los resultados de las figuras 4.28 y 4.29.

En vista de la mejora de los resultados obtenidos, se realiza otro experimento incrementando todavía más el retardo considerado tal que:

$$P_{i_2}(s) = 2,1176 \frac{1}{s} e^{-0,3s} \quad (4.55)$$

En la figura 4.30 se compara la respuesta del sistema libre de retardo, con la obtenida a partir de la implementación del SDTC para un retardo real $L_r = 0,08s$ y un retardo sobre el modelo del proceso $L = 0,3s$. En la figura 4.31, se muestra un detalle de la comparación de las respuestas obtenidas con los diferentes modelos. Como se puede observar, a partir de un determinado

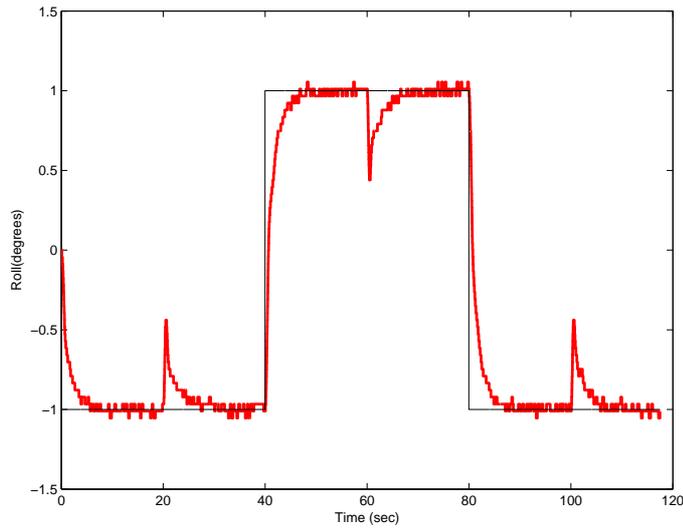


Figura 4.29. Respuesta del sistema con $L_r = 0,11s$, $L = 0,16s$ y filtro de predicción: $F_2 = \frac{0,2s+1}{0,1s+1}$.

valor, incrementar el retardo modelado no mejora las prestaciones obtenidas, y según se deduce del Lema 4.2.2 puede reducir el margen de robustez.

Para este tipo de sistemas, sistemas con un doble integrador, el retardo modelado se convertiría en un parámetro más de diseño. Un parámetro que podría ajustarse on-line con objeto de obtener las mejores prestaciones del sistema. Se deja para futuros trabajos, establecer algún tipo de relación matemática o regla empírica que permita aproximar el integrador desestimado por un retardo.

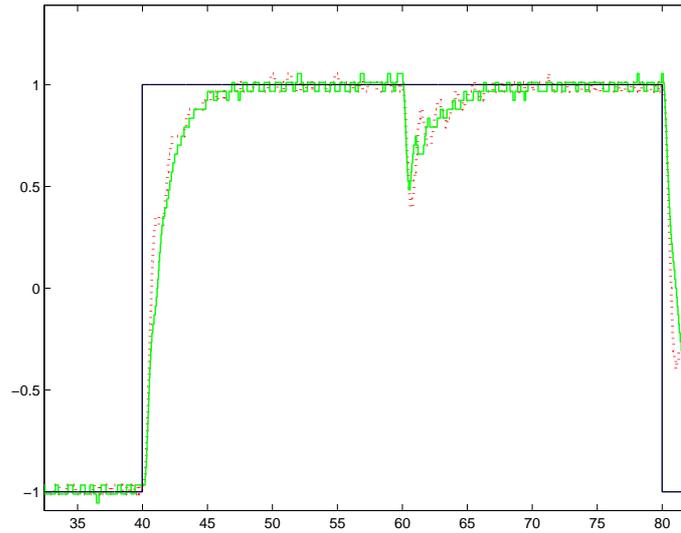


Figura 4.30. Comparación entre la respuesta del sistema en bucle cerrado libre de retardo (dot line), y la respuesta obtenida a partir de la implementación del SDTC para un retardo modelado $L = 0,3s$ y un retardo real de medida $L_r = 0,08s$ (solid line)

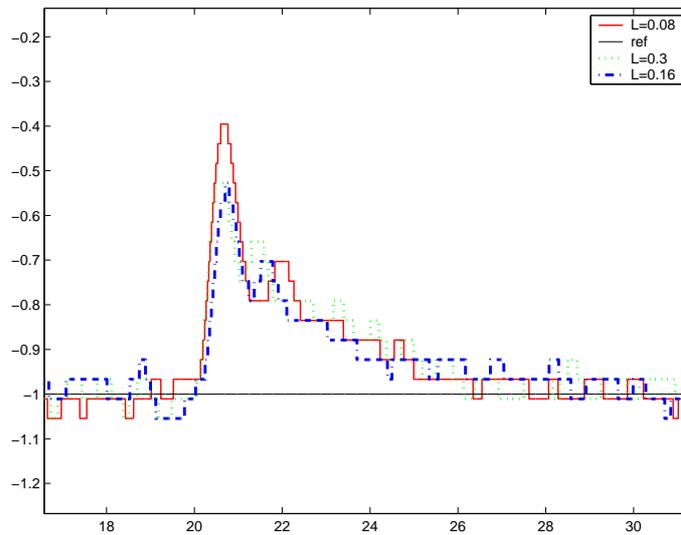


Figura 4.31. Detalle de la comparación entre las distintas aproximaciones del retardo modelado con respecto al sistema ideal libre de retardo. El retardo real de medida es $L_r = 0,08s$.

5 DTC para el control de sistemas estables o inestables

5.1. Predicción estable de un proceso inestable

Considérese la siguiente representación en el espacio de estados de un proceso SISO con un retardo de actuación:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + b_c u(t - L) \\ y(t) &= c x(t)\end{aligned}\quad (5.1)$$

donde $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, representan las matrices nominales del modelo, y $L \in \mathbb{R}^+$ el retardo de actuación.

Con el objetivo final de obtener una implementación del sistema de control desarrollado, se considera una discretización del modelo anterior, a partir de un retenedor de orden cero (ZOH), tal que si los instantes de muestreo se denotan como $t_k := kT$; $k \in \mathbb{Z}^+$, siendo $T := t_{k+1} - t_k$, el periodo de muestreo. Se define $x_k := x(kT)$ como la notación utilizada para denotar el valor de las variables en los instantes de muestreo.

Asunción 5.1.1 Sin pérdida de generalidad, y con el objeto de simplificar los desarrollos se considera que el periodo de muestreo será tal que: $L := dT$ ($d \in \mathbb{Z}^+$).

Bajo esta suposición, la representación discreta en el espacio de estados será:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + bu_{k-d} \\ y_k &= cx_k\end{aligned}\quad (5.2)$$

donde:

$$A = e^{A_c T}; \quad b = \int_0^T e^{A_c \sigma} d\sigma b_c$$

Y la correspondiente función de transferencia entre la variable controlada $y(z)$, y la variable manipulada $u(z)$, será:

$$\frac{y(z)}{u(z)} = G_p(z) = G(z)z^{-d} = c(zI - A)^{-1}bz^{-d} = \frac{N(z)}{D(z)}z^{-d} \quad (5.3)$$

Comentario 5.1.1 Si la Asunción 5.1.1 no fuera posible, o deseable, siempre sería posible utilizar un modelo discretizado ampliado en un estado, tal y como se demostró en la sección 1.3.4, a partir del cual realizar el desarrollo anterior.

Siguiendo la idea básica del original SP, el principal objetivo que se plantea en este trabajo es obtener una predicción de la salida \hat{y}_k , a partir del modelo discretizado $G(z)$, y de la entrada al mismo u_k , es decir:

$$\hat{y}(z) = G(z)u(z) \quad (5.4)$$

Esto último, permitiría el diseño de un control basado en el modelo libre del retardo. Si embargo, como es bien sabido si $G(z)$ es inestable la predicción anterior también es inestable.

Predictor FIR:

Utilizando las entradas pasadas y el modelo discretizado del proceso (5.2), el estado del proceso puede ser proyectado d -pasos hacia delante tal que:

$$\hat{x}_{k,d} = A^d x_k + \sum_{i=1}^d A^{d-i} b u_{k-i} \quad (5.5)$$

Que también se puede representar como:

$$\hat{x}_d(z) = A^d x(z) + \Phi_d(z)u(z) \quad (5.6)$$

donde el vector $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, se obtiene como:

$$\Phi_d(z) = A^{d-1}bz^{-d} + \dots + Abz^{-2} + bz^{-1} \quad (5.7)$$

De igual forma también es posible obtener una proyección de la salida sin más que pre-multiplicar ambos lados de la expresión (5.6) por el vector “ c ”:

$$\hat{y}_d(z) = cA^d x(z) + c\Phi_d(z)u(z) \quad (5.8)$$

5.2. DTC para sistemas inestables de fase mínima

5.2.1. Esquema de predicción

En esta sección se va a introducir un nuevo esquema de predicción denotado como NSP (“New Smith Predictor”). Este esquema de predicción, basado en el “Predictor FIR”, se demuestra como la mejor solución, hasta la fecha, para el control de sistemas inestables de fase mínima con retardos elevados,

pero falla para el control de sistemas de fase no mínima¹. Esta afirmación, se fundamenta principalmente en que el método que aquí se presenta es el único esquema propuesto hasta la fecha, para sistemas inestables, que mantiene la filosofía del original SP. Es decir, la implementación del predictor propuesto permite un diseño del controlador o controladores del sistema sin una consideración explícita del retardo, tanto en la f.d.t. de la referencia como de la perturbación. Y esto, como se demostrará a continuación, se consigue obteniendo unas prestaciones superiores, o cuanto menos, similares, a las del resto de algoritmos propuestos en la literatura.

Lema 5.2.1. *El escalar $c\Phi(z)$ representa la siguiente equivalencia:*

$$c\Phi(z) \equiv G(z) - G^*(z)z^{-d} \quad (5.9)$$

donde:

$$G^*(z) := cA^d(zI - A)^{-1}b = \frac{N^*(z)}{D(z)} \quad (5.10)$$

Demostración: Es fácil verificar que:

$$(zI - A) \sum_{i=1}^d A^{i-1}z^{-i} = I - A^d z^{-d}$$

Pos-multiplicando por $(zI - A)^{-1}b$, y usando la definición de $\Phi_d(z)$, en la ecuación (5.7), se obtiene:

$$\Phi_d(z) = (I - A^d z^{-d})(zI - A)^{-1}b \quad (5.11)$$

Multiplicando, por la izquierda, con el vector “ c ”,

$$c\Phi_d(z) = (c(zI - A)^{-1}b) - (cA^d(zI - A)^{-1}b)z^{-d} \quad (5.12)$$

y usando las definiciones (5.3) y (5.10), se obtiene finalmente (5.9). ■

Este resultado permite establecer el siguiente Teorema.

Teorema 5.2.1 *La predicción de la salida en el instante $(k + d)$, tal y como se define en (5.8):*

1) *cumple los requerimientos de la ecuación (5.4), es decir:*

$$\hat{y}(z) = G(z)u(z) \quad (5.13)$$

¹ Esta limitación será superada con otro esquema de predicción presentado en la siguiente sección

2) se puede computar a partir de la siguiente expresión:

$$\hat{y}(z) = c\Phi_d(z)u(z) + F(z)y(z) \quad (5.14)$$

donde el filtro $F(z)$, se define como:

$$F(z) := \frac{N^*(z)}{N(z)} \equiv \frac{G^*(z)}{G(z)} \quad (5.15)$$

Demostración: De la expresión (5.2), se tiene que $x(z) = (zI - A)^{-1}bz^{-d}u(z)$. Por tanto, haciendo uso de la expresión (5.8) y del Lema 5.2.1, se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{y}_d(z) &= cA^d(zI - A)^{-1}bz^{-d}u(z) + (G(z) - G^*(z)z^{-d})u(z) \\ &= G(z)z^{-d}u(z) \end{aligned}$$

con lo que la queda probada la parte primera.

Para probar la segunda parte, la ecuación (5.14) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \hat{y}(z) &= c\Phi_d(z)u(z) + \frac{G^*(z)}{G(z)}G(z)z^{-d}u(z) \\ &= [c\Phi_d(z) + G^*(z)z^{-d}]u(z), \end{aligned}$$

y haciendo uso del Lema 5.2.1, se obtiene finalmente:

$$\hat{y}(z) = G(z)u(z)$$

Comentario 5.2.1 : Notar que $G^*(z) = F(z)G(z)$ ■

La definición de $F(z)$ requiere tratar con sistemas de fase mínima. Esta limitación será superada en la Section 5.3.

Comentario 5.2.2 En el SP la estimación de la salida se obtiene a partir de la expresión:

$$y_{sp}(z) = (G(z) - G(z)z^{-d})u(z) + y(z) \quad (5.16)$$

donde como es bien conocido si el modelo es inestable la predicción también resulta inestable.

En el estimador propuesto, la estimación de la salida se obtiene a partir de la expresión:

$$\hat{y}(z) = (G(z) - F(z)G(z)z^{-d})u(z) + F(z)G(z)z^{-d}u(z)$$

la cual es implementada por (5.14), de tal forma que no es usada directamente la función de transferencia del modelo.

Por otro lado, notar que, contrariamente a la predicción realizada en el SP (5.16), donde el término $y(z) - G(z)z^{-d}u(z)$ permite compensar posibles perturbaciones o errores de modelado, en la estimación propuesta existirá un error si se dan tales circunstancias. Este error de estimación se puede calcular como:

$$\hat{e}(z) = y(z) - \hat{y}z^{-d} \quad (5.17)$$

el cual será nulo si no existes tales perturbaciones y el modelo del proceso es perfecto. En todo caso, de forma similar al SP, se puede definir un una nueva predicción de la salida tal que:

$$\bar{y}(z) = \hat{y}(z) + \hat{e}(z) \quad (5.18)$$

De forma que a partir de esta definición y del Teorema 5.2.1, se puede derivar la siguiente proposición:

Proposición 5.2.1 *La señal $\bar{y}(z)$, tal y como se define en (5.18):*

1) *se puede computar como:*

$$\bar{y}(z) = (1 - z^{-d})\hat{y}(z) + y(z) \quad (5.19)$$

2) *cumple los requerimientos de la ecuación (5.4), es decir:*

$$\bar{y}(z) = G(z)u(z) \quad (5.20)$$

Demostración: Sustituyendo (5.17) en (5.18), se obtiene (5.19), que prueba la primera parte. Teniendo en cuenta (5.13) y (5.3), la expresión (5.19) es:

$$\bar{y}(z) = (1 - z^{-d})G(z)u(z) + G(z)z^{-d}u(z) = G(z)u(z)$$

Con lo cual queda probada la segunda parte. ■

Como resultado de esta predicción se define un nuevo DTC para el control de sistemas inestables de fase mínima (figura 5.2). La estimación de la salida, se obtiene a partir de la implementando del filtro FIR $c\Phi_d(z)$, y la expresión $F(z)$, tal y como se ha definido en las expresiones (5.7) y (5.15) respectivamente.

Bucle ideal libre de retardo: Considérese el sistema ideal de la figura 5.1, tal que sea posible definir la siguiente función de transferencia:

$$M(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (5.21)$$

El controlador $K(s)$ se diseñará, según unas determinadas especificaciones, tal que el sistema en bucle cerrado sea estable.

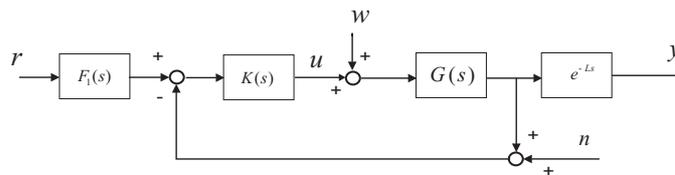


Figura 5.1. Bucle ideal libre de retardo.

5.2.2. Estabilidad interna

Considérese el esquema de control de la figura 5.2 (NSPC). Se asume que el modelo discretizado del proceso a controlar $G(z)z^{-d}$, es un sistema de fase mínima. El controlador $K(z)$, es la versión discretizada de $K(s)$ diseñado, con la técnica que se considere más apropiada, a partir del esquema de control de la figura 5.1.

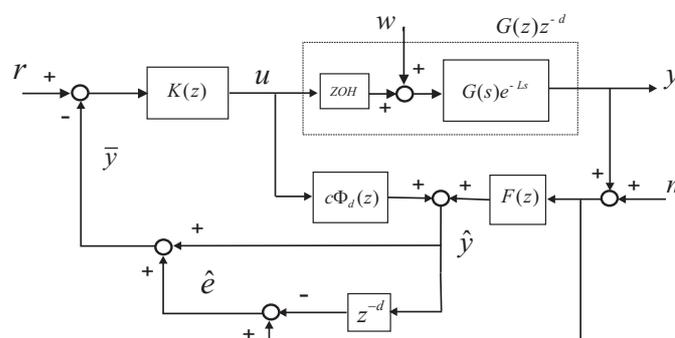


Figura 5.2. DTC propuesto para el control de sistemas estables o inestables con retardos temporales de fase mínima (NSPC).

Bajo estas consideraciones, la función de sensibilidad complementaria del sistema en bucle cerrado es²:

$$T = \frac{KGz^{-d}}{1 + Kc\Phi_d + KFGz^{-d}} \tag{5.22}$$

Demostración: Ver Apéndice B. ■

Lema 5.2.2. *Si no existen errores de modelado, utilizando la expresión (5.9), la función de sensibilidad complementaria se puede expresar como:*

² En lo que sigue, y con objeto de simplificar la notación, se omitirá el argumento “z” de las fdt’s, siempre que éste quede suficientemente claro.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{KGz^{-d}}{1 + KG - KG^*z^{-d} + KFGz^{-d}} \\
&= \frac{KG}{1 + KG}z^{-d} = M(z)z^{-d}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Demostración: Basta con hacer uso de la equivalencia (5.9) en Lema 5.2.1

■

Notar que, de forma similar al original SP, en esta estructura de control el diseño del regulador K se puede realizar considerando un sistema libre de retardo. Sin embargo, tal y como se demuestra a continuación, la estructura aquí propuesta tiene la ventaja de ser robustamente estable independientemente de si la planta a controlar es estable o inestable.

Lema 5.2.3. *A partir del esquema de la figura 5.2, y haciendo uso del Lema 5.2.1, se obtienen las siguientes expresiones:*

$$y = \frac{KGz^{-d}}{(1 + KG)}r \tag{5.24}$$

$$+ \frac{Gz^{-d}}{(1 + KG)}w + \frac{(Kc\Phi_dG - Kc\Phi_dGz^{-d})z^{-d}}{(1 + KG)}w \tag{5.25}$$

$$- \frac{KGz^{-d}}{(1 + KG)}n + \frac{(KG^*z^{-d} - KG^*)z^{-d}}{(1 + KG)}n \tag{5.26}$$

$$u = \frac{K}{(1 + KG)}r \tag{5.27}$$

$$+ \frac{(KG^*z^{-d} - KG^* - KG)z^{-d}}{(1 + KG)}w \tag{5.28}$$

$$+ \frac{(KFz^{-d} - KF - K)}{(1 + KG)}n \tag{5.29}$$

Demostración: Ver Apéndice B. ■

Teorema 5.2.2 (Estabilidad interna) *El sistema de control de la figura 5.2, donde $K(z)$ ha sido diseñado para estabilizar $G(z)$ en (5.23), es internamente estable.*

Demostración: Analizando las funciones de sensibilidad (5.25), (5.26) y (5.28), dado que G y G^* poseen exactamente los mismos polos, estos se cancelan en bucle cerrado y no aparecen en las funciones de sensibilidad.

Por otro lado, dado que todas las funciones de sensibilidad poseen el mismo denominador, si se diseña el controlador K para estabilizar $G(z)$ en

(5.23), o equivalentemente en (5.24), las expresiones (5.24-5.29) también serán estables. ■

Comentario 5.2.3 Notar que en régimen permanente, el comportamiento del esquema propuesto se comporta como un bucle simple libre de retardo (esquema de la figura 5.1).

Si se analizan las funciones de sensibilidad de la perturbación (5.25), y del ruido de medida (5.26). Notar que, para ambas expresiones y en régimen permanente, el segundo término se anula:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 1} (Kc\Phi_d G - Kc\Phi_d G z^{-d}) &= 0 \\ \lim_{z \rightarrow 1} (KFG z^{-d} - KFG) &= 0\end{aligned}$$

5.2.3. Estabilidad robusta

Si se consideran incertidumbres de tipo multiplicativo, es decir, asumiendo que la función de transferencia del proceso real es:

$$G_r(z) = G_p(z)(1 + W_m(z)),$$

donde $W_m(z)$ se define como la incertidumbre multiplicativa, es conocido [57], que la condición de estabilidad robusta, se obtiene a partir de la función de sensibilidad del ruido de medida. Aplicando esto al esquema propuesto se obtiene:

$$\left\| H_1 \frac{KG}{1 + KG} W_m \right\|_{\infty} < 1 \quad (5.30)$$

donde se define $H_1 := (Fz^{-d} - F - 1)$.

Mejora de la robustez:

Con objeto de mejorar la robustez del NSPC, y de forma similar a como originalmente fue introducido en [87]. Es posible filtrar el error de predicción \hat{e} (ver esquema de la figura 5.3), tal que:

$$\bar{y}(z) = \hat{y}(z) + F_2(z)\hat{e}(z) \quad (5.31)$$

El filtro F_2 , no cambia las propiedades de estabilidad (ver Apéndice B).

Si a partir del esquema de la figura 5.3, se obtiene la función de sensibilidad del ruido de medida (ver Apéndice B). Si se define:

$$H_2 := (F_2 F z^{-d} - F - F_2),$$

la condición de estabilidad robusta (5.30) es:

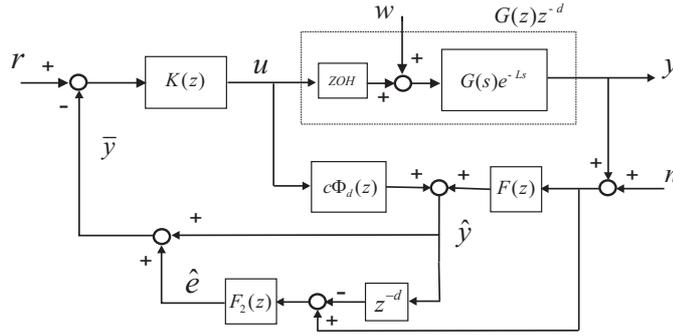


Figura 5.3. Esquema de control para la mejora de la robustez del (NSPC).

$$\left\| H_2 \frac{KG}{1+KG} W_m \right\|_{\infty} < 1 \quad (5.32)$$

donde F_2 se debe diseñar tal que $|H_2| < |H_1|$ en torno al rango de frecuencias al cual se encuentren los máximos de $\left| \frac{KG}{1+KG} W_m \right|$.

Por otro lado, notar que si se incluye el filtro F_2 , el segundo término de la función de sensibilidad de la perturbación w , será:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (Kc\Phi_d G - F_2 Kc\Phi_d G z^{-d})$$

De forma que, con objeto de obtener un error nulo en régimen permanente, se deberá diseñar un filtro tal que $F_2(1) = 1$.

5.2.4. Simulaciones y comparación con otros DTCs

EJEMPLO 5.2.1. *Considérese el siguiente sistema inestable de primer orden con un retardo de actuación y/o medida³:*

$$G_p(s) = \frac{1}{(s-1)} e^{-Ls}$$

En el trabajo presentado por Tao et al. [61], muestra que el esquema presentado (figura 5.4), y para un retardo $L = 0,4$ s, se sitúa como la solución más efectiva para el control de este tipo de procesos.

Si se utiliza el método ahí propuesto, es necesario ajustar tres reguladores, ver sección 3.3.3. Para este ejemplo, los reguladores diseñados fueron los siguientes:

³ Este modelo se ha sido utilizado ampliamente en la literatura especializada, véase por ejemplo [58, 114, 121, 61].

$$G_c = 2$$

$$C_T(s) = \frac{s + 1}{0,4s + 1}$$

$$F_T(s) = 2,8972 + \frac{1}{0,724s} + \frac{0,469s}{0,469N_d s + 1}$$

donde N_d se define como el factor del filtrado de la acción derivada. Según [61] este factor se puede elegir dentro del rango (0,01 – 0,1), donde con $N_d = 0,01$ se obtiene la mejor respuesta al rechazo de perturbaciones, pero muestra el peor comportamiento al ruido de medida. Un valor $N_d = 0,1$, lo contrario, muestra un mejor comportamiento ante el ruido de medida, pero el rechazo de la perturbación es más lento, y como consecuencia se obtiene un mayor IAE.

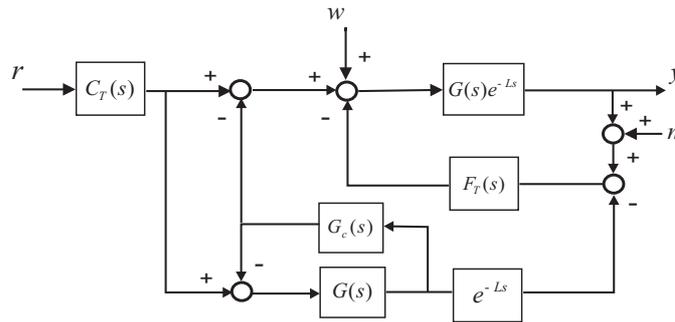


Figura 5.4. DTC propuesto por Tao et al. [61].

Por otro lado, con objeto de realizar una implementación del esquema de predicción aquí propuesto (NSPC), se diseña previamente un pre-filtro F_1 , y un regulador K , sobre el modelo libre de retardo $G(s) = \frac{1}{(s-1)}$ (esquema de la figura 5.1), como resultado se obtiene:

$$K(s) = 6 \frac{s + 0,75}{s}; \quad F_1(s) = \frac{0,5s + 1}{1,1s + 1}$$

La implementación del esquema de la figura 5.2, se realiza para un periodo de muestreo $T = 0,02$ s. Como resultado los bloques del predictor, para un retardo $L = 20T$, son $F(z) = 1,492$, siendo $c\Phi_d(z)$ un filtro FIR, donde $d = 20$, $A = 1,0202$, $B = 0,0202$, y $c = 1$. De la discretización del regulador PI y del pre-filtro se obtiene:

$$K(z) = \frac{6z - 5,91}{z - 1}; \quad F_1(z) = \frac{0,4545z - 0,4365}{z - 0,982}$$

Si no existen errores de modelado, los resultados obtenidos, se muestran en la figura 5.5. Notar que el NSPC muestra un mejor comportamiento al

rechazo de perturbaciones, y un comportamiento similar en cuanto al seguimiento de la referencia.

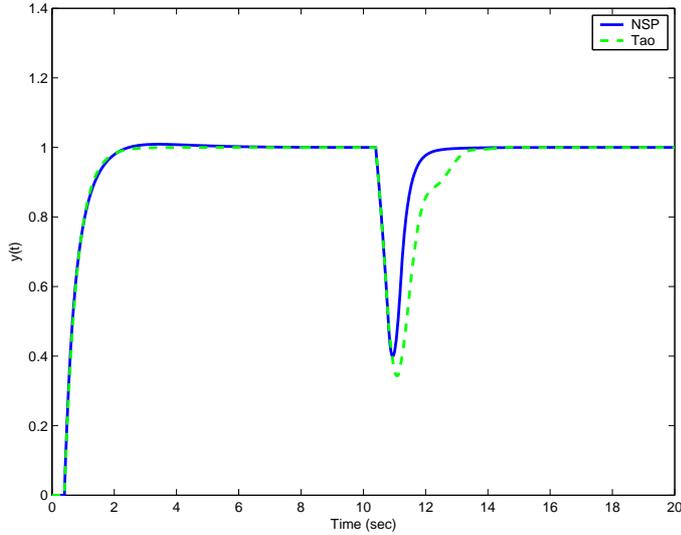


Figura 5.5. Respuesta nominal ante un cambio en la referencia escalón unitario y una perturbación de -1 unidad en el instante de tiempo $t=10$ s (ejemplo 5.2.4)

Pero si se consideran errores de modelado tal que el proceso real sea:

$$G_r(s) = G_p(s)(1 + W_m(s)) = G_p(s) \left(1 + \frac{0,5}{(0,1s + 1)} \right),$$

la condición necesaria y suficiente de estabilidad robusta no se cumple:

$$\left\| H_1 \frac{KG}{1 + KG} W_m \right\|_{\infty} = 1,4927 > 1$$

siendo por tanto el sistema en bucle cerrado inestable.

Para incrementar la robustez del sistema, se diseña un filtro sobre el error de predicción, por ejemplo, $F_2(s) = \frac{1}{10s+1}$, tal que se cumpla la condición de estabilidad robusta:

$$\left\| H_2 \frac{KG}{1 + KG} W_m \right\|_{\infty} = 0,99 < 1$$

Bajo estas condiciones, el sistema en bucle cerrado será estable. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.6. Notar que la respuesta del esquema propuesto por Tao et al. es inestable, y que la estabilización del sistema requeriría de un nuevo ajuste de los parámetros del controlador F_T . En todo caso, la condición de estabilidad robusta, dentro del rango admisible de diseño indicado en [61], nunca se cumple para este grado de incertidumbre.

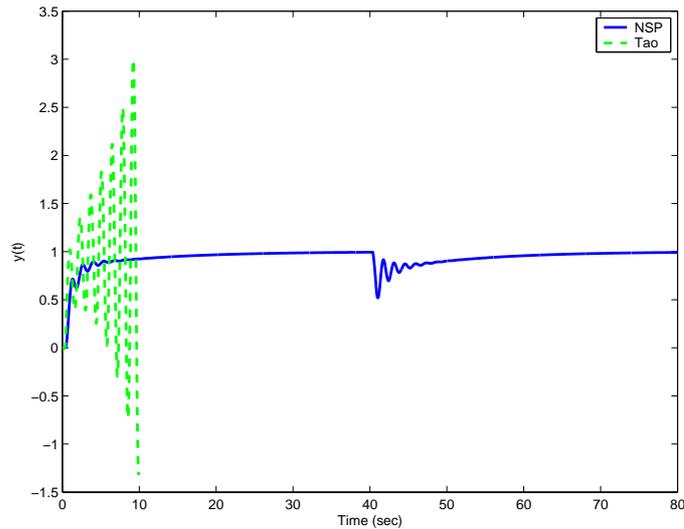


Figura 5.6. Respuesta del sistema ante incertidumbres multiplicativas. Perturbación escalón de $-0,5$ unidades en el instante de tiempo $t=40$ s (Ejemplo 5.2.4).

Respuesta al ruido de medida: *Un factor muy importante a considerar, a la hora de diseñar un sistema de control, es el comportamiento del mismo al ruido de medida. Si un sistema de control muestra un buen seguimiento de la referencia y rechazo de perturbaciones, pero existe un mal comportamiento al ruido de medida, probablemente tenga limitada su implementación sobre muchos procesos reales.*

Si se considera un filtro sobre el error de predicción, la función de sensibilidad del ruido de medida es:

$$S_{yn} = -\frac{FKGz^{-d}}{(1+KG)} + \frac{F_2(KFGz^{-d} - KG)z^{-d}}{(1+KG)} \quad (5.33)$$

Para analizar el comportamiento del NSPC, se compara la respuesta de éste con respecto al DTC propuesto por Tao et al., para el factor de filtrado de la acción derivativa $N_d = 0,1$, es decir aquel con el cual se obtiene el mejor comportamiento al ruido de medida. Si se considera el filtro arriba diseñado, así como $F_2(s) = 1$, los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.7.

De los resultados obtenidos puede obtenerse dos conclusiones, por un lado que el filtro de predicción mejora ligeramente la respuesta al ruido de medida, y la segunda es que, si se diseña un filtro sobre el error de predicción se puede obtener una respuesta ligeramente menos distorsionada en el NSPC que en el esquema presentado por Tao et al.

◇

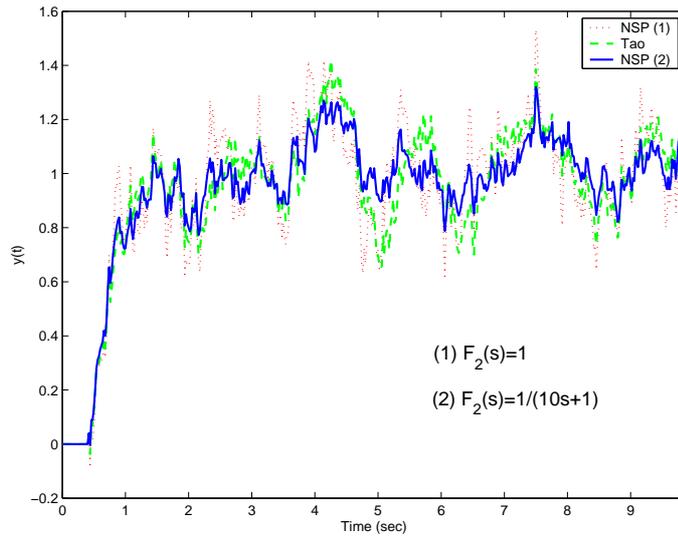


Figura 5.7. Respuesta del sistema ante un ruido de medida. El ruido de medida se ha generado con el bloque “Band-Limited White Noise” de *Simulink*[®], exagerando la amplitud del ruido de medida (ver figura 5.8) con objeto de apreciar mejor sus efectos.

EJEMPLO 5.2.2. *Considérese ahora el mismo proceso que en el ejemplo anterior, pero con un mayor retardo:*

$$G_p(s) = \frac{1}{(s-1)} e^{-1,5s}$$

En [121], se realiza un análisis comparativo entre distintos métodos para el control de sistemas inestables. En concreto, se analizan siete metodológicas [119, 99, 70, 122, 58, 131, 69], de las cuales sólo dos propuestas [58, 131] permiten una estabilización del proceso para el retardo $L = 1,5s$. Destacar sin embargo que, el análisis del comportamiento de estos dos esquemas sólo se hizo para el caso nominal, es decir, sin consideración de ningún tipo de errores de modelado, ni siquiera de tipo infinitesimal.

Para la implementación del NSPC, previamente se diseñan el siguiente regulador PI, y pre-filtro (figura 5.1):

$$K(s) = 1,1 \frac{(s + 0,02)}{s}; \quad F_1(s) = \frac{1}{50s + 1}$$

Con un periodo de muestreo $T = 0,02 s$, los bloques del predictor son $\Phi_d(z)$, con $d = 75$, y $F(z) = 4,482$. Mientras que de la discretización del regulador PI y pre-filtro se obtiene:

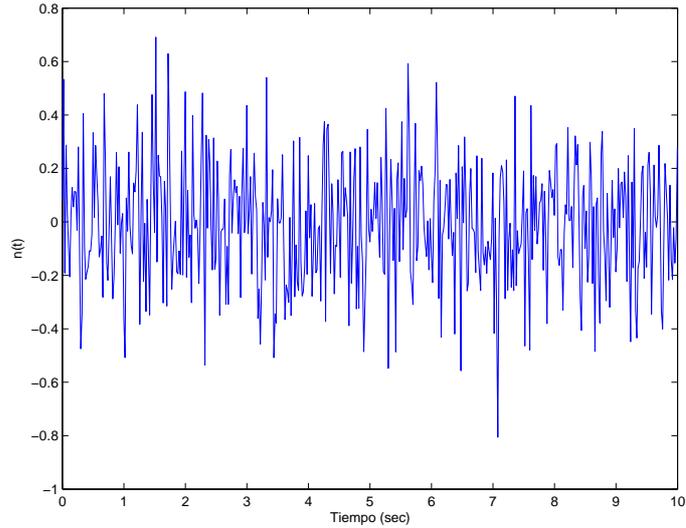


Figura 5.8. Señal de test del ruido de medida.

$$K(z) = \frac{1,1z - 1,1}{z - 1}; \quad F_1(z) = \frac{0,0003999}{z - 0,9996}$$

Si no existen errores de modelado, en la figura 5.9 se muestran los resultados obtenidos comparados estos con la respuesta ideal de un bucle libre de retardo (esquema de la figura 5.1). Notar que el IAE para el NSPC es de 6,76, mientras que el mejor, el menor, IAE presentado en [121], para los dos esquemas evaluados es de 48,85.

Si los errores de modelado son tal que el proceso real es:

$$G_r(s) = \frac{1,1}{(1,1s - 1)} e^{-1,6s}$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.10. Destacar una vez más que en [121], no se han considerado ningún tipo de incertidumbres para un retardo $L = 1,5s$.

Si se considera el mismo sistema, pero con un retardo $L = 2s$, y pequeños errores de modelado en todos los parámetros del modelo, tal que el sistema real sea:

$$G_r(s) = \frac{1,05}{(1,1s - 1)} e^{-2,1s} \quad (5.34)$$

Y si, con objeto de aumentar la robustez del sistema, se incluye el siguiente filtro sobre el error de predicción:

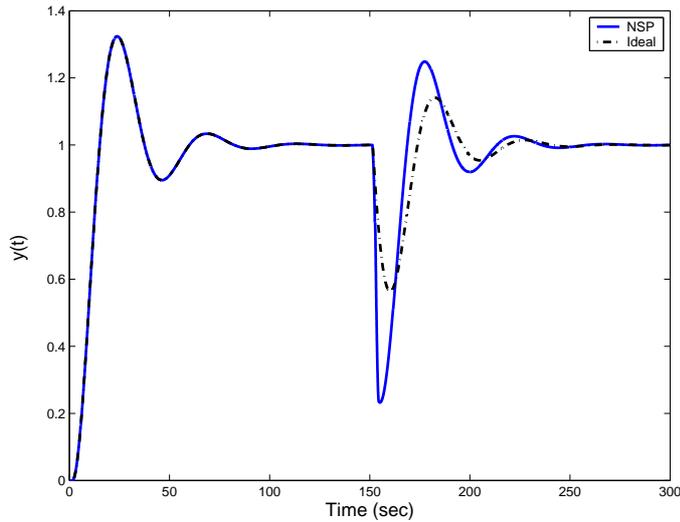


Figura 5.9. Respuesta nominal ante escalón unitario en la referencia y una perturbación de $-0,1$ unidades en el instante de tiempo $t=150$ s, comparada con la respuesta de un bucle ideal libre de retardo (esquema de la figura 5.1).

$$F_2(s) = \frac{4s + 1}{5s + 1}$$

Considerando el mismo regulador PI y pre-filtro ajustados previamente, se obtienen los resultados de la figura 5.11.

Del desarrollo de este ejemplo se puede concluir que, el ajuste de los reguladores del esquema propuesto (NSPC) no es especialmente dependiente del retardo modelado, tal y como cabía esperar de la metodología propuesta. Si bien, un retardo mayor, puede implicar una reducción del índice de robustez. Para aumentar la robustez del sistema, se puede diseñar el filtro F_2 , sobre el error de predicción tal que dicho índice se incremente en el rango de frecuencias deseado.

◇

EJEMPLO 5.2.3.

Considérese ahora otro de los ejemplos analizados en Tao et al. [61]:

$$G_p(s) = \frac{1}{(s - 1)(0,5s + 1)} e^{-1,2s}$$

En el trabajo presentado por Tao, los reguladores diseñados son:

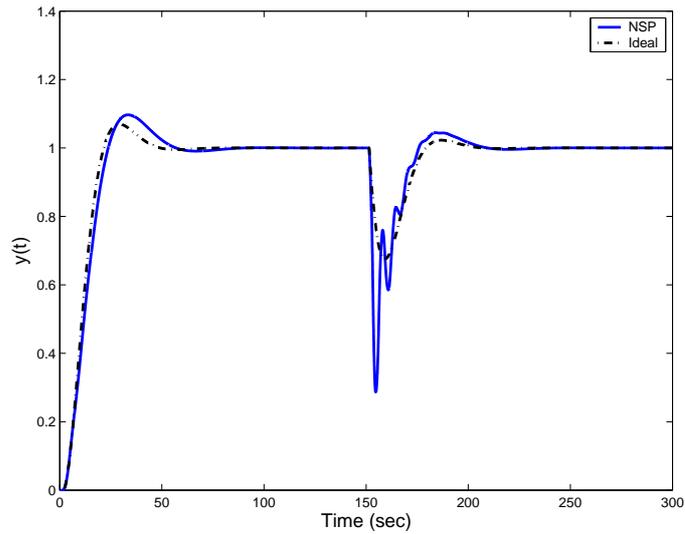


Figura 5.10. Respuesta del sistema, para un retardo real $L_r = 1,6s$, ante una perturbación $w = -0,1$ en el instante de tiempo $t=150$ s, comparada con el bucle ideal libre de retardo.

$$G_c = 2$$

$$C_T(s) = \frac{0,5s^2 + 0,5s + 1}{(3,6s + 1)^2}$$

$$F_T(s) = \frac{22,55s^4 + 115,44s^3 + 199,73s^2 + 108,47s + 0,83}{s(8,81s^3 + 6,06s^2 + 93,95s + 100)}$$

Para la propuesta del NSPC, el regulador PI y pre-filtro se diseñan tal que:

$$K(s) = 3 \frac{s + 0,07}{s}; \quad F_1(s) = \frac{1}{12s + 1}$$

Adicionalmente, con objeto de aumentar la robustez del sistema se ajusta el siguiente filtro:

$$F_2(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

Para un periodo de muestreo $T = 0,02$ s, siendo el retardo $L = 60T$. Los bloques del esquema de predicción son: $c\Phi_d(z)$, donde $d = 60$, $A = \begin{pmatrix} 0,9806 & 0,0050 \\ 0,1584 & 1,0004 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0,0099 \\ 0,0008 \end{pmatrix}$, $c = (0 \ 0,5000)$; $F(z) = \frac{0,04353z - 0,04175}{0,0003974z + 0,0003947}$.

Y los bloques de control discretizados:

$$K(z) = \frac{3z - 2,996}{z - 1}; \quad F_1(z) = \frac{0,001665}{z - 0,9983}; \quad F_2(z) = \frac{0,00995}{z - 0,99}$$

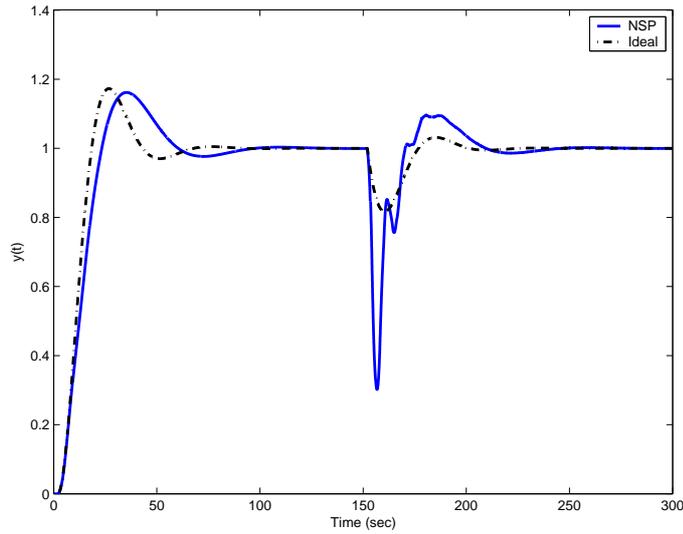


Figura 5.11. Respuesta robusta del NSPC para el proceso (5.34), ante una perturbación $w = -0,5$ en el instante de tiempo $t = 150s$, comparada con la respuesta del bucle ideal libre de retardo (figura 5.1).

