



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

El Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV)

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

El principio de los Trabajos Virtuales tiene dos planteamientos: El principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV) y el Principio de las fuerzas Virtuales (PFV). En este artículo se explica, de forma sencilla, en qué consiste el Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV) y su aplicación a la resolución de estructuras planas de barras con comportamiento elástico y lineal, tomando como incógnitas principales a los movimientos independientes de los nudos.

2 Introducción

Las fuerzas exteriores que actúan sobre una estructura generan diferentes tipos de trabajos modificando la energía interna o energía de deformación del sistema. Estas magnitudes se relacionan mediante la ecuación de balance energético del Principio de Conservación de la Energía. En la estructura real únicamente puede plantearse una ecuación de balance energético por lo que, al disponer de una única ecuación se puede obtener solo una incógnita (estática o cinemática) siempre que esté en esa ecuación, de aquí las limitaciones del Principio de Conservación de la Energía para la resolución de estructuras.

Estas limitaciones desaparecen en el caso del Principio de los Trabajos Virtuales, ya que, mediante la aplicación de unos desplazamientos virtuales (Principio de los Desplazamientos Virtuales) o de unas fuerzas virtuales (Principio de las Fuerzas Virtuales) se puede generar tantas ecuaciones de balance como sean necesarias para resolver cinemáticamente o estáticamente una estructura, respectivamente.

Mediante el Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV) se plantean unos estados virtuales de desplazamientos que conducen, cada uno de ellos, a una ecuación de balance energético en la que se iguala el trabajo virtual generado por las fuerzas exteriores reales al desplazarse virtualmente con la energía de deformación virtual almacenada. Estos estados virtuales se generan aplicando sobre la estructura real un conjunto de desplazamientos virtuales que deben cumplir los requisitos que se enuncian en el apartado 4.1 de este artículo docente.

Las ecuaciones de balance son ecuaciones de equilibrio y sus incógnitas son los movimientos independientes de los nudos, que son las incógnitas cinemáticas principales. El número de estados virtuales y, por tanto, de ecuaciones deberá coincidir precisamente con el número de movimientos independientes.

Una vez calculados estos movimientos se obtienen los movimientos de los extremos de las barras así como las leyes o funciones de desplazamientos, teniendo resuelta cinemáticamente la estructura.

3 Objetivos

El objetivo de este documento es que, tras su lectura, el alumno sea capaz de:

- Determinar si es aplicable el principio de los desplazamientos virtuales para resolver cinemáticamente la estructura
- Determinar el número de estados virtuales de desplazamiento, a partir del número de movimientos independientes de los nudos,
- Plantear adecuadamente los estados virtuales de desplazamiento



- Obtener la expresión del trabajo virtual de las fuerzas exteriores correspondiente a cada estado virtual de desplazamientos en el caso de una estructura plana con comportamiento elástico y lineal
- Obtener la expresión de la energía virtual de deformación correspondiente a cada estado virtual de desplazamientos en el caso de una estructura plana con comportamiento elástico y lineal
- Plantear las ecuaciones de balance energético para la obtención de los movimientos

4 El Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV)

4.1 Planteamiento

Las componentes estáticas de cualquier estructura real de barras constituyen el grupo estático y las componentes cinemáticas el grupo cinemático. Ambos grupos tienen componentes externos e internos, siendo algunos de ellos datos y otros las incógnitas que hay que determinar. En la tabla 1 tenemos las componentes de cada grupo.

SISTEMA ESTRUCTURAL REAL	
GRUPO ESTÁTICO DEL SISTEMA ESTRUCTURAL REAL: EXTERNO: FUERZAS EXTERIORES (acciones y reacciones) INTERNO: TENSIONES/ESFUERZOS	GRUPO CINEMÁTICO DEL SISTEMA ESTRUCTURAL REAL: EXTERNO: DESPLAZAMIENTOS INTERNO: DEFORMACIONES

Tabla 1. Estructura real. Grupo estático y cinemático.

