



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**Aplicación en Matlab para análisis aeroelástico de alas rectas**

Autor

**Francisco Gil Colomer**

Tutor

**Mario Lázaro Navarro**

GRADO EN INGENIERÍA AEROESPACIAL

Especialidad Aeromotores



## Resumen

El presente trabajo recorre las principales materias necesarias para llevar a cabo el estudio numérico del comportamiento estático de un ala recta sumergida en un fluido en movimiento. Tales materias son Aerodinámica, Aeroelasticidad e Informática. Para tal fin, inicialmente, se obtendrán los parámetros aerodinámicos necesarios mediante la teoría de los perfiles finos que se emplearán posteriormente para validar los resultados de la implementación informática de un método de paneles para el estudio de perfiles aerodinámicos 2D de la familia de perfiles NACA de 4 dígitos. Dichos perfiles conformarán el ala recta, objeto final del estudio, y la implementación en la aplicación escrita en lenguaje M propio del software matemático Matlab.

# Índice

|   | Pág. |
|---|------|
| Índice de Figuras y Tablas  | 1    |
| Lista de símbolos   | 3    |
| (1) Aerodinámica  | 4    |
| (1.1) Definición  | 4    |
| (1.2) El perfil Aerodinámico  | 5    |
| (1.2.1) Perfiles NACA 4 dígitos   | 7    |
| (1.3) Teoría de perfiles finos (TPF)  | 7    |
| (1.3.1) Ecuación de continuidad   | 8    |
| (1.3.2) Vorticidad  | 9    |
| (1.3.3) Soluciones de la ecuación de Laplace: flujo libre y torbellino        | 11   |
| (1.3.4) Ecuación fundamental de la TPF  | 17   |
| (1.3.5) Coeficientes aerodinámicos  | 22   |
| (1.4) Métodos numéricos: Método de los paneles                                | 30   |
| (1.4.1) Discretización de la geometría  | 30   |
| (1.4.2) Selección de la singularidad: El torbellino                           | 32   |
| (1.4.3) Cálculo de coeficientes   | 33   |
| (2) Aeroelasticidad   | 39   |
| (2.1) Introducción  | 39   |
| (2.2) Fenómenos Aeroelásticos Estáticos                                       | 40   |
| (2.2.1) Divergencia   | 40   |
| (2.2.2) Efectividad de Mando / Inversión de mando                             | 49   |
| (3) La Aplicación   | 55   |
| (3.1) Descripción   | 55   |
| (3.2) El primer entorno gráfico: Aerodinámica                                 | 55   |
| (3.3) El segundo entorno gráfico: Aeroelasticidad estática                    | 61   |
| (4) Estudio caso  | 64   |
| (4.1) Descripción   | 64   |
| (4.2) Coeficientes aerodinámicos  | 64   |
| (4.3) Aeroelasticidad Estática: Divergencia, Efectividad e Inversión de Mando | 73   |
| (4.3.1) Resultados Analíticos/Resultados Numéricos                            | 73   |
| (5) Anexos  | 74   |
| (6) Bibliografía  | 80   |

## Índice de Figuras y Tablas

|        | Figuras   | Pág. |
|--------|---|------|
| 11.1   | Líneas de corriente alrededor de perfiles aerodinámicos a distintos ángulos de incidencia.                            | 4    |
| 11.2   | Distintos sólidos con forma fusiforme.  | 5    |
| 12.3   | Definición gráfica de Perfil Aerodinámico.  | 6    |
| 12.4   | Longitudes características y elementos que describen un perfil aerodinámico.  | 6    |
| 121.1  | Perfil NACA 2411  | 7    |
| 131.1  | Volumen de control en el fluido.  | 8    |
| 132.1  | Deformación de elemento fluido.   | 10   |
| 133.1  | Flujo de torbellino.  | 14   |
| 133.2  | Líneas de corriente de la superposición de flujo libre y flujo de torbellino.   | 16   |
| 134.1  | Distribución de torbellinos sobre la Línea de curvatura del perfil.   | 17   |
| 134.2  | Distribución de torbellinos sobre la cuerda del perfil manteniendo la línea de curvatura como una línea de corriente. | 18   |
| 135.1  | Posición del centro de presión en un perfil NACA 2510.  | 26   |
| 135.2  | Variación del coeficiente de momento de cabeceo respecto a $\alpha$ a lo largo de la cuerda de un perfil.             | 27   |
| 14.1   | Representación de un perfil mediante paneles.   | 30   |
| 141.1  | Distribución de puntos tipo coseno.   | 30   |
| 141.2  | Discretización Perfil NACA 3510   | 31   |
| 141.3  | Convergencia de resultados para un mismo perfil aerodinámico con distinta distribución de puntos.                     | 31   |
| 141.4  | Representación del coeficiente de presión de un perfil NACA 3510 comparando las dos distribuciones de puntos.         | 31   |
| 141.5  | Distribución propuesta para perfiles con alerón integrado.  | 32   |
| 142.1  | Distribución de paneles, torbellinos y puntos de control sobre la superficie del perfil.                              | 32   |
| 143.1  | Nomenclatura considerada implementar el método de torbellinos.  | 33   |
| 143.3  | Líneas de corriente alrededor de un perfil NACA 5510 con 5° de incidencia.  | 36   |
| 21.1   | Comportamiento del ala excitando cada uno de sus grados de libertad.  | 39   |
| 221.1  | Modelización del perfil. Fuerzas que intervienen para el cálculo de la divergencia.                                   | 40   |
| 221.2  | Evolución del incremento del ángulo elástico respecto al ángulo de incidencia inicial con la presión dinámica.        | 43   |
| 221.3  | Nomenclatura ala con alerón.  | 44   |
| 221.4  | Comportamiento a flexión del ala.   | 45   |
| 221.5  | Comportamiento a torsión del ala.   | 45   |
| 222.1  | Evolución del momento elástico Vs. momento rígido   | 51   |
| 222.2  | Efectividad de mando.   | 51   |
| 222.3  | Efecto de la longitud del alerón en la presión de inversión.  | 52   |
| 222.4  | Efecto de la posición del alerón en la presión de inversión.  | 53   |
| 222.5a | Ala en configuración de inversión de mando.   | 54   |
| 222.5b | Ala en configuración de inversión de mando.   | 54   |
| 32.1   | GUI Aerodinámica.   | 55   |
| 32.2   | Selección del perfil.   | 56   |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 32.3  | Independencia del número de paneles.   | 56 |
| 32.4  | Diferencia de resultados entre números de paneles.   | 57 |
| 32.5  | Comparación de tiempo de cálculo   | 57 |
| 32.6  | Tiempo de cálculo JavaFoil.  | 58 |
| 32.7  | Representación del Coeficiente de Presión sobre la cuerda.                                     | 58 |
| 32.8  | Coeficientes y valores principales para el perfil seleccionado (NACA 3510).                    | 59 |
| 32.9  | Ajuste lineal de $C_l(\alpha)$ y error en el ajuste.   | 59 |
| 32.10 | Ajuste lineal de $C_l(\delta)$ y error en el ajuste.   | 60 |
| 32.11 | Representación de $C_p$ y de la posición de puntos característicos.                            | 60 |
| 33.1  | GUI Aeroelasticidad Estática.  | 61 |
| 33.2  | Controles  | 61 |
| 33.3  | Teclas para el control de las variables de entrada.  | 62 |
| 33.4  | Respuesta estática del ala para distintas entradas.  | 62 |
| 33.5  | Distribución de sustentación a lo largo de la envergadura.                                     | 63 |
| 33.6  | Representación de la torsión en la punta del ala y de la flexión a lo largo de la envergadura. | 63 |
| 33.7  | Situación de divergencia e inversión de mando para los valores de entrada actuales.            | 63 |
| 42.1  | Perfil simétrico NACA 0010   | 64 |
| 42.2  | Distribución de presión sobre el perfil. Contornos de velocidad.                               | 66 |
| 42.3  | Distribución del $C_p$ sobre el perfil.  | 67 |
| 42.4  | Contornos de velocidad.  | 67 |
| 42.5  | Distribución del $C_p$ sobre el perfil.  | 68 |
| 42.6  | Contornos de velocidad.  | 68 |

## Lista de símbolos

|               |  |
|---------------|--|
| $a$           | Velocidad del sonido ( $m/s$ ).                                |
| $c$           | Cuerda del perfil ( $m$ ).                                     |
| $C_l$         | Coefficiente de sustentación.                                  |
| $C_{l\alpha}$ | Pendiente del coeficiente de sustentación.                     |
| $C_{l0}$      | Coefficiente de sustentación debido a la curvatura del perfil. |
| $C_m$         | Coefficiente de momento de cabeceo.                            |
| $G$           | Módulo de rigidez.   |
| $J$           | Módulo de torsión.   |
| $k_\theta$    | Rigidez a torsión.   |
| $k_w$         | Rigidez a Flexión  |
| $L'$          | Sustentación por unidad de envergadura ( $N/m$ ).              |
| $m$           | Masa ( $kg$ ).   |
| $M$           | Nº de Mach.  |
| $P$           | Peso ( $N$ ).  |
| $q$           | Grado de libertad.   |
| $Q$           | Vector de fuerzas generalizadas.                               |
| $q_\infty$    | Presión dinámica.  |
| $r$           | Radio ( $m$ ).   |
| $R$           | Constante de los gases ideales ( $287 J Kg^{-1} K^{-1}$ ).     |
| $RHS$         | Lado derecho de la ecuación de coeficientes aerodinámicos      |
| $s$           | Longitud de arco ( $m$ ).                                      |
| $S$           | Superficie ( $m^2$ ).  |
| $T$           | Temperatura (grados $K$ ). Energía cinética del sistema.       |
| $U$           | Energía potencia.  |
| $U_\infty$    | Velocidad del flujo libre ( $m/s$ ).                           |
| $V$           | Volumen ( $m^3$ ).   |
| $w$           | Flexión ( $m$ ).   |
| $x_{cp}$      | Centro de presión ( $m$ ).                                     |
| $\alpha$      | Ángulo de ataque ( $rad$ ).                                    |
| $\alpha_0$    | Ángulo de sustentación nula ( $rad$ ).                         |
| $\beta$       | Ángulo del panel ( $rad$ ).                                    |
| $\gamma$      | Intensidad del torbellino.                                     |
| $\Gamma$      | Circulación.   |
| $\delta$      | Deflexión alerón ( $rad$ ).                                    |
| $\eta$        | Ángulo ( $rad$ ), Torsión.                                     |
| $\nu$         | Módulo de Poisson.   |
| $\xi$         | Vorticidad.  |
| $\pi$         | Número pi.   |
| $\rho$        | Densidad ( $kg/m^3$ )  |
| $\Phi$        | Función potencial.   |
| $\omega$      | Velocidad angular ( $rad/s$ ).                                 |
| $\mathbf{n}$  | Vector normal.   |
| $\mathbf{q}$  | Vector velocidad ( $m/s$ ).                                    |

## (1) Aerodinámica

### (1.1) Definición

La aerodinámica es la parte de la mecánica de fluidos que estudia las fuerzas, momentos y la transferencia de energía en forma de calor que experimenta un cuerpo moviéndose a través de un fluido o viceversa.

Atendiendo a la compresibilidad del fluido objeto de estudio existen otras clasificaciones en las que se diferencia entre hidrodinámica para líquidos no compresibles y aerodinámica para gases compresibles.

Muchos autores incluyen ambas definiciones dentro del campo de la aerodinámica ya que cuando la velocidad con la que se mueve un gas es baja, éste se considera incompresible y el comportamiento dinámico es cualitativamente análogo al de un líquido.

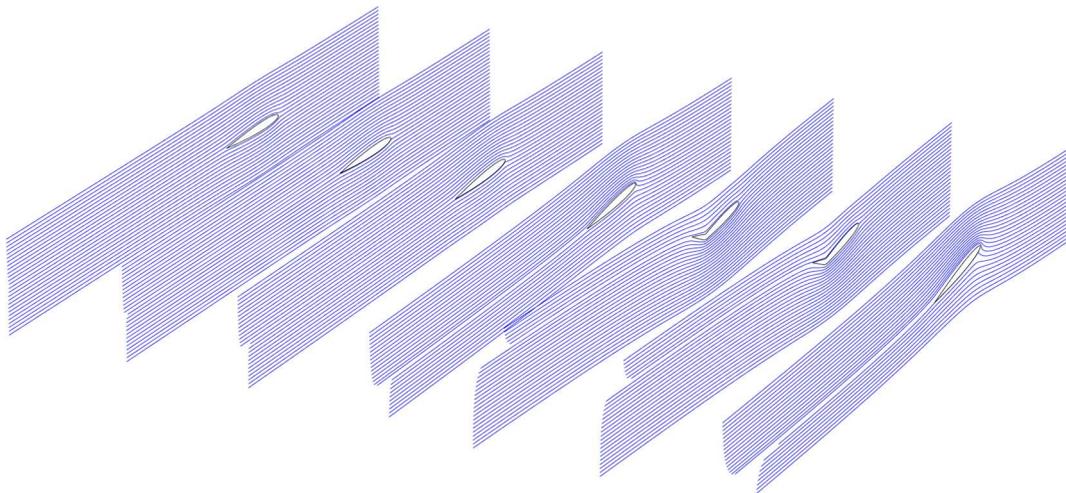


Figura 11.1: Líneas de corriente alrededor de perfiles aerodinámicos a distintos ángulos de incidencia.

El criterio para considerar un gas incompresible es que su velocidad debe ser  $|\mathbf{q}| < 0.3M$ . Donde  $\mathbf{q}$  es el vector velocidad y  $M$  es el número de Mach, que se define como la relación entre la velocidad y la velocidad del sonido ( $a$ ).

$$M = \frac{|\mathbf{q}|}{a} = \frac{|\mathbf{q}|}{\sqrt{\gamma RT}}$$

En la expresión de la velocidad del sonido,  $\gamma$  corresponde a la relación de calores específicos para un gas perfecto que permanece constante para la mayoría de las aplicaciones con un valor de  $\gamma = 1.4$ . En la misma expresión de la velocidad del sonido  $R = 287 \text{ JKg}^{-1}\text{K}^{-1}$  corresponde a la constante de los gases ideales. Por último  $T$  corresponde a la temperatura del aire en grados  $K$ . El valor de la

velocidad del sonido en condiciones ISA<sup>1</sup> a nivel del mar es de  $a = 340 \text{ m/s}$ . Por tanto para considerar un fluido incompresible, su velocidad no debe superar  $|\mathbf{q}| < 102 \text{ m/s}$

Las teorías analíticas que estudian la aerodinámica ofrecen resultados aproximados debido a la complejidad de la naturaleza de los fluidos y a las simplificaciones necesarias para poder resolver las ecuaciones de continuidad, momento y transferencia de energía. A lo largo de la relativamente corta historia de la aerodinámica analítica distintos autores han ido ajustando los resultados mediante expresiones semiempíricas basadas en resultados experimentales.

La introducción de los ordenadores modernos permite abordar el estudio aerodinámico tomando elementos infinitesimales de la geometría del cuerpo o de su entorno y aplicando a cada uno de ellos las expresiones analíticas de continuidad, momento y transferencia de energía. Esta técnica conocida como CFD ofrece resultados muy próximos a la realidad con un coste económico bajo, a diferencia de lo que supone realizar un montaje experimental.

El autor del presente trabajo no pretende en ningún caso cargar hojas y hojas de farragosa demostraciones y fórmulas, aunque el desarrollo de algunos conceptos e ideas es inevitable.

En general todos los cuerpos sólidos con aplicaciones aerodinámicas se caracterizan por tener forma fusiforme o fuselada<sup>2</sup>. Dicha forma permite que el fluido en movimiento en el que están sumergidos se adapte suavemente a la geometría del sólido.

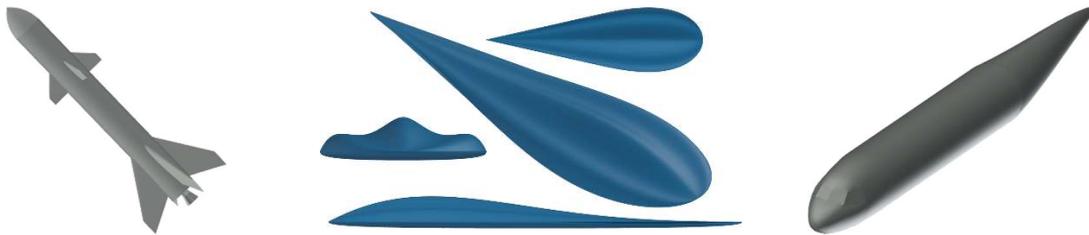


Figura 11.2: Distintos sólidos con forma fusiforme.

## (1.2) El perfil Aerodinámico

La primera idea que hay que definir es el concepto de perfil aerodinámico: Un perfil aerodinámico es una forma fuselada que al estar sumergido en un fluido en movimiento, su geometría le proporciona determinadas características aerodinámicas que generan fuerzas y momentos netos sobre el propio perfil. De una forma más sencilla se puede definir como la sección infinitesimal perpendicular a la envergadura de un ala o una superficie sustentadora.

---

<sup>1</sup> ISA: Atmósfera Estándar Internacional. *International Standard Atmosphere* por sus siglas en inglés.

<sup>2</sup> Fuselado: Con forma de huso. En inglés su traducción es *streamlined*, es decir, con forma de línea de corriente.

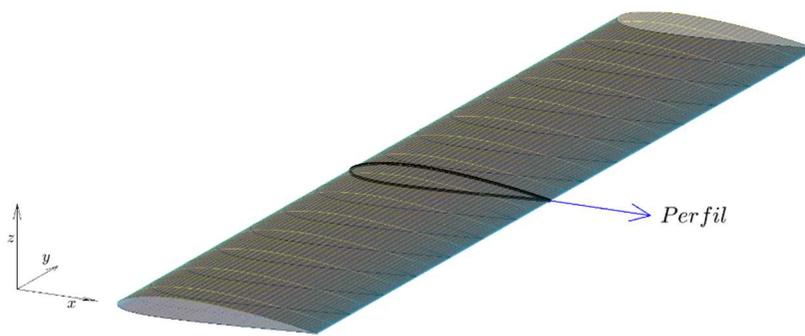


Figura 12.3: Definición gráfica de Perfil Aerodinámico.

El estudio del perfil permite obtener las propiedades aerodinámicas tratando un problema en dos dimensiones que matemáticamente suele ser más sencillo. Posteriormente se pueden trasladar esas soluciones en el plano a toda la superficie sustentadora (3D).

Los perfiles están definidos por ciertas longitudes características que determinarán sus propiedades aerodinámicas. En la siguiente figura se indica la nomenclatura de un perfil.

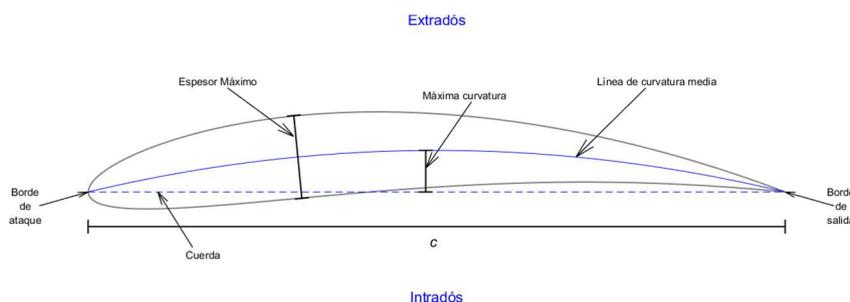


Figura 12.4: Longitudes características y elementos que describen un perfil aerodinámico.

- **Borde de ataque** (*Leading edge*): Es la parte del perfil que entra primero en contacto con el fluido.
- **Borde de salida** (*Trailing edge*): Se encuentra en el lado opuesto al borde de ataque y es la última parte del perfil que ve el fluido.
- **Intradós**: Se define como la parte inferior del perfil, comprendida entre el Borde de ataque y el de salida.
- **Extradós**: Es la parte superior del perfil, comprendida entre el Borde de ataque y el de salida.
- **Cuernada** (*Chord*): Es el segmento que va desde el Borde de ataque hasta el Borde de salida. Su longitud se representa por la letra  $c$
- **Espesor** (*Thickness*): Es la distancia entre la parte superior del perfil y la inferior, perpendicular a la Línea de curvatura media.
- **Línea de curvatura media** (*Mean camber line*): O Línea de curvatura. Es la línea que divide el perfil en dos áreas iguales. Si se trata de un perfil simétrico, la Línea de curvatura coincide con la Cuernada.

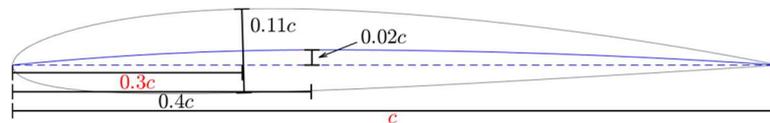
### (1.2.1) Perfiles NACA 4 dígitos

Los perfiles NACA de 4 dígitos se desarrollaron por la NACA en la década de los años 30 del siglo pasado para experimentar sistemáticamente variando los 4 dígitos que definen este tipo de perfiles.

En el presente trabajo y en la aplicación implementada en Matlab se emplearán perfiles NACA de 4 dígitos. Los 4 dígitos que dan nombre al perfil determinan los parámetros de curvatura máxima, posición de la curvatura máxima y espesor de la siguiente forma:

Sea un perfil NACA de 4 dígitos representados por las letras A, B y CD; es decir "NACA ABCD". El primer dígito (A) indica la curvatura máxima en centésimas de cuerda. El segundo dígito (B) representa la posición de la máxima curvatura sobre la cuerda del perfil en décimas de cuerda. Finalmente el tercer y cuarto dígito (CD) indican el espesor máximo en porcentaje de cuerda. Una restricción que tiene este tipo de diseño de perfiles es que la posición del espesor máximo está fijada en  $0.3c$  para toda la serie de 4 dígitos.

Como ejemplo se presenta un perfil NACA 2411 con una cuerda de longitud  $c$ :



|                         |               |
|-------------------------|---------------|
| Curvatura máxima        | $0.02c$       |
| Posición Curvatura máx. | $0.4c$        |
| Espesor máximo          | $0.11c$       |
| Posición Espesor máx.   | $0.3c$ (fijo) |

*Figura 121.1: Perfil NACA 2411*

### (1.3) Teoría de perfiles finos

La teoría de los perfiles finos permite obtener los parámetros aerodinámicos característicos de un perfil mediante métodos analíticos, siempre que la función que define el perfil sea conocida.

El nombre de esta teoría proviene del hecho de que no se tiene en cuenta el espesor del perfil y se trasladan las condiciones de contorno a la línea de curvatura y a la cuerda. El espesor del perfil modifica la pendiente de la curva de sustentación, por lo tanto, mediante esta teoría se obtendrá un aproximación del resultado real. Más adelante se comparará el efecto del espesor del perfil obtenido mediante métodos numéricos con el resultado obtenido de la Teoría de perfiles finos.

Para abordar el análisis aerodinámico de perfiles es necesario introducir algunos conceptos que describen el movimiento del fluido. En los próximos puntos se deducirán las expresiones más importantes de la Teoría de perfiles finos:

### (1.3.1) Ecuación de Continuidad

En primer lugar se considerará un volumen de control que contiene una región de fluido en el espacio limitado por una superficie (superficie de control). La masa de fluido contenida en dicho volumen de control se obtiene mediante la integración de la densidad de dicho fluido en todo el volumen de control, es decir:

$$m_{vc} = \int_{vc} \rho dV \quad (131.1)$$

La variación de la masa con respecto al tiempo en el interior del volumen de control será por tanto:

$$\frac{\partial m_{vc}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV \quad (131.2)$$

Por otra parte, la variación de masa será la cantidad de masa que atraviesa la superficie que limita el volumen de control:

$$\Delta m_{vc} = \int_{sc} \rho(\mathbf{qn}) dS \quad (131.3)$$

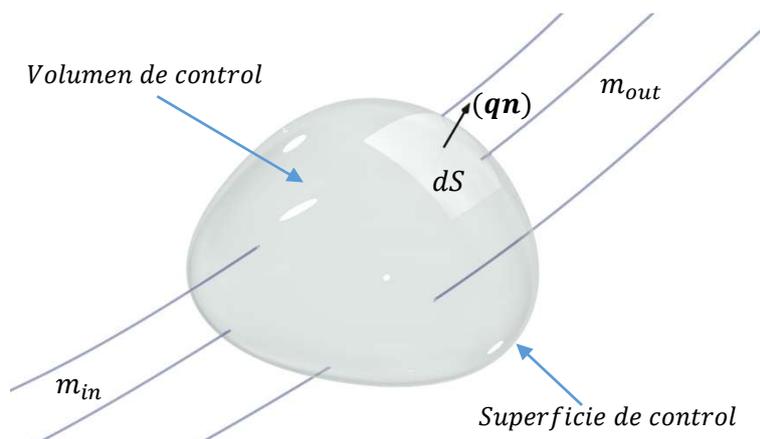


Figura 131.1: Volumen de control en el fluido.

Donde  $\mathbf{q} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  es el vector velocidad y  $\mathbf{n}$  es un vector normal a un diferencial de superficie de control ( $dS$ ), apuntando hacia el exterior del volumen de control (Figura 131.1).

Considerando conservación de la masa y que no se crea masa en el interior del volumen de control, la suma de las expresiones (2) y (3) debe ser nula:

$$\dot{m}_{vc} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho(\mathbf{q}\mathbf{n}) dS = 0 \quad (131.4)$$

El teorema de Ostrogradski (o de la divergencia, ref. bib. 5, p. 389) establece que:

$$\int_s \mathbf{q}\mathbf{n} dS = \int_v \nabla \mathbf{q} dV \quad (131.5)$$

Pudiendo incluir los dos términos de (131.5) dentro de la misma integral de volumen:

$$\int_{vc} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \mathbf{q} \right) dV = 0 \quad (131.6)$$

Ya que la ecuación debe cumplirse para cualquier volumen de control arbitrario en el fluido, el integrando de (131.6) debe ser también nulo:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \mathbf{q} = 0} \quad (131.7)$$

Obteniendo así la Ecuación de Continuidad en forma diferencial.