Si no existen errores de modelado, los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.12.

Si los errores de modelados son los mismos que los considerados en [61], es decir, si se considera que el proceso real es:

$$G_r(s) = \frac{1}{(1,2s - 1)(0,55s + 1)} e^{-1,32s}$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.13. Como se puede apreciar, ambos esquemas de control permanecen estables. Pero si los errores considerados incluyen no sólo incertidumbres en los parámetros del modelo, sino que también se consideran incertidumbres de tipo multiplicativo, tal que el proceso real sea:

$$G_r(s) = \frac{0,95}{(0,1s + 1)(0,95s - 1)(0,55s + 1)} e^{-1,14s},$$

los resultados obtenidos (figura 5.14), muestran una mayor robustez del NSPC. En la figura 5.14, también se ha incluido la respuesta del esquema de predicción propuesto por Tao et al., para una aproximación del regulador F_T de quinto orden (ver sección 3.3.3 o [61]):

$$F_T(s) = \frac{36,12s^5 + 3337,86s^4 + 1168,12s^3 + 1331,04s^2 + 120,05s + 1}{s(2,08s^4 + 8122,32s^3 + 9,84s^2 + 1131,54s + 100)}$$

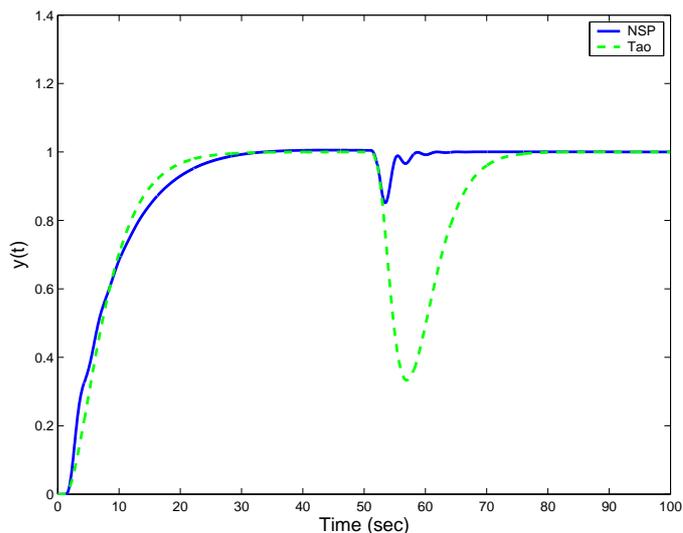


Figura 5.12. Respuesta nominal para una perturbación $w = -0,05$, en el instante de tiempo $t = 50$ s (Ejemplo 5.2.4).

◇

EJEMPLO 5.2.4.

Considérese el proceso estudiado en Xiang et al. [68]:

$$G_p(s) = \frac{4}{(10s - 1)} e^{-5s}$$

En el método introducido por Xiang et al. [68] (ver figura 5.15), es necesario ajustar cuatro controladores. K_1 se debe diseñar con objeto de estabilizar la planta sin retardo, $G(s)$. K_4 se ajusta para obtener la respuesta al set-point deseada. K_3 se debe diseñar para estabilizar el proceso real con retardo, $G_p(s)$, y por último K_2 se puede ajustar para obtener la mejor respuesta al rechazo de perturbaciones (ver Sección 3.3.3 o [68] para más detalles). En [68], los controladores diseñados fueron: $K_1 = 1,5$, $K_2 = \frac{7,93s+1,25}{\frac{7,93s}{10}+1}$, $K_3 = 0,35$, y $K_4 = 1,6$.

Para una implementación del NSPC, se diseña un regulador PI y un pre-filtro según el esquema de la figura 5.1, obteniéndose como resultado:

$$K(s) = 2,7 \frac{s + 0,25}{s}; \quad F_1(s) = \frac{2s + 1}{4s + 1}$$

Utilizando un periodo de muestreo de $T = 0,1$ s, los bloques del predictor serán: $c\Phi_d(z)$, con $d = 50$, $A = 1,0101$, $B = 0,0503$, $c = 0,8$, y $F(z) = 1,649$. La discretización del regulador PI y pre-filtro:

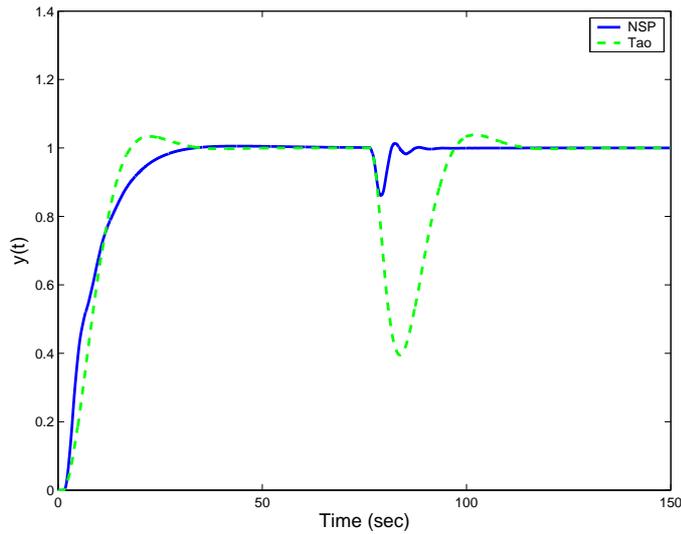


Figura 5.13. Respuesta del sistema, ante los errores de modelado indicados en [61], por una perturbación $w = 0,05$, en el instante de tiempo $t = 75$ s (Ejemplo 5.2.4).

$$K(z) = \frac{1,8z - 1,755}{z - 1}; \quad F_1(z) = \frac{0,5z - 0,4753}{z - 0,9753}$$

Si no se consideran errores de modelado, los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.16, donde se puede apreciar la superioridad del NSPC frente al esquema propuesto por Xiang et al. tanto en el seguimiento de la referencia como en el rechazo de perturbaciones.

Por otro lado, si se consideran errores en todos los parámetros del proceso, es decir se considera una planta real tal que:

$$G_r(s) = \frac{4,4}{(11s - 1)} e^{-5,3s},$$

la respuesta obtenida se muestra en la figura 5.17. Notar que no sólo en el caso nominal el NSPC se comporta mejor que el esquema propuesto por Xiang, sino que el primero muestra un comportamiento más robusto que el segundo.

◇

5.2.5. Control de sistemas con acción integral

En este apartado, y a través de un ejemplo, se va a demostrar que con el esquema aquí propuesto (NSPC), también es posible el control de siste-

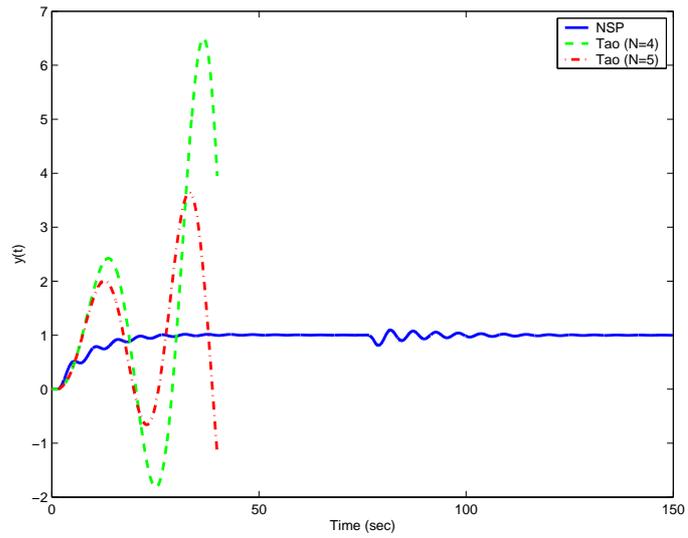


Figura 5.14. Respuesta del sistema, considerando incertidumbre de tipo multiplicativa y errores en todos los parámetros del modelo, para una perturbación $w = 0,05$, en el instante de tiempo $t = 75$ s (Ejemplo 5.2.4).

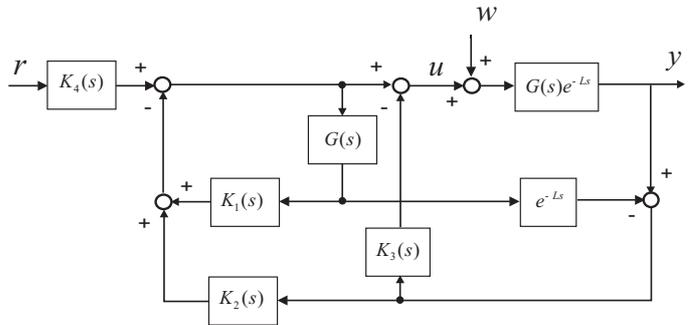


Figura 5.15. DTC propuesto por Xiang et. al. [68].

mas con acción integral, y que los resultados obtenidos mejoran los de las propuestas más efectivas hasta la fecha [90, 139, 68].

EJEMPLO 5.2.5.

Considérese el siguiente proceso integral, entre otros, previamente estudiado en [13, 73, 89, 139, 68]:

$$G_p(s) = \frac{1}{s} e^{-5s}$$

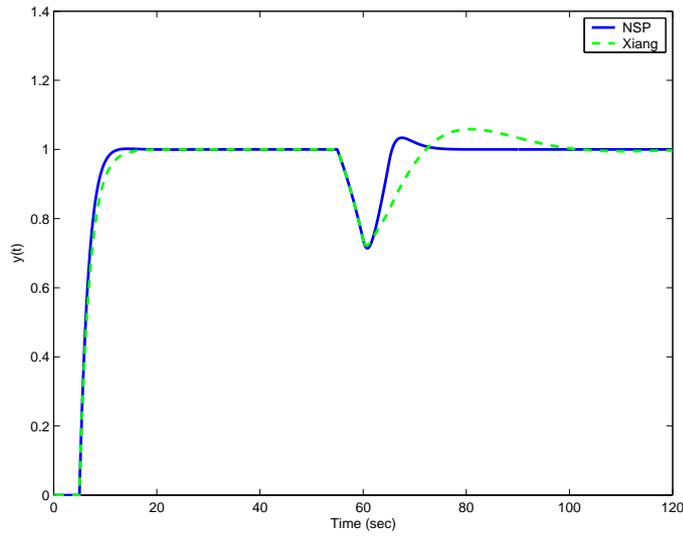


Figura 5.16. Respuesta nominal ante una perturbación $w = -0,1$, en el instante de tiempo $t = 50$ s (Ejemplo 5.2.4).

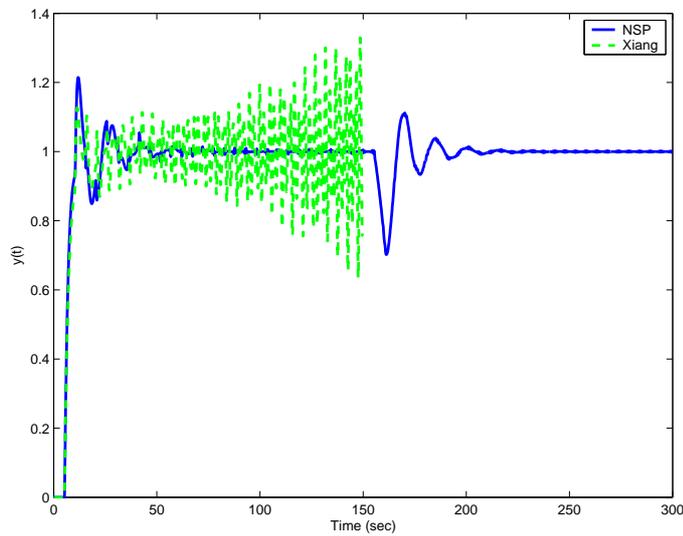


Figura 5.17. Respuesta del sistema, ante errores en los parámetros del sistema, para una perturbación $w = -0,1$, en el instante de tiempo $t = 50$ s (Ejemplo 5.2.4)

Como ya se ha mencionado anteriormente, si se desea realizar una implementación a partir del método de Xiang et al., se deben diseñar cuatro controladores, en [68] estos se diseñan tal que:

$$K_1 = 0,5; \quad K_2 = \frac{0,934s + 0,5}{0,0934s + 1}; \quad K_3 = 0,105; \quad K_4 = 0,5$$

Para la implementación del NSPC, se diseñan un PI y un pre-filtro:

$$K(s) = 1,8 \frac{s + 0,25}{s}; \quad F_1(s) = \frac{1}{3s + 1}$$

Con un periodo de muestreo $T = 0,1$ s, siendo el retardo $L = 50T$, los bloques del predictor serán: $c\Phi_d(z)$, donde $d = 50$, $A = 1$, $B = 0,1$, $c = 1$, y $F(z) = 1$. Y La discretización del regulador PI y pre-filtro da como resultado:

$$K(z) = \frac{1,8z - 1,746}{z - 1}; \quad F_1(z) = \frac{0,04877}{z - 0,9512}$$

Con estos datos, si no existen errores de modelado, los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.18.

Si los errores de modelados son tales que el proceso real considerado es:

$$G_r(s) = \frac{1,1}{s} e^{-5,2s},$$

los resultados obtenidos, figura 5.19, muestran que el esquema propuesto por Xiang et al. es inestable mientras que el NSPC es estable.

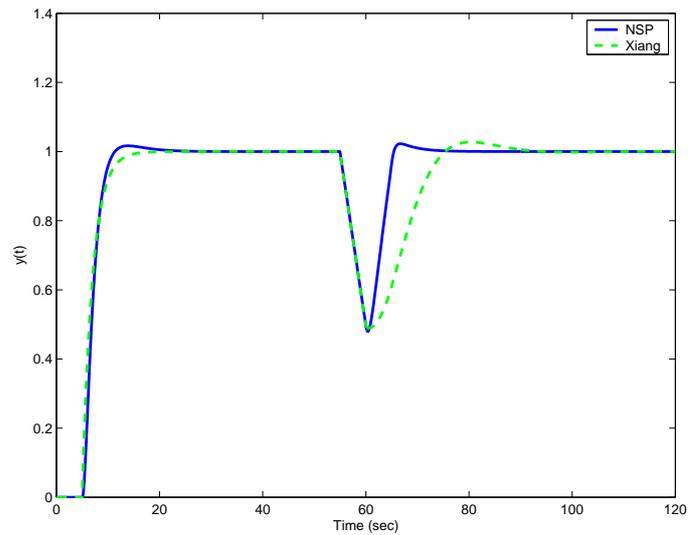


Figura 5.18. Respuesta nominal del sistema ante una perturbación $w = -0,1$, en el instante de tiempo $t = 50$ s (Ejemplo 5.2.5).

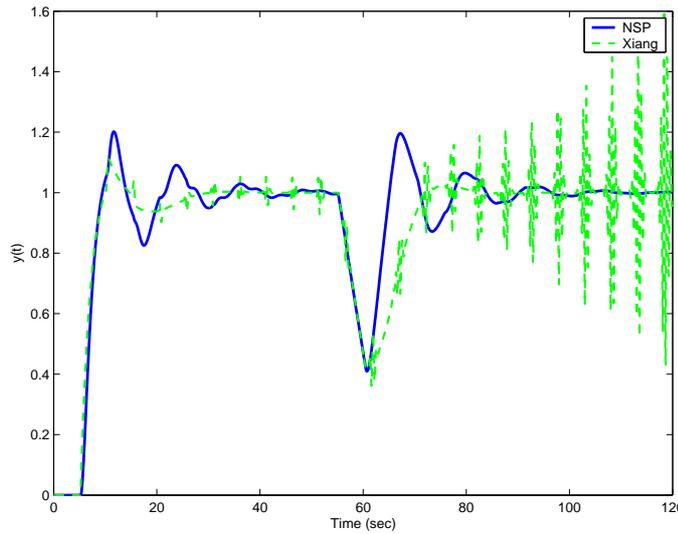


Figura 5.19. Respuesta del sistema, ante errores de modelado, para una perturbación $w = -0,1$, en el instante de tiempo $t = 50$ s (Ejemplo 5.2.5).

Comparación con el DTC propuesto por Zhong et al. [139]: Como se ha detallado en la Sección 3.3.2, el esquema presentado por Zhong et al. (figura 5.20), se puede considerar como la mejor solución para el control de este tipo de sistemas. O en un caso más general para un proceso con un modo integral, si bien remarcar que el mismo no es válido para el control de sistemas de fase no mínima o inestables.

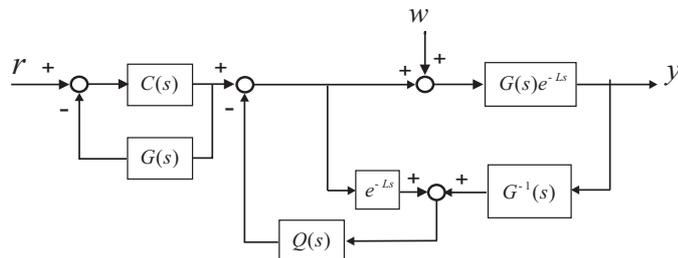


Figura 5.20. DTC propuesto por Zhong et al. [139].

A continuación, y para este mismo ejemplo, se compara tanto la metodología, como las prestaciones del esquema propuesto por Zhong et al. y el NSPC.

En [139], los controles diseñados para este ejemplo fueron: $C(s) = 0,5$, y $Q(s) = \frac{(2\lambda+5)s+1}{(\lambda s+1)^2}$, donde λ se define como un parámetro de ajuste (ver

sección 3.3.2). De forma que, según se detalla en [139], para $\lambda = 2,1$ se obtiene la mejor respuesta al rechazo de perturbaciones, mientras que para $\lambda = 8$ se obtiene la mayor robustez. El mejor compromiso entre esos dos requerimientos, se define en [139] para $\lambda = 4$.

Para la implementación del NSPC, y a partir del esquema de la figura 5.1, se diseña un regulador PI, un pre-filtro tal que:

$$K(s) = 1,5 \frac{s + 0,4}{s}; \quad F_1(s) = \frac{s + 1}{3s + 1}$$

Con objeto de aumentar la robustez, se introduce también un filtro sobre el error de predicción:

$$F_2(s) = \frac{1}{6s + 1}$$

Para un periodo de muestreo $T = 0,1$ s, resultado el mismo predictor que en el caso anterior, la discretización del regulador y filtros es:

$$K(z) = \frac{1,5z - 1,44}{z - 1}; \quad F_1(z) = \frac{0,3333z - 0,3005}{z - 0,9672}; \quad F_2(z) = \frac{0,01653}{z - 0,9835}$$

Siguiendo las condiciones de simulación desarrolladas en [139], para el caso ideal, los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.21, y considerando errores en el retardo modelado, tal que el retardo real sea $L = 5,5$ s, en la figura 5.22.

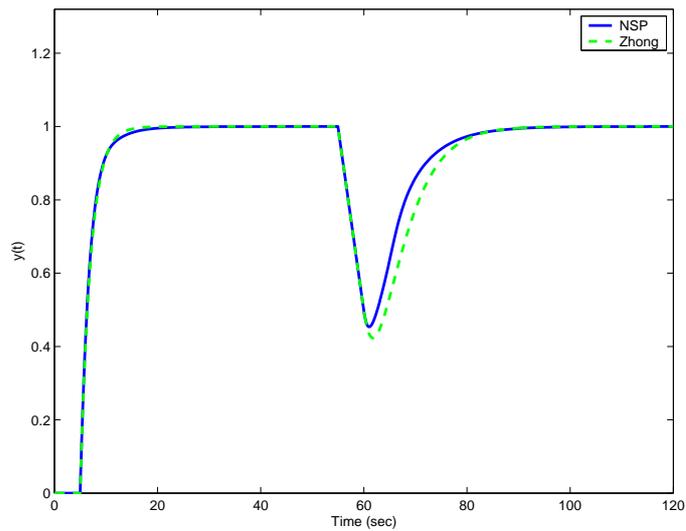


Figura 5.21. Respuesta nominal del NSPC comparada con la del esquema propuesto por Zhong et al. [139], para $\lambda = 4$ (Ejemplo 5.2.5).

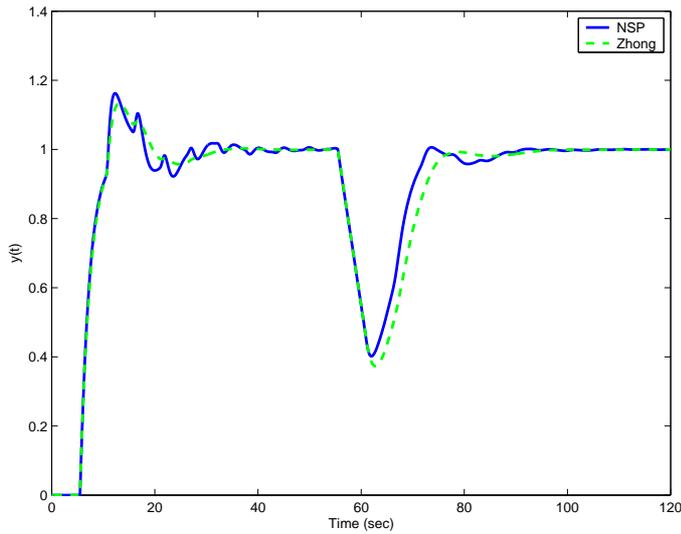


Figura 5.22. Respuesta ante errores de modelado en el retardo considerado $L = 5,5$ s, del NSPC comparada con la del esquema propuesto por Zhong et al. [139] (Ejemplo 5.2.5).

Una importante característica del esquema presentado por [139] mostrado en la figura 5.20, es que no es causal y en algunos casos tampoco es internamente estable [139]. Esta limitación se supera en [139] proporcionando un esquema equivalente para una implementación internamente estable. En el posterior trabajo de Zhong [136], se presenta un nuevo esquema (figura 5.23) para la implementación de la propuesta original (esquema de la figura [139]) tal que la respuesta obtenida se comporte como un regulador de tiempo mínimo (“deadbeat response”).

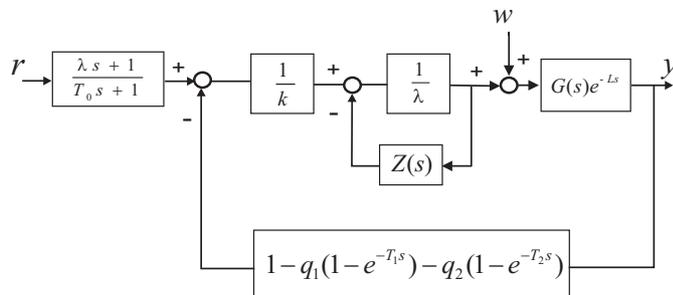


Figura 5.23. DTC propuesto en Zhong [136].

Según el citado trabajo [136], para la implementación del esquema propuesto (figura 5.23), si se desea obtener una determinada constante de tiempo dominante en bucle cerrado T_0 , se determinan los siguientes parámetros: $k = 1$, $T_2 = 10$ s, $\lambda = 2,5$ s, $T_1 = 6,5$ s, $q_1 = -1,75$, y $q_2 = 0,39$, donde el regulador $Z(s)$ presenta la siguiente estructura:

$$Z(s) = \frac{1 - e^{-Ls}}{s} + q_1 \frac{1 - e^{-T_1 s}}{s} + q_2 \frac{1 - e^{-T_2 s}}{s}$$

A partir de estos datos, siguiendo las indicaciones de [136], si se asumen incertidumbres multiplicativas, esto es, si se considera $W_m(s) = \frac{e^{-0,5s}}{0,1s+1} - 1$, así como únicamente una perturbación tal que $w(t) = -0,1$, y se compara con el NSPC, siendo $F_2(s) = \frac{1}{\alpha s+1}$, con $\alpha = 2$, y $\alpha = 6$, los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.24.

Como se puede apreciar, tal y como era de esperar por la propia naturaleza del filtro de predicción, ver índice de robustez (5.32), cuando mayor sea el valor de α mayor será el grado de robustez del NSPC. Y como se puede apreciar en este ejemplo, si bien el comportamiento es ligeramente más lento, el IAE total no empeora sino más bien todo lo contrario. Es decir, en algunos casos, véase éste como ejemplo, un aumento del margen de robustez, incluyendo un filtro sobre el error de predicción, puede implicar inclusive una mejora del rechazo de la perturbación.

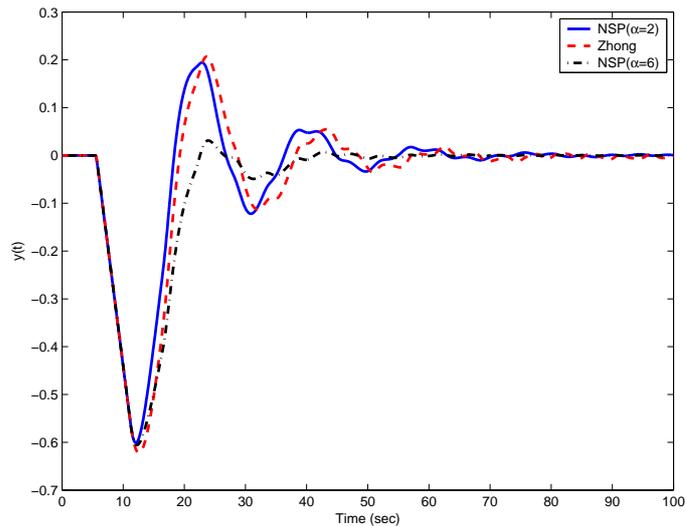


Figura 5.24. Respuesta del NSPC ante incertidumbres de tipo multiplicativo, en comparación con el esquema propuesto por Zhong en [136].

La principal propiedad que se le atribuye en [136], al esquema de la figura 5.23, es que el mismo se comporta como un regulador de tiempo mínimo “deadbeat response”. Sin embargo, si se analiza el caso nominal (figuras 5.25 y 5.26), se pueden apreciar varias cosas:

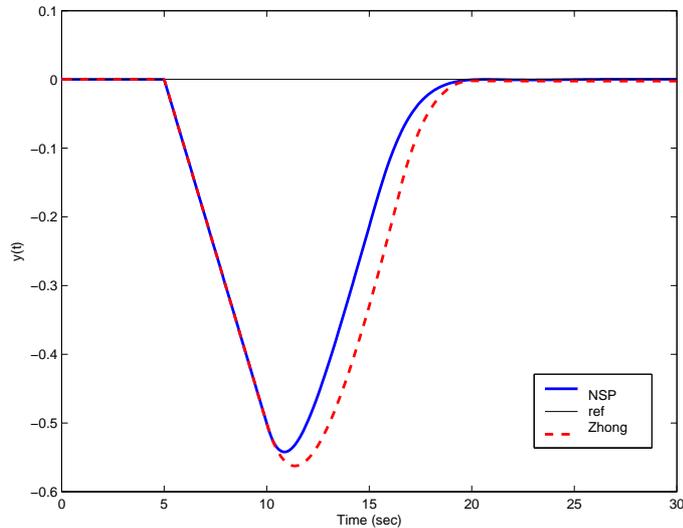


Figura 5.25. Respuesta nominal al rechazo de perturbaciones del NSPC comparada con la respuesta del DTC propuesto por Zhong en [136].

- *El comportamiento del NSPC no es el de un control “deadbeat”, pero el tiempo de establecimiento si que es el mismo que el obtenido con el esquema propuesto por Zhong.*
- *La implementación del esquema de Zhong presenta un ligero error de posición ante perturbaciones. El valor final de la respuesta de Zhong es $-0,0025$, mientras que es nulo para el NSPC. Estos errores se atribuyen a problemas numéricos de implementación del esquema propuesto (ver sección 4.5).*

◇

Por todo lo anterior se puede concluir que, dada la complejidad de la implementación del último esquema propuesto por Zhong, y dado que los resultados obtenidos con el NSPC igualan o superan, la respuesta al set-point y el rechazo a las perturbaciones respectivamente, para un grado de robustez similar, se puede considerar que el NSPC también mejora o cuanto menos iguala todas las propuestas de Zhong et al.

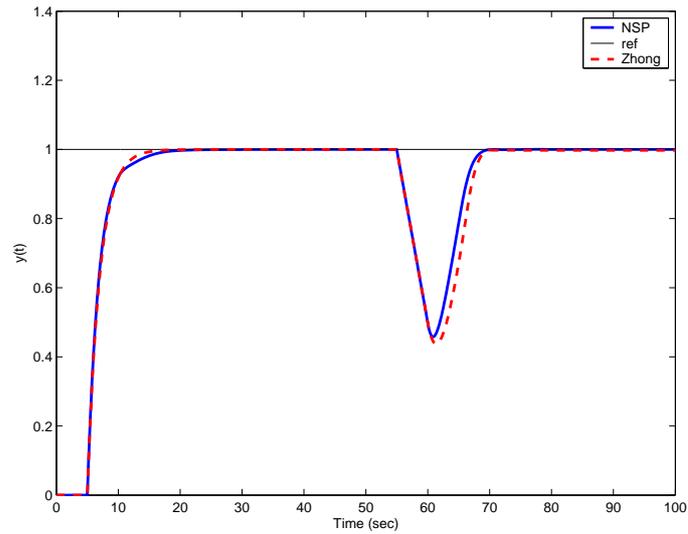


Figura 5.26. Respuesta nominal ante un cambio en el set-point de una unidad, y una perturbación de $-0,1$ unidades en w . Comparación del NSPC con respecto al DTC propuesto por Zhong en [136].

5.2.6. Rechazo de perturbaciones tipo rampa

Una importante característica del DTC presentado en [139], es que el mismo es capaz de rechazar perturbaciones de naturaleza arbitraria.

El NSPC también presenta la propiedad de poder rechazar perturbaciones de tipo rampa, y además con unas prestaciones similares o superiores al esquema de Zhong. Como ejemplo de ello, a continuación se van a comparar las prestaciones de ambos esquemas, a partir del ejemplo propuesto en [139].

EJEMPLO 5.2.6. *Considérese el siguiente proceso [139]:*

$$G_r(s) = \frac{1}{s(s+1)(0,5s+1)(0,2s+1)(0,1s+1)} e^{-5s}$$

En [139], con objeto de obtener un diseño más simple, el ajuste de los controladores se realiza considerando un modelo simplificado del proceso, donde las constantes de tiempo desestimadas se consideran parte del retardo⁴, es decir, se considera como modelo:

$$G_p(s) = \frac{1}{s} e^{-6,5s}$$

El estimador de la perturbación $Q(s)$, se diseña tal que:

⁴ Esta simplificación del modelo ya fue introducida por Matausek y Micié en [72].

$$Q(s) = \frac{(1 + \mu s + \beta s^2)}{(\lambda s + 1)^{d_r+2}}$$

siendo:

$$\begin{aligned}\mu &= (d_r + 2)\lambda + L_m \\ \beta &= \frac{(L_m)^2 + \lambda(d_r + 2)((d_r + 1)\lambda + 2L_m)}{2}\end{aligned}$$

donde $L_m = 6,5$ se define como el retardo del modelo, $d_r = 1$ como el grado relativo del modelo, y $\lambda = 5$, como un parámetro de ajuste. Cuanto mayor es el valor de λ más robusto es el sistema, si bien también se obtiene una respuesta más lenta al rechazo de perturbaciones.

Operando de forma similar que para el esquema de Zhong, en el NSPC, también se puede diseñar a partir de un modelo reducido del proceso, en concreto se considera:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}e^{-5,8s}$$

donde igualmente las constantes de tiempo desestimadas se consideran parte del retardo.

Para este modelo simplificado, se diseña el siguiente regulador y pre-filtro.

$$K(s) = 1,2 \frac{(s+0,1)(s+0,1)}{s^2}; \quad F_1(s) = \frac{1}{4s+1}$$

En el esquema presentado por Zhong y Normey-Rico, la función de sensibilidad entre la perturbación de carga y la salida del proceso es:

$$G_{yw}(s) = G(s)e^{-Ls}(1 - Q(s)e^{-Ls})$$

Esta misma relación, y para el NSPC, se puede expresar como:

$$G_{yw} = \frac{Gz^{-d}}{(1+KG)} + c\Phi \frac{KGz^{-d}}{(1+KG)}(1 - F_2z^{-d}) \quad (5.35)$$

Tal que es fácil demostrar que, si se diseña adecuadamente el regulador K , en un bucle simple, para el rechazo de perturbaciones tipo rampa, el primer término de la expresión (5.35) será nulo en régimen permanente. Por otro lado, y de forma similar a como se propone en [139], si se diseña adecuadamente el filtro $F_2(s)$, tal que cumpla:

$$\begin{aligned}F_2(0) &= 1 \\ F_2'(0) &= L \\ F_2''(0) &= L^2\end{aligned}$$

el segundo término de la expresión (5.35) también será nulo en régimen permanente.

Por ejemplo, si se diseña $F_2(s)$ con las mismas fórmulas que $Q(s)$, pero para $\lambda = 7$, se obtiene:

$$F_2(s) = \frac{(285,63s^2 + 26,8s + 1)}{(7s + 1)^3}$$

A partir de estos datos, si se implementa el NSPC con un periodo de muestreo $T = 0,1$ s, se obtienen los resultados de la figura 5.27. Destacar que el IAE, con respecto al rechazo de perturbaciones, para el NSPC es de 3,68 mientras que en el esquema propuesto por Zhong y Normey-Rico es de 5,85.

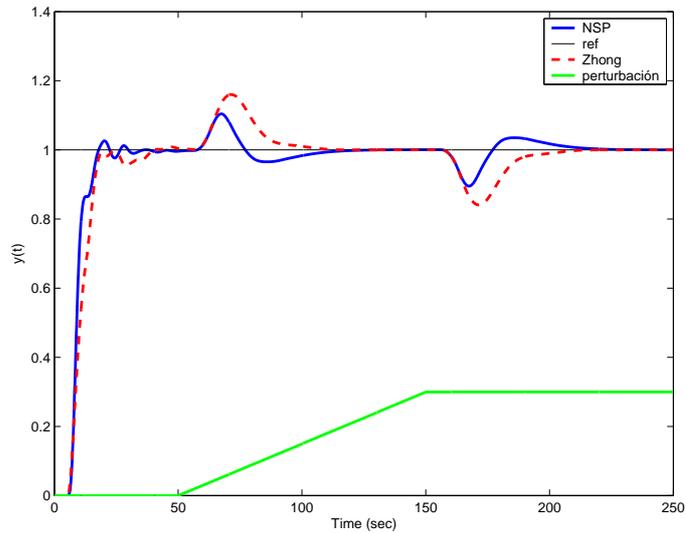


Figura 5.27. Respuesta nominal ante una perturbación tipo rampa, comparada con la respuesta del DTC propuesto por Zhong en [139] .

◇

5.3. DTC para sistemas de fase no mínima

5.3.1. Esquema de predicción

En esta sección se propone un nuevo DTC para el control de sistemas inestables de fase no mínima con grandes retardos de actuación y/o medida.

El diseño del esquema de control se divide en dos partes:

- primero, una modificación del esquema de predicción introducido en la Sección 5.1, y denotado como mNSP permitirá la estabilización del proceso inestable

- posteriormente, un segundo bucle de control, diseñado como un convencional SP, permitirá el seguimiento de la referencia y rechazo de perturbaciones

El principal objetivo que se plantea en un DTC es obtener una predicción de la salida del proceso a controlar. Dado que si el sistema es de fase no mínima el filtro $F(z)$ es inestable, no puede obtenerse una predicción tal y como se propuso en (5.14), por tanto, y con objeto de superar esta limitación se introduce el siguiente Lema:

Lema 5.3.1. *La señal,*

$$y^\dagger(z) = G^\dagger(z)u(z) \quad (5.36)$$

donde se define:

$$G^\dagger(z) := cA^{-d}(zI - A)^{-1}b = \frac{N^\dagger(z)}{D(z)} \quad (5.37)$$

puede ser computada, evitando la utilización directa del modelo inestable, a partir de la siguiente expresión:

$$y^\dagger(z) = \Psi_d(z)u(z) + y(z) \quad (5.38)$$

Demostración: Si se define el filtro FIR:

$$\Psi_d(z) := cA^{-d}\Phi_d(z) \quad (5.39)$$

es fácil verificar que:

$$\begin{aligned} \Psi_d(z)u(z) &= cA^{-d}(I - A^d z^{-d})(zI - A)^{-1}bu(z) \\ &= cA^{-d}(zI - A)^{-1}bu(z) - y(z) \end{aligned}$$

Y dado que:

$$G^\dagger(z) = cA^{-d}(zI - A)^{-1}b \quad (5.40)$$

despejando adecuadamente se demuestra que (5.36) se puede computar a partir de (5.38).

Comentario 5.3.1 Notar que si $G(z)$ es inestable, $G^\dagger(z)$ también seguirá siendo inestable.

Comentario 5.3.2 La matriz A es una matriz regular, es decir, todos sus autovalores son distintos de cero y por tanto siempre existirá su inversa. En discreto, un autovalor nulo significa un polo en el origen, y dado que esto equivale a un retardo, éstos siempre estarán incluidos en el mismo, es decir en z^{-d} , de forma que la matriz A siempre será regular.

■

Teorema 5.3.1 [mNSP] *Dado un sistema inestable de fase no mínima con un retardo de actuación y/o medida, modelado según la expresión (5.2) o (5.3), es posible definir una estructura de control tal que sea posible el diseño de los reguladores de la misma, para alcanzar unos determinados objetivos de control, sin consideración del retardo. El proceso de diseño será el que sigue:*

- 1) La señal filtrada y^\dagger , (5.36), se computa a partir de la expresión (5.38).
- 2) Se diseña un regulador $K(z)$ para estabilizar la función de transferencia resultante $G^\dagger(z)$ de la computación de la señal y^\dagger .
- 3) Se diseña un convencional SP, sobre el sistema estabilizado resultante, para obtener los objetivos finales de control.

Demostración:

- 1) Esta parte queda probada por el Lema 5.3.1.
- 2) Basada en la computación de la señal y^\dagger , se plantea el sistema realimentado que se muestra en línea discontinua en el esquema de la figura 5.28, esto es:

$$\begin{aligned} y(z) &= G(z)z^{-d}u(z) \\ u(z) &= v(z) - K(z)y^\dagger(z) \end{aligned}$$

donde $K(z)$ se diseñará por la técnica apropiada, pero tal que la siguiente expresión sea estable:

$$\frac{y(z)}{v(z)} = \frac{G(z)z^{-d}}{1 + K(z)G^\dagger(z)} = M(z)z^{-d} \quad (5.41)$$

De forma que el regulador K se puede diseñar para estabilizar (5.41), sin considerar el retardo del sistema.

Por otro lado, si se considera una perturbación a la entrada del proceso w , y un ruido de medida n , se obtiene que la salida del proceso es:

$$\begin{aligned} y &= \frac{Gz^{-d}}{1 + KG^\dagger}v + \frac{G(1 + K\Psi_d)z^{-d}}{1 + KG^\dagger}w \\ &\quad + \frac{GKz^{-d}}{1 + KG^\dagger}n \end{aligned}$$

Con lo que es fácil de comprobar, de forma similar a como se demostró para el NSPC (Teorema 5.2.2), que el esquema propuesto es internamente estable.

- 3) Para el sistema estabilizado resultante $M(z)z^d$, se diseñara un sistema de control a partir de un convencional SP, es decir:

$$y_{sp}(z) = (1 - z^{-d})M(z)v(z) + y(z)$$

donde el controlador $K_c(z)$, se diseñará tal que se cumplan los requerimientos de control deseados sobre la salida del proceso:

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{K_c(z)M(z)}{1 + K_c(z)M(z)} z^{-d}$$

La estructura de control resultante se muestra en la figura 5.28. ■

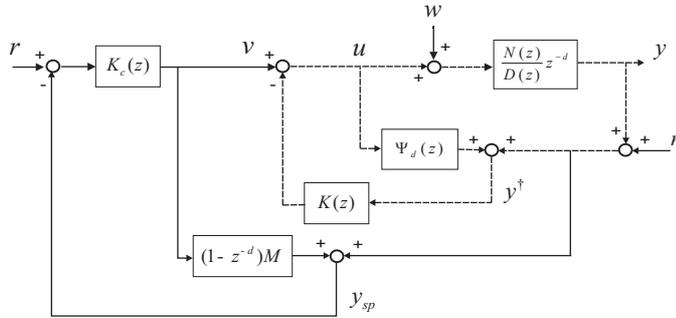


Figura 5.28. DTC propuesto para el control de procesos inestables de fase no mínima (mNSP).

5.3.2. Simulaciones y comparaciones

EJEMPLO 5.3.1. *Considérese el siguiente proceso, previamente analizado por Tao et al. [61]:*

$$G_p(s) = \frac{2}{(s - 1)(3s - 1)} e^{-0,3s} \quad (5.42)$$

En [61], se demuestra que el esquema propuesto es superior a propuestas previas, tanto para el seguimiento de la referencia como en cuanto al rechazo de perturbaciones. Para el diseño del mencionado DTC es necesario diseñar tres controladores, en [61] estos se ajustan como:

$$G_c = \frac{3}{0,03s + 1}$$

$$C_T(s) = \frac{1,5s^2 + s + 0,5}{(0,51s + 1)^2}$$

$$F_T(s) = \frac{32,82s^2 + 439,41s + 232,64}{0,56s^2 + 0,8s + 100} + \frac{129,79}{s(0,56s^2 + 0,8s + 100)}$$

Si se realiza una discretización del modelo de la planta, independientemente del periodo de muestreo, este siempre resulta de fase no mínima. Por ejemplo, para $T = 0,005$ s, el modelo discretizado es:

$$G(z) = \frac{8,35e^{-006}(z + 1,002)}{(z - 1,005)(z - 1,002)}$$

Dado que se trata de un proceso de fase no-mínima, no va a ser posible una implementación a partir del NSPC, con lo cual se plantea una implementación a partir del DTC desarrollado en esta sección (figura 5.28).

Para un periodo de muestreo $T = 0,005$ s, siendo el retardo $L = 60T$, el bloque del predictor $\Psi_d(z)$, se implementa para $d = 60$, según la expresión (5.39), donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1,0067 & -0,0017 \\ 0,0050 & 1,0000 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0000 \end{pmatrix}, \quad c = (0 \ 0,6667)$$

A partir de la implementación de este bloque es posible diseñar un regulador K , para que se cumpla la condición 2) del Teorema 5.3.1, es decir que estabilice la función de transferencia:

$$G^\dagger(z) = \frac{-0,00081459(z - 1,02)}{(z - 1,005)(z - 1,002)}$$

Por ejemplo, con el regulador:

$$K(z) = \frac{370,4z - 369,5}{z - 0,5791}$$

el sistema en bucle cerrado resultante será estable, siendo la correspondiente f.d.t.:

$$M(z) = \frac{8,3519E - 006(z + 1,002)(z - 0,5791)}{(z - 0,9155)(z^2 - 1,972z + 0,9722)} \quad (5.43)$$

A continuación, según la condición 3) del Teorema 5.3.1, se diseña un segundo controlador sobre $M(z)$, usando un convencional SP. Por ejemplo, un simple PI:

$$K_c(z) = \frac{0,7z - 0,6923}{z - 1}$$

tal que se cumplan los objetivos de control requeridos.

