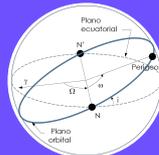
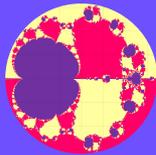
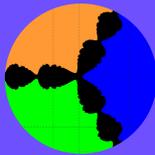




UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

ANÁLISIS DINÁMICO Y APLICACIONES DE MÉTODOS ITERATIVOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES



T E S I S D O C T O R A L

Presentada por FRANCISCO ISRAEL CHICHARRO LÓPEZ

Directores Dra. ALICIA CORDERO BARBERO
 Dr. JUAN RAMÓN TORREGROSA SÁNCHEZ

Valencia, mayo de 2017





UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Análisis dinámico y aplicaciones de métodos iterativos de resolución ecuaciones no lineales

Mayo de 2017

Autor: Francisco Israel Chicharro López

Directores: Dra. Alicia Cordero Barbero

Dr. Juan Ramón Torregrosa Sánchez

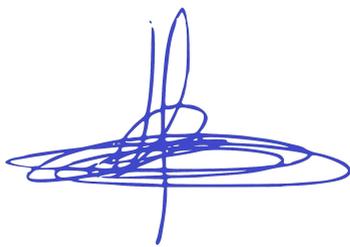
ISBN: 978-84-17098-06-3

Alicia Cordero Barbero, profesora Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de Valencia y Juan Ramón Torregrosa Sánchez, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de Valencia,

HACEN CONSTAR:

Que D. Francisco Israel Chicharro López, Ingeniero de Telecomunicación, ha realizado, bajo nuestra dirección, el trabajo que se recoge en esta memoria para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universitat Politècnica de Valencia. Asimismo, autorizamos la presentación de este trabajo ante la Universitat Politècnica de Valencia para que cumpla los trámites correspondientes.

Para que así conste a efectos legales, firmamos este documento en Valencia, a 11 de abril de 2017.



Fdo. Alicia Cordero Barbero



Fdo. Juan Ramón Torregrosa Sánchez

Agradecimientos

*“El corazón tiene razones que la razón no entiende”
(Pascal, 1623-1662)*

La elaboración de esta Tesis Doctoral ha supuesto, sobretodo, un ejercicio de responsabilidad.

Fue a mediados de 2010 cuando, con más ingenuidad y azar que presentimientos, la mecánica orbital me invitó a disfrutar de este sueño. Siempre tuve diálogos con los números, más allá del valor nominal que cada uno posee. Y a lo largo de estos años he podido moldearlos, modelarlos e incluso dibujarlos.

Mi primer agradecimiento es para Alicia y Juan Ramón. Gracias, por no permitir que me alejara de los números. El agradecimiento a los matemáticos está implícito; aquí quiero reflejar mi agradecimiento a las personas: los cafés, las visitas, las llamadas, los mensajes, los abrazos. Gracias, por volver a invitarme a subir a un barco tan bonito. Gracias, por hacer que tanto tiempo siempre pareciera ayer.

María, amor. El Teorema de Lawore está por llegar. Gracias por derrochar amor en tantas formas. Gracias por seguir mezclando colores para tus alas de mariposa: energía, pasión, esperanza, cielo. Gracias por seguirme ciegamente en mis proyectos, y por dejarte llevar en los nuestros.

Nico y Bimba. Cuando podáis leer esta Tesis, lo primero que quiero que sepáis es que nacisteis en la habitación π del Hospital, mientras escribía esta memoria.

Más que un problema de valor inicial, sois una solución general. Y nunca seréis conscientes de cuán feliz me hacéis, mis queridos complejos conjugados.

Paco y Puri, papá y mamá. Ahora que María y yo hemos creado una nueva familia, veo con más intensidad lo bonito que lo hicisteis con Ester y conmigo. Solo espero que este pedacito sea parte de vuestro orgullo.

Por último, gracias a los actores de esta película que os cruzasteis en alguna escena. A Freddy, Jandro, Samuel, por confiar en mí mis primeras clases particulares. A la Academia AMES, por darme las responsabilidades de las matemáticas universitarias. A mis amigos de la Universidad de La Rioja, por abrirme las puertas de vuestras reuniones científicas. Y a Alberto, por embaucarme en proyectos en los que poder crecer.

Los ejercicios de responsabilidad con uno mismo no son fáciles de hacer. En este mundo tan veloz, mirarse para adentro es complicado. Esta Tesis es el fruto de ser responsable con mis sentimientos, con mis sensaciones, con el afán de superación: con lo que siempre quise.

Lo siento, Pascal. El corazón y la razón han convergido.

Valencia, 10 de abril de 2017.

Resumen

Numerosos problemas de la ciencia, la ingeniería o la economía requieren de la búsqueda de soluciones de una ecuación. Desde tiempos remotos se ha tratado de modelizar problemas presentes en la naturaleza con expresiones que, al fin y al cabo, permitan conocer a priori cómo se va a comportar un sistema. Entre las técnicas utilizadas para dicha búsqueda de soluciones encontramos los métodos iterativos.

Iterar a partir de una serie de expresiones nos va a permitir conocer la solución de una función no lineal a partir de esquemas adecuados para ello. Además de los conocidos métodos de Newton y Steffensen, se van a implementar métodos con mayor orden de convergencia.

Clasificar los métodos iterativos en función de sus características intrínsecas nos va a permitir valorar la bondad o la conveniencia del uso de un método iterativo u otro. Como en todos los problemas de ingeniería y matemáticas, tendremos que obtener una solución de compromiso.

Otra de las caracterizaciones existentes, complementaria a la anterior, es el estudio de la dinámica compleja. El operador de punto fijo asociado a cada uno de los métodos iterativos cuando se aplica sobre una función no lineal va a permitir que caractericemos cada uno de los esquemas en el plano complejo.

Buena parte del trabajo desarrollado se ha centrado en la representación gráfica de la dinámica de los métodos iterativos. El plano dinámico es una herramienta que nos permite visualizar la estabilidad de un método, el tamaño de sus cuencas de convergencia o la idoneidad de determinados puntos iniciales para comenzar a

iterar. Asimismo, para familias de métodos uniparamétricas, el plano de parámetros va a colaborar en la elección del miembro de la familia más adecuado.

Interpretando los planos dinámicos como una aproximación a los fractales, presentaremos la dimensión fractal como un factor de medida de lo intrincado que puede resultar el conjunto de Julia asociado a un método iterativo. Los fractales pertenecen a la frontera entre el determinismo y la teoría del caos, de forma que podremos transferir conceptos de ambas disciplinas sobre el estudio fractal.

Mostraremos como aplicación de los métodos iterativos y la dinámica compleja la determinación de órbitas preliminares de satélites artificiales. A partir de la posición de un satélite en dos instantes diferentes, es posible determinar los parámetros de la elipse que describe. Para ello, utilizaremos un algoritmo en el que se incluye un método clásico de resolución para, a continuación, mejorar sus prestaciones con nuestras propuestas de métodos iterativos.

Basándonos en la búsqueda de soluciones y en los métodos iterativos como técnica de obtención de soluciones, las aplicaciones abarcan campos más allá de la mecánica orbital. El diseño de filtros digitales, el procesado digital de imágenes o la caracterización de enlaces de radiofrecuencia son algunos de los ejemplos de aplicación.

A partir de los conceptos anteriores, presentamos esta Tesis Doctoral para la obtención del título de Doctor en Matemáticas, contextualizando la temática en los primeros capítulos para, a continuación, presentar las publicaciones en revistas internacionales como fruto de la investigación.

Resum

Nombrosos problemes de la ciència, la ingenieria o l'economia requereixen de la cerca de solucions d'una ecuació. Des de temps llunyans s'ha tractat de modelitzar problemes presents a la natura amb expressions que, al cap i a la fi, permeten conèixer a priori el comportament d'un sistema. Entre les tècniques emprades per tal cerca de solucions trobem els mètodes iteratius.

Iterar a partir d'una sèrie d'expressions ens permetrà conèixer la solució d'una funció no lineal a partir d'esquemes adequats. A més dels coneguts mètodes de Newton i Steffensen, s'implementaran mètodes amb major ordre de convergència.

Classificar els mètodes iteratius en funció de les seues característiques intrínseques ens permetrà avaluar la bondat o la conveniència de l'ús d'un mètode iteratiu o d'un altre. Com a la majoria de problemes d'ingenieria i matemàtiques, haurem de trobar una solució de compromís.

Altra de les caracteritzacions existents, complementària a l'anterior, és l'estudi de la dinàmica complexa. L'operador de punt fix associat a cadascun dels mètodes iteratius quan s'aplica sobre una funció no lineal permetrà la caracterització de cada esquema al pla complex.

Bona part del treball desenvolupat s'ha centrat en la representació gràfica de la dinàmica dels mètodes iteratius. El pla dinàmic es una eina que ens permet visualitzar l'estabilitat d'un mètode, la mida de les seues conques de convergència o la idoneïtat de determinats punts inicials per a començar a iterar. Així mateix, per a famílies de mètodes uniparamètriques, el pla de paràmetres col·laborarà en l'elecció del membre de la família més adequat.

Interpretant els plànols dinàmics com una aproximació als fractals, presentarem la dimensió fractal com un factor per a mesurar quant d'intrincat es troba el conjunt de Julia associat a un mètode iteratiu. Els fractals pertanyen a la frontera entre el determinisme i la teoria del caos, de manera que podrem transferir conceptes d'ambdues disciplines sobre l'estudi fractal.

Mostrarem com aplicació dels mètodes iteratius i la dinàmica complexa la determinació d'òrbites preliminars de satèl·lits artificials. A partir de la posició d'un satèl·lit en dos instants diferents, és possible determinar els paràmetres de l'el·lipse que descriu. Per això, utilitzarem un algoritme en el qual s'inclou un mètode clàssic de resolució per, a continuació, millorar les seues prestacions amb les nostres propostes de mètodes iteratius.

Basant-nos en la cerca de solucions i en els mètodes iteratius com a tècnica d'obtenció de solucions, les aplicacions abasten camps més enllà de la mecànica orbital. El disseny de filtres digitals, el processament digital d'imatges o la caracterització d'enllaços de radiofreqüència son alguns dels exemples d'aplicació.

A partir dels conceptes anteriors, presentem aquesta Tesi Doctoral per a l'obtenció del títol de Doctor en Matemàtiques, contextualitzant la temàtica als primers capítols per, a continuació, presentar les publicacions en revistes internacionals com a fruit de la investigació.

Abstract

Many problems in science, engineering or economy involve the search of the solution of an equation. Since ancient times, the modelling of nature problems has attracted a lot of interest, in order to predict the behaviour of a system. There are several techniques to find the solution of an equation. We are focusing in the iterative methods.

From an iterative scheme we are able to know the solution of a nonlinear function, provided there exist suitable methods. In addition to the well-known Newton's and Steffensen's methods, we are implementing methods with higher order of convergence.

The classification of the methods depending on their intrinsic features is giving us the chance to evaluate the goodness or the convenience of an iterative method. As in every engineering or mathematical problem, we will find a tradeoff solution.

Another way to classify methods, complementary to the previous one, is the complex dynamics study. The fixed point operator associated to every iterative methods when it is applied over a nonlinear function is the seed for developing tools to characterize every scheme on the complex plane.

The graphical representation of the iterative methods dynamics has occupied a broad part of the time of the current research. The dynamical plane is a powerful tool to visualize the stability of a method, the size of their basins of attraction or the suitability of some starting points to initialize the iterations. As well, for uniparametric families, the parameters plane will cooperate in the chose of the right member of the family.

Dynamical planes can be interpreted as an approach to fractals. The fractal dimension is being introduced as a way to measure how intricate is the Julia set of an iterative method. Fractals belong to the borderline between the determinism and the theory of chaos. So we are transferring concepts of both issues on the fractal study.

As an application of the iterative methods and the complex dynamics, we are showing the preliminary orbit determination of artificial satellites. From the position of a satellite in two different times, it is possible to guess the parameters of the ellipse described by the satellite. For this purpose, we are applying an algorithm that includes a classical resolution method. Our contribution consists in the use of our iterative methods to improve the performance of the system.

The possible applications of iterative methods for finding solutions of equations are beyond orbital mechanics. The design of digital filters, the digital image processing or the characterization of radio-frequency links are some of the examples.

From the previous concepts, we introduce this Doctoral Thesis for gaining the title of Philosophae Doctor in Mathematics. First chapters contextualize the involved topics, while the following ones present the papers published in international scientific journals as the fruit of the research.

Índice general

Resumen	vii
Índice general	xiii
1 Introducción	1
2 Conceptos previos	5
2.1 Métodos iterativos	6
2.1.1 Clasificación de métodos iterativos	6
2.1.2 Orden de convergencia	8
2.1.3 Métodos iterativos sin memoria, multipaso, libres de derivadas	9
2.2 Dinámica compleja	15
2.2.1 Fundamentos de dinámica compleja	17
2.2.2 Clases de conjugación	20
2.2.3 Representaciones gráficas	23
2.2.4 Dimensión fractal	27
2.3 Mecánica orbital	32
2.3.1 El problema de dos cuerpos	32
2.3.2 Los elementos orbitales	35

2.3.3 Determinación preliminar de órbitas	38
3 Representación de planos de parámetros y planos dinámicos	43
3.1 Introducción	44
3.2 Características de dinámica compleja de la familia de Kim	45
3.2.1 Uso de los planos dinámicos y de parámetros	50
3.3 Código MATLAB [®] de los planos	55
3.3.1 Planos dinámicos	55
3.3.2 Planos de parámetros	59
3.4 Conclusiones	60
4 Análisis dinámico y fractal de métodos de tipo Steffensen	61
4.1 Introducción	62
4.2 Métodos óptimos libres de derivadas	63
4.3 Dinámica compleja de métodos iterativos	66
4.4 Dimensión fractal de métodos iterativos	68
5 Convergencia y dinámica de nuevos métodos de orden 4	73
5.1 Introducción	74
5.2 Los métodos y el análisis de la convergencia	77
5.3 Análisis dinámico	80
5.3.1 Análisis del método M1	81
5.3.2 Análisis de la familia M2	85
6 Dinámica compleja de métodos libres de derivadas para ecuaciones no lineales	91
6.1 Introducción	92
6.2 Polinomios cuadráticos	97
6.3 Polinomios cúbicos	104
6.4 Conclusiones	110

7	Determinación de órbitas de satélites a partir de métodos iterativos	111
	7.1 Introducción	112
	7.2 El problema de dos cuerpos	113
	7.3 Determinación de una órbita preliminar a partir de dos posiciones y el intervalo temporal	115
	7.3.1 Iteración de la anomalía verdadera	115
	7.3.2 Métodos libres de derivadas de alto orden	116
	7.3.3 Resultados numéricos	119
8	Conclusiones y líneas futuras	121
	8.1 Conclusiones	121
	8.2 Líneas futuras	123
A	Catálogo de méritos	127
	A.1 Publicaciones	127
	A.2 Congresos	128
	A.3 Otros méritos	129
	A.3.1 Relacionados con el área de Matemáticas	129
	A.3.2 Relacionados con el área de Ingeniería	129
	A.3.3 Relacionados con el área de Idiomas	131
B	Código de los programas de representación de planos	133
	B.1 Selección del método iterativo para el plano dinámico	133
	B.2 El plano dinámico	135
	B.3 Selección del método iterativo para el plano de parámetros	136
	B.4 El plano de parámetros	137
Bibliografía		139

Capítulo 1

Introducción

El diseño de métodos numéricos para resolver ecuaciones y sistemas no lineales es un área muy activa del análisis numérico que ha atraído la atención de numerosos investigadores durante más de tres siglos. Actualmente, con las herramientas de computación de las que se dispone, el análisis de estos métodos ha sufrido una tremenda revolución a nivel numérico, puesto que las potentes computadoras permiten la simulación de estos métodos sobre una gran cantidad de situaciones.

En la literatura se pueden encontrar numerosas publicaciones que contienen el análisis de los métodos de Newton, Chebyshev o Halley [7, 8, 23, 25, 32]. Para poder clasificarlos, se puede recurrir a diferentes criterios. Por un lado, se pueden ordenar a partir de su orden de convergencia, lo que nos indicará la rapidez con la que dichos métodos convergen a un determinado punto. Por otro lado, se les puede caracterizar como óptimos o no en función de la conjetura de Kung-Traub [46], que establece una relación entre las evaluaciones de la función no lineal y de la función derivada en un paso de la iteración y el orden de convergencia del método. Estas variables inciden también en la definición de otro parámetro comparativo, como es el índice de eficiencia [56]. Otro criterio de clasificación más reciente se basa en la dimensión fractal del conjunto de Julia asociado al método iterativo [30, 38].

Una técnica utilizada en los últimos tiempos para incrementar el orden de convergencia de un método, descrita en [55], consiste en la composición de dos métodos,

siendo el orden de convergencia resultante el producto de los órdenes de los métodos individuales. De este modo, se consiguen métodos de órdenes 4, 8, 16 o arbitrario [19], aunque el mayor reto es reducir el número de evaluaciones de los métodos resultantes para que el orden sea óptimo.

Paralelamente y como consecuencia del desarrollo computacional, las técnicas de análisis de la dinámica compleja asociadas a los métodos iterativos también han sufrido su particular revolución. El análisis clásico de la dinámica compleja comprendía el comportamiento asintótico de los puntos fijos, fueran raíces o no de la ecuación no lineal bajo estudio, así como las cuencas de atracción asociadas a cada uno de los puntos fijos atractores, como se describe exhaustivamente en [7, 8, 25, 24]. La posterior aplicación de estas técnicas sobre diferentes familias iterativas ha dado lugar a una serie de publicaciones relevantes en la materia como [16, 21, 37, 41]. Como complemento al estudio analítico se han desarrollado herramientas gráficas para la representación de los planos dinámicos y de parámetros [62]. En el caso de los planos de parámetros, el análisis de los puntos críticos libres (aque- llos puntos críticos que no coinciden con las raíces de la ecuación no lineal) nos permite seleccionar los miembros de la familia con mayor estabilidad. Los planos dinámicos nos van a aportar una visión del final de la órbita de cada uno de los posibles puntos iniciales, dando lugar a las cuencas de atracción.

El Capítulo 2 es el correspondiente a la introducción de los conceptos previos que se desarrollarán en los capítulos siguientes. Comenzaremos por presentar los métodos iterativos y los diferentes criterios que establecen una clasificación de los mismos. A continuación, se introducirán los conceptos fundamentales de dinámica compleja con los que trabajaremos a lo largo de toda la Tesis Doctoral, tanto del análisis numérico como de las representaciones de los planos dinámicos y de parámetros. La definición de la dimensión fractal formará parte de la sección asociada a la dinámica compleja. Para cerrar este capítulo, se introducirán contenidos de mecánica orbital basados en el problema clásico de dos cuerpos, en lo que constituirá la aplicación final de los métodos iterativos.

Al tratarse de una Tesis por compendio de artículos, presentaremos cada uno de ellos en los Capítulos 3 a 7.

En el Capítulo 3, la principal aportación que realizamos es la generación y publicación del código en MATLAB® para la representación de los planos dinámicos y los planos de parámetros. A modo de aplicación, realizamos el análisis de la dinámica compleja de la familia de Kim, y evaluamos los diferentes comportamientos en función del parámetro que gobierna la familia de métodos iterativos.

En el Capítulo 4 realizamos el diseño de tres métodos iterativos óptimos libres de derivadas de órdenes cuatro, ocho y dieciséis. Sobre estos métodos se realiza el análisis complejo y se representan sus planos dinámicos para los miembros más significativos de las familias resultantes. Asimismo, se obtiene la dimensión fractal de cada uno de los métodos, siendo comparada con la correspondiente al conocido método de Newton.

Será en el Capítulo 5 cuando realicemos el análisis dinámico de la familia de métodos iterativos de King. Estudiaremos dos miembros de dicha familia cuya riqueza dinámica aportará valor a la representación de los planos dinámicos y de parámetros. Sobre esta familia, demostraremos el orden de convergencia, notando que para determinados miembros el orden cambia.

En el Capítulo 6 se analizan en profundidad los métodos de Steffensen y uno de los métodos que hemos diseñado de cuarto orden. En ambos casos, los métodos serán óptimos. Este análisis abarcará las expresiones de los operadores de punto fijo, las características dinámicas de los puntos especiales y la representación de los planos dinámicos y de parámetros. A partir del análisis se obtendrán una serie de conclusiones respecto de las características de las cuencas de atracción.

En el Capítulo 7 pondremos en aplicación los métodos iterativos que se han ido diseñando y analizando a lo largo de los capítulos previos, para determinar la órbita preliminar de un satélite artificial. A partir de dos posiciones del satélite y el intervalo temporal entre las mediciones, es posible obtener la trayectoria que seguirá el satélite. Clásicamente se ha utilizado el método de la secante en un paso del algoritmo para resolver una ecuación no lineal. Ese paso será sustituido por los métodos implementados, mejorando las prestaciones del método clásico.

Por último, en el Capítulo 8 presentaremos un resumen de las acciones realizadas, las conclusiones obtenidas y las líneas de investigación que se abren a partir del trabajo realizado.

Capítulo 2

Conceptos previos

La modelización de problemas presentes en la naturaleza ha permitido durante toda la historia prever el comportamiento de determinados sucesos. La concepción determinista de la ciencia ha permitido desarrollar, de forma paralela a la evolución de los sistemas, herramientas matemáticas que han posibilitado aportar una explicación a partir del empirismo.

Gran parte de los problemas que se han ido describiendo a lo largo de la historia se han podido reducir a una expresión algebraica. Sin embargo, existen problemas cuyas características no permiten ser definidos a partir de una función. Es el momento de plantearse la obtención de una solución aproximada, un valor que esté cerca del objetivo. Es cuando entran en juego los métodos iterativos, objeto de estudio en la Sección 2.1.

