La reducción de un sistema de vectores deslizantes como metodología para la simplificación del cálculo de cargas estructurales reales. Aplicación a un caso práctico.

Apellidos, nombre	LLopis Cosín, Juan Vicente[1] (jvllopis@fis.upv.es) Gasque Albalate, María[1] (mgasque@fis.upv.es) Rubio Michavila, Constanza[1] (crubiom@fis.upv.es)
Departamento	[1]Física Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica y del Medio Natural

1 Resumen de las ideas clave

La teoría de vectores deslizantes proporciona una herramienta muy adecuada para el tratamiento de las fuerzas por el principio de transmisibilidad de estas actuando sobre el modelo de sólido de especial interés en ingeniería, que es el de sólido rígido.

Dicha teoría se estudia como materia básica en los primeros cursos de las carreras técnicas.

Los alumnos de estas carreras conocen por tanto de forma básica esta teoría y quizá la mayor dificultad en su aplicación radica en llegar a tener la capacidad de abstracción necesaria para su aplicación a casos reales.

En este artículo se resume el procedimiento para la reducción de un sistema de vectores deslizantes y se aplica a la resolución de un caso práctico sencillo.

La resolución de casos teóricos con datos que se dan como valores alfanuméricos permite obtener resultados numéricos sin más que sustituir valores para evaluar los resultados en un amplio rango.

La resolución de problemas teóricos como modelos de casos reales puede ser de interés para desarrollar la capacidad de abstracción anteriormente citada.

2 Introducción

La teoría de vectores deslizantes proporciona una herramienta muy adecuada para el estudio de la Mecánica Técnica o Ingeniería Mecánica utilizadas en los modelos planteados en Ingeniería. Así según el principio de transmisibilidad de las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido, es posible la aplicación de esta teoría al estudio de la Estática y la Dinámica. Por otra parte, la consideración de las rotaciones instantáneas como vectores deslizantes a efectos del cálculo de velocidades en el movimiento de un sólido rígido, también permite la utilización de los vectores deslizantes en el estudio de la Cinemática. De este modo una única teoría general permite el estudio de las tres partes de la mecánica con la gran ventaja que ello supone.

No obstante, el estudio de una teoría tan abstracta supone una dificultad importante al intentar relacionarla con los casos reales de aplicación en Ingeniería. Por ello la modelización de los casos reales mediante esta teoría ayuda a desarrollar esta capacidad de abstracción tan necesaria para pasar de la teoría a la práctica.

Por todo lo anterior, la metodología empleada en la resolución de un caso práctico presentado como una aplicación de la teoría puede contribuir al desarrollo de estas capacidades en los futuros Ingenieros.

3 Objetivos

Una vez que el alumno se lea con detenimiento este documento, será capaz de:

- Plantear las hipótesis simplificativas adecuadas que le permitan reducir un sistema de vectores deslizantes (SVD) a partir de los conocimientos básicos de la teoría de vectores deslizantes.
- Utilizar su capacidad de abstracción para su aplicación a un caso real.
- Plantear un problema con valores alfanuméricos, lo cual le permite el análisis posterior de distintas hipótesis de cargas para el modelo propuesto.

4 Desarrollo

Para abordar la lectura de este artículo, son necesarios los **conocimientos básicos de vectores**:

- Notación vectorial.
- Expresión de un vector en función de sus componentes.
- Clasificación de los vectores.
- Álgebra vectorial (suma, producto escalar, y producto vectorial de vectores libres).

Asimismo, se precisan **conocimientos básicos de vectores deslizantes**:

- Expresión de un vector deslizante como vector libre en el sistema de referencia dado y un punto de su línea de acción.
- Momento de un vector deslizante.
- Torsor de un SVD (formado por la Resultante y el Momento resultante en el punto donde se calcula el Torsor).
- Eje central de un SVD.
- Campo de momentos asociado al Torsor de un SVD (expresión que nos permite calcular el Momento resultante en un punto a partir de los elementos del Torsor en cualquier otro punto).

El contenido presentado en este artículo puede ser de gran utilidad, pues la resolución de un problema concreto proporciona la metodología general para la resolución de un gran número de problemas con planteamientos similares.

4.1 Enunciado del problema

Para el anteproyecto de un edificio de gran altura se han estudiado las cargas que actúan sobre su estructura teniendo en cuenta las siguientes acciones consideradas como sistemas de vectores deslizantes (Imagen 1):

1. Las debidas al viento, modelizadas mediante una fuerza en el punto B de módulo $\left|\vec{F}_B\right| = F$.
2. Las debidas a posibles fenómenos sísmicos, modelizadas mediante una fuerza en el punto O de módulo $\left|\vec{F}_O\right| = 2F$.
3. Las que ejerce el terreno sobre la base del edificio, modelizadas mediante su Torsor en el punto A; $T_A \equiv \left[\vec{F}_A = 4F\vec{j}\,;\vec{M}_A = -3F\cdot L\vec{k}\right]$.