Si los errores de modelados considerados son los mismos que se los introducidos en [61], es decir, se considera un proceso real tal que:

$$G_r(s) = \frac{2}{(1,1s - 1)(3,3s - 1)} e^{-0,33s},$$

los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.29, donde se puede apreciar un comportamiento algo más lento en cuanto al seguimiento de la

referencia por parte del mNSP pero mejor en cuanto al rechazo de perturbaciones. Pero si se aumentan los errores de todos los parámetros del modelo, incluido del retardo, tal que el proceso real sea:

$$G_r(s) = \frac{2,4}{(1,2s - 1)(3,6s - 1)} e^{-0,42s},$$

los resultados obtenidos, representados en la figura 5.30, muestran un mayor grado de robustez del mNSP frente al esquema de predicción propuesto por Tao et al.

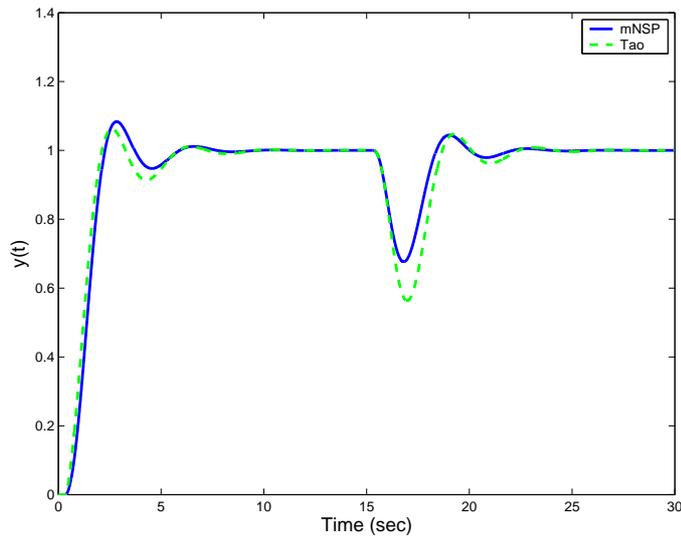


Figura 5.29. Respuesta del sistema para una perturbación escalón unitario en el instante de tiempo $t = 15s$, comparada con la correspondiente de Zhong, para un error de modelado del 10% por exceso en todos los parámetros del proceso real (ejemplo 5.3.1).

Comportamiento ante el ruido de medida: De forma similar a como se hizo con el NSPC, en la figura 5.31, y para el caso nominal, se representa el comportamiento del mNSP ante un ruido de medida en comparación con el esquema diseñado según la propuesta de Tao et al.

◇

5.3.3. Resultados experimentales

Para validar experimentalmente el esquema de predicción, denotado como mNSP, se realiza una implementación sobre el prototipo de un helicóptero de cuatro motores de Quanser[©].

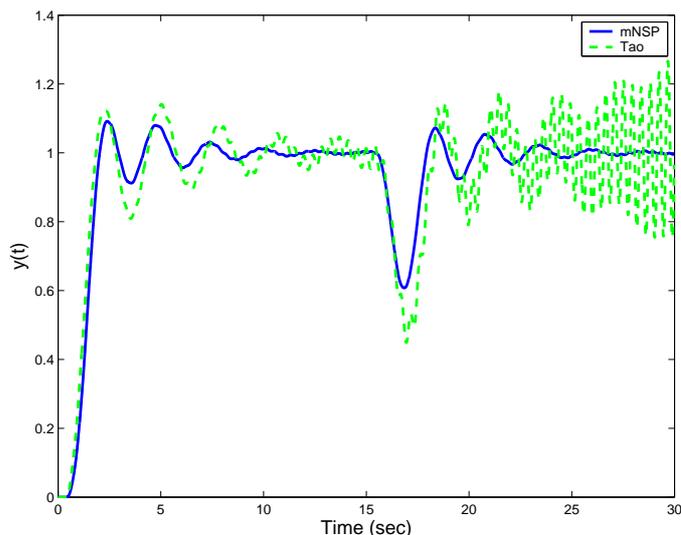


Figura 5.30. Respuesta perturbada, para un error de modelado en las constantes de tiempo del 20% por exceso, y un retardo real $L_r = 0,42$ unidades (ejemplo 5.3.1).

Las principales características de este sistema, así como las estrategias de control y su implementación se detallan en el Capítulo 10. En esta sección únicamente se exponen los detalles de la implementación del mNSP y los resultados obtenidos cuando el sistema es sometido a un retardo de actuación y/o medida. En particular, se va a implementar un control SISO sobre la variable del “roll”, sometiendo el sistema a un retardo de actuación.

Del modelo lineal del prototipo, se obtiene que el ángulo del roll “r”, es independiente del resto de variables del sistema. Con lo cual es posible obtener el siguiente modelo simplificado:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2,1176 & -2,1176 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ V_l \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

donde V_r se define como el voltaje que se aplica al motor derecho, y V_l el voltaje que se aplica al motor izquierdo⁵.

A partir de este modelo (5.44), siguiendo las indicaciones en [102], se diseña un regulador LQR, tal que se obtenga la siguiente ley de control:

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_l \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0,3491 & 0,0602 \\ -0,3491 & -0,0602 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \end{pmatrix}$$

donde la estimación de \dot{r} se obtiene a partir de la siguiente función de transferencia:

⁵ Notar que la discretización de este modelo daría como resultado un sistema de fase no mínima, con lo cual no sería posible la implementación del NSPC.

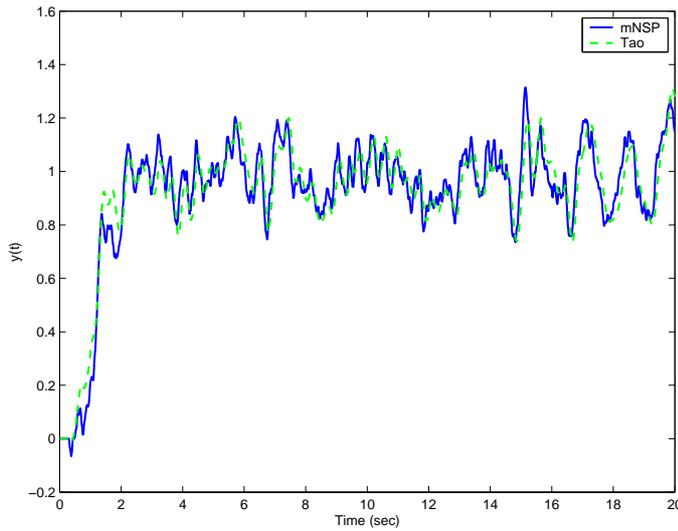


Figura 5.31. Respuesta del sistema ante un ruido de medida. El ruido de medida se ha generado con el bloque “Band-Limited White Noise” de *Simulink*® (ejemplo 5.3.1).

$$\hat{r}(s) = \frac{500s}{s + 500}r(s)$$

Estamos interesados en una implementación del algoritmo de control que se muestra en la figura 5.28. Por ello, previa manipulación algebraica, la ley de control se representa según se indica en la figura 5.32, donde:

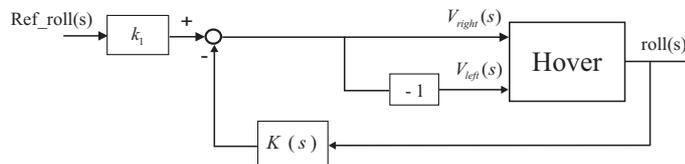


Figura 5.32. Esquema equivalente del regulador LQR expresado en representación entrada/salida.

$$K(s) = \frac{(500k_2 + k_1)s + 500k_1}{s + 500}$$

Si se aplica este esquema de control sobre el prototipo del helicóptero, se obtienen los resultados de la figura 5.33.

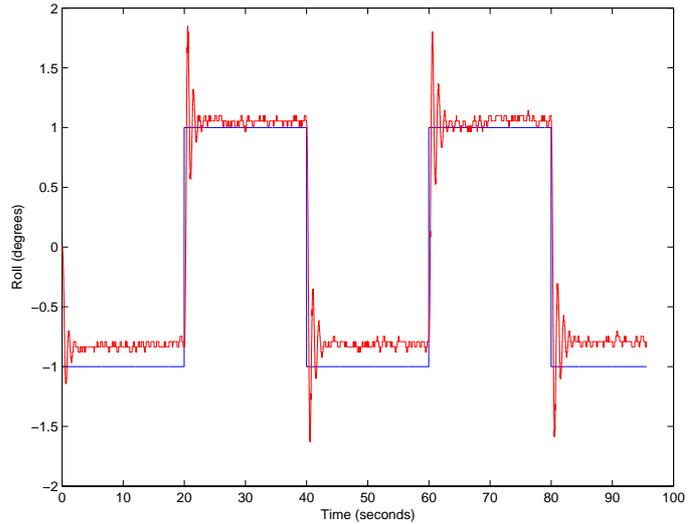


Figura 5.33. Respuesta del sistema sin retardo.

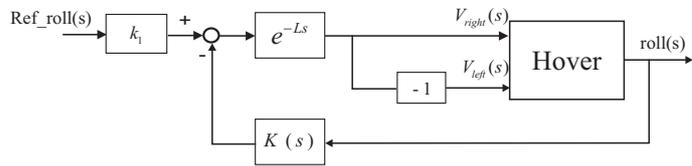


Figura 5.34. Esquema de control con un retardo de actuación.

Si se considera ahora un retardo de actuación, introducido este de forma artificial, tal y como se muestra en la figura 5.34, se obtienen los resultados de la figura 5.35. Como se puede apreciar, el sistema se hace inestable para un retardo $L = 0,05$ s.

Como se ha mencionado anteriormente, la discretización de este modelo da como resultado un sistema de fase no mínima. Si se implementa el esquema propuesto mNSP (figura 5.28), para un periodo de muestreo $T = 0,001$ s, con un PID sobre el bucle externo tal que:

$$K_c(s) = 0,07\left(1 + \frac{6}{s} + 4s\right)$$

y si se considera que no existen errores sobre el retardo modelado, se obtienen los resultados de la figura 5.36.

Si se introduce un error en el retardo, tal que el retardo real sea $L_r = 0,055$ s, mientras que el del modelo se mantiene como $L = 0,05$ s, se obtienen los resultados de la figura 5.37.

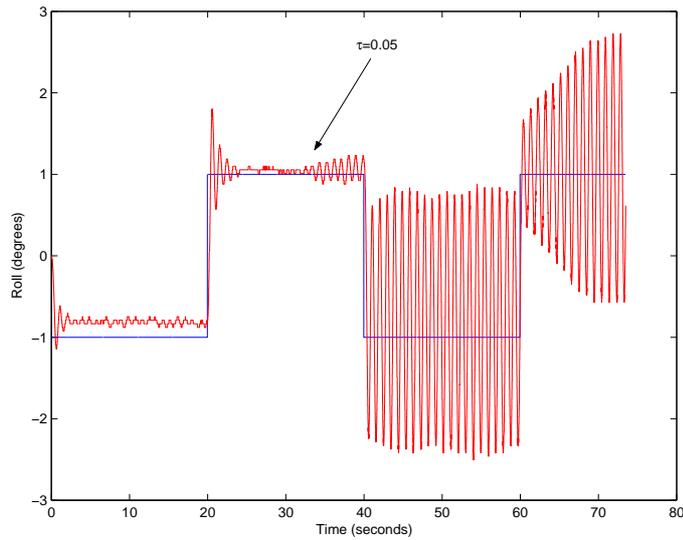


Figura 5.35. Respuesta del sistema sin predictor y con un retardo $L = 0,05$ s, introducido en el instante de tiempo $t = 30$ s.

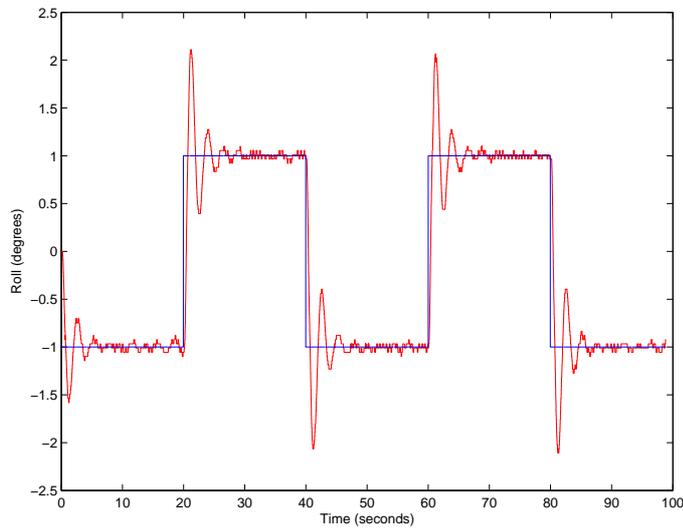


Figura 5.36. Respuesta del esquema de predicción propuesto, retardo del modelo $h = 50$, retardo real $d = 50$ (que se corresponde con $L = 0,05$ s).

En las figuras 5.38 y 5.39 se muestra un detalle de la respuesta del sistema sin retardo, y de la respuesta del sistema con retardo y con el predictor

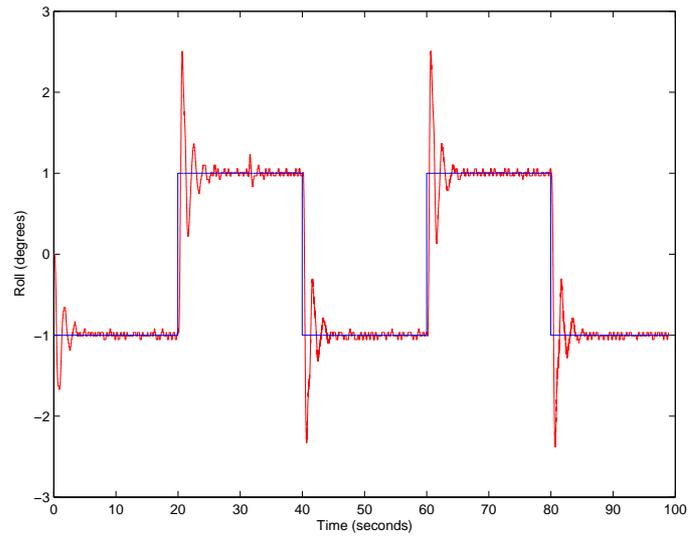


Figura 5.37. Respuesta del esquema de predicción propuesto, retardo del modelo $h = 50$, retardo real $d = 55$ (que se corresponde con $L = 0,055$ s).

propuesto. Como se puede observar, la respuesta del esquema de predicción propuesto alcanza un error de posición cero.

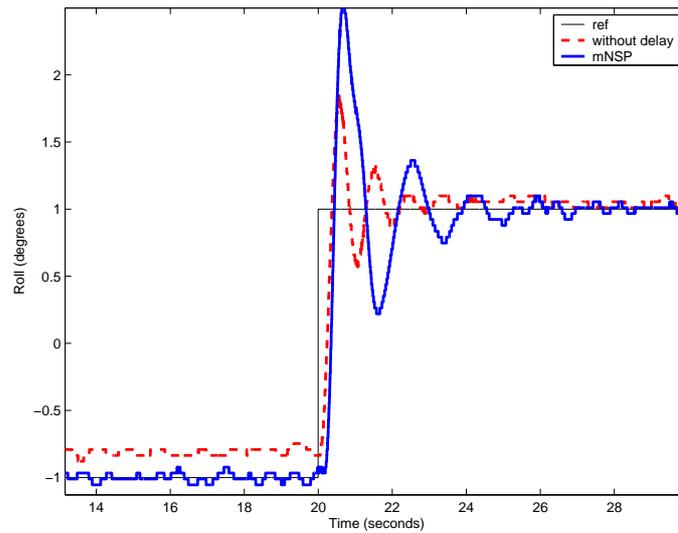


Figura 5.38. Detalle de la comparación entre la respuesta del sistema sin retardo y el sistema con predictor y con error de modelado en el retardo tal que $L = 0,055$ s, para un escalón positivo.

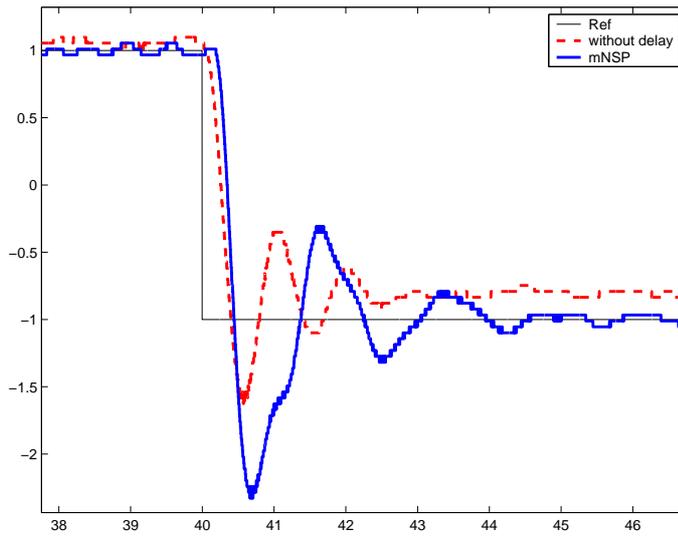


Figura 5.39. Detalle de la comparación entre la respuesta del sistema sin retardo y el sistema con predictor y con error de modelado en el retardo tal que $L = 0,055$ s, para un escalón negativo.

Parte III

Predictor de estados MIMO para el control de sistemas estables o inestables con retardos

6 Predictor-observador de estados MIMO para el control de sistema inestables

6.1. Introducción

La técnica de Asignación Finita del Espectro (FSA) [71] (ver sección 3.4), y para el caso particular de sistemas con retardos de actuación y/o medida se basa en la implementación del predictor de estados estático (PEE) (ecuación 3.67).

En el caso ideal, la implementación del PEE permitiría asignar todos los polos del sistema en bucle cerrado, de forma que, independientemente de si el sistema es estable o inestables en bucle abierto, los polos de bucle cerrado se podrían situar en la zona estable del plano complejo [32]. Pero, tal y como se demuestra, entre otros trabajos, en [76, 117], la implementación computacional o digital de la integral de predicción puede llevar a la inestabilidad del sistema.

Dentro del marco de los sistemas inestables con retardos temporales, la implementación numéricamente estable de la técnica de Asignación Finita del Espectro, o del PEE, se consideraba todavía como una de las grandes cuestiones por resolver [105]. Como se ha mencionado anteriormente, el trabajo presentado en [137], junto con el desarrollo de este capítulo pueden considerarse como las primeras soluciones genéricas para el caso particular de retardos en la acción de control. En [137] la metodología propuesta consiste en dos técnicas de aproximación de la integral de predicción (una en el dominio “s” y otra discreta en el dominio “z”), que aparentemente resuelven los problemas de inestabilidad numérica en una implementación digital. Destacar sin embargo, que en el trabajo mencionado, aparte del desarrollo teórico, únicamente se realiza una simulación sobre un ejemplo escalar, mientras que en el trabajo que se presenta a continuación, el desarrollo teórico se complementa con varias simulaciones y una implementación real sobre un mini-helicóptero de 4 rotores en vuelo estacionario, y sobre un prototipo de laboratorio de un helicóptero de 4 rotores.

Este Capítulo, se ha estructurado como sigue:

- En la primera sección de este capítulo se plantea un esquema de predicción discretizado considerando únicamente posibles errores en el retardo modelado menores que un periodo de muestreo. Bajo esta restricción, se demuestra tanto la estabilidad como la estabilidad robusta del sistema

híbrido formado por el predictor discretizado más el proceso en continuo, considerando también posibles errores en el periodo de muestreo y en todos los parámetros del modelo del sistema. Dado que no siempre va a ser posible disponer de una medida del estado, en esta sección también se demuestra el principio de separación entre el predictor propuesto y un observador de estados clásico.

- En la segunda sección de este capítulo, se extiende la prueba de estabilidad robusta al caso de errores en el retardo mayores que un periodo de muestreo, considerando la posibilidad de errores de modelado tanto por exceso como por defecto. Destacar que, algunos sistemas pueden ser estables para un determinado intervalo del retardo, pero inestables para otros valores del retardo fuera de ese rango [42].

La validación experimental del esquema de predicción planteado, se han desarrollado sobre una plataforma de tiempo real para el control de un mini-helicóptero de cuatro rotores en vuelo estacionario. También se ha realizado una implementación sobre un prototipo de laboratorio de un helicóptero de 4 rotores.

Destacar que, en nuestro conocimiento y hasta la fecha, no se ha encontrado en la literatura ninguna implementación real de un esquema de predicción o DTC sobre un proceso inestable.

6.2. Errores en el retardo modelado menores que un periodo de muestreo

En este capítulo se considera que el sistema dinámico se puede modelar como:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t - h(t)) \quad (6.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (6.2)$$

donde las matrices $A_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_c \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, incluyen los parámetros nominales de la planta, y $h(t)$ se considera un retardo variable temporalmente.

Normalmente, en el campo de los sistemas discretos se define un muestreo ideal, tal que los instantes de muestreo t_k se definen como $t_k = kT$ donde T representa el periodo de muestreo, y k un número entero.

Sin embargo, en este capítulo se quiere probar la estabilidad robusta del sistema cuando ese muestreo ideal no ocurre. Es decir, cuando t_k no es un múltiplo entero de T . Por ello, en este capítulo se define t_k como el k -ésimo instante de muestreo tal que:

$$t_{k+1} - t_k = T + \varepsilon_k \quad (6.3)$$

donde T representa el periodo de muestreo ideal, y ε_k se define como una pequeña posible variación entre instantes de muestreo. Esta variación puede ser positiva o negativa, pero debe cumplir la siguiente restricción:

$$|\varepsilon_k| \leq \bar{\varepsilon} \ll T \quad (6.4)$$

Respecto a los errores de modelado en el retardo considerado, en esta sección se asume que T y $h(t)$ cumplen la siguiente relación:

$$h(t) = dT + \epsilon(t) \quad (6.5)$$

donde d es un número entero y $\epsilon(t)$ se define como la incertidumbre en el retardo $h(t)$. Esta incertidumbre $\epsilon(t)$ puede ser positiva o negativa pero debe cumplir la siguiente restricción:

$$|\epsilon(t)| \leq \bar{\epsilon} \ll T \quad (6.6)$$

Si se define la notación $x_k \doteq x(t_k)$, de (6.1) se obtiene:

$$x_{k+1} = A_1 x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_c(t_{k+1}-\tau)} B_c u(\tau - h(\tau)) d\tau \quad (6.7)$$

donde:

$$A_1 = e^{A_c(t_{k+1}-t_k)} = e^{A_c(T+\varepsilon_k)} \quad (6.8)$$

A partir de (6.8) es posible definir A como,

$$A = e^{A_c T} \quad (6.9)$$

y Δ_4 se define tal que:

$$A_1 = A + \Delta_4 \quad (6.10)$$

Dado que el objetivo es la implementación en un computador, si se asume un retenedor de orden cero (ZHO), se considera que la ley de control u será constante entre instantes de muestreo, por tanto: $u(t) = u_k \forall t \in [t_k, t_{k+1})$.

Lema 6.2.1. *La discretización de la ecuación de estados (6.1) considerando el muestreo definido en (6.3), y un retardo tal que se cumpla la restricción (6.5) se puede expresar como:*

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_{k-d} + \Delta f_k \quad (6.11)$$

donde:

$$f_k = [u_{k-d-1}^T, u_{k-d}^T, u_{k-d+1}^T, x_k^T]^T \quad (6.12)$$

Δ es una matriz que está acotada por $\bar{\varepsilon}$ y $\bar{\epsilon}$. Por tanto si $\bar{\varepsilon}$ y $\bar{\epsilon}$ convergen a cero, Δ también lo hará.

Demostración: Considerando la restricción (6.3), es posible obtener una expresión recursiva de retardo $h(\tau)$ en la ecuación de estados discretizada (6.7), tal que:

$$\sum_{i=k-d}^{k-1} (t_{i+1} - t_i - T - \varepsilon_i) = 0 \quad (6.13)$$

o lo que es lo mismo:

$$dT = t_k - t_{k-d} - \mu_k \quad (6.14)$$

donde:

$$\mu_k = \sum_{i=k-d}^{k-1} \varepsilon_i \quad (6.15)$$

Si se sustituye (6.14) en (6.5) se obtiene:

$$h(\tau) = dT + \epsilon(\tau) = t_k - t_{k-d} - \mu_k + \epsilon(\tau) \quad (6.16)$$

De tal forma que la integral de la expresión (6.7) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} M(k) &\doteq \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_c(t_{k+1}-\tau)} B_c u(\tau - h(\tau)) d\tau \\ &= \int_{t_k}^{t_k+T} e^{A_c(t_{k+1}-\tau)} B_c u(\tau - h(\tau)) d\tau + \delta_1 \\ &= \int_{t_k}^{t_k+T} e^{A_c(t_k+T-\tau)} B_c u(\tau - h(\tau)) d\tau + \delta_1 + \delta_2 \\ &= \int_{t_k}^{t_k+T} e^{A_c(t_k+T-\tau)} B_c u(\tau - t_k + t_{k-d}) d\tau + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \\ &= B u_{k-d} + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde a partir de (6.3) y (6.16), se obtiene que:

$$\delta_1 = \int_{t_k+T}^{t_k+T+\varepsilon_k} e^{A_c(t_{k+1}-\tau)} B_c u(\tau - h(\tau)) d\tau \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_{t_k}^{t_k+T} \left[e^{A_c(t_k+T+\varepsilon_k-\tau)} - e^{A_c(t_k+T-\tau)} \right] B_c u(\tau - h(\tau)) d\tau \\ &= \int_{t_k}^{t_k+T} e^{A_c(t_k+T-\tau)} \left[e^{A_c \varepsilon_k} - I \right] B_c u(\tau - h(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \int_{t_k}^{t_k+T} e^{A_c(t_k+T-\tau)} B_c [u(\tau - t_k + t_{k-d} + \mu_k - \epsilon(\tau)) \\ &\quad - u(\tau - t_k + t_{k-d})] d\tau \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}\delta_4 &= \int_{t_k}^{t_k+T} e^{A_c(t_k+T-\tau)} B_c [u(\tau - t_k + t_{k-d}) - u(t_{k-d})] d\tau \\ &= \int_{t_k+T+\varepsilon_{k-d}}^{t_k+T} e^{A_c(t_k+T-\tau)} B_c [u(\tau - t_k + t_{k-d}) - u(t_{k-d})] d\tau\end{aligned}\quad (6.21)$$

Dado que $u(\tau - t_k + t_{k-d}) = u(t_{k-d})$ para $\tau \in [t_k, t_k + T + \varepsilon_{k-d})$, se tiene que:

$$B = \int_{t_k}^{t_k+T} e^{A_c(t_k+T-\tau)} B_c d\tau = \int_0^T e^{A_c(T-s)} B_c ds\quad (6.22)$$

Si se define:

$$\nu(\tau, k) \doteq u(\tau - t_k + t_{k-d} + \mu_k - \epsilon(\tau)) - u(\tau - t_k + t_{k-d})\quad (6.23)$$

asumiendo que λ es la cota superior de $\mu_k - \epsilon(\tau)$, es decir:

$$|\mu_k - \epsilon(\tau)| \leq d\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon} \doteq \lambda \ll T\quad (6.24)$$

la expresión δ_3 en (6.20) se puede reescribir como:

$$\delta_3 = \delta_5 + \delta_6 + \delta_7\quad (6.25)$$

donde:

$$\delta_5 = \int_{t_k}^{t_k+\lambda} e^{A_c(t_k+T-\tau)} B_c \nu(\tau, k) d\tau\quad (6.26)$$

$$\delta_6 = \int_{t_k+\lambda}^{t'_k} e^{A_c(t_k+T-\tau)} B_c \nu(\tau, k) d\tau\quad (6.27)$$

$$\delta_7 = \int_{t'_k}^{t_k+T} e^{A_c(t_k+T-\tau)} B_c \nu(\tau, k) d\tau\quad (6.28)$$

A partir de la restricción (6.3), se tiene que:

$$t'_k = t_k + T + \varepsilon_{k-d} - \lambda = t_k + t_{k-d+1} - t_{k-d} - \lambda\quad (6.29)$$

Notar que, $\nu(\tau, k) = 0$ para $\tau \in [t_k + \lambda, t'_k]$ (ver expresión (6.23)).

La expresión de δ_1 , (6.18), usando un cambio de variable, también se puede reescribir como:

$$\delta_1 = \int_{-\varepsilon_k}^0 e^{-A_c s} B_c u(s - h(s + t_k + T)) ds\quad (6.30)$$

En general, dependiendo de los valores de las incertidumbres ε_k y $\epsilon(t)$, la expresión $u(s - h(s + t_k + T))$ en el intervalo $s \in [0, \varepsilon_k]$ es igual para u_{k-d-1} , u_{k-d} o u_{k-d+1} . Si se definen estos intervalos como Ω_{11} , Ω_{12} y Ω_{13} respectivamente. La expresión δ_1 se puede expresar como:

$$\delta_1 = \int_{\Omega_{11}} e^{-A_c s} B_c ds u_{k-d-1} + \int_{\Omega_{12}} e^{-A_c s} B_c ds u_{k-d} + \int_{\Omega_{13}} e^{-A_c s} B_c ds u_{k-d+1} \quad (6.31)$$

O también como:

$$\delta_1 = \Gamma_{11} u_{k-d-1} + \Gamma_{12} u_{k-d} + \Gamma_{13} u_{k-d+1} \quad (6.32)$$

Notar que los intervalos Ω_{11} , Ω_{12} y Ω_{13} están acotados por $\bar{\varepsilon}$. De forma similar se puede definir:

$$\delta_j = \Gamma_{j1} u_{k-d-1} + \Gamma_{j2} u_{k-d} + \Gamma_{j3} u_{k-d+1} \quad (6.33)$$

para $j = 4, 5, 7$. Destacar que $\delta_6 = 0$. Notar también que los intervalos Ω_{jl} para $l = 1, 2, 3$ están acotados por $\bar{\varepsilon}$ para $j = 4$ ver ecuación (6.21), $\lambda = d$ $\bar{\varepsilon} + \bar{\epsilon}$ para $j = 5$ ver ecuación (6.26), y $(d + 1) \bar{\varepsilon} + \bar{\epsilon}$ para $j = 7$ ver ecuación (6.28).

Por todo lo anterior, la expresión de δ_2 , (6.19), se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \delta_2 = & \int_{\Omega_{21}} e^{-A_c s} [e^{A_c \varepsilon_k} - I] B_c ds u_{k-d-1} + \\ & \int_{\Omega_{22}} e^{-A_c s} [e^{A_c \varepsilon_k} - I] B_c ds u_{k-d} + \\ & \int_{\Omega_{23}} e^{-A_c s} [e^{A_c \varepsilon_k} - I] B_c ds u_{k-d+1} \end{aligned}$$

O también como:

$$\delta_2 = \Gamma_{21} u_{k-d-1} + \Gamma_{22} u_{k-d} + \Gamma_{23} u_{k-d+1} \quad (6.34)$$

La longitud de los intervalos Ω_{2l} para $l = 1, 2, 3$ está acotada por T . En función de lo expuesto, es posible definir las siguientes cotas superiores para $l = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_{1l}\| &\leq \bar{\varepsilon} \max_{-\bar{\varepsilon} \leq s \leq \bar{\varepsilon}} \|e^{-A_c s} B_c\| \\
\|\Gamma_{2l}\| &\leq T \max_{0 \leq s \leq T} \|e^{A_c s}\| \|B_c\| \max_{-\bar{\varepsilon} \leq s \leq \bar{\varepsilon}} \|e^{A_c s} - I\| \\
\|\Gamma_{4l}\| &\leq \bar{\varepsilon} \max_{-\bar{\varepsilon} \leq s \leq \bar{\varepsilon}} \|e^{-A_c s} B_c\| \\
\|\Gamma_{5l}\| &\leq (d\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}) \max_{-\bar{\varepsilon} \leq s \leq \bar{\varepsilon}} \|e^{-A_c s} B_c\| \\
\|\Gamma_{7l}\| &\leq ((d+1)\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}) \max_{-\bar{\varepsilon} \leq s \leq \bar{\varepsilon}} \|e^{-A_c s} B_c\|
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Notar también que:

$$\|e^{A_c s} - I\| = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(A_c s)^i}{i!} - I \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(A_c s)^i}{i!} \right\| = \left\| A_c s \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(A_c s)^{i-1}}{i!} \right\|$$

Tal que:

$$\|e^{A_c s} - I\| \leq \left\| A_c s \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A_c s)^j}{j!} \right\| \leq \|A_c s\| \|e^{A_c s}\| \tag{6.36}$$

Por tanto, $\|\Gamma_{2l}\|$, en la expresión (6.35) está claramente acotada por $\bar{\varepsilon}$.

Finalmente se obtiene que $M(k)$ en la expresión (6.17) se puede expresar como:

$$M(k) = B u_{k-d} + \Delta_1 u_{k-d-1} + \Delta_2 u_{k-d} + \Delta_3 u_{k-d+1} \tag{6.37}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \Gamma_{41} + \Gamma_{51} + \Gamma_{71} \\
\Delta_2 &= \Gamma_{12} + \Gamma_{22} + \Gamma_{42} + \Gamma_{52} + \Gamma_{72} \\
\Delta_3 &= \Gamma_{13} + \Gamma_{23} + \Gamma_{43} + \Gamma_{53} + \Gamma_{73}
\end{aligned}$$

La expresión $\|\Gamma_{jl}\|$ para $j = 1, 2, 4, 7$ y $l = 1, 2, 3$ está acotada por $\bar{\varepsilon}$ y $\bar{\varepsilon}$.

Notar que dependiendo de los valores de las incertidumbres, la expresión $u(\tau - h(\tau))$, (6.17), es una función de u_{k-d-1} , u_{k-d} , y u_{k-d+1} en el intervalo $[t_k, t_{k+1}]$. Por tanto los factores δ_i para $i = 1, \dots, 7$ serán función de u_{k-d-1} , u_{k-d} , y u_{k-d+1} . Notar también que el periodo de integración en δ_1 y δ_3 a lo largo de la trayectoria de δ_7 convergen a cero así como $\bar{\varepsilon}$ y $\bar{\varepsilon}$ también lo hacen. Además la expresión $e^{A_c(t_k+T+\varepsilon_k-\tau)} - e^{A_c(t_k+T-\tau)}$, (6.19), también converge a cero así como $\bar{\varepsilon}$ también lo hace (ver expresión (6.36)). Por todo ello, se concluye que $M(k)$ se puede expresar por (6.37), donde las matrices $\Delta_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ para $i = 1, 2, 3$ convergerán a cero así como $\bar{\varepsilon}$ y $\bar{\varepsilon}$ también lo hagan.

Sustituyendo la expresiones (6.37) y (6.10) en (6.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_{k-d} + \Delta_1 u_{k-d-1} + \Delta_2 u_{k-d} + \Delta_3 u_{k-d+1} + \Delta_4 x_k \\ &= Ax_k + Bu_{k-d} + \Delta f_k \end{aligned} \quad (6.38)$$

donde $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times s}$ y $f_k \in \mathbb{R}^s$ con $s = 3m + n$ se definen como:

$$\begin{aligned} \Delta &= [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4] \\ f_k &= [u_{k-d-1}^T, u_{k-d}^T, u_{k-d+1}^T, x_k^T]^T \end{aligned} \quad (6.39)$$

■

Las expresiones (6.11) o (6.38), se pueden ver como una representación general de los sistemas discretos donde también se ha modelado, a través de la matriz Δ las posibles incertidumbres en las matrices A_c y B_c , en el retardo h , y en el periodo de muestreo T , todo ello sujeto a las restricciones (6.4) y (6.6).

En lo que sigue, se asume que en el caso nominal las matrices A_c y B_c y el periodo de muestreo T son tal que el sistema discreto definido por (A, B) es controlable.

Para probar la robustez del esquema de control, se asume que $\Delta \rightarrow 0$ así como lo hacen las incertidumbre en los parámetros de las matrices A_c , B_c , en el retardo h (cuando $\epsilon \rightarrow 0$) y en el periodo de muestreo T (cuando $\epsilon \rightarrow 0$).

6.2.1. Esquema de predicción d-pasos hacia delante

En esta sub-sección se van a extender la ideas presentadas en [40] con el objeto de computar una predicción del estado a partir de un predictor d-pasos hacia delante, para el caso de sistemas lineales con incertidumbres según modelo representado por la ecuación (6.38). Para simplificar la notación, se han obviado los sub-índices k en la matriz de incertidumbres Δ . A partir de la expresión (6.38) la predicción x_{k+2} se puede computar como:

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= A(Ax_k + Bu_{k-d} + \Delta f_k) + Bu_{k-d+1} + \Delta f_{k+1} \\ &= A^2 x_k + ABu_{k-d} + Bu_{k-d+1} + A\Delta f_k + \Delta f_{k+1} \end{aligned}$$

De forma similar se tiene que:

$$\begin{aligned} x_{k+3} &= A(A^2 x_k + ABu_{k-d} + Bu_{k-d+1} + A\Delta f_k + \Delta f_{k+1}) \\ &\quad + Bu_{k-d+2} + \Delta f_{k+2} \\ &= A^3 x_k + A^2 Bu_{k-d} + ABu_{k-d+1} + Bu_{k-d+2} \\ &\quad + A^2 \Delta f_k + A\Delta f_{k+1} + \Delta f_{k+2} \end{aligned}$$

Extendiendo esta predicción d -pasos, se obtiene:

$$\begin{aligned}
x_{k+d} &= A^d x_k + A^{d-1} B u_{k-d} + \dots + A B u_{k-2} \\
&\quad + B u_{k-1} + A^{d-1} \Delta f_k + A^{d-2} \Delta f_{k+1} \\
&\quad + \dots + \Delta f_{k+d-1}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Que también se puede representar como:

$$\begin{aligned}
x_{k+d} &= A^d x_k + A^{d-1} B u_{k-d} + \dots + A B u_{k-2} + B u_{k-1} \\
&\quad + \bar{\Delta} \bar{f}_{k+d-1}
\end{aligned} \tag{6.41}$$

donde $\bar{\Delta}$ y \bar{f}_{k+d-1} , se definen como:

$$\bar{\Delta} \doteq [A^{d-1} \Delta, A^{d-2} \Delta, \dots, \Delta] \tag{6.42}$$

y

$$\bar{f}_{k+d-1} \doteq [f_k^T, f_{k+1}^T, \dots, f_{k+d-1}^T]^T \tag{6.43}$$

Si se define x_{k+d}^p como la predicción del estado x_{k+d} en el instante t_k , tal que:

$$x_{k+d}^p = A^d x_k + A^{d-1} B u_{k-d} + \dots + B u_{k-1} \tag{6.44}$$

Notar que x_{k+d}^p se puede computar con información presente en el instante de tiempo t_k .

6.2.2. Esquema de control en bucle cerrado

Considérese la siguiente ley de control:

$$u_k = -K x_{k+d}^p \tag{6.45}$$

Sustituyendo (6.44) en la anterior, esta última también se puede representar como:

$$u_k = -K(A^d x_k + A^{d-1} B u_{k-d} + \dots + B u_{k-1}) \tag{6.46}$$

Notar que a partir de la ecuación (6.41) la expresión anterior también se puede representar como:

$$u_k = -K(x_{k+d} - \bar{\Delta} \bar{f}_{k+d-1}) \tag{6.47}$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de estados del modelo del sistema, (6.38), se obtiene:

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k + BK \bar{\Delta} \bar{f}_{k-1} + \Delta f_k \tag{6.48}$$

A continuación se va a demostrar, que para pequeñas variaciones en los parámetros del sistema y en el retardo considerado, la estabilidad de la ecuación anterior, (6.48), está asegurada si el par $(A + BK)$ es estable y si se demuestra que las expresiones \bar{f}_{k-1} y f_k son una combinación lineal de los estado del sistema en bucle cerrado, tal que:

$$z_k = [x_k^T, \dots, x_{k-d}^T, u_{k-d-1}^T, \dots, u_{k-2d-1}^T]^T \quad (6.49)$$

donde $z_k \in \mathfrak{R}^l$ con $l = (d+1)(n+m)$. A partir de las expresiones (6.38) y (6.39) notar que:

$$\Delta f_k = \Delta_1 u_{k-d-1} + \Delta_2 u_{k-d} + \Delta_3 u_{k-d+1} + \Delta_4 x_k \quad (6.50)$$

El la expresión anterior u_{k-d-1} y x_k son claramente elementos de z_k en (6.49). A partir de (6.46), el término u_{k-d} también se puede expresar en función de x_{k-d}, u_{k-2d}, \dots , y u_{k-d-1} los cuales son a su vez elementos de z_k . De forma similar u_{k-d+1} , también se puede expresar en términos de $x_{k-d+1}, u_{k-2d+1}, \dots$, y u_{k-d} . Por lo cual, u_{k-d} también se puede expresar en términos de z_k . Con lo cual f_k en (6.48) también se puede expresar como función de los elementos de z_k . Notar que de forma similar también es posible probar que f_{k-1} es función de z_k .

A partir de las expresiones (6.42) y (6.43) se tiene que:

$$\bar{\Delta} \bar{f}_{k-1} = A^{d-1} \Delta f_{k-d} + A^{d-2} \Delta f_{k-d+1} + \dots + \Delta f_{k-1} \quad (6.51)$$

En vista de las expresiones definidas en (6.39), es evidente que los términos $f_{k-d}, f_{k-d+1}, \dots$, y f_{k-2} , en la ecuación anterior, también son función de z_k , (6.49). Y tal y como se ha explicado antes f_{k-1} es función de z_k , con lo cual se puede concluir que \bar{f}_{k-1} en la expresión (6.51) también es función z_k . Por todo ello, el término $(-BK^T \bar{\Delta} \bar{f}_{k-1} + \Delta f_k)$ en (6.48) se puede expresar como:

$$BK \bar{\Delta} \bar{f}_{k-1} + \Delta f_k = \Delta' z_k \quad (6.52)$$

donde Δ' representa una matriz cuyos elementos tiene a cero así como lo hace la matriz Δ también lo hace. Por la expresión (6.47) se tiene que:

$$u_{k-d} = -K(x_k - \bar{\Delta} \bar{f}_{k-1}) \quad (6.53)$$

o lo que es lo mismo:

$$u_{k-d} = -Kx_k + \Delta'' z_k \quad (6.54)$$

donde $\Delta'' = K\bar{\Delta}$ es una matriz cuyos elementos tienden a cero así como lo hace la matriz Δ .