Sobre la estructura real, ya en equilibrio y con una configuración cinemática compatible, tras la actuación de las fuerzas exteriores mediante un proceso de puesta en carga lenta, se impone (de forma instantánea) un estado virtual de desplazamientos. En el Principio de los Desplazamientos Virtuales se mantiene, por tanto, el grupo estático real y se plantea un grupo cinemático virtual.

Los desplazamientos virtuales deben reunir las siguientes características:

- Ser arbitrarios, es decir, independientes de la configuración de desplazamientos real así como de la línea de acción de las fuerzas exteriores.
- Ser compatibles (cinemáticamente admisibles), es decir, cumplir las condiciones de compatibilidad.
- Ser pequeños, es decir, cumplir las hipótesis de la Teoría de Pequeños Movimientos

En cada estado virtual, las fuerzas exteriores reales y los desplazamientos virtuales realizan un trabajo virtual instantáneo llamado trabajo virtual de las fuerzas exteriores (δW). Internamente, las tensiones reales y las deformaciones virtuales realizan un trabajo virtual interno que se acumula en forma de energía virtual de deformación (δU).

Las condiciones de equilibrio de la estructura real no se modifican, por tanto, el trabajo virtual de las fuerzas exteriores será igual a la energía virtual de deformación.

Se trata de una ecuación de balance energético que representa una condición de equilibrio de la estructura:



$$\delta W = \delta U \quad (1)$$

Cada vez que se impone un nuevo estado virtual de desplazamientos se obtiene una nueva ecuación de balance energético.

4.2 Trabajo virtual de las fuerzas exteriores (δW)

El Trabajo Virtual de las Fuerzas Exteriores (δW) es el trabajo realizado por las componentes externas del grupo estático del sistema estructural real y las componentes externas del grupo cinemático virtual. Las variables independientes son los desplazamientos.

Este trabajo virtual total será la suma del trabajo virtual realizado por todas las fuerzas exteriores reales que trabajen con los desplazamientos del estado virtual.

Según el tipo de fuerza la expresión del trabajo virtual será la siguiente:

a) Trabajo virtual realizado por una fuerza puntual P:

$$\delta W_{\text{fuerza puntual}} = \pm P \cdot \delta \Delta \quad (2)$$

siendo P una fuerza puntual real aplicada en un nudo de la estructura y $\delta \Delta$ el desplazamiento virtual de ese nudo en la dirección de esa fuerza en el estado virtual

b) Trabajo virtual realizado por un momento puntual M:

$$\delta W_{\text{momento puntual}} = \pm M \cdot \delta \theta \quad (3)$$

siendo M un momento real aplicado en un nudo de la estructura y $\delta \theta$ el giro virtual de ese nudo en el estado virtual

c) Trabajo virtual realizado por una fuerza axial a la barra $p_a(x)$:

$$\delta W_{\text{fuerza axial}} = \int_0^L \pm p_a(x) \cdot \delta u(x) \cdot dx \quad (4)$$

siendo p_a una fuerza axial real (según eje X local) aplicada en una barra de la estructura y $\delta u(x)$ la función de desplazamiento virtual axial de esa barra en el estado virtual

d) Trabajo virtual realizado por una fuerza normal a la barra $p_n(x)$:

$$\delta W_{\text{fuerza normal}} = \int_0^L \pm p_n(x) \cdot \delta v(x) \cdot dx \quad (5)$$

siendo p_n una fuerza normal real (según eje Y local) aplicada en una barra de la estructura y $\delta v(x)$ la función de desplazamiento virtual según el eje Y de esa barra en el estado virtual

En las cuatro expresiones el signo dependerá de si la carga es positiva o negativa respecto de los ejes considerados (globales en el caso de una carga aplicada en nudo y locales en el caso de una carga aplicada en barra).