Operando en el segundo término de (131.7):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{q} \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{q} = 0 \quad (131.8)$$

En coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (131.9)$$

Teniendo en cuenta flujo incompresible, que por definición se trata de un fluido cuyos elementos no experimentan variación de volumen ni de masa. Por tanto la densidad de cada elemento fluido permanece constante.

$$\rho = cte$$

La ecuación de continuidad (131.7) quedará reducida a

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (131.10)$$

O lo que es lo mismo:

$$\boxed{\nabla \mathbf{q} = 0} \quad (131.11)$$

Nótese que la ecuación de continuidad para flujo incompresible no depende del tiempo independientemente de si se considera flujo estacionario.

### (1.3.2) Vorticidad

Se considera ahora un elemento fluido. Transcurrido un tiempo  $\Delta t$  las fronteras que limitan dicho elemento fluido habrán sufrido una deformación

El desplazamiento que habrá experimentado el punto  $C$  respecto de  $A$  será:

$$\Delta C = \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \Delta t - v \Delta t = \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \Delta t \quad (132.1)$$

Por tanto, el ángulo girado por el segmento  $AC$  se obtendrá de:

$$\tan \Delta \theta_2 = \frac{\left( \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \Delta t}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t \quad (132.2)$$

Considerando pequeños desplazamientos:

$$\tan \Delta \theta_2 \approx \Delta \theta_2$$

Teniendo en cuenta un incremento diferencial de tiempo:

$$\omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta_2}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (132.3)$$

Operando de forma similar, se obtiene la velocidad angular del segmento  $\overline{AB}$

$$\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta_1}{\Delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (132.4)$$

Definiendo la velocidad angular del elemento fluido como la media de las velocidades angulares, teniendo en cuenta que se está considerando el plano  $X - Y$  y que la velocidad angular es perpendicular al plano estudiado por la regla de Maxwell:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (132.5)$$

Para todos los planos de un elemento de fluido tridimensional, la velocidad angular resultará:

$$\omega = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \quad (132.6)$$

Se denota ahora la vorticidad como:

$$\xi = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (132.7)$$

Que coincide con el rotacional del vector velocidad, por tanto:

$$\xi = \nabla \times \mathbf{q} \quad (132.8)$$

Si se considera flujo irrotacional implica que  $\nabla \times \mathbf{q} = \mathbf{0}$ , es decir, los elementos fluidos solamente experimentan traslación pura en su movimiento.

Además, por la condición de irrotacionalidad existe una función escalar que se denominada función potencial, tal que:

$$\mathbf{q} = \nabla \Phi(x, y, z) \quad (132.9)$$

Por tanto, cada componente del vector velocidad se puede obtener de las derivadas parciales de la función potencial:

$$\mathbf{q} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} \quad (132.10)$$

Tomando (132.9) y sustituyéndola en la definición de la ecuación de continuidad (131.7), se obtiene:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (132.11)$$

Expresión conocida como Ecuación de Laplace.

### (1.3.3) Soluciones de la ecuación de Laplace: Flujo libre y Torbellino

En el presente trabajo se centrará en las 2 soluciones de interés de la ecuación de Laplace, que son el flujo libre y el torbellino.

En primer lugar se establecerán las condiciones de contorno que deben cumplir las soluciones de la ecuación de Laplace.

La componente de la velocidad normal a la superficie del sólido sumergido en el fluido en movimiento debe ser cero:

$$\mathbf{qn} = 0 \quad (133.1)$$

Donde  $\mathbf{n}$  es un vector perpendicular a la superficie del sólido.

Adicionalmente, la perturbación en el flujo provocada por la presencia del sólido debe decaer aguas abajo del mismo hasta recuperar las condiciones existentes aguas arriba, en el flujo no perturbado.

La primera solución de la ecuación de Laplace a considerar es el Flujo Libre. Para ello se define un flujo uniforme con dirección paralela al eje de abscisas y sentido hacia el sentido positivo de  $x$ .

Dicho flujo llevará una velocidad  $U_\infty$ , es decir;

$$\mathbf{q} = U_\infty \vec{i} \quad (133.2)$$

Recuperando la definición de la función potencial:

$$\mathbf{q} = \nabla\Phi$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = U_\infty; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad (133.3)$$

La expresión de la función potencial del flujo libre se obtendrá de

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^x U_\infty dx + \int_0^y 0 dy \\ \Phi &= U_\infty x + C(y) \end{aligned} \quad (133.4)$$

En la resolución de problemas aerodinámicos se emplean las derivadas de la función potencial para obtener las componentes de la velocidad, por tanto se puede eliminar la constante de integración de (133.4) sin perder información. La función potencial del flujo libre será:

$$\boxed{\Phi = U_\infty x} \quad (133.5)$$

Tomando (133.5), la expresión del potencial (132.9) y la expresión de la vorticidad (132.8), se comprueba que la solución del potencial para el flujo libre es irrotacional:

$$\nabla \times \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Y que cumple la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0$$

Quedando validada la expresión del potencial del flujo libre.

Para la modelización del Flujo de Torbellino se considera un flujo con líneas de corriente circulares y concéntricas. La velocidad tangencial en cada línea de corriente circular es constante y se reducirá en una relación inversa al radio. Se considera además que la componente radial de la velocidad es nula.

$$\begin{aligned} q_r &= 0 \\ q_\theta &= \frac{C}{r} \end{aligned} \quad (133.6)$$

Tomando la expresión de la circulación a lo largo de una línea cerrada

$$\Gamma = - \oint_C \mathbf{q} ds \quad (133.7)$$

Operando en (133.7) y sustituyendo (133.6)

$$\Gamma = - \oint_C \mathbf{q} ds = - \int_0^{2\pi} q_\theta r d\theta = - \int_0^{2\pi} C d\theta = -2\pi C \quad (133.8)$$

Por tanto el valor de la constante de (133.6) resultará:

$$C = -\frac{\Gamma}{2\pi} \quad (133.9)$$

Entonces la expresión de la velocidad tangencial (133.6) quedará:

$$q_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (133.10)$$

Y la función potencial se obtendrá de la integración de las dos componentes de la velocidad.

$$\Phi = \int_0^r 0 dr - \int_0^\theta \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = C(r) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (133.11)$$

Nuevamente la constante de (133.11) carece de interés para la resolución de problemas;

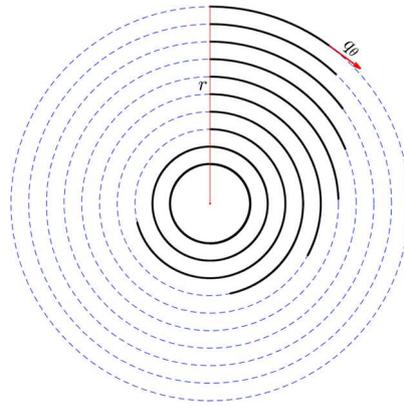
$$\boxed{\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta} \quad (133.12)$$

En coordenadas cartesianas para un torbellino situado en el punto  $(x_0, y_0)$ :

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (133.13)$$

Y las componentes de la velocidad:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\
 v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}
 \end{aligned}
 \tag{133.14}$$



*Figura 133.1: Flujo de torbellino.*

A continuación se comprueba si cumple la condición de irrotacionalidad y la ecuación de Laplace.

Tomando la expresión de la vorticidad (132.7) y sustituyendo las derivadas parciales de (133.14)

$$\begin{aligned}
\xi &= \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \\
\xi &= (0 - 0) \vec{i} + (0 - 0) \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(x - x_0 + y - y_0)(x - x_0 - y + y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^2} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(x - x_0 + y - y_0)(x - x_0 - y + y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^2} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y} \\
\xi &= \nabla \times \mathbf{q} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{133.15}$$

Partiendo nuevamente de las expresiones de las componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas (133.14) y tomando las derivadas parciales respecto a su propia componente:

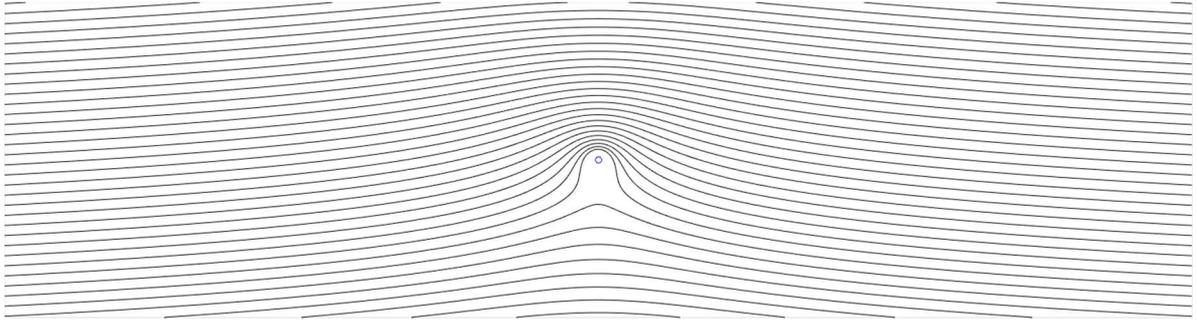
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^2} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^2} \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned} \tag{133.16}$$

Sustituyendo (133.16) en la ecuación de Laplace, comprobamos que se verifica:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Hay que tener en cuenta que las componentes de la velocidad tienen una singularidad cuando la posición del elemento fluido  $(x, y)$  coincide con la posición del torbellino  $(x_0, y_0)$  (en coordenadas cilíndricas  $r \rightarrow 0$ ). En dicho punto la vorticidad tiende a infinito y no se satisface la ecuación de Laplace.

Dado que la ecuación de Laplace es una ecuación diferencial de 2º orden lineal, la superposición (suma) de sus soluciones también será solución de la ecuación de Laplace.



*Figura 133.2: Líneas de corriente de la superposición de flujo libre y flujo de torbellino.*

En la Figura 133.2 se aprecia como el fluido una vez ha superado la singularidad, va recuperando las condiciones que tenía aguas arriba del torbellino.

Una vez obtenidas estas soluciones, ya se dispone de las herramientas suficientes para poder desarrollar la TPF.

### (1.3.4) Ecuación fundamental de la TPF

Dependiendo de la simetría o no del perfil se darán 2 casos posibles. En caso de perfiles simétricos la línea de curvatura coincide con la cuerda, lo que permitirá hacer ciertas simplificaciones, mientras que el caso general es el de perfiles con curvatura o asimétricos.

Se comenzará planteando el caso general, es decir, el de perfiles con curvatura y posteriormente se realizarán las simplificaciones necesarias para el caso de perfiles simétricos.

Para abordar el análisis se considerará una superficie de torbellinos situada sobre la línea de curvatura. Adicionalmente, la línea de curvatura se tratará como una línea de corriente del fluido, es decir, una nueva condición de contorno que hay que introducir es que el fluido no puede atravesar la línea de curvatura, por tanto:

$$U_{\infty}^n + U_i^n = 0 \quad (134.1)$$

Donde  $U_{\infty}^n$  es la componente normal de la velocidad del flujo uniforme y  $U_i^n$  es la componente normal de la velocidad inducida por la superficie de vórtices en un punto arbitrario  $P$ .

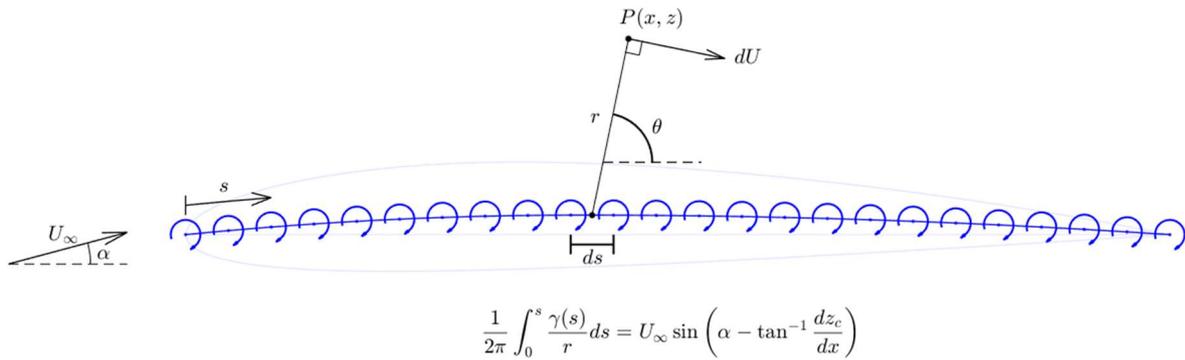


Figura 134.1: Distribución de torbellinos sobre la Línea de curvatura del perfil.

La velocidad del flujo libre se verá perturbada por la presencia de la Línea de curvatura, por lo tanto la componente normal será:

$$U_{\infty}^n = U_{\infty} \sin \left( \alpha - \tan^{-1} \frac{dz_c}{dx} \right) \quad (134.2)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo de ataque del perfil,  $\frac{dz_c}{dx}$  es la pendiente de la Línea de curvatura. Si  $\alpha$  es pequeño,  $\sin \alpha \approx \alpha$  y si la variación de la curvatura con  $x$  es pequeña  $\tan^{-1} \frac{dz_c}{dx} \approx \frac{dz_c}{dx}$  por tanto la expresión de la componente normal del flujo libre perturbado por la línea de curvatura será:

$$U_{\infty}^n = U_{\infty} \left( \alpha - \frac{dz_c}{dx} \right) \quad (134.3)$$

El término de (134.1) de la velocidad inducida por la superficie de torbellinos se obtiene de la expresión (133.10), pero integrando a lo largo de toda la línea de curvatura:

$$U_i^n = -\frac{1}{2\pi} \int_0^s \frac{\gamma(s)}{r} ds \quad (134.4)$$

La Teoría de perfiles finos impone que la curvatura debe ser pequeña, este hecho permite situar la superficie de vórtices sobre la cuerda del perfil ya que  $\gamma(s) \approx \gamma(x)$ , además no existe solución analítica para un perfil de forma y espesor arbitrarios. Según la figura (134.1) en la que se representa un perfil NACA 2411:

$$\frac{s}{c} = 1.0011 \Rightarrow s \approx c$$

$$ds \approx dx$$

$$\gamma(s) \approx \gamma(x)$$

$r$  representa la distancia desde un elemento diferencial  $ds$  hasta un punto arbitrario  $P$ . Si se sitúa el punto  $P$  sobre la cuerda del perfil,  $r = x - x_0$ . Por tanto la expresión (134.4) se puede reescribir como:

$$U_i^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x)}{x_0 - x} dx \quad (134.5)$$

Sustituyendo (134.3) y (134.5) en (134.1) se obtiene la ecuación fundamental de la Teoría de perfiles finos:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x)}{x - x_0} dx = U_\infty \left( \alpha - \frac{dz_c}{dx} \right)} \quad (134.6)$$

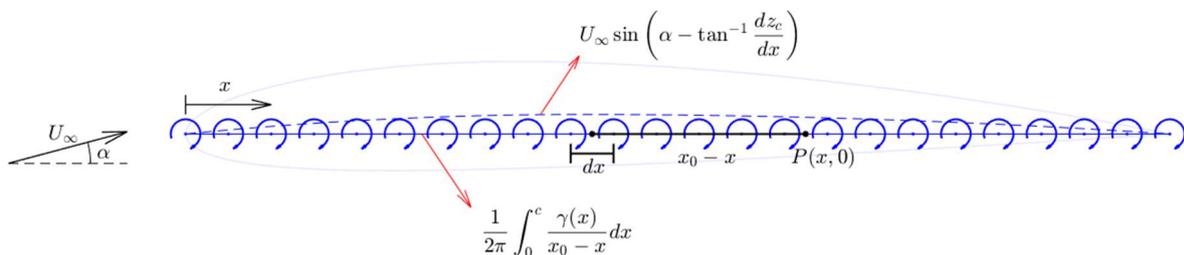


Figura 134.2: Distribución de torbellinos sobre la cuerda del perfil manteniendo la línea de curvatura como una línea de corriente.

La solución del problema consiste en despejar  $\gamma(x)$  de (134.6), para ello se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}x &= \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \\dx &= \frac{c}{2} \sin \theta d\theta \\x_0 &= \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_0)\end{aligned}\tag{134.7}$$

Sustituyendo (134.7) en (134.6) y con el correspondiente cambio en los límites de integración, resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = U_\infty \left( \alpha - \frac{dz_c}{dx} \right)\tag{134.8}$$

Se busca obtener una solución para  $\gamma(\theta)$ , que cumpla la condición de Kutta ( $\gamma(\pi) = 0$ ) y que establezca la Línea de curvatura como una línea de corriente del fluido. La solución buscada será del tipo:

$$\gamma(\theta) = 2U_\infty \left( A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right)\tag{134.9}$$

Sustituyendo (134.9) en (134.8)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \alpha - \frac{dz_c}{dx}\tag{134.10}$$

Separando la integral

$$\frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi A_n \frac{\sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \right] = \alpha - \frac{dz_c}{dx}\tag{134.11}$$

Operando en la primera integral de (134.11)

$$\begin{aligned}A_0 \int_0^\pi \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \\A_0 \int_0^\pi \frac{\cos 0\theta + \cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \\A_0 \left[ \int_0^\pi \frac{\cos 0\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta + \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \right]\end{aligned}\tag{134.12}$$

Para resolver las integrales de la expresión (134.12) se empleará la Identidad de Glauert:

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin \theta_0}; \quad (134.13)$$

$$\frac{\pi \sin 0\theta_0}{\sin \theta_0} = 0$$

Operando de forma análoga sobre la segunda integral de (134.12)

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{\pi \sin \theta_0}{\sin \theta_0} = \pi \quad (134.14)$$

Sustituyendo (134.13) y (134.14) en (134.12):

$$A_0 \left[ \int_0^\pi \frac{\cos 0\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta + \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \right] = A_0 \pi \quad (134.15)$$

Se evalúa ahora la otra integral presente en (134.11):

$$A_n \int_0^\pi \frac{\sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \quad (134.16)$$

Empleando la siguiente relación trigonométrica:

$$\sin n\theta \sin \theta = \frac{1}{2} [\cos((n-1)\theta) - \cos((n+1)\theta)] \quad (134.17)$$

Sustituyendo (134.17) en (134.16) y empleando de nuevo la identidad de Glauert (134.13).

$$\frac{A_n}{2} \int_0^\pi \frac{\cos((n-1)\theta) - \cos((n+1)\theta)}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{A_n}{2} \left[ \frac{\pi \sin(n-1)\theta_0}{\sin \theta_0} - \frac{\pi \sin(n+1)\theta_0}{\sin \theta_0} \right] = \quad (134.18)$$

$$= -A_n \pi \cos n\theta_0$$

Sustituyendo (134.14) y (134.17) en (134.10) resulta:

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta_0 = \alpha - \frac{dz_c}{dx} \quad (134.19)$$

Que corresponde a una serie de Fourier tipo par (Ref. bib. 5 pp 212-216).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (134.20)$$

Comparando los términos de (134.18) y (134.19):

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{2} \\ A_n &= -a_n \\ f(x) &= \alpha - \frac{dz_c}{dx} \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \end{aligned}$$

Por tanto, los coeficientes de la serie de Fourier original (134.19) quedarán de la siguiente forma:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \alpha - \frac{dz_c}{dx} d\theta_0$$

$$\boxed{A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz_c}{dx} d\theta_0} \quad (134.20)$$

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \alpha - \frac{dz_c}{dx} \right) \cos n\theta_0 d\theta_0 = -\frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \alpha \cos n\theta_0 d\theta_0 - \int_0^{\pi} \frac{dz_c}{dx} \cos n\theta_0 d\theta_0 \right]$$

$$\boxed{A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz_c}{dx} \cos n\theta_0 d\theta_0} \quad (134.21)$$

La condición de Kutta establece que el fluido debe abandonar el perfil por el borde de salida de forma "suave". Esto se consigue imponiendo que la velocidad con la que el fluido abandona la parte superior del perfil debe ser igual a la velocidad con la que abandona la parte inferior. Como la intensidad de la superficie de vórtices es precisamente la diferencia entre la velocidad en la parte superior del perfil y la inferior, se debe cumplir que:

$$\gamma(\pi) = 0$$

Según la solución de los coeficientes de la serie de Fourier, éstos no dependen de  $\theta$  sino de la distribución de torbellinos  $\theta_0$ . Recuperando la expresión (134.9), aplicando la regla de l'Hopital y calculando el límite.

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \gamma(\theta) = 2U_{\infty} \left( A_0 \frac{-\sin \pi}{\cos \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi \right) = 0$$

Se comprueba que la solución propuesta cumple la condición de Kutta.

Tal y como se ha comentado al principio del punto (1.3.4) la solución de la ecuación fundamental de la TPF se ha calculado para el caso general, es decir, para perfiles con curvatura. La simplificación necesaria para adaptar la solución a los perfiles simétricos es considerar que la línea de curvatura coincide con la cuerda, ello implica que la pendiente de la línea de curvatura es nula ( $\frac{dz_c}{dx} = 0$ ), por tanto los coeficientes (134.20) y (134.21) quedarán de la siguiente forma para perfiles simétricos:

|                |           |
|----------------|-----------|
| $A_0 = \alpha$ | (134.20b) |
| $A_n = 0$      | (134.21b) |

### (1.3.5) Coeficientes aerodinámicos

Para obtener la circulación total sobre un perfil habrá que sumar la aportación de la toda la superficie de torbellinos, es decir:

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x) dx \quad (135.1)$$

Aplicando nuevamente el cambio de variable de (134.7), la expresión anterior quedará:

$$\Gamma = \frac{c}{2} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) \sin \theta d\theta \quad (135.2)$$

Sustituyendo la expresión (134.9) en (135.1) y operando:

$$\Gamma = cU_{\infty} \int_0^{\pi} \left( A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \sin \theta d\theta$$

$$\Gamma = cU_{\infty} \left[ A_0 \int_0^{\pi} 1 + \cos \theta d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \sin \theta \sin n\theta d\theta \right]$$

$$\int_0^{\pi} 1 + \cos \theta \, d\theta = \pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta \sin n\theta \, d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \neq 1 \end{cases}$$

Por tanto la circulación sobre un perfil aerodinámico será:

$$\Gamma = U_{\infty} c \pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad (135.3)$$

Según el teorema de Kutta-Joukowski, la sustentación por unidad de envergadura es:

$$L' = \rho_{\infty} U_{\infty} \Gamma$$

Donde  $\rho_{\infty}$  representa la densidad del fluido en el que se encuentra inmerso el perfil. Sustituyendo (135.3) en la expresión anterior:

$$L' = \rho_{\infty} U_{\infty}^2 c \pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad (135.4)$$

Adimensionalizando la expresión anterior con la presión dinámica ( $q_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2$ ) y la longitud de la cuerda del perfil ( $c$ ), se obtiene el primer coeficiente aerodinámico: El coeficiente de sustentación.

$$C_l = \frac{L'}{q_{\infty} c} = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad (135.5)$$

El coeficiente de sustentación es proporcional al ángulo de ataque del perfil, además se debe tener en cuenta la aportación de la curvatura del perfil que incrementa con una constante independiente de  $\alpha$  el valor del coeficiente. Por este motivo conviene expresar el coeficiente de sustentación como la pendiente de la curva de sustentación  $C_{l\alpha}$  más la sustentación que origina la curvatura del perfil  $C_{l0}$ . De los dos coeficientes de (135.5), solo  $A_0$  depende de  $\alpha$ :

$$C_{l\alpha} = \frac{dC_l}{d\alpha} = 2\pi \quad (135.6)$$

Para obtener el valor de la sustentación que aporta la curvatura del perfil habrá que evaluar la expresión (135.5) para ángulo de ataque nulo. Sustituyendo el valor de los coeficientes (134.20) y (134.21):

$$\begin{aligned}
C_{l0} &= 2\pi \left( 0 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} d\theta_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} \cos \theta_0 d\theta_0 \right) \\
C_{l0} &= 2 \left( \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} \cos \theta_0 d\theta_0 - \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} d\theta_0 \right) \quad (135.7) \\
C_{l0} &= 2 \left( \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \right)
\end{aligned}$$

Por tanto se puede expresar el coeficiente de sustentación de la siguiente forma:

$$\boxed{C_l = C_{l\alpha} \alpha + C_{l0}} \quad (135.8)$$

Resulta trivial suponer que para perfiles simétricos  $C_{l0} = 0$ .