Los métodos iterativos permiten obtener la solución aproximada de una ecuación no lineal, pero no todos funcionan de la misma forma. No todos los esquemas iterativos se comportan de la misma manera ante un mismo problema. El análisis de la estabilidad, del orden de convergencia, del rango de valores para los que el método es válido, y su eficiencia computacional, entre otros, caracterizan a los distintos métodos iterativos, dando lugar a diferentes clasificaciones. La dinámica compleja colabora de manera estrecha con este análisis, y será descrita a lo largo de la Sección 2.2. Además, gracias al análisis dinámico, se pueden obtener re-

presentaciones gráficas que permiten establecer comparaciones entre métodos más allá de los meros resultados numéricos, dando lugar a estructuras fractales.

Uno de los problemas que desde el siglo XVII ocupó los quehaceres de los científicos fue el conocimiento y modelización del Sistema Solar. Antes de que se abordara el problema de los n cuerpos, se trató de simplificar el problema a tan solo dos cuerpos. En 1687 Newton dio con la solución geométrica, Bernoulli aportó la solución analítica en 1734 y Euler, en 1744, dio una solución completa a este problema. La adaptación del problema de dos cuerpos a la actualidad pasa por el estudio de la órbita que describe un satélite que da vueltas alrededor de la Tierra. El planteamiento del problema, sus ecuaciones y las diferentes formas de obtener una solución se abordarán en la Sección 2.3.

2.1 Métodos iterativos

Como se ha reseñado previamente, uno de los problemas más habituales en el ámbito científico es la resolución ecuaciones o sistemas de ecuaciones. De hecho, la solución numérica de las ecuaciones abarca problemas tan dispares como la transferencia radioactiva, la determinación preliminar de órbitas de satélites, las simulaciones climatológicas o numerosos problemas de mecánica clásica. Las estrategias clásicas para la resolución de este tipo de problemas han dado lugar a publicaciones de referencia como [55], [56], [58] o [61], entre otras.

Los métodos iterativos permiten, bajo determinadas condiciones, obtener la raíz simple α de una ecuación $f(x) = 0$, donde $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real definida en un intervalo abierto I . Asimismo, los métodos también son válidos trabajando sobre variable compleja, denotando la ecuación a resolver por $f(z) = 0$, donde $f : I \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función compleja.

2.1.1 Clasificación de métodos iterativos

Los métodos iterativos pueden ser clasificados en base a diferentes criterios, de entre los que destacamos los siguientes. Por un lado, se puede determinar si un método es **con** o **sin memoria** en función de los datos necesarios para obtener el siguiente valor de la iteración. De este modo, un método sin memoria se puede describir a partir de

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

mientras que un método con memoria tendrá la expresión

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Los métodos con memoria se aplican, por ejemplo, en el diseño de elementos digitales para el procesado digital de la señal tales como filtros, modelización de sistemas de alimentación para antenas de comunicaciones o circuitos de microondas [60]. De ahora en adelante, trabajaremos con métodos sin memoria, de forma que nuestros esquemas tendrán la forma (2.1).

El método estrella por antonomasia para la resolución de ecuaciones no lineales es el conocido método de Newton, cuya expresión iterativa es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Una familia de métodos a la que también se recurre con frecuencia es la familia de Chebyshev-Halley, cuya esquema iterativo viene dado por

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{L_f(x_n)}{1 - \beta L_f(x_n)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

siendo β un parámetro y $L_f(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2}$ el grado de convexidad logarítmica. Particularizando el valor de β se obtienen miembros de la familia que dan lugar a métodos iterativos sobre los que existe una extensa literatura, como el método de Chebyshev para $\beta = 0$, el método de Halley para $\beta = 1/2$ o el método de super-Halley para $\beta = 1$.

Los métodos (2.2) y (2.3) son esquemas de **un paso** que utilizan d evaluaciones de la función f o de sus derivadas en cada iteración. Por otro lado, hay que destacar que Traub [61] demostró que para diseñar un método de un paso de orden p es necesario que la expresión incluya derivadas de orden $p - 1$ como mínimo. Por tanto, resulta interesante incrementar el número de pasos para aumentar el orden de convergencia del método. Los métodos **multipaso**, también denominados métodos predictor-corrector, han despertado el interés científico de las últimas décadas en aras de obtener esquemas de mayor orden de convergencia. El objetivo de los métodos multipaso, que tienen la expresión

$$\begin{aligned} y_n &= \Psi(x_n), \\ x_{n+1} &= \Phi(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

es el aumento del orden de convergencia sin incrementar la cantidad de evaluaciones funcionales. De forma general, a lo largo de esta Tesis se trabajará sobre métodos multipaso, utilizando los métodos de un paso para establecer comparativas entre ambos tipos.

El último de los criterios para clasificar los métodos iterativos que vamos a establecer es la presencia o ausencia de derivadas, dando lugar a métodos **con derivadas**

o **libres de derivadas**. En ocasiones las ecuaciones sobre las que se trabaja o no tienen derivada o resulta difícil de obtener. Los esquemas libres de derivadas permiten que cualquier método pueda ser utilizado. Para ello, una técnica habitual es la sustitución de las derivadas por esquemas con diferencias finitas. Las diferencias de primer orden aproximan la derivada a partir de las diferencias progresivas, regresivas o centrales, siendo sus expresiones

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)},$$

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))}{f(x_n)},$$

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n - f(x_n))}{2f(x_n)},$$

respectivamente.

La Tabla 2.1 recoge las distintas clasificaciones de los métodos en función del criterio elegido.

Memoria	Sin memoria	$x_{n+1} = \Phi(x_n)$	Con memoria	$x_{n+1} = \Phi(x_n, x_{n-1}, \dots)$
Pasos	Un paso	$x_{n+1} = \Phi(x_n)$	Multipaso	$y_n = \Psi(x_n)$ $x_{n+1} = \Phi(x_n, y_n)$
Derivadas	Libre de derivadas	$x_{n+1} = \Phi(f(x_n))$	Con derivadas	$x_{n+1} = \Phi(f^{(k)}(x_n))$

Tabla 2.1: Clasificación de métodos iterativos

2.1.2 Orden de convergencia

La velocidad con la que los métodos alcanzan la raíz α solución de la ecuación $f(x) = 0$ viene determinada por el orden de convergencia. Sea $\{x_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de valores generados por un método iterativo. La sucesión converge a α con orden de convergencia p si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = K, \quad K > 0.$$

Existen definiciones del orden de convergencia adaptadas a sistemas computacionales, entre las que destacamos el orden de convergencia computacional ρ , definido

por Cordero y Torregrosa en [18] como

$$p \approx \rho = \frac{\ln \left(\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} \right)}{\ln \left(\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|} \right)}.$$

Asociado al orden de convergencia se definen una serie de parámetros que posibilitan el establecimiento de una comparación cuantitativa entre métodos iterativos.

El **índice de eficiencia** I , introducido por Ostrowski en [56], se define como

$$I = p^{1/d},$$

donde p es el orden de convergencia del método y d es la cantidad de evaluaciones de la función f y sus derivadas que se realiza en cada paso de la iteración.

En la misma línea, Kung y Traub establecen en [46] la definición de **método óptimo**. Conseguir que un método sea óptimo es uno de los objetivos fundamentales a la hora de diseñar un método iterativo. La conjetura de Kung y Traub indica que el orden de convergencia de un método sin memoria con d evaluaciones funcionales por iteración cumple

$$p \leq 2^{d-1},$$

denominándose método óptimo aquel que cumple la igualdad en la expresión anterior.

Una técnica habitual para aumentar el orden de convergencia de un método consiste en la **composición de métodos**, descrita en [55]. A partir de dos métodos de órdenes de convergencia p_1 y p_2 , es posible obtener un método con orden $p = p_1 \cdot p_2$. Generalmente, esta técnica aumenta considerablemente la cantidad de evaluaciones de la función en cada iteración, de forma que el valor de índice de eficiencia se ve afectado.

2.1.3 Métodos iterativos sin memoria, multipaso, libres de derivadas

A continuación se van a presentar una serie de métodos diseñados a partir de las técnicas descritas en los apartados anteriores, que serán utilizados en los capítulos siguientes para su análisis dinámico.

Como punto de partida tomaremos el método de Newton 2.2. Se trata de un método con convergencia cuadrática y óptimo. Su principal inconveniente reside en la inclusión de la derivada de f en la expresión iterativa.

Steffensen

El método de Steffensen (STF) consigue paliar el inconveniente que presenta el método de Newton. Sustituyendo la derivada de f por su diferencia finita progresiva, este método tiene la expresión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(v_n) - f(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

donde $v_n = x_n + f(x_n)$. Se trata de un método con convergencia cuadrática e índice de eficiencia igual a 1.4142.

Método de Cordero y Torregrosa

A partir del esquema resultado de la composición de los métodos de Newton (2.2) y Steffensen (2.4), los autores diseñan en [17] una familia de métodos de orden cuatro. El esquema de Steffensen-Newton

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(v_n) - f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $v_n = x_n + f(x_n)$, da lugar a un método de orden cuatro. Para evitar la evaluación de la derivada, se opta por una combinación lineal de dos diferencias divididas, tal que

$$f'(y_n) = \frac{\alpha f(y_n) - \beta f(v_n)}{y_n - v_n} + \frac{\gamma f(y_n) - \nu f(x_n)}{y_n - x_n}, \quad (2.6)$$

siendo $\alpha, \beta, \gamma, \nu \in \mathbb{R}$ parámetros. Reemplazando (2.6) en (2.5), se obtiene

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(v_n) - f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{\frac{\alpha f(y_n) - \beta f(v_n)}{y_n - v_n} + \frac{\gamma f(y_n) - \nu f(x_n)}{y_n - x_n}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Realizando el desarrollo en serie de Taylor alrededor de la raíz se puede demostrar que el esquema anterior tiene orden de convergencia cuatro para $\alpha = \gamma = 1$ y $\beta + \nu = 1$, dando lugar a una familia uniparamétrica. Dado que este esquema requiere de tres evaluaciones de la función en cada iteración, el índice de eficiencia

es $4^{1/3} = 1.587$. Asimismo, se trata de un método óptimo bajo la conjetura de Kung-Traub.

El método de Cordero-Torregrosa (CT) es un miembro de la familia (2.7), en el cual $\alpha = \beta = \gamma = 1$ y $\nu = 0$. Su expresión iterativa queda como

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(v_n) - f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{\frac{f(y_n) - f(v_n)}{y_n - v_n} + \frac{f(y_n)}{y_n - x_n}}. \end{aligned}$$

Método de orden cuatro

De nuevo, a partir de la composición de Steffensen y Newton que resulta en el esquema de (2.5), vamos a evitar el cálculo de $f'(y_n)$ pero en este caso aplicando una estimación diferente. Para ello, utilizamos la aproximación de tipo Padé de primer grado

$$m(t) = \frac{a_1 + a_2(t - y_n)}{1 + a_3(t - y_n)},$$

donde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ cumplen

$$\begin{aligned} m(x_n) &= f(x_n), \\ m(y_n) &= f(y_n), \\ m(v_n) &= f(v_n), \end{aligned}$$

de forma que los valores de estos coeficientes dan lugar a la expresión

$$m(t) = \frac{f(y_n)f[v_n, x_n] + \{f[y_n, v_n]f[v_n, x_n] - f(v_n)f[x_n, y_n, v_n]\}(t - y_n)}{f[v_n, x_n] + f[x_n, y_n, v_n](t - y_n)}, \quad (2.8)$$

donde

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

representan las diferencias divididas de órdenes uno y dos, respectivamente. La derivada de (2.8) es

$$m'(t) = \frac{f[x_n, y_n]f[y_n, v_n]}{f[x_n, v_n]}, \quad (2.9)$$

de forma que, reemplazando (2.9) en (2.5) se obtiene el método M4, cuya expresión es

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(v_n) - f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)f[x_n, v_n]}{f[x_n, y_n]f[y_n, v_n]}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Al igual que el método CT, se trata de un método óptimo de orden cuatro con tres evaluaciones funcionales en cada iteración, dando lugar a un índice de eficiencia $I = 4^{1/3} = 1.587$.

Método de orden ocho

El método de orden ocho se diseña a partir de la composición de los métodos M4 (2.10) y Newton. Esta composición da como resultado la expresión

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(v_n) - f(x_n)}, \\ u_n &= y_n - \frac{f(y_n)f[x_n, v_n]}{f[x_n, y_n]f[y_n, v_n]}, \\ x_{n+1} &= u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De nuevo, vamos a encontrarnos con la expresión de la derivada $f'(u_n)$ que, en este caso, la reemplazaremos por la aproximación de tipo Padé de segundo grado

$$m(t) = \frac{b_1 + b_2(t - u_n) + b_3(t - u_n)^2}{1 + b_4(t - u_n)}, \quad (2.12)$$

satisfaciendo las condiciones

$$\begin{aligned} m(x_n) &= f(x_n), \\ m(y_n) &= f(y_n), \\ m(v_n) &= f(v_n), \\ m(u_n) &= f(u_n). \end{aligned}$$

Los coeficientes resultantes del sistema de ecuaciones son

$$\begin{aligned}
 b_1 &= f(u), \\
 b_2 &= \frac{1}{D} \{ (x-u)[f[v,u]f(y) - f[y,u]f(v)] + \\
 &\quad + (y-u)[f[x,u]f(v) - f[v,u]f(x)] + \\
 &\quad + (v-u)[f[y,u]f(x) - f[x,u]f(y)] \}, \\
 b_3 &= \frac{1}{D} \{ f(x)(v-y)f[v,u,y] + f(y)(x-v)f[x,u,v] + f(v)(y-x)f[y,u,x] \}, \\
 b_4 &= \frac{1}{D} \{ (x-y)(v-u)f[x,u,y] + (x-u)(y-v)f[y,u,v] + \\
 &\quad + (y-u)(v-x)f[v,u,x] \}, \\
 D &= (x-y)(v-u)f[x,y] + (x-u)(y-v)f[y,v] + (y-u)(v-x)f[v,x].
 \end{aligned}$$

Nótese que se ha evitado incluir el subíndice en las variables anteriores por cuestiones de espacio. La derivada de (2.12) tiene la expresión

$$m'(t) = b_2 - b_1 b_4,$$

que, sustituyendo en (2.11), da lugar a la expresión del método M8:

$$\begin{aligned}
 y_n &= x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(v_n) - f(x_n)}, \\
 u_n &= y_n - \frac{f(y_n)f[x_n, v_n]}{f[x_n, y_n]f[y_n, v_n]}, \\
 x_{n+1} &= u_n - \frac{f(u_n)f[x_n, y_n, v_n]}{f[y_n, v_n, u_n]f[u_n, x_n, y_n](u_n - x_n) + f[x_n, y_n, v_n]f[y_n, u_n]}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

En este caso tenemos un método de orden de convergencia ocho con cuatro evaluaciones funcionales por iteración, de forma que el índice de eficiencia es $I = 8^{1/4} = 1.682$. A partir de la conjetura de Kung-Traub podemos determinar que se trata de un método óptimo.

Método de orden dieciséis

Siguiendo la técnica de los apartados anteriores, se diseña el método de orden dieciséis a partir de la composición de M8 (2.13) y Newton, resultando en el esquema iterativo

$$\begin{aligned}
 y_n &= x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(v_n) - f(x_n)}, \\
 u_n &= y_n - \frac{f(y_n)f[x_n, v_n]}{f[x_n, y_n]f[y_n, v_n]}, \\
 w_n &= u_n - \frac{f(u_n)f[x_n, y_n, u_n]}{f[y_n, v_n, u_n]f[u_n, x_n, y_n](u_n - x_n) + f[x_n, y_n, v_n]f[y_n, u_n]}, \\
 x_{n+1} &= w_n - \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Para evitar el cálculo de $f'(w_n)$ obtendremos la aproximación de tipo Padé de grado tres, dada por

$$m(t) = \frac{c_1 + c_2(t - w_n) + c_3(t - w_n)^2 + c_4(t - w_n)^3}{1 + c_5(t - w_n)}, \quad (2.15)$$

que, como en los casos anteriores, satisface

$$\begin{aligned} m(x_n) &= f(x_n), \\ m(y_n) &= f(y_n), \\ m(v_n) &= f(v_n), \\ m(u_n) &= f(u_n), \\ m(w_n) &= f(w_n). \end{aligned}$$

Reemplazando la derivada de (2.15) en (2.14) obtenemos el método M16, cuya expresión es

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(v_n) - f(x_n)}, \\ u_n &= y_n - \frac{f(y_n)f[x_n, v_n]}{f[x_n, y_n]f[y_n, v_n]}, \\ w_n &= u_n - \frac{f(u_n)f[x_n, y_n, u_n]}{f[y_n, v_n, u_n]f[u_n, x_n, y_n](u_n - x_n) + f[x_n, y_n, v_n]f[y_n, u_n]}, \\ x_{n+1} &= w_n - \frac{f(w_n)}{f[x_n, w_n] + (x_n - w_n)\{c_5f[x_n, w_n] - c_3 - c_4(x_n - w_n)\}}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c_3 &= f[x_n, y_n, w_n] - c_4(x_n - y_n - 2w_n) + c_5f[x_n, y_n], \\ c_4 &= f[x_n, y_n, v_n, w_n] + c_5f[x_n, y_n, v_n], \\ c_5 &= -\frac{f[x_n, y_n, v_n, u_n, w_n]}{f[x_n, y_n, v_n, u_n]}, \end{aligned}$$

siendo

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_4}, \quad f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_2, x_3, x_4, x_5]}{x_1 - x_5}$$

las expresiones de las diferencias divididas de órdenes tres y cuatro, respectivamente.

Estamos ante un método de orden de convergencia dieciséis, óptimo a partir de la conjetura de Kung-Traub, con un índice de eficiencia $I = 16^{1/5} = 1.7411$, puesto que hay cinco evaluaciones de f en cada iteración.

La Tabla 2.2 recoge los órdenes de convergencia e índices de eficiencia de cada uno de los métodos presentados en los apartados anteriores.

Método	p	I
STF	2	1.4142
CT	4	1.5874
M4	4	1.5874
M8	8	1.6812
M16	16	1.7411

Tabla 2.2: Características de los métodos STF, CT, M4, M8 y M16

Sobre el conjunto de los métodos presentados, junto con otros métodos conocidos presentes en la literatura que nos serán útiles a modo de comparación, se realizará el análisis de la dinámica sobre el plano complejo. Los conceptos previos necesarios para realizar dicho análisis se presentan en la siguiente sección.

2.2 Dinámica compleja

Los sistemas dinámicos son aquellos sistemas en los que el tiempo juega un papel fundamental. Interpretaremos como sistema dinámico aquel sistema susceptible de tener variaciones en el tiempo, de modo que puedan predecir el futuro conociendo las limitaciones de las predicciones. Los sistemas dinámicos se describen matemáticamente a partir de la variación temporal del objeto bajo estudio.

La trayectoria de una partícula, el movimiento de los planetas, los procesos de nacimiento y muerte, la evolución de la población, la propagación de un rumor, la cantidad de corrupción en un país o el comportamiento de un circuito eléctrico son ejemplos de sistemas dinámicos.

A diferencia de lo que ocurre en otras disciplinas matemáticas, en los sistemas dinámicos no solo nos interesa tanto la solución analítica de los problemas que tratamos de resolver, sino el comportamiento que estos van a tener a largo plazo en función del punto de partida de nuestro sistema. Hasta hace unas décadas, la solución analítica era la única fuente de satisfacción de los sistemas dinámicos; no obstante, con la irrupción de las computadoras en el cálculo matemático, la tecnología se ha puesto al servicio de los sistemas dinámicos y la predicción del futuro es alcanzable.

Los sistemas dinámicos se clasifican a partir del tratamiento que se hace del tiempo. Un extenso estudio en torno a este tipo de sistemas se puede encontrar en [24], [25] o [40], entre otras muchas referencias de autoridad.

Por un lado, tenemos los **sistemas dinámicos continuos**, cuyas expresiones incluyen ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones en derivadas parciales. Por otro lado, cuando el tiempo está cuantizado tenemos los **sistemas dinámicos discretos**. Estos sistemas tienen la forma

$$x_{n+1} = \Phi(x_n),$$

donde $x_n = x(t_n)$, siendo t_n cada uno de los instantes de tiempo discretizados.

Uno de los ejemplos más conocidos, tanto por la belleza de su representación gráfica como por sus características dinámicas, es el conjunto de Mandelbrot, ilustrado en la Figura 2.1. La familia de funciones cuadráticas $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ quien, a priori, presenta una simplicidad manifiesta, ha sido protagonista de profundas investigaciones a lo largo de las últimas décadas del siglo XX debido a su inusitada riqueza dinámica.

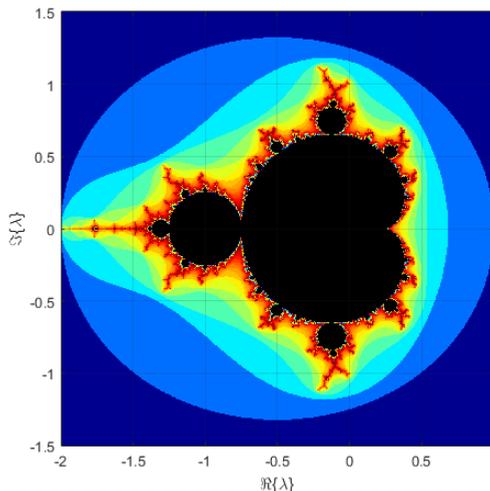


Figura 2.1: Conjunto de Mandelbrot

El análisis dinámico del conjunto de Mandelbrot ha sido profundamente estudiado tanto en trabajos de investigación como divulgativos [9], [28], [32].

En esta Tesis, vamos a centrarnos en los sistemas dinámicos discretos asociados a métodos iterativos. A partir de la aplicación del operador de punto fijo de los

esquemas iterativos sobre determinados polinomios no lineales, realizaremos el estudio dinámico. Este estudio consiste en el análisis de la función racional resultante del operador de punto fijo aplicado sobre una función polinómica. Como resultado de dicho análisis, obtendremos los puntos fijos que, generalmente, coincidirán con las raíces del polinomio. La dinámica de dichos puntos nos permitirá caracterizar el método iterativo para determinar su estabilidad. La representación gráfica de dichos métodos permitirá obtener conclusiones al respecto de las propiedades de los métodos.

2.2.1 Fundamentos de dinámica compleja

En este apartado se van a presentar los conceptos fundamentales relacionados con la dinámica aplicada sobre variable compleja, cuya transferencia sobre variable real es inmediata.