Por todo ello, a partir de las expresiones (6.48), (6.52) y (6.54), el sistema en bucle cerrado se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ \vdots \\ x_{k-d+1} \\ u_{k-d} \\ u_{k-d-1} \\ \vdots \\ u_{k-2d} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (A-BK) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ K & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-d} \\ u_{k-d-1} \\ u_{k-d-2} \\ \vdots \\ u_{k-2d-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta'' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} z_k \quad (6.55)$$

Y de forma compacta, el sistema anterior también se puede representar como:

$$z_{k+1} = \bar{A}z_k + \bar{B}z_k \quad (6.56)$$

donde $\bar{B} \rightarrow 0$ así como $\Delta \rightarrow 0$ y $\bar{A} \in \mathfrak{R}^{l \times l}$, $\bar{B} \in \mathfrak{R}^{l \times l}$ con $l = (d+1)(n+m)$.

Notar que a partir de la expresión (6.5), $d \rightarrow \infty$ así como $T \rightarrow 0$. Esto último significa que que si $T \rightarrow 0$ el sistema en bucle cerrado, (6.55), resultaría de dimensión infinita, tal y como era de espera en este tipo de sistemas.

En la siguiente sección se demuestra la estabilidad del sistema representado por (6.55) cuando $T \neq 0$, es decir cuando la dimensión del vector z_k en (6.55) es de dimensión finita¹.

6.2.3. Estabilidad robusta del sistema en bucle cerrado

A continuación se va a probar la estabilidad del sistema en bucle cerrado representado por las expresiones (6.55) o (6.56), así como la robustez con respecto a pequeñas incertidumbres en los parámetros de las matrices A_c , B_c , del retardo h y del periodo de muestreo T del sistema (6.1).

A partir de las expresiones (6.55) y (6.56), es fácil determinar que los autovalores de la matriz \bar{A} son los mismos que los n autovalores del sistema $(A - BK)$ y $(l - n)$ polos en el origen. Si la matriz de realimentación K se diseña tal que $(A - BK)$ sea estable (tal que sea una matriz Schur), entonces \bar{A} será también una matriz Schur, es decir \bar{A} tendrá todos sus autovalores estrictamente dentro del círculo unidad. Lo cual implica que dada una matriz definida positiva $Q > 0$, $\exists P > 0$ tal que la siguiente ecuación de Lyapunov se cumplirá:

$$\bar{A}^T P \bar{A} - P = -Q \quad (6.57)$$

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov V_k :

$$V_k = z_k^T P z_k \quad (6.58)$$

A partir de (6.56), (6.57) y (6.58) se tiene que:

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= z_{k+1}^T P z_{k+1} \\ &= (\bar{A}z_k + \bar{B}z_k)^T P (\bar{A}z_k + \bar{B}z_k) \\ &= z_k^T \bar{A}^T P \bar{A} z_k + 2z_k^T \bar{B}^T P \bar{A} z_k + z_k^T \bar{B}^T P \bar{B} z_k \\ &= V_k - z_k^T Q z_k + z_k^T (2\bar{B}^T P \bar{A} + \bar{B}^T P \bar{B}) z_k \end{aligned} \quad (6.59)$$

De forma que si las incertidumbres son suficientemente pequeñas tal que se cumpla que:

$$-Q + \|2\bar{B}^T P \bar{A} + \bar{B}^T P \bar{B}\| < -\eta Q \quad (6.60)$$

Para algún $\eta > 0$, entonces:

¹ Esta situación será la que se de en un caso real como en una implementación digital.

$$V_{k+1} - V_k < -\eta z_k^T Q z_k \quad (6.61)$$

Con lo cual se deduce que $z_k \rightarrow 0$ exponencialmente así como $k \rightarrow \infty$. Dado que x y u convergen a cero en los instantes de muestreo (ver (6.49)), se deduce que $u(t)$ también converge a cero $\forall t$ cuando $t \rightarrow \infty$. Y por último, a partir de la ecuación (6.1), también se deduce que $x(t)$ converge a cero $\forall t$ cuando $t \rightarrow \infty$.

6.2.4. Principio de separación del predictor-observador

En el caso ideal, es decir si no se consideran errores de modelado el sistema (6.11) también se puede representar como:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_k \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-d+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 & B \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ \vdots \\ u_{k-d} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

O con obvia notación, de forma compacta como:

$$\psi_{k+1} = \tilde{A}\psi_k + \tilde{B}u_k \quad (6.62)$$

De forma similar, la expresión de la ley de control (6.86) también se puede reescribir como:

$$u_k = -K [A^d \mathcal{W}] \psi_k = -\tilde{K}\psi_k \quad (6.63)$$

donde: $\mathcal{W} = [B \ AB \ \cdots \ A^{d-1}B]$.

De tal forma que el sistema en bucle cerrado será:

$$\psi_{k+1} = [\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}] \psi_k \quad (6.64)$$

Notar que las expresiones (6.64) y (6.56) representan el mismo sistema. De tal forma que si el sistema representado por (6.56) es estable para el caso ideal, es decir la matriz $(A - BK)$ es Suchr, también lo será el sistema representado por (6.64).

Es obvio que para algunos procesos no siempre va a ser posible tener una medida de todo el estado. En tales casos, será necesario la estimación de los mismos, por ejemplo, a partir del observador de estados clásico, tal que:

$$\hat{x}_{k+1} = (A - LC)\hat{x}_k + LCx_k + Bu_{k-d} \quad (6.65)$$

Considerando el mismo vector de estados que en el caso anterior:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ u_k \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-d+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A - LC & 0 & \cdots & 0 & B \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ \vdots \\ u_{k-d} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} LC & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_k \quad (6.66)$$

O con obvia notación, de forma compacta como:

$$\hat{\psi}_{k+1} = \hat{A}\hat{\psi}_k + \tilde{B}u_k + \hat{C}\hat{\psi}_k \quad (6.67)$$

Dada la ley de control:

$$u_k = -\tilde{\mathbf{K}}\hat{\psi}_k \quad (6.68)$$

Sustituyendo la misma en (6.62), se obtiene:

$$\psi_{k+1} = \tilde{A}\psi_k - \tilde{B}\tilde{\mathbf{K}}\hat{\psi}_k \quad (6.69)$$

Considerando de nuevo la misma ley de control (6.68) y sustituyendo sobre el observador (6.67), se obtiene:

$$\hat{\psi}_{k+1} = (\hat{A} - \tilde{B}\tilde{\mathbf{K}})\hat{\psi}_k + \hat{C}\psi_k \quad (6.70)$$

Considerando el conjunto del sistema formado por (6.69) y (6.70),

$$\begin{pmatrix} \psi_{k+1} \\ \hat{\psi}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{B}\tilde{\mathbf{K}} \\ \hat{C} & \hat{A} - \tilde{B}\tilde{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_k \\ \hat{\psi}_k \end{pmatrix} \quad (6.71)$$

Realizando el siguiente cambio de variable,

$$e_k = \psi_k - \hat{\psi}_k \quad (6.72)$$

Se obtiene:

$$e_{k+1} = (\tilde{A} - \hat{C})\psi_k - \hat{A}\hat{\psi}_k$$

Dado que $(\tilde{A} - \hat{C}) = \hat{A}$, la ecuación del error también se puede expresar como:

$$e_{k+1} = \hat{A}e_k \quad (6.73)$$

Sustituyendo (6.72) en (6.69), el sistema equivalente en bucle cerrado es:

$$\begin{pmatrix} \psi_{k+1} \\ e_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{\mathbf{K}}) & (\tilde{B}\tilde{\mathbf{K}}) \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_k \\ e_k \end{pmatrix}$$

Para probar la estabilidad de este sistema, notar que la matriz del sistema ya está triangularizada, por tanto sólo hay que probar la estabilidad de los términos de su diagonal. La estabilidad de $(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{\mathbf{K}})$ se deduce de la estabilidad de (6.56). Para probar la estabilidad del término \hat{A} , se debe probar la estabilidad de la siguiente matriz:

$$(\lambda I - \hat{A}) = \begin{bmatrix} \lambda I - (A - LC) & 0 & 0 & \cdots & B \\ 0 & \lambda I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \lambda I & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & \lambda I \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

Haciendo uso del complemento de Schur, la matriz anterior también se puede representar como:

$$\det(\lambda I - \hat{A}) = \lambda^d * \det(\lambda I - (A - LC))$$

donde de forma inmediata se deduce que \hat{A} será estable si el observador diseñado también lo es.

Con esto queda probado el principio de separación entre el predictor propuesto y un observador de estados clásico.

6.2.5. Resultados experimentales

Para la validación experimental del esquema de predicción propuesto, se ha desarrollado una plataforma de tiempo real para el control del ángulo de rotación entorno al eje “z” de un mini-helicóptero de cuatro rotores (ver figura 6.1), o utilizando la terminología del inglés, para el control del ángulo “yaw” (ver Capítulo 9 para más detalles sobre el proceso utilizado y la plataforma desarrollada).

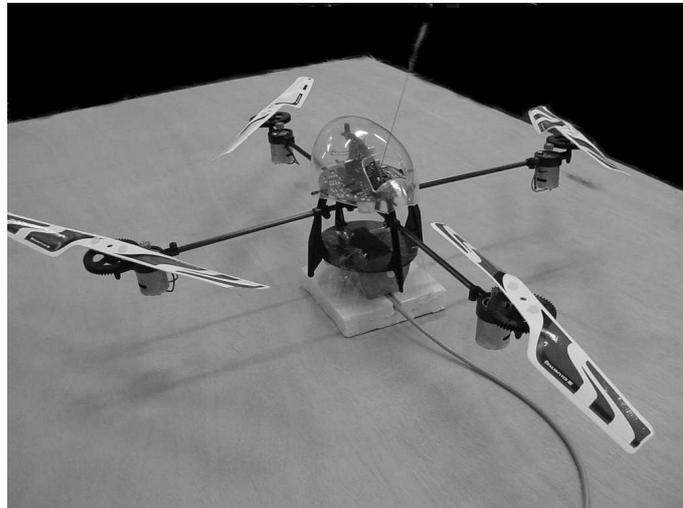


Figura 6.1. Mini-helicóptero de 4 rotores.

Para la implementación del predictor propuesto, se va a considerar un retardo sobre la variable “yaw”. Con objeto de obtener un modelo del comportamiento del giro sobre el ángulo “yaw”, se realizó un experimento donde se introdujo un pulso en la referencia del ángulo “yaw” mientras el mini-helicóptero se mantenía en vuelo estacionario. Los resultados obtenidos se muestran en la gráfica de la figura 6.2.

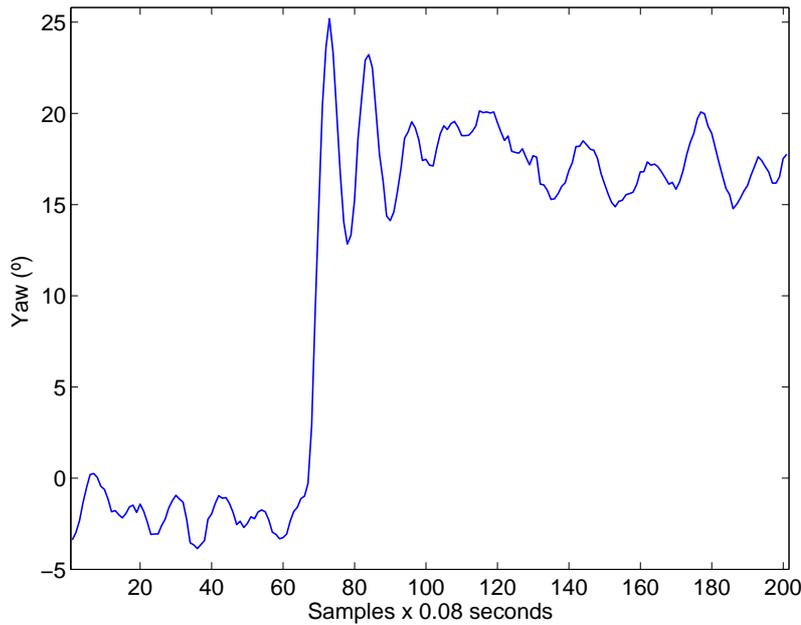


Figura 6.2. Respuesta del ángulo del “yaw” ante una entrada impulsional.

Es conocido que la función de transferencia del giro sobre el ángulo “yaw” es básicamente un doble integrador [21]. Si bien en el mini-helicóptero sobre el cual se ha realizado el experimento, se sitúa un giroscopio que realiza una realimentación de la velocidad angular, de forma que la función de transferencia resultante posee un polo en el origen y un polo real estable. Por lo tanto se asume que el modelo se puede representar por un sistema de segundo orden con dos parámetros (la ganancia estática y un polo real).

Ajustando adecuadamente estos parámetros hasta obtener una respuesta similar a la obtenida en el ensayo experimental (figura 6.2), se obtiene:

$$G(s) = \frac{200}{s(s+4)} \quad (6.75)$$

Comentario 6.2.1 Debido a limitaciones temporales en el procesamiento de la medida de los ángulos mencionados, el periodo de muestreo no puede ser menor de $T = 0,08s$.

Denotando como y_{ref} , la referencia deseada sobre el ángulo del “yaw”, y_k , basta implementar un simple regulador proporcional como el que sigue para estabilizar el sistema:

$$u_k = 0,08(y_{ref} - y_k) \quad (6.76)$$

Sin embargo, si se introduce un retardo de forma artificial en el lazo de realimentación, por ejemplo, entre el instante en que se toma la medida y el

instante en que esta se entrega al regulador², de 3 periodos de muestreo, es decir un retardo de $\tau = 3T = 0,24$ s, tal que:

$$u_k = 0,08(y_{ref} - y_{k-3}) \quad (6.77)$$

Entonces el sistema se hace inestable tal y como se puede apreciar en la gráfica de la figura 6.3.

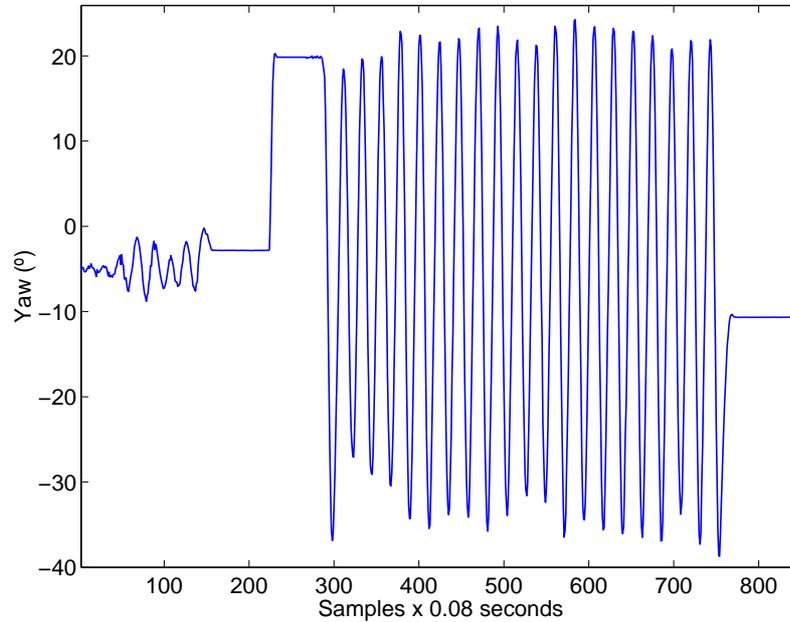


Figura 6.3. Respuesta del sistema usando la ley de control (6.77).

Con objeto de implementar el esquema de predicción propuesto, se realiza una discretización del modelo considerado (6.75), con periodo de muestreo $T = 0,08$ s, y retardo $\tau = 0,24$ s, obteniéndose la siguiente representación en el espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7261 & 0 \\ 0,2739 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5477 \\ 0,0923 \end{bmatrix} u_{k-3} \quad (6.78)$$

$$y_k = [0 \ 6,25] \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

Dado que el estado completo x_k , no es medible, se diseña el siguiente observador de estados:

² Esta situación simularía cualquier posible retardo en el lazo de realimentación, por ejemplo, un retardo de medida.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1}^1 \\ \hat{x}_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7261 & -2,7940 \\ 0,2739 & -1,0261 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^1 \\ \hat{x}_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4470 \\ 0,3242 \end{bmatrix} y_k + \begin{bmatrix} 0,5477 \\ 0,0923 \end{bmatrix} u_{k-3} \quad (6.80)$$

La ley de predicción 3-pasos hacia delante se computa a partir de la expresión (6.44), obteniéndose:

$$x_{k+d}^p = \begin{bmatrix} 0,3829 & 0 & 0,2888 & 0,3977 & 0,5477 \\ 0,6171 & 1 & 0,3512 & 0,2423 & 0,0923 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^1 \\ \hat{x}_k^2 \\ u_{k-3} \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

Y la ley de control como:

$$u_k = 0,08(y_{ref} - [0 \ 6,25] x_{k+d}^p) \quad (6.82)$$

La respuesta del sistema cuando se aplica esta ley de control se puede observar en la figura 6.4. Como señal de referencia y_{ref} , se ha elegido una señal cuadrada por ser ésta la típicamente usada en este tipo de sistemas. De los resultados obtenidos puede apreciarse que ahora el sistema sí que es estable.

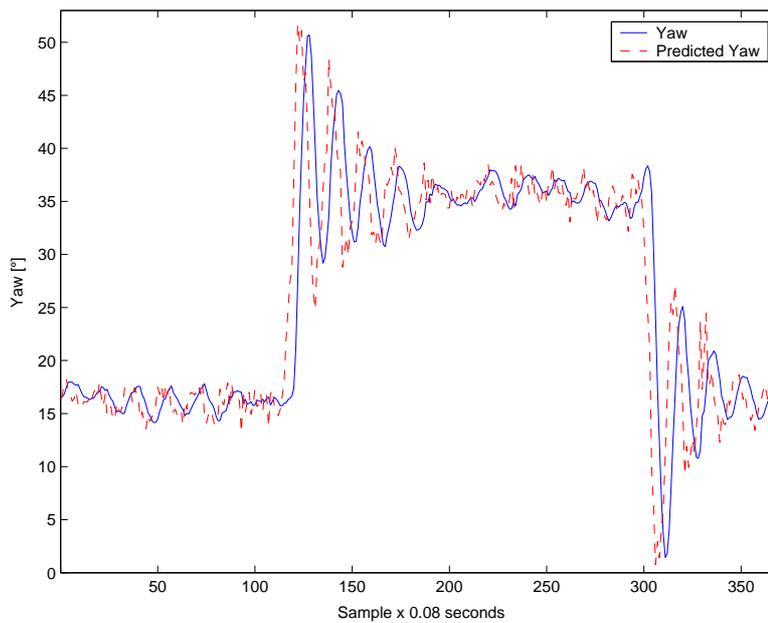


Figura 6.4. Respuesta del sistema en bucle cerrado implementando el esquema de predicción propuesto.

La sencillez del predictor aquí presentado facilita el diseño de la ley de control. Esto es así, dado que el diseño del sistema de control se realiza independientemente del retardo considerado (la ley de control se diseñará sin consideración del mismo).

6.3. Errores en el retardo modelado mayores que un periodo de muestreo

Considérese la siguiente representación en espacios de estados de un sistema dinámico sometido a retardos de actuación:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t - \tau) \quad (6.83)$$

donde las matrices $A_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_c \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ definen los parámetros nominales del sistema y $\tau > 0$ el retardo de actuación.

Asunción. Con el objeto de simplificar los desarrollos, y como se verá más tarde sin pérdida de generalidad, en esta sección se considera que $\tau = dT$, donde $d \in \mathbb{Z}^+$.

En el caso ideal³, y considerando una discretización a partir de un ZOH, la versión discretizada del sistema (6.83), es:

$$x_{k+1} = A x_k + B u_{k-d} \quad (6.84)$$

donde:

$$A = e^{A_c T}; \quad B = \int_0^T e^{A_c \sigma} d\sigma B_c$$

Considérese que no existen incertidumbres en los parámetros de la planta, y que la única incertidumbre se sitúa en el retardo modelado. Si se denota por $e(h, T)$ el error en el conocimiento del retardo, éste se puede expresar como:

$$\tau = dT = hT + e(h, T), \quad (6.85)$$

donde $e(h, T) \equiv (\Delta h)T$, con $\Delta h \in \mathbb{Z}$, y $h \in \mathbb{Z}^+$. De tal forma que:

$$d = h + \Delta h$$

Considerando la ley de control por realimentación del estado, tal que:

$$u_k = -K \bar{x}_{k+h} \quad (6.86)$$

Y definiendo el predictor h -pasos:

$$\bar{x}_{k+h} = A^h x_k + A^{h-1} B u_{k-h} + \dots + B u_{k-1} \quad (6.87)$$

³ En esta tesis se utiliza como sinónimo de caso ideal, el caso nominal, es decir cuando no existen incertidumbres ni errores de modelado.

se puede establecer el siguiente Lema:

Lema 6.3.1. *La predicción \bar{x}_{k+h} en (6.87) se puede expresar como:*

$$\bar{x}_{k+h} = x_{k+d} + A^h x_k - A^h x_{k+(d-h)} \quad (6.88)$$

Demostración: A partir del exacto modelo del proceso (6.84) se deriva el siguiente predictor d -pasos hacia delante.

$$x_{k+d} = A^d x_k + A^{d-1} B u_{k-d} + \cdots + B u_{k-1} \quad (6.89)$$

Dado que los errores en el retardo modelado pueden ser tanto por defecto como por exceso, a continuación se desarrollan esas dos situaciones:

- CASO 1: Si el retardo modelado es menor que el retardo real $d > h$, la expresión (6.89) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} x_{k+d} &= A^d x_k + A^{d-1} B u_{k-d} + \cdots + A^h B u_{k-h-1} \\ &\quad + A^{h-1} B u_{k-h} + \cdots + A B u_{k-2} + B u_{k-1} \end{aligned}$$

De forma que la expresión del predictor h -pasos (6.87), también se puede reescribir como:

$$\bar{x}_{k+h} = x_{k+d} + A^h x_k - \xi_1$$

donde:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A^d x_k + A^{d-1} B u_{k-d} + \cdots + A^h B u_{k-h-1} \\ &= A^h (A^{d-h} x_k + A^{d-h-1} B u_{k-d} + \cdots + B u_{k-h-1}) \end{aligned}$$

Notar que:

$$A^{d-h} x_k + A^{d-h-1} B u_{k-d} + \cdots + B u_{k-h-1}$$

se puede ver como la predicción Δh -pasos del modelo exacto del proceso (6.84), donde $\Delta h = d - h$. Con lo cual ξ_1 se puede reescribir como:

$$\xi_1 = A^h x_{k+\Delta h}$$

De tal forma que el predictor considerado, \bar{x}_{k+h} , también se puede representar como:

$$\bar{x}_{k+h} = x_{k+d} + A^h x_k - A^h x_{k+\Delta h}$$

Con lo cual queda probado el Lema para el caso $d > h$.

- CASO 2: Cuando el retardo modelado excede al retardo real $d < h$, la expresión (6.87), también admite la representación:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k+h} &= A^h x_k + A^{h-1} B u_{k-h} + \cdots + A^d B u_{k-d-1} \\ &\quad + A^{d-1} B u_{k-d} + \cdots + A B u_{k-2} + B u_{k-1}\end{aligned}$$

Haciendo uso de la definición del predictor d -pasos (6.89), la ecuación anterior también se puede reescribir como:

$$\bar{x}_{k+h} = x_{k+d} - A^d x_k + \xi_2 \quad (6.90)$$

donde:

$$\xi_2 = A^h x_k + \cdots + A^d B u_{k-d-1} = A^d \xi_3$$

y

$$\begin{aligned}\xi_3 &= A^{h-d} x_k + A^{h-1-d} B u_{k-h} + \cdots + B u_{k-d-1} + \\ &\quad A^{h-d} x_{k-h+d} - A^{h-d} x_{k-h+d} \\ &= A^{h-d} x_{k-h+d} + A^{h-d-1} B u_{k-h} + \cdots + B u_{k-d-1} + \\ &\quad A^{h-d} x_k - A^{h-d} x_{k-h+d}\end{aligned} \quad (6.91)$$

Por otro lado, la predicción Δh -pasos del proceso (6.84) es:

$$x_{k+\Delta h} = A^{\Delta h} x_k + A^{\Delta h-1} B u_{k-d} + \cdots + B u_{k-d+\Delta h-1} \quad (6.92)$$

donde: $\Delta h = h - d$, de tal forma que:

$$x_k = A^{h-d} x_{k-h+d} + A^{h-d-1} B u_{k-h} \cdots + B u_{k-d-1}$$

Lo que implica que, ξ_3 y ξ_2 se definan como:

$$\begin{aligned}\xi_3 &= x_k + A^{h-d} x_k - A^{h-d} x_{k-h+d} \\ \xi_2 &= A^d (x_k + A^{h-d} x_k - A^{h-d} x_{k-h+d}) \\ &= A^d x_k + A^h x_k - A^h x_{k-h+d}\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (6.90), \bar{x}_{k+h} también se puede representar como:

$$\bar{x}_{k+h} = x_{k+d} + A^h x_k - A^h x_{k-h+d}$$

Con lo cual también queda probado el Lema para el caso $d < h$. ■

6.3.1. Sistema en bucle cerrado

Con objeto de probar la estabilidad del sistema en bucle cerrado, se establece el siguiente Lema.

Lema 6.3.2. *El sistema en bucle cerrado, compuesto por el modelo exacto del proceso (6.84), la ley de control (6.86), y la ley de predicción h -pasos considerada (6.87), es:*

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k - BKA^h x_{k-d} + BKA^h x_{k-h} \quad (6.93)$$

donde: $\{h, d\} \in \mathbb{Z}^+$

Demostración: Sustituyendo la expresión equivalente del predictor h -pasos (6.88), en la ley de control (6.86),

$$u_k = -K(x_{k+d} + A^h x_k - A^h x_{k+d-h}) \quad (6.94)$$

o equivalentemente, realizando una proyección d -pasos hacia el futuro, se obtiene:

$$u_{k-d} = -K(x_k + A^h x_{k-d} - A^h x_{k-h}) \quad (6.95)$$

Por otro lado, sustituyendo esta última expresión, (6.95) sobre el exacto modelo del proceso considerado (6.84), se obtiene que:

$$x_{k+1} = Ax_k - BKx_k - BKA^h x_{k-d} + BKA^h x_{k-h}$$

Con lo cual queda probado el Lema. ■

Comentario 6.3.1 Notar que si el retardo modelado es igual al retardo real $d = h$, la expresiones de predicción y el estado coinciden $\bar{x}_k = x_k$ (ver ecuación (6.88)). Esto implica que los dos últimos términos de la expresión (6.93) se cancelan, con lo cual el sistema en bucle cerrado será:

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k$$

Con lo cual queda probada la estabilidad del sistema para el caso nominal.

6.3.2. Estabilidad dependiente del retardo

Como es habitual en este tipo de sistemas, en este apartado se va a considerar la estabilidad del sistema en bucle cerrado cuando la única fuente de incertidumbre en el modelo considerado se sitúan en el retardo modelado. En concreto, se establece una condición suficiente a partir de la cual se puede asegurar que el sistema en bucle cerrado representado por (6.93), para incertidumbres en el retardo mayores que un periodo de muestreo $|e(h, T)| > T$, es estable.

Para simplificar la notación, se define $M = (A - BK)$, y $A_1 = BKA^h$, tal que la expresión (6.93) se representa como:

$$x_{k+1} = Mx_k + A_1x_{k-h} - A_1x_{k-d} \quad (6.96)$$

Teorema 6.3.1 *El sistema definido por (6.96) será asintóticamente estable si existen las matrices definidas positivas P , Q_1 , Q_2 , Z_1 y Z_2 , y las matrices X_1 , X_2 , Y_1 y Y_2 , tal que el siguiente sistema de LMI's se cumpla:*

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & -Y_1 & -Y_2 & M^T P & h\Gamma^T Z_1 & d\Gamma^T Z_2 \\ -Y_1^T & -Q_1 & 0 & A_1^T P & hA_1^T Z_1 & dA_1^T Z_2 \\ -Y_2^T & 0 & -Q_2 & -A_1^T P & -hA_1^T Z_1 & -dA_1^T Z_2 \\ PM & PA_1 & -PA_1 & -P & 0 & 0 \\ hZ_1^T \Gamma & hZ_1^T A_1 & -hZ_1^T A_1 & 0 & -hZ_1 & 0 \\ dZ_2^T \Gamma & dZ_2^T A_1 & -dZ_2^T A_1 & 0 & 0 & -dZ_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (6.97)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ Y_1^T & Z_1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 \\ Y_2^T & Z_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (6.98)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Gamma &\doteq (M - I) \\ (1, 1) &\doteq -P + hX_1 + dX_2 + Y_1 + Y_1^T + Y_2 + Y_2^T + Q_1 + Q_2 \end{aligned}$$

Demostración: Siguiendo el mismo procedimiento que en [132], si se definen las siguientes relaciones:

$$x_{k-h} = \left(x_k - \sum_{j=k-h+1}^k [x(j) - x(j-1)] \right) \quad (6.99)$$

$$x_{k-d} = \left(x_k - \sum_{j=k-d+1}^k [x(j) - x(j-1)] \right) \quad (6.100)$$

La expresión (6.96) se puede representar como:

$$x_{k+1} = Mx_k - A_1 \sum_{j=k-h+1}^k [x(j) - x(j-1)] + A_1 \sum_{j=k-d+1}^k [x(j) - x(j-1)] \quad (6.101)$$

Con objeto de probar la estabilidad, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov, $V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k)$, tal que:

$$\begin{aligned}
 V_1(k) &= x_k^T P x_k \\
 V_2(k) &= \sum_{\beta=-h}^{-1} \sum_{j=k+\beta+1}^k [x(j) - x(j-1)]^T Z_1 [x(j) - x(j-1)] \\
 &\quad + \sum_{\beta=-d}^{-1} \sum_{j=k+\beta+1}^k [x(j) - x(j-1)]^T Z_2 [x(j) - x(j-1)] \\
 V_3(k) &= \sum_{j=k-h}^{k-1} x(j)^T Q_1 x(j) + \sum_{j=k-d}^{k-1} x(j)^T Q_2 x(j)
 \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones, el sistema (6.96) o equivalentemente el sistema en bucle cerrado expresado por (6.93), será asintóticamente estable si se cumple que:

$$\Delta V(k) = \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) < 0$$

Operando adecuadamente, y haciendo uso del complemento de Schur [17] se obtienen las LMI's definidas en (6.97) y (6.98). Ver Apéndice A para un completo seguimiento de esta demostración. ■

EJEMPLO 6.3.1. *Considérese el modelo del giro del "yaw" del mini-helicóptero introducido anteriormente:*

$$G(s) = \frac{200}{s(s+4)} e^{-\tau s} \quad (6.102)$$

El modelo discretizado en espacio de estados, a periodo $T = 0,01s$, del modelo continuo (6.102) es:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0,9608 & 0 \\ 0,0392 & 1,0000 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0,0784 \\ 0,0016 \end{pmatrix} u_{k-d} \quad (6.103)$$

Considérese ahora que el retardo del modelo es $\tau_h = 0,1s$, tal que, $h = 10$. La ley de control se deriva a partir de las expresiones (6.86)–(6.87) donde $K = [0 \ 0,5]$.

Si se considera incertidumbres en el retardo $\tau = (h + \Delta h)T$, tal que $d = h + \Delta h$, donde $\Delta h \in \mathbb{Z}$. A partir del Teorema 6.3.1, con $h = 10$, se establece que el sistema formado por el conjunto de LMI's (6.97-6.98) se cumple para $d < 23$. Por tanto, una condición suficiente para asegurar la estabilidad del sistema en bucle cerrado, sin consideración de otras fuentes de incertidumbre, es que el retardo real cumpla que $\tau < 0,23s$.

Para este ejemplo, y con las condiciones anteriormente mencionadas, el sistema de LMI's definido por (6.97-6.98), se cumple para las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
 P &= 10^3 \begin{pmatrix} 7,4403 & 0,9601 \\ 0,9601 & 9,0631 \end{pmatrix}; Q_1 = \begin{pmatrix} 76,7099 & 55,4857 \\ 55,4857 & 145,1266 \end{pmatrix} \\
 Q_2 &= \begin{pmatrix} 10,5593 & 20,4742 \\ 20,4742 & 79,3040 \end{pmatrix}; Z_1 = 10^3 \begin{pmatrix} 0,3754 & 0,7244 \\ 0,7244 & 5,2810 \end{pmatrix} \\
 Z_2 &= 10^3 \begin{pmatrix} 0,7208 & 1,8777 \\ 1,8777 & 5,5697 \end{pmatrix}; Y_1 = \begin{pmatrix} 36,3075 & 284,7968 \\ -31,3728 & -121,0342 \end{pmatrix} \\
 Y_2 &= \begin{pmatrix} -119,046 & -344,198 \\ -18,209 & -63,428 \end{pmatrix}; X_1 = 10^4 \begin{pmatrix} 0,0008 & -8,8209 \\ 8,8203 & 0,0002 \end{pmatrix} \\
 X_2 &= 10^3 \begin{pmatrix} 0,0000 & -1,0771 \\ 1,0771 & 0,0000 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

◇

6.3.3. Estabilidad robusta del sistema en bucle cerrado

Con el objeto de simplificar los desarrollos, y sin ninguna pérdida de generalidad, en esta sección se asume que el retardo modelado es menor que el retardo real, $d > h$. A partir de (6.93), (6.95) y (6.87), el sistema en bucle cerrado también se puede representar como:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ \vdots \\ x_{k-h+1} \\ \vdots \\ x_{k-d+2} \\ x_{k-d+1} \\ u_{k-d} \\ \vdots \\ u_{k-2d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A-BK) & 0 & \dots & (BKA^h) & \dots & 0 & -(BKA^h) & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -K & 0 & \dots & KA^h & \dots & 0 & -KA^h & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-h} \\ \vdots \\ x_{k-d+1} \\ x_{k-d} \\ u_{k-d-1} \\ \vdots \\ u_{k-2d-1} \end{pmatrix}$$

O con obvia notación como:

$$\psi_{k+1} = \bar{A}z_k \tag{6.104}$$

Por otro lado, tal y como se considero en el primer apartado de este capítulo, se asume que el periodo de muestreo T y el retardo real $\tau(t)$ cumplen la siguiente relación:

$$\tau(t) = dT + \epsilon(t) \tag{6.105}$$

$$T = t_{k+1} - t_k + \epsilon_k \tag{6.106}$$

donde ε_k y $\epsilon(t)$ ya definidas anteriormente deben cumplir las restricciones (6.4) y (6.6) respectivamente.

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k| &\leq \bar{\varepsilon} \ll T \\ |\epsilon(t)| &\leq \bar{\epsilon} \ll T \end{aligned}$$

A partir del Lema 6.2, se ha demostrado que la ecuación de estados discretizada del sistema (6.83), para los instantes de muestreos definidos en (6.106) y el retardo considerado en (6.105) se puede representar como:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_{k-d} + \Delta f_k \quad (6.107)$$

donde: $f_k = [u_{k-d-1}^T, u_{k-d}^T, u_{k-d+1}^T, x_k^T]^T$ y Δ es una matriz acotada por $\bar{\varepsilon}$ y $\bar{\epsilon}$. Por tanto, tal y como se ha demostrado en la sección 6.2, la matriz Δ convergerá a cero así como $\bar{\varepsilon}$ y $\bar{\epsilon}$ convergen a cero.

Bajo tales suposiciones, la proyección del estado del sistema (6.107), d -pasos hacia delante, se puede representar como:

$$\begin{aligned} x_{k+d} &= A^d x_k + A^{d-1} Bu_{k-d} + \cdots + A^h Bu_{k-h-1} \\ &+ A^{h-1} Bu_{k-h} + \cdots + ABu_{k-2} + Bu_{k-1} \\ &+ \bar{\Delta} \bar{f}_{k+d-1} \end{aligned} \quad (6.108)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= [A^{d-1} \Delta, A^{d-2} \Delta, \dots, \Delta] \\ \bar{f}_{k+d-1} &= [f_k^T, f_{k+1}^T, \dots, f_{k+d-1}^T] \end{aligned}$$

Si adicionalmente se considera un error en el retardo modelado, $e(h, T)$, tal que:

$$dT = hT + e(h, T) \quad (6.109)$$

De forma similar a como se procedió en el Lema 6.3, se puede establecer lo siguiente:

Lema 6.3.3. *La ley de predicción h -pasos hacia delante dada por (6.87) también se puede expresar como:*

$$\bar{x}_{k+h} = x_{k+d} + A^h x_k - A^h x_{k+\Delta h} - A^h \bar{\Delta}_{\Delta h} \bar{f}_{k+\Delta h-1} - \bar{\Delta} \bar{f}_{k+d-1} \quad (6.110)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{\Delta h} &= [A^{\Delta h-1} \Delta, A^{\Delta h-2} \Delta, \dots, \Delta] \\ \bar{f}_{k+\Delta h-1} &= [f_k^T, f_{k+1}^T, \dots, f_{k+\Delta h-1}^T] \end{aligned}$$

Demostración: Haciendo uso de la expresión (6.108), la ley de predicción (6.87) se puede reescribir como:

$$\bar{x}_{k+h} = x_{k+d} - \bar{\Delta} \bar{f}_{k+d-1} + A^h x_k - \xi_1$$

donde:

$$\xi_1 = A^h (A^{d-h} x_k + A^{d-h-1} B u_{k-d} + \cdots + B u_{k-h-1})$$

Notar que:

$$(A^{\Delta h} x_k + A^{\Delta h-1} B u_{k-d} + \cdots + B u_{k-h-1}) + \bar{\Delta}_{\Delta h} \bar{f}_{k+\Delta h-1}$$

se puede considerar como la predicción Δh -pasos del sistema (6.107), con $\Delta h = d - h$. Por tanto, el término ξ_1 se puede reescribir como:

$$\xi_1 = A^h (x_{k+\Delta h} - \bar{\Delta}_{\Delta h} \bar{f}_{k+\Delta h-1})$$

■

Sustituyendo la expresión (6.110) en (6.86), y evaluando la misma en el instante de tiempo $(k - d)$, se obtiene:

$$u_{k-d} = -K(x_k + A^h x_{k-d} - A^h x_{k-h}) \quad (6.111)$$

$$+ K(\bar{\Delta} \bar{f}_{k-1} + A^h \bar{\Delta}_{\Delta h} \bar{f}_{k-h-1}) \quad (6.112)$$

Sustituyendo ahora (6.111)-(6.112) en (6.107), se obtiene la siguiente expresión del sistema en bucle cerrado:

$$x_{k+1} = A x_k - B K(x_k + A^h x_{k-d} - A^h x_{k-h}) \quad (6.113)$$

$$+ B K(\bar{\Delta} \bar{f}_{k-1} + A^h \bar{\Delta}_{\Delta h} \bar{f}_{k-h-1}) + \Delta f_k \quad (6.114)$$

Notar que:

$$\bar{f}_{k-1} = [f_{k-d}^T \ f_{k-d+1}^T \ \cdots \ f_{k-1}^T]$$

y

$$\bar{f}_{k-h-1} = [f_{k-d}^T \ f_{k-d+1}^T \ \cdots \ f_{k-h-1}^T]$$

En la sección anterior se ha demostrado que los términos f_{k-d} , f_{k-d+1} , \cdots , f_{k-h} , \cdots , f_{k-2} , y f_{k-1} son función de z_k . Por tanto, siguiendo el mismo procedimiento que en la sección anterior, los términos (6.112) y (6.114) también se pueden expresar como:

$$K(\bar{\Delta} \bar{f}_{k-1} + A^h \bar{\Delta}_{\Delta h} \bar{f}_{k-h-1}) = \Delta'' z_k \quad (6.115)$$

$$B K(\bar{\Delta} \bar{f}_{k-1} - A^h \bar{\Delta}_{\Delta h} \bar{f}_{k-h-1}) + \Delta f_k = \Delta' z_k \quad (6.116)$$

donde las matrices Δ' y Δ'' son tal que sus elementos tenderán a cero así como los elementos de la matriz Δ también lo hagan.

Por todo esto, el sistema en bucle cerrado también se puede representar como:

$$x_{k+1} = Ax_k - BK(x_k + A^h x_{k-d} - A^h x_{k-h}) + \Delta' z_k$$

siendo la ley de control:

$$u_{k-d} = -K(x_k + A^h x_{k-d} - A^h x_{k-h}) + \Delta'' z_k \quad (6.117)$$

O con notación obvia, también como:

$$z_{k+1} = \bar{A}z_k + \begin{pmatrix} \Delta' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta'' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} z_k = \bar{A}z_k + \tilde{\Delta}z_k \quad (6.118)$$

Si se considera sólo la estabilidad dependiente del retardo, es evidente que las expresiones (6.104) y (6.93) son equivalente. Por tanto, si el sistema (6.93) es estable existirán las matrices definidas positivas $Q > 0$, $P > 0$ tal que la siguiente función de Lyapunov se cumpla:

$$\bar{A}^T P \bar{A} - P = -Q.$$

De forma que tal y como se ha demostrado en la sección precedente, si las incertidumbres en los parámetros de las matrices A_c , B_c , en el periodo de muestreo $\epsilon(t)$, y en el retardo no múltiplo entero del mismo ε_k son suficientemente pequeñas tal que,

$$-Q + \|2\tilde{\Delta}^T P \bar{A} + \tilde{\Delta}^T P \tilde{\Delta}\| < -\eta Q$$

para algún $\eta > 0$, entonces el sistema en bucle cerrado representado por (6.118) será estable.

6.3.4. Resultados experimentales

Considérese el sistema “3D Hover” de *Quanser*[©] mostrado en la figura 10.1 [102]. El ángulo del “roll” se define como la rotación entorno al eje “X”. Asumiendo que el “pitch” es cero, es posible obtener el siguiente modelo:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2,1176 & -2,1176 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ V_i \end{pmatrix}$$

Y de forma compacta, con obvia notación como:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t)$$

Si se diseña un regulador LQR tal que:

$$u(t) = - \begin{pmatrix} 1,7453 & 0,3009 \\ -1,7453 & -0,3009 \end{pmatrix} \hat{x}(t)$$

donde \hat{x} se define como: $\hat{x} = [r \ \hat{r}]^T$, y la estimación de \hat{r} se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\hat{r}(s) = \frac{500s}{s + 500} r(s)$$

Considérese que existe un retardo de actuación y/o medida, tal que sea posible representar el comportamiento del sistema por el siguiente modelo:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t - \tau).$$

Con estas condiciones, si se somete el sistema a una serie de perturbaciones sobre el ángulo del roll, permaneciendo el sistema en su punto de funcionamiento, y para distintos retardos de actuación, se obtienen los resultados de la figura 6.5. Notar que el sistema se hace inestable para un retardo de aproximadamente $\tau = 0,055$ s. En la figura 6.6, se repite el experimento pero utilizando como señal de test una onda cuadrada sobre la referencia.