Adicionalmente existe otro valor de interés que conviene deducir. Se trata del ángulo de incidencia para el que el perfil no aporta sustentación. Dicho ángulo se representa por  $\alpha_0$ . Basta con igualar a 0 la expresión (135.8):

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= -\frac{C_{l0}}{C_{l\alpha}} \\
\boxed{\alpha_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0} \quad (135.9)
\end{aligned}$$

Debido a la geometría del perfil aerodinámico, la sustentación que aporta cada torbellino diferencial sobre la cuerda del perfil producirá un momento resultante. Considerando el diferencial de sustentación de cada torbellino y tomando momentos respecto al borde de ataque:

Recuperando la definición de sustentación de Kutta-Joukowski:

$$L' = \rho_\infty U_\infty \Gamma$$

Por tanto el diferencial de sustentación y de circulación tendrán esta expresión respectivamente:

$$\begin{aligned}
dL &= \rho_\infty U_\infty d\Gamma \\
d\Gamma &= \gamma(x) dx
\end{aligned}$$

El Momento de Cabeceo sobre el borde de ataque se obtendrá de:

$$M_{LE} = -\rho_\infty U_\infty \int_0^c x d\Gamma dx \quad (135.10)$$

Volviendo a emplear la expresión de la circulación con el correspondiente cambio de variable y sustituyendo en (135.10)

$$\begin{aligned}
M_{LE} &= -\rho_{\infty} U_{\infty} \int_0^{\pi} \frac{c}{2} (1 - \cos \theta) \gamma(\theta) \frac{c}{2} \sin \theta d\theta \\
M_{LE} &= -\rho_{\infty} U_{\infty}^2 \frac{c^2}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos \theta) \left( A_0 (1 + \cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sin \theta \right) d\theta
\end{aligned} \tag{135.11}$$

Separando las integrales de la expresión (135.11) y operando en cada una de ellas

$$I1 = \int_0^{\pi} \left( A_0 (1 + \cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sin \theta \right)$$

$$i11 = A_0 \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta = A_0 \pi$$

$$i12 = A_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin \theta d\theta = \frac{A_1 \pi}{2}$$

$$(i12 = 0 \text{ para } n \neq 1)$$

$$I2 = \int_0^{\pi} \left( -A_0 (\cos \theta + \cos^2 \theta) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sin \theta \cos \theta \right)$$

$$i21 = -A_0 \int_0^{\pi} (\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = -\frac{A_0 \pi}{2}$$

$$i22 = -A_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{A_2 \pi}{4}$$

$$(i22 = 0 \text{ para } n \neq 2)$$

$$M_{LE} = -\rho_{\infty} U_{\infty}^2 \frac{c^2}{2} (i11 + i12 + i21 + i22)$$

Finalmente

$$\boxed{M_{LE} = -\rho_{\infty} U_{\infty}^2 \pi \frac{c^2}{4} \left( A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)} \tag{135.12}$$

Adimensionalizando (135.12) con la presión dinámica ( $q_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2$ ) y con el cuadrado de la longitud de la cuerda del perfil ( $c^2$ ), se obtiene el coeficiente de momento de cabeceo respecto al borde de ataque:

$$\boxed{C_{m,LE} = -\frac{\pi}{2} \left( A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)} \tag{135.13}$$

Tal y como se aprecia en la expresión del momento de cabeceo, éste depende del ángulo de incidencia del perfil debido al coeficiente  $A_0$ . Más adelante se discutirá sobre la idoneidad de considerar el momento de cabeceo respecto al borde de ataque.

Con la expresión de la sustentación se obtiene el valor de su resultante, pero no ofrece información de su punto de aplicación. Dicha sustentación es una fuerza distribuida sobre una superficie y el punto donde se encuentra la resultante se denomina centro de presión y se representa por  $x_{cp}$ . Empleando la expresión para obtener la resultante de una fuerza distribuida:

$$x_{cp} = \frac{\int_0^c x dL dx}{\int_0^c dL dx} = \frac{-M_{LE}}{L'} = \frac{\rho_\infty U_\infty^2 \pi \frac{c^2}{4} \left( A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)}{\rho_\infty U_\infty^2 c \pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right)} = \frac{c \left( A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)}{4 \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right)}$$

Operando en la expresión anterior finalmente se puede expresar como:

$$x_{cp} = \frac{c}{4} \left( 1 + \frac{\pi}{C_l} (A_1 - A_2) \right) \quad (135.14)$$

Observando la expresión (135.14) se aprecia la presencia del coeficiente de sustentación, que depende de  $\alpha$ , por tanto la posición del centro de presión  $x_{cp}$  no es fija y cambia con  $\alpha$ . Graficando  $x_{cp}$  respecto a  $\alpha$  de un perfil con curvatura arbitrario se aprecia su comportamiento:

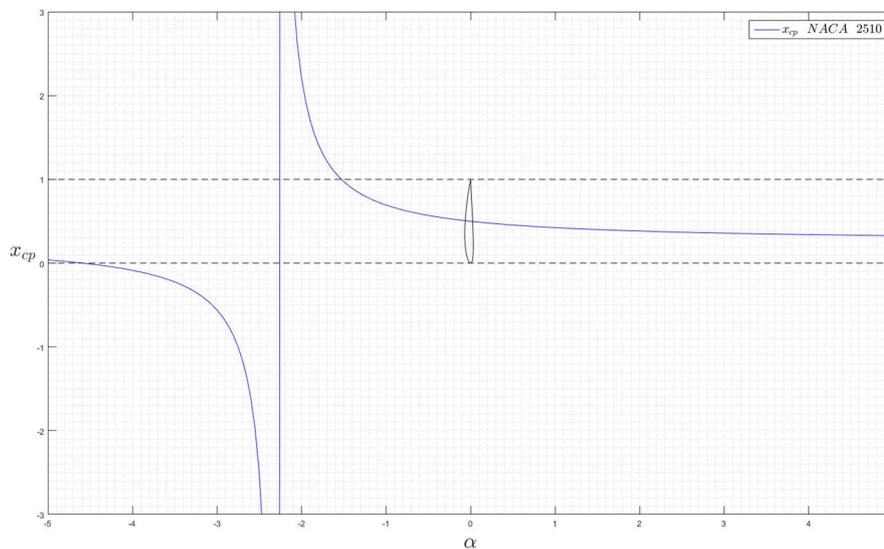


Figura 135.1: Posición del centro de presión en un perfil NACA 2510.

Lo primero que se aprecia en la Figura 135.1 es que existe un valor de  $\alpha$  en el que  $x_{cp} \rightarrow \pm\infty$ . Recuperando la expresión (135.14) se observa que el coeficiente de sustentación ( $C_l$ ) se encuentra en el denominador y éste se anula en  $\alpha_0$ . Por tanto

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0^-} x_{cp} = -\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0^+} x_{cp} = +\infty$$

Otro hecho importante es que en las inmediaciones de  $\alpha_0$ ,  $x_{cp}$  se encuentra fuera del perfil.

A pesar de que en el centro de presión no existe momento de cabeceo por ser el punto donde se sitúa la resultante de la sustentación, este punto no resulta de interés práctico ya que su posición varía en el rango  $] -\infty, +\infty[$ . Se hace necesario trasladar la resultante de la sustentación y el momento de cabeceo a un punto fijo sobre el perfil.

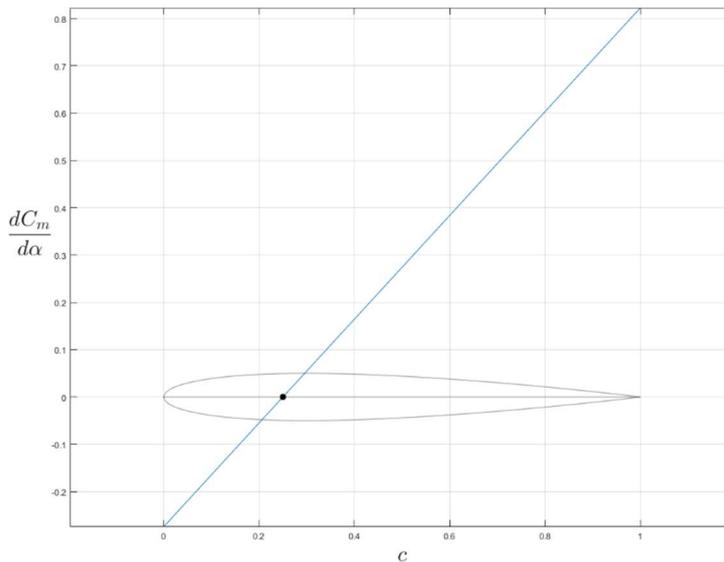
El momento de cabeceo a lo largo de la cuerda del perfil se define como:

$$M = M_{LE} + xL' \quad (135.15)$$

Del mismo modo se define un coeficiente de momento de cabeceo sustituyendo en (135.15) los correspondientes coeficientes adimensionales.

$$C_m = C_{m,LE} + xC_l \quad (135.16)$$

A continuación se comprueba gráficamente el comportamiento de la variación del coeficiente de momento de cabeceo ( $C_m$ ) respecto al ángulo de incidencia ( $\alpha$ ) a lo largo de la cuerda del perfil para comprobar si existe algún punto donde  $C_m$  permanezca constante.



*Figura 135.2: Variación del coeficiente de momento de cabeceo respecto a  $\alpha$  a lo largo de la cuerda de un perfil.*

Efectivamente existe un punto sobre el perfil en el que  $\frac{dC_m}{d\alpha} = 0$ . Así pues se halla dicho punto:

$$\frac{dC_m}{d\alpha} = \frac{1}{2}\pi(4x - 1)$$

$$x = \frac{1}{4}$$

El punto obtenido se conoce como centro aerodinámico y se representa por  $x_{ca}$ , se debe tener en cuenta que la posición de  $x_{ca}$  se ha obtenido mediante los coeficientes adimensionales, por ello la expresión del centro aerodinámico es:

$$x_{ca} = \frac{c}{4} \quad (135.17)$$

Tomando las expresiones (135.15) y (135.16), el momento de cabeceo y el coeficiente de momento en el centro aerodinámico ( $x_{ca}$ ) resultan:

$$M_{ca} = -\rho_{\infty} U_{\infty}^2 \pi \frac{c^2}{8} (A_1 - A_2) \quad (135.18)$$

$$C_{m,ca} = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \quad (135.19)$$

A modo de resumen de la TPF se incluye la siguiente tabla con la recopilación de las principales expresiones obtenidas:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} d\theta_0 \\
 A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} \cos n\theta_0 d\theta_0 \\
 L' &= \rho_\infty U_\infty^2 c \pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \\
 C_l &= 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \\
 C_{l0} &= 2 \left( \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \right) \\
 M_{LE} &= -\rho_\infty U_\infty^2 \pi \frac{c^2}{4} \left( A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) \\
 C_{m,LE} &= -\frac{\pi}{2} \left( A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) \\
 M_{ca} &= -\rho_\infty U_\infty^2 \pi \frac{c^2}{8} (A_1 - A_2) \\
 C_{m,ca} &= -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \\
 \alpha_0 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \\
 x_{cp} &= \frac{c}{4} \left( 1 + \frac{\pi}{C_l} (A_1 - A_2) \right) \\
 x_{ca} &= \frac{c}{4}
 \end{aligned}$$

*Tabla 135.1: Resumen de coeficientes de la Teoría de Perfiles Finos.*

## (1.4) Métodos numéricos: Método de los paneles

En el punto (1.3.4) se han detallado las simplificaciones necesarias en la geometría de un perfil aerodinámico y en las condiciones de contorno para poder abordar su análisis analíticamente mediante la Teoría de perfiles finos. Tales simplificaciones suponen cierta pérdida de información de modo que los resultados que se obtienen por métodos analíticos, aunque están cerca, no se ajustan a la realidad del problema. No obstante, para el caso de un perfil sin espesor (placa plana) la TPF sí consigue resultados acertados.

Se podría decir que el método de los paneles consiste en distribuir placas planas sobre la superficie del perfil para aplicar la TPF a cada una de ellas y así obtener la intensidad de cada torbellino.

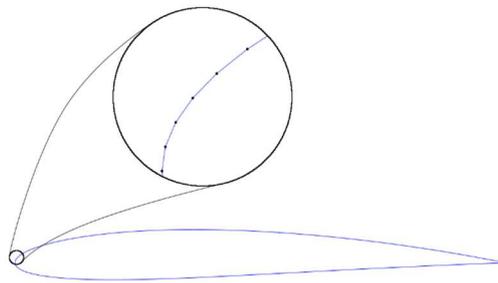


Figura 14.1: Representación de un perfil mediante paneles.

### (1.4.1) Discretización de la geometría

La forma de distribuir los paneles sobre la superficie del perfil influye en el resultado obtenido. Una distribución que acumule puntos donde mayor sea la pendiente del perfil convergerá con un número inferior de paneles comparado con una distribución lineal de puntos. Adicionalmente si la geometría no está correctamente definida, especialmente en el borde de salida, debido a la necesidad de imponer la condición de Kutta, puede llevar a resultados inciertos. Este hecho es sencillo que se produzca al introducir perfiles mediante archivos de puntos e interpolar puntos intermedios para incrementar el número de paneles.

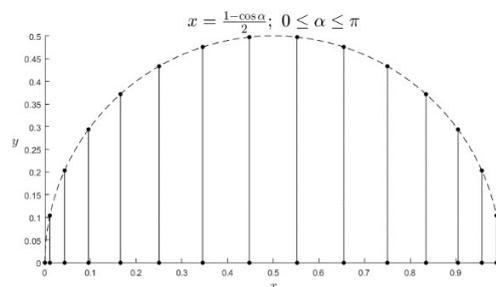


Figura 141.1: Distribución de puntos tipo coseno.

Se aprecia en la Figura 141.1 como la proyección de los puntos de la semicircunferencia sobre el eje de abscisas se ajusta al tipo de distribución de puntos necesaria.

Una discretización de puntos lineal, al haber una separación constante entre los puntos, no garantiza que el perfil quede correctamente definido en las zonas con mayor curvatura.

En el presente trabajo y la implementación en la aplicación de Matlab se empleará la distribución tipo coseno.



Figura 141.2: Perfil NACA 3510 con discretización lineal (arriba) y con discretización tipo coseno (abajo). 150 paneles.

La influencia en los resultados del tipo de distribución se representa en la siguiente figura:

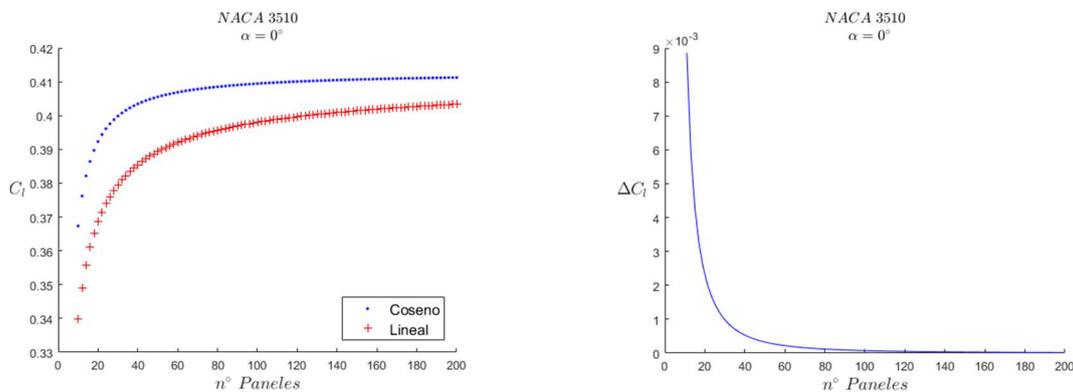


Figura 141.3: Convergencia de resultados para un mismo perfil aerodinámico con distinta distribución de puntos.

Se observa como una discretización tipo coseno converge más rápido que una de tipo lineal. Además, los métodos de paneles son muy sensibles a la forma de establecer la condición de Kutta ( $\gamma(c)=0$ ). Para ello, las velocidades del último panel del intradós y del extradós deben ser iguales. En una discretización tipo coseno, la longitud de cada panel va decreciendo al acercarse al borde de salida, siendo la longitud más pequeña la del último panel. Esto permite que la solución vaya adaptándose “suavemente” hasta satisfacer la condición de Kutta.

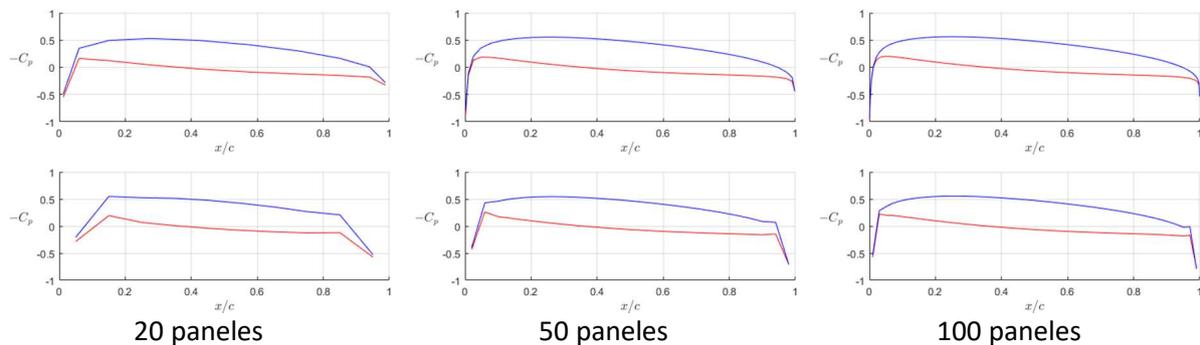


Figura 141.4: Representación del coeficiente de presión de un perfil NACA 3510 comparando las dos distribuciones de puntos. Arriba tipo coseno, abajo tipo lineal.

Se aprecia como en una discretización lineal, la condición de Kutta se cumple de una forma abrupta, incluso para un número moderado de paneles. En el borde de ataque el fluido ve una arista para el caso lineal, mientras que al reducir el tamaño de los paneles, dicha arista se redondea permitiendo que la solución se vaya adaptando a la zona de mayor variación de la curvatura de la geometría del perfil.

El principal inconveniente de una discretización tipo coseno es que en los puntos intermedios del perfil el tamaño de los paneles es mayor que en una lineal. Debido a que generalmente en un perfil aerodinámico las curvaturas son pequeñas, no debería suponer ningún problema salvo en el caso de que el perfil tuviera un cambio brusco de dirección como sucede en el caso de un perfil con alerón. Se debería considerar una distribución que acumulara puntos en la raíz del alerón. En la siguiente figura se muestra la distribución de puntos propuesta (aunque no se implementará en el presente trabajo):



Figura 141.5: Distribución propuesta para perfiles con alerón integrado.

#### (1.4.2) Selección de la singularidad: El torbellino

Aunque existen varias opciones a la hora de seleccionar el tipo de singularidad como pueden ser manantiales, dobletes, torbellinos o una combinación, para mantener la similitud con la teoría de perfiles finos, se opta por seleccionar el torbellino como singularidad. Así mismo, dependiendo de si se consideran singularidades puntuales, de intensidad constante o de intensidad lineal se estaría hablando de soluciones de orden cero, primer orden o segundo orden.

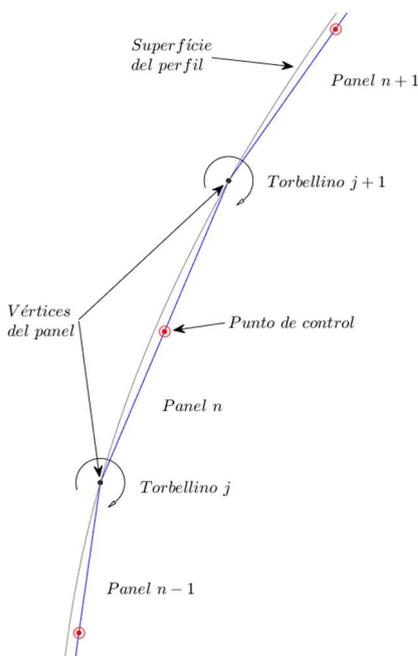


Figura 142.1: Distribución de paneles, torbellinos y puntos de control sobre la superficie del perfil.

Las soluciones de orden cero tienen la ventaja de ser de fácil implementación y con un coste computacional muy bajo, permiten establecer las condiciones de contorno en la propia curvatura del perfil en lugar de en la cuerda pero solamente se cumplen en el punto donde se encuentra la singularidad.

Por otra parte, las soluciones de primer orden consisten en subdividir cada panel en elementos diferenciales de panel y repartir la intensidad de la singularidad sobre toda la superficie del panel. Es decir, consideran una intensidad de la singularidad constante sobre el panel. El inconveniente que tiene este tipo de distribución es que presenta discontinuidades en la unión de un panel con el siguiente. Al considerar como singularidad el torbellino permitiría resolver perfiles sustentadores con espesor, sin embargo a la hora de establecer el sistema de ecuaciones, es necesario eliminar una para "forzar" la condición de Kutta en el borde de salida.

Las soluciones de segundo orden (o superiores) parten de las soluciones de primer orden, pero añadiendo la condición de que en los bordes de cada panel la intensidad de la singularidad debe ser igual a la de los paneles vecinos, de esa forma se eliminan las discontinuidades en la transición entre paneles. Adicionalmente permiten incluir la condición de Kutta sin necesidad de eliminar ninguna ecuación del sistema.

El método de los paneles implementado en la aplicación de Matlab emplea una distribución de torbellinos situados en los extremos de cada panel con intensidad lineal descrito en la ref. bib. 2 pp 303-306.

En la Figura 142.1 se muestra la colocación de los paneles sobre el perfil aerodinámico. Se puede observar que los puntos de control donde se establecen las condiciones de contorno se encuentran ligeramente por debajo del perfil real y sólo la posición de los torbellinos coincide. Este hecho puede llevar a pensar que este método tampoco resuelve el problema real, aunque cabe destacar que la distancia entre el punto de control y el perfil real, para 100 paneles, es del orden de  $10^{-4} c$  en la parte con mayor curvatura (borde de ataque).

### (1.4.3) Cálculo de coeficientes

Para abordar el cálculo de las intensidades de los torbellinos situados en los límites de los paneles se deben definir los elementos a tener en cuenta:

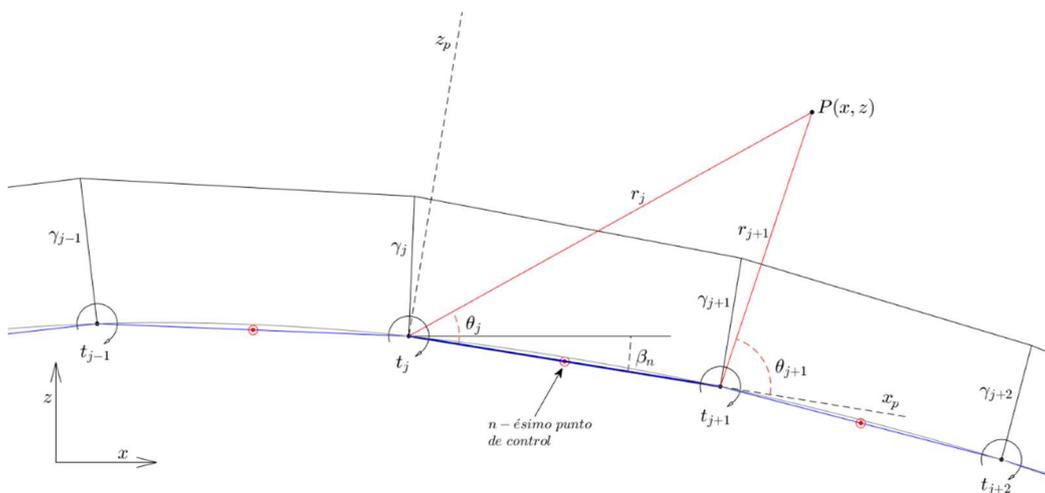


Figura 143.1: Nomenclatura considerada implementar el método de torbellinos de intensidad lineal.

En la Figura 143.1 se muestran los elementos para calcular la influencia sobre un punto arbitrario  $P$ , objeto de estudio, de un panel en el que la intensidad varía de forma lineal.

Dicho punto se trasladará iterativamente al punto de control que se sitúa en el centro de cada panel que forma el perfil. De esta forma se obtendrá la influencia de cada panel sobre los demás para que

$$U_{\infty}^n + U_i^n = 0$$

Hay que tener en cuenta es que en cada panel habrá dos incógnitas, que serán las intensidades de los torbellinos de modo que al calcularlas se obtenga una intensidad lineal sobre todo el panel.

Para el cálculo del potencial del panel se considera primero una intensidad constante sobre la superficie a la que posteriormente por el principio de superposición se suma la intensidad lineal que garantiza que no se producen saltos entre el panel estudiado y los paneles vecinos.

Siguiendo un esquema similar al planteado en la ref. bib. 2, pp 303-319 a continuación se plantea la metodología para obtener las intensidades de los torbellinos.

Sea un punto arbitrario  $P$  situado en las coordenadas  $(x, z)$  referenciadas al sistema de coordenadas global. Se considera ahora un panel  $n$  cuya posición global viene determinada por las coordenadas de sus bordes  $t_j$  y  $t_{j+1}$ , que son respectivamente  $(x_1, z_1)$  y  $(x_2, z_2)$ . La inclinación  $\beta$  de dicho panel  $n$  se obtiene de

$$\beta_n = \tan^{-1} \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \quad (143.1)$$

Se establece seguidamente un sistema de referencia ligado al panel  $n$ , cuyo origen se encuentra en el punto  $(x_1, z_1)$  de dicho panel. El eje de ordenadas del sistema ligado es perpendicular al panel y el eje de abscisas transcurre paralelo al panel.

Para continuar se transforman las coordenadas del punto  $P$  y las del panel  $n$  al nuevo sistema de referencia mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta_n & -\sin \beta_n \\ \sin \beta_n & \cos \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1' \\ z_1' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta_n & -\sin \beta_n \\ \sin \beta_n & \cos \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ z_1 - z_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2' \\ z_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta_n & -\sin \beta_n \\ \sin \beta_n & \cos \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (143.2)$$

Pasando a denominar los puntos como  $P'(x', z')$ ,  $t'_j(x'_1, z'_1)$  y  $t'_{j+1}(x'_2, z'_2)$ . Evidentemente  $t'_j(x'_1, z'_1) = t'_j(0,0)$  y  $t'_{j+1}(x'_2, z'_2) = t'_{j+1}(x'_2, 0)$  en el sistema de referencia ligado al panel, pero se mantendrá la notación durante el desarrollo.