Sea $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sobre la esfera de Riemann [8], $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, entonces denotaremos por $R(z)$ al operador $\frac{P(z)}{Q(z)}$ con $P(z), Q(z)$ polinomios complejos sin factores comunes.

Puntos fijos, periódicos y críticos

La **órbita** de un punto $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ se define como la sucesiva aplicación del operador R sobre dicho punto, de forma que queda determinada por el conjunto

$$\{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\},$$

donde $R^k(z_0)$ es la aplicación del operador R durante k iteraciones.

Se definen los **puntos fijos** como aquellos puntos que cumplen

$$R(z^F) = z^F.$$

La característica dinámica de los puntos fijos se clasifica en función del valor $R'(z^F)$. De esta manera, el punto fijo z^F será

- **atractor**, si $|R'(z^F)| < 1$;
- **repulsor**, si $|R'(z^F)| > 1$, o
- **parabólico** (también denominado neutral o indiferente), si $|R'(z^F)| = 1$.

Los puntos fijos atractores serán denotados por z^* . Estos puntos fijos se denominan **superatractores** cuando también cumplen la igualdad $R'(z^*) = 0$.

Generalmente, los puntos fijos del operador coinciden con las raíces del polinomio $f(z)$ sobre el que se aplica. Sin embargo, cuando esto no ocurre, a los puntos fijos se les denomina **extraños**.

Los puntos periódicos se definen de forma similar a los puntos fijos, pero tras la aplicación del operador R durante T iteraciones. De esta forma, los puntos periódicos de período T se definen como

$$R^T(z) = z, R^k(z) \neq z,$$

para todo $k < T$. Se denomina **multiplicador** de punto fijo al valor $\tau = |(R^T)'(z)|$ que da lugar a una órbita periódica de período T . De forma análoga a los puntos fijos, la característica dinámica de los puntos periódicos se puede clasificar en

- **atractora**, para $|\tau| < 1$, siendo **superatractora** en el caso particular de $\tau = 0$;
- **repulsora**, para $|\tau| > 1$, y
- **parabólica**, para $|\tau| = 1$.

Los **puntos críticos** del operador son aquellos puntos que cumplen

$$R'(z^C) = 0.$$

Nótese que los puntos fijos superatractores serán puntos fijos. Aquellos puntos críticos que no coinciden con las raíces del polinomio se denominan puntos críticos **libres**, cuya utilidad fundamental será el descubrimiento del plano de parámetros.

Cuencas de atracción

Las cuencas de atracción determinan el estado final de la órbita de cualquier punto del plano complejo tras la sucesiva aplicación del operador R . De este modo, definimos la **cuenca de atracción** de un punto fijo atractor $z^* \in \widehat{\mathbb{C}}$ como el conjunto de preimágenes de cualquier orden que cumplen

$$\mathcal{A}(z^*) = \left\{ z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow z^*, n \rightarrow \infty \right\}.$$

La Figura 2.2a muestra las cuencas de atracción del método de Newton cuando se aplica sobre el polinomio cúbico $f(z) = z^3 - 1$. A pesar de que entraremos en mayor detalle en la Sección 2.2.3, avanzamos que cada cuenca de atracción se representa en un color diferente, de forma que tomando un punto de las diferentes

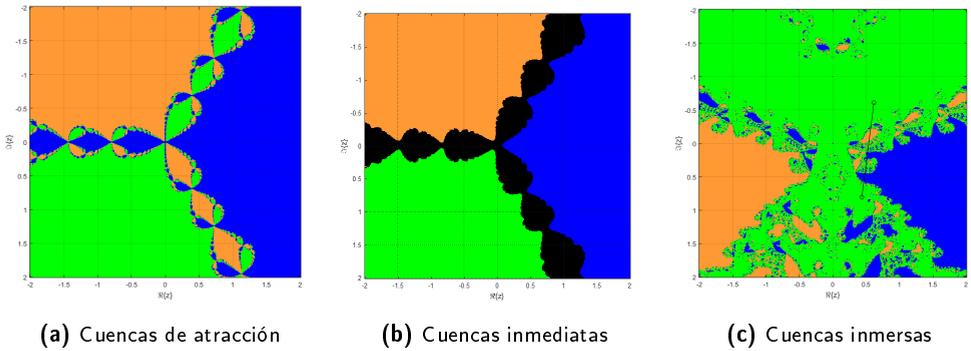


Figura 2.2: Cuencas de atracción con diferentes características

regiones azules, su órbita tenderá al punto fijo correspondiente a dicha cuenca; de igual modo ocurre con los puntos de las cuencas verde y naranja.

Mayer y Schleicher definen en [52] la **cuenca de atracción inmediata** $\mathcal{A}^\#$ de un punto fijo superatractor z^* como la componente conexa de la cuenca que contiene a z^* .

La Figura 2.2b muestra las cuencas de atracción inmediatas correspondientes a las cuencas de atracción de la Figura 2.2a. Se puede observar que aparecen las tres componentes conexas, correspondientes a $\mathcal{A}_1^\#$, $\mathcal{A}_2^\#$ y $\mathcal{A}_3^\#$.

Para poder describir determinados comportamientos, definimos que dos cuencas de atracción inmediatas, $\mathcal{A}_1^\#$ y $\mathcal{A}_2^\#$, están **inmersas** si es posible encontrar dos puntos de $\mathcal{A}_2^\#$ tales que la línea que los une atraviesa $\mathcal{A}_1^\#$.

La Figura 2.2b representa un ejemplo de cuencas no inmersas, ya que no es posible encontrar dos puntos de una cuenca inmediata tales que al unirlos se atravesase otra cuenca diferente. Un ejemplo de cuencas inmersas se muestra en la Figura 2.2c. En este caso, es posible encontrar dos puntos de la cuenca inmediata verde que pasen por la cuenca inmediata azul, como señalan los marcadores que unen los puntos $0.6163 - i0.6088$ y $0.4348 + i0.8054$, ilustrados en negro dentro del plano.

Relacionados con las cuencas de atracción aparecen los conjuntos de Julia y Fatou. El **conjunto de Fatou**, $\mathcal{F}(R)$, es el conjunto de puntos $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ cuya órbita tiende a un punto fijo atractor z^* . De forma complementaria, el **conjunto de Julia** $\mathcal{J}(R)$ comprende todos los puntos que son repelidos, y establece las fronteras entre las cuencas de atracción.

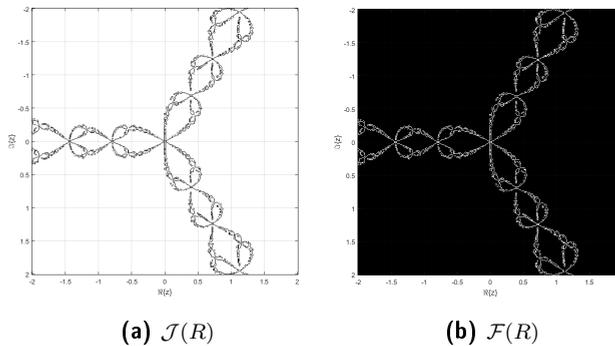


Figura 2.3: Conjuntos de Julia (a) y Fatou (b)

Ilustramos estos conceptos en la Figura 2.3 ayudándonos del plano correspondiente al método de Newton para el polinomio cúbico $z^3 - 1$, como hicimos en la Figura 2.2a. Los puntos en blanco se corresponden con los conjuntos de Julia, para la Figura 2.3a, y Fatou, en la Figura 2.3b. Como se puede observar, ambos conjuntos son complementarios.

2.2.2 Clases de conjugación

Las clases de conjugación nos permiten simplificar el estudio dinámico de un operador de punto fijo sobre funciones particulares a partir de un análisis que abarque a todas.

Definición 2.2.1 Sean f y g dos funciones de la esfera de Riemann sobre sí misma. Una conjugación analítica entre f y g es un difeomorfismo h de la esfera de Riemann en sí misma tal que $h \circ f = g \circ h$.

El siguiente teorema reduce el estudio dinámico de un operador racional asociado a un método iterativo sobre familias de funciones a casos más simples. Sin embargo, este teorema no se cumple con los operadores de punto fijo asociados a métodos iterativos libres de derivadas [2]. Por tanto, aplicaremos este resultado cuando sea posible.

Teorema 2.2.1 (Teorema del Escalado) Sea $f(z)$ una función analítica y sea $A(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha \neq 0$ una aplicación afín. Si $h(z) = \lambda (f \circ A)(z)$ con $\lambda \neq 0$,

entonces el operador de punto fijo R_f está conjugado analíticamente con R_h a través de A , es decir

$$(A \circ R_h \circ A^{-1})(z) = R_f(z).$$

La aplicación del teorema para el método de Newton se desarrolla a continuación.

Ejemplo 2.2.1 Sea $f(z)$ una función analítica. Sea $A(z) = \alpha z + \beta$ una aplicación afín, con $\alpha \neq 0$. Sea $h(z) = \lambda(f \circ A)(z)$. Sean $N_f(z)$ y $N_h(z)$ los operadores de punto fijo del método de Newton, cuyas expresiones son

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad N_h(z) = z - \frac{h(z)}{h'(z)}.$$

Teniendo en cuenta que $A(x - y) = A(x) - A(y) + \beta$ y $h'(z) = \alpha \lambda f'(A(z))$, la composición $A \circ N_h \circ A^{-1}(z)$ resulta

$$\begin{aligned} A \circ N_h \circ A^{-1} &= A(N_h(A^{-1}(z))) = A\left(A^{-1}(z) - \frac{h(A^{-1}(z))}{h'(A^{-1}(z))}\right) = \\ &= A\left(A^{-1}(z) - \frac{\lambda f(A(A^{-1}(z)))}{\alpha \lambda f'(A(A^{-1}(z)))}\right) = \\ &= A\left(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{\alpha f'(z)}\right) = \\ &= z - \frac{f(z)}{f'(z)}. \end{aligned}$$

Como la expresión de $N_f(z)$ es

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)},$$

entonces $A \circ N_h \circ A^{-1}(z) = N_f(z)$, por lo que podemos concluir que N_f y N_h están conjugados analíticamente a partir de $A(z)$.

El siguiente ejemplo se aplica sobre un esquema iterativo que no incluye derivadas. Veremos que el Teorema del Escalado no se satisface en este caso.

Ejemplo 2.2.2 (Teorema del Escalado para el método de Steffensen) Sea $f(z)$ una función analítica, sea $A(z) = \alpha z + \beta$ una aplicación afín, con $\alpha \neq 0$. Sea $h(z) = \lambda(f \circ A)(z)$. Sean $S_f(z)$ y $S_h(z)$ los operadores de punto fijo del método de Steffensen, cuyas expresiones son

$$S_f(z) = z - \frac{[f(z)]^2}{f(z + f(z)) - f(z)}, \quad S_h(z) = z - \frac{[h(z)]^2}{h(z + h(z)) - f(z)}.$$

Teniendo en cuenta que $A(x+y) = A(x) + A(y) - \beta$, $A(x-y) = A(x) - A(y) + \beta$ y $h(A^{-1}(z)) = \lambda f(z)$, la composición $A \circ S_h \circ A^{-1}(z)$ resulta

$$\begin{aligned}
 A \circ S_h \circ A^{-1} &= A(S_h(A^{-1}(z))) = \\
 &= A\left(A^{-1}(z) - \frac{[h(A^{-1}(z))]^2}{h(A^{-1}(z) + h(A^{-1}(z))) - h(A^{-1}(z))}\right) = \\
 &= A\left(A^{-1}(z) - \frac{\lambda^2 [f(z)]^2}{h(A^{-1}(z) + \lambda f(z)) - \lambda f(z)}\right) = \\
 &= A(A^{-1}(z)) - A\left(\frac{\lambda^2 [f(z)]^2}{h(A^{-1}(z) + \lambda f(z)) - \lambda f(z)}\right) + \beta = \\
 &= z - \frac{\alpha \lambda^2 [f(z)]^2}{h(A^{-1}(z) + \lambda f(z)) - \lambda f(z)} = \\
 &= z - \frac{\alpha \lambda [f(z)]^2}{f(A(A^{-1}(z) + \lambda f(z))) - f(z)} = \\
 &= z - \frac{\alpha \lambda [f(z)]^2}{f(\alpha A^{-1}(z) + \alpha \lambda f(z) + \beta) - f(z)} = \\
 &= z - \frac{\alpha \lambda [f(z)]^2}{f(z + \alpha \lambda f(z)) - f(z)}.
 \end{aligned}$$

Como la expresión de $S_f(z)$ es

$$S_f(z) = z - \frac{[f(z)]^2}{f(z + f(z)) - f(z)},$$

entonces $A \circ S_h \circ A^{-1}(z) = S_f(z)$ solo para el caso $\alpha = \lambda = 1$, por lo que podemos concluir que el escalado no es posible.

Teorema 2.2.2 Sea $f(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, con $a_2 \neq 0$, un polinomio cuadrático con raíces simples. Entonces, mediante una transformación afín de coordenadas $h(z)$ puede ser reducido a $f(z) = z^2 + \lambda$, donde $\lambda = 4a_2 a_0 - a_1^2$. Esta transformación afín proporciona una conjugación entre R_f y R_h .

Cuando los operadores satisfacen el Teorema del Escalado, el análisis dinámico se simplifica con el estudio de un solo caso para polinomios de un determinado grado. Sin embargo, habrá que estudiar determinados casos particulares cuando el teorema no es de aplicación.

2.2.3 Representaciones gráficas

Representaciones de dinámica real

Los métodos iterativos que trabajan sobre variable real se pueden representar de forma gráfica a partir del método de la **iteración gráfica**, también denominado diagrama de red, y con la ayuda del **diagrama de Feigenbaum** o diagrama de bifurcaciones [50]. En [49], además de aportar una profunda descripción de estos métodos de representación, se introduce un concepto novedoso como es el **plano de convergencia**, que recopila información incluida tanto en el diagrama de la iteración gráfica como en el diagrama de Feigenbaum.

El diagrama de la iteración gráfica representa la órbita de un punto inicial y los puntos fijos de un método. Para ello, se representa sobre el mismo gráfico las funciones $y = x$ e $y = O_f(x)$, donde $O_f(x)$ es el operador de punto fijo cuando se aplica sobre el polinomio $f(x)$. Los puntos de corte entre ambas son los puntos fijos del método. A partir de un punto inicial, este se sitúa sobre $y = x$ y se traza una vertical hasta $y = O_f(x)$. A continuación, se traza una horizontal hasta $y = x$. Este proceso se repite hasta que se alcanza un punto fijo o hasta que se diverge al infinito.

La Figura 2.4 representa el diagrama de la iteración gráfica del método de Newton amortiguado [50] para variable real, con $\lambda = 4$ y $f(x) = x^2 - 1$. La Figura 2.4a se corresponde con el punto inicial $x_0 = 1.9$, siendo el punto inicial de la Figura 2.4b $x_0 = 2$.

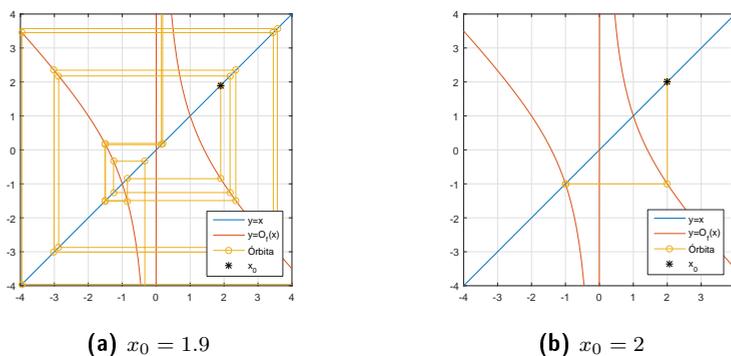


Figura 2.4: Diagrama de la iteración gráfica para el método de Newton amortiguado con $\lambda = 4$ y $f(x) = x^2 - 1$.

El diagrama de Feigenbaum se aplica sobre familias de métodos iterativos, cuyos miembros se discriminan a partir del parámetro λ . En este sentido, dicho diagrama representa, para distintos valores del parámetro los distintos puntos finales de la órbita de un determinado valor inicial x_0 . Por tanto, representaremos en el eje de abscisas el parámetro λ , en el eje de ordenadas el valor de la órbita avanzada.

La Figura 2.5 representa el diagrama de Feigenbaum del método de Newton amortiguado para valores de $\lambda \in (0, 4)$ al aplicar el polinomio $f(x) = x^2 + 1$ con dos puntos iniciales diferentes: $x_0 = 1$ en la Figura 2.5a y $x_0 = 2$ en la Figura 2.5b.

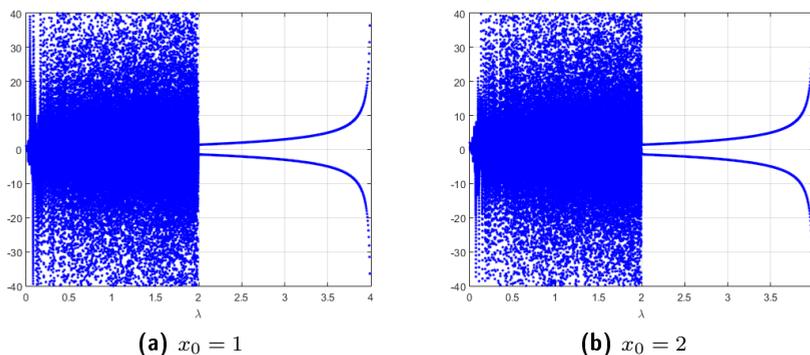


Figura 2.5: Diagrama de Feigenbaum para el método de Newton amortiguado aplicado sobre $f(x) = x^2 + 1$.

El diagrama de Feigenbaum permite conocer a priori en qué rango de valores el método va a tener un comportamiento u otro. En el ejemplo de la Figura 2.5, se observa que para valores de $\lambda \in (0, 2)$ el método puede tener un comportamiento caótico, para $\lambda \in (2, 4)$ el esquema presenta ciclos atractores de período 2, mientras que para $\lambda > 4$ las iteraciones pueden divergir hacia el infinito.

Representaciones de dinámica compleja

De forma análoga a las representaciones de dinámica real, existen dos representaciones principales para el estudio de la dinámica compleja. Por un lado, el estado final de la órbita de los puntos se representa en el **plano dinámico**, mientras que el **plano de parámetros** nos va a aportar información al respecto de la elección de un valor u otro de un parámetro dentro de una familia de métodos iterativos.

Para todos los puntos del plano complejo, el plano dinámico determina sobre cuál de los puntos fijos atractores va a tender la órbita de dicho punto inicial. Para ello,

se representa con colores diferentes cada uno de los puntos fijos atractores, y se ilustra cada punto inicial con el color del punto fijo atractor al que tenderá.

Para incluir la información de la velocidad con la que converge cada punto, sobre cada color se aplica un coeficiente corrector que afecta a su luminosancia. De esta forma, los puntos más claros requerirán un menor número de iteraciones para converger que aquellos puntos que están representados con un tono más oscuro.

La Figura 2.6 muestra los planos dinámicos del método de Newton cuando se aplica sobre polinomios $f(z) = z^2 - 1$ en 2.6a y $f(z) = z^3 - 1$ en 2.6b. Para el caso del polinomio cuadrático, solo tiene dos raíces, que coinciden con los puntos fijos atractores. Estos se encuentran en $z^F = z^* = \pm 1$. Se puede observar que los puntos próximos a z^F tienen un color más claro, indicando que convergen antes que los puntos que se encuentran más alejados, representados en colores más oscuros.

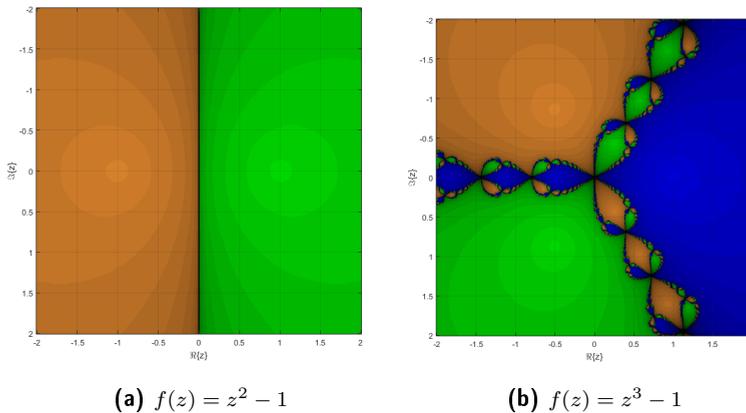


Figura 2.6: Plano dinámico del método de Newton cuando se aplica sobre polinomios cuadráticos y cúbicos.

La Figura 2.6b se corresponde con la aplicación del operador de punto fijo sobre el polinomio cúbico. Se observan tres cuencas de atracción inmediatas, correspondientes a los tres puntos fijos del método, que coinciden con las raíces del polinomio $f(z)$, de forma que $z^F = z^* = (1)^{\frac{2\pi ki}{3}}$, $k = \{0, 1, 2\}$. Se observa el mismo comportamiento que en la Figura 2.6a en cuanto a la tonalidad de los colores, correspondiendo los más claros a los puntos próximos a los puntos fijos atractores.

El código en MATLAB[®] para la generación de los planos dinámicos ha sido publicado en [12]. Una versión actualizada se puede encontrar en el Apéndice B.2, en el que se muestra el código base para la generación de planos dinámicos de métodos

iterativos cuando se aplican sobre polinomios cuadráticos y cúbicos de la forma $f_\lambda(z) = \{z^2, z^3\} + \lambda$, en el que se incluyen diferentes métodos y se indica cómo debería modificarse dicho código para ser aplicado sobre cualquier otro esquema iterativo.

Cuando trabajamos sobre familias uniparamétricas, una herramienta esencial es el plano de parámetros. Esta representación gráfica relaciona de forma directa cada punto del plano complejo con su correspondiente valor del parámetro que particulariza cada miembro de la familia. Dado un punto crítico libre del método, el plano de parámetros nos indica sobre qué punto fijo atractor va a converger la órbita del punto crítico. Para ello, es necesario el análisis previo de los puntos fijos y críticos del sistema.

