Las Matemáticas para la Gestión de Carteras con Riesgo.

Carteras compuestas por n activos con correlaciones estadísticas arbitrarias. El caso en que se fija el rendimiento esperado de la cartera

Apellidos, nombre	Burgos Simón, Clara Cortés López, Juan Carlos; Navarro Quiles, Ana (clabur,si@posgrado.upv.es; jccortes@imm.upv.es; annaqui@posgrado.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En estas páginas se estudia el problema de la determinación de los pesos de los activos que constituyen una cartera financiera para minimizar el riesgo de la inversión global siendo que el rendimiento de la cartera está prefijado. Este problema está muy relacionado, pero es matemática y financieramente distinto, al que consiste en determinar los pesos de cada uno de los activos para minimizar el riesgo de la cartera asumiendo que se conocen los riesgos individuales de cada uno de los activos que forman la inversión global.

2 Introducción

Uno de los problemas centrales de la Gestión del Riesgo de Carteras Financieras está formulado a través del siguiente programa de optimización:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sigma^2 = \sigma^2\left(w_1, w_2, \ldots, w_n\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_i w_j = \vec{w} \cdot C \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}}, \\ \text{sujeta a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i = \vec{1} \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}} = 1. \end{array}\right\}$$

Ecuación 1. Programa de optimización para la Gestión del Riesgo de Carteras

Este problema consiste en la determinación de los pesos $\vec{w} = \left[w_1, w_2, \ldots, w_n\right]$ de los $n \geq 2$ activos financieros que forman una cartera para minimizar el riesgo $\sigma\left(w_1, w_2, \ldots w_n\right)$ de la cartera, siendo C la matriz de varianzas-covarianzas de los activos que forman la cartera. La solución de este problema está dada por:

$$\vec{w}^* = \frac{\vec{1} \cdot C^{-1}}{\vec{1} \cdot C^{-1} \cdot \vec{1}^{\mathrm{T}}}.$$

Ecuación 1. Solución del programa de optimización de la Ec.1, siendo $\vec{1} = \left[1, 1, \ldots 1\right]$.

En estas páginas abordamos un problema estrechamente relacionado con el formulado en la Ec.1, pero imponiendo una nueva restricción al problema: que la inversión global o cartera tenga un rendimiento prefijado. Como veremos en el desarrollo del trabajo, este nuevo contexto conduce a una solución diferente que tiene gran interés en las aplicaciones financieras.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Describir el problema de minimización del riesgo asociado a una cartera de inversión consistente en determinar los pesos de cada uno de los activos que forman la cartera de manera que se minimice el riesgo global de la inversión para un rendimiento de la cartera prefijado y asumiendo para ello que se conocen cada uno de los retornos esperados individuales de los diferentes activos que forman la cartera, así como sus correlaciones estadísticas.

- Desarrollar los principales pasos algebraicos que permiten obtener la expresión matemática de los pesos asociados a cada uno de los activos que forman la cartera de mínimo riesgo bajo las restricciones impuestas.

4 Planteamiento del problema

El estudio del problema enunciado en la Ec.1 consiste en determinar los pesos $w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*$ de cada uno de los activos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivamente, que forman una cartera de modo que el riesgo de la cartera sea mínimo. Desde este enfoque, una vez calculados los pesos $w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*$, y conocidos los retornos esperados $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, de cada activo, queda determinado el retorno esperado, μ, de la cartera. Sin embargo, como se ha señalado en la sección "Introducción" en este trabajo abordaremos otro problema estrechamente relacionado con el formulado en la Ec.1. y también de gran interés desde el punto de vista práctico es la determinación de los pesos $w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*$ para un rendimiento esperado, μ, de la cartera, que se haya fijado o propuesto el inversor. En este escenario, se trata de resolver el programa de minimización de la Ec.2.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sigma^2 = \sigma^2(w_1, w_2, \ldots, w_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_i w_j = \vec{w}\cdot C\cdot \vec{w}^{\mathrm{T}}, \\ \text{sujeta a:} & \sum_{i=1}^{n} w_i = \vec{w}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} = 1, \\ & \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i = \vec{w}\cdot\vec{m}^{\mathrm{T}} = \mu. \end{array}\right\}$$

Ecuación 2. Programa de optimización para determinar los pesos $\vec{w}^* = [w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*]$ que minimizan la cartera formada por los n activos con matriz de varianza-covarianza C, fijado un valor del retorno esperado, μ, de la cartera.