Como se ha descrito anteriormente una distribución de torbellinos de intensidad lineal consta de la superposición de dos soluciones, una distribución de intensidad constante más una lineal.

$$\gamma(x_p) = \gamma_0 + \gamma_1(x_p - x'_1) \quad (143.3)$$

El potencial de la distribución constante será la integral del potencial a lo largo de la longitud del panel:

$$\Phi_c = \int_{x'_1}^{x'_2} \Phi dx_p$$

$$\Phi_c = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \int_{x'_1}^{x'_2} \tan^{-1} \frac{z'}{x' - x_p} dx_p$$

Cuya solución es:

$$\Phi_c = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \left[ (x' - x'_1)\theta_1 - (x' - x'_2)\theta_2 + \frac{z'}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \right] \quad (143.4)$$

Donde

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{z' - z'_1}{x' - x'_1}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{z' - z'_2}{x' - x'_2}$$

$$r_1 = \sqrt{(x' - x'_1)^2 + (z' - z'_1)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x' - x'_2)^2 + (z' - z'_2)^2} \quad (143.5)$$

Las velocidades de la distribución constante presentaran las siguientes expresiones

$$u'_c = \frac{\gamma_0}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$w'_c = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (143.6)$$

Por otra parte el potencial de la distribución lineal será la integral del potencial lineal a lo largo de la longitud del panel:

$$\Phi_l = \int_{x'_1}^{x'_2} x_p \Phi dx_p$$

$$\Phi_l = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x'_1}^{x'_2} x_p \tan^{-1} \frac{z'}{x' - x_p} dx_p$$

Con la solución siguiente:

$$\Phi_l = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \left[ x' z' \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{z'}{2} (x'_1 - x'_2) + \frac{x'^2 - x_1'^2 - z'^2}{2} \theta_1 - \frac{x'^2 - x_2'^2 - z'^2}{2} \theta_2 \right] \quad (143.7)$$

Las componentes de la velocidad referidas al panel se obtendrán de las respectivas derivadas parciales del potencial (143.7).

$$u'_l = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \left[ z' \ln \frac{r_1}{r_2} - x' (\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$w'_l = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \left[ x' \ln \frac{r_1}{r_2} + (x'_1 - x'_2) + z' (\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (143.8)$$

La velocidad inducida por la superposición de las dos aportaciones de las distribuciones constante y lineal será la suma de ambas velocidades.

$$\begin{aligned} u'_t &= u'_c + u'_l = \frac{\gamma_0}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) - \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[ z' \ln \frac{r_1}{r_2} - x'(\theta_2 - \theta_1) \right] \\ w'_t &= w'_c + w'_l = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} - \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[ x' \ln \frac{r_1}{r_2} + (x'_1 - x'_2) + z'(\theta_2 - \theta_1) \right] \end{aligned} \quad (143.9)$$

Regresando a la nomenclatura empleada en la Figura 143.1 los subíndices 1 y 2 se refieren a los bordes del panel  $n, j$  y  $j + 1$  respectivamente.

Teniendo en cuenta que la distribución lineal impone que las intensidades en el borde del panel deben ser iguales a las de los paneles contiguos, las intensidades  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  deben cumplir que:

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \gamma_0 \\ \gamma_{j+1} &= \gamma_0 + \gamma_1(x'_2 - x'_1) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \gamma_j \\ \gamma_1 &= \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{(x'_2 - x'_1)} \end{aligned} \quad (143.10)$$

Sustituyendo (143.10) en (143.9)

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\gamma_j}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) - \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{2\pi(x'_2 - x'_1)} \left[ z' \ln \frac{r_1}{r_2} - x'(\theta_2 - \theta_1) \right] \\ w' &= -\frac{\gamma_j}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} - \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{2\pi(x'_2 - x'_1)} \left[ x' \ln \frac{r_1}{r_2} + (x'_1 - x'_2) + z'(\theta_2 - \theta_1) \right] \end{aligned} \quad (143.11)$$

Se debe recordar que las expresiones obtenidas en (143.11) están transformadas al sistema de referencia del panel, por tanto es necesario expresar las componentes de la velocidad respecto al sistema de referencia global mediante la premultiplicación de la correspondiente matriz de rotación.

Con objeto de facilitar la implementación de las expresiones anteriores, se expresan a continuación de forma matricial. Previamente se separan en coeficientes los valores que multiplican a  $\gamma_j$  y  $\gamma_{j+1}$  de cada componente de la velocidad<sup>3</sup>:

<sup>3</sup> En la ref. bib. 2, p 303 aparecen unas expresiones de las componentes de la velocidad mucho menos amigables debido a que, al contrario de lo que expresan los propios autores, se intuye que se han reordenado respecto a  $(\theta_{j+1} - \theta_j)$  en lugar de  $\gamma_j$  y  $\gamma_{j+1}$ . Por precaución se han dado valores a ambas expresiones comprobando que el resultado coincide.

$$\begin{aligned}
C_{u',\gamma_j} &= -\frac{(x'_1 - x'_2 + x')(\theta_1 - \theta_2) + z' \ln \frac{r_1}{r_2}}{2\pi(x'_1 - x'_2)} \\
C_{u',\gamma_{j+1}} &= \frac{x'(\theta_1 - \theta_2) + z' \ln \frac{r_1}{r_2}}{2\pi(x'_1 - x'_2)} \\
C_{w',\gamma_j} &= -\frac{x'_1 - x'_2 - z'(\theta_1 - \theta_2) + (x'_1 - x'_2 + x') \ln \frac{r_1}{r_2}}{2\pi(x'_1 - x'_2)} \\
C_{w',\gamma_{j+1}} &= \frac{x'_1 - x'_2 - z'(\theta_1 - \theta_2) + x' \ln \frac{r_1}{r_2}}{2\pi(x'_1 - x'_2)}
\end{aligned} \tag{143.12}$$

Finalmente, mediante la siguiente expresión se obtienen las componentes de la velocidad en coordenadas globales.

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_n & \sin \beta_n \\ -\sin \beta_n & \cos \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{u',\gamma_j} & C_{u',\gamma_{j+1}} \\ C_{w',\gamma_j} & C_{w',\gamma_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_j \\ \gamma_{j+1} \end{pmatrix} \tag{143.13}$$

Una vez obtenida una expresión relativamente manejable, el siguiente paso consiste en componer la matriz de coeficientes aerodinámicos cuyos elementos corresponden a la componente normal a cada panel de la velocidad inducida por  $N + 1$  torbellinos de intensidad unitaria en los  $N$  puntos de control.

En la matriz de coeficientes las filas corresponden a cada uno de los puntos de control mientras que las columnas las ocupan los torbellinos de cada panel. Por lo tanto se obtiene una matriz de  $N \times N + 1$  elementos cuya notación será  $\mathbf{A}_{(n \times m)}$  donde  $1 \leq n \leq N$  y  $1 \leq m \leq N + 1$ .

El cálculo cada uno de los elementos de la matriz de coeficientes se realiza de la siguiente forma:

La velocidad inducida en el primer elemento de cada fila será:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_{n,1} = \begin{pmatrix} \cos \beta_n & \sin \beta_n \\ -\sin \beta_n & \cos \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{u',\gamma_j} & C_{u',\gamma_{j+1}} \\ C_{w',\gamma_j} & C_{w',\gamma_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{143.14}$$

La velocidad inducida en el último elemento de cada fila corresponderá a:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_{n,N+1} = \begin{pmatrix} \cos \beta_n & \sin \beta_n \\ -\sin \beta_n & \cos \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{u',\gamma_j} & C_{u',\gamma_{j+1}} \\ C_{w',\gamma_j} & C_{w',\gamma_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{143.15}$$

Para el resto de elementos en los que  $2 \leq m \leq N$

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_{n,m} = \begin{pmatrix} \cos \beta_n & \sin \beta_n \\ -\sin \beta_n & \cos \beta_n \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} C_{u',\gamma_j} & C_{u',\gamma_{j+1}} \\ C_{w',\gamma_j} & C_{w',\gamma_{j+1}} \end{pmatrix}_{n,m-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{u',\gamma_j} & C_{u',\gamma_{j+1}} \\ C_{w',\gamma_j} & C_{w',\gamma_{j+1}} \end{pmatrix}_{n,m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (143.16)$$

Es decir, la velocidad inducida por el torbellino  $\gamma_{j+1}$  del panel anterior más la velocidad inducida por el torbellino  $\gamma_j$  del panel correspondiente.

Una vez calculadas las velocidades, cada elemento de la matriz  $\mathbf{A}$  se obtendrá de multiplicarlas por el vector normal ( $\mathbf{n}$ ) del panel.

$$a_{n,m} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_{n,m}^T \mathbf{n}_n \quad (143.17)$$

A continuación se establecen cada una de las soluciones de las ecuaciones del sistema, que no son más que la componente normal a cada panel del flujo libre. Cada solución se suele denominar en los diferentes textos que tratan el tema como *RHS (Right Hand Side)* o parte derecha de la ecuación. Cada solución se obtendrá de multiplicar las componentes de la velocidad del flujo libre por un vector unitario normal a cada panel.

$$RHS_n = -U_\infty \mathbf{n}_n \quad (143.18)$$

Por tanto se genera un sistema de N+1 ecuaciones con N+1 incógnitas. La ecuación restante que termina de completar el sistema es precisamente la condición de Kutta:

$$\gamma_1 + \gamma_{N+1} = 0 \quad (143.19)$$

Que introduciéndola en el sistema, queda:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} & a_{2,N+1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3N} & a_{3,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_N \\ \gamma_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RH_3 \\ \vdots \\ RHS_N \\ 0 \end{pmatrix} \quad (143.20)$$

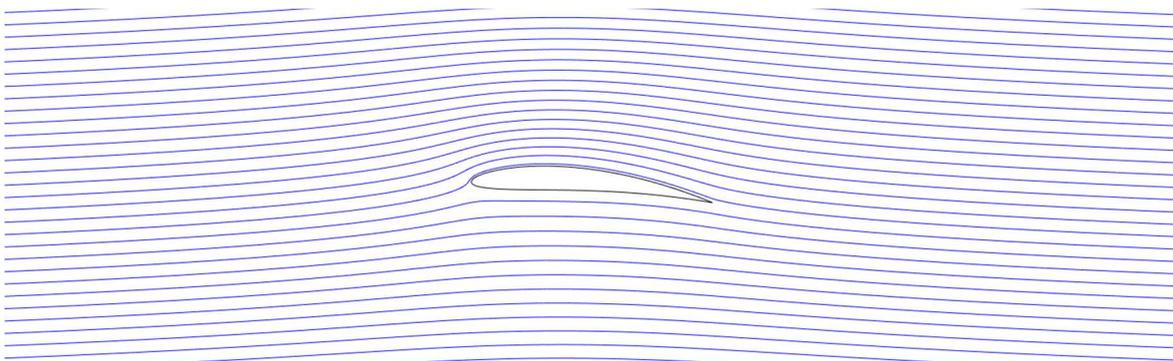


Figura 143.3: Líneas de corriente alrededor de un perfil NACA 5510 con 5° de incidencia.

## (2) Aeroelasticidad

### (2.1) Introducción

Generalmente los cuerpos sólidos están dotados de cierta flexibilidad estructural. Esta propiedad inherente de los sólidos reales es especialmente crítica en aplicaciones aeronáuticas. Mantener el compromiso entre rigidez y ligereza supone un gran desafío de diseño que se agrava aún más cuando se trata de superficies sustentadoras como son las alas de una aeronave.

Como se ha visto en el capítulo anterior, el movimiento de un sólido en el seno de un fluido genera presiones sobre su superficie que resultan en fuerzas (sustentación) y giros (momento).

Regresando al ejemplo del ala, ésta debe ser capaz de soportar el peso de la aeronave gracias a la sustentación que genera al moverse a través del aire. Al tratarse de estructuras fundamentalmente esbeltas es inevitable que se produzca cierta flexión a lo largo de la superficie. Además debido a la geometría de la sección del ala (perfil aerodinámico), la sustentación provoca un momento de cabeceo que se traduce en la torsión de la estructura a lo largo de su envergadura. Esta variación de la geometría de la estructura tiene efectos tanto en la sustentación total que genera como en el control de la aeronave.



*Figura 21.1: Comportamiento del ala excitando cada uno de sus grados de libertad por separado. La primera imagen corresponde al movimiento de torsión y la segunda al de flexión.*

Tanto la flexión como la torsión producida deben mantenerse dentro del rango del límite elástico de la estructura ya que de lo contrario se produciría el fallo de la misma.

La Aeroelasticidad es la disciplina que se ocupa del estudio de la respuesta de un sólido elástico sumergido en un fluido en movimiento. Atendiendo a la naturaleza de la deformación que sufre la estructura pueden considerarse dos casos:

Si se mantiene en el tiempo debido a que las fuerzas actuantes son constantes se tratará de Aeroelasticidad Estática.

Por otra parte, las fuerzas actuantes tienen carácter fluctuante, resultarán en un movimiento vibratorio. En tal caso se estaría hablando de Aeroelasticidad Dinámica.

Esta parte del presente trabajo se centra en el estudio y la representación gráfica de dos fenómenos englobados dentro del campo de la Aeroelasticidad Estática como son la Divergencia y la Efectividad de Mando. No obstante se comentarán brevemente los dos principales fenómenos Dinámicos: Flameo y Bataneo.

## (2.2) Fenómenos Aeroelásticos Estáticos

La aeroelasticidad estática se ocupa del estudio de las deformaciones sufridas por estructuras bajo la acción de fuerzas aerodinámicas cuando dichas fuerzas se consideran independientes del tiempo.

El equilibrio entre la rigidez estructural y las fuerzas externas actuantes determinará el valor final de flexión y torsión.

Aplicados sobre un ala, los valores de flexión y torsión determinarán la distribución de sustentación, resistencia aerodinámica<sup>4</sup> y la efectividad de las superficies de control para cada condición de vuelo estacionario.

Existen 2 fenómenos que permiten ser estudiados mediante las asunciones establecidas para la aeroelasticidad estática que son la Divergencia y la Efectividad de mando.

### (2.2.1) Divergencia

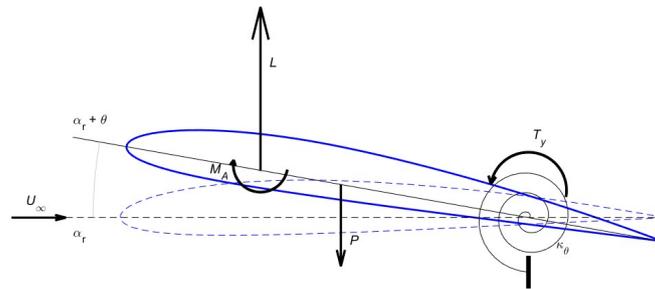


Figura 221.1: Modelización del perfil. Fuerzas que intervienen para el cálculo de la divergencia.

La divergencia ocurre cuando las fuerzas aerodinámicas externas son superiores a la rigidez del ala resultando en un fallo estructural. En alas rectas el fenómeno de divergencia se presenta por la torsión del ala antes que por la flexión de la misma.

Para el estudio de la divergencia se tendrá en cuenta la variación del ángulo de ataque debido al giro elástico del perfil. En la Figura 221.1 se muestra la modelización del perfil para la divergencia.

Partiendo de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (221.1)$$

<sup>4</sup> La resistencia aerodinámica (*Drag*), en general no se tiene en cuenta en los cálculos aeroelásticos debido a que su valor es varios órdenes de magnitud inferior a la sustentación. Adicionalmente su resultante es paralela al plano de mayor rigidez del ala.

Donde

$T$  = Energía cinética del sistema.

$U$  = Energía potencial.

$q_i$  = Grado de libertad del sistema.

$Q_i$  = Vector de fuerzas generalizadas

Por tratarse del caso estático se omite el término dependiente de la variación de la energía cinética con la velocidad de los grados de libertad respecto al tiempo.

$$\frac{\partial U_i}{\partial q_i} = Q_i \quad (221.2)$$

$$U = \frac{1}{2}k_w w^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 \quad (221.3)$$

$$Q_w = \frac{\partial U}{\partial w} = k_w w \quad (221.4)$$

$$Q_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} = k_\theta \theta \quad (221.5)$$

Continuando con el planteamiento, el trabajo virtual producido por las fuerzas externas al efectuar una variación virtual de los grados de libertad será:

$$\delta W = L\delta z_{ca} + M_{ca}\delta\Delta\theta + P\delta z_{cdg} \quad (221.6)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c C_l \quad (221.7)$$

$$C_l = C_{l\alpha}(\alpha_r + \theta) + C_{l0} + C_{l\delta}\delta \quad (221.8)$$

$$M_{ca} = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c^2 C_{MA} \quad (221.9)$$

$$C_{MA} = C_{ma} + C_{m\delta}\delta \quad (221.10)$$

$$P = -mg \quad (221.11)$$

Con los siguientes desplazamientos:

$$z_{ca} \approx w + e(\alpha_r + \theta); \delta z_{ca} = \delta w + e\delta\theta \quad (221.12)$$

$$\Delta\theta = (\alpha_r + \theta); \delta\Delta\theta = \delta\theta \quad (221.13)$$

$$z_{cdg} \approx w + d(\alpha_r + \theta); \delta z_{cdg} = \delta w + d\delta\theta \quad (221.14)$$

Introduciendo la presión dinámica como:

$$q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2$$

Sustituyendo en (221.6):

$$\begin{aligned} \delta W = & q_{\infty}c(C_{l\alpha}(\alpha_r + \theta) + C_{l0} + C_{l\delta}\delta)(\delta w + e\delta\theta) + \\ & + q_{\infty}c^2(C_{ma} + C_{m\delta}\delta)\delta\theta - mg(\delta w + d\delta\theta) \end{aligned} \quad (221.15)$$

Reordenando y agrupando con los grados de libertad

$$Q_w\delta w = (q_{\infty}c(C_{l\alpha}(\alpha_r + \theta) + C_{l0} + C_{l\delta}\delta) - mg)\delta w \quad (221.16)$$

$$Q_{\theta}\delta\theta = (q_{\infty}ec(C_{l\alpha}(\alpha_r + \theta) + C_{l0} + C_{l\delta}\delta) + q_{\infty}c^2(C_{ma} + C_{m\delta}\delta) - dmg)\delta\theta \quad (221.17)$$

Resultando:

$$k_w w = q_{\infty}c(C_{l\alpha}(\alpha_r + \theta) + C_{l0} + C_{l\delta}\delta) - mg \quad (221.18)$$

$$k_{\theta}\theta = q_{\infty}ec(C_{l\alpha}(\alpha_r + \theta) + C_{l0} + C_{l\delta}\delta) + q_{\infty}c^2(C_{ma} + C_{m\delta}\delta) - dmg \quad (221.19)$$

Según la expresión (221.19), el giro del perfil no depende de la flexión del mismo (del desplazamiento vertical) por tanto se puede obtener el ángulo girado de esta expresión:

$$\theta = \frac{q_{\infty}ec(C_{l\alpha}\alpha_r + C_{l0} + C_{l\delta}\delta) + q_{\infty}c^2(C_{ma} + C_{m\delta}\delta) - dmg}{k_{\theta} - q_{\infty}ecC_{l\alpha}} \quad (221.20)$$

En el numerador aparece un balance entre los momentos actuantes sobre el perfil mientras que en el denominador, la rigidez a torsión se ve reducida por la velocidad de vuelo a través de la presión dinámica ( $q_{\infty}$ ). La distancia desde el centro aerodinámico al eje elástico ( $e$ ) determina también el comportamiento a torsión del perfil, pudiéndose distinguir entre 2 casos:

$$e \leq 0$$

En tal caso, el término negativo del denominador de (6) cambia de signo y el efecto del aumento de la presión dinámica es el de "rigidizar" la torsión del perfil, no existiendo una presión de divergencia.

$$e > 0$$

Si la distancia  $e > 0$  tiene que existir una presión dinámica que anule el denominador en (221.20) y que, por tanto, el giro del perfil sea infinito. Denominaremos presión dinámica de divergencia ( $q_D$ ) a dicha presión.

$$\begin{aligned} k_{\theta} - q_D ec C_{l\alpha} &= 0 \\ q_D &= \frac{k_{\theta}}{ec C_{l\alpha}} \end{aligned} \quad (221.21)$$

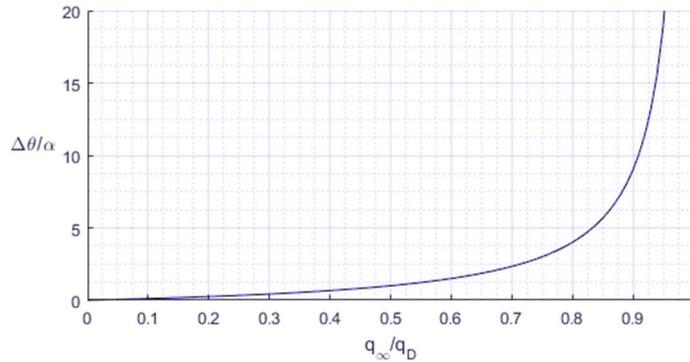


Figura 221.2 Evolución del incremento del ángulo elástico respecto al ángulo de incidencia inicial con la presión dinámica

Y la velocidad de divergencia ( $U_D$ ):

$$U_D = \sqrt{\frac{2k_\theta}{\rho_\infty e c C_{l\alpha}}} \quad (221.22)$$

Tomando la solución del giro (221.20) y separando entre las variables de entrada del sistema ( $\alpha_r$  y  $\delta$ ) se puede realizar un análisis con más profundidad:

$$\theta = \frac{q_\infty c (e C_{l0} + c C_{ma}) - d m g}{k_\theta - q_\infty e c C_{l\alpha}} + \frac{q_\infty e c C_{l\alpha}}{k_\theta - q_\infty e c C_{l\alpha}} \alpha_r + \frac{q_\infty c (e C_{l\delta} + c C_{m\delta})}{k_\theta - q_\infty e c C_{l\alpha}} \delta \quad (221.23)$$

En (221.23) se aprecia que existen 3 términos. El primer término es independiente de las variables de entrada. Sólo depende de las propiedades aerodinámicas del perfil (geometría) y de su peso. Aumentar la distancia ( $d$ ) del eje elástico al centro de gravedad o aumentar el peso del perfil contribuiría a disminuir el giro del perfil en el caso de perfiles con curvatura. Adicionalmente también se observa que si el perfil es simétrico ( $C_{l0} = 0$  y  $C_{ma} = 0$ ) tiende a girar menos ya que en éste término sólo quedaría la influencia del peso que se opone al giro.

El segundo término de (221.23) que depende del ángulo de incidencia, operando se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{q_\infty e c C_{l\alpha}}{k_\theta - q_\infty e c C_{l\alpha}} \alpha_r = \frac{1}{\frac{k_\theta}{q_\infty e c C_{l\alpha}} - 1} \alpha_r$$

La estrategia para reducir el giro cuando varía el ángulo de ataque consistirá en reducir el espesor del perfil ya que  $C_{l\alpha}$  depende del espesor aunque en el mejor de los casos su valor es  $C_{l\alpha} = 2\pi$  y su variación es pequeña como se comprobará en el estudio del caso. Reducir la distancia ( $e$ ) del eje elástico al centro aerodinámico o la longitud de la cuerda disminuirán el giro adicional provocado por la variación del ángulo de incidencia.

El tercer término depende de los coeficientes del alerón y éstos de sus dimensiones. Por tanto se puede obtener un ángulo de deflexión del alerón que se denominará  $\delta_0$  tal que anule el giro del

perfil en función de la presión dinámica y del ángulo de incidencia. Tomando la expresión (221.23) e igualándola a 0:

$$\delta_0 = \frac{dmg}{c(cC_{m\delta} + eC_{l\delta})q_\infty} - \frac{eC_{l\alpha}}{cC_{m\delta} + eC_{l\delta}}\alpha_r - \frac{cC_{ma} + eC_{l0}}{cC_{m\delta} + eC_{l\delta}} \quad (221.24)$$

A continuación se considera la divergencia para la extensión total del ala con la presencia de un alerón de dimensión  $\Delta A = A_2 - A_1$

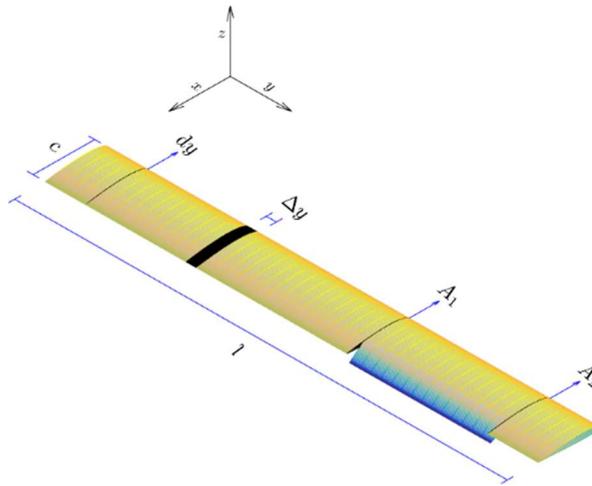


Figura 221.3: Nomenclatura ala con alerón.