El criterio de representación es análogo al caso de los planos dinámicos. Cada punto fijo tiene asignado un color, y el mayor o menor brillo indica la cantidad de iteraciones requeridas para ser alcanzado.

La Figura 2.7 representa el plano de parámetros del método de Steffensen para polinomios cuadráticos. La Figura 2.7b es un aumento de una región particular de la Figura 2.7a.

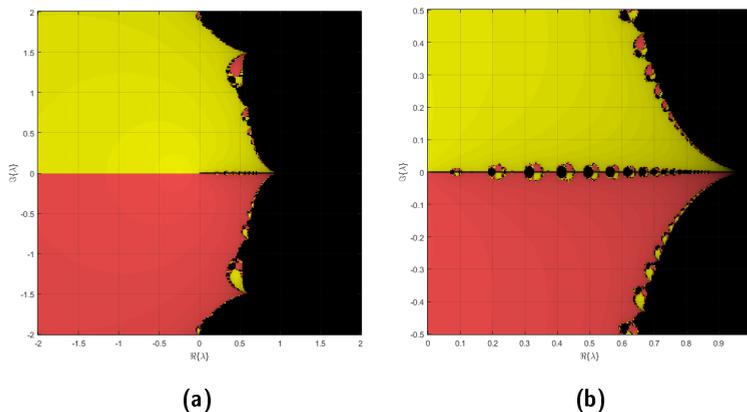


Figura 2.7: Plano de parámetros del método STF cuando se aplica sobre polinomios cuadráticos.

Se pueden observar tres regiones diferenciadas. Para valores de λ de la zona amarilla, el punto crítico libre converge al punto fijo atractor z_1^* , mientras que cuando λ está en la región rosa, z^C converge a z_2^* . La región negra se corresponde con los valores de λ para los cuales el punto crítico libre tiende al infinito.

El código en MATLAB® correspondiente a la generación de planos de parámetros, también publicado en [12], se encuentra en el Apéndice B.4.

Cabe destacar que tanto el código de la generación del plano dinámico como el correspondiente al plano de parámetros han estado en constante evolución, de cara a obtener unas mejores eficiencias a nivel computacional, tratando de reducir el número de operaciones redundantes y compactar el contenido del mismo. Es por ello que, aunque los planos dinámicos y de parámetros tengan la misma apariencia a nivel de representación, la generación de los mismos se actualiza con frecuencia. Las diferentes versiones de estos programas han permitido la representación de los planos dinámicos y de parámetros que aparecerán en los capítulos posteriores.

2.2.4 Dimensión fractal

El matemático polaco Benoît Mandelbrot (1914-2010), tras preparar una charla sobre sus trabajos durante los últimos 20 años, quiso ponerle nombre a las imágenes que había obtenido. Quería que tuviera relación con las fracciones y las fracturas. De repente, el libro de latín de su hijo se interpuso en su camino, regalándole el origen de los términos anteriores: fractus, fracta, fractum. Finalmente, se decidió por **fractal**, un término que funcionaría de forma idónea tanto en inglés como en francés.

La geometría euclídea ha predominado a lo largo de la historia tras la divulgación de “Los Elementos de la Geometría” en el año 300 AEC. Es en el siglo XIX cuando Carl Friedrich Gauss y Nikolai Lobachevski prueban que el quinto postulado de Euclides no es demostrable, abriendo las puertas a la aparición de nuevas geometrías. El propio Lobachevski junto con János Bolyai presentan la geometría hiperbólica. Bernhard Riemann aporta la geometría elíptica de la cual hemos hecho uso en la Sección 2.2.1.

En [6] se indica que la primera noción que se tiene de los conceptos relacionados con la geometría fractal data del 1827, con el descubrimiento del movimiento browniano. Henri Poincaré (1854-1912), como relata [48], solucionó el problema de tres cuerpos con la ayuda de la topología y obtuvo el premio al Concurso Internacional de Matemáticas que otorgaba Óscar II, Rey de Suecia y Noruega, con motivo de su 60 cumpleaños en 1889. Poco tiempo más tarde, Poincaré se percató de que la solución propuesta solo se cumplía para cuerpos que se mueven en dos dimensiones, de forma que tuvo que devolver el premio. No obstante, esa profunda decepción fue la primera piedra de lo que actualmente se conoce como la Teoría del Caos.

Volviendo a la geometría fractal, es a finales de la década de 1960 cuando se retoma este concepto, tras la lectura por parte de Mandelbrot del trabajo de Gaston Julia [42]. Para entonces, las computadoras habían supuesto una revolución en el campo del cálculo computacional, dando lugar a estructuras tan caóticas y tan perfectas como el conjunto de Mandelbrot que representamos en la Figura 2.1. A lo largo de esos años son numerosas las investigaciones sobre los fractales, dando lugar a la definición y caracterización de la nueva dimensión. En [6] se recogen las principales diferencias con la dimensión euclídea, que representamos en la Tabla 2.3.

Geometría	Euclídea	Fractal
Época	Tradicional (>2000 años)	Moderna
Dimensión	Entera	Fraccionaria
Qué objetos describe	Hechos por el hombre	Presentes en la naturaleza
Expresión	Fórmulas	Métodos iterativos

Tabla 2.3: Comparativa entre las geometrías Euclídea y Fractal

La esencia del mensaje de Mandelbrot reside en la simplificación de determinadas estructuras naturales pues, a pesar de la aparente complejidad que presentan, mantienen una regularidad geométrica a diferentes escalas. En [4] se explican con mayor detalle y profundidad estos conceptos, convirtiéndose en una guía para todo aquel que quiera manipular los fractales. Eso sí, en el primer párrafo del documento presentan la siguiente advertencia.

La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares.

La dimensión fractal

La **dimensión topológica** queda definida por Euclides en “Los Elementos de la Geometría” a partir de la configuración de la frontera del objeto. De este modo, los objetos unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales son aquellos cuya frontera está compuesta por puntos, curvas y superficies, respectivamente.

La **dimensión de semejanza** \mathcal{S} cuantifica cuánto se parece un objeto a otro. Descrita en [24], se define como

$$\mathcal{S} = \frac{\log n}{\log 1/r},$$

donde n es la cantidad de copias del objeto más pequeño necesarias para recuperar el objeto grande, y r es el factor de reducción para pasar del objeto grande al pequeño. Veamos dos ejemplos ilustrados en la Figura 2.8.

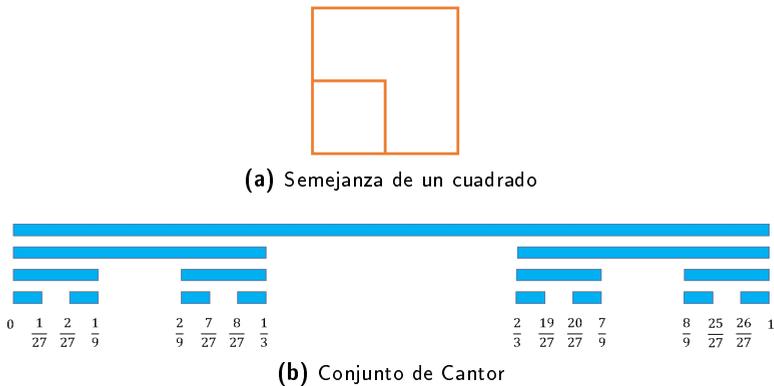


Figura 2.8: Ejemplos para la obtención de la dimensión de semejanza \mathcal{S} .

En el ejemplo del cuadrado, correspondiente a la Figura 2.8a, para pasar del cuadrado grande al pequeño, necesitaremos un factor de reducción $r = 1/2$. Por otro lado, para completar el cuadrado grande, necesitaremos $n = 4$ cuadrados pequeños, de forma que la dimensión de semejanza será $\mathcal{S} = \log 4 / \log(1/2) = 2$. En este caso, dimensión de semejanza y dimensión topológica coinciden.

La Figura 2.8b representa el conjunto de Cantor. Su construcción se basa en la eliminación del tercio central en cada iteración. En el primer paso obtenemos 2 copias del primer elemento; en el segundo paso tenemos 4 copias; en el tercer paso, 8 copias. En el paso k tenemos $n = 2^k$ copias del elemento inicial. Cada una de las copias se ha visto reducida en un factor $r = 1/3^k$ en el paso k . Su dimensión

de semejanza será, en este caso, $\mathcal{S} = \log 2^k / \log 3^k = 0.6309$. La dimensión topológica del conjunto de Cantor es cero, puesto que no existe conexión alguna entre los puntos.

El procedimiento para la obtención de la **dimensión de Minkowski-Bouligand** \mathcal{M} se ilustra en la Figura 2.9, en la que se recubre la península ibérica con bolas de radio ϵ . En cada paso, se cuentan el número de bolas $N(\epsilon)$ y se reduce el tamaño de las bolas para el siguiente paso. La pendiente de la recta de regresión entre $\log N(\epsilon)$ y $\log 1/\epsilon$ será la dimensión de Minkowski-Bouligand, cuya expresión es

$$\mathcal{M} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log 1/\epsilon}.$$

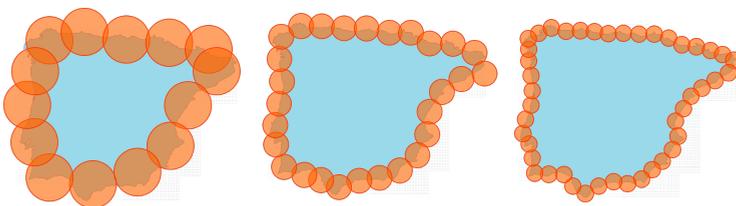


Figura 2.9: Algoritmo de box-counting sobre la costa de la península ibérica.

Dada la simplicidad del procedimiento de Minkowski-Bouligand, también conocido como box-counting, es el método que generalmente se utiliza como cuantificador de la **dimensión fractal**.

En [51] Mandelbrot enuncia que solo disponemos de una definición empírica de lo que es un fractal, puesto que ninguna definición teórica se acaba de ajustar. Falconer define en [33] que una estructura fractal es aquella que satisface alguna de las siguientes propiedades:

- Es demasiado irregular para ser descrita en términos geométricos tradicionales.
- Posee detalle a cualquier escala de observación.
- Es autosimilar en algún sentido (exacta, aproximada o estadística).
- Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
- Se define mediante un simple algoritmo recursivo.

Dimensión fractal de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales

La Figura 2.10 representa la secuencia a seguir para la obtención de la dimensión fractal asociada a un determinado método iterativo.

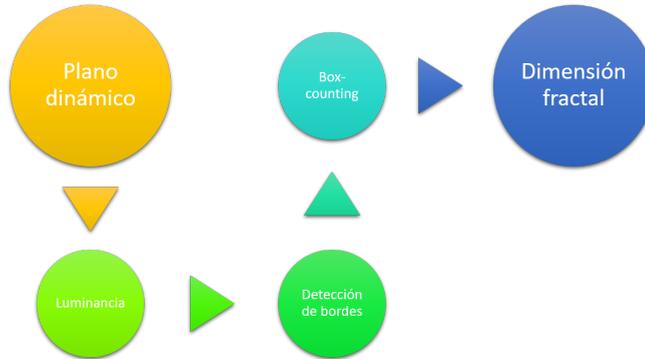


Figura 2.10: Procedimiento para la obtención de \mathcal{F} .

A partir del plano dinámico, obtenido como se ha indicado en la Sección 2.2.3, se calcula la información de luminancia Y de la imagen como

$$Y = 0.299R + 0.587G + 0.114B,$$

donde R, G, B son las matrices con la información de los niveles de rojo, verde y azul, respectivamente.

El siguiente paso consiste en determinar los bordes o, lo que es equivalente, el conjunto de Julia asociado. Para ello, MATLAB® dispone del comando `edge`, aunque existen numerosas técnicas para realizar dicha detección [35].

Una vez disponemos de la imagen de bordes, aplicamos el algoritmo de box-counting como se ha descrito gráficamente en la Figura 2.9. Tomamos un valor inicial de ϵ , contamos la cantidad de bolas que cubren todos los bordes, e iteramos el proceso cubriendo el contorno con bolas cada vez más pequeñas.

Como hemos indicado previamente, la dimensión fractal \mathcal{F} será la pendiente de la recta de regresión entre los vectores $\log \vec{N} = \log N(\vec{\epsilon})$ y $\vec{\epsilon}$. En [10] se puede encontrar la dimensión fractal de una serie de métodos iterativos, entre los que se encuentran los esquemas de Steffensen, Cordero-Torregrosa, M4 y M8. La Tabla 2.4 recoge los valores de la dimensión fractal \mathcal{F} de estos métodos.

Método	STF	CT	M4	M8
\mathcal{F}	1.3140	1.4038	1.4603	1.2060

Tabla 2.4: Dimensión fractal \mathcal{F} de algunos métodos iterativos

2.3 Mecánica orbital

Una de las aplicaciones de los métodos iterativos descritos en las secciones anteriores es la determinación de la órbita que sigue un satélite artificial. A partir de la elipse que se obtiene como solución del problema de dos cuerpos, analizaremos sus características geométricas en el plano y en el espacio, de forma que obtendremos los elementos orbitales. Las órbitas de los satélites se pueden determinar a partir de diferentes métodos de obtención de muestras. En nuestro caso, a partir de dos posiciones del satélite y el intervalo temporal entre la toma de muestras, calcularemos los elementos orbitales para definir, de forma unívoca, su trayectoria.

2.3.1 El problema de dos cuerpos

La ecuación de movimiento

El problema de dos cuerpos consiste en la obtención de una expresión que describa las interacciones y los movimientos entre dos cuerpos, de forma que el único fenómeno que afecta al movimiento es la interacción mutua entre ambos. Si estuviéramos ante dos masas de valores similares, ambos cuerpos girarían en torno a su centro de masas. Para el caso que nos ocupa, disponemos de dos masas completamente diferenciables: la masa de la Tierra M y la masa del satélite m , con $M \gg m$. Aplicando la segunda ley de Newton a ambos cuerpos se obtiene

$$m\ddot{\vec{r}}_m = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}, \quad (2.16)$$

$$M\ddot{\vec{r}}_M = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}, \quad (2.17)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Sumando (2.16) y (2.17),

$$\ddot{\vec{r}} = -G\frac{M+m}{r^3}\vec{r}.$$

Sea μ el parámetro gravitacional, definido por

$$\mu = G(M+m) \stackrel{M \gg m}{\approx} GM,$$

la ecuación del movimiento relativo queda como

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0. \quad (2.18)$$

Premultiplicando (2.18) por el vector de posición \vec{r} ,

$$\vec{r} \times \left[\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right] = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \vec{r} \times \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0 \xrightarrow{\vec{r} \times \vec{r} = 0} \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0. \quad (2.19)$$

Como la integral de una función nula es una constante, busquemos una función cuya derivada sea $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$, de forma que dicha función será constante. O, de forma equivalente, tratemos de obtener la integral de $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$.

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right] = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \xrightarrow{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0} \frac{d}{dt} \left[\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right] = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}.$$

Por (2.19), $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$, por lo que $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ es constante, y

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = r^2 \dot{\theta} \vec{k} = \vec{h}. \quad (2.20)$$

Tomando la definición del diferencial de área obtenemos la integral de las áreas:

$$dA = \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{2} = \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (2.21)$$

Si ahora premultiplicamos escalarmente (2.18) por \vec{r} , obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \left[\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right] = 0 &\Leftrightarrow \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow \dot{v} \cdot \dot{v} + \frac{\mu}{r^3} r \cdot r = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v\dot{v} + \frac{\mu}{r^3} r\dot{r} = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

ya que $\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}} = x\dot{x}$. De nuevo, para que una función sea nula, su integral tiene que ser constante. Tratemos de obtener una función cuya derivada sea (2.22) y sabremos que el valor de dicha función es constante. En este caso, buscaremos dos funciones cuya suma sea el resultado deseado.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{v^2}{2} \right] = v\dot{v}, \quad \frac{d}{dt} \left[-\frac{\mu}{r} \right] = \frac{\mu}{r^3} r\dot{r},$$

de forma que la suma de las dos expresiones anteriores da lugar al Teorema de las Fuerzas Vivas, cuya expresión es

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} + C. \quad (2.23)$$

Ecuación y naturaleza de las órbitas

Comencemos con la obtención de la posición \vec{r} . Multiplicando (2.18) por (2.20)

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} \vec{h} \times \vec{r}. \quad (2.24)$$

Si las funciones son iguales, sus integrales también lo serán. Encontramos funciones cuyas derivadas sean las derivadas de las funciones de (2.24).

$$\frac{d}{dt} [\dot{\vec{r}} \times \vec{h}] = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h}, \quad \frac{d}{dt} \left[\mu \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{\mu}{r^3} (\vec{h} \times \vec{r}),$$

de forma que

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \frac{\vec{r}}{r} + \vec{B}. \quad (2.25)$$

Multiplicando (2.25) por \vec{r} ,

$$\begin{aligned} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \times \vec{h}) &= \mu \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} + \vec{B} \cdot \vec{r} \Leftrightarrow h^2 = \mu r + rB \cos \nu \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r = \frac{h^2/\mu}{1 + \frac{B}{\mu} \cos \nu} = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \end{aligned}$$

resultando en la ecuación de una elipse, donde p es el parámetro de la elipse y e la excentricidad de la órbita.

Para la obtención de la velocidad \vec{v} , partiremos de (2.25) y sustituiremos \vec{B} por $\vec{e} = \vec{B}/\mu$, dando lugar a

$$\vec{v} \times \vec{h} = \mu \left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right).$$

Multiplicando la expresión anterior por \vec{h} y despejando \vec{v} obtenemos la velocidad, cuya expresión es

$$\vec{v} = \frac{1}{p} \vec{h} \times \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{p} \vec{h} \times \vec{e}.$$

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, podemos describir las leyes de Kepler, así como otras conclusiones relevantes.

- Debido a (2.19), la órbita descrita es una cónica. Tras diferentes observaciones de la trayectoria descrita podemos descartar que se trate de una parábola o una hipérbola, pues la huella del satélite es acotada. Así que nos encontramos ante una órbita elíptica.

- La primera Ley de Kepler queda completamente demostrada, ya que enuncia: Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol, describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos.
- La segunda Ley de Kepler se obtiene de la integral de las áreas (2.21):

$$v_A = \frac{dA}{d\theta} = \frac{r^2}{2}.$$

Podemos determinar que la velocidad de barrido permanecerá constante, por lo que el radiovector recorrerá áreas iguales en tiempos iguales.

- La tercera Ley de Kepler se puede enunciar a partir de las siguientes expresiones:
 - por la conservación del momento angular, $h = 2A/T = 2\pi ab/T$;
 - por la definición del parámetro orbital y los parámetros de la elipse, $p = h/\mu = a(1 - e)$;
 - igualando h en ambas expresiones, se obtiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

- Del Teorema de las Fuerzas Vivas (2.23), la energía mecánica (cinética y potencial) no cambia.
- La relación entre la energía mecánica E y la geometría de la órbita es

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}.$$

2.3.2 Los elementos orbitales

La trayectoria del satélite queda determinada de forma unívoca a través de la ecuación del movimiento. Como hemos visto, esta ecuación describe una trayectoria elíptica. A continuación vamos a describir los parámetros que nos permiten definir la trayectoria del satélite respecto de la ubicación de la Tierra tanto en el plano como en el espacio.

El plano orbital

La Figura 2.11 representa la órbita del satélite en el plano.

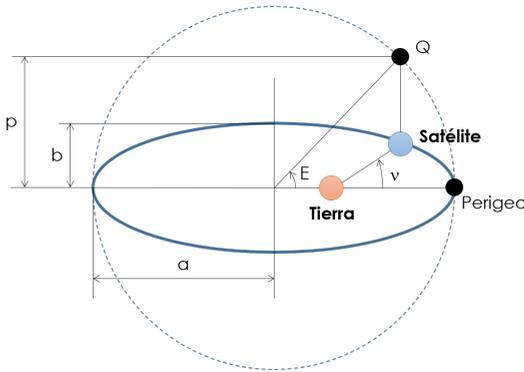


Figura 2.11: El plano orbital

La elipse que describe la órbita queda definida a partir de unos parámetros: los **semiejes mayor** a y **menor** b de la elipse, así como su **excentricidad** e . El **perigeo** es el punto en que el satélite se encuentra más próximo a la Tierra. La **anomalía verdadera** ν queda definida por la distancia angular entre el perigeo y la posición actual del satélite. Trazando una circunferencia circunscrita y proyectando la posición del satélite sobre dicha circunferencia se obtiene el punto Q en la intersección. El ángulo entre el perigeo y el punto Q determina la **anomalía excéntrica** E .

Estos parámetros cumplen con las siguientes relaciones:

$$r = \frac{p}{1+e \cos \nu}, \quad p = a(1 - e^2), \quad b = a\sqrt{1 - e^2},$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu}, \quad v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad \sin \phi = \sqrt{\frac{a^2(1-e^2)}{r(2a-r)}},$$

siendo ϕ el ángulo que forman los vectores de posición \vec{r} y velocidad \vec{v} .

Para determinar la posición y la velocidad del satélite, es necesario definir los siguientes parámetros.

- n : **movimiento medio**.

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

siendo T el tiempo que tarda el satélite en realizar una vuelta completa.

- τ : **época de paso por el perigeo**.

- M : anomalía media.

$$M = n(t - \tau).$$

La posición y la velocidad quedan determinados por

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = r(\cos\nu\hat{x} + \sin\nu\hat{y}) = a\left[(\cos E - e)\hat{x} + \sin E\sqrt{1 - e^2}\hat{y}\right],$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} = \frac{na}{1 - e\cos E}\left(-\sin E\hat{x} + \cos E\sqrt{1 - e^2}\hat{y}\right).$$

Las relaciones entre las anomalías presentan las siguientes expresiones.

$$\cos\nu = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, \quad M = E - e\sin E, \quad A = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

$$\tan\left(\frac{\nu - E}{2}\right) = \frac{A\sin\nu}{1 + A\cos\nu} = \frac{A\sin E}{1 - A\cos E}.$$

El espacio orbital

Si bien es cierto que la órbita de un satélite puede quedar definida sobre un plano, para realizar el seguimiento del satélite habrá que posicionarlo sobre el espacio. La Figura 2.12 representa el espacio orbital.