Para la resolución de este programa de optimización se aplicará el método de los multiplicadores de Lagrange [1]. La función objetivo auxiliar es

$$h = h(w_1, w_2, \ldots, w_n; \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_i w_j + \alpha\left(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\right) + \beta\left(\mu - \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i\right) = \vec{w}\cdot C\cdot\vec{w}^{\mathrm{T}} + \alpha\left(1 - \vec{w}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}\right) + \beta\left(\mu - \vec{w}\cdot\vec{m}^{\mathrm{T}}\right).$$

Los puntos críticos se determinan mediante el siguiente sistema de $n+2$ ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial h}{\partial \vec{w}}=2C\cdot\vec{w}^{\mathrm{T}}-\alpha\vec{1}^{\mathrm{T}}-\beta\vec{m}^{\mathrm{T}}=\vec{0}^{\mathrm{T}},\\ \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}=1-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}w_i=0,\\ \dfrac{\partial h}{\partial \beta}=\mu-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mu_i w_i=0,\end{array}\right\}\equiv\left.\begin{array}{c}2C\cdot\vec{w}^{\mathrm{T}}=\alpha\vec{1}^{\mathrm{T}}+\beta\vec{m}^{\mathrm{T}},\\ 1=\vec{w}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}},\\ \mu=\vec{m}\cdot\vec{w}^{\mathrm{T}},\end{array}\right\}$$

cuyas incógnitas son $w_1, w_2, \ldots, w_n, \alpha$ y β. De la primera ecuación anterior se obtiene

$$2C\cdot\vec{w}^{\mathrm{T}}=\alpha\vec{1}^{\mathrm{T}}+\beta\vec{m}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\vec{w}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}C^{-1}\left(\alpha\vec{1}^{\mathrm{T}}+\beta\vec{m}^{\mathrm{T}}\right)\Rightarrow\vec{w}=\frac{1}{2}\left(\alpha\vec{1}+\beta\vec{m}\right)C^{-1},$$

Ecuación 3. Expresión de $\vec{w}$ para el programa de optimización dado en la Ec.2.

donde se ha utilizado que C^{-1} es simétrica, por serlo la matriz de varianzas-covarianzas C.

Sustituyendo estas expresiones de $\vec{w}$ y $\vec{w}^{\mathrm{T}}$ en las ecuaciones de las restricciones se obtiene un sistema de dos ecuaciones que determinan α y β:

$$\left.\begin{array}{r}1=\vec{w}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{2}\left(\alpha\vec{1}+\beta\vec{m}\right)\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\left(\vec{1}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}\right)\alpha+\left(\vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}\right)\beta=2,\\ \mu=\vec{m}\cdot\vec{w}^{\mathrm{T}}=\vec{m}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot C^{-1}\cdot\left(\alpha\vec{1}^{\mathrm{T}}+\beta\vec{m}^{\mathrm{T}}\right)\Rightarrow\left(\vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}\right)\alpha+\left(\vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{m}^{\mathrm{T}}\right)\beta=2\mu.\end{array}\right\}$$

Para calcular α y β se puede aplicar la regla de Cramer:

$$\hat{\alpha}=\frac{2\begin{vmatrix}1 & \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}\\ \mu & \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{m}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\vec{1}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} & \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}\\ \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} & \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{m}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}},\quad \hat{\beta}=\frac{2\begin{vmatrix}\vec{1}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} & 1\\ \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} & \mu\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\vec{1}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} & \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}\\ \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} & \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{m}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}}.$$

Finalmente, el vector de pesos $\vec{w}$, que minimiza el programa de optimización dado en la Ec.1, se determina sustituyendo estos dos valores en la expresión de $\vec{w}$ obtenida en Ec.3

$$\hat{\vec{w}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}\\ \mu & \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{m}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}\vec{1}\cdot C^{-1}+\begin{vmatrix}\vec{1}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} & 1\\ \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} & \mu\end{vmatrix}\vec{m}\cdot C^{-1}}{\begin{vmatrix}\vec{1}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} & \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}}\\ \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^{\mathrm{T}} & \vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{m}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}}.$$

Ecuación 4. Vector de pesos que minimiza el riesgo de una cartera con retorno esperado, μ, prefijado.