Para tener en cuenta la flexión y el giro del ala a lo largo de su envergadura, se supone un comportamiento de un polinomio de grado 3 y grado 2 respectivamente de la siguiente forma

$$W(\eta) = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3 \quad (221.25)$$

Se establecen las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} W(0) &= 0; \quad W(1) = w \\ W'(0) &= 0; \quad W''(1) = 0 \end{aligned} \quad (221.26)$$

Introduciendo los siguientes cambios de variable:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{y}{l}; \quad d\eta = \frac{dy}{l} \\ a_1 &= \frac{A_1}{l}; \quad a_2 = \frac{A_2}{l} \end{aligned} \quad (221.27)$$

Operando y sustituyendo las condiciones de contorno, finalmente resulta:

$$W(\eta) = \left(\frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3\right)w \quad (221.28)$$

$$W(\eta) = N_w(\eta)w$$

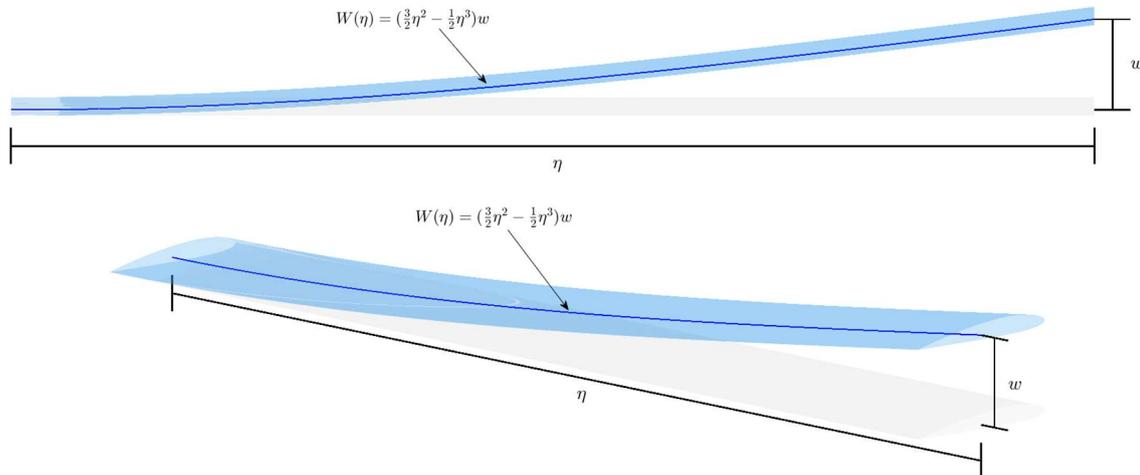


Figura 221.4: Comportamiento a flexión del ala.

Del mismo modo que con el comportamiento a flexión se ajusta el movimiento de torsión a un polinomio de grado 2 pero con distintas condiciones de contorno:

$$\Theta(\eta) = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 \quad (221.29)$$

$$\Theta(0) = 0; \Theta(1) = \theta \quad (221.30)$$

$$\Theta'(1) = 0$$

Operando y sustituyendo las condiciones de contorno, la expresión del giro resulta:

$$\Theta(\eta) = (2\eta - \eta^2)\theta \quad (221.31)$$

$$\Theta(\eta) = N_\Theta(\eta)\theta$$

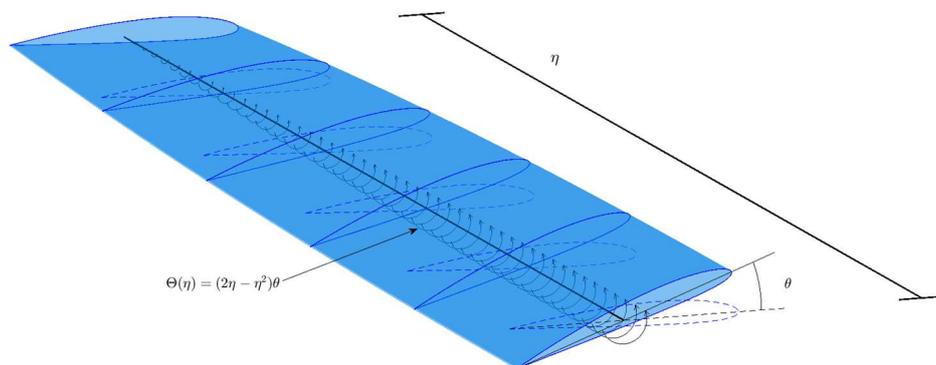


Figura 221.5: Comportamiento a torsión del ala.

Una vez obtenidas las funciones de forma de los desplazamientos de los grados de libertad a lo largo de la envergadura (adimensional), se obtienen los desplazamientos de los puntos de interés considerando toda la longitud del ala:

$$\begin{aligned} z_{ca}(\eta) &\approx W(\eta) + e(\alpha_r + \Theta(\eta)) \\ \delta z_{ca}(\eta) &= N_w(\eta)\delta w + eN_\Theta(\eta)\delta\theta \end{aligned} \quad (221.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta(\eta) &= (\alpha_r + \Theta(\eta)) \\ \delta\Delta\theta(\eta) &= N_\Theta(\eta)\delta\theta \end{aligned} \quad (221.33)$$

$$\begin{aligned} z_{cdg}(\eta) &\approx W(\eta) + d(\alpha_r + \Theta(\eta)) \\ \delta z_{cdg}(\eta) &= N_w(\eta)\delta w + dN_\Theta(\eta)\delta\theta \end{aligned} \quad (221.34)$$

Donde  $e$  es la distancia entre el eje elástico y el centro aerodinámico y  $d$  es la distancia entre el eje elástico y el centro de gravedad.

La expresión de la sustentación a lo largo de la envergadura será:

$$L(y) = q_\infty c C_l dy \quad (221.35)$$

Expresada de forma adimensional:

$$L(\eta) = q_\infty l c C_l d\eta \quad (221.35b)$$

Introduciendo ahora en el coeficiente de sustentación ( $C_l$ ) la aportación del ángulo de incidencia ( $\alpha_r$ ), la función de forma de la torsión ( $\Theta(\eta)$ ) a lo largo de la longitud adimensional del ala, la sustentación debida a la curvatura del perfil ( $C_{l0}$ ) y el incremento debido a la deflexión del alerón ( $C_{l\delta}$ ):

$$C_l = C_{l\alpha}(\alpha_r + \Theta(\eta)) + C_{l0} + C_{l\delta}\delta \quad (221.36)$$

Del mismo modo se procede con el momento de cabeceo; la expresión a lo largo de la envergadura será:

$$M(y) = q_\infty c^2 C_m dy \quad (221.37)$$

Expresada de forma adimensional:

$$M(\eta) = q_\infty l c^2 C_m d\eta \quad (221.37b)$$

Nuevamente el coeficiente de momento de cabeceo ( $C_m$ ) dependerá de la curvatura del perfil y de la aportación del alerón, siendo su expresión:

$$C_m = C_{ma} + C_{m\delta}\delta \quad (221.38)$$

Para diferenciar la sección del ala donde se encuentra el alerón, se cambia la notación de la sustentación y del momento de cabeceo por las siguientes:

$$\begin{aligned}
L(\eta) &\rightarrow L(\eta, \delta) \\
M(\eta) &\rightarrow M(\eta, \delta)
\end{aligned}
\tag{221.39}$$

El peso del ala se obtendrá mediante la siguiente expresión:

$$P(y) = \rho A dy \tag{221.40}$$

A lo largo de la envergadura adimensional:

$$P(\eta) = \rho l A d\eta \tag{221.40b}$$

Donde  $\rho$  es la densidad del material estructural (Aluminio) con la densidad del combustible. El otro factor ( $A$ ) es el área del perfil bidimensional, que se obtiene mediante una aproximación numérica. Posteriormente en la descripción de la aplicación se detallará la forma de calcular tanto la densidad como el área del perfil.

El trabajo producido por una variación virtual de los grados de libertad a lo largo de la envergadura resultará:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{W} &= \int_0^{a_1} \left( L(\eta, 0) \delta z_{ca}(\eta) + M(\eta, 0) \delta \Delta \theta(\eta) - P(\eta) \delta z_{cdg}(\eta) \right) d\eta \\
&+ \int_{a_1}^{a_2} \left( L(\eta, \delta) \delta z_{ca}(\eta) + M(\eta, \delta) \delta \Delta \theta(\eta) - P(\eta) \delta z_{cdg}(\eta) \right) d\eta \\
&+ \int_{a_2}^1 \left( L(\eta, 0) \delta z_{ca}(\eta) + M(\eta, 0) \delta \Delta \theta(\eta) - P(\eta) \delta z_{cdg}(\eta) \right) d\eta
\end{aligned}
\tag{221.41}$$

Con lo que las fuerzas generalizadas asociadas a la variación virtual de cada grado de libertad quedarán:

$$\begin{aligned}
Q_w \delta w &= q_\infty l c \left( \frac{3}{8} C_{l\alpha} \alpha_r + \frac{1}{3} C_{l\alpha} \theta + \frac{3}{8} C_{l0} \right. \\
&\left. + \frac{1}{8} (a_1^4 - 4a_1^3 + 4a_2^3 - a_2^4) C_{l\delta} \delta - \frac{3}{8} \frac{A\rho}{q_\infty c} \right) \delta w
\end{aligned}
\tag{221.42}$$

$$\begin{aligned}
Q_\theta \delta \theta &= q_\infty l c \left( \frac{2}{3} e C_{l\alpha} \alpha_r + \frac{8}{15} e C_{l\alpha} \theta + \frac{2}{3} e C_{l0} \right. \\
&+ \frac{1}{3} (a_1^3 - 3a_1^2 + 3a_2^2 - a_2^3) (e C_{l\delta} + c C_{m\delta}) \delta \\
&\left. + \frac{2}{3} c C_{ma} - \frac{2}{3} \frac{dA\rho}{q_\infty c} \right) \delta \theta
\end{aligned}
\tag{221.43}$$

Operando de forma análoga al caso del perfil:

$$U = \frac{1}{2}k_w w^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 \quad (221.44)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 N_w(y)}{dy^2} \right)^2 dy w^2 + \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left( \frac{dN_\theta(y)}{dy} \right)^2 dy \theta^2 \quad (221.45)$$

Recuperando las expresiones de las funciones de forma de flexión (221.28) y torsión (221.31), reemplazándolas en (221.39) con el cambio de variable (221.27), se obtienen las rigideces a flexión y torsión a lo largo de la envergadura:

$$k_w = \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \left( \frac{d^2 N_w(\eta)}{d\eta^2} \right)^2 d\eta = \frac{3EI}{l^3} \quad (221.46)$$

$$k_\theta = \frac{GJ}{l} \int_0^1 \left( \frac{dN_\theta(\eta)}{d\eta} \right)^2 d\eta = \frac{4GJ}{3l}$$

Donde  $E$  es el módulo de Young ( $E = 70 \text{ GPa}$  para el aluminio),  $I$  es la inercia de la sección,  $G$  representa el módulo de rigidez y se obtiene de la siguiente expresión:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (221.47)$$

En (221.45)  $\nu$  es el coeficiente de Poisson y para el caso del aluminio su valor es aproximadamente  $\nu \approx 0.25$ .

Regresando a (221.44),  $J$  corresponde al módulo de torsión y se obtiene de la expresión:

$$J = \frac{4A^2}{\oint \frac{1}{t} ds} = \frac{4A^2 t}{P} \quad (221.48)$$

En la expresión anterior  $A$  es el área del perfil bidimensional,  $t$  es el espesor de la pared del perfil y  $P$  es el perímetro.

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} Q_w &= \frac{\partial U}{\partial w} = k_w w \\ Q_\theta &= \frac{\partial U}{\partial \theta} = k_\theta \theta \end{aligned} \quad (221.49)$$

Tomando ahora los resultados de (221.46), sustituyéndolos en (221.49) e igualando a las expresiones (221.42) y (221.43)

$$\begin{aligned} 3 \frac{EI}{l^3} w &= q_\infty lc \left( \frac{3}{8} C_{i\alpha} \alpha_r + \frac{1}{3} C_{i\alpha} \theta + \frac{3}{8} C_{i0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} (a_1^4 - 4a_1^3 + 4a_2^3 - a_2^4) C_{i\delta} \delta - \frac{3}{8} \frac{A\rho}{q_\infty c} \right) \end{aligned} \quad (221.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{4GJ}{3l}\theta = q_{\infty}lc & \left( \frac{2}{3}eC_{l\alpha}\alpha_r + \frac{8}{15}eC_{l\alpha}\theta + \frac{2}{3}eC_{l0} \right. \\ & + \frac{1}{3}(a_1^3 - 3a_1^2 + 3a_2^2 - a_2^3)(eC_{l\delta} + cC_{m\delta})\delta \\ & \left. + \frac{2}{3}cC_{ma} - \frac{2dA\rho}{3q_{\infty}c} \right) \end{aligned} \quad (221.51)$$

Del mismo modo que con el caso del perfil, se obtiene el giro en la punta del ala de la expresión (221.51):

$$\begin{aligned} \theta = \frac{10q_{\infty}l^2c \left( eC_{l\alpha}\alpha_r + eC_{l0} + \frac{1}{2}(a_1^3 - 3a_1^2 + 3a_2^2 - a_2^3)(eC_{l\delta} + cC_{m\delta})\delta + cC_{ma} \right)}{20GJ - 8q_{\infty}l^2ceC_{l\alpha}} \\ - \frac{10l^2dA\rho}{20GJ - 8q_{\infty}l^2ceC_{l\alpha}} \end{aligned} \quad (221.52)$$

Analizando la expresión (221.52) lo primero que se aprecia es que existe un ángulo de torsión inicial negativo debido al peso del ala,

Por otra parte, sustituyendo (221.52) en la función de forma de torsión del ala (221.31) y deshaciendo los cambios de variables (221.27) se obtendrá la torsión en cualquier punto de la envergadura del ala.

De la expresión anterior se obtiene la presión y la velocidad de divergencia, que será aquella que anule el denominador de (221.52):

$$\begin{aligned} q_{div} &= \frac{5GJ}{2l^2ceC_{l\alpha}} \\ U_{div} &= \sqrt{\frac{5GJ}{\rho_{\infty}l^2ceC_{l\alpha}}} \end{aligned} \quad (221.53)$$

### (2.2.2) Efectividad e Inversión de mando

Mediante la deflexión del alerón presente en el ala se controla el giro de la aeronave alrededor de su eje longitudinal inducido por el incremento de sustentación que aporta el alerón. Este movimiento se conoce como alabeo. Como se ha visto en el punto anterior, debido a la velocidad de vuelo, el ala experimenta una torsión alrededor de su envergadura. Este hecho modifica las propiedades aerodinámicas del ala. Adicionalmente, la deflexión del alerón incrementa dicha torsión

Centrándose ahora en la sección del ala que contiene el alerón y teniendo en cuenta el incremento de sustentación producido por la deflexión del alerón y el incremento de torsión inducida por dicha deflexión. Tomando el giro generado por el alerón, se definen dos coeficientes de sustentación:

$$\theta_\delta = \frac{5q_\infty l^2 c(a_1^3 - 3a_1^2 + 3a_2^2 - a_2^3)(eC_{l\delta} + cC_{m\delta})}{20GJ - 8q_\infty l^2 ceC_{l\alpha}} \delta \quad (222.1)$$

El primer coeficiente de sustentación elástico tendrá en cuenta la torsión del ala en la sección que alberga el alerón mediante la función de forma del giro del ala ( $\Theta_\delta(\eta)$ ), se trata de un incremento ya que para el cálculo no se tendrá en cuenta la torsión debida a la geometría del ala completa sin el alerón:

$$\Delta C_{l,elástico} = C_{l\alpha} \Theta_\delta(\eta) \quad (222.2)$$

En el segundo coeficiente de sustentación se considera la aportación únicamente de la deflexión del alerón, es decir, como si se tratara de un ala infinitamente rígida:

$$\Delta C_{l,rígido} = C_{l\delta} \delta \quad (222.3)$$

Por lo tanto los respectivos incrementos de sustentación quedarán:

$$\Delta L(\eta)_{elástico} = q_\infty l c \Delta C_{l,elástico} d\eta \quad (222.4)$$

$$\Delta L(\eta)_{rígido} = q_\infty l c \Delta C_{l,rígido} d\eta \quad (222.5)$$

Considerando ahora los momentos generados en el encastre del ala por la deflexión del alerón en los dos casos; elástico y rígido:

$$\Delta M_{x,elástico} = \int_0^1 \Delta L(\eta)_{elástico} l \eta d\eta \quad (222.6)$$

$$\Delta M_{x,rígido} = \int_{a_1}^{a_2} \Delta L(\eta)_{rígido} l \eta d\eta \quad (222.7)$$

Se define Efectividad de Mando como la relación entre los momentos considerando la torsión del ala y el ala infinitamente rígida, es decir:

$$E_{ff} = \frac{\Delta M_{x,elástico} + \Delta M_{x,rígido}}{\Delta M_{x,rígido}} \quad (222.8)$$

Esta expresión depende del coeficiente de sustentación ( $C_{l\alpha}$ ), del coeficiente de sustentación y momento del alerón ( $C_{l\delta}$  y  $C_{m\delta}$ ), de la posición del eje elástico, de las dimensiones del ala, de la presión dinámica y de las dimensiones del alerón, pero NO depende del valor de la deflexión del alerón.

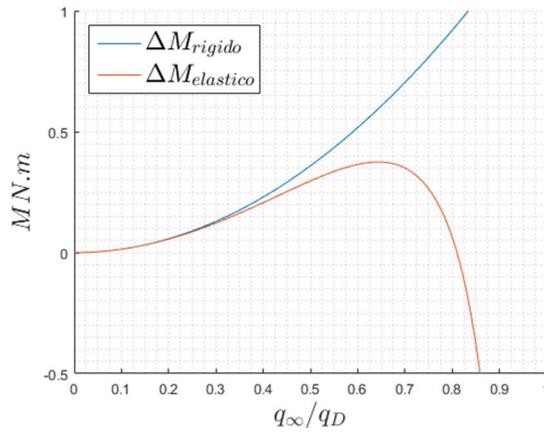


Figura 222.1: Evolución del momento elástico Vs. momento rígido.

En la figura 222.1 se puede observar la tendencia del momento en el encastre del ala. En el caso del  $\Delta M_{x,rigido}$  se considera un ala infinitamente rígida en la que sólo se tiene en cuenta el  $\Delta L$  producido por la deflexión del alerón, mientras que en el  $\Delta M_{x,elastico}$  se tiene en cuenta la torsión producida en toda la envergadura del ala incluyendo además el incremento de sustentación aportado por la deflexión del alerón. Como se ha comentado anteriormente, la relación de ambos momentos resulta en la efectividad de mando.

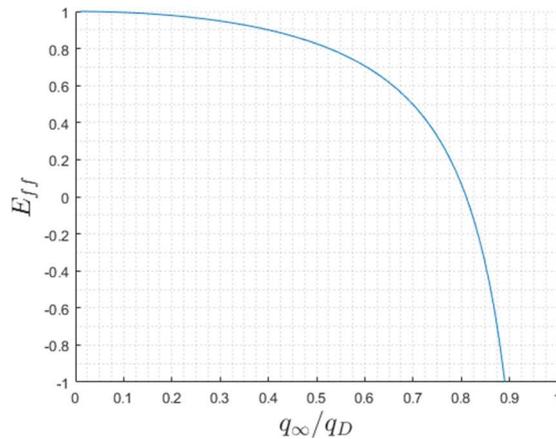


Figura 222.2: Efectividad de mando.

Para visualizar el aspecto de la expresión (222.8) se asignan unos valores arbitrarios a las dimensiones del alerón, concretamente  $a1 = 0.6$  y  $a2 = 0.9$ :

$$E_{ff} = \frac{GJC_{l\delta} + 0.1957q_{\infty}l^2c^2C_{l\alpha}C_{m\delta} - 0.2044q_{\infty}l^2ceC_{l\alpha}C_{l\delta}}{GJC_{l\delta} - 0.4q_{\infty}l^2ceC_{l\alpha}C_{l\delta}} \quad (222.9)$$

Analizando la expresión anterior, tiene que existir una presión dinámica tal que anule la efectividad de mando (nótese que  $C_{m\delta} < 0$ ). Su expresión, con la sustitución de las dimensiones del alerón indicadas anteriormente es:

$$q_R = \frac{4.8935GJC_{l\delta}}{(-0.9574c^2C_{l\alpha}C_{m\delta} + ceC_{l\alpha}C_{l\delta})l^2} \quad (222.10)$$

Es decir, cuando el ala se mueva a esa presión dinámica ( $q_{\infty} = q_R$ ), el accionamiento del alerón no tendría efecto en el control de la aeronave.

La dimensión del alerón y su posición afectan al valor de la presión de inversión de mando. Para el caso del tamaño presenta la siguiente tendencia:

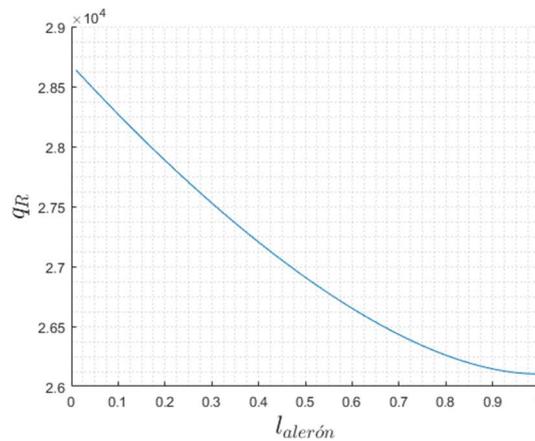
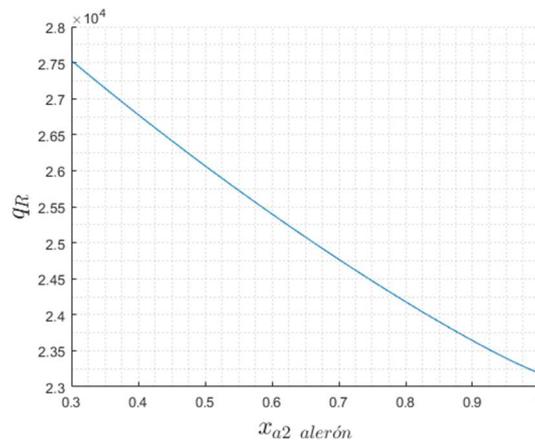


Figura 222.3: Efecto de la longitud del alerón en la presión de inversión.

El efecto de la longitud del alerón se aprecia en la figura 222.3 donde un alerón que ocupe una envergadura mayor reducirá la presión de inversión de mando.



*Figura 222.4: Efecto de la posición del alerón en la presión de inversión.*

Lo mismo ocurre con la posición del alerón respecto a la envergadura. Si la posición del alerón se acerca al borde del ala el momento generado es mayor, por tanto la presión de inversión se reduce.

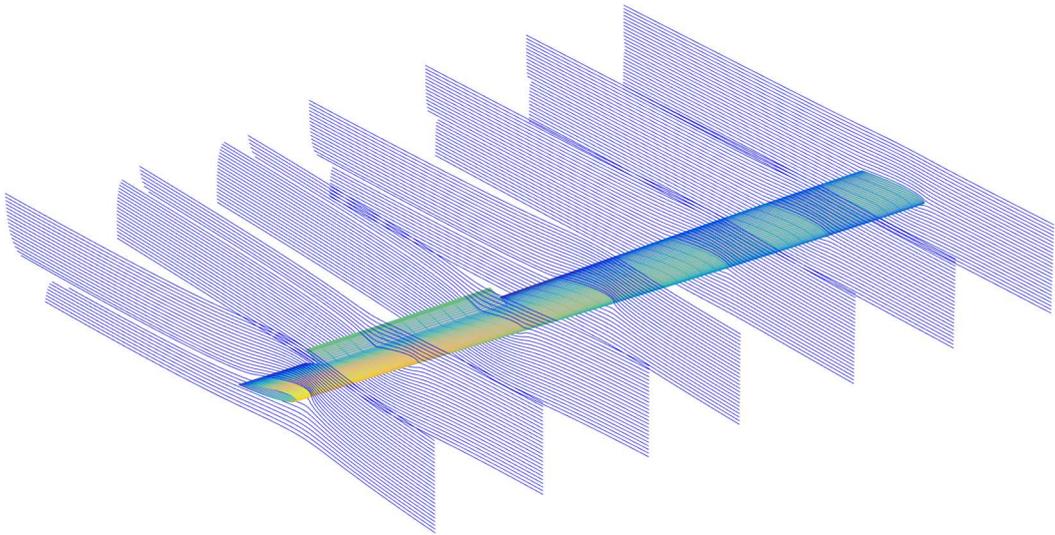
Tal como indica la ref.bib 6, las aeronaves actuales, cuando vuelan en crucero, si disponen de más de un alerón a lo largo de su envergadura bloquean los alerones situados más cerca de la punta del ala y solamente operan con los más cercanos al encastre del ala.

Superada esa presión dinámica, la deflexión del alerón induciría un giro alrededor del eje longitudinal de la aeronave contrario al esperado. Este efecto se conoce como Inversión de Mando y sucede cuando

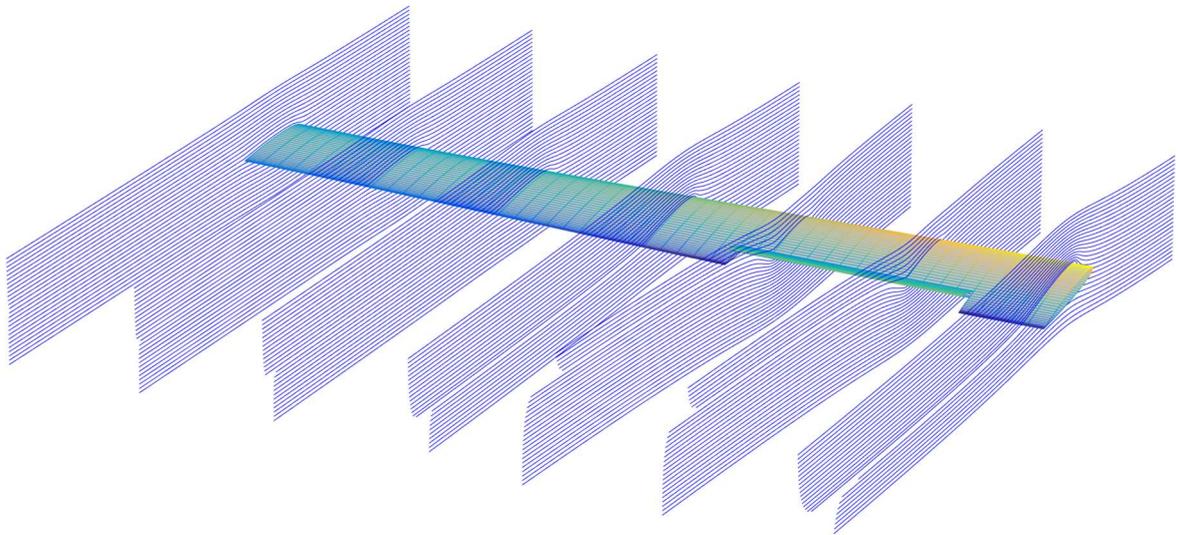
$$q_{\infty} > q_R$$

Pero... ¿qué está sucediendo?