En la estructura de la figura 1 trabajaría la fuerza puntual P, el momento M así como las fuerzas p_a y p_n (proyecciones sobre los ejes locales de la carga p que actúa sobre la barra). En los cuatro casos los trabajos serán positivos.

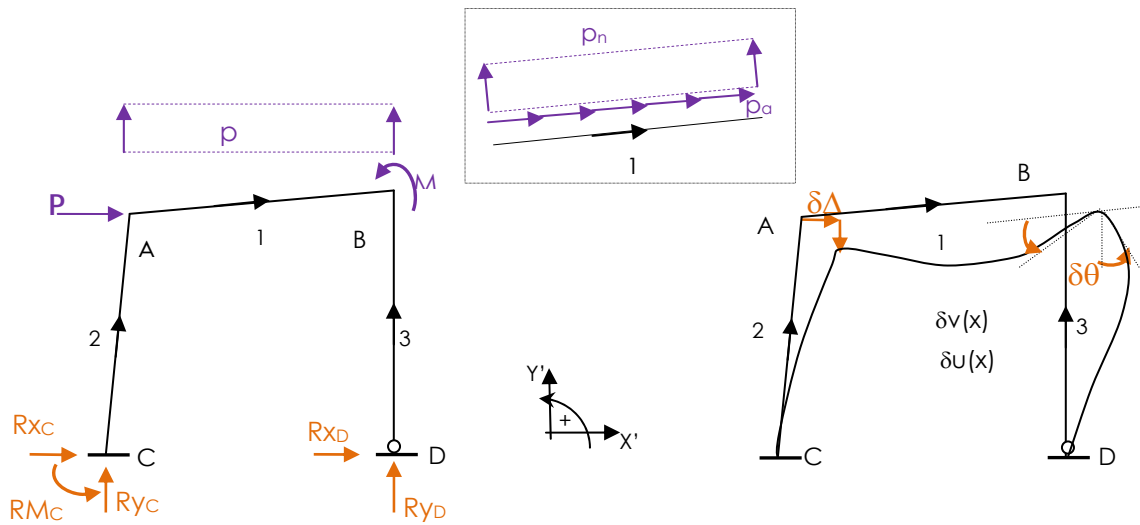


Figura 1. Estado real de fuerzas y Estado virtual de desplazamientos.

4.3 Energía virtual de deformación (δU)

El Trabajo Virtual interno (δW_{int}) es el trabajo realizado por las componentes internas del grupo estático del sistema estructural real y las componentes internas del grupo cinemático virtual. Este trabajo se acumula en forma de Energía virtual de deformación (δU). Las variables independientes son las deformaciones.

La energía virtual de deformación será la suma de la energía virtual de deformación de todas las barras de la estructura que deforman en el estado virtual. En el caso de estructural planas, aceptando un comportamiento elástico y lineal y despreciando la deformación por cortante, la energía virtual de deformación será la suma de la energía virtual de deformación por axil y la energía de deformación virtual por flexión. Estas tienen las siguientes expresiones:

a) Energía virtual de deformación por axil (δU_{ax}):

$$\delta U_{ax} = \int_0^L [EA u'(x)] \delta u'(x) dx \quad (7)$$

siendo E el módulo de elasticidad longitudinal, A el área de la sección transversal de la barra, $u'(x)$ la función de deformación real axial (según el eje x local) de la barra y $\delta u'(x)$ la función de deformación virtual axial de ésta.

b) Energía virtual de deformación por flector (δU_{flex}):

$$\delta U_{flex} = \int_0^L [EI v''(x)] \delta v''(x) dx \quad (8)$$

siendo E el módulo de elasticidad longitudinal, I el momento de inercia de la sección transversal de la barra, $v''(x)$ la función de deformación real según el eje y local de la barra (ley de curvaturas) y $\delta v''(x)$ la función de deformación virtual según el eje y local de ésta.