Con todo ello, se acaba de establecer el siguiente

Resultado principal I:

Fijado un retorno esperado, μ, la cartera con mínimo riesgo está determinada por el vector de pesos dado en la Ec.4.

5 La frontera eficiente de Markowitz

A partir de este resultado se derivan algunas consecuencias interesantes que pasamos a comentar. Anteriormente hemos visto que los puntos $(\sigma_{\min},\mu)$, siendo μ un valor prefijado del retorno esperado de la cartera, determinan, al variar el valor de μ, un conjunto que se denomina "frontera eficiente de Markowitz". Gracias al resultado anterior se describe este conjunto de puntos. En particular, la Ec.4 revela que los pesos de mínimo riesgo, $\hat{\vec{w}}$, son una función lineal del retorno esperado, μ, de la cartera. Esto implica que al variar μ entre los valores $(-\infty,+\infty)$, mientras que los pesos de mínimo riesgo dibujan una línea recta en el hiperplano de pesos, los puntos $(\sigma_{\min},\mu)$ describen la curva de Markowitz (la raíz cuadrada de una parábola "tumbada"). Esto justifica finalmente el proceso realizado previamente, y dibujado en la Fig.1. De este modo, y siguiendo la notación de la Fig.1, las coordenadas del punto A de la frontera eficiente de Markowitz determina los pesos con menor riesgo, $\tilde{\sigma}$ de entre todas las carteras que tienen un rendimiento esperado dado $\tilde{\mu}$ (y que pertenecen a la recta $l_{\tilde{\mu}}$); y recíprocamente, las coordenadas del punto A de la frontera eficiente de Markowitz determina los pesos con mayor rendimiento esperado $\tilde{\mu}$ de entre todas las que tienen el mismo riesgo, $\tilde{\sigma}$. En términos técnicos, el punto A domina al punto B.

Las conclusiones anteriores se resumen en el siguiente

Resultado principal II:

Cualquier punto alcanzable (es decir contenido en la parábola de Markowitz) está dominado por un punto alcanzable de la frontera eficiente de Markowitz. Por tanto, los inversores que buscan minimizar el riesgo para un retorno esperado prefijado, solo deben fijarse en la frontera eficiente de Markowitz.

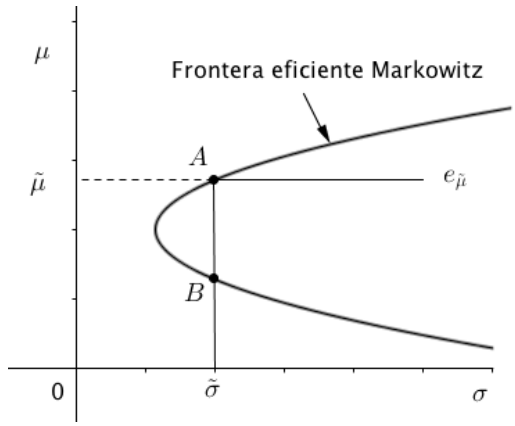

Figura 1. Representación gráfica de la Frontera Eficiente de Markowitz.

6 Un ejemplo

En esta sección se ilustran los conceptos y resultados anteriores mediante un ejemplo numérico. Se determinará los pesos de una cartera de riesgo mínimo de modo que la cartera tenga un riesgo esperado prefijado, por ejemplo, $\mu = 1\%$ ($\mu = 0.01$). Supondremos que la cartera está formada por tres activos para los cuales, se asume que se conocen (a partir de series históricas de cotizaciones y métodos estadísticos) sus retornos esperados

$$\vec{m} = \left[\mu_1, \mu_2, \mu_3\right] = \left[E\left[R_1\right], E\left[R_2\right], E\left[R_3\right]\right] = \left[0.2, 0.1, 0.3\right],$$

los riesgos de cada activo, mediante las desviaciones típicas de los retornos

$$\left[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right] = \left[+\sqrt{Var\left[R_1\right]}, +\sqrt{Var\left[R_2\right]}, +\sqrt{Var\left[R_3\right]}\right] = \left[0.12, 0.01, 0.10\right],$$

y sus coeficientes de correlación de los retornos $\rho_{i,j} = \rho_{j,i} = E\left[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])\right]$, $1 \le i, j \le 3$, $i \ne j$,

$$\rho_{1,2} = \rho_{2,1} = -0.10; \quad \rho_{1,3} = \rho_{3,1} = 0.05; \quad \rho_{2,3} = \rho_{3,2} = 0.15.$$