Se toma un ala y se lleva a una velocidad que supere la presión de inversión de mando, se acciona el alerón para inducir un giro alrededor del eje longitudinal de la aeronave contrario a las agujas del reloj, considerando el origen de coordenadas en el morro de la aeronave y se analizan aerodinámicamente distintos planos perpendiculares a la envergadura distribuidos por el ala. Se colocan en cada plano partículas de fluido aguas arriba del ala y se observa lo que le sucede al fluido aguas abajo del ala transcurrido un tiempo:



*Figura 222.5a: Ala en configuración de inversión de mando*



*Figura 222.5b: Ala en configuración de inversión de mando*

## (3) La Aplicación

### (3.1) Descripción

Los puntos vistos anteriormente se implementan en una serie de scripts que forman una aplicación escrita en lenguaje M propio de la herramienta de software matemático Matlab. Dicha aplicación está dividida en dos entornos gráficos (GUI<sup>5</sup>) distintos que interaccionan entre sí. El primer entorno gráfico (Aerodinámica) tiene la utilidad de obtener los principales coeficientes aerodinámicos de un determinado perfil NACA de 4 dígitos que se emplearán en el segundo entorno gráfico (Aeroelasticidad) para obtener el correspondiente estudio aeroelástico de un ala recta.

### (3.2) El primer entorno gráfico: Aerodinámica

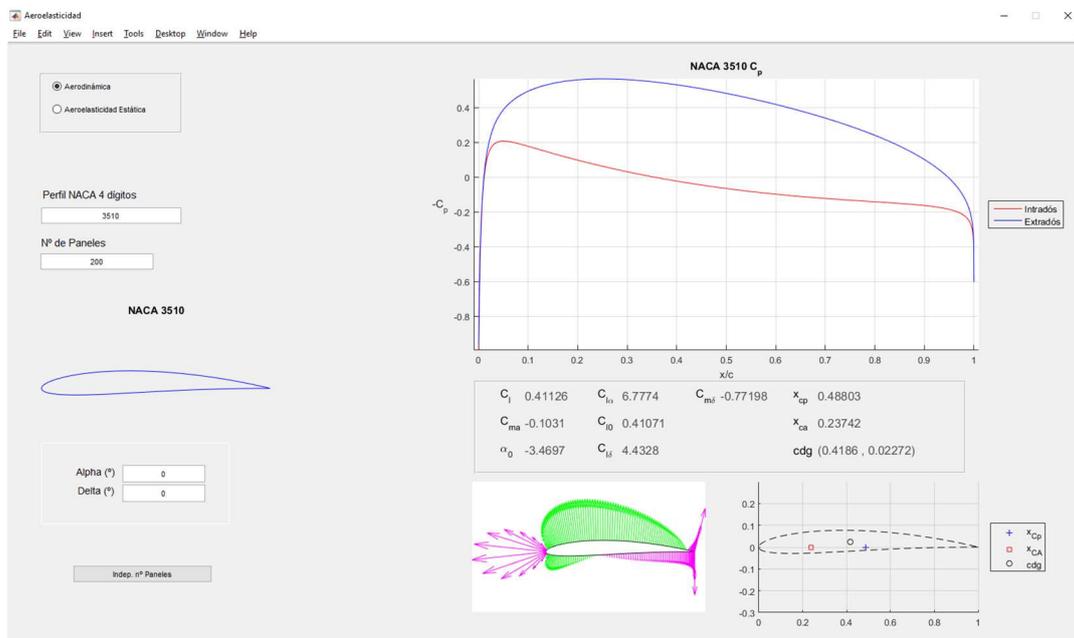


Figura 32.1: GUI Aerodinámica.

En el primer entorno gráfico, mediante la introducción del código que define un perfil NACA de 4 dígitos (ver punto 1.2.1 del presente trabajo) y un número de paneles (el valor inicial por defecto son 100 paneles), se inicia el cálculo de los principales coeficientes aerodinámicos.

Originariamente el perfil se introducía mediante un archivo de puntos almacenado en un directorio y se seleccionaba el archivo del perfil mediante una lista desplegable. Este hecho fijaba el número de paneles del perfil considerado a los puntos del archivo, dejando muy poca flexibilidad a la hora de afinar los resultados incrementando el número de paneles ya que al interpolar puntos intermedios era frecuente que se produjeran solapamientos en el borde de fuga llevando a resultados erróneos por la imposibilidad de establecer correctamente la condición de Kutta. Este hecho llevó a la necesidad de escribir un script que generara perfiles con cualquier número de puntos. Se optó por los

<sup>5</sup> GUI: Interfaz gráfica de usuario, del inglés *Graphical User Interface*

perfiles NACA de 4 dígitos por su sencillez de implementación, relativa flexibilidad y la cantidad de estudios experimentales existentes en Internet. En cualquier caso, sería sencillo añadir la opción de introducir perfiles mediante un archivo de puntos debido a que la función que transforma los puntos en paneles es independiente de la función que genera los perfiles.

En primer lugar se representa el perfil aerodinámico seleccionado justo debajo de los cuadros de texto de introducción de perfil y número de paneles

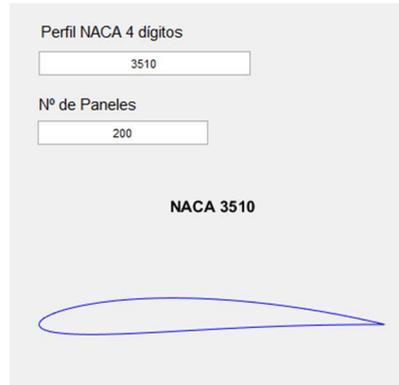


Figura 32.2: Selección del perfil.

En el ejemplo se ha seleccionado un perfil NACA 3510 (curvatura 0.03c, posición de la curvatura máxima 0.5c, espesor máximo 0.1c) con 200 paneles.

A lo largo de la titulación se ha asegurado, sobre todo en la asignatura Aerodinámica, que mediante los métodos de paneles bidimensionales, a partir de 80 paneles ya se obtiene un buen resultado. Para confirmar dicha afirmación existe un botón en la parte inferior izquierda del entorno gráfico que ejecuta una función para orientar al usuario en la selección de un número apropiado de paneles.

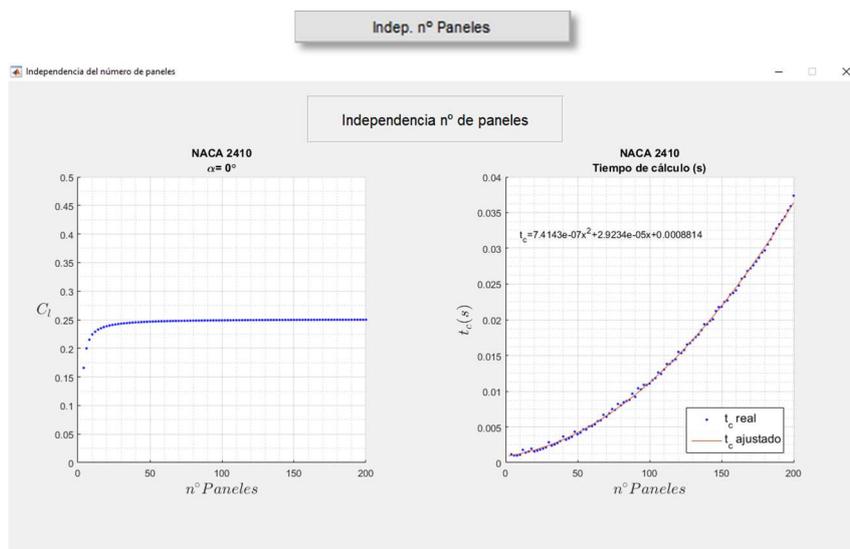


Figura 32.3: Independencia del número de paneles.

Tal y como se aprecia en el gráfico de la izquierda de la Figura 32.3 la solución del coeficiente de sustentación converge a un valor, en este caso  $C_l \approx 0.25$  y a partir de 60 paneles las diferencias entre resultados son del orden de  $10^{-4}$  como se observa en la siguiente figura.

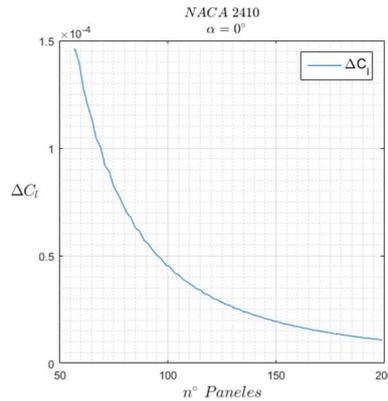


Figura 32.4: Diferencia de resultados entre números de paneles.

Esta diferencia aunque se incremente mucho el número de paneles nunca llegará a anularse debido a que, como se ha comentado en el punto 1.4, los torbellinos sí coinciden con la superficie del perfil pero el punto de control se encuentra en la mitad del panel y en consecuencia se sitúa por debajo de la superficie del perfil real.

Las pequeñas oscilaciones que presenta la curva de la Figura 32.4 se deben a si el número de paneles es par o impar ya que, dependiendo del caso, en el borde de ataque habrá un torbellino o un punto de control.

Como criterio adicional para seleccionar un número adecuado de paneles, se presenta junto a la convergencia del resultado el tiempo de cálculo en segundos. En la Figura 32.3 se observa que para 100 paneles el tiempo necesario para obtener la matriz de coeficientes, calcular las intensidades de los torbellinos y el coeficiente de sustentación es de unos 11 ms<sup>6</sup>. Parece un criterio poco sólido pero a la hora de realizar cálculos recursivos variando la geometría del perfil (al mover el alerón) es importante que el tiempo de cálculo sea lo menor posible. Adicionalmente, el método de paneles original se reprodujo de la ref. bib 2 pp 562-565 y era sensiblemente menos eficiente, como se puede apreciar en la siguiente figura.

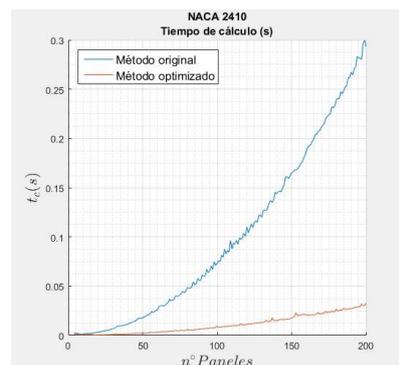


Figura 32.5: Comparación de tiempo de cálculo

Los propios autores de la referencia antes citada advierten de que las implementaciones no están optimizadas y que tienen un enfoque más académico que desde el punto de vista del rendimiento computacional.

<sup>6</sup> Los cálculos del presente trabajo se han realizado con una CPU Intel i7 con una velocidad media de reloj de 3 GHz.

Para finalizar con el análisis del tiempo de cálculo, a modo de referencia se presenta la siguiente figura presente en el manual de una herramienta escrita en Java y empleada para algunas prácticas de la titulación denominada JavaFoil.

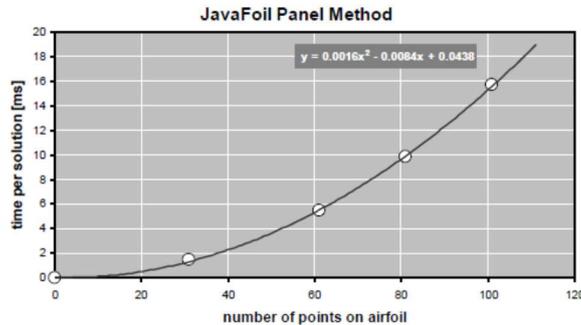


Figura 32.6: Tiempo de cálculo JavaFoil.

La herramienta JavaFoil emplea un método de paneles de intensidad lineal similar al implementado en el presente trabajo. Comparando las Figuras 32.3 y 32.6 se observa que ambos métodos están en el mismo orden de magnitud de tiempo.

Continuando con la descripción de la Figura 32.1, bajo la representación del perfil seleccionado aparecen 2 cuadros de texto que permiten introducir el ángulo de incidencia del perfil ( $\alpha$ ) y la deflexión del alerón ( $\delta$ ) en grados sexagesimales:

|           |                                |
|-----------|--------------------------------|
| Alpha (°) | <input type="text" value="0"/> |
| Delta (°) | <input type="text" value="0"/> |

Los valores introducidos modificarán los resultados del coeficiente de sustentación, distribución de presión sobre el perfil y la posición del centro de presión, cálculos que se verán posteriormente.

En la parte derecha del entorno gráfico, el usuario se encuentra en primer lugar con la representación del coeficiente de presión sobre la cuerda del perfil:

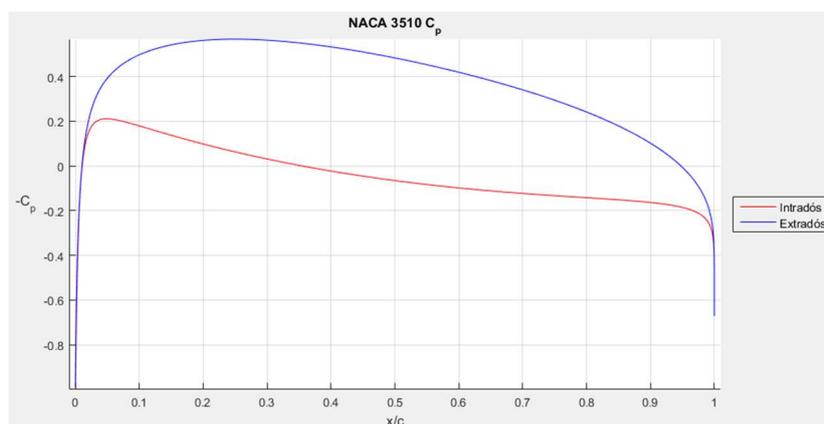


Figura 32.7: Representación del Coeficiente de Presión sobre la cuerda.

En la Figura 32.7 se muestra la distribución de presión adimensional sobre la cuerda del perfil aerodinámico seleccionado. Se debe tener en cuenta que el signo de la representación está invertido, es decir, los valores positivos corresponden con presiones negativas y viceversa. La línea roja corresponde con la parte inferior del perfil o intradós, mientras que la línea azul corresponde al extradós o la parte superior.

Posteriormente se realizará el análisis pormenorizado de la representación del coeficiente de presión.

Prosiguiendo con la descripción del entorno gráfico, bajo la representación del coeficiente de presión se encuentra la tabla con los resultados de los principales coeficientes y valores del perfil seleccionado:

|            |         |               |         |               |          |          |                    |
|------------|---------|---------------|---------|---------------|----------|----------|--------------------|
| $C_l$      | 0.41126 | $C_{l\alpha}$ | 6.7767  | $C_{m\delta}$ | -0.77198 | $x_{cp}$ | 0.48803            |
| $C_{ma}$   | -0.1031 | $C_{l0}$      | 0.41064 |               |          | $x_{ca}$ | 0.23742            |
| $\alpha_0$ | -3.4718 | $C_{l\delta}$ | 4.4328  |               |          | cdg      | (0.4186 , 0.02272) |

Figura 32.8: Coeficientes y valores principales para el perfil seleccionado (NACA 3510).

El primer valor que aparece en la tabla es el Coeficiente de sustentación ( $C_l$ ). Se trata del valor total del perfil en la configuración de ángulo de incidencia y deflexión del alerón seleccionada. Si se cambian estos valores, dicha variación se verá reflejada en el coeficiente de sustentación. Este valor proviene directamente del método de los paneles.

El segundo valor de la primera columna de coeficientes corresponde al Coeficiente de momento de cabeceo en el centro aerodinámico ( $C_{ma}$ ). Este valor es independiente del ángulo de ataque.

El tercer valor de la primera columna es el Ángulo de sustentación nula ( $\alpha_0$ ). Es el ángulo de incidencia para el que el perfil no aporta sustentación.

Pasando a la segunda columna de coeficientes, el primer valor  $C_{l\alpha}$  es la pendiente de la curva de sustentación. Se obtiene de realizar un ajuste lineal tomando varios valores de  $\alpha$ :

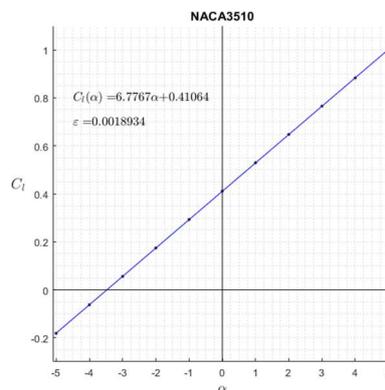


Figura 32.9: Ajuste lineal de  $C_l(\alpha)$  y error en el ajuste.

El segundo valor de la segunda columna corresponde al coeficiente de sustentación debido a la curvatura del perfil ( $C_{l0}$ ). Se trata del término independiente de la expresión de  $C_l(\alpha)$  obtenida en la Figura 32.9. Debido a un pequeño error en el ajuste lineal, el valor que se obtiene mediante el método de los paneles del coeficiente de sustentación para  $\alpha = 0$  no coincide exactamente con el obtenido mediante el ajuste.

El tercer valor de la segunda columna corresponde al coeficiente de sustentación que aporta el alerón ( $C_{l\delta}$ ). Se obtiene situando el perfil a su ángulo de sustentación nula ( $\alpha_0$ ) y variando la deflexión del alerón ( $\delta$ ).

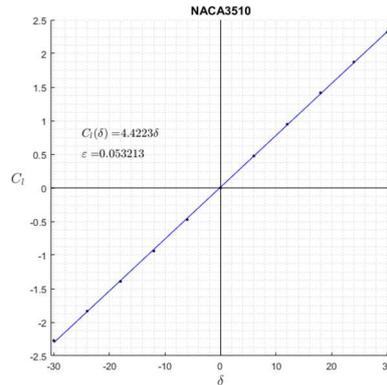


Figura 32.10: Ajuste lineal de  $C_l(\delta)$  y error en el ajuste.

El único valor de la cuarta columna corresponde al coeficiente de momento inducido por el alerón  $C_{m\delta}$ . Al deflejar el alerón se incrementa la sustentación del perfil, como consecuencia también lo hará el momento de cabeceo sobre el centro aerodinámico.

En la última columna se encuentran las posiciones del centro de presión ( $x_{cp}$ ), el centro aerodinámico ( $x_{ca}$ ) y el centro de gravedad del perfil, suponiendo que su densidad es constante ( $cdg$ ).

Los dos últimos elementos del entorno gráfico corresponden a la distribución del coeficiente de presión sobre el perfil y a la posición de los puntos presentes en la última columna de la tabla de coeficientes

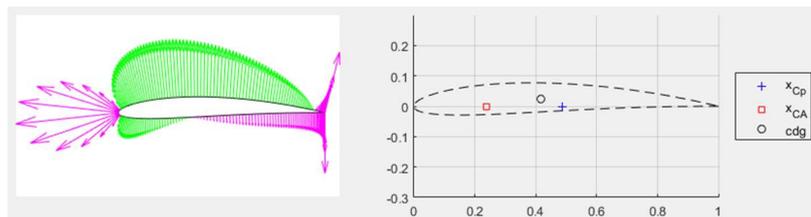


Figura 32.11: Representación de  $C_p$  y de la posición de puntos característicos.

En la figura de la izquierda las flechas verdes representan valores negativos de  $C_p$  mientras que las flechas magenta tienen su origen en paneles sobre los que el coeficiente de presión es negativo.

### (3.3) El segundo entorno gráfico: Aeroelasticidad estática

Una vez seleccionado el perfil mediante el primer entorno gráfico al pulsar en el botón de opción “Aeroelasticidad estática” se accede al segundo entorno gráfico.

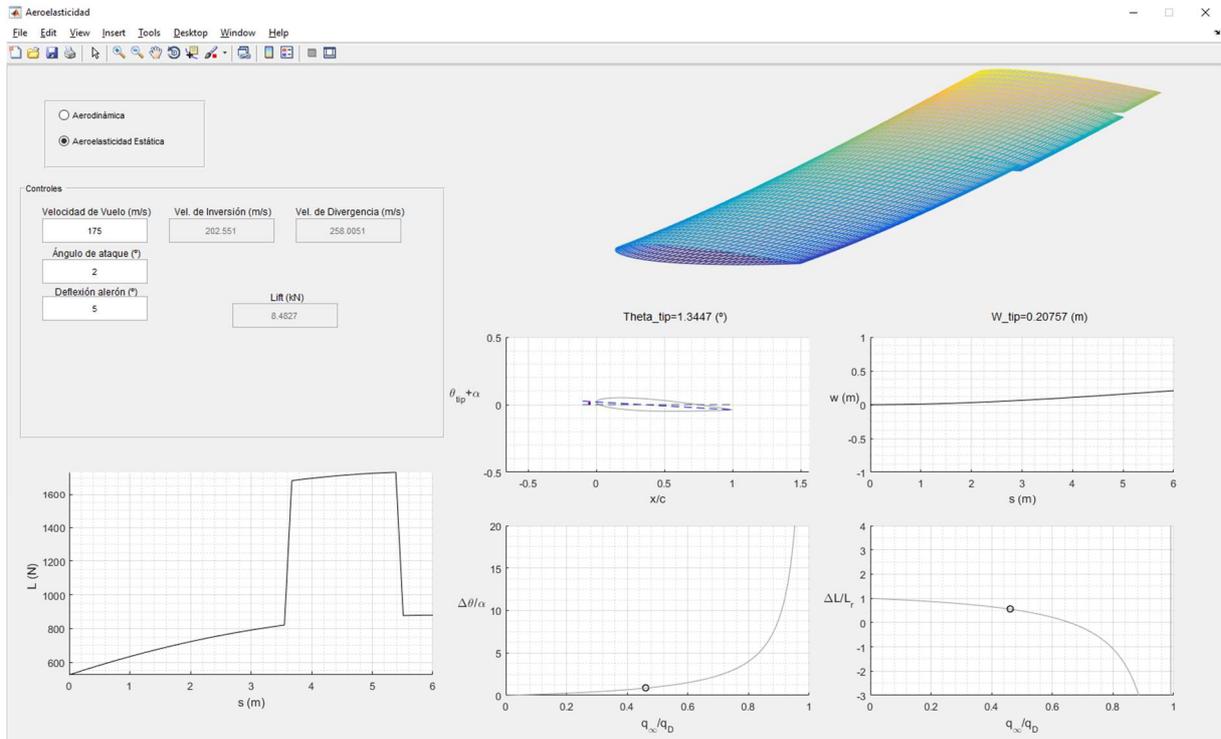


Figura 33.1: GUI Aeroelasticidad Estática.

Una vez se ha cargado el GUI de aeroelasticidad en el cuadro titulado “Controles” situado en la esquina superior izquierda, en los cuadros de texto deshabilitados, aparece tanto la velocidad de inversión de mando como la velocidad de divergencia.



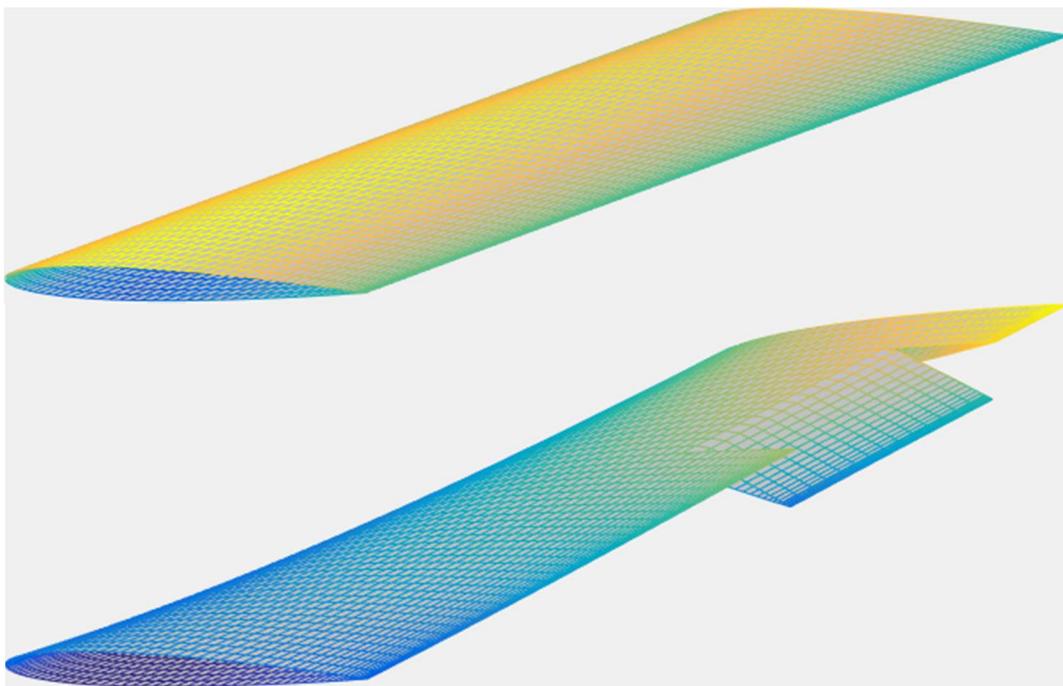
Figura 33.2: Controles

El usuario puede introducir en los cuadros de texto la velocidad de vuelo, el ángulo de ataque del ala y la deflexión del alerón, éstos dos últimos en grados sexagesimales. Adicionalmente se puede controlar la introducción de dichos valores mediante el uso de teclas preestablecidas:

|   |  |
|---|--|
|  | Aumentar la velocidad de vuelo.          |
|  | Disminuir la velocidad de vuelo.         |
|  | Disminuir el ángulo de ataque.           |
|  | Aumentar el ángulo de ataque.            |
|  | Deflectar el alerón en sentido positivo. |
|  | Deflectar el alerón en sentido negativo. |

*Figura 33.3: Teclas para el control de las variables de entrada.*

En la parte superior derecha aparece la representación del ala cuya sección corresponde al perfil seleccionado en el GUI aerodinámica. En función de los parámetros introducidos en el cuadro “Controles” la representación del ala se actualizará con la correspondiente respuesta a flexión y torsión.