Se pide: Reducir a un solo vector el sistema conjunto de las acciones, dibujándolo en la figura.

Son datos los valores de F y L, en función de los que se expresan las fuerzas y las distancias respectivamente.

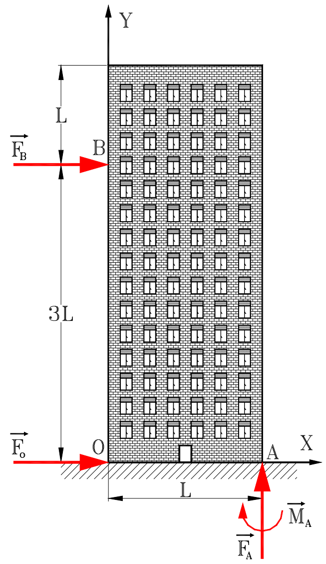

Imagen 1. Cargas que actúan sobre la estructura del edificio

Para la resolución del problema seguiremos los siguientes pasos:

- Cálculo del Torsor en el punto O.
- Clasificación del SVD y cálculo de su eje central.
- Reducción del sistema

4.2 Cálculo del Torsor en el punto O

En este apartado calcularemos la **Resultante** ($\vec{R}$), y el **Momento resultante** en el punto O ($\vec{M}_O$) del SVD que actúa sobre la estructura del edificio. El conjunto de estos dos vectores constituye el Torsor del SVD en el punto O: $T_O \equiv \left[\vec{R};\vec{M}_O\right]$.

4.2.1 Resultante del SVD

La Resultante ($\vec{R}$) se calcula como la suma de los vectores del sistema.

Un vector deslizante queda definido por un vector libre (expresado en función de sus componentes en el sistema de referencia dado), y un punto de la recta que determina su dirección, llamada recta soporte o línea de acción (Δ) (Imagen 2).

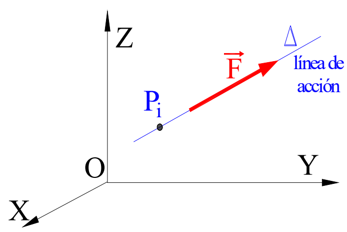

Imagen 2. Vector deslizante $(\vec{F}, \Delta) \equiv (\vec{F}, P_i)$.

Revisemos las acciones descritas en el enunciado y vamos a expresarlas como vectores deslizantes.

- Por una parte, tenemos la acción del viento (Imagen 3), dada como una fuerza de módulo $\left|\vec{F}_B\right| = F$ en el punto B(0,3L,0) perteneciente a su línea de acción (Δ_B).

  El vector $\vec{F}_B$, expresado como vector deslizante es $(\vec{F}_B = F\vec{i}, B(0,3L,0))$.

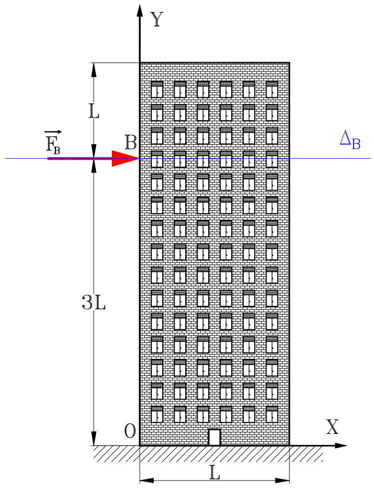

Imagen 3. Acción del viento

- En segundo lugar, consideramos las acciones debidas a posibles fenómenos sísmicos (Imagen 4) mediante una fuerza de módulo $\left|\vec{F}_O\right| = 2F$ en el punto O(0,0,0) perteneciente a su línea de acción (Δ_O).

  El vector $\vec{F}_O$, expresado como vector deslizante es $(\vec{F}_O = 2F\vec{i}, O(0,0,0))$.