Por tanto, también se conoce su matriz de varianzas-covarianzas y su inversa

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0144 & -0.00012 & 0.0006 \\ -0.00012 & 0.0001 & 0.00015 \\ 0.0006 & 0.00015 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 70.4535 & 92.977 & -5.62186 \\ 92.977 & 10352.9 & -160.872 \\ -5.62186 & -160.872 & 102.75 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la Ec.4 se obtiene el vector de pesos de la cartera (para lo cual detallamos los cálculos intermedios):

$$\vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^T=[0.2\quad 0.1\quad 0.3]\begin{bmatrix}70.4535 & 92.977 & -5.62186\\ 92.977 & 10352.9 & -160.872\\ -5.62186 & -160.872 & 102.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=1040.94,$$

$$\vec{m}\cdot C^{-1}\cdot\vec{m}^T=[0.2\quad 0.1\quad 0.3]\begin{bmatrix}70.4535 & 92.977 & -5.62186\\ 92.977 & 10352.9 & -160.872\\ -5.62186 & -160.872 & 102.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\0.1\\0.3\end{bmatrix}=108.987,$$

$$\vec{1}\cdot C^{-1}=[1\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix}70.4535 & 92.977 & -5.62186\\ 92.977 & 10352.9 & -160.872\\ -5.62186 & -160.872 & 102.75\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}157.809\\10285\\-63.7439\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\vec{1}\cdot C^{-1}\cdot\vec{1}^T=[1\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix}70.4535 & 92.977 & -5.62186\\ 92.977 & 10352.9 & -160.872\\ -5.62186 & -160.872 & 102.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=10379.1,$$

$$\vec{m}\cdot C^{-1}=[0.2\quad 0.1\quad 0.3]\begin{bmatrix}70.4535 & 92.977 & -5.62186\\ 92.977 & 10352.9 & -160.872\\ -5.62186 & -160.872 & 102.75\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21.7018\\1005.62\\13.6134\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\vec{w}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1040.94\\ 0.01 & 108.987\end{vmatrix}\begin{bmatrix}157.809\\10285\\-63.7439\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{vmatrix}10379.1 & 1\\ 1040.94 & 0.01\end{vmatrix}\begin{bmatrix}21.7018\\1005.62\\13.6134\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}}{\begin{vmatrix}10379.1 & 1040.94\\ 1040.94 & 108.987\end{vmatrix}}=\begin{bmatrix}-0.100386\\1.50011\\-0.399773\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Como se han obtenido valores negativos para los pesos de los activos 1 y 3, esto significa que la cartera debe estar formado por posiciones cortas (short-position) de dichos activos.

7 Cierre

En este trabajo se ha estudiado un problema de interés en el ámbito de la Gestión de Riesgos Financieros, abordando la determinación de los pesos de los activos subyacentes que deben componer una cartera inversora de modo que ésta tenga un riesgo mínimo y un rendimiento esperado prefijado. La resolución de este problema se basa en la aplicación de técnicas de optimización de matemática y el uso de un cálculo matricial compacto para manejar de forma efectiva los cálculos operacionales implicados. Sin duda el estudio es un excelente ejemplo de la efectividad de las matemáticas en otras disciplinas y que debe servir para estimular al lector en las aplicaciones de las Matemáticas en la Gestión de Riesgos Financieros.

8 Bibliografía

[1] Barbollá, R., Cerdá, E. Y Sanz, P.: "Optimización. Cuestiones, Ejercicios y Aplicaciones a la Economía", Prentice-Hall, 2000.

Se trata de un texto excelente en el cual a través de numerosos ejercicios se revisan los aspectos más importantes de la optimización libre, con restricciones de igualdad y con restricciones de desigualdad.