*Figura 33.4: Respuesta estática del ala para distintas entradas.*

En la parte izquierda, debajo del cuadro de “Controles” se representa la distribución de sustentación a lo largo de la envergadura

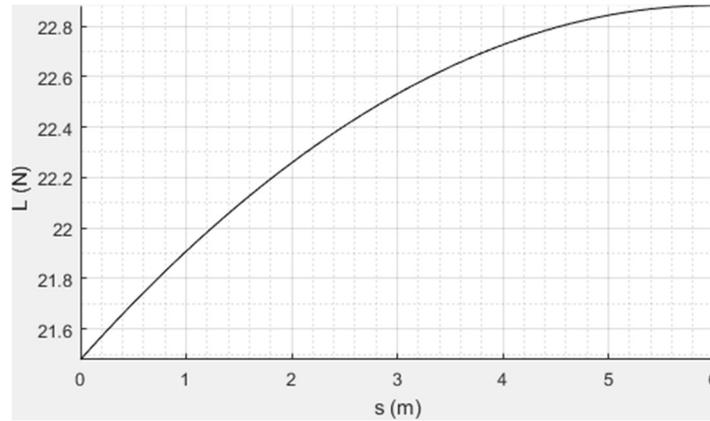


Figura 33.5: Distribución de sustentación a lo largo de la envergadura.

Bajo el dibujo del ala se encuentra un grupo de cuatro figuras; las dos superiores muestran el ángulo de torsión en la punta del ala y la flexión a lo largo de la envergadura respectivamente.

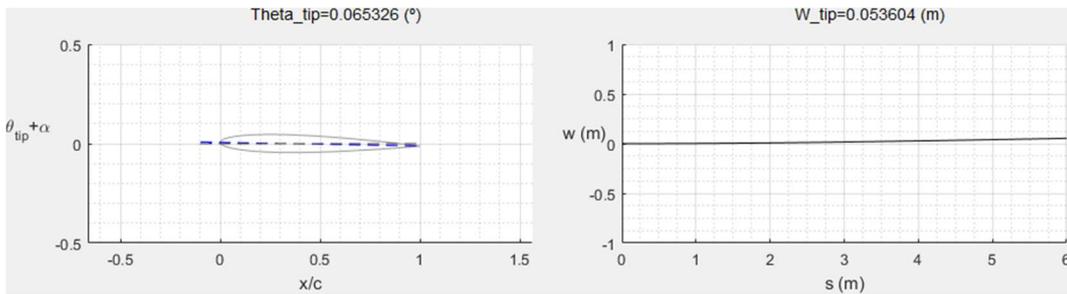


Figura 33.6: Representación de la torsión en la punta del ala y de la flexión a lo largo de la envergadura.

Las dos inferiores representan la presión dinámica de vuelo respecto a la de divergencia y la efectividad de mando.

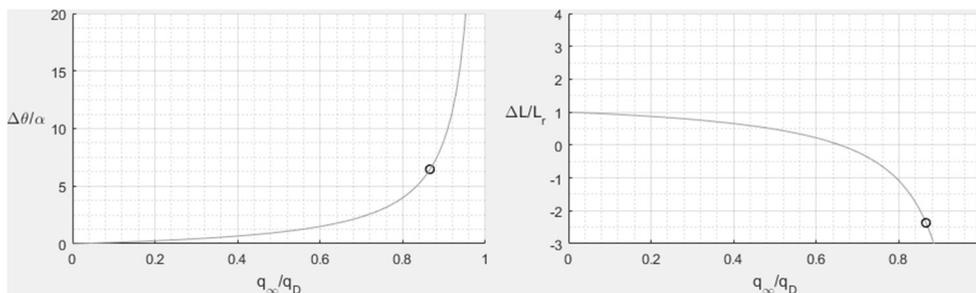


Figura 33.7: Situación de divergencia e inversión de mando para los valores de entrada actuales.

## (4) Estudio caso

### (4.1) Descripción

En el presente punto se realizará un análisis de un perfil simétrico y otro con curvatura mediante los métodos planteados en el presente trabajo, es decir, mediante la teoría de perfiles finos y a través del método de los paneles implementado. Adicionalmente se subrayarán las diferencias entre ambos métodos y se compararán las soluciones con datos experimentales. Posteriormente se trasladarán los resultados obtenidos a un ala recta con el fin de estudiar el comportamiento aeroelástico estático tanto con un perfil simétrico como con uno con curvatura.

### (4.2) Coeficientes aerodinámicos

En primer lugar se considerará un perfil simétrico de la familia NACA 00XX, se tendrán en cuenta distintos espesores mediante el método de los paneles para valorar su efecto sobre los resultados.



Figura 42.1: Perfil simétrico NACA 0010

Tomando la Tabla 135.1 donde están resumidos los coeficientes obtenidos mediante la teoría de los perfiles finos:

#### Teoría Perfiles Finos Perfil Simétrico

|  |                        |
|--|------------------------|
| $A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} d\theta_0$                  | $A_0 = \alpha$         |
| $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} \cos n\theta_0 d\theta_0$            | $A_n = 0$              |
| $C_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right)$                                      | $C_l = 2\pi\alpha$     |
| $C_{l0} = 2 \left( \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \right)$ | $C_{l0} = 0$           |
| $C_{m,ca} = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2)$  | $C_{m,ca} = 0$         |
| $\alpha_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0$ | $\alpha_0 = 0^\circ$   |
| $x_{cp} = \frac{c}{4} \left( 1 + \frac{\pi}{C_l} (A_1 - A_2) \right)$                | $x_{cp} = \frac{c}{4}$ |
| $x_{ca} = \frac{c}{4}$   | $x_{ca} = \frac{c}{4}$ |

A continuación se toman 3 perfiles simétricos de distinto espesor (NACA 0001, NACA 0009 y NACA 0015) y se obtienen sus resultados mediante la aplicación:

### Método de los Paneles

#### NACA 0001

$$\alpha = 0^\circ$$

|            |             |               |            |               |          |          |                     |
|------------|-------------|---------------|------------|---------------|----------|----------|---------------------|
| $C_l$      | 5.9777e-14  | $C_{l\alpha}$ | 6.2907     | $C_{m\delta}$ | -0.61759 | $x_{cp}$ | -0.1426             |
| $C_{ma}$   | 2.348e-14   | $C_{l0}$      | 5.9766e-14 |               |          | $x_{ca}$ | 0.25016             |
| $\alpha_0$ | -5.4435e-13 | $C_{l\delta}$ | 4.0664     |               |          | cdg      | (0.4188, 1.707e-18) |

$$C_{l\alpha} = 6.2907\alpha \approx 2\pi\alpha$$

$$C_{l0} \approx 0$$

$$C_{m,ca} \approx 0$$

$$\alpha_0 \approx 0^\circ$$

$$x_{cp} = -0.1426c$$

$$x_{ca} = 0.25016c \approx \frac{c}{4}$$

#### NACA 0001

$$\alpha = 5^\circ$$

|            |             |               |            |               |          |          |                     |
|------------|-------------|---------------|------------|---------------|----------|----------|---------------------|
| $C_l$      | 0.54876     | $C_{l\alpha}$ | 6.2907     | $C_{m\delta}$ | -0.61759 | $x_{cp}$ | 0.25016             |
| $C_{ma}$   | 2.346e-14   | $C_{l0}$      | 5.9766e-14 |               |          | $x_{ca}$ | 0.25016             |
| $\alpha_0$ | -5.4435e-13 | $C_{l\delta}$ | 4.0664     |               |          | cdg      | (0.4188, 1.707e-18) |

#### Perfiles Finos

$$C_l = 0.5483$$

$$x_{cp} = \frac{c}{4}$$

$$x_{ca} = \frac{c}{4}$$

#### Método Paneles

$$C_l = 0.54876$$

$$x_{cp} = 0.25016c \approx \frac{c}{4}$$

$$x_{ca} = 0.25016c \approx \frac{c}{4}$$

En este primer ejemplo de aplicación entre la teoría de perfiles finos y el método de los paneles, al tratarse de un perfil de muy poco espesor, un 1% de la cuerda, se puede apreciar como los resultados prácticamente coinciden tanto para ángulo de ataque nulo como para cierto ángulo de incidencia.

La única discrepancia en los resultados se encuentra en la posición del centro de presión  $x_{cp}$  para  $\alpha = 0^\circ$ , aunque este valor tiene poca importancia ya que el perfil no aporta sustentación.

Método Paneles  
NACA 0009  
 $\alpha = 0^\circ$

|            |             |               |            |           |          |          |                     |
|------------|-------------|---------------|------------|-----------|----------|----------|---------------------|
| $C_l$      | 1.7481e-14  | $C_{l\alpha}$ | 6.7028     | $C_{m_s}$ | -0.70642 | $x_{cp}$ | 0.012416            |
| $C_{m_a}$  | 3.975e-15   | $C_{l0}$      | 1.6514e-14 |           |          | $x_{ca}$ | 0.23979             |
| $\alpha_0$ | -1.4116e-13 | $C_{l_s}$     | 4.3652     |           |          | cdg      | (0.4188, 8.633e-18) |

$$C_{l\alpha} = 6.7028\alpha = 2.1336\pi\alpha$$

$$C_{l0} \approx 0$$

$$C_{m,ca} \approx 0$$

$$\alpha_0 \approx 0^\circ$$

$$x_{cp} = 0.012416c$$

$$x_{ca} = 0.23979c$$

Para este caso donde el espesor del perfil comienza a ser significativo se aprecia que la pendiente de la curva de sustentación ( $\frac{dC_{l\alpha}}{d\alpha}$ ) difiere ligeramente del valor teórico de  $\frac{dC_{l\alpha}}{d\alpha} = 2\pi$ . El centro aerodinámico, aunque mínimamente, también se ha desplazado de su posición teórica de  $x_{ca} = \frac{c}{4}$ . El centro de presión, de la misma forma que sucedía con el caso anterior, no coincide con el centro aerodinámico como debería por tratarse de un perfil simétrico.

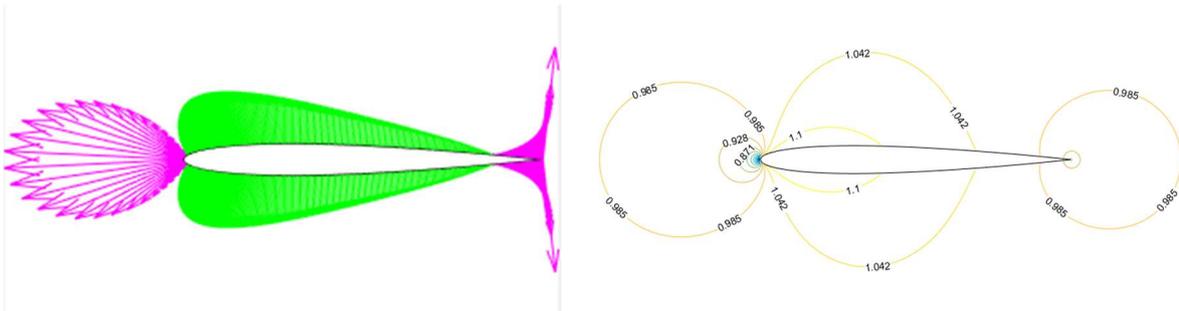


Figura 42.2: Izquierda: Distribución de presión sobre el perfil. Derecha: Contornos de velocidad

Método Paneles  
NACA 0009  
 $\alpha = 5^\circ$

|                  |             |                  |            |           |          |          |                     |
|------------------|-------------|------------------|------------|-----------|----------|----------|---------------------|
| $C_l$            | 0.58472     | $C_{l_{\alpha}}$ | 6.7028     | $C_{m_0}$ | -0.70642 | $x_{cp}$ | 0.23979             |
| $C_{m_{\alpha}}$ | 4.138e-15   | $C_{l_0}$        | 1.6514e-14 |           |          | $x_{ca}$ | 0.23979             |
| $\alpha_0$       | -1.4116e-13 | $C_{l_{\delta}}$ | 4.3652     |           |          | cdg      | (0.4188, 8.633e-18) |

Perfiles Finos

$$C_l = 0.5483$$

$$x_{cp} = \frac{c}{4}$$

$$x_{ca} = \frac{c}{4}$$

Método Paneles

$$C_l = 0.58472$$

$$x_{cp} = 0.23979c$$

$$x_{ca} = 0.23979c$$

Al haber aumentado la pendiente de la curva de sustentación, el valor del coeficiente de sustentación es sensiblemente mayor que el resultado teórico que aporta la teoría de perfiles finos.

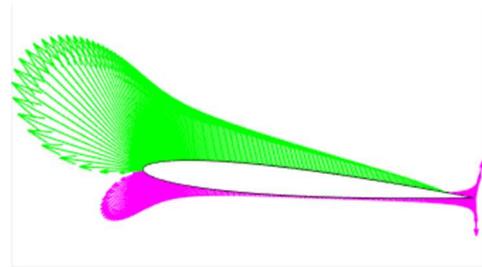
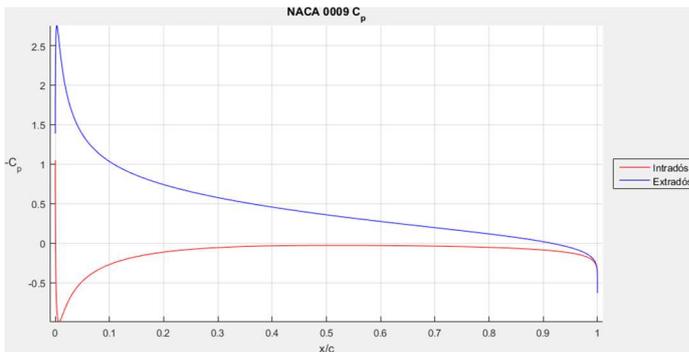


Figura 42.3: Izquierda: Distribución del  $C_p$  sobre la cuerda del perfil. Derecha: Distribución del  $C_p$  sobre la superficie del perfil.

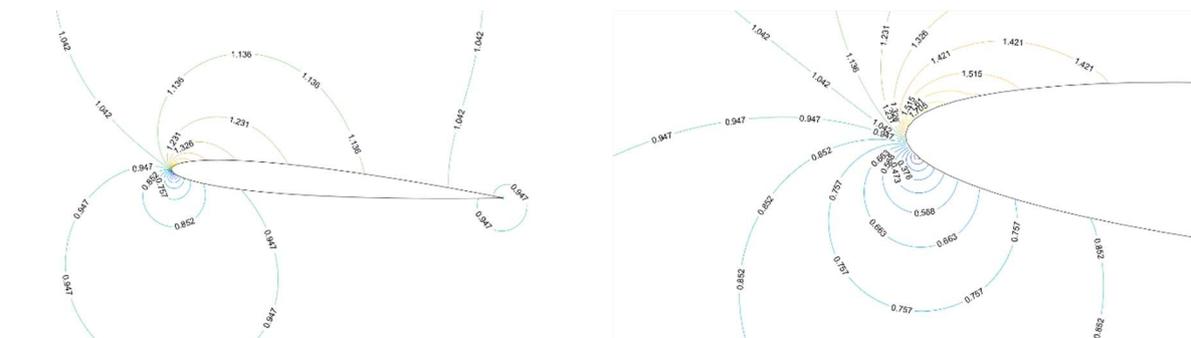


Figura 42.4: Izquierda: Contornos de velocidad. Derecha: Detalle del punto de remanso.

## Método Paneles

NACA 0015

$\alpha = 0^\circ$

|               |             |               |             |               |          |          |                     |
|---------------|-------------|---------------|-------------|---------------|----------|----------|---------------------|
| $C_l$         | -1.8632e-14 | $C_{l\alpha}$ | 7.0197      | $C_{m\delta}$ | -0.77742 | $x_{cp}$ | 0.30064             |
| $C_{m\alpha}$ | 1.26e-15    | $C_{l0}$      | -1.8604e-14 |               |          | $x_{ca}$ | 0.23302             |
| $\alpha_0$    | 1.5185e-13  | $C_{l\delta}$ | 4.5983      |               |          | cdg      | (0.4188, 2.195e-17) |

$$C_l = 7.0197\alpha = 2.1336\pi\alpha$$

$$C_{l0} \approx 0$$

$$C_{m,ca} \approx 0$$

$$\alpha_0 \approx 0^\circ$$

$$x_{cp} = 0.30064c$$

$$x_{ca} = 0.23302c$$

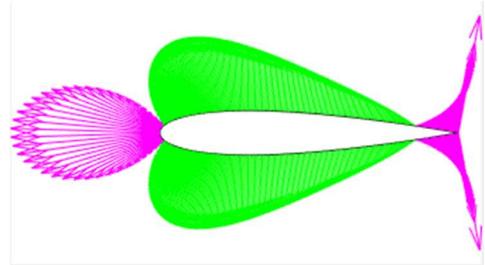
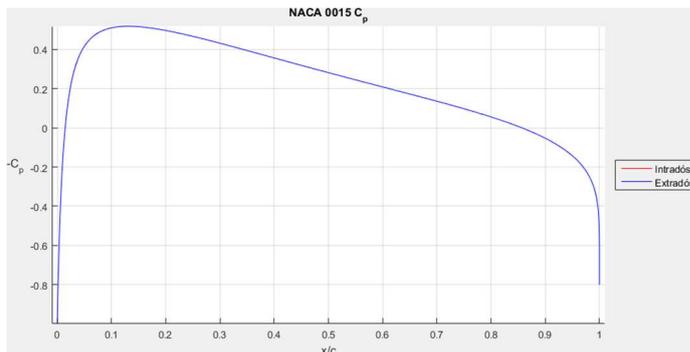


Figura 42.5: Izquierda: Distribución del  $C_p$  sobre la cuerda del perfil. Derecha: Distribución del  $C_p$  sobre la superficie del perfil.

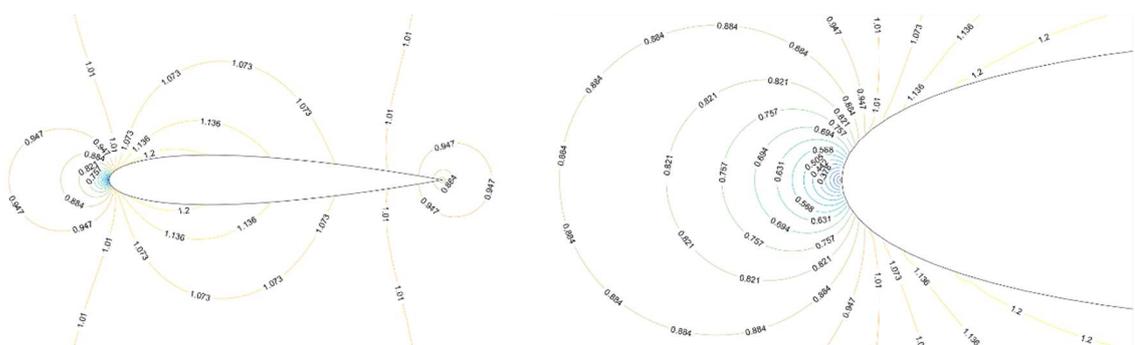


Figura 42.6 Izquierda: Contornos de velocidades. Derecha: Detalle del punto de remanso.

Método Paneles  
NACA 0015  
 $\alpha = 5^\circ$

|            |            |               |             |               |          |          |                     |
|------------|------------|---------------|-------------|---------------|----------|----------|---------------------|
| $C_l$      | 0.61236    | $C_{l_{1/4}}$ | 7.0197      | $C_{m_{1/4}}$ | -0.77742 | $x_{cp}$ | 0.23302             |
| $C_{ma}$   | 1.003e-15  | $C_{j0}$      | -1.8604e-14 |               |          | $x_{ca}$ | 0.23302             |
| $\alpha_0$ | 1.5185e-13 | $C_{l_{1/2}}$ | 4.5983      |               |          | cdg      | (0.4188, 2.195e-17) |

Perfiles Finos

$$C_l = 0.5483$$

$$x_{cp} = \frac{c}{4}$$

$$x_{ca} = \frac{c}{4}$$

Método Paneles

$$C_l = 0.61236$$

$$x_{cp} = 0.23302c$$

$$x_{ca} = 0.23302c$$

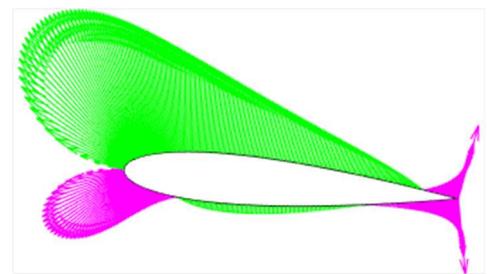
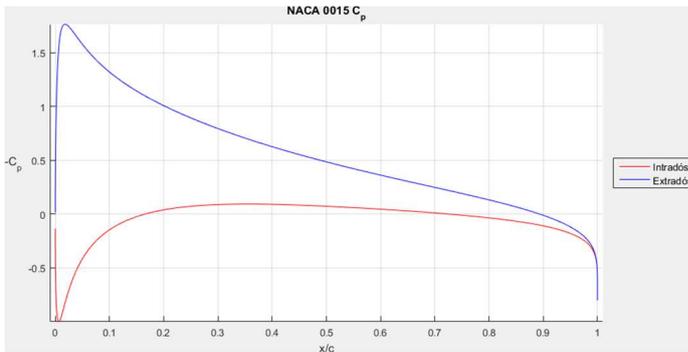


Figura 42.7: Izquierda: Distribución del  $C_p$  sobre la cuerda del perfil. Derecha: Distribución del  $C_p$  sobre la superficie del perfil.

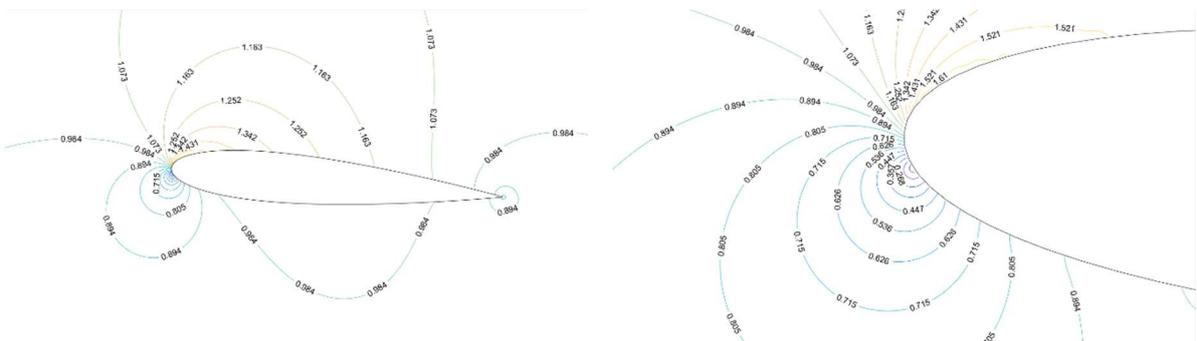


Figura 42.8: Izquierda: Contornos de velocidades. Derecha: Detalle del punto de remanso.