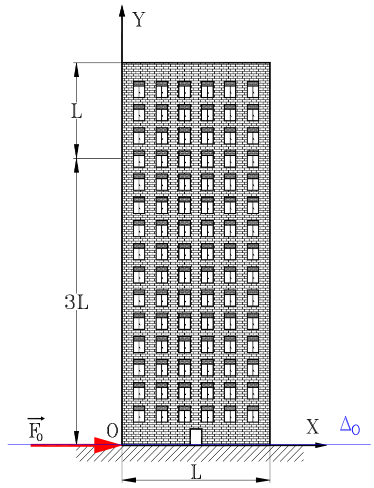

Imagen 4. Acciones sísmicas

- Por último, las fuerzas que ejerce el terreno sobre la base del edificio (Imagen 5), vienen dadas mediante su Torsor en el punto A; $T_A \equiv \left[\vec{F}_A = 4F\vec{j}\,;\,\vec{M}_A = -3F\cdot L\vec{k}\right]$.

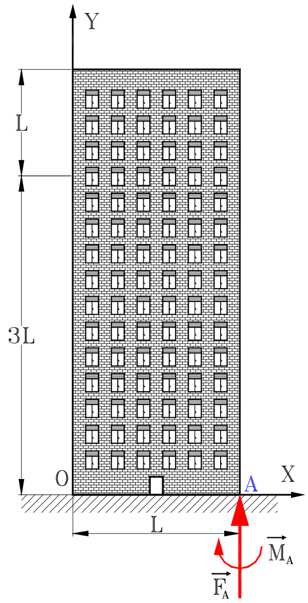

Imagen 5. Acciones del terreno

Una vez determinados los vectores, procedemos a calcular la $\vec{R}$ del SVD:

$\vec{R} = \vec{F}_B + \vec{F}_O + \vec{F}_A = F\vec{i} + 2F\vec{i} + 4F\vec{j}$, con lo que: $\vec{R} = 3F\vec{i} + 4F\vec{j}$.

4.2.2 Momento resultante en el punto O

El Momento resultante en el punto O ($\vec{M}_O$) se calcula como la suma de los momentos en O de todos los vectores del SVD.

El **momento de un vector deslizante** $\vec{F}$ respecto de un punto A, es el resultado del producto vectorial: $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{F} \wedge \overrightarrow{P_iA}$ (Imagen 6). Por las propiedades del producto vectorial, también se puede expresar como: $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}$.

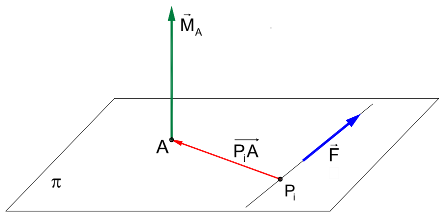

Imagen 6. Momento de un vector deslizante

Calculemos los momentos en O de los tres sistemas:

- Acción del viento: $\vec{M}_O(\vec{F}_B) = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3L & 0 \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3FL\vec{k}$
- Acciones sísmicas: $\vec{M}_O(\vec{F}_O) = \overrightarrow{OO} \wedge \vec{F}_O = \vec{0}$

- Acciones del terreno:

$$\vec{M}_O(T_A) = \vec{M}_A + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A = -3FL\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L & 0 & 0 \\ 0 & 4F & 0 \end{vmatrix} = -3FL\vec{k} + 4FL\vec{k} = FL\vec{k}$$

Siendo el momento resultante en O:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(T_A) + \vec{M}_O(\vec{F}_B) + \vec{M}_O(\vec{F}_O) = FL\vec{k} - 3FL\vec{k} + \vec{0} = -2FL\vec{k}$$

Y el Torsor en O: $\boxed{T_O = \left[\vec{R} = 3F\vec{i} + 4F\vec{j}\,;\vec{M}_O = -2FL\vec{k}\right]}$

4.3 Clasificación del sistema y cálculo de su Eje Central

El **Eje Central** de un SVD se define como el lugar geométrico de los puntos del espacio para los cuales el módulo del momento es mínimo. Por tanto, si un punto E pertenece al eje central, $\left|\vec{M}_E\right| = \left|\vec{M}_{min}\right|$.

El producto escalar $\vec{M}\cdot\vec{R}$ se denomina **invariante fundamental** de un SVD, y el **módulo del momento mínimo** $\left|\vec{M}_{min}\right|$ es equivalente al llamado **invariante central** del sistema (m), calculado como el cociente: $m = \dfrac{\vec{M}\cdot\vec{R}}{R}$, siendo $\vec{M}$ el Momento en cualquier punto y $\vec{R}$ la Resultante del SVD.

Es pues necesario el cálculo previo del Torsor de un SVD para poder determinar a partir de los elementos que lo constituyen el invariante fundamental, clasificando así el SVD, y después el eje central a partir del valor del invariante central $m=\left|\vec{M}_{min}\right|$.