La implementación del esquema de predicción propuesto, se realiza para un periodo de muestreo $T = 0,001$ s, siendo el retardo nominal $\tau = 55T$, con $h = 55$. En las figuras 6.7 y 6.8 se muestran los resultados obtenidos para diferentes retardos y perturbaciones. Notar que el sistema permanece estable para un retardo $\tau = 0,068$ s. Con lo cual el sistema es robustamente estable para un error de modelado en el retardo considerado tal que $\Delta h = 13$.

6.4. Sistemas con multiples retardos, en las entradas/salidas y/o estados.

En esta sección, se va a generalizar el uso del esquema de predicción propuesto en este capítulo para modelos lineales con retardos de actuación/medida y/o en los estados.

Sistemas MIMO sometidos a distintos retardos de actuación:

Considérese un sistema MIMO con dos entradas, u_1 y u_2 , sometidas a un retardo d_1 y d_2 respectivamente.

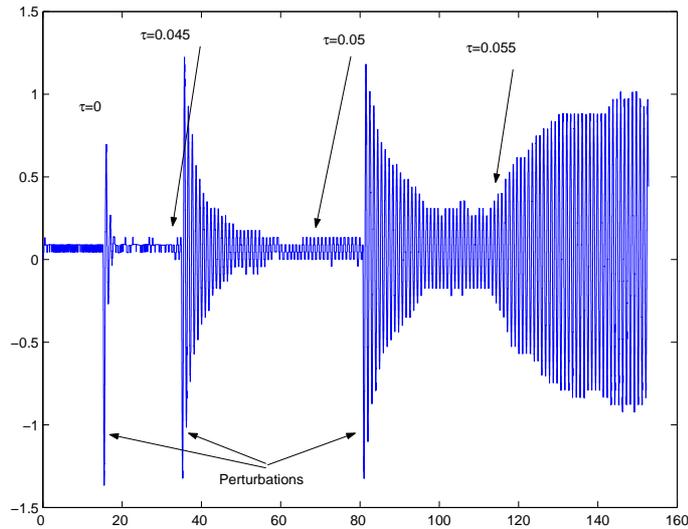


Figura 6.5. Respuesta del sistema, sin el esquema de predicción, para diferentes retardos. Respuesta ante perturbaciones sobre el punto de funcionamiento. Las fechas indican cuando se introduce el retardo.

$$x(k+1) = A_{n \times n} x(k) + \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1} u_1(k-d_1) + \begin{bmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}_{n \times 1} u_2(k-d_2)$$

que también es posible expresar como:

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1 u(k-d_1) + B_2 u(k-d_2)$$

con:

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & 0 \end{bmatrix}_{n \times 2} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n2} \end{bmatrix}_{n \times 2}$$

$$u(k-d_1) = \begin{pmatrix} u_1(k-d_1) \\ u_2(k-d_1) \end{pmatrix}$$

$$u(k-d_2) = \begin{pmatrix} u_1(k-d_2) \\ u_2(k-d_2) \end{pmatrix}$$

Como $d_2 > d_1$, lo anterior se puede reescribir como:

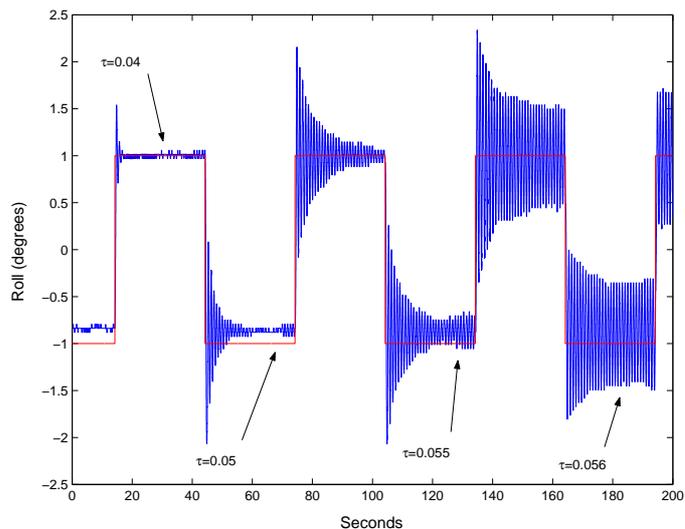


Figura 6.6. Respuesta del sistema, sin el esquema de predicción, para diferentes retardos. Respuesta ante cambios en la referencia.

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ u(k-d_2+1) \\ u(k-d_2+2) \\ \vdots \\ u(k-d_1-1) \\ u(k-d_1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ u(k-d_2) \\ u(k-d_2+1) \\ \vdots \\ u(k-d_1-2) \\ u(k-d_1-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix} u(k-d_1)$$

O de forma compacta como:

$$X(k+1) = \tilde{A}X(k) + \tilde{B}u(k-d_1)$$

sistema que por analogía con (6.84), también es posible estabilizar a partir del predictor (6.87), con ley de control:

$$u(k) = K\bar{x}_{k+h}$$

donde K , será de dimensión tal que puede asignarse $n + (d_2 - d_1)m$, autovalores del sistema en bucle cerrado.

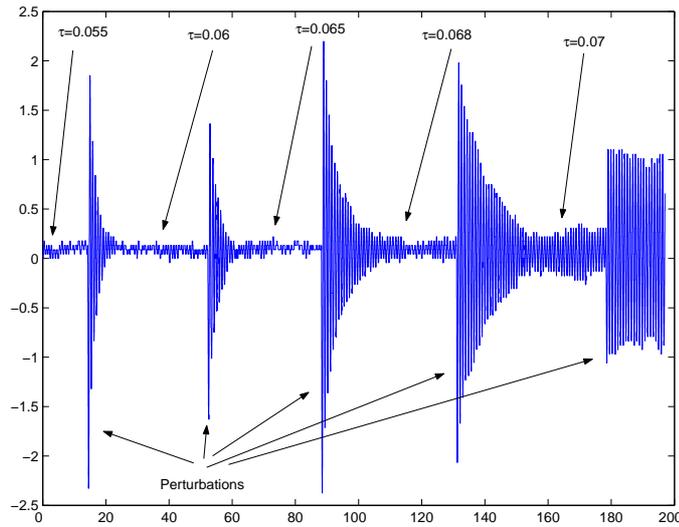


Figura 6.7. Respuesta del sistema en bucle cerrado con el esquema de predicción propuesto. Respuesta ante perturbaciones sobre el punto de funcionamiento.

EJEMPLO 6.4.1. *Considérese el siguiente sistema con dos entradas y dos salidas:*

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+5} & \frac{1}{s-0,1} \end{bmatrix}$$

Considérese igualmente el correspondiente sistema discretizado, con periodo de muestreo $T = 0,01$ s, con un retardo de actuación diferente sobre cada uno de los actuadores del sistema tal que:

$$\begin{pmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,01005}{z-1,01} z^{-9} & \frac{0,009803}{z-0,9608} z^{-11} \\ \frac{0,009754}{z-0,9512} z^{-9} & \frac{0,01001}{z-1,001} z^{-11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix}$$

Con representación en espacio de estados dada por:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1,0101 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9608 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9512 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0010 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k-9) \\ u_2(k-11) \end{pmatrix}$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 0,0101 & 0,0098 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0098 & 0,01 \end{pmatrix} x(k)$$

Sistema que también se puede representar como:

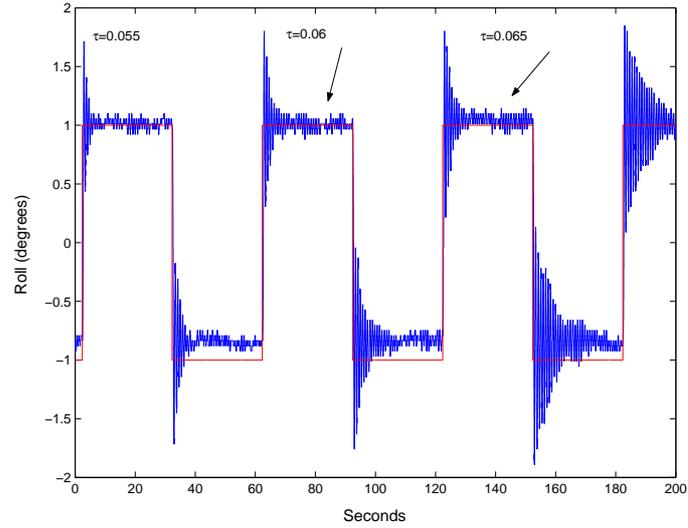


Figura 6.8. Respuesta en bucle cerrado del sistema con el esquema de predicción propuesto. Respuesta ante cambios en la referencia.

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} 1,0101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9608 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9512 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,001 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(k-9)$$

$$Y(k) = \begin{pmatrix} 0,0101 & 0,0098 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0098 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X(k)$$

donde $u(k-9) = \begin{pmatrix} u_1(k-9) \\ u_2(k-9) \end{pmatrix}$; $X(k) = [x(k)^T u(k-11)^T u(k-10)^T]^T$

Para este esquema de trabajo, en la figura 6.9 se representan los resultados obtenidos cuando no se aplica ningún tipo de esquema de predicción. En la figura 6.10 se muestran los resultados obtenidos cuando se implementa el esquema de predicción propuesto en esta sección.

◇

Para el caso general, se tiene que:

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{j=0}^m B_j u(k-d_j)$$

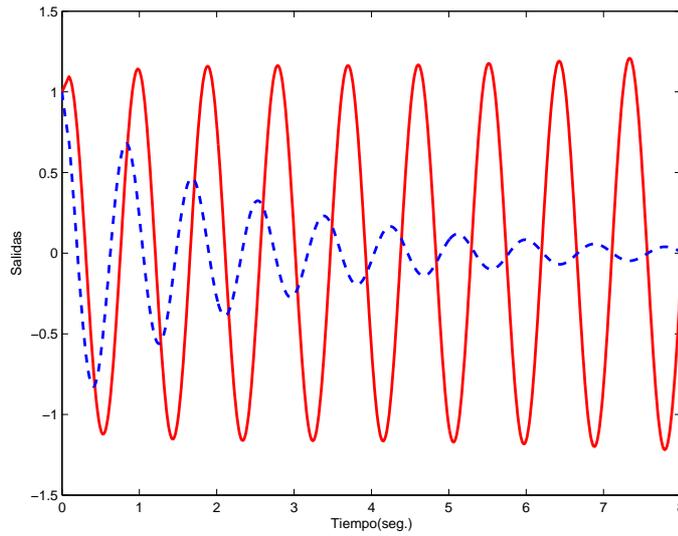


Figura 6.9. Simulación del sistema sin predictor.

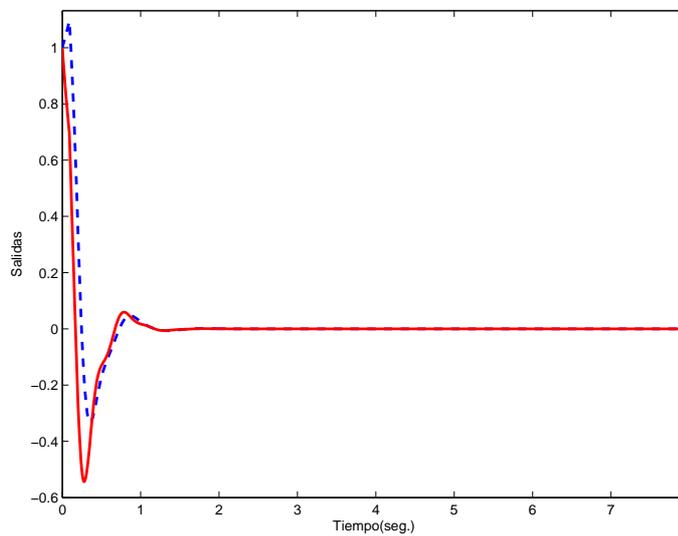


Figura 6.10. Simulación del sistema con el esquema de predicción propuesto.

donde $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $x \in \mathcal{R}^n$, $B_j \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $u \in \mathcal{R}^m$.
 Si se define: $d_m \doteq \max\{d_j\}$, y $d_h \doteq \min\{d_j\}$, tal que se el sistema se pueda representar como:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ u(k-d_m+1) \\ u(k-d_m+2) \\ \vdots \\ u(k-d_h-1) \\ u(k-d_h) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_m & B_{m-1} & \cdots & B_{h+1} & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ u(k-d_m) \\ u(k-d_m+1) \\ \vdots \\ u(k-d_h-2) \\ u(k-d_h-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_h \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k-d_h)$$

O de forma compacta, con obvia notación:

$$X(k+1) = \tilde{A}X(k) + \tilde{B}u(k-d_h)$$

Se tiene que por analogía con (6.84), este sistema también se puede estabilizar a partir del predictor (6.87), con ley de control:

$$u(k) = K\bar{x}_{k+h}$$

donde K , será de dimensión tal que puede asignarse $n + (d_m - d_h)m$, autovalores del sistema en bucle cerrado.

De forma general, para un sistema con retardos en los estados y/o en la entrada, tal que:

$$x(k+1) = \sum_{i=0}^l A_i x(k-i) + \sum_{j=0}^m B_j u(k-d_j)$$

donde $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $B_j \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $u \in \mathfrak{R}^m$. Si se define $d_m \doteq \max\{d_j\}$, y $d_h \doteq \min\{d_j\}$, lo anterior también se puede representar como:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ \vdots \\ x(k-d_l+1) \\ u(k-d_m+1) \\ \vdots \\ u(k-d_h) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & \cdots & A_l & B_{m_u} & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & I & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ \vdots \\ x(k-d_l) \\ u(k-d_m) \\ \vdots \\ u(k-d_h-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_h \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u(k-d_h)$$

O de forma compacta, con obvia notación como:

$$X(k+1) = \tilde{A}X(k) + \tilde{B}u(k-d_h)$$

sistema que por analogía con (6.84), también es posible estabilizar a partir del predictor (6.87), con ley de control:

$$u(k) = K\bar{x}_{k+h}$$

donde K , será de dimensión tal que puede asignarse $nd_l + (d_m - d_h)m$, autovalores del sistema en bucle cerrado.

Parte IV

Otras técnicas

7 Transformaciones lineales para el control de sistemas con retardados temporales

7.1. Introducción

Tanto el control por realimentación del estado, como por realimentación de la variable controlada se pueden considerar como las técnicas de diseño más populares de las últimas décadas [15, 14]. El método a partir del cual se obtiene la ley de control puede variar en función de los objetivos requeridos, optimización de alguna función de coste sujeta a restricciones, asignación de los polos en bucle cerrado, minimización de algún índice de desempeño, etc.

Si bien una característica en todos estos métodos, es que el sistema a controlar se considera como un todo, donde la ley de control se calcula considerando el estado completo del sistema [48, 11, 15, 57].

Un caso especial, se puede considerar cuando el sistema que se pretende controlar tiene una estructura en cascada. Imagínese por ejemplo, que únicamente se pretende modificar la dinámica de un determinado sub-proceso, o que, con objeto de evitar cambios bruscos de actuación, el sistema dispone de algún tipo de filtro sobre la variable manipulada, o algún sistema de filtrado de la variable medida, etc. En todos estos casos lo ideal sería diseñar una ley de realimentación considerando únicamente la dinámica del proceso que se desea modificar. Con ello se podría simplificar el cálculo del regulador consiguiéndose con ello, aparte de la obvia simplificación del controlador, una más clara y directa relación entre los parámetros del mismo y los objetivos de control requeridos.

Un caso especial de este tipo de sistemas son aquellos que se encuentran sometidos a un retardo de actuación y/o medida. Tal y como se ha detallado en capítulos precedentes, este tipo de sistemas se puede controlar con algún tipo de compensador, o bien si se plantea un modelo discretizado en espacio de estados, realizando un diseño a partir del estado ampliado [15, 57]. Destacar sin embargo una vez más, las limitaciones de los DTC para sistemas inestables y la complejidad de los reguladores requeridos si se considera la segunda opción.

7.2. Control parcial de sistemas SISO

Considérese que el proceso a controlar se puede representar según el esquema de la figura 7.1.a, donde el proceso que se pretende controlar es $G(s)$, siendo $F(s)$, por ejemplo, un pre-filtro de actuación sobre la variable manipulada $v(s)$. El objetivo de este filtro, podría ser suavizar la acción de control o evitar posibles resonancias en el sistema. Este bloque también podría representar un retardo de actuación, tal que $F(s) = e^{-Ls}$. En cualquier caso, el objetivo de control pasaría por no modificar la dinámica de este bloque, bien porque no se desea (caso del filtro o similar), o bien porque sea imposible (caso del retardo).

Dado que se está tratando con sistemas SISO, el sistema descrito también se puede representar como se muestra en la figura 7.1.b.

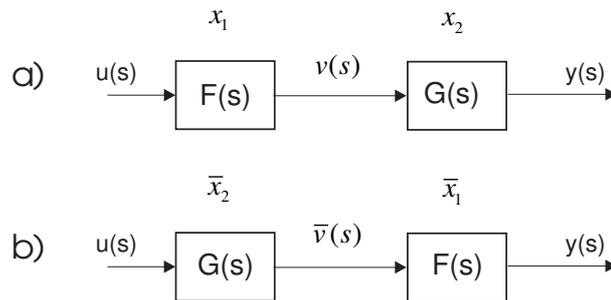


Figura 7.1. Sub-procesos en cascada: a) Planteamiento inicial; b) Estructura equivalente

Modelo del proceso

La función de transferencia entre la variable controlada y la variable auxiliar $v(s)$, o la acción de control $u(s)$, es:

$$y(s) = G(s)v(s) = G(s)F(s)u(s) \quad (7.1)$$

Dado que se trata de un sistema SISO, de forma alternativa, éste también se puede representar a partir de la figura 7.1.b como:

$$y(s) = F(s)\bar{v}(s) = F(s)G(s)u(s) \quad (7.2)$$

donde evidentemente las variables auxiliares, $v(s)$ y $\bar{v}(s)$ son diferentes.

Asumiendo esta condición, para cada una de estas representaciones es posible establecer, respectivamente, las siguientes equivalentes en el espacio de estados:

$$\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + b_1u(t) \tag{7.3}$$

$$v(t) = c_1x_1(t)$$

$$v(s) = c_1(sI - A_1)^{-1}b_1u(s) = F(s)u(s) \tag{7.4}$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2x_2(t) + b_2v(t) \tag{7.5}$$

$$y(t) = c_2x_2(t)$$

$$y(s) = c_2(sI - A_2)^{-1}b_2v(s) = G(s)v(s) \tag{7.6}$$

donde el orden del filtro y del proceso son respectivamente n_1 , $x_1 \in R^{n_1}$, y n_2 , $x_2 \in R^{n_2}$.

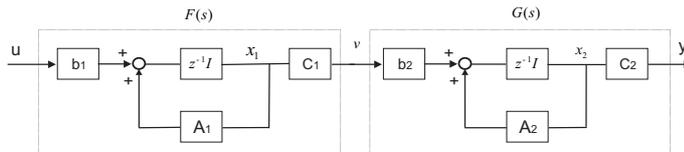


Figura 7.2. Situación original

Si ambos sub-procesos se agrupan, tal y como se muestra en la figura 7.2, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ b_2c_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{7.7}$$

$$y(t) = [0 \ c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O de forma compacta, con $X(t) = [x_1^T \ x_2^T]^T$,

$$\dot{X}(t) = AX(t) + bu(t); \quad y(t) = cX(t) \tag{7.8}$$

donde $X \in R^n$, y $n = n_1 + n_2$.

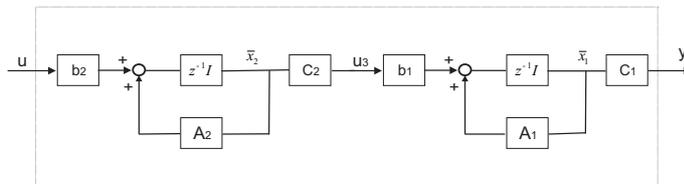


Figura 7.3. Esquema equivalente

Si se considera la situación mostrada en la figura 7.3, se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_2(t) &= A_2 \bar{x}_2(t) + b_2 u(t) \\ \bar{v}(t) &= c_2 \bar{x}_2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1(t) &= A_1 \bar{x}_1(t) + b_1 \bar{v}(t) \\ y(t) &= c_1 \bar{x}_1(t)\end{aligned}$$

Y de nuevo agrupando ambos sub-procesos se obtiene:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & b_1 c_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [c_1 \ 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (7.9)$$

O de forma compacta:

$$\dot{\bar{X}}(t) = \bar{A} \bar{X}(t) + \bar{b} u(t); \quad y(t) = \bar{c} \bar{X}(t) \quad (7.10)$$

Transformación lineal

Dado que ambos modelos (7.8) y (7.10), representan el mismo sistema, debe existir la transformación lineal:

$$\bar{X}(t) = T X(t) \quad (7.11)$$

Tal que:

$$\bar{A} = T A T^{-1}, \quad \bar{b} = T b$$

Las matrices de controlabilidad de ambos sistemas son respectivamente:

$$\begin{aligned}W &= [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b] \\ \bar{W} &= [\bar{b} \ \bar{A}\bar{b} \ \dots \ \bar{A}^{n-1}\bar{b}]\end{aligned}\quad (7.12)$$

Relacionadas con la matriz de transformación según:

$$\bar{W} = T W, \quad \implies \quad T = \bar{W} W^{-1} \quad (7.13)$$

En general, la computación analítica de la transformación anterior es muy compleja, pero es sumamente sencilla si se trata un caso numérico o si ambas matrices están representadas de forma canónica.

Control parcial de sistemas en cascada

Considérese el sistema representado en la figura 7.2. El objetivo de diseño es asignar los polos del sub-proceso $G(s)$, con estado representado por x_2 , sin modificar los del filtro $F(s)$, con estado representado por x_1 .

Si se asume un acceso de todo el estado, y considerando la representación equivalente de la figura 7.3, la ley de control para la asignación de los estados del proceso $G(s)$ será:

$$u(t) = \bar{K}\bar{x}_2(t) \quad (7.14)$$

donde \bar{K} podrá ser calculada a partir del adecuado método de diseño.

Si la matriz T se descompone adecuadamente por bloques, la expresión de la acción de control (figura 7.2) se puede representar como:

$$u = \bar{K} \begin{bmatrix} T(2,1) & T(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = K_1x_1 + K_2x_2 \quad (7.15)$$

Si se considera que sólo son accesibles la salida del proceso y el sub-proceso representado por el filtro (introducido por nosotros), con objeto de tener una estimación de todo el estado, y tomando como referencia el esquema representado en la figura 7.2, se diseñará el siguiente observador:

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A_2\hat{x}_2(t) + b_2v_1(t) + l(y(t) - c_2\hat{x}_2(t)) \quad (7.16)$$

El cual permitirá la siguiente implementación:

$$u = K_1x_1 + K_2\hat{x}_2 \quad (7.17)$$

En el supuesto de que el filtro se situara en la salida (figura 7.1.b), es posible estimar el estado a partir de un observador de orden reducido (figura 7.4), tal que:

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A_1\hat{x}_1(t) + b_1u(t) + l_o([\dot{x}_2 - A_2x_2] - b_2c_1\hat{x}_1(t)) \quad (7.18)$$

donde l_o denota la ganancia del observador. La ley de control se puede expresar como:

$$u(t) = K\hat{x}_1(t)$$

EJEMPLO 7.2.1. *Considérese el un sistema como el mostrado en la figura 7.1.a., tal que:*

$$\frac{y(s)}{u(s)} = F(s)G_1(s) \quad (7.19)$$

donde $G_1(s)$ representa el proceso que se desea controlar,

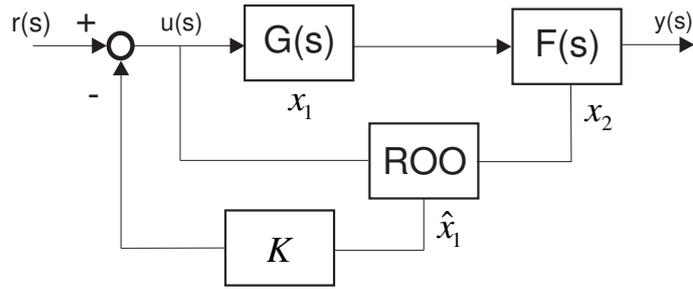


Figura 7.4. Esquema de predicción-observación con un filtro de medida.

$$G_1(s) = \frac{0,3(s + 1,812)}{(s + 0,8361)(s - 0,4942)} \tag{7.20}$$

y $F(s)$ un pre-filtro de actuación,

$$F(s) = \frac{1}{(s + 1)} \tag{7.21}$$

Dado una representación del filtro en espacio de estados tal que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1x_1 + b_1u = -x_1 + u \\ v_1 &= c_1x_1 = x_1 \end{aligned}$$

Y del proceso a controlar:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_2x_2 + b_2v_1 = \begin{bmatrix} -1,812 & -0,2324 \\ 9,684 & 1,470 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,3 \end{bmatrix} v_1 \\ y &= c_2x_2 = [0 \ 1] x_2 \end{aligned}$$

Si se determina como objetivo de control, situar los polos de bucle cerrado en $s = -5$, es evidente que dado que el sistema es inestable se requerirá una fuerte acción de control. Con objeto de suavizar estas acciones de control se diseña el pre-filtro de actuación.

Los pasos requeridos en este diseño son los siguientes:

1. Determinar la matriz de realimentación, $u = \bar{K}\bar{x}_2$, tal que los polos de $(A_2, b_2\bar{K})$ se sitúen, por ejemplo, en $p = \{-5, -5, 1\}$ (ver figura 7.5). Para este caso el resultado es:

$$\bar{K} = [-113,951 \ 32,2267] \tag{7.22}$$

2. Cálculo de la matriz de transformación T , según la expresión (7.13):

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1,000 & 0 \\ 0 & -0,812 & -0,2324 \\ 0,300 & 9,684 & 2,470 \end{bmatrix}$$

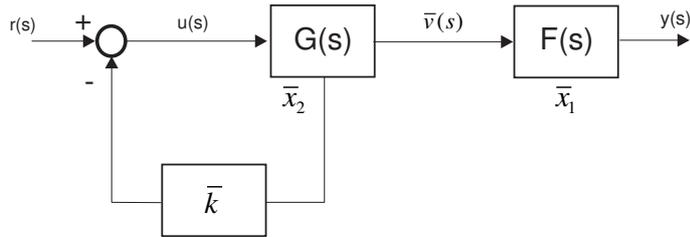


Figura 7.5. Esquema virtual para el diseño del control sobre el proceso sin consideración del filtro.

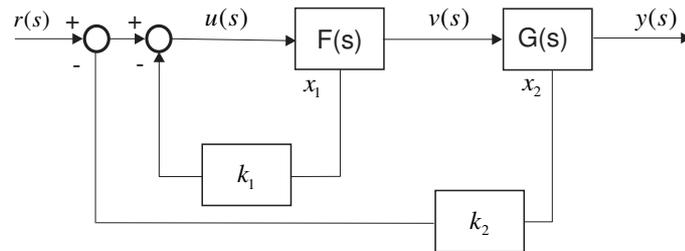


Figura 7.6. Esquema para la implementación de la ley de control (7.15)

3. Cálculo de las matrices de realimentación según esquema de la figura 7.6. Haciendo uso de las expresiones (7.14) y (7.15), la ley de control es:

$$u = 9,6680x_1 + [404,6112 \ 106,0821] x_2$$

Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 7.7 y 7.8. En estas gráficas se puede observar los resultados obtenidos tras la implementación de la ley de control propuesta (denotadas como respuestas filtradas), y la respuesta que se obtendría del esquema ficticio de la figura 7.1.b.

◇

7.3. Control parcial de sistemas con retardos temporales

Considérese ahora que el bloque $F(s)$, representa un retardo (si el retardo se situara a la salida del proceso, el desarrollo sería similar).

Con objeto de simplificar los desarrollos se considera que el retardo es un múltiplo entero del retardo, tal que: $\tau = dT^1$. Bajo tales suposiciones, los modelos discretizados en espacio de estados de ambos bloques serán:

¹ Si esta simplificación no fuera posible, o deseable, se puede obtener un modelo equivalente tal y como se vio en la Sección 1.3.4.

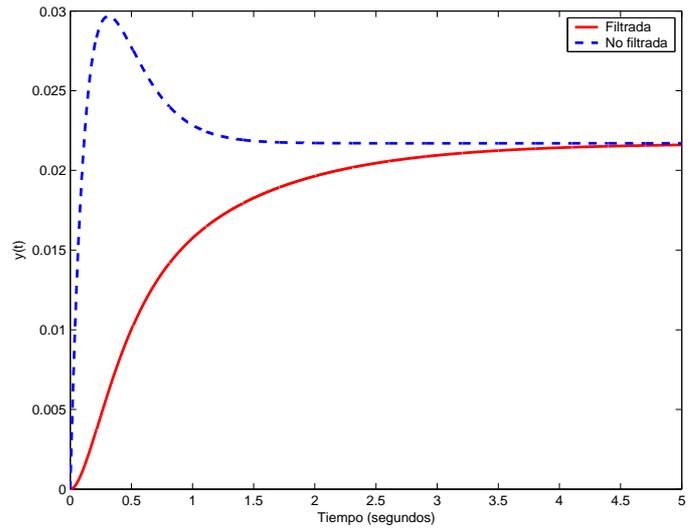


Figura 7.7. Respuestas: filtrada $y_2(s)$ sin filtrar $v_2(s)$

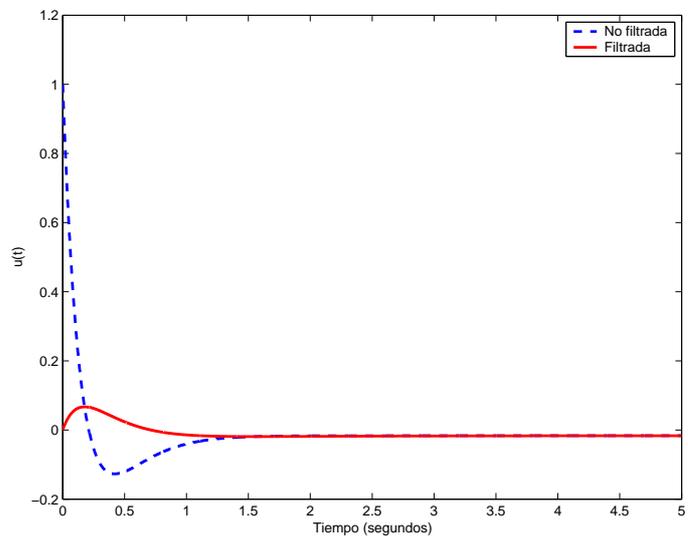


Figura 7.8. Acción de control: filtrada $v_1(s)$ sin filtrar $u(s)$

$$x_2(k + 1) = A_2x_2(k) + b_2v_1(k) ; y(k) = c_2x_2(k) \tag{7.23}$$

$$x_1(k + 1) = A_1x_1(k) + b_1u(k) ; v_1 = c_1x_1(k) \tag{7.24}$$

O de forma compacta:

$$X(k + 1) = AX(k) + bu(k) ; y = bX(k) \tag{7.25}$$

Considerando la notación $u(k) = u_k$, es posible representar el primer sub-sistema como:

$$\begin{bmatrix} u_k \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-d+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ \vdots \\ u_{k-d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$v_1 = [0 \ 0 \ \cdots \ 1] \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ \vdots \\ u_{k-d} \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Considérese la matriz de controlabilidad, (7.12), por columnas tal que: $W = [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n]$. Dada las características especiales de la discretización del retardo, las columnas de W son tal que:

$$w_1 = b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad w_2 = Ab = \begin{bmatrix} A_1 b_1 \\ b_2 c_1 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 b_1 \\ \phi_2 b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_3 = A^2 b &= \begin{bmatrix} A_1^2 b_1 \\ (b_2 c_1 A_1 + A_2 b_2 c_1) b_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_1^2 b_1 \\ (\phi_2 A_1 + A_2 b_2 c_1) b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^2 b_1 \\ \phi_3 b_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De tal forma que si se define:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0; \quad \phi_i = \phi_{i-1} A_1 + A_2^{i-2} b_2 c_1; \\ & \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (7.27)$$

El i -enésimo vector de la matriz de controlabilidad se puede computar como:

$$w_i = \begin{bmatrix} A_1^{i-1} b_1 \\ \phi_i b_1 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

Transformación lineal

En este caso particular, la matriz de transformación (7.13) se puede computar analíticamente observando las siguientes simplificaciones:

$$\begin{aligned} c_1 b_1 &= 0, \\ c_1 A_1^{k-1} b_1 &= 0, \quad \forall k < (d-1); \\ c_1 A_1^{d-1} b_1 &= 1 \\ A_1^k &= 0, \quad \forall k \geq d; \end{aligned}$$

De tal forma que sustituyendo (7.27) en (7.28), se obtiene:

$$W = \left[\begin{array}{cccc|ccc} b_1 & A_1 b_1 & A_1^2 b_1 & \cdots & A_1^{d-1} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_2 & \cdots & A_2^{n_2-1} b_2 \end{array} \right]$$

Descomponiendo por bloques tal y como se muestra a continuación, la matriz de controlabilidad del sistema completo será:

$$W = \left[\begin{array}{cc} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{array} \right]_{n \times n} = \left[\begin{array}{cc} I_{d \times d} & 0_{d \times n_2} \\ 0_{n_2 \times d} & W_2 \end{array} \right]_{n \times n}$$

donde $W_1 = I_{d \times d}$ se define como la matriz de controlabilidad del primer sub-sistema, y

$$W_2 = [b_2 \ A_2 b_2 \ A_2^2 b_2 \ \cdots \ A_2^{n_2-1} b_2]_{n_2 \times n_2}$$

la matriz de controlabilidad del segundo sub-sistema.

Para la computación de la matriz de transformación (7.13), se requiere la inversa de la matriz de controlabilidad W , si bien dada la peculiaridad de la misma, esta se obtiene de forma directa como:

$$W^{-1} = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & W_2^{-1} \end{array} \right]_{n \times n}$$

De igual forma, la matriz de controlabilidad de la segunda representación \bar{W} , es:

$$\bar{W} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} * & * & * & \cdots & * & \cdots & * \\ b_2 & A_2 b_2 & A_2^2 b_2 & \cdots & A_2^d b_2 & \cdots & A_2^n b_2 \end{array} \right]$$

donde los elementos denotados por * no son relevantes. Definiendo:

$$\Phi_{2d} = [b_2 \ A_2 b_2 \ A_2^2 b_2 \ \cdots \ A_2^{d-1} b_2]_{n_2 \times d} \quad (7.29)$$

Es posible reescribir la matriz de controlabilidad como:

$$\bar{W} = \left[\begin{array}{cc} [*]_{d \times d} & [*]_{d \times n_2} \\ \Phi_{2d} & A_2^d W_2 \end{array} \right]_{n \times n}$$

De tal forma que la computación de $T = \bar{W}W^{-1}$, se puede realizar como:

$$\begin{aligned} T &= \left[\begin{array}{cc} [*]_{d \times d} & [*]_{d \times n_2} \\ \Phi_{2d} & A_2^d W_2 \end{array} \right]_{n \times n} \left[\begin{array}{cc} I_{d \times d} & 0_{d \times n_2} \\ 0_{n_2 \times d} & W_{2, n_2 \times n_2}^{-1} \end{array} \right]_{n \times n} \\ &= \left[\begin{array}{cc} [*]_{d \times d} & [*]_{d \times n_2} \\ \Phi_{2d} & A_2^d \end{array} \right]_{n \times n} \end{aligned}$$

Tal que, de acuerdo con la definición (7.11), la computación del nuevo estado \bar{X} será:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [*]_{dx d} & [*]_{dx n_2} \\ \Phi_{2d} & A_2^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

De forma que:

$$\bar{x}_2 = \Phi_{2d}x_1 + A_2^d x_2 \quad (7.31)$$

A partir de estos resultados se puede formalizar el siguiente Teorema:

Teorema 7.3.1 *Dado un sistema sometido a un retardo de actuación tal que:*

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k-d) \quad (7.32)$$

y dada una ley de control:

$$u(k) = K [\Phi_d u_d(k) + A^d x(k)] + r \quad (7.33)$$

donde se define:

$$u_d(k) = [u(k-1) \ u(k-2) \ \cdots \ u(k-d)]' \quad (7.34)$$

$$\Phi_d = [b \ Ab \ A^2 \ \cdots \ A^{d-1}b] \quad (7.35)$$

Y la matriz K se define como la matriz a diseñar sobre el sistema sin consideración del retardo: Se obtiene que el sistema en bucle cerrado será:

$$x(k+1) = (A + bK)x(k) + br(k-d) \quad (7.36)$$

Demostración: Está es inmediata, basta con sustituir adecuadamente las ecuaciones (7.23-7.28) y (7.31). ■

Comentario 7.3.1 Si el estado del proceso no es accesible, pero si que fuera observable. Éste puede ser estimado a partir de un convencional observador de estados, tal y como puede apreciarse en la figura 7.9.

EJEMPLO 7.3.1. *Considérese el siguiente modelo:*

$$G_2(s) = \frac{-0,06972}{(s + 0,8361)(s - 0,4942)} e^{-0,3s} \quad (7.37)$$

Considérese que sólo es accesible la salida del proceso. Definiendo un observador discreto de estados tal que los polos se sitúen $p_L = \{-0,5, -0,51\}$, con periodo de muestreo $T = 0,1$ s, y una ganancia del observador $l = [2,9804 \ -118,3653]^T$, y si se desea asignar los polos del sistema en bucle cerrado entorno a 0,74, (e^{-3T}) se obtienen los resultados de la figura 7.10, donde se puede observar que el sistema es inestable para un retardo de 0,3 s.

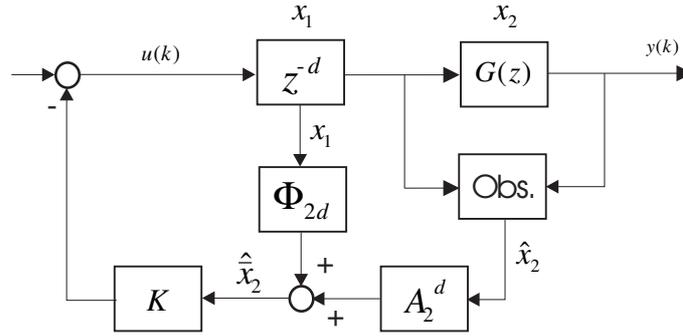


Figura 7.9. Esquema de predicción y observación del sistema en cascada.

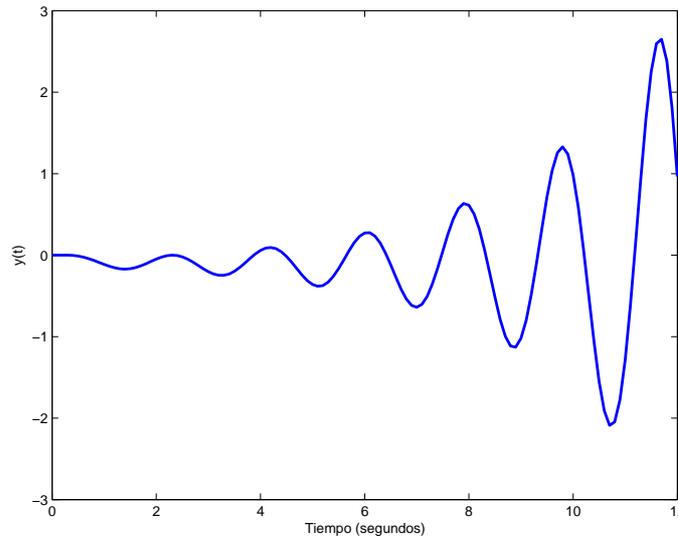


Figura 7.10. Respuesta inestable para un retardo de 0,3 s.

Por otro lado, si se considera que el sistema (7.37), se puede descomponer en cascada, similar al esquema de la figura 7.1, con un retardo de 0,3 s tal que $S1 : F(s) = e^{-0,3s}$. Esto es :

$$G(s)F(s) = \frac{-0,06972}{(s + 0,8361)(s - 0,4942)} e^{-0,3s}$$

Si se define un periodo de muestreo $T = 0,1$ s, la representación discreta del sistema $S1$ será:

$$\begin{bmatrix} u(k) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ u(k-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$u(k-3) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ u(k-3) \end{bmatrix}$$

Para el segundo sub-sistema S2, se considera la misma notación que en el ejemplo precedente, es decir: $(A = A_2, b = b_2)$.

El sistema completo se podría representarse según esquema de la figura 7.11.

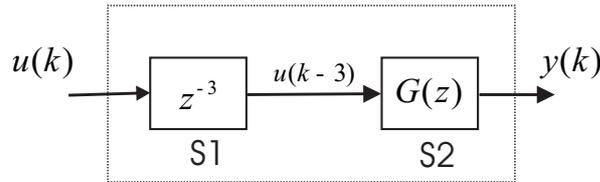


Figura 7.11. Representación del sistema SISO con retardo.

Entonces, a partir de (7.31), definiendo los bloques:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0,4982 & -0,0667 \\ 2,7783 & 1,4398 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_d = [b \ Ab \ A^2b] = \begin{bmatrix} -0,0003 & -0,0010 & -0,0017 \\ 0,0322 & 0,0366 & 0,0410 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz de transformación tal que:

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} -0,0003 & -0,001 & -0,0017 & 0,4982 & -0,0667 \\ 0,0322 & 0,0366 & 0,041 & 2,7783 & 1,4398 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ u(k-3) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

De tal forma, que dado el esquema de la figura 7.9, donde $\bar{x}(k)$ representa la predicción del estado, calculada a partir de un observador, es posible realizar el diseño sobre el proceso $G(z)$ usando la técnica apropiada, como por ejemplo asignación de polos, sin la consideración del retardo. Bajo estas condiciones, y asumiendo el mismo observador, ley de control y periodo de muestreo que en el caso anterior, se obtienen los resultados de la figura 7.12, donde se puede apreciar la estabilización del sistema.

◇

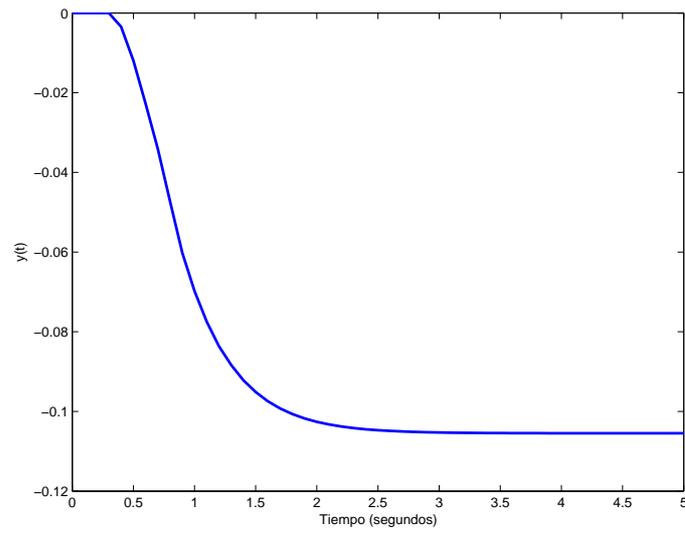


Figura 7.12. Respuesta del sistema con el esquema de predicción-observación propuesto para un retardo de 0,3 s.