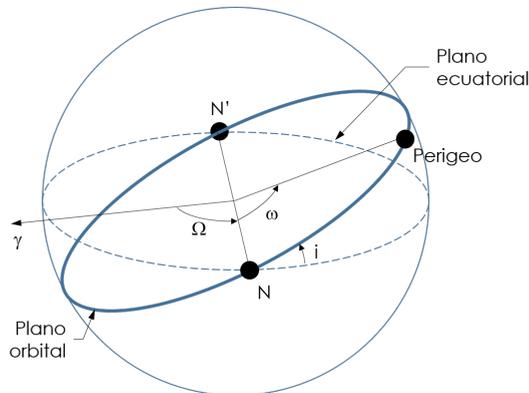


Figura 2.12: El espacio orbital

Se observa que los planos ecuatorial y orbital se intersectan en una recta, denominada **línea de nodos**, siendo N y N' los **nodos ascendente** y **descendente**, respectivamente. El **equinoccio vernal** γ es el punto de la esfera celeste en el

que el Sol cruza el ecuador terrestre en primavera, y establece el origen de la recta ascensión de algunos puntos. De hecho, el ángulo medido desde γ hasta N en el plano del ecuador es la **recta ascensión del nodo ascendente** Ω . El ángulo que forman los planos orbital y del ecuador se denomina **inclinación** i . Por último, destacar que el ángulo que forman el nodo ascendente N y el perigeo, medido sobre el plano orbital, es el **argumento del perigeo** ω .

A partir de los elementos orbitales es posible obtener la trayectoria de un satélite en el espacio de forma unívoca. Estos elementos son el conjunto i, ω, Ω, a, e y τ .

2.3.3 Determinación preliminar de órbitas

La determinación preliminar de órbitas consiste en la obtención de los elementos orbitales a partir de dos observaciones. Los datos obtenidos de las observaciones pueden ser los vectores de posición \vec{r} o las anomalías verdaderas ν . En nuestro caso, las observaciones serán los vectores de posición en dos instantes determinados, de forma que como datos de partida tendremos $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$ y $\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$.

Son diferentes los métodos que se presentan en [31] para la obtención de la órbita preliminar del satélite a partir de estos dos datos, entre los que destacan los métodos Gauss, Lambert-Euler, iteración del semiparámetro p , iteración de la anomalía verdadera ν y el uso de las series f y g . En estos métodos, a partir de \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , se obtiene la velocidad del satélite en el primer instante $\vec{v}(t_1) = \vec{v}_1$ para, a continuación, determinar los elementos orbitales.

En este trabajo nos centraremos en el método de iteración de la anomalía verdadera, desarrollada por Lascody [36] en 1959. Este método utiliza la ecuación diferencial kepleriana y el método de la secante para la obtención de la solución.

A continuación describimos secuencialmente el procedimiento a seguir. El primer paso es la obtención de la excentricidad e . Para ello, considerando la ecuación de la cónica

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu},$$

y particularizándola para dos instantes de tiempo t_1 y t_2 , obtenemos $r_1 = r(t_1)$ y $r_2 = r(t_2)$. Como el semiparámetro p de la elipse permanece invariante, podemos obtener la excentricidad a partir de

$$r_1(1 + e \cos \nu_1) = p = r_2(1 + e \cos \nu_2) \leftrightarrow e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos \nu_1 - r_2 \cos \nu_2}.$$

El siguiente paso consiste en la obtención del semieje mayor de la elipse. A partir de la expresión de la cónica y teniendo en cuenta que $p = a(1 - e^2)$, el valor de a

queda determinado por

$$r_1(1 + e \cos \nu_1) = a(1 - e^2) \leftrightarrow a = \frac{r_1(1 + e \cos \nu_1)}{1 - e^2}.$$

Como avanzamos previamente, vamos a hacer uso de la ecuación diferencial kepleriana, cuya expresión es

$$F = k(t_2 - t_1) - \left(\frac{M_2 - M_1}{n} \right),$$

donde $k = 0.07436574$ (e.r.)^{1/2}/min, $n = k\sqrt{\mu/a^3}$, $M_i = E_i - e \sin E_i$,

$$\sin E_i = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \nu_i}{1 + e \cos \nu_i}, \quad \cos E_i = \frac{\cos \nu_i + e}{1 + e \cos \nu_i},$$

y

$$E_i = \arctan \left(\frac{\sin E_i}{\cos E_i} \right), \quad i = \{1, 2\}. \quad (2.26)$$

Una vez tenemos definida la ecuación diferencial kepleriana, haremos uso del método de la secante. Para ello, requeriremos de la derivada de la función $F(\nu)$, que obtendremos a partir de la diferencia progresiva como

$$F'(\nu) \approx \frac{F(\nu + \Delta\nu) - F(\nu)}{\Delta\nu},$$

siendo $\Delta\nu$ una cantidad pequeña. Como queremos trabajar con la primera observación, utilizaremos el subíndice 1. Iteraremos la expresión

$$\nu_1[j + 1] = \nu_1[j] - \frac{F(\nu_1[j])}{F'(\nu_1[j])}$$

hasta que la diferencia entre iterados sea menor que una determinada tolerancia. Nótese que la variable entre corchetes determina el número de iteración.

Una vez obtenido el valor de ν_1 , los valores de E_1 y E_2 son inmediatos a partir de (2.26). Denotando $\Delta E = E_2 - E_1$, evaluamos las funciones f y g en su forma cerrada como

$$f = 1 - \frac{a}{r_1} (1 - \cos \Delta E), \quad g = \tau - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (\Delta E - \sin \Delta E).$$

Por tanto, ya tenemos todos los valores necesarios para el cálculo de la velocidad en el primer instante a partir de

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{r}_2 - f\vec{r}_1}{g}.$$

A partir de la posición y la velocidad en el primer instante, calculamos los elementos orbitales, que son quienes determinarán de forma unívoca la órbita que sigue el satélite. Por un lado, recalculamos el semieje mayor a como

$$a = \frac{a}{\frac{2}{|\vec{r}|} - \frac{|\vec{v}|^2}{\mu}}.$$

Asimismo, recalculamos la excentricidad e :

$$e = \sqrt{\left(1 - \frac{|\vec{r}|}{a}\right)^2 + \left(\frac{\vec{r}\vec{v}}{\sqrt{\mu a}}\right)^2}.$$

La diferencia entre las anomalías verdaderas $\Delta\nu$ la podemos obtener como

$$\Delta\nu = \arctan\left(\frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}\right) = \arctan\left(\frac{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|\sin\Delta\nu}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|\cos\Delta\nu}\right).$$

El valor de la inclinación de la órbita i se puede obtener a partir de $\cos i = W_z$, donde \vec{W} es

$$\vec{W} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{r_1 r_2 \sin\Delta\nu},$$

de forma que $\sin i = \sqrt{\cos^2 i}$ y, por tanto

$$i = \arctan\left(\frac{\sin i}{\cos i}\right).$$

A partir de estos valores, la ascensión recta del nodo ascendente Ω se calcula como

$$\left. \begin{array}{l} \sin \Omega = \frac{W_x}{\sin i} \\ \cos \Omega = -\frac{W_y}{\sin i} \end{array} \right\} \Omega = \arctan\left(\frac{\sin \Omega}{\cos \Omega}\right).$$

De forma análoga se obtiene el argumento del perigeo $\omega = u - \nu$, donde

$$\left. \begin{array}{l} \sin \nu = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{e|\vec{r}|} \\ \cos \nu = \frac{a(1+e^2)-|\vec{r}|}{e|\vec{r}|} \end{array} \right\} \nu = \arctan\left(\frac{\sin \nu}{\cos \nu}\right),$$

y

$$\left. \begin{array}{l} \sin u = \frac{r_z}{|\vec{r}|\sin i} \\ \cos u = \frac{r_x \cos \Omega + r_y \sin \Omega}{|\vec{r}|} \end{array} \right\} u = \arctan\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right).$$

Por último, la época de paso por el perigeo τ se calcula a partir de (2.26) como

$$\tau = \frac{e(\sin E_2 - \sin E_1) - E_2 - E_1}{2n} + \frac{t_2 + t_1}{2}.$$

En el Capítulo 7 se presentan los resultados del trabajo de investigación [11]. Dentro de este trabajo, se utilizan los conceptos desarrollados en la Sección 2.3. Además de aplicar el método de la secante, se utilizan otros métodos iterativos de los presentados en la Sección 2.1 para, por un lado, comprobar la validez del desarrollo teórico de la determinación preliminar de órbitas de satélites, y por otro, introducir mejoras sobre dicha determinación a nivel computacional con la aplicación de métodos novedosos.

Capítulo 3

Representación de planos de parámetros y planos dinámicos

Basado en [12]: "Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods," The Scientific World Journal.

A lo largo del presente Capítulo se va a trabajar sobre el análisis dinámico de la familia de métodos iterativos de Kim. Esta familia incluye derivadas en su esquema iterativo, satisfaciendo el Teorema del Escalado. Mostraremos diferentes planos dinámicos y planos de parámetros para el análisis de su estabilidad y de sus cuencas de atracción. Asimismo, se incluye el código para la generación de los dos tipos de planos.

Resumen

El análisis de dinámica compleja de la familia iterativa paramétrica de Kim se realiza sobre polinomios cuadráticos, mostrando los códigos de MATLAB[®] generados para la representación de las imágenes fractales requeridas para realizar un estudio completo. Se ha analizado el plano de parámetros asociado a los puntos críticos libres, mostrando las regiones estables e inestables en las que la selección del parámetro dará lugar a prestaciones excelentes o desastrosas.

3.1 Introducción

Es habitual encontrar ecuaciones no lineales en la modelización de una gran cantidad de problemas en ciencias e ingeniería, y un amplio abanico de herramientas para resolverlas son los métodos iterativos. En los últimos años se ha convertido en un área de investigación creciente y fructífera. Más recientemente, la dinámica compleja se ha convertido en una disciplina interesante para profundizar en el conocimiento de las funciones racionales que intervienen cuando se aplica un esquema iterativo que resuelva la ecuación no lineal $f(z) = 0$, con $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Las propiedades dinámicas de esta función racional aportan información relevante acerca de las características numéricas del método, así como de su estabilidad y fiabilidad.

Existe una extensa literatura sobre el estudio de la iteración de aplicaciones racionales de variables complejas, entre los que destacamos [23] y [27]. El modelo más simple y profundamente analizado cuando $f(z)$ es un polinomio cuadrático es el método iterativo de Newton. Su dinámica ha sido ampliamente estudiada, como se refleja en [7], [23] o [32].

En la última década, Varona en [62] y Amat et al. en [2] han descrito el comportamiento dinámico de varios métodos iterativos suficientemente conocidos. Más recientemente, en [3], [14], [16], [21], [37], [41], [53] y [59], los autores realizan un estudio exhaustivo de diferentes familias iterativas. En la mayoría de estos estudios se obtienen planos dinámicos interesantes, así como comportamientos periódicos y otro tipo de anomalías. En escasas ocasiones se obtiene el plano de parámetros.

Para poder estudiar el comportamiento dinámico de un método iterativo cuando se aplica sobre un polinomio $f(z)$ resulta necesario realizar una revisión de conceptos fundamentales de dinámica. Para ampliar estos conceptos, [7] y [26] son unas referencias de autoridad.

Sea $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional, donde $\hat{\mathbb{C}}$ es la esfera de Riemann. La órbita de un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ se define como el conjunto de imágenes sucesivas de z_0 sobre la función racional, $\{z_0, R(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}$.

El comportamiento dinámico de la órbita de un punto en el plano complejo se determina a partir de su comportamiento asintótico. De este modo, un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto fijo de R si $R(z_0) = z_0$. Un punto fijo es atractor, repulsor o neutral si $|R'(z_0)|$ es menor, mayor o igual a 1, respectivamente. Si $R'(z_0) = 0$, el punto fijo es superatractor.

Si z^* es un punto fijo atractor de la función racional R , su cuenca de atracción $A(z^*)$ se define como el conjunto de preimágenes de cualquier orden tal que

$$A(z^*) = \left\{ z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow z^*, n \rightarrow \infty \right\}.$$

El conjunto de puntos cuyas órbitas tienden a un punto fijo atractor z^* se define como el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(R)$, mientras que su complementario es el conjunto de Julia $\mathcal{J}(R)$, que comprende a los puntos repulsivos y fija las fronteras entre las cuencas de atracción.

En este trabajo, la Sección 3.2 se dedica al análisis complejo de la familia conocida de cuarto orden de Kim [43]. En este estudio se acometerán la conjugación de los operadores de punto fijo asociados, la estabilidad de los puntos fijos extraños, los puntos críticos libres y los planos de parámetros y dinámicos. En la Sección 3.3 se muestra el código de MATLAB[®] para generar los planos y se describen las instrucciones clave de cara a la modificación eventual de las líneas de código para ser adaptadas a otras familias iterativas. Por último, se presentan las conclusiones en la Sección 3.4.

3.2 Características de dinámica compleja de la familia de Kim

Vamos a desarrollar el análisis dinámico de una familia paramétrica de métodos de cuarto orden conocida para la resolución de ecuaciones no lineales $f(z) = 0$. Kim diseñó en [43] una clase paramétrica de métodos óptimos de octavo orden, cuyos dos primeros pasos son

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{1 + \beta u_n + \lambda u_n^2}{1 + (\beta - 2)u_n + \mu u_n^2} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned}$$

donde $u_n = \frac{f(y_n)}{f(x_n)}$. Si $\beta = \mu = 0$, el resultado es una familia uniparamétrica de esquemas iterativos cuyo orden de convergencia es cuatro para cualquier valor de λ , teniendo la expresión

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{1 + u_n + \lambda u_n^2}{1 - u_n + u_n^2} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Para el estudio de la conjugación entre los métodos iterativos, presentamos el siguiente teorema que puede ser fácilmente comprobado.

Teorema 3.2.1 *Sea $g(z)$ una función analítica, y sea $A(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha \neq 0$, una aplicación afín. Sea $h(z) = \gamma(g \circ A)(z)$, con $\gamma \neq 0$. Sea $K_p(z)$ el operador de punto fijo de la aplicación del método de Kim sobre el polinomio $p(z)$. Entonces*

$$A \circ K_h \circ A^{-1}(z) = K_g(z),$$

es decir, K_g y K_h están conjugados analíticamente por A .

Demostración 3.2.1 *Sean $N_g(z)$ y $N_h(z)$ los operadores de punto fijo del método de Newton, cuando se aplica sobre las funciones $g(z)$ y $h(z)$, respectivamente, correspondientes al primer paso del método de Kim. Por un lado,*

$$N_g \circ A(z) = A(z) - \frac{g \circ A(z)}{g' \circ A(z)} = \alpha z + \beta - \frac{g \circ A(z)}{g' \circ A(z)}.$$

Por otro lado,

$$A \circ N_h(z) = A \circ \left[z - \frac{h(z)}{h'(z)} \right] = A \circ \left[z - \frac{g \circ A(z)}{\alpha g' \circ A(z)} \right] = \alpha z + \beta - \frac{g \circ A(z)}{g' \circ A(z)}.$$

De forma que N_g y N_h están conjugados analíticamente por A .

El operador de Kim, aplicado sobre $g(z)$, se puede desarrollar como

$$K_g(z) = N_g(z) - \frac{1 + \frac{g \circ N_g(z)}{g(z)} + \lambda \frac{g^2 \circ N_g(z)}{g^2(z)}}{1 - \frac{g \circ N_g(z)}{g(z)} + \frac{g^2 \circ N_g(z)}{g^2(z)}} \frac{g \circ N_g(z)}{g'(z)}.$$

Realizando la composición $K_g \circ A(z)$, se obtiene

$$K_g \circ A(z) = N_g \circ A(z) - \frac{1 + \frac{g \circ N_g \circ A(z)}{g \circ A(z)} + \lambda \frac{g^2 \circ N_g \circ A(z)}{g^2 \circ A(z)}}{1 - \frac{g \circ N_g \circ A(z)}{g \circ A(z)} + \frac{g^2 \circ N_g \circ A(z)}{g^2 \circ A(z)}} \frac{g \circ N_g \circ A(z)}{g' \circ A(z)}.$$

Desarrollando el operador de Kim cuando se aplica sobre la función $h(z)$, se obtiene

$$\begin{aligned} K_h(z) &= N_h(z) - \frac{1 + \frac{h \circ N_h(z)}{h(z)} + \lambda \frac{h^2 \circ N_h(z)}{h^2(z)}}{1 - \frac{h \circ N_h(z)}{h(z)} + \frac{h^2 \circ N_h(z)}{h^2(z)}} \frac{h \circ N_h(z)}{h'(z)} = \\ &= A^{-1} \circ N_g \circ A - \frac{1 + \frac{g \circ N_g \circ A(z)}{g \circ A(z)} + \lambda \frac{g^2 \circ N_g \circ A(z)}{g^2 \circ A(z)}}{1 - \frac{g \circ N_g \circ A(z)}{g \circ A(z)} + \frac{g^2 \circ N_g \circ A(z)}{g^2 \circ A(z)}} \frac{g \circ N_g \circ A(z)}{\alpha g' \circ A(z)} \end{aligned}$$

Al realizar la composición $A \circ K_h(z)$

$$A \circ K_h(z) = N_g \circ A(z) - \frac{1 + \frac{g \circ N_g \circ A(z)}{g \circ A(z)} + \lambda \frac{g^2 \circ N_g \circ A(z)}{g^2 \circ A(z)}}{1 - \frac{g \circ N_g \circ A(z)}{g \circ A(z)} + \frac{g^2 \circ N_g \circ A(z)}{g^2 \circ A(z)}} \frac{g \circ N_g \circ A(z)}{g' \circ A(z)},$$

de forma que K_g y K_h están conjugados analíticamente por A .

Este resultado permite, a partir de un escalado adecuado, conocer el comportamiento de un método iterativo aplicado sobre una familia de polinomios con tan solo el estudio de unos pocos casos.

A continuación realizamos el análisis del comportamiento dinámico de la familia paramétrica de cuarto orden (3.1) sobre el polinomio cuadrático $f(z) = (z-a)(z-b)$, donde $a, b \in \mathbb{C}$.

A partir de la transformación de Möbius

$$M(u) = \frac{u-a}{u-b},$$

cuya inversa es

$$M^{-1}(u) = \frac{ub-a}{u-1},$$

se obtiene el operador uniparamétrico

$$K_f(z, \lambda) = -\frac{z^4(z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - \lambda + 1)}{z^4(\lambda - 1) - 4z^3 - 6z^2 - 4z - 1}, \quad (3.2)$$

asociado al método iterativo. En el estudio de la función racional (3.2), $z_1^* = 0$ y $z_2^* = \infty$ aparecen como puntos fijos superatractores, mientras que $z_3^F = 1$ es un punto fijo extraño para $\lambda \neq \{1, 16\}$, siendo definidos como aquellos puntos fijos que no coinciden con ninguna de las raíces del polinomio $f(z)$. Existen otros seis puntos fijos extraños cuya expresión analítica dependiente de λ es bastante complicada.

Como veremos más adelante, no solo la cantidad sino también la estabilidad de los puntos fijos depende del parámetro de la familia. La expresión del operador diferencial, necesaria para el análisis de la estabilidad de los puntos fijos y la obtención de los puntos críticos, es

$$K'_f(z, \lambda) = -\frac{4z^3(z+1)^4[\lambda(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) - (z+1)^4]}{[z^4(1-\lambda) + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1]^2}.$$

Como el origen y el infinito son las raíces del polinomio, es evidente que son puntos fijos superatractores; sin embargo, la estabilidad del resto de puntos fijos puede variar en función del valor del parámetro λ . En el siguiente resultado se establece la estabilidad del punto fijo extraño $z_3^F = 1$.

Teorema 3.2.2 *A continuación se detalla el carácter del punto fijo extraño $z_3^F = 1$.*

- i) Si $|\lambda - 16| > 64$, entonces $z_3^F = 1$ es atractor pero no puede ser superatractor.
- ii) Para $|\lambda - 16| = 64$, $z_3^F = 1$ es un punto parabólico.
- iii) Si $|\lambda - 16| < 64$, con $\lambda \neq \{1, 16\}$, entonces $z_3^F = 1$ es repulsor.

Demostración 3.2.2 *Es fácil demostrar que*

$$K'_f(1, \lambda) = \frac{64}{16 - \lambda}.$$

De modo que,

$$\left| \frac{64}{16 - \lambda} \right| \leq 1 \Leftrightarrow 64 \leq |16 - \lambda|.$$

Sea $\lambda = a + ib$ un número complejo cualquiera. Entonces

$$64^2 \leq 16^2 - 32a + a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a - 16)^2 + b^2 \geq 64^2.$$

Por tanto,

$$|K'_f(1, \lambda)| \leq 1 \Leftrightarrow |\lambda - 16| \geq 64.$$

Finalmente, si λ cumple $|\lambda - 16| \leq 64$, entonces $|K'_f(1, \lambda)| > 1$ y $z_3^F = 1$ es un punto repulsor, salvo para $\lambda = \{1, 16\}$, valores para los que $z = 1$ no es un punto fijo.

Los puntos críticos son $z_1^C = z_1^* = 0$, $z_2^C = z_2^* = \infty$, $z_3^C = -1$ (para $\lambda \neq 0$) y

$$z_{4,5}^C(\lambda) = \frac{1}{4} \left[\frac{4 + \lambda}{\lambda - 1} - \beta \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{-5\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 6)}{(\lambda - 1)^3} - \frac{\beta(\lambda + 4)}{\lambda - 1}} \right],$$

$$z_{6,7}^C(\lambda) = \frac{1}{4} \left[\frac{4 + \lambda}{\lambda - 1} + \beta \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{-5\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 6)}{(\lambda - 1)^3} - \frac{\beta(\lambda + 4)}{\lambda - 1}} \right],$$

donde $\lambda \neq 1$ y $\beta = \frac{\sqrt{5\lambda(\lambda+4)}}{\lambda-1}$.