4.4 Resolución de estructuras hiperkinemáticas con el PDV

El Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV) permite la obtención de todos los movimientos independientes de los nudos que serán las incógnitas principales. Estas incógnitas están en la expresión de la energía virtual de deformación (δU), en las funciones de deformación reales $u'(x)$ y $v''(x)$ de cada barra.

Una vez determinemos el número de movimientos independientes de los nudos, deberemos plantear el mismo número de estados virtuales de desplazamiento. Estos estados virtuales deberán ser independientes entre sí, cumplir con las condiciones de compatibilidad y no generar incógnitas en la expresión del trabajo virtual de las fuerzas exteriores (δW).

Cada estado virtual nos proporcionará una ecuación de balance ($\delta W = \delta U$) de forma que, al final, tendremos un sistema de ecuaciones independientes (ecuaciones de equilibrio) que nos permitirá obtener el valor de las incógnitas cinemáticas.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Determinación del número de incógnitas: Todos movimientos independientes de los nudos (n)
2. En la estructura real garantizar el cumplimiento de las condiciones de compatibilidad: Obtención de las funciones de deformación de las barras ($u'(x)$ y $v''(x)$)
3. Planteamiento de los n estados virtuales de desplazamiento, en los que garantizaremos el cumplimiento de las condiciones de compatibilidad

Cada estado virtual consiste en:

- un único desplazamiento virtual de valor arbitrario (se asignará el valor 1) en la dirección y punto de aplicación de un movimiento incógnita
- los restantes movimientos permitidos están impedidos (se les asigna valor 0, quedando el estado virtual definido cinemáticamente)
- se elige como funciones de desplazamiento virtuales de las barras las mismas que las funciones reales (sin carga) pero particularizadas para los movimientos virtuales del estado virtual considerado (es decir, serán las funciones de forma correspondientes)

En cada estado virtual se obtienen las funciones de deformación de las barras ($\delta u'(x)$ y $\delta v''(x)$) y las funciones de desplazamiento de las barras que estén cargadas en el estado real ($\delta u(x)$ y $\delta v(x)$).

4. Planteamiento de las ecuaciones de balance energético de cada estado virtual de desplazamientos ($\delta W = \delta U$)
5. Resolución del sistema de ecuaciones: Obtención de los movimientos
6. Obtención de las funciones de desplazamiento reales de las barras: Sustituyendo los valores de los movimientos de los nudos con su signo.
7. Obtención de las leyes de esfuerzos y de todas las incógnitas estáticas de la estructura: Se obtienen las leyes de esfuerzos mediante su relación con las funciones de deformación: $N(x) = E \cdot A \cdot u'(x)$, $M(x) = E \cdot I \cdot v''(x)$ y $V(x) = E \cdot I \cdot v'''(x)$ y a partir de ellas los esfuerzos de extremo de barra y las reacciones.

4.5 Ejemplo de aplicación

En la figura 2 se representa el estado de fuerzas y desplazamientos de la estructura que vamos a utilizar como ejemplo de aplicación del Principio de los Desplazamientos Virtuales. Seguiremos los pasos indicados en el apartado anterior.

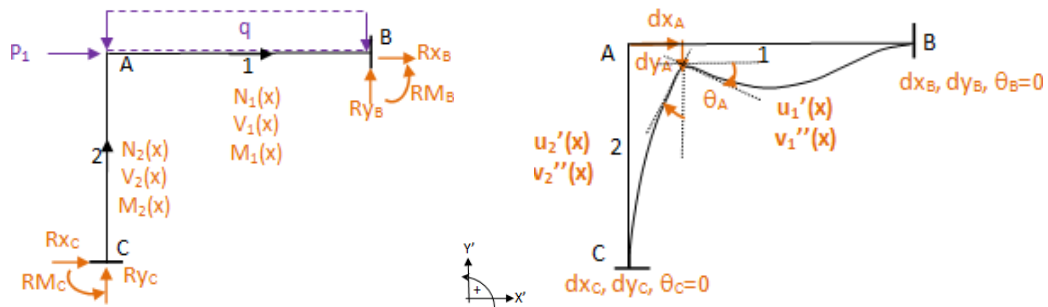


Figura 2. Estructura real

1. Incógnitas cinemáticas: movimientos independientes de los nudos. El único nudo libre es el nudo A por lo que las 3 incógnitas serán: dx_A , dy_A y θ_A

2. Estructura real:

Obtendremos las funciones de desplazamiento y deformación por axil y flexión de las dos barras.