Teoría Perfiles Finos  
Perfil con Curvatura (NACA 24XX)

|  |  |
|--|--|
| $A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} d\theta_0$                  | $A_0 = \alpha - 0.0045$  |
| $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} \cos n\theta_0 d\theta_0$            | $A_1 = 0.0815$<br>$A_2 = 0.0139$   |
| $C_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right)$                                      | $C_l = 2\pi\alpha + 0.2278$  |
| $C_{l0} = 2 \left( \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \right)$ | $C_{l0} = 0.2278$  |
| $C_{m,ca} = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2)$  | $C_{m,ca} = -0.05312$  |
| $\alpha_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0$ | $\alpha_0 = -2.07724^\circ$  |
| $x_{cp} = \frac{c}{4} \left( 1 + \frac{\pi}{C_l} (A_1 - A_2) \right)$                | $x_{cp} = \frac{c}{4} \left( 1 + \frac{0.03382}{0.03625 + \alpha} \right)$ |
| $x_{ca} = \frac{c}{4}$   | $x_{ca} = \frac{c}{4}$   |

Método de los Paneles  
NACA 2401  
 $\alpha = 0^\circ$

|                    |                      |                    |                      |
|--------------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| $C_l$ 0.22987      | $C_{l\alpha}$ 6.3192 | $C_{m_s}$ -0.88126 | $x_{cp}$ 0.48166     |
| $C_{m_a}$ -0.05359 | $C_{l0}$ 0.22952     |                    | $x_{ca}$ 0.24854     |
| $\alpha_0$ -2.081  | $C_{l_s}$ 5.1512     |                    | cdg (0.4185, 0.0155) |

$$C_{l\alpha} = 6.3192\alpha \approx 2\pi\alpha$$

$$C_{l0} \approx 0.22952$$

$$C_{m,ca} \approx -0.05359$$

$$\alpha_0 \approx -2.081^\circ$$

$$x_{cp} = 0.48166c$$

$$x_{ca} = 0.24854c \approx \frac{c}{4}$$

Método Paneles  
NACA 2401  
 $\alpha = 5^\circ$

|            |          |              |         |           |          |          |                  |
|------------|----------|--------------|---------|-----------|----------|----------|------------------|
| $C_l$      | 0.78024  | $C_{l_{is}}$ | 6.3192  | $C_{m_s}$ | -0.88126 | $x_{cp}$ | 0.31696          |
| $C_{ma}$   | -0.05338 | $C_{l_0}$    | 0.22952 |           |          | $x_{ca}$ | 0.24854          |
| $\alpha_0$ | -2.081   | $C_{l_s}$    | 5.1512  |           |          | cdg      | (0.4185, 0.0155) |

Perfiles Finos

$$C_l = 0.77611$$

$$x_{cp} = 0.318444c$$

$$x_{ca} = \frac{c}{4}$$

Método Paneles

$$C_l = 0.78024$$

$$x_{cp} = 0.31696c$$

$$x_{ca} = 0.24854c$$

Método Paneles  
NACA 2409  
 $\alpha = 0^\circ$

|            |         |              |         |           |          |          |                   |
|------------|---------|--------------|---------|-----------|----------|----------|-------------------|
| $C_l$      | 0.24795 | $C_{l_{is}}$ | 6.7271  | $C_{m_s}$ | -0.71365 | $x_{cp}$ | 0.47145           |
| $C_{ma}$   | -0.0577 | $C_{l_0}$    | 0.24757 |           |          | $x_{ca}$ | 0.23876           |
| $\alpha_0$ | -2.1086 | $C_{l_s}$    | 4.3821  |           |          | cdg      | (0.4185, 0.01549) |

Perfiles Finos

$$C_l = 0.227795$$

$$x_{cp} = 0.48319$$

$$x_{ca} = \frac{c}{4}$$

Método Paneles

$$C_l = 0.24795$$

$$x_{cp} = 0.47145$$

$$x_{ca} = 0.23876c$$

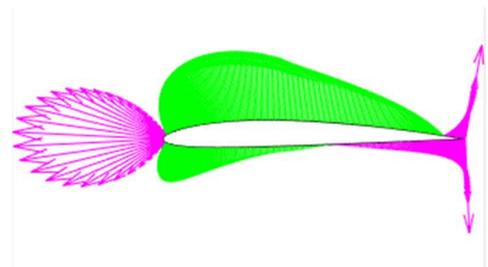
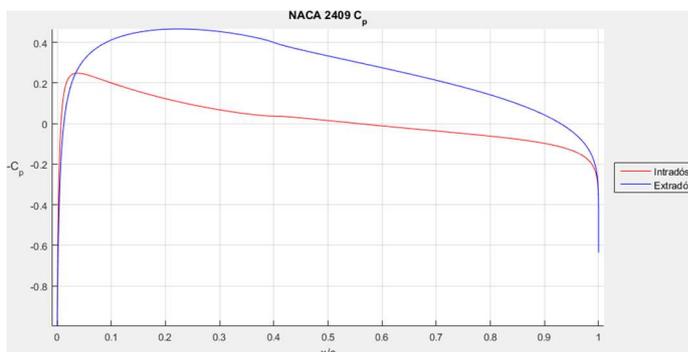


Figura 42.9: Izquierda: Distribución del  $C_p$  sobre la cuerda del perfil. Derecha: Distribución del  $C_p$  sobre la superficie del perfil.

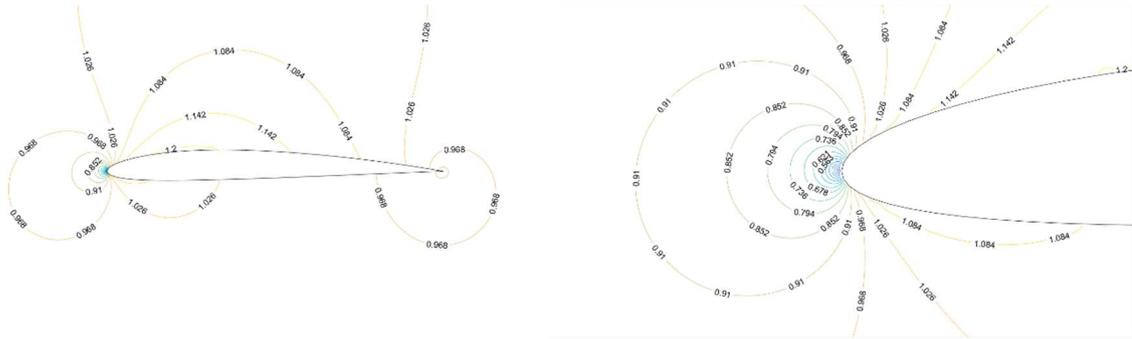


Figura 42.10: Izquierda: Contornos de velocidades. Derecha: Detalle del punto de remanso.

Método Paneles  
NACA 2409  
 $\alpha = 5^\circ$

|                       |                    |                    |                       |
|-----------------------|--------------------|--------------------|-----------------------|
| $C_l$ 0.83574         | $C_{l_{10}}$ 6.742 | $C_{m_0}$ -0.72563 | $x_{cp}$ 0.30734      |
| $C_{m_{ca}}$ -0.05772 | $C_{l_0}$ 0.24817  |                    | $x_{ca}$ 0.23827      |
| $\alpha_0$ -2.1091    | $C_{l_s}$ 4.4115   |                    | cdg (0.4184, 0.01549) |

Perfiles Finos

$$C_l = 0.77611$$

$$x_{cp} = 0.31844$$

$$x_{ca} = \frac{c}{4}$$

Método Paneles

$$C_l = 0.83574$$

$$x_{cp} = 0.30734c$$

$$x_{ca} = 0.2387c$$

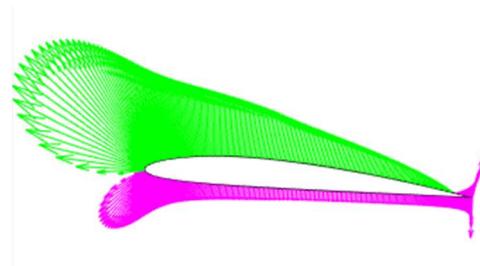
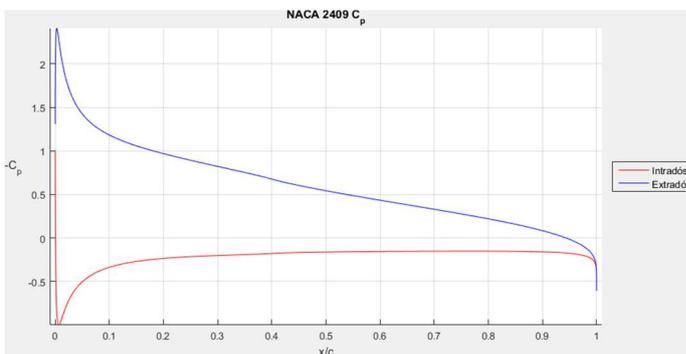


Figura 42.11: Izquierda: Distribución del  $C_p$  sobre la cuerda del perfil. Derecha: Distribución del  $C_p$  sobre la superficie del perfil.

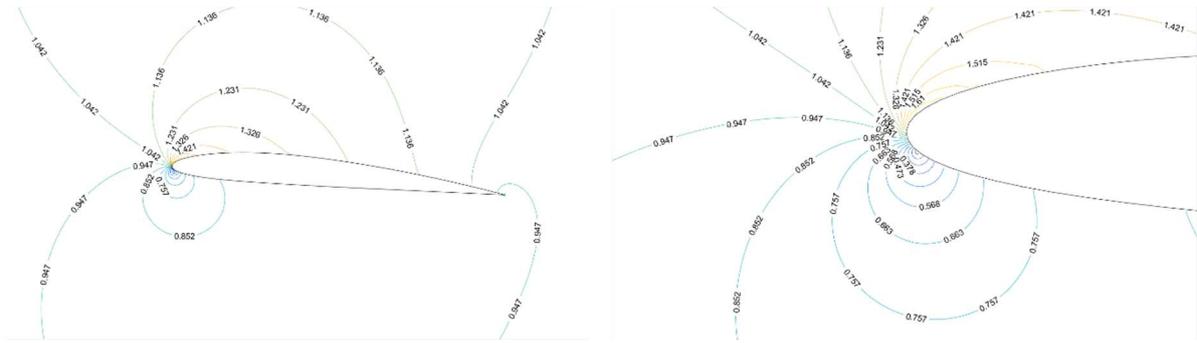


Figura 42.12: Izquierda: Contornos de velocidades. Derecha: Detalle del punto de remanso.

## (4.3) Aeroelasticidad Estática: Divergencia, Efectividad e Inversión de Mando

### (4.3.1) Resultados Analíticos/Resultados Numéricos

Para la obtención de la velocidad de divergencia se emplea la expresión analítica obtenida en la sección (2.2.1) expresión 221.52. Es la velocidad de inversión de mando la que si se obtiene mediante dos métodos.

Tomando un ala recta cuya sección la forma un perfil simétrico (NACA 0009):

Velocidad de inversión analítica  
 $U_{rev} = 209.1721 \text{ m/s}$

Velocidad de inversión numérica  
 $U_{rev} = 202.551 \text{ m/s}$

Considerando ahora un perfil con curvatura (NACA 2409):

Velocidad de inversión analítica  
 $U_{rev} = 208.7255 \text{ m/s}$

Velocidad de inversión numérica  
 $U_{rev} = 202.1051 \text{ m/s}$

Con  $GJ = 412848.757$  y la distancia  $e = 0.1053$

Se puede apreciar que existe cierta diferencia en los resultados, siendo el resultado obtenido numéricamente algo más conservador.

## (5)Anexos

### (A.1) Función para generar perfiles NACA de 4 dígitos

```
function [x,y]=NACAXXXX(nNACA,pts)

%%% NACA 4 digitos

m=str2double(nNACA(1))/100;
p=str2double(nNACA(2))/10;
t=str2double(nNACA(3:end))/100;
c=1;

if rem(pts,2)==0

    ptsinf=pts/2;
    ptssup=pts/2;

else

    ptsinf=floor(pts/2);
    ptssup=ceil(pts/2);

end

xinf=linspace(pi,2*pi,ptsinf);
xsup=linspace(pi,0,ptssup);

xinf=(cos(xinf)+1)/2;
xsup=(cos(xsup)+1)/2;

yts=5*t*c*(0.2969*(xsup/c).^ (1/2)-0.126*(xsup/c)-0.3516*(xsup/c).^2+0.2843*(xsup/c).^3-0.1036*(xsup/c).^4);
yti=-5*t*c*(0.2969*(xinf/c).^ (1/2)-0.126*(xinf/c)-0.3516*(xinf/c).^2+0.2843*(xinf/c).^3-0.1036*(xinf/c).^4);

yts(end)=0;
yti(end)=0;

if p~=0

    xms=xsup(xsup<=p*c);
    xMs=xsup(xsup>p*c);

    xmi=xinf(xinf<=p*c);
    xMi=xinf(xinf>p*c);

    ycs=[m/(p^2)*(2*p*(xms/c)-(xms/c).^2),m/((1-p)^2)*((1-2*p)+2*p*(xMs/c)-(xMs/c).^2)];
    dycdxs=[2*m/(p^2)*(p-(xms/c)),2*m/((1-p)^2)*(p-(xMs/c))];

    yci=[m/(p^2)*(2*p*(xmi/c)-(xmi/c).^2),m/((1-p)^2)*((1-2*p)+2*p*(xMi/c)-(xMi/c).^2)];
    dycdxi=[2*m/(p^2)*(p-(xmi/c)),2*m/((1-p)^2)*(p-(xMi/c))];

    thetau=atan(dycdxs);
    thetai=atan(dycdxi);

    yu=ycs+yts.*cos(thetau);
    yi=yci+yti.*cos(thetai);

else

    yu=yts;
    yi=yti;

end

x=[flip(xinf),xsup(2:end)];
y=[flip(yi),yu(2:end)];

end
```

## (A.2) Discretización de la geometría en paneles

```
function [panel,x,z]=panelgen(paneles,nNACA,flap)

% Funcion que devuelve un struct con las propiedades de cada panel.

if flap==true      % Variable lógica que indica si se estan introduciendo puntos
    x=paneles;
    z=nNACA;
else
    [x,z]=NACAXXXX(nNACA,paneles+1);    % Si flap == false llama a la funcion NACAXXXX para generar un
    perfil en función de la nomenclatura
end

panel=struct([]);  %Inicialización de la variable que contendrá la información de cada panel

for i=1: numel(x)-1

    panel(i).P1=[x(i);z(i)];           % Primer punto del panel
    panel(i).P2=[x(i+1);z(i+1)];     % Segundo punto del panel

    panel(i).dP=panel(i).P2-panel(i).P1;    % Panel trasladado al origen
    panel(i).ds=norm(panel(i).dP);         % Longitud del panel
    panel(i).th=atan2(panel(i).dP(2),panel(i).dP(1));    % Ángulo del panel

    panel(i).t=[cos(panel(i).th);sin(panel(i).th)];    % Vector tangente del panel
    panel(i).n=[-sin(panel(i).th);cos(panel(i).th)];  % Vector normal del panel

    panel(i).CP=panel(i).P1+panel(i).t*panel(i).ds/2;    % Posición del centro del panel (Punto de control)

end

end
```

## (A.3) Método Paneles

Script que implementa el método de paneles con torbellinos de intensidad lineal. Aunque el empleo de matrices es mucho más “elegante”, penaliza enormemente el rendimiento del código. Se recomienda emplear la función `lsvotext2.m` que se basa en este script pero optimizado.

```
clc
clear all
close all

paneles=100; % Número de paneles
[panel,xpanel,zpanel]=panelgen(paneles+1,'2210',0); % Función que genera perfiles NACA 4 dígitos

CPs=[panel.CP]; % Puntos de control
P1s=[panel.P1]; % Puntos iniciales
P2s=[panel.P2]; % Puntos finales
betas=[panel.th]; % Inclinación de cada panel
ns=[panel.n]; % Vectores normales
ts=[panel.t]; % Vectores tangentes

xp1=0; % Puntos invariantes en las coordenadas del panel
zp1=0; % Puntos invariantes en las coordenadas del panel
zp2=0; % Puntos invariantes en las coordenadas del panel

A=zeros(paneles+1,paneles+1); % Inicialización de la matriz A
B=zeros(paneles+1,paneles+1); % Inicialización de la matriz B

for n=1:paneles % Bucle para recorrer filas

    x=CPs(1,n); % x Punto de control considerado
    z=CPs(2,n); % z Punto de control considerado

    uwold=[0;0]; % Variable temporal para almacenar el valor del panel anterior

    for m=1:paneles % Bucle para recorrer columnas

        x1=P1s(1,m); % Punto inicial del panel (x)
        z1=P1s(2,m); % Punto inicial del panel (z)

        x2=P2s(1,m); % Punto final del panel (x)
        z2=P2s(2,m); % Punto final del panel (z)

        beta=-betas(m);
        mrotp=[cos(beta),-sin(beta);sin(beta),cos(beta)]; % Matriz de rotación para transformar a coordenadas del panel
        mrotg=[cos(beta),sin(beta);-sin(beta),cos(beta)]; % Matriz de rotación para transformar a coordenadas globales

        xp2zp2=mrotp*[x2-x1;z2-z1]; xp2=xp2zp2(1); % Transformación del punto 2 del panel

        xpzp=mrotp*[x1-x1;z1-z1]; % Transformación del punto de control a coordenadas del panel
        xp=xpzp(1); % Transformación del punto de control a coordenadas del panel
        zp=xpzp(2); % Transformación del punto de control a coordenadas del panel

        r1=sqrt((xp-xp1)^2+(zp-zp1)^2); % Distancia desde el primer torbellino al punto de control
        r2=sqrt((xp-xp2)^2+(zp-zp2)^2); % Distancia desde el segundo torbellino al punto de control

        th1=atan2((zp-zp1),(xp-xp1)); % Ángulo de r1
        th2=atan2((zp-zp2),(xp-xp2)); % Ángulo de r2

        Cu1=-((xp1-xp2+xp)*(th1-th2)+zp*log(r1/r2))/(2*pi*(xp1-xp2)); % Coeficiente de u del primer torbellino
        Cu2=(xp*(th1-th2)+zp*log(r1/r2))/(2*pi*(xp1-xp2)); % Coeficiente de u del segundo torbellino
        Cw1=-(xp1-xp2-zp*(th1-th2)+(xp1-xp2+xp)*log(r1/r2))/(2*pi*(xp1-xp2)); % Coeficiente de w del primer torbellino
        Cw2=(xp1-xp2-zp*(th1-th2)+xp*log(r1/r2))/(2*pi*(xp1-xp2)); % Coeficiente de w del segundo torbellino

        uw1=mrotg*[Cu1,Cu2;Cw1,Cw2]*[1;0]; % Componentes de velocidad inducidas por el primer torbellino en globales
        uw2=mrotg*[Cu1,Cu2;Cw1,Cw2]*[0;1]; % Componentes de velocidad inducidas por el segundo torbellino en globales

        A(n,m)=(uw1+uwold)*ns(:,n); % Matriz de coeficientes aerodinámicos normales
        B(n,m)=(uw1+uwold)*ts(:,n); % Matriz de coeficientes aerodinámicos tangenciales

        uwold=uw2; % Almacena el valor del segundo torbellino.

    end

end

A(n,m+1)=(uwold)*ns(:,n); % Añade la velocidad inducida por el segundo torbellino a la columna N+1 de A
B(n,m+1)=(uwold)*ts(:,n); % Añade la velocidad inducida por el segundo torbellino a la columna N+1 de B

end

B(B<0)=0.5+B(B<0); % Reparación de cierto desajuste con la velocidad autoinducida en el propio panel
A(n+1,1)=1; % Condición de Kutta
A(n+1,m+1)=1; % Condición de Kutta
```

## (A.4) Función para obtener la flexión y torsión del ala

```

function
[x1r,y1r,z1r,x2r,y2r,z2r,x3r,y3r,z3r,wy,thty,aoa,Eff,Udiv]=wtheta(Uinf,ClAlpha,Cl0,ClDelta,CmDelta,cX,xCA,Cma,aoa,delta,xE)

global x1 y1 z1 x2 y2 z2 x3 y3 z3 Per Ar a1 a2 EI GJ l c

rhoinf=1.224;
qinf=1/2*rhoinf*Uinf^2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Peso del ala %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

t=2*10^-3;
DensComb = 800;
DensAl = 2700;
rho=0.5*DensComb + (DensAl*Per*t)/Ar; % Combustible = 0.5 volumen del ala

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
e=xE-xCA; % Distancia eje elástico a centro aerodinámico
d=xE-(cX-0.1); % Distancia eje elástico a centro de gravedad
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

y=[y1(1,:),y2(1,:),y3(1,:)];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A1=a1;
A2=a2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Obtencion de torsión y flexión %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

thty=(5*(2*1-y).*y.*(c*qinf*(2*c*Cma+2*e*(Cl0+ClAlpha*aoa)+((-3 + A1)*A1^2-(-3 + A2)*A2^2)).*...
(c*CmDelta + ClDelta*e)*delta)-2*Ar*d*rho))/(20*GJ-8*c*ClAlpha*e*1^2*qinf);

wy=(1*(3*1 - y).^y.^2.*(2*c^2*ClAlpha*e*1^2*qinf^2*(Cl0 + ClAlpha*aoa +...
(A1^2*(-15 + (17 - 3*A1)*A1) +...
A2^2*(15 + A2*(-17 + 3*A2)))*ClDelta*delta) +...
10*c^3*ClAlpha*1^2*qinf^2*(2*Cma +...
((-3 + A1)*A1^2 - (-3 + A2)*A2^2)*CmDelta*delta) - 45*Ar*GJ*rho +...
c*qinf*(15*GJ*(3*Cl0 + 3*ClAlpha*aoa +...
((-4 + A1)*A1^3 - (-4 + A2)*A2^3)*ClDelta*delta) +...
2*Ar*ClAlpha*(-10*d + 9*e)*1^2*rho)))/...
(144*EI*(5*GJ - 2*c*ClAlpha*e*1^2*qinf));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
seccion1=numel(y1(1,:));
seccion2=numel(y2(1,:));
seccion3=numel(y3(1,:));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% torsión a lo largo de la envergadura %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alpha1=aoa*ones(1,seccion1)+thty(1:seccion1);
alpha2=aoa*ones(1,seccion2)+thty(seccion1+1:seccion1+seccion2);
alpha3=aoa*ones(1,seccion3)+thty(seccion1+seccion2+1:end);

alpha1=-repmat(alpha1,numel(x1(:,1)),1);
alpha2=-repmat(alpha2,numel(x2(:,1)),1);
alpha3=-repmat(alpha3,numel(x3(:,1)),1);

x1r=(x1-xE).*cos(alpha1)-z1.*sin(alpha1); x1r=x1r+xE;
y1r=y1;
z1r=z1.*cos(alpha1)+(x1-xE).*sin(alpha1);

x2r=(x2-xE).*cos(alpha2)-z2.*sin(alpha2); x2r=x2r+xE;
y2r=y2;
z2r=z2.*cos(alpha2)+(x2-xE).*sin(alpha2);

x3r=(x3-xE).*cos(alpha3)-z3.*sin(alpha3); x3r=x3r+xE;
y3r=y3;
z3r=z3.*cos(alpha3)+(x3-xE).*sin(alpha3);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Flexión a lo largo de la envergadura %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
w1=repmat(wy(1:seccion1),numel(z1r(:,1)),1);
w2=repmat(wy(seccion1+1:seccion1+seccion2),numel(z2r(:,1)),1);
w3=repmat(wy(seccion1+seccion2+1:end),numel(z3r(:,1)),1);

z1r=z1r+w1;
z2r=z2r+w2;
z3r=z3r+w3;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Efectividad de mando %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

melas=(25*((-3 + a1)*a1^2 - (-3 + a2)*a2^2)*c^2*ClAlpha*(c*CmDelta + ClDelta*e)*l^4*qinf^2)/...
(48*(5*GJ - 2*c*ClAlpha*e*l^2*qinf));

mrig=(1/2)*(-a1^2 + a2^2)*c*ClDelta*l^2.*qinf;
Eff=(melas+mrig)./mrig;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Udiv=(sqrt(5)*sqrt(GJ))/(sqrt(c)*sqrt(ClAlpha)*sqrt(e)*l*sqrt(rhoinf));
aoa=[alpha1(1,:),alpha2(1,:),alpha3(1,:)];

end

```

## (A.5) Código para obtener numéricamente la velocidad de inversión de mando

Este código se encuentra incluido en la función gui\_est.m cuyo funcionamiento depende del programa general main.m

```
yl=linspace(0,1,50);

err=1*10^-6; % Diferencia de sustentación que debe alcanzar la iteración
Uq=10;
difold=10;
dif=1;
inc=1;
delq=[10,0]*pi/180; % Valores de deflexión asimétricos del alerón

defa=((yl>=a1*1)-(yl>a2*1))*delq(1); % Sección del ala con la primera deflexión
defb=((yl>=a1*1)-(yl>a2*1))*delq(2); % Sección del ala con la segunda deflexión
j=0;
while dif>err && j<1000 % Se establece condición para salir del bucle en caso de no encontrar Urev
    j=j+1;
    Uq=Uq+inc;

    [~,~,~,~,~,~,~,~,~,thtya]=wtheta(Uq,ClAlpha,Cl0,ClDelta,CmDelta,cX,xCA,mCA,0,delq(1),xE); % Se obtiene torsión del ala
    con la primera deflexión
    [~,~,~,~,~,~,~,~,~,thtyb]=wtheta(Uq,ClAlpha,Cl0,ClDelta,CmDelta,cX,xCA,mCA,0,delq(2),xE); % Se obtiene torsión del ala
    con la segunda deflexión

    thta=(2.*yl)/1-(yl.^2)/(1^2).*thtya(end);
    thtb=(2.*yl)/1-(yl.^2)/(1^2).*thtyb(end);

    dla=0.5*1.224*Uq^2*c*(ClAlpha*thta+Cl0+ClDelta*defa)*1/50; % Distribución de sustentación con la primera deflexión
    dlb=0.5*1.224*Uq^2*c*(ClAlpha*thtb+Cl0+ClDelta*defb)*1/50; % Distribución de sustentación con la segunda deflexión

    dif=abs((sum(dla))-sum(dlb))/Uq^2; % Diferencia de sustentación a minimizar

    if dif>difold

        Uq=Uq-2*inc;
        inc=inc*0.1;
        difold=10;
    else
        difold=dif;
    end
    if Uq>Udiv-10
        break
    end
end
end
```

## Bibliografía

- 1.- Fundamentals of Aerodynamics (5th Edition). John David Anderson. McGraw-Hill.
- 2.- Low-Speed Aerodynamics. J. Katz & A. Poltkin. Cambridge University Press, 2001.
- 3.- Apuntes Aerodinámica. UPV. Xandra Margot
- 4.- Apuntes Aeroelasticidad. UPV. Mario Lázaro Navarro
- 5.- Cálculo Matemático con aplicaciones. L.M. Sánchez & M. P. Legua. Editorial UPV
- 6.- Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads. J. R. Wright & J. E. Cooper. Wiley.
- 7.- A Modern Course in Aeroelasticity. Dowell. KLUWER.
- 8.- Apuntes Aeroelasticidad UPM.