Los puntos críticos libres son aquellos que no coinciden con las raíces del polinomio. El conocimiento de los puntos críticos adquiere una relevante importancia puesto que cada componente invariante de Fatou está asociada, al menos, con un punto crítico.

LEMA 3.2.1 *Tras el análisis de $K_f'(z, \lambda) = 0$, se obtiene*

- i) Si $\lambda = 0$ no hay puntos críticos libres en el operador $K_f(z, 0)$.
- ii) Si $\lambda = 16$ hay cuatro puntos críticos libres: $z_3^C = -1$, $z_{4,5}^C(16) = -\frac{1}{3}(1 \pm i2\sqrt{2})$ y $z_{6,7}^C = z_3^F = 1$.
- iii) Si $\lambda = -4$ hay tres puntos críticos diferentes: $z_3^C = -1$, $z_{4,5}^C(-4) = -i$ y $z_{6,7}^C(-4) = i$.
- iv) Si $\lambda = 1$ los puntos críticos son el conjunto $\{-1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$.
- v) En cualquier otro caso, los puntos críticos libres son $z_3^C = -1$ y $z_{4,5,6,7}^C(\lambda)$.

Además, se puede demostrar que los puntos críticos libres no son independientes, sino que $z_4^C(\lambda) = 1/z_5^C(\lambda)$ y $z_6^C(\lambda) = 1/z_7^C(\lambda)$.

Algunas de estas propiedades determinan la complejidad del operador, como veremos en los siguientes resultados.

Teorema 3.2.3 *El único miembro de la familia cuyo operador está siempre conjugado a la aplicación racional z^4 es el elemento correspondiente a $\lambda = 0$.*

Demostración 3.2.3 *A partir de (3.2) denotamos $n(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - \lambda + 1$ y $d(z) = (1 - \lambda)z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1$. Factorizando ambos polinomios se puede observar que el único valor de λ que verifica $n(z) = d(z)$ es $\lambda = 0$.*

De hecho, el miembro de la familia de Kim correspondiente a $\lambda = 0$ es el método de Ostrowski. De modo que se trata del esquema más estable de la familia, ya que no tiene puntos críticos libres y las iteraciones solo pueden converger a cualquiera de las imágenes de las raíces del polinomio. Se trata del mismo comportamiento que se observó en el análisis del esquema de Ostrowski en [21].

Teorema 3.2.4 *El miembro de la familia correspondiente a $\lambda = 1$ es un método de quinto orden cuyo operador es la aplicación racional*

$$K_f(z, 1) = \frac{z^5(z^2 + 2z + 2)(z + 2)}{(2z^2 + 2z + 1)(2z + 1)}. \quad (3.3)$$

Demostración 3.2.4 *Sustituyendo directamente $\lambda = 1$ en el operador racional (3.2) se obtiene (3.3), mostrando que $z = 1$ no es un punto fijo para este caso particular. Además,*

$$K'_f(z, 1) = \frac{20z^4(z^2 + z + 1)(z + 1)^4}{(2z^2 + 2z + 1)^2(2z + 1)^2},$$

y solo existen tres puntos críticos libres.

Por tanto, para el caso particular de $\lambda = 1$, el orden de convergencia se ve aumentado a cinco, y aunque existen tres puntos críticos libres, se encuentran en las cuencas de atracción del cero y del infinito, ya que los puntos críticos libres son repulsores en todos los casos. De forma que se trata de un miembro de la familia muy estable con convergencia aumentada para el caso de polinomios cuadráticos.

3.2.1 Uso de los planos dinámicos y de parámetros

A partir del análisis anterior queda patente que el comportamiento dinámico del operador racional asociado a cada valor del parámetro puede variar considerablemente. Se pueden obtener diferentes espacios de parámetros asociados a los puntos críticos libres de la familia. El proceso para obtener los planos de parámetros es el siguiente: se asocia cada punto del plano de parámetros con un valor complejo de λ , es decir, con un miembro de la familia (3.1). Cada valor de λ correspondiente a la misma componente conexa del plano de parámetros da lugar al mismo comportamiento dinámico. Así pues, resulta interesante encontrar regiones del plano de parámetros lo más amplias posible, puesto que estos valores de λ van a generar los mejores miembros de la familia en términos de estabilidad numérica.

Como $z_4^C(\lambda) = 1/z_5^C(\lambda)$ y $z_6^C(\lambda) = 1/z_7^C(\lambda)$ (ver Lema 3.2.1), tendremos al menos tres puntos críticos libres independientes. No obstante, $z_3^C = -1$ es la preimagen

del punto fijo $z_3^F = 1$ y el plano de parámetros asociado con este punto crítico no resulta significativo. Así pues, podemos obtener dos planos de parámetros diferentes que aportan informaciones complementarias. Cuando consideramos el punto crítico z_4^C (ó z_5^C) como punto inicial del esquema iterativo de la familia asociada a cada valor de λ , representamos ese punto en rojo si el método converge a alguna de las raíces $z_1^* = 0$ ó $z_2^* = \infty$, utilizando el color blanco para el resto de casos. La Figura 3.1 representa el plano de parámetros P_1 .

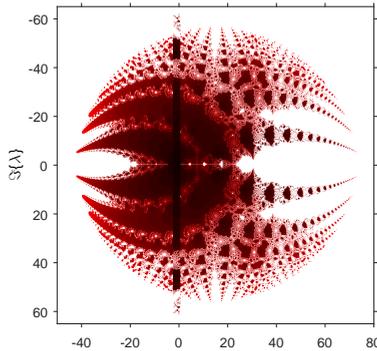
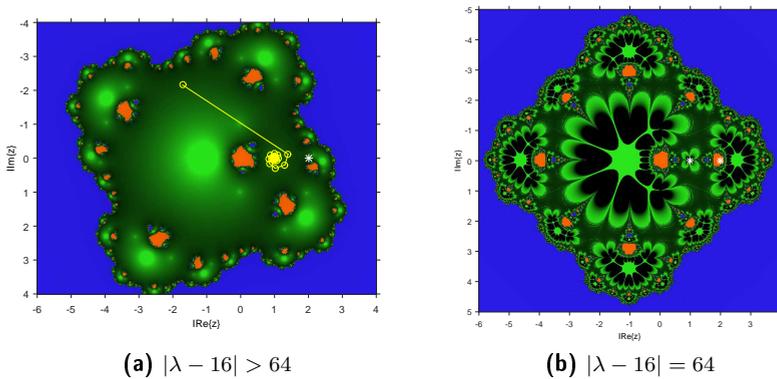


Figura 3.1: Plano de parámetros P_1 asociado a $z_{4,5}^C$.

La Figura 3.1 ha sido generada tomando valores de $\lambda \in [-50, 80] \times [-65, 65]$, con una malla de 2000×2000 puntos y 400 iteraciones por punto. En P_1 se observa el disco de puntos repulsivos en $z_3^C = 1$, así como varias regiones blancas cuando se alcanza la convergencia a puntos diferentes de $z_1^* = 0$ ó $z_2^* = \infty$.



(a) $|\lambda - 16| > 64$

(b) $|\lambda - 16| = 64$

Figura 3.2: Planos dinámicos en los que $|\lambda - 16| \geq 64$.

Como ejemplo de plano dinámico asociado con el valor del parámetro que hace que $z_3^C = 1$ sea atractor o neutral mostramos la Figura 3.2a, donde aparecen tres cuencas de atracción, dos de las cuales se corresponden con los puntos fijos superatractores y la tercera al punto fijo. Se puede observar cómo la órbita converge asintóticamente al punto fijo, representado en amarillo. Asimismo, en la Figura 3.2b se ilustra el comportamiento de un punto fijo parabólico, el que cabe destacar la estabilidad entorno al disco de $z = 1$. La órbita tendería al punto parabólico alternando dos lados, arriba y abajo del punto parabólico en este caso.

La generación de los planos dinámicos es muy similar a la correspondiente a los planos de parámetros. En el caso de los planos dinámicos, el valor del parámetro λ es fijado, de modo que se representa un miembro concreto de la familia de métodos iterativos. Cada punto del plano complejo es considerado como punto inicial del esquema iterativo y se representa con diferentes colores, en función de a qué punto fijo haya convergido. La Sección 3.3.1 realiza una descripción más detallada de la generación de estos gráficos, además de mostrar el código utilizado.

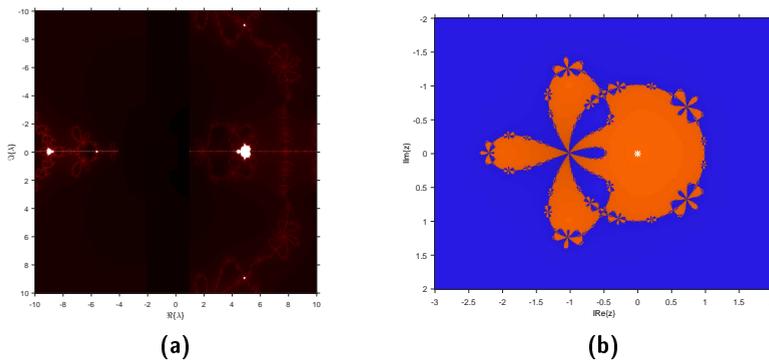


Figura 3.3: (a) Detalle de P_1 alrededor de $\lambda = 0$. (b) Plano dinámico para $\lambda = 1$.

En la Figura 3.3a se muestra un detalle del plano de parámetros alrededor de $\lambda = 0$. Nótese que la región alrededor del origen es bastante estable, sobretudo la banda vertical entre -4 y 1 . De hecho, la Figura 3.3b muestra el plano dinámico correspondiente a $\lambda = 1$.

Para $\lambda = 0$, el plano dinámico es el mismo que el correspondiente al método de Newton, es decir, está compuesto por un disco y su complementario en \mathbb{C} . Alrededor del origen también es bastante estable, con dos componentes conexas del conjunto de Fatou. Para $\lambda = 16$, $z = 1$ no es un punto fijo, como describimos en el Teorema 3.2.2, y $\{-1, 1\}$ describe una órbita periódica de período 2, como

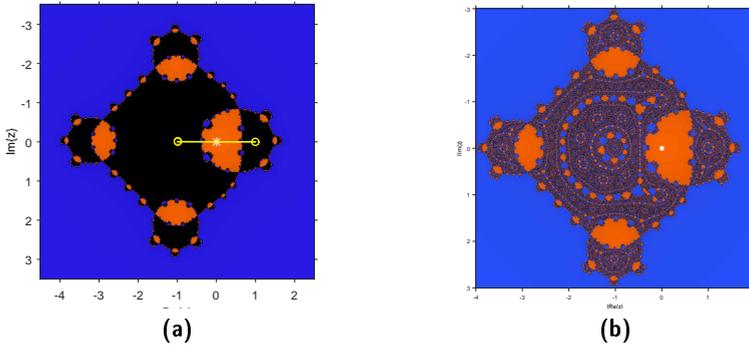


Figura 3.4: (a) Órbita de período 2 para $\lambda = 16$. (b) Plano dinámico para $\lambda = 15.9 - i0.2$.

se ilustra en la Figura 3.4a. La singularidad de este valor del parámetro puede ser apreciada en la Figura 3.4b, en la que se muestra el plano dinámico para $\lambda = 15.9 - i0.2$, dando lugar a un comportamiento muy estable con solo dos cuencas de atracción, correspondientes a las raíces del polinomio a partir de la transformación de Möbius.

Es de destacar en la Figura 3.3a que las regiones blancas tienen cierta similitud al conocido conjunto de Mandelbrot. Sus antenas finalizan en $\lambda = -4$ y $\lambda = 1$, cuyo comportamiento dinámico es considerablemente diferente a valores próximos del parámetro, como se reseñó en el Lema 3.2.1.

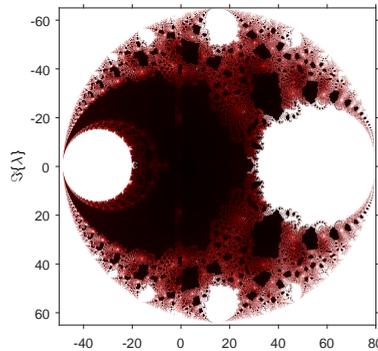


Figura 3.5: Plano de parámetros P_2 asociado a $z_{6,7}^C$.

Un procedimiento similar se realiza para los otros dos puntos críticos libres, $z_{6,7}^C$, dando lugar al plano de parámetros que se muestra en la Figura 3.5. Como en

el caso de P_1 , aparece el disco de comportamiento repulsor en $z = 1$, teniendo dentro diferentes bulbos similares a los discos.

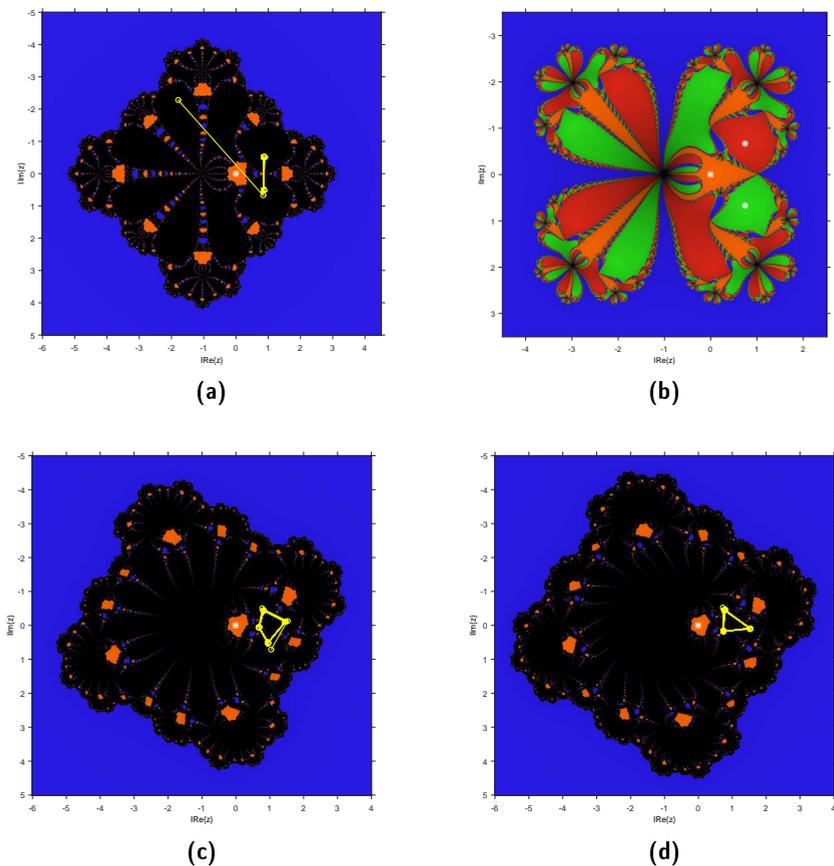


Figura 3.6: Planos dinámicos a partir de P_2 . **(a)** Órbita de período 2; **(b)** Dos puntos atractores extraños; **(c)** Órbita de período 4; **(d)** Órbita de período 3.

El disco mayor, en la parte izquierda del eje real, se corresponde con el conjunto de valores de λ en los que el punto fijo $z = 1$ se ha bifurcado en una órbita periódica de período dos, como ilustra la Figura 3.6a. En la parte derecha del eje real se encuentran los valores de λ que dan lugar a dos puntos fijos extraños conjugados, como muestra la Figura 3.6b. Los bulbos de la parte superior, correspondientes al plano dinámico de la Figura 3.6c, e inferior del eje imaginario se corresponden con órbitas periódicas de período 4. El resto de bulbos alrededor del disco de estabilidad de $z = 1$ se corresponden con regiones en las que aparecen órbitas de

diferentes períodos. De hecho, en la Figura 3.6d se observa una órbita periódica de período 3, a partir del valor $\lambda = 50 + i50$. Aplicando el Teorema de Sharkovsky (ver [26]) podemos afirmar que se pueden encontrar órbitas periódicas de periodicidad arbitraria.

3.3 Código MATLAB® de los planos

El objetivo principal de la representación gráfica de los planos dinámicos y de parámetros es la comprensión del comportamiento de un método o una familia de métodos de un solo vistazo. El procedimiento para generar el plano dinámico o el de parámetros es similar. Sin embargo, existen pequeños matices a tener en cuenta, por lo que a continuación vamos a desarrollar ambos casos.

3.3.1 Planos dinámicos

A partir del operador de punto fijo, que asocia un polinomio con un método iterativo, el plano dinámico ilustra las cuencas de atracción del operador. La órbita de cada punto en el plano dinámico tiende a una raíz (o al infinito). Esta información, junto con la velocidad a la que los puntos tienden a la raíz, queda reflejada en el plano dinámico. En nuestras imágenes, cada cuenca de atracción se ilustra con un color diferente. Para aportar la información de la cantidad de iteraciones que necesita un punto para alcanzar la raíz se aplica la cantidad de brillo de cada color.

El código `dynamicalPlane` genera el plano dinámico del operador de punto fijo de Kim, cuando se aplica sobre polinomios cuadráticos. Este código ha sido utilizado para generar los planos dinámicos de los artículos [3], [14], [21] ó [19].

El esqueleto del código se puede separar en cinco partes diferenciadas.

- (1) VALORES (línea 18). Los límites son renombrados y la función simbólica `fun` es traducida a una función anónima, rellamable por el puntero de salida.
- (2) OPERADORES DE PUNTO FIJO (líneas 23-24).
- (3) CÁLCULO DE LOS PUNTOS FIJOS ATRACTORES (líneas 27-38).
- (4) GENERACIÓN DE LA IMAGEN (líneas 39-94). Una vez establecidos el operador de punto fijo y los puntos fijos atractores, el siguiente paso consiste en la determinación de las cuencas de atracción. La combinación de los parámetros de entrada `limites` y `puntos` establece la resolución de la imagen, generando la malla de puntos del plano complejo (líneas 40-50).

Las líneas 58-90 están dedicadas a la asignación de un color a cada punto inicial, que depende de la cuenca de atracción y la cantidad de iteraciones que haya necesitado para alcanzar la raíz. Si la órbita tiende al punto atractor del primer índice de la línea 34, este punto se representa en naranja, como indican las líneas 69-70; para los casos segundo y tercero, el punto se ilustra en azul (líneas 78-80) y verde (líneas 88-90), respectivamente. En cualquier otro caso, el punto no se modifica, de forma que permanece el color negro inicial.

Conforme crece el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia, el color correspondiente se oscurece, siendo los colores más brillantes aquellos en los que el punto ha convergido con pocas iteraciones. Con este propósito se establece un coeficiente multiplicador (líneas 68, 77 y 87) sobre el valor RGB designado, de forma que este coeficiente es mayor para pocas iteraciones, y menor para el caso contrario.

- (5) REPRESENTACIÓN DE LA IMAGEN (líneas 99-102). La imagen se muestra a partir del comando `imshow`. Las imágenes se muestran habitualmente en formato de matriz (de arriba a abajo y de izquierda a derecha). En este caso, la imagen está compuesta por puntos complejos, de forma que la presentación natural es la Cartesiana (de abajo a arriba y de izquierda a derecha), por lo cual está incluida la línea 102 con el comando `axis xy`.

```

1 function [I,it]=dynamicalPlane(lambda,bounds,points,maxiter)
2
3 % Description
4 % - dynamicalPlane obtains the dynamical plane of the Kim iterative method
5 % when it is applied to a quadratic polynomial. The dynamical plane is obtained
6 % as a points-by-points-by-3 matrix I, and can be displayed as
7 % >> imshow (I);
8 % moreover, the points-by-points matrix it records the number of
9 % iterations of each point.
10 % - the method is iterated till the maxiter iterations is reached, or
11 % till the estimation is enough close to the root.
12 % - it is mandatory the previous execution of
13 % >> syms x
14 % bounds: [min (Re (z)) max (Re (z)) min (Im (z)) max (Im (z))]
15 % test: [I, it]=dynamicalPlane (0, [-1 1 -1 1], 400, 20);
16
17 % Values
18 x0=bounds(1); xN=bounds(2); y0=bounds(3); yN=bounds(4);
19 syms x
20 aa=lambda;
21
22 % Kim's fixed point operator
23 Op=simple(-x.^4*(1-aa+4*x+6*x^2+4*x^3+x^4)/...
```

```

24     (-1-4*x-6*x^2-4*x^3+x^4*(aa-1));
25
26 % Attracting points
27 fOp=matlabFunction(Op);
28 Op=simple(Op-x);    pf=double(solve(Op-x));
29 Op2=subs(Op,x,Op); po=double(solve(Op2-x));
30 dOp=diff(Op);      pc=double(solve(dOp));
31 adOp=matlabFunction(factor(abs(dOp)));
32 inda=double(adOp(pf))<1;
33 inda2=double(adOp(po))<1;
34 pa=pf(inda==1);
35 po=po(inda2==1);
36 if isempty(pa)
37     pa=[pa po];
38 end
39
40 % Preparing the image
41 % The image must have an odd number of points
42 if(mod(points,2)==0)
43     points=points+1;
44 end
45
46 % Complex mesh of points
47 dx=xN-x0; dy=yN-y0; d=max(dx,dy);
48 paso=d/points;
49 x=x0:paso:xN;      y=y0:paso:yN;
50 [X,Y]=meshgrid(x,y);    z=complex(X,Y);
51
52 % Matrix startup
53 it=zeros(size(z));
54 r1=zeros(size(z));    r2=zeros(size(z));    r3=zeros(size(z));
55 R=zeros(size(z));    G=zeros(size(z));    B=zeros(size(z));
56
57 % Colour of each point
58 [f,col]=size(z);
59 if numel(pa)>0
60     for j=1:f
61         for k=1:col
62             s=z(j,k); rootfound=0;
63             while (rootfound==0 && it(j,k)<maxiter)
64                 s=fOp(s);
65                 it(j,k)=it(j,k)+1;
66                 if norm(double([real(s)-real(pa(1)) ...
67                     imag(s)-imag(pa(1))]))<1e-3
68                     r1(j,k)=maxiter-1.5*it(j,k);
69                     R(j,k)=r1(j,k)/maxiter;
70                     G(j,k)=r1(j,k)/maxiter*102/255;
71                     rootfound=1;
72                 end
73             if (length(pa)>1&&...
74                 norm(double([real(s)-real(pa(2)) ...
75                     imag(s)-imag(pa(2))]))<1e-3 &&...
76                 isnan(abs(s))==1 || isinf(s)==1)

```

```

77         r2(j,k)=maxiter-it(j,k);
78         R(j,k)=r2(j,k)/maxiter*40/255;
79         G(j,k)=r2(j,k)/maxiter*80/255;
80         B(j,k)=r2(j,k)/maxiter;
81         rootfound=1;
82     end
83     if (length(pa)>2&&...
84         norm(double([real(s)-real(pa(3)) ...
85                     imag(s)-imag(pa(3))])<1e-3 &&...
86         isnan(abs(s))==1 || isinf(s))==1)
87         r3(j,k)=maxiter-1.5*it(j,k);
88         R(j,k)=r3(j,k)/maxiter*41/255;
89         G(j,k)=r3(j,k)/maxiter*230/255;
90         B(j,k)=r3(j,k)/maxiter*26/255;
91         rootfound=1;
92     end
93 end
94     end
95 end
96 end
97
98 % Image display
99 I(:, :, 1)=R(:, :); I(:, :, 2)=G(:, :); I(:, :, 3)=B(:, :);
100 figure, imshow(I, 'Xdata', [x0 xN], 'Ydata', [y0 yN])
101 xlabel('Re\{z\}'); ylabel('Im\{z\}');
102 hold on, axis on, axis xy
103
104 % Plot points
105 plot(real(pf), imag(pf), 'wo') % Fixed points
106 plot(real(pc), imag(pc), 'ws') % Critical points
107 plot(real(pa), imag(pa), 'w*') % Attracting points

```

Una vez ha sido ejecutado el programa, las variables de salida son la imagen I y la cantidad de iteraciones requeridas por cada punto it . Nuestra recomendación es el uso del comando `surf` para representar el número de iteraciones, en combinación con el comando `shading`.