Funciones de desplazamiento y deformación de la estructura real

BARRA 1:

axil: $u_1(x) = N_1^a(x) dx_A$ $u_1'(x) = N_1^a(x) dx_A$ (9)(10)

flexión: $v_1(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{-qx^4}{24} - \frac{-qLx^3}{12} + \frac{-qL^2x^2}{24} \right] + N_1^f(x)dy_A + N_2^f(x)\theta_A$ (11)

$v_1''(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{-qx^2}{24} - \frac{-qLx}{12} + \frac{-qL^2}{24} \right] + N_1^f(x)dy_A + N_2^f(x)\theta_A$ (12)

BARRA 2:

axil: $u_2(x) = N_2^a(x) dy_A$ $u_2'(x) = N_2^a(x) dy_A$ (13)(14)

flexión: $v_2(x) = N_3^f(x)(-dx_A) + N_4^f(x)\theta_A$ (15)

$v_2''(x) = N_3^f(x)(-dx_A) + N_4^f(x)\theta_A$ (16)

Siendo:

Funciones de forma axil: $N_1^a(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ $N_2^a(x) = \left(\frac{x}{L}\right)$

Funciones de forma flexión:

$N_1^f(x) = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1$ $N_2^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x$ $N_3^f(x) = \frac{-2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2}$ $N_4^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$

3.1. Estado virtual de desplazamientos 1

En el estado virtual 1 aplicaremos un desplazamiento virtual positivo de valor unidad δdx_A en el nudo A, en la dirección de la incógnita dx_A (figura 3), siendo nulos los demás movimientos del nudo A en este estado virtual.

La barra 1 no flectará y la barra 2 no tendrá deformación axial.

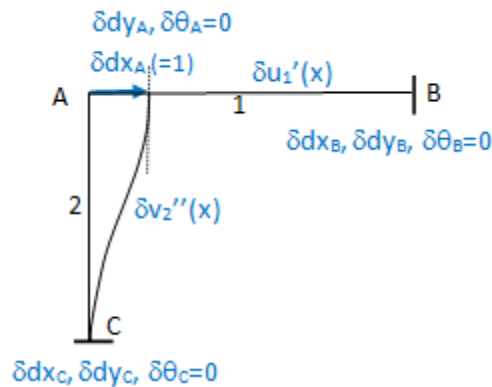


Figura 3. Estructura virtual 1

Obtendremos las funciones de desplazamiento y de deformación virtuales correspondientes.

Funciones de desplazamiento y deformación en el estado virtual 1

BARRA 1:

axil: $u_1(x) = N_1^a(x) \quad u_1'(x) = N_1^a(x) \quad (17)(18)$

BARRA 2:

flexión: $v_2(x) = N_3^f(x)(-1) \quad v_2''(x) = N_3^f(x)(-1) \quad (19)(20)$

3.2. Estado virtual de desplazamientos 2

En el estado virtual 2 aplicaremos un desplazamiento virtual positivo de valor unidad δdy_A en el nudo A, en la dirección de la incógnita dy_A (figura 4), siendo nulos los demás movimientos del nudo A en este estado virtual.

La barra 1 no tendrá deformación axial y la barra 2 no flectará.