8 Predicción basada en los coeficientes del modelo a partir de la representación externa.

En este capítulo se va a introducir otra nueva metodología de predicción basada en los coeficientes de la representación externa.

El desarrollo de esta metodología de predicción se justifica por la necesidad de disponer de esquemas de predicción que permitan tratar con sistemas sometidos al escenario de control que se plantea a continuación.

8.1. Medidas escasas

En muchas aplicaciones industriales, las señales de control se actualizan a una frecuencia distinta que la medida del proceso, y en algunas ocasiones, debido a la naturaleza de los distintos sensores, esta medida se realiza igualmente a distinta frecuencia. También es típica la situación donde, debido a diferentes causas (errores de comunicación, sensores compartidos, etc.), la medida de alguna de las variables no este disponible cuando se cumple su periodo de actualización.

Un posible tratamiento de este tipo de sistemas es el que se propone en [3, 107, 51], donde esencialmente lo que se hace es tratar el problema según las técnicas de “dual-rate” o “multirate” [8]. A partir de estas aproximaciones no se puede analizar el muestreo no periódico (“random sampling”), tampoco es posible aplicar las técnicas de diseños y reguladores convencionales.

Una alternativa para el tratamiento de este escenario de control, es el que se plantea en [9, 109, 108]. En estos trabajos se trata con la predicción de la salida, o salidas, de un sistema sometido a medidas escasas. Estos trabajos se basan en los esquemas pseudorecursivos de estimación por mínimos cuadrados introducidos previamente en [5, 2]. Los efectos del ruido de medida y las perturbaciones sobre el estado también son considerados. Una ventaja sobre otros métodos, como el filtro de Kalman, es que el tiempo de computación es ligeramente menor en el algoritmo propuesto que en el filtro de Kalman. La estimación de la salida se puede utilizar en un control discreto convencional o en un esquema de estimación por mínimos cuadrados [53].

Predicción de medidas escasas de sistemas sometidos a retardos de actuación y/o medida

Una situación especial que se puede dar en el escenario de control planteado anteriormente, es cuando el sistema presente retardos de actuación y/o medida. Una solución a este problema sería tratar con un estado ampliado del sistema tal que las ecuaciones manejadas por los algoritmos propuestos en [9, 109] incorporaran de forma explícita esos retardos. Si bien, como se ha expuesto en el capítulo precedente, sería deseable disponer de algún tipo de esquema de control que permitiera tratar con esos sistemas sin considerar, de forma explícita, el retardo a la hora de diseñar los controladores o los algoritmos de control requeridos.

En este sentido, se planteó el desarrollo de un esquema de predicción de las variables retardadas que pudiera integrarse, tanto en su fase de diseño como de análisis, dentro del esquema de predicción de medidas escasas [6].

En la siguiente sección se va a analizar el mencionado esquema de predicción en comparación con el esquemas propuestos en el capítulo 6 y en la sección 5.1. Primeramente se realizará una breve descripción del esquema de predicción desarrollado.

8.2. Predictor basado en los coeficientes de la representación externa

Considérese el modelo discreto de un sistema en representación externa definido como:

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-h} \quad (8.1)$$

A partir de este modelo, es posible definir la ecuación recursiva de la salida del proceso tal que:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 u(k-h) + b_1 u(k-1-h) + \dots + b_m u(k-m-h)$$

La cual también se puede representar como:

$$\begin{pmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_{k-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k-1} \\ y_{k-2} \\ \vdots \\ y_{k-n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k-h} \\ u_{k-h-1} \\ \vdots \\ u_{k-m-h} \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

O de forma compacta, con obvia notación, como:

$$Y_k = A_{ES} Y_{k-1} + B_{ES} U_{k-h} \quad (8.3)$$

Si se realiza una proyección de la ecuación anterior sobre el instante $y(k+h)$, tras las oportunas sustituciones, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Y_{k+h} &= A_{ES}^h Y_k + A_{ES}^{h-1} B_{ES} U_{k-h} + \dots + B_{ES} U_{k-1} \\
 &= A_{ES}^h Y_k + \sum_{j=1}^h A_{ES}^{j-1} B_{ES} U_{k-j}
 \end{aligned}
 \tag{8.4}$$

Notar que a partir del primer elemento del vector Y_{k+h} , se puede obtener de forma directa la predicción de la salida $\bar{y}(k+h)$, es decir:

$$\bar{y}(k+h) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] Y_{k+h} = C_{ES} Y_{k+h}
 \tag{8.5}$$

Este esquema de predicción, que denotamos como (PES) se puede implementar según se aprecia en el esquema de la figura 8.1, donde $K(z)$ representa cualquier controlador convencional, y $C(z)$ un pre-filtro sobre el set-point.

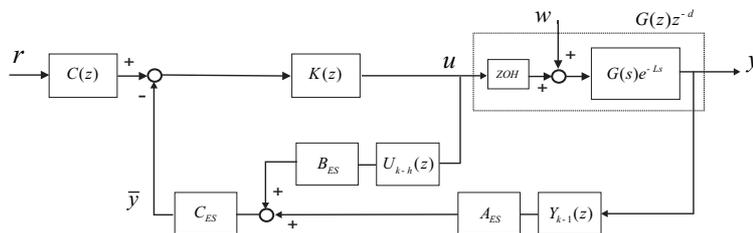


Figura 8.1. Esquema para la implementación del PES.

Prestaciones del esquema de predicción planteado

Como se ha mencionado, a partir de una serie de ejemplos, se van a mostrar las prestaciones del PES con respecto al PEE y NSCP, propuestos respectivamente en el capítulo 6 y en la sección 5.1.

EJEMPLO 8.2.1. *Considérese la siguiente función de transferencia:*

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s-1)} e^{-0,2s}
 \tag{8.6}$$

Considérese igualmente los esquemas de predicción de las figuras 8.1 y 8.2. Para ambos esquemas, el diseño del regulador se realiza sobre el modelo anterior pero sin consideración del retardo. Por ejemplo, se ajusta el siguiente regulador:

$$PID(s) = 5,4079 \frac{(s+1)(s+5)}{s(0,05s+1)}$$

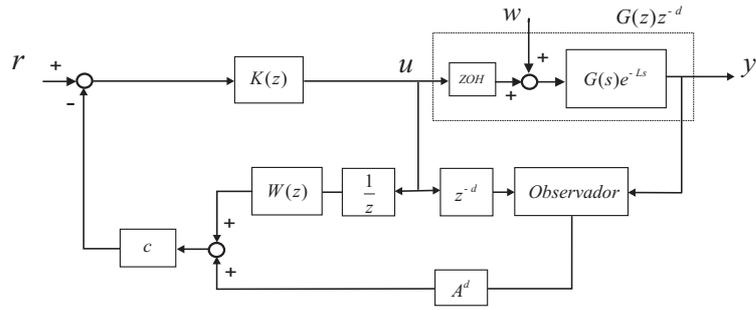


Figura 8.2. Esquema para la implementación del PEE.

Ambos esquemas de predicción se implementan con un periodo de muestreo $T = 0,01$ s.

Para la implementación del esquema de predicción propuesto en el Capítulo 6, es necesario la implementación de un observador del estado, éste se diseña a partir de un modelo discretizado en espacio de estados del sistema (8.6) libre de retardo, representado por la tripla (A, B, c) . Por ejemplo, se diseña una ganancia tal que los polos del sistema discretizado en bucle cerrado $(A - lc)$, se sitúen en $\{-0,1, -0,2\}$, siendo $l = [31,42 \ 4,52]^T$.

Para el caso ideal, es decir, todos los parámetros del modelo igual a los parámetros del proceso real, los resultados obtenidos se muestran en la figura 8.3. De los mismos, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- Ante cambios en la señal de referencia los dos esquemas de predicción tienen el mismo comportamiento que un bucle ideal sin retardo. Y al igual que este último, si el regulador se diseña adecuadamente se puede obtener un perfecto seguimiento de la referencia.
- Ante perturbaciones de tipo escalón en la entrada del proceso (perturbaciones de carga), la respuesta del PES es prácticamente igual que la del PEE. Para ambos esquemas, existe igualmente un error de posición en régimen permanente. Este error es función del retardo considerado (ver figura 8.4).

Respecto a la robustez del PES, en comparación con el PEE, el primero se muestra más sensible a errores de modelado en los coeficientes del modelo (ver figura 8.5), aunque también presenta una robustez ligeramente superior en cuanto a errores de modelado del retardo (figura 8.6).

◇

EJEMPLO 8.2.2. Considérese de nuevo el modelo (??):

$$G(s) = \frac{2}{(3s - 1)(s - 1)} e^{-0,3s}$$

Con regulador PID tal que:

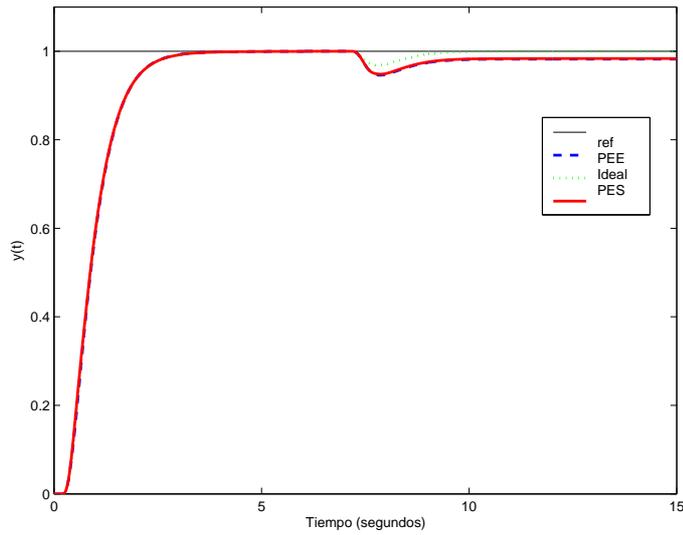


Figura 8.3. Respuestas ante una entrada escalón unitario y una perturbación de -1 unidades en el instante de tiempo $t = 7$.

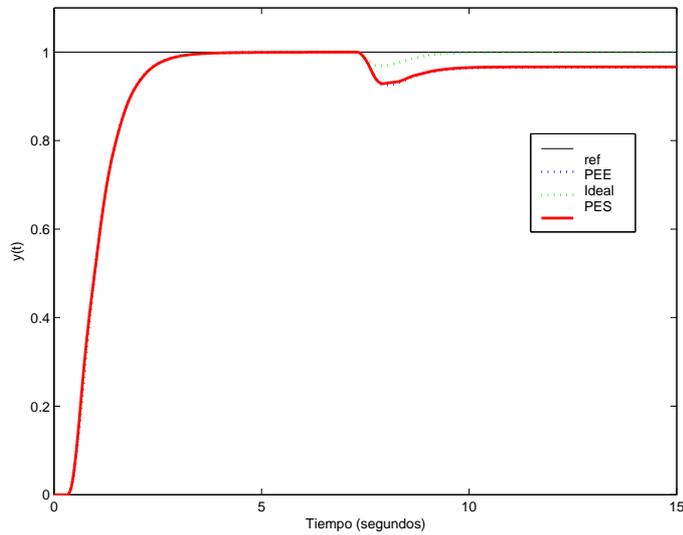


Figura 8.4. Respuestas cuando el retardo, tanto del modelo como del proceso, es: $e^{-0,3s}$.

$$PID(s) = 6 \frac{(s + 1)(s + 0,5)}{s(0,05s + 1)}$$

Considérese de nuevo los esquemas de predicción de las figuras 8.1 y 8.2. Ambos esquemas se implementan con un periodo de muestreo $T = 0,01$ s. Se

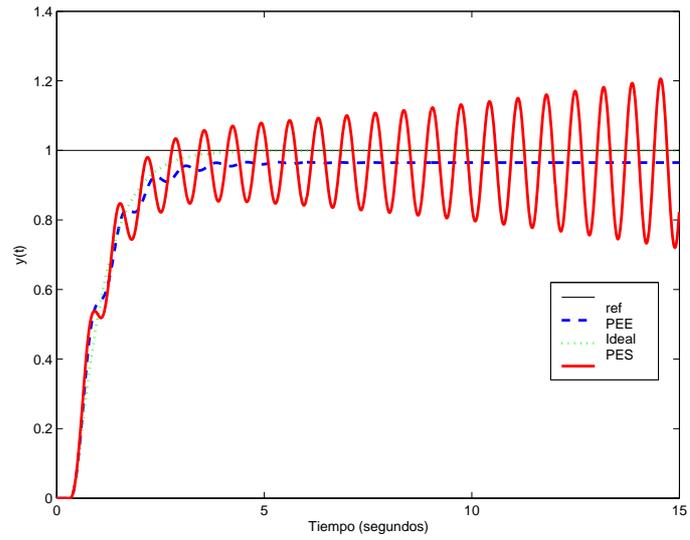


Figura 8.5. Respuestas cuando el proceso real es $G(s) = \frac{1,53}{(s+5,5)(s-1,1)} e^{-0,3s}$.

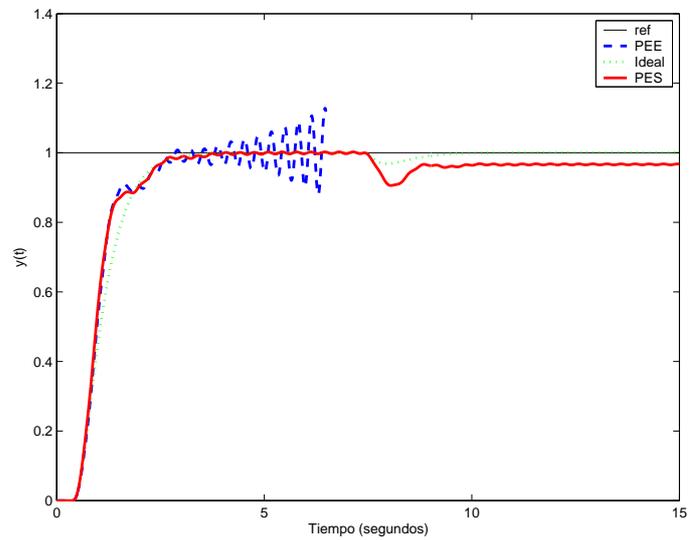


Figura 8.6. Respuestas ante error en el retardo modelado. El retardo modelado es $L = -0,3$ s , y el retardo real es $L_r = -0,37$ s.

diseña una ganancia para el observador del PEE, tal que los polos del sistema discreto $(A - lc)$ se sitúen en $\{-0,1, -0,2\}$, siendo $l = [201,3 \ 3,47]^T$. Para el caso ideal, se obtienen los resultados de la figura 8.7.

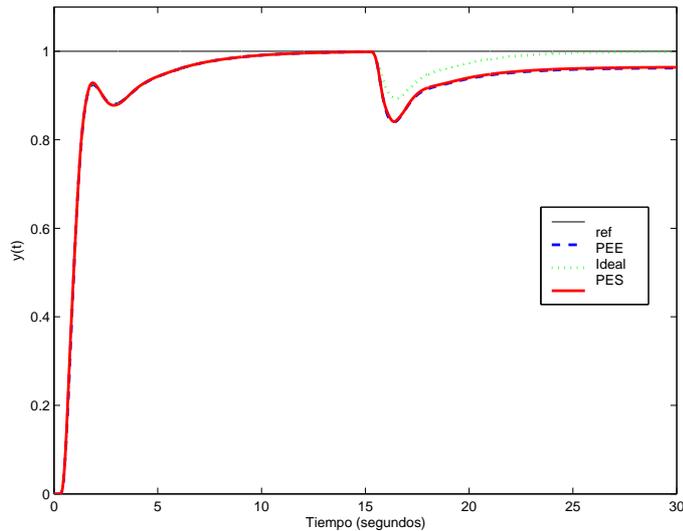


Figura 8.7. Respuestas ante una entrada escalón unitario y una perturbación de -1 unidades en el instante de tiempo $t = 15$.

Considérese ahora los mismos errores en los parámetros del modelo que en el Ejemplo ??, pero con un retardo tal que $L_r = 0,365$. Notar que, a diferencia de los resultados obtenidos con el predictor propuesto en el Capítulo 5.1 (ver figura 5.30), el PES es menos robusto ante errores en el retardo (ver figura 8.8).

De igual forma que se hizo con el PEE, si se desea eliminar el error en régimen permanente, se puede modificar el esquema básico con un bucle adicional, tal y como se muestra en la figura 8.9.

Para este nuevo esquema se diseñan dos reguladores, un regulador PD con objeto de estabilizar el sistema:

$$PI(s) = 180 \frac{(s + 0,5)}{(s + 40)} \quad (8.7)$$

Y un regulado PI con objeto de obtener un error nulo en régimen permanente ante perturbaciones de tipo escalón en la entrada del sistema. El regulado PI se ha ajustado como:

$$PI(s) = 0,9 \frac{(s + 1)}{s} \quad (8.8)$$

Tal y como puede apreciarse en la figura 8.10, con esta estructura se consigue anular el error en régimen permanente.

◇

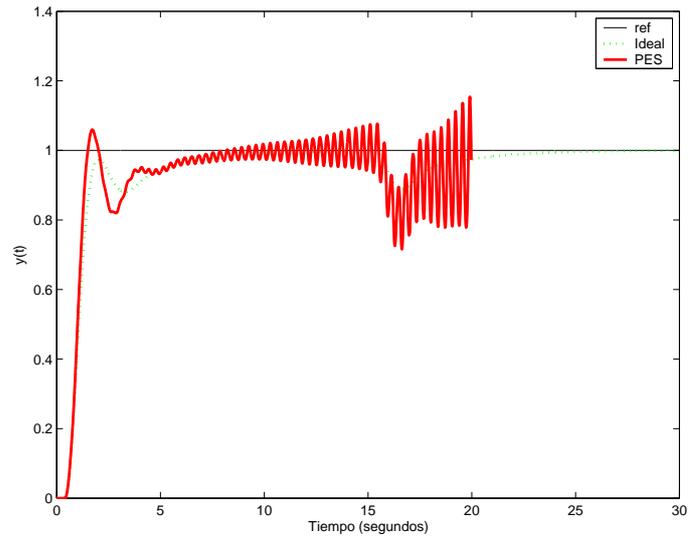


Figura 8.8. Respuestas cuando el proceso real es $G_r(s) = \frac{2,4}{(3,6s-1)(1,2s-1)} e^{-0,365s}$.

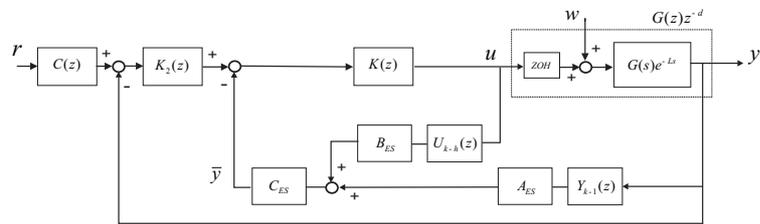


Figura 8.9. Modificación del PES para obtener error nulo en régimen estacionario ante perturbaciones de tipo escalón.

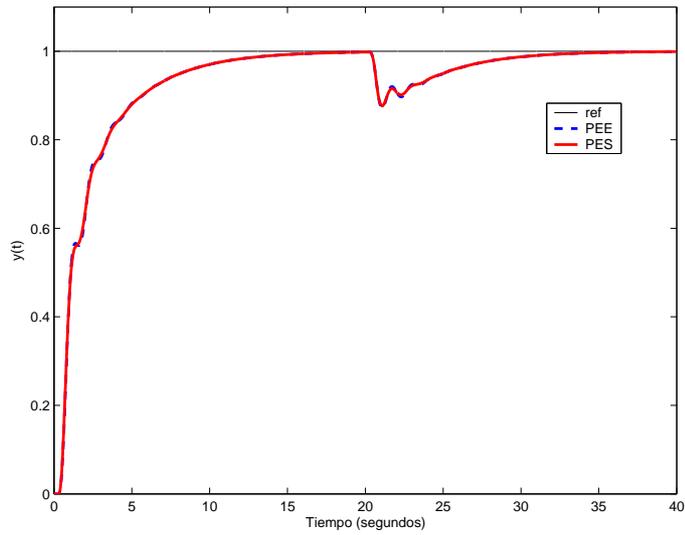


Figura 8.10. Respuesta del sistema a partir de una implementación con el esquema de la figura 8.9.

Parte V

**Plataformas
experimentales**

9 Sistemas de control empotrados

9.1. MaRTE OS para el desarrollo de sistemas empotrados

MaRTE OS (“Minimal Real-Time Operating System for Embedded Applications”) [10], es un kernel de tiempo real diseñado especialmente para sistemas empotrados que sigan el estándar POSIX.13 del IEEE. El desarrollo del kernel se ha realizado mayoritariamente en código Ada95, con algunas partes en C y ensamblador. Esto último permite la ejecución de código desarrollado tanto en Ada como en C, utilizando los compiladores GNAT o GCC respectivamente. La depuración del código desarrollado por el usuario puede ser depurada on-line a través del programa GDB.

MaRTE OS es un programa de libre distribución bajo licencia GNU¹ (General Public License). El entorno de desarrollo de MaRTE OS, está formado por un PC con sistema operativo Linux que denominaremos “Host”, y que actúa como plataforma de desarrollo de los programas de usuario, y otro PC, o similar, que denominaremos “Target”, el cual actúa como soporte para la ejecución de los programas de usuario. Respecto a las limitaciones en el hardware de los PCs utilizados, para el Host no existe ninguna limitación, pero el Target deberá estar basado en tecnología 386 de Intel o compatible.

MaRTE OS está siendo desarrollado por el grupo de Computadores y Tiempo Real del departamento de Electrónica y Computadores de la Universidad de Cantabria (<http://martec.unican.es/>). Existen varias versiones de MaRTE OS, y actualmente aún se sigue trabajando en el desarrollo del mismo, siendo por tanto un producto no acabado, pero que como se verá más adelante y desde su versión 0.86, cumple la mayor parte del estándar POSIX.13, así como una serie de utilidades adicionales, que permite experimentar ampliamente en el desarrollo de sistemas empotrados.

Características más importantes de MaRTE OS:

En concreto, la versión de MaRTE OS 1.0, tiene implementadas las siguientes funcionalidades:

¹ Al igual que todos los programas citados anteriormente, GNAT, GCC, GDB.

- Gestión de Thread (creación, finalización, atributos, ...).
- Distintas políticas de planificación de tareas (FIFO, Round-Robin y “Sporadic Server scheduling”).
- Mutexes y condiciones variables.
- Señales (parcialmente implementado).
- Clocks y Timers.
- CPU time Clocks y Timer.
- Consola I/O.
- Servicios de tiempo: Suspensión de tareas, con retardos absolutos y relativos.
- Tratamiento dinámico de memoria (muy simplificado).

MaRTE OS ofrece además la posibilidad de implementar la propia política de planificación definida por el usuario (“Application-Defined Scheduling”). Para la evaluación de la planificación de las tareas, se dispone de la herramienta “POSIX trace”, la cual permite obtener el cronograma de ejecución del programa. Esta utilidad se encuentra implementada sólo en la versión 0.86. Como equivalente del POSIX trace en la versión 1.0, se dispone de la utilidad “task_inspector”, si bien esta herramienta no es tan potente como la anterior.

Estructura de la plataforma y principales características.

Como puede observarse en la figura 9.1, el Kernel de MaRTE OS, tiene una Interface abstracta para acceder al hardware del PC. Esta interface encapsula las operaciones para el tratamiento de interrupciones, clock, manejadores del timer y cambios de contexto entre tread (hilos o tareas en ejecución).

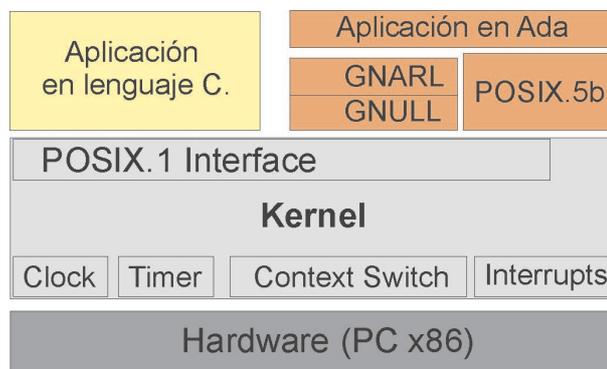


Figura 9.1. Arquitectura de MaRTE OS..

MaRTE OS trabaja en un entorno de desarrollo formado por dos PC's, tal y como se puede apreciar en la figura 9.2, las características que deben poseer

ambas máquinas queda reflejadas en la mencionada figura. Destacar que tanto la conexión a Ethernet como la comunicación RS-232 son opcionales, y no imprescindibles para el correcto funcionamiento y ejecución de los programas de usuario. En concreto, la utilidad de Ethernet sirve para la transferencia del programa de usuario al Target, así como para su inicialización, sin bien esta funcionalidad se puede sustituir por una transferencia desde la disquetera de 3 1/2'. Y la línea de conexión RS-232 se utiliza para la depuración on-line (a través del programa "gdb") del programa de usuario, así como para el funcionamiento del POSIX Tracing o "Task_inspector" (programas para la captura de trazas de ejecución).

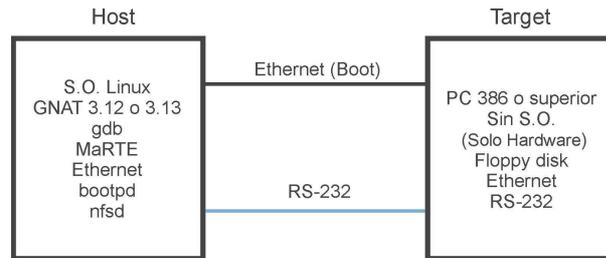


Figura 9.2. Entorno de desarrollo de MaRTE.

9.1.1. Desarrollo de la plataforma.

El desarrollo de un programa para su ejecución sobre el kernel de MaRTE, puede llevarse a cabo tanto en código C, como en Ada95. Si bien, creemos que la máxima potencialidad de MaRTE radica en la implementación del POSIX.5b, estándar de tiempo real de Ada², a su vez, la herramienta para visualización de los cronogramas de ejecución de tareas (POSIX Tracing) ha sido desarrollado exclusivamente para este lenguaje. Por todo ello, creemos que el máximo rendimiento de MaRTE y su mayor justificación, radica en la posibilidad de implementación sobre un código de tiempo real (y de libre distribución) de programas desarrollados en Ada95.

Entorno de desarrollo:

Para la evaluación del sistema de control empotrado, se consideró como proceso a controlar un Levitador Magnético. La justificación en la elección de tal proceso, radica esencialmente en la necesidad de utilizar un proceso lo suficientemente crítico, en cuanto a estabilidad y tiempos de ejecución,

² Lenguaje de programación desarrollado específicamente para la implementación de sistemas de control en tiempo real.

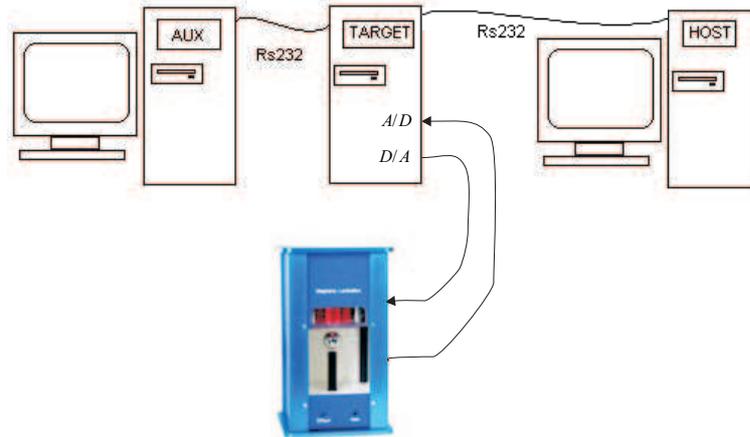


Figura 9.3. Entorno de desarrollo del sistema empotrado.

pero que a la vez su modelo fuera suficientemente conocido para una fácil implementación de las leyes de control.

En base a estas consideraciones se ha desarrollado el esquema de trabajo representado en la figura 9.3, donde se pueden identificar los siguientes elementos:

- **Host:** PC de desarrollo sobre el cual se genera el código del programa de ejecución. En este PC, es donde se encuentra instalada la herramienta de desarrollo de MaRTE OS (debe estar instalado Linux). La conexión RS-232 con el Target, se utiliza para el intercambio de información de la herramienta POSIX Tracing, integrada en MaRTE.
- **Target:** De forma genérica, se trata de un PC basado en tecnología x86, sobre el cual se ejecuta el sistema de control empotrado. Para la evaluación del sistema se hicieron pruebas de ejecución sobre un 486 y un Pentium II. Adquisición de datos: El proceso de actuación y adquisición de datos, se ha desarrollado a través de las tarjetas ACL-6126 (con salidas bipolares) y PCLab 812pg (con entradas bipolares). Para ambas tarjetas, se tuvo que desarrollar, en lenguaje C, los drives de gestión de las mismas.
- **PC Auxiliar:** Dado que el sistema empotrado (“target”) no dispone ni de gestión de ficheros ni de disco duro, se ha desarrollado una aplicación para la gestión de las variables del mismo. Esta aplicación, conecta el “target” con un PC auxiliar, desde el cual poder realizar una gestión de las variables o parámetros del sistema de control requeridos, para su posterior evaluación “off-line”, representación gráfica, etc. Para llevar a cabo esta tarea, se ha desarrollado igualmente todos los drives de gestión del puerto RS-232, así como una aplicación genérica en el PC-auxiliar de captura y representación de los datos recibidos por el puerto serie.

Sistema de control:

El programa de control desarrollado, para esta aplicación, consta de tres tareas y un programa principal (figura 9.4). El programa principal actúa como soporte para la gestión de las variables globales, lanzamiento de tareas, así como para el sistema POSIX Tracing. Desde el programa principal, también se realiza la gestión y envío de los eventos y demás señales generadas por el planificador de tareas.

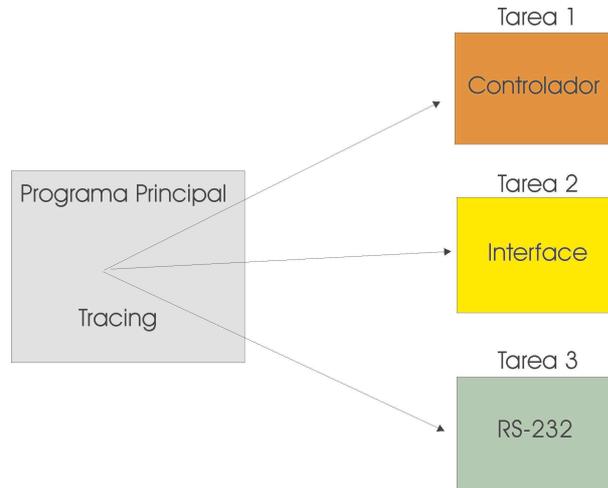


Figura 9.4. Esquema de tareas del programa de usuario.

- **Controlador (Tarea 1):** Se trata de una tarea periódica dentro de la cual se han implementado todas las etapas del control; adquisición de datos, cálculo de la acción de control y actuación sobre el proceso. Dada la poca complejidad del sistema de control, los procesos de adquisición y envío de la acción de control, se han integrado dentro de la tarea controlador como código secuencial a ejecutar dentro de la misma.
- **Interface (Tarea 2):** Tarea que va a permitir modificar los parámetros del sistema. En concreto esta aplicación permite modificar la referencia del sistema, activar el envío remoto de datos, mensajes por pantalla, etc. A su vez tiene como finalidad realizar un consumo de CPU en “background”, que nos va a permitir visualizar y evaluar la capacidad de tiempo real del planificador de MaRTE.
- **RS-232 (Tarea 3):** Dado que MaRTE no dispone de un sistema de ficheros, se ha incluido la tarea “RS-232”, con el objetivo de transmitir por el puerto serie los datos de la variable controlada, o de cualquier otra variable. El objetivo principal de este estudio es evaluar la potencialidad de MaRTE

para el control de sistemas críticos de tiempo real, de ahí la necesidad de disponer de las señales de control y actuación del sistema, para la posterior evaluación de las mismas y validación del sistema.

9.1.2. Evaluación.

El objetivo de los experimentos que siguen, consistió esencialmente en la evaluación de las posibilidades de MaRTE OS para el desarrollo de sistemas empotrados de tiempo real, para el control de procesos críticos, donde la pérdida de sincronismo o fallo en alguna acción de control podría conllevar la inestabilización del sistema.

En los cronogramas que siguen, la tarea 0 “Task 0”, representa al programa principal, y la tarea “Idle”, representa el tiempo de CPU inactiva.

Ejecución periódica de una tarea:

Con este experimento se quiere mostrar la existencia del Jitter³, así como la variabilidad de mismo y del tiempo de ejecución de una tarea, en función del microprocesador. Para ello, se realiza la comparación entre los cronogramas resultantes de la ejecución sobre un procesador 486 y Pentium II.

En el cronograma de la figura 9.5, se puede verificar la periódica activación de la tarea en ejecución, así como el tiempo de CPU consumido por la tarea de control. Se aprecia un tiempo de activación de la tarea de 10 microsegundos, con un consumo de CPU, por parte de la tarea de control, de 525 microsegundos, siendo por tanto de 475 microsegundos la inactividad de la CPU.

En el cronograma de la figura 9.6, resultado de la ejecución del mismo algoritmo de control sobre un procesador Pentium II, se puede observar que tanto el Jitter como el tiempo de ejecución de la tarea han disminuido considerablemente con respecto a una ejecución sobre un 486.

Ejecución de una tarea en background:

En este experimento se ejecutaron concurrentemente la tarea de control, y la tarea “Interface”. Ésta última se ejecuta en background junto a la tarea de control, por tanto carece de periodo de activación, y entrará en ejecución siempre que la tarea más prioritaria, es decir, la tarea de control no se encuentre en ejecución (figura 9.7).

Ejecución de dos tareas periódicas y una tarea en background:

Con este experimento se pretende evaluar el correcto funcionamiento del esquema propuesto en la figura 9.3. Como podemos apreciar (figura 9.8) la tarea de mayor prioridad “Controlador”, expulsa de ejecución a la tarea menos prioritaria de transferencia de datos “RS-232”, ejecutándose la tarea “Interface”, tarea de menor prioridad, solamente cuando las tareas más prioritarias han completado su tiempo de ejecución.

³ Una tarea que debe ejecutarse con un determinado período, puede que no comience a ejecutarse en el instante requerido. Al período de tiempo desde que una tarea

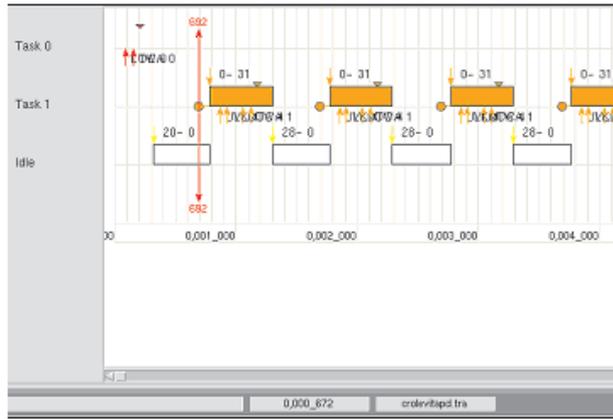


Figura 9.5. Cronograma de ejecución del programa de control ejecutado sobre un 486.

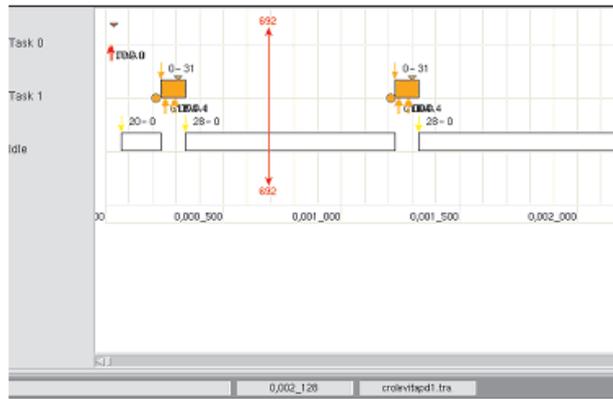


Figura 9.6. Cronograma del programa de control ejecutado sobre un Pentium II.

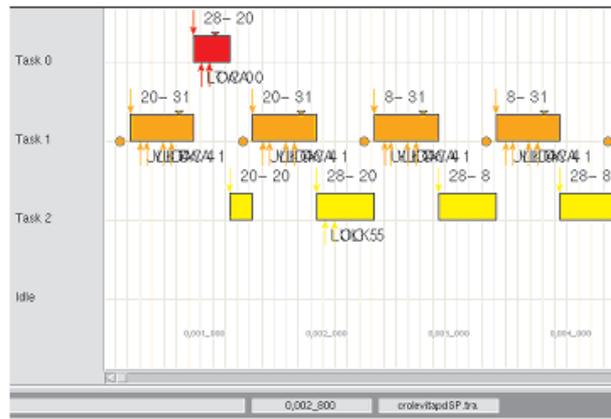


Figura 9.7. Cronograma ejecución con una tarea en background.

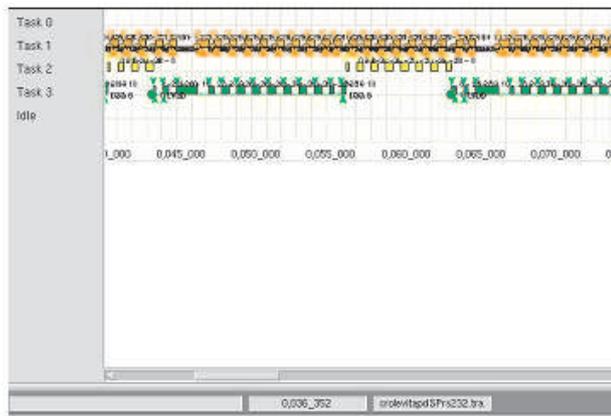


Figura 9.8. Cronograma de ejecución del sistema de control de la figura 9.3.

debe comenzar a ejecutarse hasta que realmente se inicia su ejecución se denomina Jitter.

9.2. Control de un mini-helicóptero de 4 rotores

9.2.1. Descripción del prototipo

El helicóptero con cuatro motores, también conocido como quadri-motor o X4, es un dispositivo muy interesante para experimentar sobre los vehículos aéreos que pueden realizar vuelo estacionario.

El quadri-motor mostrado en la figura 9.9, posee tres giroscopios que sirven como lazo de control interno para estabilizar en velocidad el vehículo. El quadri-motor, a diferencia del helicóptero clásico, no posee plato cíclico y se controla variando únicamente la velocidad angular de cada uno de sus cuatro motores. La fuerza f_i producida por el motor i es proporcional al cuadrado de la velocidad angular, esto es, $f_i = k\omega_i^2$. Notar que un motor sólo puede girar en una dirección fija, por lo cual la fuerza producida será siempre positiva (ver figura 9.9).

Algunas de sus características principales son que el motor delantero y el motor trasero del quadri-motor, rotan en sentido anti-horario, mientras que los otros dos motores rotan en el sentido de las manecillas del reloj, con lo que los efectos giroscópicos y los momentos aerodinámicos tienden a cancelarse en vuelo estacionario. La entrada de control principal o fuerza principal es la suma de cada fuerza producida por cada motor, esto es:

$$u = \sum_{i=1}^4 f_i$$

El momento de *pitch*⁴ es producido por la diferencia de $f_1 - f_3$, el momento *roll* es producido por $f_2 - f_4$, y el momento de *yaw* es la suma de $\tau_{M_1} + \tau_{M_2} + \tau_{M_3} + \tau_{M_4}$ (ver figura 9.10), donde τ_{M_i} es el momento de reacción del motor i (figura 9.9) (ver [22, 20, 21] para más detalles).

9.2.2. Plataforma experimental

La plataforma está constituida de un helicóptero con cuatro motores, modelo Draganflyer III de la empresa *rctoys* (<http://www.rctoys.com>), un radio control de la marca Futaba (72 Mhz), un PC pentium II y un sensor electromagnético llamado *polhemus* [27]. El sensor polhemus mide la posición (x, y, z) y la orientación (ψ, θ, ϕ) del helicóptero. Dicho sensor esta conectado al PC utilizando el puerto serie, vía protocolo de comunicación RS-232, ver figura 9.11. Este aparato de medición es un sensor que facilita una medida de todo el estado $(x, y, z, \psi, \theta, \phi)$.

El helicóptero lleva incorporado un sistema electrónico empotrado que posee tres giroscopios, cuatro controladores de velocidad PWM, un “switch”

⁴ En esta tesis se utilizará el nombre en inglés de los tres ángulos de Euler (ψ – yaw, θ – pitch, ϕ – roll)

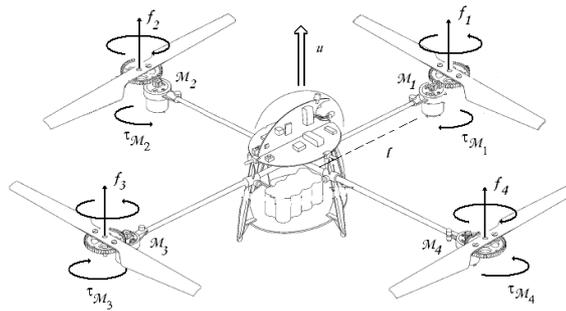


Figura 9.9. Esquema de fuerzas y pares de cada motor.

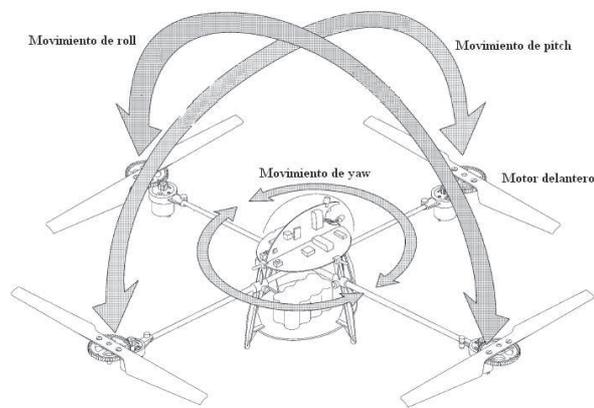


Figura 9.10. Torques de *pitch*, *yaw* y *roll*.

de seguridad y un microprocesador que mezcla las entradas de control para obtener una adecuada señal de entrada para cada motor. Señalar que el vehículo se controla modificando la velocidad de sus motores.