Para aplicar el código que hemos presentado sobre operadores de punto fijo diferentes, la única parte que hay que modificar es la correspondiente al operador de punto fijo. Si el método puede converger a más de tres puntos, basta con añadir otra estructura `else if` (como en las líneas 83-91) y establecer otro color tantas veces como sea necesario.

3.3.2 Planos de parámetros

El código `parametricPlane` se puede dividir en cinco secciones diferentes.

- (1) GENERACIÓN DE LA MALLA DE VALORES DE λ (líneas 22-26).
- (2) INICIALIZACIÓN DE LAS MATRICES (líneas 28-30).
- (3) PROCESO ITERATIVO (líneas 32-44). El valor del punto crítico depende de λ , obtenido en las líneas 37-41. Su órbita se calcula en la línea 44.
- (4) ASIGNACIÓN DE COLORES (línea 47). Si el punto crítico converge, se representa con un color de la familia de los rojos (línea 47); en cualquier otro caso, se representa en blanco.
- (5) REPRESENTACIÓN DE LA IMAGEN (líneas 54-58). La imagen se muestra a partir del comando `imshow`. Las imágenes se muestran habitualmente en formato de matriz (de arriba a abajo y de izquierda a derecha). En este caso, la imagen está compuesta por puntos complejos, de forma que la presentación natural es la Cartesiana (de abajo a arriba y de izquierda a derecha), por lo cual está incluida la línea 58 con el comando `axis xy`.

```

1 function [a,I,c]=parametricPlane(axini,axfin,ayini,ayfin,points,maxiter)
2
3 % Description
4 % - parametricPlane obtains the parametric plane of the Kim iterative
5 % family when it is applied to a quadratic polynomial, associated with the
6 % free critical point cr 2.
7 % [axini, axfin, ayini, ayfin] define the rectangle for possible values of
8 % the parameter \lambda
9 % points defines the mesh of size points-by-points
10 % maxiter is the maximum number of iterations of the method per value of
11 % \lambda
12
13 % test: [a,I,c]=parametricplane (?2, 2, ?2, 2, 500, 25);
14 % Values
15
16 % Preparing the image
17 % The image must have an odd number of points
18 if(mod(points,2)==0)
19     points=points+1;
20 end
21
22 % Complex mesh of points
23 ax=linspace(axini,axfin,points);
24 ay=linspace(ayini,ayfin,points);
25 [AX,AY]=meshgrid(ax,ay);
26 a=complex(AX,AY);
27

```

```

28 % Matrices startup
29 I=zeros(points);    c=zeros(points);
30 R=zeros(points);    G=zeros(points);    B=zeros(points);
31
32 % Colour of each point
33 for j=1:points
34     for k=1:points
35         it=0;
36         aa=a(j,k);
37         c1=-((-4-aa)/(4*(-1+aa)))-(sqrt(5)*sqrt(4*aa+aa^2))/...
38             (4*sqrt(1-2*aa+aa^2))+1/2*sqrt((-4-aa)^2/(2*(-1+aa)^2)...
39             -(-6+aa)/(-1+aa)-(-2+2*aa)/(-1+aa)-((( -4-aa)^3/(-1+aa)^3)...
40             + (4*(-4-aa)*(-6+aa))/(-1+aa)^2-(8*(-4-aa))/(-1+aa))*...
41             sqrt(1-2*aa+aa^2))/(2*sqrt(5)*sqrt(4*aa+aa^2));
42         rootfound=0;
43         while it<maxiter && rootfound==0
44             c1=-c1.^4*(-aa+(1+c1)^4)/(-1-4*c1-6*c1^2-4*c1^3+c1^4*(aa-1));
45             it=it+1;
46             if abs(c1)<1e-3 || abs(c1)>1000
47                 R(j,k)=1-it/maxiter*10;
48                 rootfound=1;
49             end
50         end
51     end
52 end
53
54 % Image display
55 I(:, :, 1)=R(:, :); I(:, :, 2)=G(:, :); I(:, :, 3)=B(:, :);
56 figure, imshow(I, 'Xdata', [axini axfin], 'Ydata', [ayini ayfin])
57 xlabel('\Re\{\alpha\}'), ylabel('\Im\{\alpha\}')
58 axis on, axis xy

```

Una vez ha sido ejecutado el programa, las variables de salida son la imagen I y la cantidad de iteraciones requeridas por cada punto it. Nuestra recomendación es el uso del comando surf para representar el número de iteraciones, en combinación con el comando shading.

3.4 Conclusiones

Las propiedades dinámicas de la familia paramétrica de Kim se han analizado, mostrando las regiones de estabilidad y los elementos de la familia que tienen una riqueza dinámica en directa oposición a la calidad de las características numéricas. Las principales herramientas utilizadas son los planos dinámicos y de parámetros implementados en MATLAB[®], cuyo código ha sido presentado.

Capítulo 4

Análisis dinámico y fractal de métodos de tipo Steffensen

Basado en [13]: "Dynamics and fractal dimension of Steffensen-type methods," Algorithms.

En el Capítulo 4 vamos a trabajar sobre una serie de métodos iterativos libres de derivadas. Construidos a partir de la composición de los métodos de Steffensen y Newton, obtendremos tres métodos de órdenes cuatro, ocho y dieciséis. Debido a su naturaleza libre de derivadas el Teorema del Escalado no se cumple, por lo que estudiaremos algunos miembros de sus familias a partir de las funciones racionales y los planos dinámicos asociados. Por último, se establecerá una comparativa entre los métodos a partir de la dimensión fractal asociada a cada uno de ellos.

Resumen

En este artículo se estudia el comportamiento dinámico de varios esquemas iterativos óptimos de alto orden para resolver ecuaciones no lineales. La complejidad del conjunto de Julia es analizada y relacionada con la dimensión fractal. De hecho, la dimensión fractal se convierte en una importante herramienta para comparar esquemas iterativos que estiman la solución de una ecuación no lineal. Los métodos iterativos libres de derivadas presentados son comparados a partir del algoritmo de box-counting.

4.1 Introducción

Una gran cantidad de problemas en ciencias e ingeniería requieren de la solución de una ecuación no lineal $f(z) = 0$. Existen numerosas técnicas para acometer este problema, y una de las más habituales es el uso de métodos iterativos para la obtención de una solución numérica. El método de Newton es uno de los esquemas más conocidos para estimar la solución de ecuaciones no lineales

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

No obstante, en determinadas situaciones la evaluación de la derivada no es posible. En la Sección 4.2 varios métodos iterativos óptimos libres de derivadas, con orden de convergencia ascendente, son presentados para evitar la evaluación de la derivada.

El **índice de eficiencia**, definido por Ostrowski en [56], permite comparar los métodos en términos de eficiencia computacional. Se define como $I = p^{1/d}$, donde p es el orden de convergencia y d es el número de evaluaciones funcionales por iteración. Un método es **óptimo** si $p = 2^{d-1}$, a partir de la conjetura de Kung y Traub introducida en [46].

La calidad de un método iterativo se puede cuantificar a partir de varios parámetros, como el índice de eficiencia o el orden de convergencia, pero la estabilidad es un elemento clave que requiere ser analizado. Los planos dinámicos de los esquemas iterativos aportan esta información de forma gráfica, y son desarrollados en la Sección 4.3. Diferentes autores han estudiado y comparado la estabilidad de una serie de métodos iterativos conocidos a partir de sus planos dinámicos, en primera instancia en el trabajo de Varona [62] y posteriormente por Amat et al. [1] y Neta et al. [15, 54], entre otros.

El comportamiento dinámico del método de Newton sobre polinomios, estudiado en [8, 25] entre otros, muestra que no se puede garantizar su estabilidad en todo el plano dinámico. La dimensión fractal de un método iterativo permite cuantificar el tamaño del conjunto de Julia y, por tanto, se convierte en una aplicación que permite caracterizar la estabilidad de un método. En la Sección 4.4 se evalúa la dimensión fractal de los métodos utilizados en el artículo.

En este artículo se analiza el comportamiento dinámico de cuatro esquemas iterativos libres de derivadas, de órdenes de convergencia 2, 4, 8 y 16, sobre diferentes polinomios cuadráticos y cúbicos. A partir de este análisis se pueden conjeturar algunos resultados. Por ejemplo, conforme el orden de convergencia aumenta, el conjunto de Julia de las funciones racionales correspondientes tienen menor complejidad y las cuencas de atracción obtenidas a partir de los diferentes esquemas son más amplias, acercándose cada vez más a las del método de Newton. Desde un punto de vista numérico, se comprueban estas características a partir de la dimensión fractal, aproximándose a la correspondiente al método de Newton.

4.2 Métodos óptimos libres de derivadas

El conocido método de Steffensen (ver [17]) sustituye la derivada de (4.1) por la diferencia finita progresiva, de modo que su expresión iterativa es

$$z_{n+1} = z_n - \frac{[f(z_n)]^2}{f(v_n) - f(z_n)},$$

donde $v_n = z_n + f(z_n)$. La técnica de composición de métodos, descrita en [55], permite la implementación de métodos de alto orden de convergencia. A partir de dos métodos con órdenes de convergencia p_1 y p_2 , es posible generar un método de orden $p_1 \cdot p_2$. Los autores describen en [20] una técnica basada en la composición de métodos y aproximaciones de tipo Padé para obtener métodos libres de derivadas.

En primer lugar componemos el método de Steffensen con el de Newton, obteniendo el esquema de cuarto orden

$$\begin{aligned} y_n &= z_n - \frac{[f(z_n)]^2}{f(v_n) - f(z_n)} \\ z_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $v_n = z_n + f(z_n)$. Para evitar el cálculo de $f'(y_n)$, la reemplazamos por la derivada $m'(y_n)$ de la aproximación de primer grado de tipo Padé

$$m(t) = \frac{a_1 + a_2(t - y_n)}{1 + a_3(t - y_n)},$$

siendo $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ parámetros que tienen que cumplir

$$m(z_n) = f(z_n), \tag{4.3}$$

$$m(y_n) = f(y_n), \tag{4.4}$$

$$m(v_n) = f(v_n). \tag{4.5}$$

A partir de (4.4) se obtiene directamente que $a_1 = f(y_n)$. Las condiciones (4.3) y (4.5) indican que

$$a_2 - f(z_n)a_3 = f[z_n, y_n],$$

$$a_2 - f(v_n)a_3 = f[v_n, y_n],$$

donde $f[x_1, x_2]$ denota la diferencia dividida $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$. Tras una serie de manipulaciones algebraicas, los parámetros son

$$a_2 = f[y_n, v_n] - \frac{f(v_n)f[z_n, y_n, v_n]}{f[v_n, z_n]},$$

$$a_3 = -\frac{f[z_n, y_n, v_n]}{f[z_n, v_n]},$$

siendo $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$ la diferencia dividida de segundo orden.

Podemos expresar la derivada de la aproximación de Padé sobre y_n como

$$m'(y_n) = \frac{f[z_n, y_n]f[y_n, v_n]}{f[z_n, v_n]}.$$

Sustituyendo $f'(y_n)$ en (4.2) por $m'(y_n)$, Cordero et al. obtuvieron en [20] un método óptimo de cuarto orden, que denotaremos de ahora en adelante como M4, cuya expresión es

$$y_n = z_n - \frac{[f(z_n)]^2}{f(v_n) - f(z_n)},$$

$$z_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)f[z_n, v_n]}{f[z_n, y_n]f[y_n, v_n]}.$$

Aplicando de nuevo la composición con el método de Newton, y estimando la última derivada por la aproximación de Padé de segundo grado, el método óptimo de orden ocho, denotado por M8, tiene como expresión iterativa

$$\begin{aligned} y_n &= z_n - \frac{[f(z_n)]^2}{f(v_n) - f(z_n)}, \\ u_n &= y_n - \frac{f(y_n)f[z_n, v_n]}{f[z_n, y_n]f[y_n, v_n]}, \\ z_{n+1} &= u_n - \frac{f(u_n)f[z_n, y_n, v_n]}{f[y_n, v_n, u_n]f[u_n, z_n, y_n](u_n - z_n) + f[z_n, y_n, v_n]f[y_n, u_n]}. \end{aligned}$$

Análogamente se puede obtener un método de orden 16, denotado por M16, a partir de la composición de M8 con Newton y estimando la última derivada por la aproximación de tipo Padé de tercer grado

$$m(t) = \frac{c_1 + c_2(t - z_n) + c_3(t - z_n)^2 + c_4(t - z_n)^3}{1 + c_5(t - z_n)},$$

dando lugar a la expresión iterativa

$$\begin{aligned} y_n &= z_n - \frac{[f(z_n)]^2}{f(v_n) - f(z_n)}, \\ u_n &= y_n - \frac{f(y_n)f[z_n, v_n]}{f[z_n, y_n]f[y_n, v_n]}, \\ w_n &= u_n - \frac{f(u_n)f[z_n, y_n, v_n]}{f[y_n, v_n, u_n]f[u_n, z_n, y_n](u_n - z_n) + f[z_n, y_n, v_n]f[y_n, u_n]}, \\ z_{n+1} &= w_n - \frac{f(w_n)}{f[z_n, w_n] + (z_n - w_n) \{c_5 f[z_n, w_n] - c_3 - c_4(z_n - w_n)\}}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c_5 &= -\frac{f[z_n, y_n, v_n, u_n, w_n]}{f[z_n, y_n, v_n, u_n]}, \\ c_4 &= f[z_n, y_n, v_n, w_n] + c_5 f[z_n, y_n, v_n], \\ c_3 &= f[z_n, y_n, w_n] - c_4(z_n - y_n - 2w_n) + c_5 f[z_n, y_n], \end{aligned}$$

siendo $f[x_1, x_2, x_3, x_4]$ y $f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ las diferencias divididas de órdenes tres y cuatro, respectivamente.

Este procedimiento puede extenderse para diseñar métodos iterativos óptimos libres de derivadas con orden de convergencia $2^k - 1$, $k = 2, 3, 4, \dots$. Todos los métodos

diseñados con esta técnica son óptimos a partir de la conjetura de Kung-Traub, ya que los métodos de orden $2^k - 1$ requieren de k evaluaciones funcionales por iteración, $k = 2, 3, \dots$

4.3 Dinámica compleja de métodos iterativos

El estado de la convergencia y la estabilidad de un método se pueden interpretar de forma gráfica a partir de los planos dinámicos. En esta sección se muestran los planos dinámicos de los métodos presentados en la sección anterior. Algunos conceptos relacionados con la dinámica se recuerdan a continuación para facilitar la comprensión. En [8, 25] se presenta una revisión más exhaustiva de estos conceptos.

Sea $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional, donde $\hat{\mathbb{C}}$ es la esfera de Riemann. La **órbita de un punto** $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ se define como $\{z_0, R(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}$.

El comportamiento dinámico de la órbita de un punto en el plano complejo se puede clasificar en función de su comportamiento asintótico. De este modo, un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ es un **punto fijo** de R si $R(z_0) = z_0$. Un punto fijo es **atractor**, **repulsor** o **parabólico** si $|R'(z_0)|$ es menor, mayor o igual a 1, respectivamente. Además, si $R'(z_0) = 0$, el punto fijo es **superatractor**.

Sea z^* un punto fijo atractor de la función racional R . Su **cuenca de atracción** $\mathcal{A}(z^*)$ se define como el conjunto de preimágenes de cualquier orden tal que $\mathcal{A}(z^*) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow z^*, n \rightarrow \infty\}$. En nuestros cálculos hemos considerado la región del plano complejo $[-5, 5] \times [-5, 5]$, con 600×600 puntos, aplicando el método iterativo correspondiente con z_0 dentro de esta región. El criterio de parada se ha establecido en un máximo de 40 iteraciones para alcanzar un cero z^* del polinomio con una tolerancia $|z_n - z^*| < 10^{-3}$. Bajo estas condiciones se determina que z_0 pertenece a la cuenca de atracción de dicho cero y se representa con el color que se le ha asignado previamente a ese cero de la función. Sobre la misma cuenca de atracción, la cantidad de iteraciones requeridas para alcanzar la solución se representan con colores más claros, para pocas iteraciones, o más oscuros, para muchas iteraciones. El color negro se reserva para los puntos que no han convergido a ninguna de las raíces tras el número máximo de iteraciones o que han convergido al infinito.

El conjunto de puntos cuyas órbitas tienden a un punto fijo atractor z^* o a una órbita periódica atractora conforman el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(R)$. El conjunto

complementario es el conjunto de Julia $\mathcal{J}(R)$, consistente en el grupo de puntos fijos repulsivos, y establece los límites entre las cuencas de atracción.

Al asociar la función racional R al operador de punto fijo de los métodos desarrollados en la Sección 4.2 cuando se aplican sobre un polinomio $f(z)$, denotado genéricamente como $O_f(z)$, es posible identificar sus puntos fijos y críticos. Los puntos fijos z^F satisfacen $O_f(z) = z$, mientras que los puntos críticos cumplen $O'_f(z) = 0$. Las expresiones

$$S_f(z) = z - \frac{[f(z)]^2}{f(v) - f(z)},$$

$$F_f(z) = y - \frac{f(y)f[z, v]}{f[z, y]f[y, v]}, \quad (4.6)$$

$$E_f(z) = u - \frac{f(u)f[z, y, v]}{f[y, v, u]f[u, z, y](u - z) + f[z, y, v]f[y, u]}, \quad (4.7)$$

$$X_f(z) = w - \frac{f(w)}{f[z, w] + (z - w)\{c_5 f[z, w] - c_3 - c_4(z - w)\}}, \quad (4.8)$$

donde $v = z + f(z)$, $y = S_f(z)$, $u = F_f(z)$ y $w = E_f(z)$, son los operadores de punto fijo de los métodos de Steffensen, M4, M8 y M16, respectivamente.

Desde el punto de vista dinámico, las clases de conjugación juegan un papel relevante en el análisis del comportamiento de las funciones en el siguiente sentido. Consideremos una aplicación $z \rightarrow M_f(z)$, siendo M_f cualquier aplicación dedicada a la búsqueda de raíces. Como una conjugación preserva los puntos fijos y periódicos, así como sus cuencas de atracción, la información dinámica que concierne a f se mantiene respecto a la correspondiente a M_f . Para polinomios f de grado mayor o igual a k resulta interesante construir familias parametrizadas de polinomios f_μ tan simples como sea posible, de forma que exista una conjugación entre M_{f_μ} y M_f .

Antes de acometer las conjugaciones afines de un método iterativo M_f es necesario recordar el Teorema del Escalado. Como los autores presentaron en [14], el método de Steffensen no satisface el Teorema del Escalado, hecho que se puede demostrar de forma análoga con los métodos M4, M8 y M16. Es por ello que los métodos iterativos desarrollados no tienen clases conjugadas y, por tanto, tenemos que estudiar su dinámica para casos particulares de los polinomios en lugar de estudiar un caso parametrizado que pueda ser extendido a todos los polinomios del mismo grado. El comportamiento dinámico de cada método se analiza sobre cuatro polinomios diferentes: $f_{2,\lambda}(z) = z^2 + \lambda$ y $f_{3,\lambda}(z) = z^3 + \lambda$, con $\lambda = \{1, i\}$.

A pesar de que el Teorema del Escalado no ayuda en este caso, los operadores de punto fijo satisfacen la propiedad de simetría $O_{f_\lambda}(\bar{z}) = \overline{O_{f_\lambda}(z)}$, $\forall \lambda, z \in \mathbb{C}$. De este modo, para polinomios con $\lambda \in \mathbb{R}$, los planos dinámicos son simétricos respecto del eje de abscisas, mientras que para $\lambda \in \mathbb{C}$ los planos dinámicos de $O_{f_\lambda}(z)$ tienen una reflexión vertical respecto a $O_{f_\lambda}(z)$. Por tanto, el estudio de la aplicación de los polinomios $f_{2,\lambda}(z)$ y $f_{3,\lambda}(z)$ con $\lambda \in \{1, i\}$ tiene implícito el estudio para $\lambda \in \{-1, -i\}$.