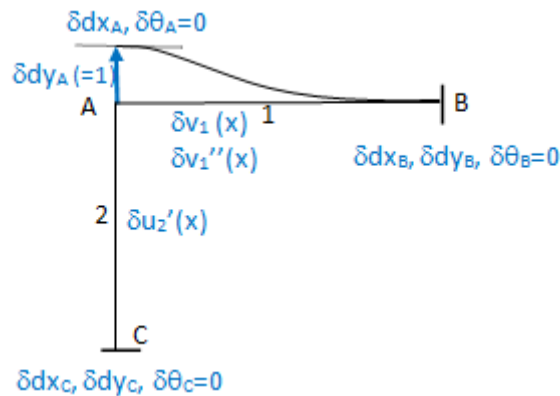


Figura 4. Estructura virtual 2

Obtendremos las funciones de desplazamiento y de deformación virtuales correspondientes.

Funciones de desplazamiento y deformación en el estado virtual 2

BARRA 1:

flexión: $v_1(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{-qx^4}{24} - \frac{-qLx^3}{12} + \frac{-qL^2x^2}{24} \right] + N_1^f(x)dy_A \quad (21)$



$$v''_1(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{-qx^2}{24} - \frac{-qLx}{12} + \frac{-qL^2}{24} \right] + N_1^f(x) dy_A \quad (22)$$

BARRA 2:

axil: $u_2(x) = N_2^a(x) \quad u'_2(x) = N_2^a(x) \quad (23)(24)$

3.3. Estado virtual de desplazamientos 3

En el estado virtual 3 aplicaremos un giro virtual positivo de valor unidad $\delta\theta_A$ en el nudo A, como la incógnita θ_A (figura 5), siendo nulos los demás movimientos del nudo A en este estado virtual.

Las barras 1 y 2 no tendrán deformación axial.

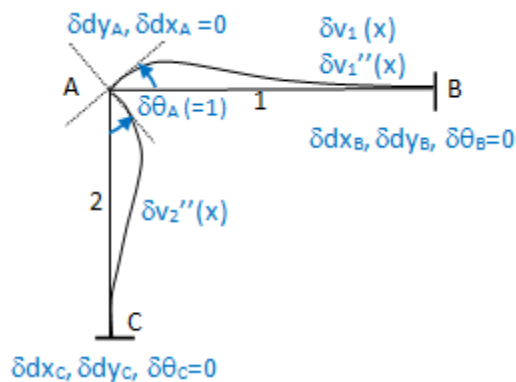


Figura 5. Estructura virtual 3

Obtendremos las funciones de desplazamiento y de deformación virtuales correspondientes.

Funciones de desplazamiento y deformación en el estado virtual 3

BARRA 1:

flexión: $v_1(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{-qx^4}{24} - \frac{-qLx^3}{12} + \frac{-qL^2x^2}{24} \right] + N_1^f(x) dy_A + N_2^f(x) \theta_A \quad (25)$

$$v''_1(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{-qx^2}{24} - \frac{-qLx}{12} + \frac{-qL^2}{24} \right] + N_1^f(x) dy_A + N_2^f(x) \theta_A \quad (26)$$

BARRA 2:

flexión: $v_2(x) = N_3^f(x)(-dx_A) + N_4^f(x) \theta_A \quad (27)$

$$v''_2(x) = N_3^f(x)(-dx_A) + N_4^f(x) \theta_A \quad (28)$$

4. Ecuaciones de balance energético ($\delta W = \delta U$):

Ecuación balance 1:

- Trabajo virtual: Es el trabajo producido por la fuerza exterior horizontal (P_1) y el desplazamiento virtual de su punto de aplicación, δdx_A .

$$\delta W = P_1 \cdot \delta dx_A \quad (29)$$

- Energía de deformación virtual: Será la suma de la energía virtual por axil de la barra 1 y por flector de la barra 2.

$$\delta U = \delta U_{ax1} + \delta U_{flex2} \quad (30)$$

Siendo:

$$\delta U_{ax1} = \int_0^{L_1} E A_1 u'_1(x) \delta u'_1(x) dx \quad y \quad \delta U_{flex2} = \int_0^{L_2} E I_2 v''_2(x) \delta v''_2(x) dx$$