La conexión entre el PC y el radio control se hace utilizando tarjetas de adquisición de datos PC-Lab la marca ADVANTECH PCLab-818HG y PCLab-726. Los tres giroscopios que posee el helicóptero son utilizados como una retroalimentación en lazo cerrado para ayudar a estabilizar el helicóptero, sin estos giroscopios la estabilización del helicóptero de manera manual sería muy difícil, sin embargo únicamente con estos giroscopios no es suficiente para realizar vuelo estacionario de manera autónoma puesto que éstos sólo representan una retro-alimentación en la velocidad angular. Para realizar

vuelo estacionario se requiere un sensor de altura y una ley de control basada en el desplazamiento angular.

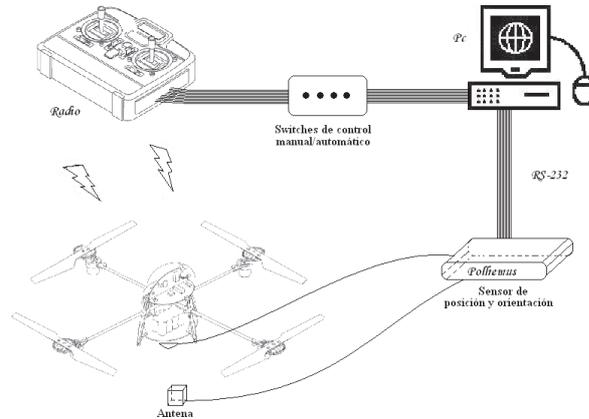


Figura 9.11. Plataforma experimental para estabilizar el quadri-motor. El sensor de posición/orientación está conectado a la PC utilizando la comunicación RS-232, el PC genera las entradas de control que son enviadas al helicóptero a través del radio.

9.2.3. Esquema de control

A partir del sistema empotrado introducido en la sección 9.1, se ha desarrollado un sistema empotrado de tiempo real para el control del prototipo descrito. El sistema de control desarrollado se representa en la figura 9.12, con el esquema de tareas mostrado en la figura 9.14. En la figura 9.13 se muestra la interacción del sistema con los dispositivos externos al mismo.

El control de los motores se realiza enviando las acciones de control a través de los convertidores digital/analógicos. El sistema recibe los comandos a través del teclado, enviando periódicamente el estado del sistema al “host” para la monitorización de las principales variables del sistema y el estado del mismo.

El sistema de control se compone de cinco tareas:

- **Control_Task:** Se trata de una tarea periódica que recibe información de la posición del helicóptero y calcula las acciones de control a enviar sobre los motores.

Esta tarea tiene asignado un periodo de 80ms. Las acciones de control se definen dentro del entorno de programación, como objetos protegidos compartidos. Las acciones de control no se envían directamente a los motores, sino que se pasan a través de una tarea “*Send_Actions*” con objeto de simular los retardos de actuación.

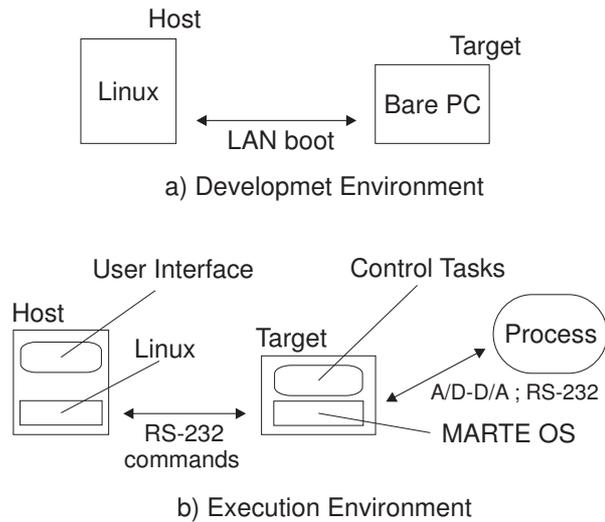


Figura 9.12. Entorno de desarrollo de MaRTE OS.

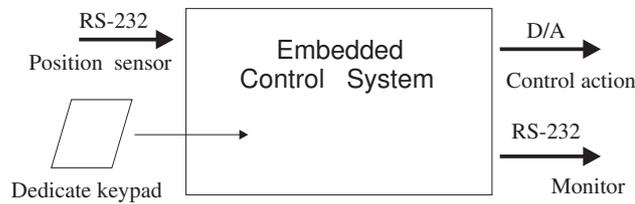


Figura 9.13. Iteración entre el sistema y los recursos externos.

- **Send_Actions:** Se trata de una tarea periódica encargada de enviar las acciones de control a los motores a través de los convertidores digitales/analógico. Esta tarea también es la encargada de gestionar los retardos de actuación, introducidos de forma ficticia, para la prueba de las leyes de predicción propuestas.
- **Monitor:** Tarea periódica encargada de monitorizar las variables del sistema. Para ello, extrae la información relevante de los objetos compartidos de control y las envía vía RS-232 a un PC auxiliar.
- **User_Commands_Task:** Esta tarea, interpreta unos comandos introducidos por el usuario a través del teclado y los ejecuta. Estos comandos, entre otros, comprenden, un cambio del periodo de muestreo, cambios de los parámetros de control, inicio y parada del programa, cambio de la referencia.
- **Control.Status:** Representa el objeto protegido, sobre el cual las tareas anteriores introducen o leen la información de las variables del proceso.

En resumen, hay tres tareas periódicas; Control_Task, Send_Actions y Monitor y una tarea esporádica; User_Commands (ver Tabla 9.1).

Para la implementación del sistema empotrado, aparte de los drives para el manejo de los puertos RS-232 y la tarjeta digital/analógica PCLab-812, se han tenido que implementar los drives sobre la tarjeta digital/analógica PCLab-726.

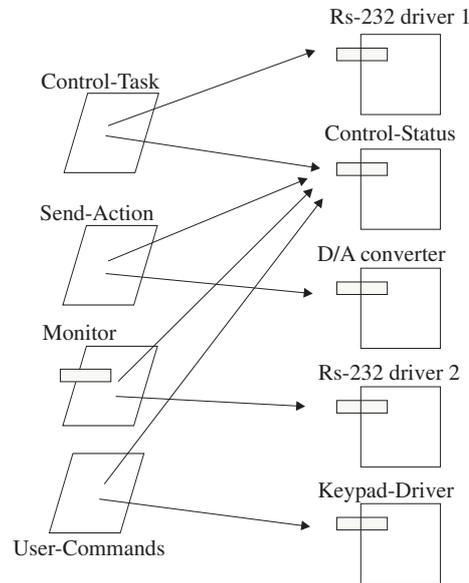


Figura 9.14. Arquitectura de la aplicación.

Task	Period	Priority	Offset
Control_Task	80ms	1	0
Send_Actions	80ms	2	10
Monitor	user defined	3	0

Cuadro 9.1. Tareas periódicas para la implementación de tiempo real.

Para una información más detallada tanto de los aspectos de control, como del desarrollo del sistema empotrado ver [37, 22].

9.3. Control de fuerza e impacto de un robot lineal

Las tareas de control de fuerza de robots consisten de dos fases: el movimiento libre y el movimiento restringido. Al conmutar de una a otra ocurre un cambio en la dinámica del sistema. Además se controlan diferentes magnitudes (velocidad o posición vs. fuerza), por lo que es lógico conmutar de regulador. Durante el movimiento restringido el sistema suele tener una respuesta mucho más rápida que durante el movimiento libre. Por esta razón puede ser conveniente utilizar diferentes períodos de muestreo para las dos fases. En este apartado se describe la plataforma experimental desarrollada a partir a partir del sistema empotrado introducido en la sección 9.1 y los resultados obtenidos para diferentes reguladores con cambio del período de muestreo.

9.3.1. Descripción de la plataforma

En la figura 9.15 se muestra el esquema de trabajo desarrollado. El sistema a controlar, está compuesto por un eje lineal (Plataforma Quanser) y un sensor de fuerza (Sensor de fuerza JR3).

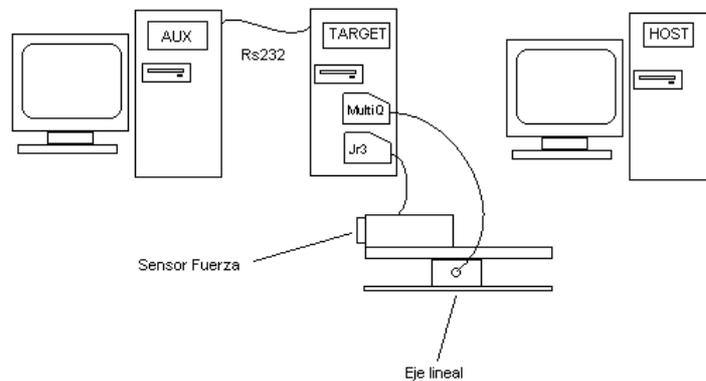


Figura 9.15. Esquema de trabajo.

- Plataforma Quanser: El eje lineal se desplaza mediante un motor de corriente continua que actúa gracias a una rueda dentada sobre un engranaje de cremallera. El motor se controla a través de la tensión generada por la tarjeta de adquisición de datos MultiQ. Para leer la posición relativa del eje, la plataforma lleva incorporado un encoder.
- Sensor de fuerza JR3: El sensor es un dispositivo de aluminio con componentes analógicos y digitales. En la hoja de metal donde se mide la fuerza, existen unas galgas extensiométricas dispuestas en forma de cruz de tal

manera que, midiendo la deformación de la hoja, se puede calcular la fuerza y el momento que actúa sobre ella. Esta representación analógica es convertida a digital por los elementos digitales del sensor, y enviada vía serie a un receptor electrónico DSP en una tarjeta PCI en el ordenador Target. Los datos que son mandados a la tarjeta son muestreados por el sensor a una frecuencia de 8 kHz.

En esta aplicación también se ha tenido que implementar los correspondientes drives para los siguientes elementos:

- Tarjeta de adquisición de datos de Quanser PCI MultiQ: Esta tarjeta es utilizada para obtener información del encoder y actuar sobre el motor de corriente continua. Tiene 16 entradas analógicas de 14 bits con rangos programables de ± 5 y ± 10 Voltios, 4 salidas analógicas de 12 bits con un rango de ± 10 V. y 6 entradas para encoders ópticos.
- DSP Based Interface System: Esta tarjeta convierte los datos digitalizados que son recibidos de las galgas extensiométricas del sensor en medidas digitales de fuerza y momento. La adquisición de datos desde el sensor se realiza a una velocidad de 8 kHz. En caso de querer obtener la señal filtrada digitalmente, la frecuencia baja a 500 Hz, reduciendo 1/4 por cada filtro.

9.3.2. Sistema de control

En numerosas aplicaciones los brazos robot entran en contacto físico con el entorno por lo que las características dinámicas del sistema cambian. En este caso los típicos métodos de control por posición/ velocidad pueden ser insuficientes para garantizar el comportamiento del robot.

Dado que los materiales con los que el robot suele entrar en contacto en las aplicaciones industriales suelen ser muy rígidos, la constante de tiempo puede variar en varios ordenes de magnitud entre el movimiento libre y el restringido.

El control de fuerza conlleva los siguientes problemas:

1. La típica tarea de control de fuerza consiste en: movimiento libre hasta el contacto entre el robot y la pieza, requiere control por posición o velocidad; movimiento restringido; fase de control de fuerza, comienza una vez el robot este en contacto con el entorno.
Como se ve, la tarea consiste en dos fases bien diferenciadas. Algunos autores proponen una tercera intermedia para el control del impacto. Una solución puede ser utilizar estrategias de control diferentes en cada una de las tres fases. En este caso se deben establecer criterios para pasar de una fase a otra. Otra solución podría ser encontrar una estrategia que funcione bien para los tres casos.
2. Los sensores de fuerza suelen ser susceptibles a ruido eléctrico debido a su gran sensibilidad. Esto conlleva problemas obvios de control debidos a la incertidumbre en la señal medida. Adicionalmente, hace prácticamente

imposible la implementación de una componente derivativa del regulador de fuerza.

- Los parámetros del proceso dependerán de las características geométricas y mecánicas del entorno, en el caso general éstas no son conocidas a priori. Esto significa que un diseño del regulador no es posible de antemano en muchos casos. Además las características mecánicas del entorno tienen un altísimo rango de variación.

Durante las tres últimas décadas se han desarrollado diferentes estrategias para el control de fuerza, teniendo cada una sus respectivas ventajas y desventajas [142, 143, 144].

Para la validación de la plataforma experimental se ha implementado la siguiente estrategia de control (ver [140, 141] para más detalles). En el movimiento libre se ha utilizado un regulador proporcional de velocidad con constante proporcional 0.00005, y un periodo de muestreo de 5 ms. La velocidad de referencia es de 20000 pulsos de encoder/periodo de muestreo, lo que equivale aproximadamente a 25 m/s.

Para el control de fuerza se utilizó el regulador (9.1) con los siguientes parámetros: $K_p=0.01$ y $K_v=0.0001$.

$$u = F_{ref} + k_p(F_{ref} - F_{real}) - k_v\dot{x} \quad (9.1)$$

La velocidad se estimó mediante la fórmula:

$$v = \frac{x - xz^{-1}}{T} \quad (9.2)$$

De esta forma se puede utilizar la misma formulación para diferentes periodos de muestreo T .

Para la validación de la plataforma se realizaron diferentes experimentos utilizando tres periodos de muestreo diferentes: 5 ms, 1 ms y 0,5 ms. Los resultados obtenidos se representan en las figuras 9.16, 9.17 y 9.18, respectivamente.

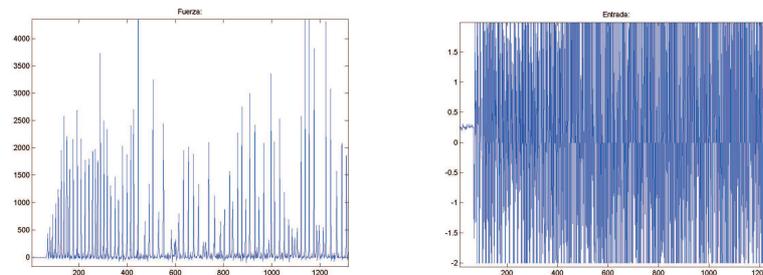


Figura 9.16. Resultados obtenidos para $T=5$ ms.

Para un periodo de muestreo de 5 ms, se aprecia que el sistema alcanza picos elevados de fuerza, pierde el contacto y se vuelve inestable. Notar que la acción de control se satura continuamente (9.16).

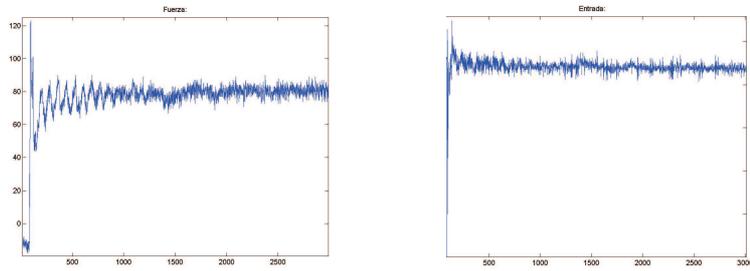


Figura 9.17. Resultados obtenidos para $T=1\text{ms}$.

Los resultados para el periodo de 1 ms y 0,5 ms, muestran que se reducen los picos de forma drástica, que se evitan las pérdidas de contacto y que es sistema es estable.

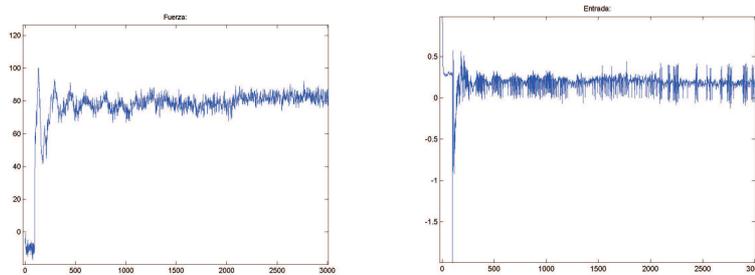


Figura 9.18. Resultados obtenidos para $T=0.5\text{ms}$.

10 Prototipo de laboratorio de un helicóptero de 4 rotores de *Quanser*®

Descripción del prototipo

Considérese el sistema “3D Hover” de *Quanser*® mostrado en la figura 10.1 [102].



Figura 10.1. 3D Hover de *Quanser*®.

El ángulo del “roll” se define como la rotación entorno al eje “X” (ver figura 10.2). Asumiendo que el “pitch” es cero, es posible obtener el siguiente modelo del comportamiento del momento del “roll”:

$$\ddot{r} = (F_r - F_l) \frac{l}{J_r}$$

donde J_r representa el momento de inercia del sistema entorno al eje del “roll”; l representa la distancia entre el eje del roll y cada uno de los motores (ver figura 10.2).

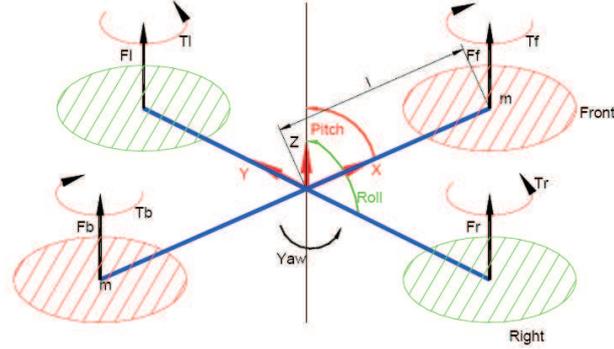


Figura 10.2. Simplified model of 3D Hover system[©].

El ángulo del “pitch” se define como la rotación entorno al eje “Y” (ver figura 10.2). Asumiendo que el “roll” es cero, es posible obtener el siguiente modelo:

$$\ddot{p} = (F_f - F_b) \frac{l}{J_p}$$

donde: J_p representa el momento de inercia del sistema entorno al eje del “roll”.

El ángulo del “yaw” se define como la rotación entorno al eje “Z”. El ángulo del “Yaw” es medido usando un encoder. El par entorno al eje del “Yaw” es la suma de los pares generado por todos los motores, es decir:

$$J_y \ddot{y} = \sum T = T_f + T_b + T_r + T_l \quad (10.1)$$

Si se define K_{tn} como la constante de proporcionalidad del par cuando se aplica un voltaje a uno de los motores de la derecha, y K_{tc} como la constante de proporcionalidad del par cuando se aplica un voltaje a uno de los motores de la izquierda es decir si se cumple $T_r = K_{Tn} V_r$ y $T_f = K_{Tc} V_f$ respectivamente, la expresión (10.1) se puede reescribir como:

$$\ddot{y} = \frac{K_{Tc}}{J_y} (V_f + V_b) + \frac{K_{Tn}}{J_y} (V_r + V_l)$$

Si se define K_t como la constante de proporcionalidad respecto al “yaw” cuando se aplica un voltaje en los motores del prototipo, está se define como $K_t = K_{Tc} = -K_{Tn}$. De forma similar, si se define K_{fn} como la constante de proporcionalidad cuando se aplica un voltaje a los motores “Front” y “Back”; y K_{fc} como la constante de proporcionalidad cuando se aplica un voltaje a los motores “Left” y “Right”, las ecuaciones anteriores se pueden agrupar

tal que es posible obtener el siguiente modelo lineal del comportamiento del prototipo:

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{p} \\ \ddot{p} \\ \dot{r} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ p \\ \dot{p} \\ r \\ \dot{r} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} V_f \\ V_b \\ V_r \\ V_l \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

donde :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_t}{J_y} & -\frac{K_t}{J_y} & \frac{K_t}{J_y} & \frac{K_t}{J_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{fn} \frac{l}{J_y} & -K_{fn} \frac{l}{J_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{fc} \frac{l}{J_y} & -K_{fc} \frac{l}{J_y} \end{pmatrix}$$

Notar que el ángulo del roll es independiente del resto de variables. Sustituyendo valores numéricos [102], se obtiene:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0978 & -0,0978 & 0,0978 & 0,0978 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,1176 & -2,1176 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1176 & -2,1176 \end{pmatrix}$$

Diseño del controlador

Las leyes de control utilizadas en todos los experimentos realizados para la validación de los esquemas de predicción aquí propuestos se han basado en el regulador LQR diseñado en [102] para el control de este sistema. Esta ley de control se representa por la siguiente matriz de realimentación del estado:

$$K = \begin{pmatrix} -0,1745 & -0,0585 & 0,3491 & 0,0602 & 0 & 0 \\ -0,1745 & -0,0585 & -0,3491 & -0,0602 & 0 & 0 \\ 0,1745 & 0,0585 & 0 & 0 & 0,3491 & 0,0602 \\ 0,1745 & 0,0585 & 0 & 0 & -0,3491 & -0,0602 \end{pmatrix}$$

Control del “roll”:

Dado que el ángulo del “roll” es independiente de las otras variables, es posible reescribir el sub-sistema correspondiente como:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2,1176 & -2,1176 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ V_l \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

De forma que la ley de control será:

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_l \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0,3491 & 0,0602 \\ -0,3491 & -0,0602 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \end{pmatrix}$$

La estimación de \dot{r} , se obtiene a partir de la siguiente función de transferencia [102]:

$$\hat{r}(s) = \frac{500s}{s + 500} r(s)$$

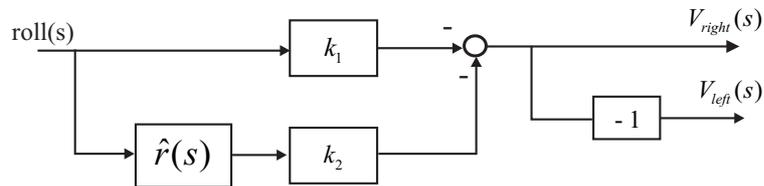


Figura 10.3. Esquema del regulador LQR.

Si se desea obtener una representación equivalente en representación entrada/salida de la ley de control LQR, previa manipulación algebraica (figura 10.3), se obtiene el esquema de la figura 10.4, donde:

$$PDF(s) = \frac{(500k_2 + k_1)s + 500k_1}{s + 500}$$

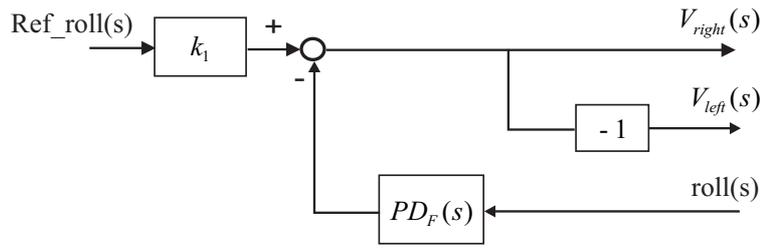


Figura 10.4. Esquema equivalente del regulador LQR expresado en representación entrada/salida.

Parte VI

Conclusions

11 Conclusions and future work

11.1. Conclusions

This thesis was carried out in the in the research group Hybrid Systems of the Department of Systems Engineering and Control at Technical University of Valencia and has been partially developed during two research stays at the *Heudiasyc Department at the Université de Technologie de Compiègne (France)*, and at the *Department of Automatic Control at the University of Lund (Sweden)*.

Given the existing limitations for the prediction and control of unstable systems subject to large delays in the actuation and/or measurement, it was aimed at as work for this thesis *“the development of robust predictors for the control of unstable systems with time delays was selected as the main aim of the presented research work, given the existing limitations for the prediction and control of unstable systems with time delays”*.

More concretely, the following objectives were defined:

- The development of Dead-Time Compensators (DTCs) for the control of stable or unstable systems, either minimum or non minimum phase, with delay
- The development of a robust prediction scheme for the implementation of the Finite Spectrum Assignment technique
- The experimental validation of the proposed algorithms

The main results achieved with respect to these objectives are detailed as follows, together with the chapters where they are developed:

- *Dead-Time Compensators (DTCs), for the control of stable and/or unstable systems, either minimum or non minimum phase (Chapters 4 y 5):*
 - **in Chapter 4** a simple DTC has been proposed for the control of systems with an integrator mode. It should be stressed that, although this prediction scheme does not improve significantly the performance obtained by previous proposals [90, 139], it has been experimentally validated with a real-time implementation in the control of a 4-rotor helicopter prototype.

- **in Chapter 5** a new methodology for the design of DTCs, for the control of stable or unstable systems with delay, either minimum or non minimum phase, has been developed. It should be noted that the prediction schemes proposed in this chapter improve those already existing in the literature both in performance and design simplicity. To remark also, that for the case of unstable systems, it should also be stressed that, the presented proposal is the only DTC that allows for a design of the prediction scheme without considering the delay, obtaining much better performances than previous algorithms.
- *The development of a robust prediction scheme for the implementation of the Finite Spectrum Assignment technique (Chapter 6):*
The implementation of a numerically stable algorithm for Finite Spectrum Assignment was still considered one of the big questions to solve [42, 105]. As already mentioned, the work presented in [137], together with the development in Chapter 6 of this thesis may be considered one of the first effective solutions. It should be stressed that, contrary to [137], where only a theoretical development with a simulation has been carried out, which turns out to be too complex for a computational implementation, the work here presented complements the developed theoretical study with a real control implementation on a mini-helicopter with 4 rotors in free flight.
- **in Chapter 6** a predictor-observer scheme is presented for the numerically stable implementation of FSA. This scheme is robustly stable face to modelling errors in all the parameters of the control system, as well as to variations in the sampling time. To determine the stability margin as a function of the modelled delay, a theorem has been developed resulting a set of LMIs whose fulfillment ensures the closed-loop stability.
- *Other techniques developed in this thesis for the control of unstable systems with delay in the actuation and/or measurement (Chapters 7 y 8):*
 - **in Chapter 7** a methodology has been developed which, with the help of linear transformations, allows to deal with this kind of systems leading to an internally stable structure.
 - **in Chapter 8** an additional technique is developed which, from the coefficients an input/output representation, allows to predict the output with an internally stable control structure.

These techniques are compared with the schemes proposed in previous chapters, showing to be less robust than the proposals in chapters 4, 5 and 6.
- *The experimental validation of the proposed algorithms (Chapters 9 y 10):*
Finally, in Chapters 9 and 10 the real-time platform and prototypes used for validation are presented. It should be noted that, up to our knowledge, so far no real implementation results of a prediction scheme or DTC for unstable systems has been reported.
- **in Chapter 9** a generic embedded system has been developed from the operating system MaRTE OS. It has allowed to build a real-time im-

plementation for the control of a 4-rotor mini-helicopter in stationary flight. By introducing artificially a set of actuation delays, the algorithm for prediction-observation in Chapter 6 has been implemented. The obtained results have shown the easiness and validity of the proposed algorithm for the control of this kind of systems.

- **in Chapter 10** a lab prototype of a 4-rotor helicopter from *Quanser*® is presented. With it, the prediction-observation algorithm in Chapter 6 and the DTCs proposed in Chapters 4 and 5 have been validated.

It is considered that the initial thesis objectives have been achieved satisfactorily, as it is demonstrated by the number of publications derived from it, which are detailed in the next section.

11.2. Publications derived from this thesis

The publications originated from the work in this thesis are listed as follows, with a reference to the thesis chapter they originate from:

- Chapter 4: a paper in *Automatica* (submitted) [34];
- Chapter 5: a paper in *Journal Process Control* [35]
- Chapter 6: a paper in *Automatica* [65]; two papers in the congress CDC [64, 36]; a paper in the international congress IFAC [77]; a paper in an IFAC Workshop on delayed systems [66], a chapter in a book with ISBN [67].
- Chapter 7: a paper in the Asian Control Conference ACC'06 [9]
- Chapter 8: a paper in the IFAC Symp. On Cost Oriented Control Applications [6].
- Chapter 9: a paper in the 27th IFAC/IEEE Workshop on Real Time [37], and a chapter in a book with ISBN [22].

As consequence of the development of this thesis, there have been collaborations with other research lines indirectly in contact with the control of delayed systems such as: 4-rotor helicopter control in stationary flight, force and impact control of a linear robot, and the development of interactive simulation tools. As result of these collaborations the following publications have originated:

- 4-rotor helicopter control in stationary flight: a paper in CDC'06 [20], and a paper in *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* [21].
- Force and impact control of a linear robot: a paper in the 16th IFAC World Congress [142], a paper in the 8th International IFAC Symposium on Robot Control [144] and 3 papers in less relevant congresses [140, 143, 141].
- Development of interactive simulation tools: a paper in the 7th IFAC Symposium on Advances in Control Education [44].

11.3. Future work

The work carried out in this thesis cannot be considered completely closed and there exist several open questions which may lead to future research lines:

- *Dead-Time Compensators for the control of stable and/or unstable systems, minimum or non minimum phase:* All the results presented in this thesis with respect to this, have addressed the SISO case. In Chapters 4 and 5, it has been proved that the proposed algorithms are equivalent to the original SP, thus, similarly to this one [95], it may be thought of the extension of the results here presented to the MIMO case. In this sense, a future work is the extension of the algorithms proposed in Chapter 4 and 5 to the multivariable case.
- *Development of a robust prediction scheme for the implementation of the Finite Spectrum Assignment technique:*
 Similarly to the previous case, the development of this prediction scheme solves satisfactorily the SISO case and the MIMO case when the delay is the same in all the input/output channels. However, it still has limitations in the MIMO case when the system has delays in the states or it is subjected to different actuation and/or measurement delays.
 In this sense, the solution presented in this thesis can be considered a partial solution when there are different actuation delays. The adopted solution consists on the calculus of the minimum common multiple of these delays, extending the state and applying the prediction algorithm to the extended model. As future work, it would be desirable the obtain a prediction-control structure able to deal with different delays in the actuation and/or measurement, and states.
- *Other techniques:* In this thesis other methodologies have been developed which, using linear transformations or the coefficients of an input/output representation allow to predict the output with an internally stable control structure. The comparative study carried out in this thesis with respect to the algorithms proposed in chapters 4, 5 and 6, shows that the latter are more robust and allow longer delays. However, as in the case of the prediction scheme from coefficients of an input/output representation, these techniques may be very useful for particular cases. An example is the predictor (PES) for the treatment of delays in systems with scarce measurements. In this sense, a deeper study of these techniques would be interesting, as well as the development of other similar techniques.

Parte VII

Apéndices

A Pruebas de teoremas y lemas

Prueba del Teorema 6.3.1:

Si se realizan las equivalencias ($M \doteq A - BK$), ($A_1 \doteq BKA^h$) y ($A_2 \doteq -BKA^h$), la expresión del sistema en bucle cerrado (ecuación 6.93), también se puede representar como:

$$x_{k+1} = Mx_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d} \quad (\text{A.1})$$

Comentario A.0.1 La prueba de este teorema se ha planteado como el caso general de análisis de estabilidad de un sistema sometido a dos retardos. Si embargo dada la particularidad del sistema en estudio, donde $A_2 \equiv -A_1$, y con objeto de simplificar la notación, cuando el planteamiento general queda suficientemente claro, se hará uso de esta equivalencia.

Para la prueba del Teorema 6.3.1, se hace uso de la desigualdad $-2a^T b \leq \inf_{X>0} \{a^T X a + b^T X^{-1} b\}$ la cual determina una cota superior del producto de dos vectores [98]. Haciendo uso de esta desigualdad, se establece una serie de Lemas [98, 80] para el análisis de la estabilidad de un sistema continuo en función del retardo “Delay-Dependent Stability”. Siguiendo este procedimiento, y para sistemas discretos, en [132], se establece el siguiente Lema.

Lema A.0.1. *Dado dos vectores $a(\cdot) \in \mathbb{R}_a^n$, $b(\cdot) \in \mathbb{R}_b^n$, y dada una matriz tal que $\mathcal{N}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_a \times n_b}$. Para cualquier matriz $X \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $Y \in \mathbb{R}^{n_a \times n_b}$ y $Z \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$, la siguiente desigualdad se cumple:*

$$-2 \sum_j a(j)^T \mathcal{N} b(j) \leq \sum_j \begin{bmatrix} a(j) \\ b(j) \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} X & Y - \mathcal{N} \\ Y^T - \mathcal{N}^T & Z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a(j) \\ b(j) \end{bmatrix}$$

Sujeto a la siguiente restricción:

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{pmatrix} \geq 0$$

O lo que es lo mismo, si se define $a(j) \doteq x_k$, lo anterior también se puede representar como:

$$-2x_k^T \mathcal{N} \sum_j^k b(j) \leq \sum_j^k [x_k^T X x_k + b(j)^T Z b(j) + x_k^T (Y - \mathcal{N}) b(j) + b(j)^T (Y^T - \mathcal{N}^T) x_k]$$

Sujeto igualmente a la misma restricción.

Siguiendo el mismo procedimiento que en [132], si se definen las siguientes relaciones:

$$x_{k-h} = \left(x_k - \sum_{j=k-h+1}^k [x(j) - x(j-1)] \right) \quad (\text{A.2})$$

$$x_{k-d} = \left(x_k - \sum_{j=k-d+1}^k [x(j) - x(j-1)] \right) \quad (\text{A.3})$$

La expresión (6.96) o (A.1) también se puede representar como:

$$x_{k+1} = M x_k - A_1 \sum_{j=k-h+1}^k [x(j) - x(j-1)] - A_2 \sum_{j=k-d+1}^k [x(j) - x(j-1)] \quad (\text{A.4})$$

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov, $V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k)$, donde:

$$\begin{aligned} V_1(k) &= x_k^T P x_k \\ V_2(k) &= \sum_{\beta=-h}^{-1} \sum_{j=k+\beta+1}^k [x(j) - x(j-1)]^T Z_1 [x(j) - x(j-1)] \\ &\quad + \sum_{\beta=-d}^{-1} \sum_{j=k+\beta+1}^k [x(j) - x(j-1)]^T Z_2 [x(j) - x(j-1)] \\ V_3(k) &= \sum_{j=k-h}^{k-1} x(j)^T Q_1 x(j) + \sum_{j=k-d}^{k-1} x(j)^T Q_2 x(j) \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones, el sistema (A.1) o equivalentemente el sistema en bucle cerrado expresado por (6.93) o (6.96), será asintóticamente estable si se cumple que:

$$\Delta V(k) = \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) < 0$$

■ **Cálculo de la expresión $\Delta V(k)$.**

Si se sustituye la expresión (A.4) en $V_1(k+1)$, se obtiene:

$$V_1(k+1) = \left(Mx_k - A_1 \sum_{j=k-h+1}^k b(j) - A_2 \sum_{j=k-d+1}^k b(j) \right)^T \\ P \left(Mx_k - A_1 \sum_{j=k-h+1}^k b(j) - A_2 \sum_{j=k-d+1}^k b(j) \right)$$

donde $b(j) = x(j) - x(j-1)$.

Haciendo uso de las siguientes equivalencias:

- (1)

$$\sum_{j=k-h+1}^k b(j) = [x_k - x_{k-h}] \quad (\text{A.5})$$

- (2)

$$\sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T A_2^T P A_2 b(j) = [x_k - x_{k-d}]^T A_2^T P A_2 [x_k - x_{k-d}] \quad (\text{A.6})$$

La expresión $V_1(k+1)$ también se puede expresar como:

$$V_1(k+1) = x_k^T M^T P M x_k - 2x_k^T M^T P A_1 \sum_{j=k-h+1}^k b(j) \\ - 2x_k^T M^T P A_2 \sum_{j=k-d+1}^k b(j) + (*) \quad (\text{A.7})$$

donde el término (*) es:

$$(*) = [x_k - x_{k-h}]^T A_1^T P A_2 [x_k - x_{k-d}] + [x_k - x_{k-d}]^T A_2^T P A_1 [x_k - x_{k-h}] \\ + [x_k - x_{k-h}]^T A_1^T P A_1 [x_k - x_{k-h}] + [x_k - x_{k-d}]^T A_2^T P A_2 [x_k - x_{k-d}]$$

Notar que dado que $A_1 = -A_2$ y $A_1^T = -A_2^T$. Lo anterior también se puede simplificar como:

$$(*) = 2x_{k-h}^T A_1^T P A_2 x_{k-d} + x_{k-h}^T A_1^T P A_1 x_{k-h} + x_{k-d}^T A_2^T P A_2 x_{k-d} \quad (\text{A.8})$$

Si se define $\mathcal{N}_1 \doteq M^T P A_1$ y $\mathcal{N}_2 \doteq M^T P A_2$, la expresión (A.7) es:

$$V_1(k+1) = x_k^T M^T P M x_k - 2x_k^T \mathcal{N}_1 \sum_{j=k-h+1}^k b(j) + (*) \\ - 2x_k^T \mathcal{N}_2 \sum_{j=k-d+1}^k b(j) \quad (\text{A.9})$$

Y aplicando la desigualdad (A.2), establecida en el Lema A.0.1 a la expresión (A.9) también se cumplirá que:

$$\begin{aligned}
V_1(k+1) &\leq x_k^T M^T P M x_k + \sum_{j=k-h+1}^k x_k^T X_1 x_k + \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) \\
&+ \sum_{j=k-h+1}^k x_k^T (Y_1 - \mathcal{N}_1) b(j) + \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T (Y_1^T - \mathcal{N}_1^T) x_k \\
&+ \sum_{j=k-d+1}^k x_k^T X_2 x_k + \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j) + \sum_{j=k-d+1}^k x_k^T (Y_2 - \mathcal{N}_2) b(j) \\
&+ \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T (Y_2^T - \mathcal{N}_2^T) x_k + (*)
\end{aligned}$$

Notar que:

$$\sum_{j=k-h+1}^k x_k^T X_1 x_k = h x_k^T X_1 x_k, \quad \forall k > h$$

De tal forma que, haciendo uso de las equivalencias (A.5) y (A.6), lo anterior también se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
V_1(k+1) &\leq x_k^T M^T P M x_k + h x_k^T X_1 x_k + d x_k^T X_2 x_k \\
&+ \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) + \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j) \\
&+ x_k^T (Y_1 - \mathcal{N}_1) [x_k - x_{k-h}] + [x_k - x_{k-h}]^T (Y_1^T - \mathcal{N}_1^T) x_k \\
&+ x_k^T (Y_2 - \mathcal{N}_2) [x_k - x_{k-d}] + [x_k - x_{k-d}]^T (Y_2^T - \mathcal{N}_2^T) x_k \\
&+ (*)
\end{aligned}$$

Agrupando por términos, y haciendo uso de la equivalencia $\mathcal{N}_1 = -\mathcal{N}_2$, la expresión anterior es:

$$\begin{aligned}
V_1(k+1) &\leq x_k^T (M^T P M + h X_1 + d X_2 + Y_1 + Y_1^T + Y_2 + Y_2^T) x_k \\
&+ \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) + \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j) \\
&- x_k^T (Y_1 - \mathcal{N}_1) x_{k-h} - x_{k-h}^T (Y_1^T - \mathcal{N}_1^T) x_k \\
&- x_k^T (Y_2 - \mathcal{N}_2) x_{k-d} - x_{k-d}^T (Y_2^T - \mathcal{N}_2^T) x_k \\
&+ (*)
\end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión (A.8) en la anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}
V_1(k+1) &\leq x_k^T(M^T P M + hX_1 + dX_2 + Y_1 + Y_1^T + Y_2 + Y_2^T)x_k \\
&\quad - x_k^T(Y_1 - \mathcal{N}_1)x_{k-h} - x_{k-h}^T(Y_1^T - \mathcal{N}_1^T)x_k \\
&\quad - x_k^T(Y_2 - \mathcal{N}_2)x_{k-d} - x_{k-d}^T(Y_2^T - \mathcal{N}_2^T)x_k \\
&\quad + 2x_{k-h}^T A_1^T P A_2 x_{k-d} \\
&\quad + x_{k-h}^T A_1^T P A_1 x_{k-h} + x_{k-d}^T A_2^T P A_2 x_{k-d} \\
&\quad + \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) + \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j)
\end{aligned}$$

Por último, dado que $\Delta V_1(k) = V_1(k+1) - V(k)$, si se sustituye adecuadamente, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\Delta V_1(k) &\leq x_k^T(M^T P M - P + hX_1 + dX_2 + Y_1 + Y_1^T + Y_2 + Y_2^T)x_k \\
&\quad - 2x_k^T(Y_1 - \mathcal{N}_1)x_{k-h} \\
&\quad - 2x_k^T(Y_2 - \mathcal{N}_2)x_{k-d} \\
&\quad + 2x_{k-h}^T A_1^T P A_2 x_{k-d} \\
&\quad + x_{k-h}^T A_1^T P A_1 x_{k-h} + x_{k-d}^T A_2^T P A_2 x_{k-d} \\
&\quad + \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) + \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j)
\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable $\mathcal{N}_1 = M^T P A_1$, $\mathcal{N}_2 = M^T P A_2$, se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned}
\Delta V_1(k) &\leq x_k^T(M^T P M - P + hX_1 + dX_2 + Y_1 + Y_1^T + Y_2 + Y_2^T)x_k \\
&\quad - 2x_k^T(Y_1 - M^T P A_1)x_{k-h} \\
&\quad - 2x_k^T(Y_2 - M^T P A_2)x_{k-d} \\
&\quad + 2x_{k-h}^T A_1^T P A_2 x_{k-d} \\
&\quad + x_{k-h}^T A_1^T P A_1 x_{k-h} + x_{k-d}^T A_2^T P A_2 x_{k-d} \\
&\quad + \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) + \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j)
\end{aligned}$$

■ **Cálculo de la expresión $\Delta V_2(k)$.**

A partir de la correspondiente expresión en la función candidata de Luapunov, se obtiene de forma inmediata que:

$$\begin{aligned}
\Delta V_2(k) &= h[x_{k+1} - x_k]^T Z_1 [x_{k+1} - x_k] - \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) \\
&\quad + d[x_{k+1} - x_k]^T Z_2 [x_{k+1} - x_k] - \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j)
\end{aligned}$$

Sustituyendo $x_{k+1} = Mx_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d}$ en la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta V_2(k) &= h[Mx_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d} - x_k]^T Z_1[Mx_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d} - x_k] \\ &\quad + d[Mx_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d} - x_k]^T Z_2[Mx_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d} - x_k] \\ &\quad - \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) - \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j)\end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}\Delta V_2(k) &= h[(M-I)x_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d}]^T Z_1[(M-I)x_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d}] \\ &\quad + d[(M-I)x_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d}]^T Z_2[(M-I)x_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d}] \\ &\quad - \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) - \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j)\end{aligned}$$

Para simplificar la notación en el desarrollo, realizando la equivalencia $\Gamma \equiv (M-I)$, lo anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\Delta V_2(k) &= [\Gamma x_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d}]^T h Z_1[\Gamma x_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d}] \\ &\quad + [\Gamma x_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d}]^T d Z_2[\Gamma x_k + A_1x_{k-h} + A_2x_{k-d}] \\ &\quad - \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) - \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j)\end{aligned}$$

Agrupando por términos:

$$\begin{aligned}\Delta V_2(k) &= x_k^T (\Gamma^T h Z_1 \Gamma + \Gamma^T d Z_2 \Gamma) x_k + 2x_k^T (\Gamma^T h Z_1 A_1 + \Gamma^T d Z_2 A_1) x_{k-h} \\ &\quad + 2x_k (\Gamma^T h Z_1 A_2 + \Gamma^T d Z_2 A_2) x_{k-d} + 2x_{k-h} (A_1^T h Z_1 A_2 + A_1^T d Z_2 A_2) x_{k-d} \\ &\quad + x_{k-h}^T (A_1^T h Z_1 A_1 + A_1^T d Z_2 A_1) x_{k-h} + x_{k-d} (A_2^T h Z_1 A_2 + A_2^T d Z_2 A_2) x_{k-d} \\ &\quad - \sum_{j=k-h+1}^k b(j)^T Z_1 b(j) - \sum_{j=k-d+1}^k b(j)^T Z_2 b(j)\end{aligned}$$

- **Cálculo de la expresión de $\Delta V_3(k)$:** Ésta se obtiene de forma inmediata tal que:

$$\Delta V_3(k) = x_k^T Q_1 x_k - x_{k-h}^T Q_1 x_{k-h} + x_k^T Q_2 x_k - x_{k-d}^T Q_2 x_{k-d}$$

Reescribiendo la expresión de $\Delta V(k)$ ¹, se obtiene:

$$\Delta V(k) = \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) \leq \bar{x}^T A_{\Delta V} \bar{x} < 0$$

donde $\bar{x}^T = [x_k^T \quad x_{k-h}^T \quad x_{k-d}^T]$,

¹ Notar que $A_1 = -A_2$

$$A_{\Delta V} = \begin{pmatrix} (1, 1) + M^T P M + \Gamma^T h Z_1 \Gamma + \Gamma^T d Z_2 \Gamma & -(Y_1 - M^T P A_1) + \Gamma^T h Z_1 A_1 + \Gamma^T d Z_2 A_1 \\ -(Y_1 - M^T P A_1)^T + (\Gamma^T h Z_1 A_1 + \Gamma^T d Z_2 A_1)^T & A_1^T P A_1 + A_1^T h Z_1 A_1 + A_1^T d Z_2 A_1 - Q_1 \\ -(Y_2 + M^T P A_1)^T - (A_1^T h Z_1 A_1 + A_1^T d Z_2 A_1)^T & -A_1^T P A_1 - (A_1^T h Z_1 A_1 + A_1^T d Z_2 A_1)^T \\ - (Y_2 + M^T P A_1) - (\Gamma^T h Z_1 A_1 + \Gamma^T d Z_2 A_1) & \\ -A_1^T P A_1 - (A_1^T h Z_1 A_1 + A_1^T d Z_2 A_1) & \\ A_1^T P A_1 + (A_1^T h Z_1 A_1 + A_1^T d Z_2 A_1) - Q_2 & \end{pmatrix}$$

$$(1, 1) = (-P + h X_1 + d X_2 + Y_1 + Y_1^T + Y_2 + Y_2^T + Q_1 + Q_2)$$

Reescribiendo lo anterior con objeto de que sea posible aplicar el complemento de Surch, se tiene que:

$$A_{\Delta V} = \begin{pmatrix} (1, 1) & -Y_1 & -Y_2 \\ -Y_1^T & -Q_1 & 0 \\ -Y_2^T & 0 & -Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M^T P & h \Gamma^T Z_1 & d \Gamma^T Z_2 \\ A_1^T P & h A_1^T Z_1 & d A_1^T Z_2 \\ -A_1^T P & -h A_1^T Z_1 & -d A_1^T Z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (P)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (h Z_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (d Z_2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P M & P A_1 & -P A_1 \\ h Z_1^T \Gamma & h Z_1^T A_1 & -h Z_1^T A_1 \\ d Z_2^T \Gamma & d Z_2^T A_1 & -d Z_2^T A_1 \end{pmatrix}$$

Y directamente aplicando el complemento de Schur sobre esta última expresión, se obtiene (6.97), que junto a la restricción del Lema A.0.1 prueban el teorema establecido.