El eje central, en los SVD con invariante fundamental $\vec{M}\cdot\vec{R}=0$, es una **recta paralela a la Resultante.**

Calculemos el invariante fundamental: $\vec{M}\cdot\vec{R}=\vec{M}_O\cdot\vec{R}=\left(-2FL\vec{k}\right)\cdot\left(3F\vec{i}+4F\vec{j}\right)=0$, y a partir de este, el invariante central (módulo del momento mínimo en el SVD): $m = \left|\vec{M}_{min}\right| = \dfrac{\vec{M}\cdot\vec{R}}{R} = 0$

Clasificado el sistema como de invariante fundamental nulo ($\vec{M}\cdot\vec{R}=0$) al ser las componentes del Torsor dos vectores perpendiculares, resulta también nulo su invariante central $m = \left|\vec{M}_{min}\right| = 0$, por lo que si un punto E pertenece al eje central, $\left|\vec{M}_E\right| = \left|\vec{M}_{min}\right| = 0$. Calculamos entonces el eje central como el lugar geométrico de puntos E tales que $\vec{M}_E = 0$.

A partir del Torsor en un punto cualquiera (punto O en este problema concreto), se busca un punto genérico E(x,y,z) tal que su momento sea $\vec{M}_E = 0$ mediante la ecuación del campo de momentos.

El **campo de Momentos** de un SVD queda determinado cuando se conoce el Torsor en un punto cualquiera P (Momento resultante en P y Resultante $\vec{R}$), $T_P \equiv \left[\vec{R};\vec{M}_P\right]$.

La ecuación del campo de Momentos nos permite calcular el momento en cualquier otro punto Q: $\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{R}$.

A partir de $T_O \equiv \left[\vec{R};\vec{M}_O\right] = \left[\vec{R} = 3F\vec{i} + 4F\vec{j};\vec{M}_O = -2FL\vec{k}\right]$, sabiendo que $\vec{M}_E = 0$, y siendo el vector $\overrightarrow{EO} = -x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$, aplicando la ecuación del campo de momentos:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + \overrightarrow{EO} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_E = -2FL\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & -z \\ 3F & 4F & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_E = -2FL\vec{k} + 4Fz\vec{i} - 3Fz\vec{j} + (-4Fx + 3Fy)\vec{k} = 0$$

$$0 = 4Fz\vec{i} - 3Fz\vec{j} + \left(-2FL - 4Fx + 3Fy\right)\vec{k}$$

La ecuación vectorial que resulta da lugar a tres ecuaciones escalares. Operando y anulando las tres componentes se obtiene:

$$\begin{gathered} 4Fz = 0 \Rightarrow z = 0 \\ -3Fz = 0 \Rightarrow z = 0 \\ -2FL - 4Fx + 3Fy = 0 \Rightarrow -2L - 4x + 3y = 0 \end{gathered}$$

El eje central es la recta intersección de los dos planos de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} -4x + 3y - 2L = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix}}$$

Para representar gráficamente el eje central se calculan sus puntos de intersección con los ejes coordenados anulando las coordenadas respectivas en su ecuación:

$$\text{Para } y = 0 \Rightarrow -4x - 2L = 0 \Rightarrow x = -\frac{L}{2} \Rightarrow \text{Punto P}\left(-\frac{L}{2},0,0\right)$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow 3y - 2L = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}L \Rightarrow \text{Punto Q}\left(0,\frac{2L}{3},0\right)$$

El eje central es la recta que une ambos puntos (Imagen 7).

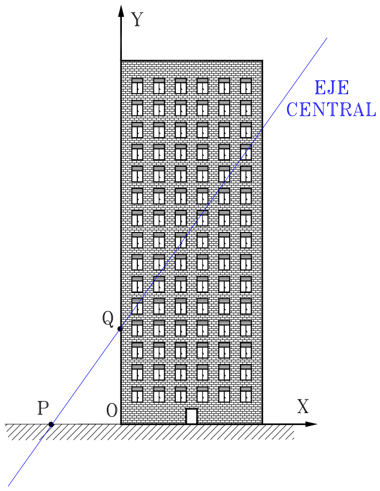

Imagen 7. Representación del eje central

4.4 Reducción del Sistema

Reducir un SVD es sustituirlo por otro equivalente más sencillo.

Se dice que **dos sistemas de vectores deslizantes son equivalentes** si tienen el mismo campo de momentos, es decir, si tienen el mismo Torsor.

El **caso de reducción más sencillo** corresponde a un SVD de invariante fundamental $\vec{M}\cdot\vec{R}=0$ con $\vec{R}\neq 0$. En un punto cualquiera del eje central E, su Torsor será $\left[\vec{R},\vec{M}_E=\vec{0}\right]$ siendo por tanto el **sistema reducido en E un solo vector deslizante** $(\vec{R},E)$, o el vector $\vec{R}$ con línea de acción el eje central del SVD.