Ecuación balance 2:

- Trabajo virtual: Es el trabajo producido por la fuerza q aplicada sobre la barra, negativa respecto del eje Y local de la barra.

$$\delta W = \int_0^{L_1} -q(x) \cdot \delta v_1(x) \cdot dx \quad (31)$$

- Energía de deformación virtual: Será la suma de la energía virtual por flector de la barra 1 y por axil de la barra 2.

$$\delta U = \delta U_{\text{flex1}} + \delta U_{\text{ax2}} \quad (32)$$

Siendo:

$$\delta U_{\text{flex1}} = \int_0^{L_1} EI_1 v_1''(x) \delta v_1''(x) dx \quad \gamma \quad \delta U_{\text{ax2}} = \int_0^{L_2} EA_2 u_2'(x) \delta u_2'(x) dx$$

Ecuación balance 3:

- Trabajo virtual: Es el trabajo producido por la fuerza q aplicada sobre la barra, negativa respecto del eje Y local de la barra.

$$\delta W = \int_0^{L_1} -q(x) \cdot \delta v_1(x) \cdot dx \quad (33)$$

- Energía de deformación virtual: Será la suma de la energía virtual por flector de las barras 1 y 2.

$$\delta U = \delta U_{\text{flex1}} + \delta U_{\text{flex2}} \quad (34)$$

Siendo:

$$\delta U_{\text{flex1}} = \int_0^{L_1} EI_1 v_1''(x) \delta v_1''(x) dx \quad \gamma \quad \delta U_{\text{flex2}} = \int_0^{L_2} EI_2 v_2''(x) \delta v_2''(x) dx$$

5. Resolución del sistema de ecuaciones y obtención de los movimientos

Una vez planteadas las tres ecuaciones de balance:

$$(29)=(30) \qquad (31)=(32) \qquad (33)=(34)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones obteniendo dx_A , dy_A y θ_A .

6 y 7. Obtención de las funciones de desplazamiento y de las leyes de esfuerzos.

Se sustituyen los valores obtenidos para los desplazamientos en las ecuaciones (9), (11), (13) y (15) que representan las funciones de desplazamiento de ambas barras. La ley de giros ($v'(x)=\theta(x)$) se obtiene derivando la ley de flechas.

Para obtener las leyes de esfuerzos [$N(x)=E \cdot A \cdot u'(x)$, $M(x)=E \cdot I \cdot v''(x)$ y $V(x)=E \cdot I \cdot v'''(x)$], se sustituyen los valores obtenidos para los desplazamientos en las ecuaciones (10), (12), (14) y (16) que representan las funciones de deformación de ambas barras.



5 Cierre

En este documento hemos resuelto cinemáticamente una estructura mediante el Principio de los desplazamientos Virtuales.

Se propone, como ejercicio de aplicación y autoevaluación, resolver cinemáticamente la estructura de la figura 6.



Figura 6. Estructura propuesta

(Resultado: La estructura tiene 3 movimientos independientes, aunque uno de ellos es 0, por lo que únicamente habrá dos incógnitas, d_{yc} y θ_c . Habrá que plantear dos estados virtuales de desplazamiento. $d_{yc} = -2,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\theta_c = 8,43 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$)

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Abdilla E. "Fundamentos energéticos de la Teoría de Estructuras. Segunda parte-Aplicaciones. Volumen 1". Editorial UPV, ref.: 2003.718, 2003

[2] Basset-Salom L. (2014). Métodos energéticos: El Principio de Conservación de la energía. Colección Artículos docentes ETSA. Disponible en:
<http://hdl.handle.net/10251/38582>

6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset

Figura 1. Estado real de fuerzas y Estado virtual de desplazamientos.

Figura 2. Estructura real

Figura 3. Estructura virtual 1

Figura 4. Estructura virtual 2

Figura 5. Estructura virtual 3

Figura 6. Estructura propuesta