B Funciones de sensibilidad de los DTCs propuestos

Funciones de sensibilidad del esquema de la figura 5.2

Función de sensibilidad entre la salida y la referencia: Dado el sistema:

$$y = Gz^{-d}u \quad (\text{B.1})$$

A partir del esquema de la figura 5.2, es posible obtener la siguiente expresión:

$$u = Kc\Phi z^{-d}u - KC\Phi u + KFz^{-d}y - KFy - KF_2y + Kr$$

Agrupando términos:

$$u (1 - Kc\Phi z^{-d} + Kc\Phi) = [KFz^{-d} - KFy - K] y + Kr$$

Para facilitar la manipulación, se definen las siguientes equivalencias:

$$(*) := (1 - Kc\Phi z^{-d} + Kc\Phi) \quad (\text{B.2})$$

$$[\Delta] := [KFz^{-d} - KFy - K] \quad (\text{B.3})$$

Despejando el término que acompaña a la acción de control,

$$u = (*)^{-1} [\Delta] y + (*)^{-1} Kr,$$

y sustituyendo sobre la primera ecuación, se obtiene:

$$y = Gz^{-d} (*)^{-1} [\Delta] y + (*)^{-1} KGz^{-d}r \quad (\text{B.4})$$

Agrupando términos en y.

$$(*)y - Gz^{-d} [\Delta] y = KGz^{-d}r$$

Desarrollando la parte izquierda de esta expresión, haciendo uso del Lema 5.2.1, se obtiene:

$$\begin{aligned} (*)y - Gz^{-d} [\Delta] y &= y(1 - KGz^{-d} + KG^*z^{-2d} + KG - KG^*z^{-d} \\ &\quad - KG^*z^{-2d} + KG^*z^{-d} + KGz^{-d}) \\ &= (1 + KG)y \end{aligned}$$

Es decir, se obtiene la equivalencia:

$$(*)y - Gz^{-d}[\Delta]y = (1 + KG)y \quad (\text{B.5})$$

Retomando la expresión (B.4), y sustituyendo la equivalencia (B.5), se tiene que:

$$y(1 + KG) = KGz^{-d}r$$

resultando en la función de sensibilidad:

$$S_{yr} = \frac{KGz^{-d}}{(1 + KG)}$$

Función de sensibilidad entre la salida y la perturbación: La expresión de la salida en función de la perturbación y de la acción de control es:

$$y = Gz^{-d}d_i + Gz^{-d}u$$

El esquema de la figura 5.2 se obtiene:

$$u = Kc\Phi z^{-d}u - Kc\Phi u + KFz^{-d}y - KFy - Ky$$

agrupando términos:

$$\begin{aligned} u &= (1 - Kc\Phi z^{-d} + Kc\Phi)^{-1} [KFz^{-d} - KF - K] y \\ u &= (*)^{-1} [\Delta] y \end{aligned}$$

operando adecuadamente:

$$\begin{aligned} y &= Gz^{-d}d_i + Gz^{-d}(*)^{-1} [\Delta] y \\ y(*) &= (*)Gz^{-d}d_i + Gz^{-d} [\Delta] y \\ y(*) - Gz^{-d} [\Delta] y &= (*)Gz^{-d}d_i \end{aligned}$$

Sobre esta última expresión, se sustituye la equivalencia B.5,

$$y(1 + KG) = (*)Gz^{-d}d_i$$

De tal forma que, sustituyendo la equivalencia de (*), se obtiene la función de transferencia entre la salida del proceso y la perturbación de entrada al mismo:

$$y = (1 - Kc\Phi z^{-d} + Kc\Phi) \frac{Gz^{-d}}{(1 + KG)} d_i$$

Función de sensibilidad entre la salida y el ruido de medida : Operando de forma similar que en los puntos anteriores, se tiene que:

$$u = (Kc\Phi z^{-d} - Kc\Phi)u + (KFz^{-d} - KF - K)(y + n)$$

$$\begin{aligned} u(1 - Kc\Phi z^{-d} + Kc\Phi) &= (KFz^{-d} - KF - K)(y + n) \\ u &= (*)^{-1}[\Delta]y + (*)^{-1}[\Delta]n \end{aligned}$$

Sustituyendo adecuadamente esta última expresión sobre (B.1), y haciendo uso de la equivalencia (B.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= Gz^{-d} (*)^{-1}[\Delta]y + Gz^{-d} (*)^{-1}[\Delta]n \\ (*)y - Gz^{-d}[\Delta]y &= Gz^{-d}[\Delta]n \\ (1 + KG)y &= Gz^{-d}[\Delta]n \end{aligned}$$

Dando como resultado la función de sensibilidad entre la salida y el ruido de medida:

$$y = \frac{z^{-d}(KG^* z^{-d} - KG^* - KG)}{(1 + KG)}n$$

Función de sensibilidad entre la acción de control y la referencia:

El cálculo de la acción de control, en función de la acción de control, la salida y la referencia es:

$$u = Kc\Phi z^{-d}u - Kc\Phi u + KFz^{-d}y - KFy - Ky + Kr$$

Agrupando términos, retomando las definiciones (B.2- B.3), y despejando el término que acompaña a la u, se obtiene:

$$u = (*)^{-1} [\Delta] y + (*)^{-1} Kr$$

Sustituyendo en (B.1):

$$u = (*)^{-1} [\Delta] Gz^{-d}u + (*)^{-1} Kr$$

Agrupando términos en u, y haciendo uso de la equivalencia (B.5), se obtiene como resultado:

$$u = \frac{K}{(1 + KG)}r$$

Función de sensibilidad entre la acción de control y la perturbación:

Dada la expresión que relaciona la salida con la perturbación y la acción de control:

$$y = Gz^{-d}d_i + Gz^{-d}u$$

Y operando igual que en casos precedentes, se tiene que:

$$u = Kc\Phi z^{-d}u - Kc\Phi u + KFz^{-d}y - KFy - Ky$$

$$u = (1 - Kc\Phi z^{-d} + Kc\Phi)^{-1} [KFz^{-d} - KFy - K] y$$

$$u = (*)^{-1} [\Delta] (Gz^{-d}d_i + Gz^{-d}u)$$

$$(*)u - [\Delta] Gz^{-d}u = [\Delta] Gz^{-d}d_i$$

$$u = \frac{[KFz^{-d} - KFy - K] Gz^{-d}}{(1 + KG)} d_i$$

Función de sensibilidad entre la acción de control y el ruido de medida: Operando como en casos precedentes, se obtiene:

$$u = (Kc\Phi z^{-d} - Kc\Phi)u + (KFz^{-d} - KF - K)(y + n)$$

$$u = \frac{[KFz^{-d} - KFy - K]}{(1 + KG)} n$$

Funciones de Sensibilidad del esquema de la figura 5.3

Función de sensibilidad entre la salida y la referencia: A partir del esquema de la figura 5.3, operando de forma similar que en la sección anterior se obtiene:

$$u = KF_2c\Phi z^{-d}u - Kc\Phi u + KF_2Fz^{-d}y - KFy - KF_2y + Kr$$

Agrupando términos,

$$u (1 - KF_2c\Phi z^{-d} + Kc\Phi) = [KF_2Fz^{-d} - KFy - KF_2] y + Kr$$

Para simplificar cálculos se define:

$$(*) := (1 - KF_2c\Phi z^{-d} + Kc\Phi)$$

$$[\Delta] := [KF_2Fz^{-d} - KFy - KF_2]$$

Despejando el término que acompaña a la acción de control, sustituyendo sobre la primera ecuación, y agrupando términos:

$$(*)y - Gz^{-d} [\Delta] y = KGz^{-d}r$$

Desarrollando esta última expresión, y haciendo uso del Lema 5.2.1, $c\Phi = G - G^*z^{-d}$, se obtiene:

$$(*)y - Gz^{-d} [\Delta] y = y(1 - KF_2Gz^{-d} + KF_2G^*z^{-2d} + KG - KG^*z^{-d} - KF_2G^*z^{-2d} + KG^*z^{-d} + KF_2Gz^{-d}) = (1 + KG)y$$

De tal forma, que al igual que en la sección anterior también se puede definir la siguiente equivalencia:

$$(*)y - Gz^{-d} [\Delta] y = (1 + KG)y$$

Resultando en la función de sensibilidad:

$$S_{yr} = \frac{KGz^{-d}}{(1 + KG)}$$

Función de sensibilidad entre la salida y la perturbación: La expresión de la salida en función de la perturbación y de la acción de control es:

$$y = Gz^{-d}d_i + Gz^{-d}u$$

Se busca obtener una expresión de la acción de control, función de la perturbación y de la salida:

$$u = Kc\Phi z^{-d}u - Kc\Phi u + KFz^{-d}y - KFy - Ky$$

agrupando términos:

$$u = (1 - Kc\Phi z^{-d} + Kc\Phi)^{-1} [KFz^{-d} - KF - K] y$$

$$u = (*)^{-1} [\Delta] y$$

operando adecuadamente:

$$y = Gz^{-d}d_i + Gz^{-d} (*)^{-1} [\Delta] y$$

$$y(*) = (*)Gz^{-d}d_i + Gz^{-d} [\Delta] y$$

$$y(*) - Gz^{-d} [\Delta] y = (*)Gz^{-d}d_i$$

agrupando términos:

$$y(1 - Kc\Phi z^{-d} + Kc\Phi) = (*)Gz^{-d}d_i + [\Delta]y$$

y desarrollando algebraicamente:

$$\begin{aligned} & y(1 - KGz^{-d} + KG^*z^{-2d} + KG - KG^*z^{-d} \\ & - KG^*z^{-2d} + KG^*z^{-d} + KGz^{-d}) \\ & = (1 + KG)y \end{aligned}$$

Se obtiene la función de transferencia entre la salida del proceso y la perturbación de entrada al mismo:

$$y = (1 - Kc\Phi z^{-d} + Kc\Phi) \frac{Gz^{-d}}{(1 + KG)} d_i$$

Función de sensibilidad entre la salida y el ruido de medida : Operando de forma similar que en los puntos anteriores, se tiene que:

$$\begin{aligned} u &= (KF_2c\Phi z^{-d} - Kc\Phi)u + (KF_2Fz^{-d} - KF - KF_2)(y + n) \\ u &= (*)^{-1}[\Delta]y + (*)^{-1}[\Delta]n \end{aligned}$$

Operando adecuadamente:

$$\begin{aligned} y &= Gz^{-d} (*)^{-1}[\Delta]y + Gz^{-d} (*)^{-1}[\Delta]n \\ (*)y - Gz^{-d}[\Delta]y &= Gz^{-d}[\Delta]n \\ (1 + KG)y &= Gz^{-d}[\Delta]n \end{aligned}$$

Obteniendo:

$$y = \frac{z^{-d}(KF_2G^*z^{-d} - KG^* - KF_2G)}{(1 + KG)} n$$

Función de sensibilidad entre la acción de control y la referencia: Operando de forma similar que en puntos anteriores, y a partir del esquema de la figura se obtiene:

$$u = KF_2c\Phi z^{-d}u - Kc\Phi u + KF_2Fz^{-d}y - KFy - KF_2y + Kr$$

Agrupando términos, y despejando el término que acompaña a la u.

$$u = (*)^{-1}[\Delta]y + (*)^{-1}Kr$$

Y sustituyendo en (B.1), se obtiene:

$$u = (*)^{-1} [\Delta] Gz^{-d}u + (*)^{-1}Kr$$

Agrupando términos en u,

$$(*)u - [\Delta] Gz^{-d}u = Kr$$

Haciendo uso de la equivalencia (B.5), y operando adecuadamente se obtiene:

$$u = \frac{K}{(1 + KG)}r$$

Función de sensibilidad entre la acción de control y la perturbación:

Dada la expresión que relaciona la salida con la perturbación y la acción de control:

$$y = Gz^{-d}d_i + Gz^{-d}u$$

Y operando igual que en casos precedentes, se tiene que:

$$u = Kc\Phi z^{-d}u - Kc\Phi u + KFz^{-d}y - KFy - Ky$$

$$u = (1 - Kc\Phi z^{-d} + Kc\Phi)^{-1} [KFz^{-d} - KFy - K] y$$

$$u = (*)^{-1} [\Delta] (Gz^{-d}d_i + Gz^{-d}u)$$

$$(*)u = [\Delta] Gz^{-d}d_i + [\Delta] Gz^{-d}u$$

$$(*)u - [\Delta] Gz^{-d}u = [\Delta] Gz^{-d}d_i$$

$$u = \frac{[KF_2Fz^{-d} - KFy - KF_2] Gz^{-d}}{(1 + KG)}d_i$$

Función de sensibilidad entre la acción de control y el ruido de medida: Operando como en casos precedentes, se obtiene:

$$u = (KF_2C\Phi z^{-d} - KC\Phi)u + (KF_2Fz^{-d} - KF - KF_2)(y + n)$$

$$u = \frac{[KF_2Fz^{-d} - KFy - KF_2]}{(1 + KG)}n$$

Notación y acrónimos

\mathbb{R}	conjunto de números reales
\mathbb{C}	conjunto de números complejos
\mathbb{Z}	conjunto de números enteros
\mathbb{Z}^+	conjunto de números enteros positivos
\mathbb{C}_+	semiplano complejo con parte real positiva
\mathbb{C}_-	semiplano complejo con parte real negativa
$\bar{\mathbb{D}}$	circulo unidad cerrado
\mathbb{D}	circulo unidad abierto $\{z \mid z \in \mathbb{C}, z < 1\}$
∂X	frontera del conjunto X
$j\mathbb{R}$	eje imaginario
s, z	variables complejas
z^{-1}	operador retardo
t	tiempo
T_r	constante de tiempo dominante en bucle cerrado
T	periodo de muestreo
$X^{n \times m}$	matriz de dimensión $n \times m$
X^T	transpuesta de una matriz
X^{-1}	inversa de una matriz
$X > 0$	matriz definida positiva
$\ \cdot \ _\infty$	norma infinito
<i>DDE</i>	Delay Differential Equation
<i>DSP</i>	Digital Signal Processing
<i>DTC</i>	Dead-Time Compensator
<i>EDO</i>	Ecuación Diferencial Ordinaria
<i>FDE</i>	Functional Differential Equations
<i>FIR</i>	Finite impulse response
<i>FOPDT</i>	First Order Plus Dead Time
<i>FSA</i>	Finite Spectrum Assignment
<i>GNU</i>	General Public License
<i>GNAT</i>	GNU NYU Ada Translator
<i>GCC</i>	GNU C-Compiler [Unix]
<i>GDB</i>	GNU Debugger

<i>IMC</i>	Internal Model Control
<i>IPDT</i>	Integrator Plus Dead-Time
<i>ISOPDT</i>	Integrating Second Order Plus Dead-Time
<i>IAE</i>	Integral Absolute Error
<i>ISE</i>	Integral Squared Error
<i>IE</i>	Integral Error
<i>LMI</i>	Linear Matrix Inequality
<i>LQR</i>	Linear-quadratic regulator
<i>MIMO</i>	Multiple Inputs Multiple Outputs
<i>mNSPC</i>	modifique New Smith Predictor Controller
<i>NSPC</i>	New Smith Predictor Controller
<i>PEE</i>	Predictor de Estados Estático
<i>PES</i>	Predictor basado en los coeficientes de E/S
<i>PID</i>	Proportional Integral Derivative
<i>PI</i>	Proportional Integral
<i>PWM</i>	Pulse width modulation
<i>SDTC</i>	Simple Dead-Time Compensator
<i>SISO</i>	Single Input Single Output
<i>SOPDT</i>	Second Order Plus Dead-Time
<i>SP</i>	Smith Predictor
<i>TDS</i>	Time Delay Systems
<i>2DoF</i>	Two-Degree-of-Freedom
<i>ZOH</i>	Zero-order hold

Referencias

1. Adam, E.J. and Latchman, H.A. and Crisalle O.D. *Robustness of the Smith Predictor with Respect to Uncertainty in the Time-Delay Parameter*. Proc. of the American Control Conference, Chicago, June 2000.
2. Adams, G. J. and Albertos, P. and Goodwin, G. C. and Isaksson. *Parameter estimation for systems with missing data in the presence of white measurement noise*. SYSID IFAC symposium on identification, Copenhagen, 1994.
3. Albertos, P. Block multirate input-output model for sampled data control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35:1085–1088, 1990.
4. Albertos, P. and G.C. Goodwin. Virtual sensors for control applications. *Annual Reviews in Control*, 26:101–112, 2002.
5. Albertos, P. and Goodwin, G. C. and Isaksson, I. A pseudolinear regression algorithm for on-line parameter estimation with missing data. *Internal Report EE92100, Newcastle University, Australia, 1992*.
6. Albertos, P. and Peñarrocha, I. and García, P. Virtual sensor under delayed and scarce measurements. *IFAC Symp. On Cost Oriented Control Applications. Ottawa. Canada. June 6-9, 2004*.
7. Albertos, P. and Salgado, M. and Olivares, M. Are Delays in Digital Control Implementation Always Bad? *Asian Control Conference, Shangai (China) July 2000*.
8. Albertos, P. and Salt, J. and Tornero, J. Dual rate adaptive control. *Automatica*, 32(7), 2002.
9. Albertos, P. Sanchis R., Sala A. Output prediction under scarce data operation: control applications. *Automatica*, 35(.), 1999.
10. Aldea, M. and González, M. MaRTE OS: An ada kernel for real-time embedded applications. *Proceedings of the International Conference on Reliable Software Technologies, Ada-Europe-2001*, 2001. Lecture Notes in Computer Science, LNCS 2043, Leuven, Belgium.
11. Alexandridis, A. T. and Paraskevopoulos, P.N. A new approach to eigenstructure assignment by output feedback. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 41, 1996, pp 1046-1050.
12. Artstein, Z. Linear systems with delayed control: A reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-27, pp. 869-879, Aug. 1982.
13. Astrom, K.J. and Hang, C.C. and Lim, B.C. A new smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead time. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39 (1994) 343-345.
14. Astrom, K.J. and Hägglund, T. *Advanced PID Control*. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC 27709, 2005.

15. Astrom, K.J. and Wittenmark, B. *Computer-controlled systems - theory and design (3rd ed.)*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997.
16. Bequette, B.W. *Process dynamics : modeling, analysis and simulation*. Prentice-Hall, 1998.
17. Boyd, S. and Ghaoui, L.E. and Feron, E. and Balakrishnan, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15. SIAM Studies in Applied Mathematics., 1994.
18. Brethé, D. and Loiseau, J. J. An effective algorithm for finite spectrum assignment of single-input systems with delays. *Mathematics in computers and simulation*, 45:339–348, 1998.
19. Camacho, E.F. and C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer-Verlag., 2004.
20. Castillo, P. and Albertos, P. and García, P. and Lozano, R. Real-time simple attitude stabilization of a quad-rotor aircraft with bounded signals. *45th IEEE Conference on Decision and Control Dec. 13-15, (San Diego, USA) 2006*.
21. Castillo, P. and García, P. and Lozano, R. and Albertos, P. Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro motores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (en revisión)*.
22. Castillo, P. and Lozano, R. and García, P. and Albertos, P. *Nonlinear and adaptive control: tools and algorithms for the user*, capítulo: Nonlinear Control of a Small Four-Rotor Rotorcraft, pages 147–177. World Scientific, 2006.
23. Chien, I.L. Reply to “comments on simple control method for integrating processes with long deadtime”. *Journal of Process Control*, 13 (2003), Page 365.
24. Chien, I.L. and Peng, S.C. and Liu, J.H. Simple control method for integrating processes with long deadtime. *Journal of Process Control* 12 (2002), pp. 391–404.
25. DePaor, A.M. A modified smith predictor and controller for unstable processes with time delay. *International Journal of Control*, vol. 41, no. 4, pp. 1025–1036, 1985.
26. DePaor, A.M. and Malley, M.O. Controllers of ziegler nichols type for unstable processes. *Int. J. Control* 49 (1989) 1273–1284.
27. Fastrack. Polhemus fastrack 3space, (2000). user’s manual. Colchester, Vermont, USA.
28. Feng, W. On practical stability of linear multivariable feedback systems with time- delays. *Automatica*, vol. 27, 389–394, 1991.
29. Foias, C. and Özbay, H. and Tannenbaum, A. *Robust Control of Infinite Dimensional Systems: Frequency Domain Methods*. Springer-Verlag, London, 1996. Lecture Notes in Control and Information Sciences, No. 209.
30. Fuller, A.T. Optimal nonlinear control of systems with pure delay. *International Journal of Control*, Vol. 8, No. 2 145–168, 1968.
31. Furukawa, T. and Shimemura, E. Predictive control for systems with time delay. *International Journal of Control*, 37(2), pp. 399–412., 1983.
32. Furutani, E. and Araki, M. Robust stability of state-predictive and smith control systems for plants with a pure delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8(18):907–919, 1998.
33. Gallivan, K. Van Dooren, P. *H-infinity norm calculation of large sparse systems*. Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS2004) Katholieke Universiteit Leuven, (Belgium), July, 2004.

34. García, P. and Albertos, P. A simple dead-time compensator to control stable and integrating processes with dead-time. *Automatica (submitted)*.
35. García, P. and Albertos, P. and Häggglund, T. Control of unstable non-minimum-phase delayed systems. *Journal of Process Control vol. 16 pp. 1099-1111 (2006)*.
36. García, P. and Castillo, P. and Lozano, R. and Albertos, P. Robustness with respect to delay uncertainties of a predictor-observer based discrete-time controller. *45th IEEE Conference on Decision and Control Dec. 13-15, (San Diego, USA) 2006*.
37. García, P. and Crespo, A. and Castillo, P. and Dzul, A. and Lozano, R. and Albertos, P. Real time application to control an unstable delay system. *27th IFAC/IEEE Workshop on Real Time, Varsovia (Polonia) 2003*.
38. Garcia, C.E. and Morari, M. Internal model control-1. a unifying review and some new results. *Ind. Eng. Chem. Process 21, pp.308-323 (1982)*.
39. George, A. and Baker, J. and Peter, G.M. *Padé Approximants: Part I. Basic Theory*, Addison Wesley, New York, 1981.
40. Goodwin, G. C. and Sang Sin, K. *Adaptive filtering prediction and control*. Information and systems sciences series. Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
41. Gu, K. and Kharitonov, V.L. and Chen, J. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhauser, Berlin, 2003.
42. Gu, K. and Niculescu, S.I. Survey on recent results in the stability and control of time-delays systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 125 (2003) 158-165*.
43. Guillermo, Silva J. and Aniruddha, Datta. and Bhattacharyya, S. P. *PID Controllers for Time-Delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser, 2005.
44. Guzmán, J.L. and García, P. and Häggglund, T. and Dormido, S. and Albertos, P. and Berenguel, M. Interactive tool for analysis of time-delay systems with dead-time compensators. *7th IFAC Symposium on Advances in Control Education, Madrid (Spain) June 2006*.
45. Hale, Jack K. and Sjoerd M. Verduyn Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*, volume 99. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1993.
46. Häggglund, Tore. An industrial dead-time compensating pi controller. *Control Eng. Practice 4 (1996) 749-756*.
47. Häggglund, Tore. A predictive pi controller for process with long dead-times. *IEEE Contr. Syst. Mag. 12 (1) (1992) 57-60*.
48. Kimura Hidenori. Pole assignment by gain output feedback. *IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 20, 1975, pp 509-516*.
49. Ho, W. K. and Xu, W. Pid tuning for unstable processes based on gain and phase-margin specifications. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications, vol. 145, no. 5, pp. 392-396, 1998*.
50. Ingimundarson, A. and Häggglund, T. Performance comparison between pid and dead-time compensating controllers. *Journal of Process Control 12 (2002) 887-895*.
51. Ingimundarson, A. and Häggglund, T. Recent development in digital control theory. *Proceedings of 12th IFAC world congress, vol. 9. (pp. 951-960), 1993*.
52. Ingimundarson, A. and Häggglund, T. Robust tuning procedures of dead-time compensating controllers. *Control Eng. Practice 9 (2001) 1195-1208*.
53. Isermann, R. Digital control systems. *Berlin: Springer, 1981*.

54. Kamen E.W and Khargonekar P.P. and A. Tannenbaum. Proper stable bezout factorizations and feedback control of linear time delay systems. *Int. J. Contr.*, Vol. 43, No. 3, 837-857, 1986.
55. Krasovskii, N.N. On the applications of the second lyapunov method for equations with delay. *Journal of Appli. Math. Mech.*, 20(.), 1956.
56. Kwak, H.J. and Sung, S.W. and Lee, I.-B. and Park, J.Y. Modified smith predictor with a new structure for unstable processes. *Ind. Eng. Chem. Res.* 38 (2) (1999) 405-411.
57. Landau, I.D. *Commande des systèmes-conception, identification et mise en oeuvre*. Hermes, Paris, 2002.
58. Lee, Y. and Lee, J. and Park, S. Pid controllers tuning for integrating and unstable process tih time delay. *Chem. Eng. Sci.* 55 (2000) 3481-3493.
59. Liu, T. and Cai, Y.Z. and Gu, D.Y. and Zhang, W.D. New modified smith predictor scheme for integrating and unstable processes with time delay. *IEE Proc. Control Theory Appl.* 152(2), 238-246, 2005.
60. Liu, T. and He, X. and Gu, D. and Wang, W. A novel control scheme for typical unstable processes with time delay. *Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston, Massachusetts June 30 -July 2,2004*.
61. Liu, T. and Zhang, W. and Gu, D. Analytical design of two-degree-of-freedom control scheme for open-loop unstable processes with delay. *Journal of Process Control* 15 (2005) 559-572.
62. Loiseau, J.J. and Mori, K. and Van-Assche, V. and Lafay, J.F. Feedback realization of compensators for a class of time-delay systems. *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, 1999, pp. 4228-4233*.
63. Lozano, R. and Brogliato, B. and Egeland, O. and Maschke, B. *Passivity-based control system analysis and design*. Communications and Control Engineering Series, ISBN 1-85233-285-9. Springer-Verlag, London, 2000.
64. Lozano, R. and Castillo, P. and García, P. and Dzul, A. Robust prediction-based control for unstable delay systems. *42nd IEEE Conference on Decision and Control Dec. 9-12, (Maui, Hawaii, USA)*, 4:4014-4019, 2003.
65. Lozano, R. and Castillo, P. and García, P. and Dzul, A. Robust prediction-based control for unstable delay systems: Application to the yaw control of a mini-helicopter. *Automatica*, 50(1):603-612, 2004.
66. Lozano, R. and García, P. and Castillo, P. and Dzul, A. Predictor based control for delay systems: A real-time application to the yaw attitude control of a mini quadric-rotor helicopter. *Workshop CNRS-NSF Advances in time-delay systems Paris, 22-24 de Enero de 2003*.
67. Lozano, R. and García, P. and Castillo, P. and Dzul, A. *Advances in Time-Delay Systems*, volume 38 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, capítulo 21, pages 311-326. Springer Verlag, 2004.
68. Lu, X. and Yang, Y.S. and Wang, Q.G. and Zheng, W.X. A double two-degree-of-freedom control scheme for improved control of unstable delay processes. *Journal of Process Control* 15 (2005) 605-614.
69. Majhi, S. and Atherton, D.P. Obtaining controller parameters for a new smith predictor using autotuning. *Automatica* 36 (2000) 1651-1658.
70. Majhi, S. and Atherton, D.P. Online tuning of controllers for an unstable fopdt process. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, vol. 147, no. 4, pp. 421-427, 2000.

71. Manitius, A. Z. and Olbrot, A. W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-24(4):541–553, 1979.
72. Matausek, M.R. and Micié, A.D. A modified smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time. *IEEE Transactions on Automatic Control* 41 (1996) 1199-1203.
73. Matausek, M.R. and Micié, A.D. On the modified smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1999) 1603-1606.
74. Michiels, W. and Niculescu, S.I. On the delay sensitivity of smith predictors. *International Journal of Systems Science*, Vol. 34, No.8-9, 2003, pp. 543-552.
75. Mondié, S. and Dambrine, M. and Santos, O. Approximation of control laws with distibuted delays: a necessary condition for stability. *Kybernetika*, Vol. 38, No. 5, 541-551, 2002.
76. Mondié, S. and Dambrine, M. and Santos, O. *Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability*. IFAC Conference on Systems, Structure and Control, Prague, Czek Republic, 2001.
77. Mondié, S. and García, P. and Lozano, R. Resetting smith predictor for the control of unstable systems with delay. *IFAC 15th Triennial World Congress*, 2002. Barcelona, Spain.
78. Mondié, S. and Lozano, R. and Collado, J. Resetting process-model control for unstable systems with delay. *40th IEEE Conference on Decision and Control*, 2001. Orlando, Florida.
79. Mondié, S. and Michiels, W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48:2207 – 2212, 2003.
80. Moon, Y.S. and Park, P. and Kwon, W. H. and Lee, Y.S. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. *Int. J. Control*, (74) 1447-1455, 2001.
81. Morari, M. and Zafriou, E. *Robust Process Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NY.
82. Morse, A. S. Ring models for delay-differential systems. *Automatica*, 12:529–531, 1976.
83. Niculescu, S.I. *Stability and robust stability of time delay systems: A Guided Tour*. in Stability and control of time delay systems, LNCIS, 1997.
84. Niculescu, S.I. *Stability of Linear Systems with Delayed State: A Guided Tour*. Proc. of IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems, Grenoble, Francia, 1998.
85. Niculescu, S.I. *Delay effects on stability: a robust control approach*. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2001.
86. Niculescu, S.I and Lozano, R. On the passivity of linear delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 460–464, 2001.
87. Normey-Rico, J.E. and Bordons, C. and Camacho, E.F. Improving the robustness of dead-time compensating pi controllers. *Control Eng. Practice* 5 (1997) 801-810.
88. Normey-Rico, J.E. and Camacho, E.F. Comments on simple control method for integrating processes with long deadtime. *Journal of Process Control* 13 (2003) 363-364.
89. Normey-Rico, J.E. and Camacho, E.F. Robust tuning of dead-time compensators for processes with an integrator and long dead-time. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1999) 1597-1603.

90. Normey-Rico, J.E. and Camacho, E.F. A unified approach to design dead-time compensators for stable and integrative process with dead-time. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002) 299-305.
91. Nuñez-Reyes, A. and Normey-Rico, J.E. and Bordons, C. and Camacho, E.F. A smith predictive based mpc in a solar air conditioning plant. *Journal of Process Control* 15 (2005) 1-10.
92. O'Dwyer, A. Pid compensation of time delayed processes 1998-2002: a survey. *American Control Conference, 2003. June 4-6, 2003 Page(s):1494 - 1499*.
93. O'Dwyer, A. Pid compensation of time delayed processes: a survey. *Technical Report. Institute of Technology Dublin-Irlanda (2001)*.
94. Ohishi, K. and Nakao, M. and Miyachi, K. and Ohnishi, K. Microprocessor-controlled dc motor for load-insensitive position servo system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics. Vol. IE-34, no. 1, pp. 44-50. 1987*.
95. Palmor, Z.J. On the design and properties of multivariable dead time compensators. *Automatica*, 19(3), 1983.
96. Palmor, Z.J. Robustness properties of sampled-data systems with dead time compensators. *Automatica*, 26(3), 1990.
97. Palmor, Z.J. Time delay compensation- smith predictor and its modifications, in the control handbook, (W.S. Levine, Eds). *CRSC Press*, pages 224-237, 1996.
98. PooGyeon Park. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4):876-877.
99. Park, J. H. and Sung, S. W. and Lee, I. An enhanced pid control strategy for unstable processes. *Automatica*, vol. 34, no. 6, pp. 751-756, 1998.
100. Fastrack 3Space Polhemus. *User's Manual*. Colchester, Vermont, USA, 2001.
101. POSIX. Information technology -standardized application environment profile-POSIX realtime application support (AEP). *The Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 1998. IEEE Std. 1003.13-1998.
102. Quanser. 3d_hover system: Manual [online]. http://www.quanser.com/english/downloads/products/3DOF_Hover.pdf.
103. Razumikhin, B.S. Applications of lyapunov's methods to problems in the stability of systems with a delay. *Automat. i Telemekh. 21 (1960) 740-749 (Translate into English in J. Appl. Math Mech)*.
104. Razumikhin, B.S. On the stability of systems with a delay. *Prikl. Mat. Mech. 20 (1956), 500-512 (Translate into English in Automat. Remote Control 21, 515-520)*.
105. Richard, J.P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica* 39 (2003) 1667-1694.
106. Richard, J.P. and Dambrine, M. and Gouaisbaut, F. and Perruquetti, W. Systems with delays: an overview of some recent advances. *Stability Control Theory Appl. 3 (2000) 3-23*.
107. Salt, J. and Albertos, P. and Tornero, J. Modelling of non-conventional sampled data systems. *Third IEEE control applications conference, vol. 2, Vancouver (pp. 631)*.
108. Sanchis, R. Control of industrial processes with scarce measurements. *Doctoral Thesis, Universidad Politécnic de Valencia, Spain (1999)*.
109. Sanchis, R. and Albertos, P. Recursive identification under scarce measurements. *Automatica* 38, 535-544, 2002.

110. Santacesaria, C. and Scattolini, R. Easy tuning of smith predictor in presence of delay uncertainty. *Automatica*, vol. 29, 1595-1597, 1993.
111. Santos, O. and Mondié, S. Control laws involving distributed time delays: robustness of the implementation. *American Control Conference, Chicago, Estados Unidos, junio 2000*.
112. Skogestad, S. and Postlethwaite, I. *Multivariable Feedback Control Analysis and Design (2nd Edition)*. Wiley, 2005.
113. Smith, O.J.M. Closer control of loops with dead time. *Chem. Eng. Prog.*, 53:217-219, 1959.
114. Tan, W. and Marquez, H.J. and Chen, T. Imc-based desing for unstable processes with time delays. *Journal Process Control* 13 (2003) 203-213.
115. Tian, Y.-C. and Gao, F. Control of integrator processes with dominant time delay. *Ind. Eng. Chem. Res.* 38 (1999), pp. 2979-2983.
116. Torrico, B. C. and Normey-Rico, J.E. 2dof discrete dead-time compensators for stable and integrative processes with dead-time. *Journal of Process Control* 15 (2005) 341-352.
117. Van-Assche, V. *Etude et mise en oeuvre de commandes distribuées*. Ph.D. Thesis, École central de Nantes. Université de Nantes, France, 2002.
118. Van-Assche, V. and Dambrine, M. and Lafay, J.F. and Richard, J.P. Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws. *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, 1999*, pp. 4668-4672.
119. Visioli, A. Optimal tuning of pid controllers for integral and unstable processes. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, vol. 148, no. 2, pp. 180-184, 2001.
120. Wang, Q. G. and Lee, T. H. and Tan K. K. Lecture notes in control and information sciences. in *Finite Spectrum Assignment for Time-Delay Systems*. New York: Springer-Verlag, 1999, vol. 239.
121. Wang, Q.-G. and Zhou, H.-Q. and Zhang, Y. and Zhang, Y. A comparative study on control of unstable processes with time delay. *5th Asian Control Conference, Melbourne, Australia*, pages 2006-2014, July 2004.
122. Wang, Y. G. and Cai, W. J. Advanced proportional-integral-derivative tuning for integrating and unstable processes with gain and phase margin specifications. *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 41, no. 12, pp. 2910-2914, 2002.
123. Watanabe, K. and Ito, M. A process model control for linear systems with delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(6):1261-1268, 1981.
124. Watanabe, K. and Ito, M. and Kaneko, M. Finite spectrum assignment problem of systems with multiple commensurate delays in state and control. *Internal Journal of Control*, 39(5), 1984.
125. Watanabe, K. and Nobuyama, E. and Kitamori, T. and Ito, M. A new algorithm for finite spectrum assignment of single-input systems with time delay. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 37(9), 1986.
126. Wittenmark, Bjorn. Sampling of a system with a time delay. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 30(5), 1985.
127. Xu, S.J. and Darouach, M. and Schefers, J. Expansion of $\det(a+b)$ and robustness analysis of uncertain state space systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11):1617-1675, 1993.
128. Xu, S.J. and Darouach, M. and Schefers, J. Expansion of $\det(a+b+c)$ and robustness analysis of discrete-time state-space systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5):936-946, 1995.

129. Yamanaka, K. and Shimemura, E. Effects of mismatched smith controller on stability in systems with time-delay. *Automatica*, vol. 23, 787-791, 1987.
130. Yang, X.P. and Wang, Q.G. and Hang, C.C. and Lin, C. Imc-based control system design for unstable process. *Ind. Eng. Chem. Res.* 41 (2002) 4288-4294.
131. Yang, X.P. and Wang, Q.G. and Hang, C.C. and Lin, C. Relay auto-tuning for unstable processes. *Submitted for publication*, 2002.
132. Young, Sam Lee and Wook, Hyun Kwon. Delay-dependent robust stabilization of uncertain discrete-time state-delayed. *IFAC 15th Triennial World Congress*, 2002.
133. Yutaka, Yamamoto. Frequency Response of Sampled-Data Systems. *Automatica*, 32(4), 1996.
134. Zhang, W.D. and Gu, D. and Wang, W. and Xu, X. Quantitative performance design of a modified smith predictor for unstable processes with time delay. *Ind. Eng. Chem. Res.* 43 (1) (2004) 56-62.
135. Zhang, W.D. and Sun, Y.X. Modified smith predictor for controlling integrator/time delay processes. *Ind. Eng. Chem. Res.* 35 (1996) 2796-2772.
136. Zhong, Q.C. Control of integral processes with dead time - part 3: deadbeat disturbance response. *IEEE Trans. on Automatic Control* 48 (1) (2003) 153-159.
137. Zhong, Q.C. On distributed delay in linear control laws- part i: Discrete-delay implementations. *IEEE Trans. on Automatic Control* 49 (11) (2004) 2074-2080.
138. Zhong, Q.C. and Li, H.X. 2-degree-of-freedom proportional-integral-derivative-type controller incorporating the smith principle for processes with dead time. *Ind. Eng. Chem. Res.* 41 (2002) 2448-2454.
139. Zhong, Q.C. and Normey-Rico, J. Control of integral processes with dead-time. part 1: Disturbance observer-based 2 dof control scheme. *IEE Proceedings Control Theory and Applications* 149 (4) (2002) 285-290.
140. Zotovic, R. and García, P. and Valera, A. and Llosá, A. and Cardó, M. Control de fuerza y de impacto de un robot con cambio de periodo de muestreo. *XXV Jornadas de Automática, Ciudad Real (Spain) 2004*.
141. Zotovic, R. and Valera, A. and García, P. Change of sampling period in robot force control. *International Conference on Automation, Control and Instrumentation Bilbao (España) 2005*.
142. Zotovic, R. and Valera, A. and García, P. Impact and force control with switching between mechanical impedance parameters. *16th IFAC World Congress, Praga (República Chéca) 2005*.
143. Zotovic, R. and Valera, A. and García, P. Switching of mechanical impedance parameters in robot force and impact control. *International Conference on Automation, Control and Instrumentation Bilbao (España) 2005*.
144. Zotovic, R. and Valera, A. and García, P. and Llosá, A. An architecture for force and impact control. *8th International IFAC Symposium on Robot Control, Santa Cristina Convent, University of Bologna (Italy) September 6-8, 2006*.