El SVD correspondiente a este caso práctico, con $\vec{M}\cdot\vec{R}=0$ y $\vec{R}\neq 0$, se reduce a la Resultante como vector deslizante sobre el eje central como línea de acción, como sistema lo más sencillo posible y equivalente con el inicial.

$$\boxed{\left(\vec{R}=3F\vec{i}+4F\vec{j}\,;\ \text{Línea de accion}\begin{Bmatrix}-4x+3y-2L=0\\ z=0\end{Bmatrix}\right)}$$

Se puede comprobar que ambos SVD (el inicial y el reducido), tienen el mismo Torsor en el eje central: $T_E\equiv\left[\vec{R}=3F\vec{i}+4F\vec{j},\,\vec{M}_E=\vec{0}\right]$.

5 Cierre

A lo largo de este objeto de aprendizaje hemos ido resumiendo pormenorizadamente el procedimiento para la reducción de un SVD, aplicándolo a la resolución de un caso práctico sencillo. Los conceptos básicos de SVD necesarios se han ido recordando a medida que se hacía necesaria su aplicación.

Para finalizar, se podría representar el sistema reducido como el vector deslizante $\vec{R}$ con línea de acción el eje central del SVD (Imagen 8).

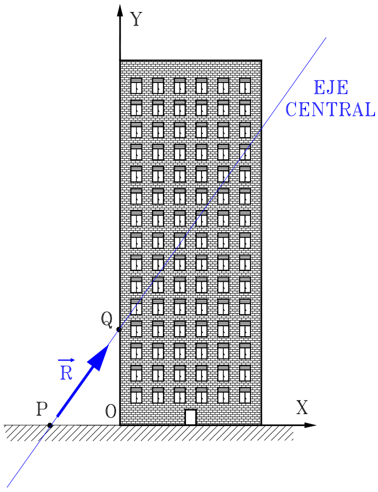

Imagen 8. Sistema reducido a un solo vector deslizante

Los puntos clave como resumen de este trabajo se exponen a continuación.

- El seguimiento del presente trabajo supone como conocimientos previos de la teoría de vectores deslizantes estudiada en los primeros cursos de Física de las carreras técnicas.
- El problema propuesto para su resolución supone un modelo adecuado para la aplicación práctica de los conocimientos anteriormente citados.
- La resolución del problema incide en la metodología general que se utiliza de forma organizada en este tipo de ejercicios.
- El planteamiento del problema como alfanumérico y como modelo simplificado de un caso práctico contribuye al desarrollo de la capacidad de abstracción, tan necesaria en las aplicaciones técnicas de nuestras materias.
- Los autores esperamos que este trabajo sea de interés para sus lectores cumpliendo los objetivos que nos hemos planteado al escribirlo.

6 Bibliografía

6.1 Libros:

R. Annequin y J. Boutigny. “Curso de ciencias físicas. Mecánica 2”, Editorial Revertè, 1978, pág 48-58.

J. M. Bastero y J. Casellas. “Curso de mecánica”, EUNSA,1976, pág 29-30.

F. Belmar, A. Garmendia y J. LLinares. “Curso de física aplicada. Estática”, SPUPV-87-330, 1987, pág 39-42.

C. Rubio, M. Gasque, J. V. Llopis, S. Quiles. 2013. “The theory of sliding vectors as a methodology for modelling systems of forces in technical subjets in engineering bachellor’s degree”. EDULEARN 13 Proceedings. Pp. 5691-5698. ISBN 978-84-616-3822-2.

6.2 Referencias de fuentes electrónicas:

J. Mas Estellés. Fundamentos Físicos de la Robótica. ETSIAP. UPV. Material de la asignatura, Tema 2. jmas.webs.upv.es/ffr/Leccion2/Tema2.pdf (Fecha de consulta: enero, 2017)

https://www.fisicalab.com › Experto › Fundamentos Matemáticos (Fecha de consulta: enero, 2017)

Rubio Michavila, Constanza; Gasque Albalate, María; "Álgebra vectorial". Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agroalimentaria y del Medio Natural. Universitàt Politècnica de València. Disponible en: http://hdl.handle.net/10251/38571.

Rubio Michavila, Constanza; Gasque Albalate, María; "Magnitudes escalares y vectoriales". Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agroalimentaria y del Medio Natural. Universitàt Politècnica de València. Disponible en: http://hdl.handle.net/10251/38105