Los planos dinámicos de $S_f(z)$, $F_f(z)$, $E_f(z)$ y $X_f(z)$, cuando son aplicados sobre $f_{2,\{1,i\}}(z)$ y $f_{3,\{1,i\}}(z)$ se representan en la Figuras 4.1. Las cuencas de atracción se colorean en naranja y azul, para polinomios cuadráticos, y también en verde para polinomios cúbicos. Los puntos negros son aquellos que no convergen a ninguno de los puntos fijos atractores. Se puede observar que las cuencas de atracción se hacen más amplias conforme el orden de convergencia aumenta, obteniendo incluso convergencia rápida en puntos en los que se divergía en el esquema original. Este comportamiento está motivado en que el infinito es un punto atractor en el método de Steffensen, siendo repulsor en el método M4, como muestran los autores en [14]. De una forma similar se puede comprobar que el infinito es también repulsor para los métodos M8 y M16.

Como ilustra la Figura 4.1, salvo para el método de Steffensen, la complejidad de los planos dinámicos se suaviza conforme el orden de convergencia aumenta.

Los planos dinámicos del operador de punto fijo asociados al método de Newton $N_f(z)$, cuando son aplicados sobre los polinomios $f_{2,\lambda}(z) = z^2 + \lambda$ y $f_{3,\lambda}(z) = z^3 + \lambda$, con $\lambda = \{1, i\}$ se muestran en la Figura 4.2.

Si analizamos la evolución de M4 hasta M16 se puede observar cómo, para cada polinomio, los planos dinámicos se parecen cada vez más al de Newton.

4.4 Dimensión fractal de métodos iterativos

La dimensión fractal del conjunto de Julia supone una herramienta muy útil para analizar cuán parecidos son dos planos dinámicos. Habitualmente, la dimensión fractal se obtiene a partir del algoritmo de box-counting, basado en la dimensión de Hausdorff. Los fundamentos de este algoritmo se pueden encontrar en [57], y tratan de recubrir el conjunto de Julia por cajas cada vez más pequeñas para obtener la **dimensión fractal** \mathcal{F} a partir de

$$\mathcal{F} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log[N(\epsilon)]}{\log(\epsilon)},$$

donde ϵ es la longitud de las cajas y $N(\epsilon)$ es la cantidad de cajas que cubren el conjunto de Julia. Computacionalmente, el valor de \mathcal{F} se obtiene como la pendiente de la recta de regresión de $\log(\epsilon)$ respecto de $\log[N(\epsilon)]$.

La Tabla 4.1 recoge la dimensión fractal de los operadores (4.6), (4.7), (4.8) y $N_f(z)$ al ser aplicados sobre los polinomios que se muestran en la fila superior. La comparativa de cada método con respecto a Newton se representa como un porcentaje de su dimensión fractal en las filas inferiores.

Método		$f_{2,1}(z)$	$f_{2_i}(z)$	$f_{3,1}(z)$	$f_{3,i}(z)$
$F_f(z)$	\mathcal{F}	1.7146	1.6034	1.7039	1.6314
	PC[%]	58.32	66.73	81.30	84.91
$E_f(z)$	\mathcal{F}	1.4477	1.1937	1.6616	1.5928
	PC[%]	69.08	89.64	83.37	86.97
$X_f(z)$	\mathcal{F}	1.3610	1.3790	1.5808	1.5363
	PC[%]	73.48	77.59	87.63	90.17
$N_f(z)$	\mathcal{F}	1.0000	1.0700	1.3863	1.3854
	PC[%]	100.00	100.00	100.00	100.00

Tabla 4.1: Dimensión fractal (\mathcal{F}) y porcentaje (PC) del método de Newton respecto de los métodos M4, M8 y M16.

Gráficamente se aprecia que el plano dinámico de los métodos aplicados sobre los polinomios tiende al plano dinámico de Newton conforme aumentamos el orden del método. Por ejemplo, se puede observar en las Figuras 4.1m-4.1p cómo las diferentes imágenes se van aproximando a la Figura 4.2d. Asimismo, el conjunto de Julia tiene menor complejidad a medida que el orden de convergencia aumenta. Bajo un punto de vista numérico, a partir de la dimensión fractal de cada método se puede apreciar cómo los porcentajes son cada vez más próximos al 100% conforme aumentamos el orden del método.

Existen varios estudios al respecto de la dimensión fractal del plano dinámico del método de Newton. Por ejemplo, en [38] la dimensión fractal de $N_{f_{3,\lambda}}(z)$, con $\lambda = -1$ es $\mathcal{F} = 1.44692$ en el cuadrado $[-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$, mientras que en nuestros cálculos particularizados para dicha región se obtiene un valor de $\mathcal{F} = 1.4055$. Otro ejemplo que se puede encontrar en [30] determina en el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ una dimensión fractal de $\mathcal{F} \approx 1.42$, mientras que con nuestra implementación del algoritmo sobre esa región obtenemos $\mathcal{F} = 1.4242$. El valor exacto depende de los detalles del desarrollo del algoritmo, así como la finura

del conjunto de Julia o la secuencia de longitudes ϵ de las cajas. Reseñar que nuestro objetivo es la comparativa de los métodos, de forma que resulta suficiente la obtención de la dimensión fractal utilizando siempre el mismo algoritmo.

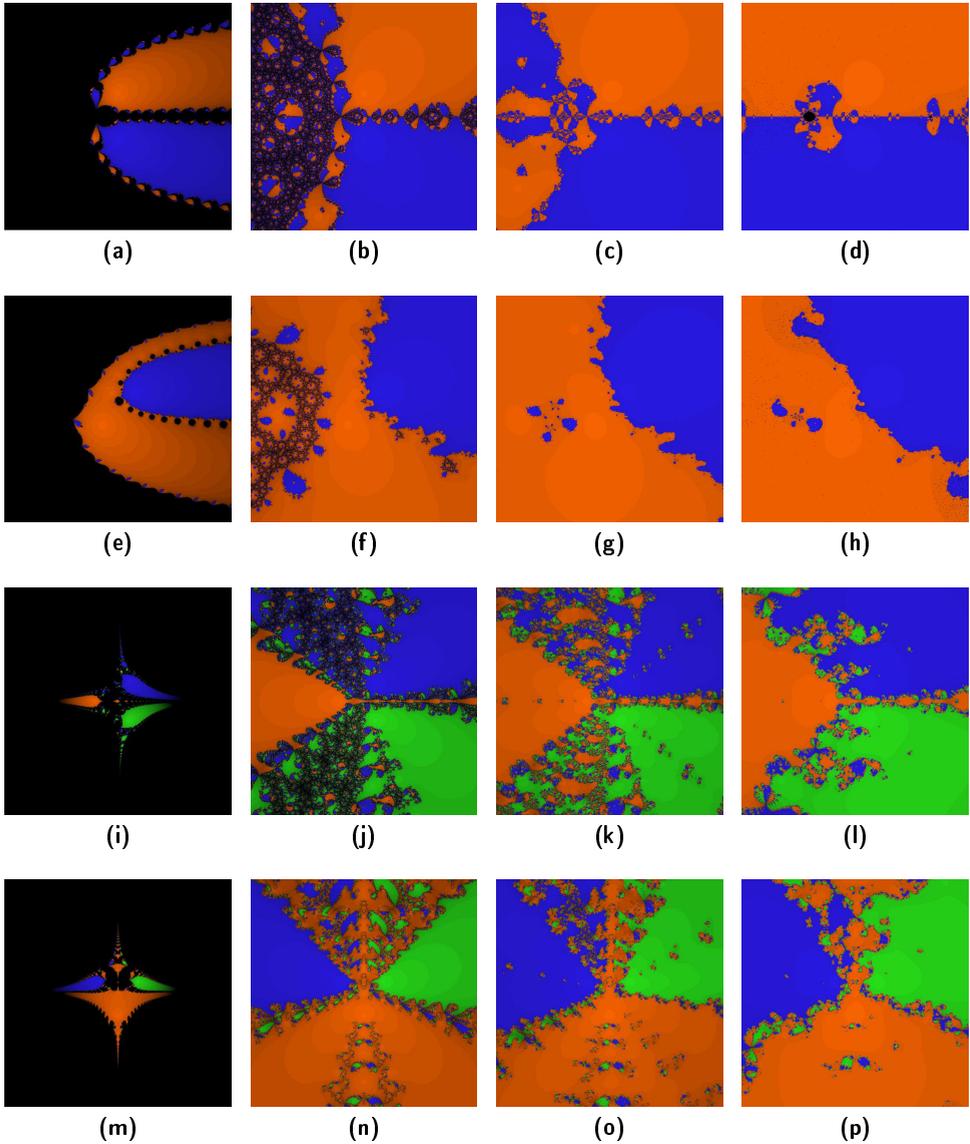


Figura 4.1: Planos dinámicos de los métodos iterativos: **(a)** $S_{f_{2,1}}(z)$, **(b)** $F_{f_{2,1}}(z)$, **(c)** $E_{f_{2,1}}(z)$, **(d)** $X_{f_{2,1}}(z)$; **(e)** $S_{f_{2,i}}(z)$, **(f)** $F_{f_{2,i}}(z)$, **(g)** $E_{f_{2,i}}(z)$, **(h)** $X_{f_{2,i}}(z)$; **(i)** $S_{f_{3,1}}(z)$, **(j)** $F_{f_{3,1}}(z)$, **(k)** $E_{f_{3,1}}(z)$, **(l)** $X_{f_{3,1}}(z)$; **(m)** $S_{f_{3,i}}(z)$, **(n)** $F_{f_{3,i}}(z)$, **(ñ)** $E_{f_{3,i}}(z)$, **(o)** $X_{f_{3,i}}(z)$.

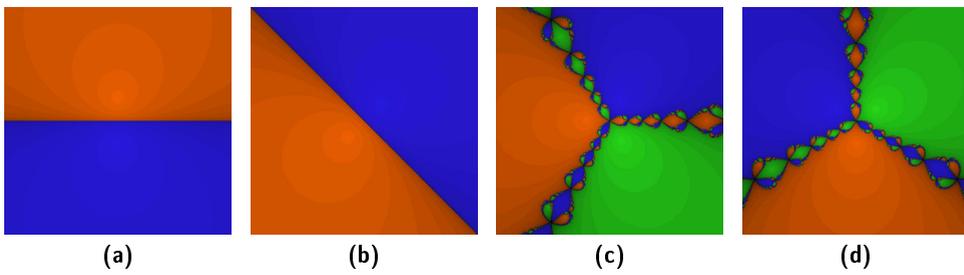


Figura 4.2: Planos dinámicos del método de Newton sobre $f_{2,\lambda}(z) = z^2 + \lambda$ y $f_{3,\lambda}(z) = z^3 + \lambda$, con $\lambda \in \{1, i\}$. **(a)** $N_{f_{2,1}}(z)$, **(b)** $N_{f_{2,i}}(z)$, **(c)** $N_{f_{3,1}}(z)$, **(d)** $N_{f_{3,i}}(z)$

Convergencia local y análisis dinámico de una nueva familia de métodos óptimos de orden 4

Basado en [3]: "Local convergence and dynamical analysis of a new family of optimal fourth-order iterative methods," International Journal of Computer Mathematics.

En el Capítulo 5 se va a analizar la convergencia local del método iterativo de King. Demostraremos que el orden de convergencia de esta familia de métodos es cuatro. Con dos particularizaciones diferentes de este método, obtendremos dos esquemas iterativos que incluyen derivadas de forma que, al satisfacer el Teorema del Escalado, se reducirán los posibles casos sobre los que trabajar. Representaremos los planos de parámetros y dinámicos de cada uno de los esquemas, analizando la convergencia y la estabilidad en ambos casos.

Resumen

En este artículo se propone una nueva familia de métodos iterativos de cuarto orden para resolver ecuaciones no lineales. La familia clásica de King de cuarto orden se obtiene como un caso particular. Asimismo se presentan resultados de la descripción de las clases de conjugación y la dinámica de algunos de los métodos aplicados sobre polinomios complejos de distintos grados.

5.1 Introducción

En este artículo consideramos métodos iterativos y su dinámica para encontrar una raíz simple α de una ecuación no lineal $f(x) = 0$. El método de Newton [61] es el más conocido para la resolución de ecuaciones no lineales, dado por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (5.1)$$

que converge cuadráticamente bajo determinadas condiciones.

Para la mejora del orden de convergencia local, diversos métodos se han propuesto en la literatura. El método basado en Newton (5.1) de derivada congelada [61]

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \quad (5.2)$$

en el que y_n es la iteración de Newton, tiene orden de convergencia tres. Este método requiere de tres evaluaciones funcionales por iteración, de forma que no se trata de un método óptimo. Consideramos método óptimo un método multipunto sin memoria que requiera d evaluaciones funcionales por iteración y alcance el orden de convergencia 2^{d-1} , como establece la conjetura de Kung-Traub [46].

En este artículo presentamos una familia de métodos iterativos óptimos de cuarto orden utilizando en (5.2) la técnica de funciones peso. Diferentes aplicaciones de esta técnica se pueden encontrar en [5] y [63], en las que alguna versión de funciones peso han sido utilizadas.

El estudio dinámico de la función racional asociada a un método iterativo aporta una información importante acerca de la convergencia y la estabilidad del sistema. El método iterativo con mejores prestaciones bajo un punto de vista dinámico es de nuevo el esquema de Newton (ver, por ejemplo, [7]). La dinámica de los métodos iterativos de König [29], los métodos de Cauchy y Halley [45] y una cantidad nada despreciable de métodos de búsqueda de raíces, incluyendo los métodos de Jarrat y King [2] ha sido estudiado en profundidad.

Presentamos resultados que describen las clases conjugadas y la dinámica de métodos óptimos de cuarto orden aplicados a polinomios complejos. Uno de los métodos mostrados no es globalmente convergente para polinomios cúbicos, como trataremos a continuación.

Las cuencas de atracción de los elementos de nuestra familia serán mostradas y, para ello, recuperamos algunos conceptos de dinámica compleja.

Sea R una aplicación racional tal que $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, siendo $\hat{\mathbb{C}}$ la esfera de Riemann, la **órbita de un punto** $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ se define como:

$$\{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}.$$

Nuestro interés reside en el estudio del comportamiento asintótico de las órbitas en función de la condición inicial z_0 , de forma que vamos a analizar el plano dinámico de la aplicación R definida por los diferentes métodos iterativos.

Para la obtención de los planos dinámicos, resulta imprescindible clasificar los puntos iniciales o semillas en función del comportamiento asintótico de sus órbitas. De este modo, a un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ se le denomina

- **punto fijo**, si $R(z_0) = z_0$;
- **punto periódico** de período $T > 1$, si $R^T(z_0) = z_0$ y $R^k(z_0) \neq z_0$, $k < T$;
- **punto pre-periódico**, si no se trata de un punto periódico pero existe un $k > 0$ tal que $R^k(z_0)$ es periódico;
- **punto crítico**, si $R'(z_0) = 0$.

Por otro lado, los puntos fijos se clasifican en

- **atractores**, si $|R'(z_0)| < 1$, siendo **superatractores** para el caso $R'(z_0) = 0$;
- **repulsores**, si $|R'(z_0)| > 1$; o
- **parabólicos**, si $|R'(z_0)| = 1$.

La magnitud (menor que la unidad o no) de $|R'(z_1) \cdots R'(z_T)|$ determina la estabilidad de la órbita periódica, siendo $\{z_1, \dots, z_T\}$ los puntos de la órbita de período T .

La **cuenca de atracción** de un punto fijo atractor z^* se define como el conjunto de preimágenes de cualquier orden

$$\mathcal{A}(z^*) = \left\{ z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow z^*, n \rightarrow \infty \right\}.$$

El conjunto de Fatou está compuesto por el conjunto de puntos cuyas órbitas tienden a un atractor (punto fijo, órbita periódica o infinito). Su conjunto complementario en $\hat{\mathbb{C}}$ es el conjunto de Julia, $\mathcal{J}(R)$. Este conjunto incluye todos los puntos repulsores, órbitas periódicas y sus preimágenes. De este modo, la cuenca de atracción de cualquier punto fijo pertenece al conjunto de Fatou, mientras que las fronteras de estas cuencas son parte del conjunto de Julia.

Uno de los objetivos es el análisis del comportamiento dinámico de los métodos iterativos sobre polinomios, así que requeriremos del uso de determinados resultados que recogemos a continuación. En [27] se muestra un Teorema del Escalado en el que las raíces de un polinomio se pueden transformar a través de una aplicación afín sin modificaciones cualitativas en la dinámica del esquema de Newton, dando lugar al uso, entre otros, del polinomio cuadrático $f_{2,\lambda} = z^2 + \lambda$. Por otro lado, considerando la aplicación conjugada de [7]

$$h(z) = \frac{z - i\sqrt{\lambda}}{z + i\sqrt{\lambda}},$$

con las siguientes características

$$\text{i) } h(\infty) = 1, \quad \text{ii) } h(i\sqrt{\lambda}) = 0, \quad \text{iii) } h(-i\sqrt{\lambda}) = \infty,$$

se demuestra que, para polinomios cuadráticos, el operador de Newton siempre es conjugado a la aplicación racional z^2 . Utilizaremos este resultado en el apartado del análisis dinámico para extraer conclusiones acerca de los métodos propuestos.

Respecto al resto del artículo, en la Sección 5.2 se muestra la familia de esquemas iterativos de cuarto orden y se demuestra su convergencia local. En la Sección 5.3 se analiza la dinámica de algunos de los elementos de la familia presentada. El hecho de que uno de los métodos no sea globalmente convergente para los polinomios también es analizado a partir de la construcción de un polinomio específico tal que la aplicación racional resultante de la aplicación de nuestro método al polinomio tenga una órbita periódica atractor de período dos. Asimismo, analizaremos el comportamiento asintótico de un grupo de métodos incluidos en la familia a partir de su plano de parámetros. Finalmente, el artículo presenta algunas notas y conclusiones.

5.2 Los métodos y el análisis de la convergencia

Basado en (5.2), consideramos el siguiente esquema de iteración en dos pasos utilizando la técnica de funciones peso:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \beta \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - H(\mu(x_n)) \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde β es un parámetro libre y $H(t)$ representa una función de variable $\mu(x) = \frac{f(y)}{b_1 f(x) + b_2 f(y)}$, siendo b_1, b_2 parámetros por determinar.

Se observa que, sin añadir más evaluaciones funcionales, el orden de convergencia aumenta a cuatro. En el siguiente teorema demostramos que el método definido por (5.3) es de orden 4 bajo determinadas condiciones sobre H .

Teorema 5.2.1 *Sea $\alpha \in I$ una raíz de una función suficientemente diferenciable $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un intervalo abierto I . Sea H una función que cumple $H(0) = 1$, $H'(0) = 2b_1$ y $|H''(0)| < \infty$, y sea $\beta = 1$. Entonces, los métodos definidos por (5.3), con $b_1 \neq 0$ y b_2 parámetros reales arbitrarios tienen orden de convergencia cuatro, y su ecuación del error es*

$$e_{n+1} = \frac{(10b_1^2 + 4b_1b_2 - H''(0))c_2^3 - 2b_1^2c_2c_3}{2b_1^2} e_n^4 + O(e_n^5),$$

donde $c_k = (1/k!) \frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k \geq 2$ y $e_n = x_n - \alpha$.

Demostración 5.2.1 *Utilizando el desarrollo de Taylor,*

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + f''(\alpha)c_2e_n^2 + f'''(\alpha)c_3e_n^3 + f^{(4)}(\alpha)c_4e_n^4 + O(e_n^5) \quad (5.4)$$

y

$$f'(x_n) = f'(\alpha) + 2f''(\alpha)c_2e_n + 3f'''(\alpha)c_3e_n^2 + 4f^{(4)}(\alpha)c_4e_n^3 + O(e_n^4). \quad (5.5)$$

De (5.4), (5.5) y el primer paso del esquema (5.3), obtenemos

$$\begin{aligned} y_n - \alpha &= (1 - \beta)e_n + \beta c_2 e_n^2 - 2\beta(c_2^2 - c_3)e_n^3 + \\ &\quad + \beta(4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5). \end{aligned}$$

Desarrollando $f(y_n)$ entorno a α , se obtiene

$$\begin{aligned} f(y_n) = f'(\alpha) \{ & (1 - \beta)e_n + (1 - \beta + \beta^2) c_2 e_n^2 + \\ & + [-2\beta^2 c_2^2 - (-1 + \beta - 3\beta^2 + \beta^3) c_3] e_n^3 + \\ & + [5\beta^2 c_2^3 + \beta^2(-10 + 3\beta)c_2 c_3 + (1 - \beta + 6\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4) c_4] e_n^4 \} + \\ & + O(e_n^5). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Reemplazando (5.4) y (5.6) en $\mu(x_n) = \frac{f(y_n)}{b_1 f(x_n) + b_2 f(y_n)}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mu(x_n) = & \frac{1 - \beta}{N} + \frac{\beta^2 b_1}{N^2} c_2 e_n - \\ & - \frac{\beta^2 b_1}{N^3} [(3b_1 + (3 - 3\beta + \beta^2) b_2) c_2^2 + (-3 + \beta) N c_3] e_n^2 + \\ & + \frac{\beta^2 b_1}{N^4} \{ c_2^3 [8b_1^2 + 2b_1 b_2 (3\beta^2 - 8\beta + 8) + b_2^2 (\beta^4 - 6\beta^3 + 14\beta^2 - 16\beta + 8)] + \\ & + 2c_2 c_3 [b_1^2 (2\beta - 7) + b_1 b_2 (\beta^3 - 7\beta^2 + 18\beta - 14) + \\ & b_2^2 (-\beta^4 + 6\beta^3 - 14\beta^2 + 16\beta - 7)] + N^2 c_4 (6 - 4\beta + \beta^2) \} e_n^3 + O(e_n^4), \end{aligned}$$

donde $N = b_1 + b_2 - \beta b_2$.

Teniendo en cuenta que $\mu(x_n)$ tiende a cero conforme x_n tiende a α , desarrollamos $H(\mu(x_n))$ alrededor de cero.

$$H(\mu(x_n)) = H(0) + H'(0)\mu(x_n) + \frac{H''(0)}{2}\mu(x_n)^2 + \frac{H'''(0)}{6}\mu(x_n)^3. \quad (5.7)$$

Por tanto, a partir de (5.5), (5.6) y (5.7), tenemos

$$\begin{aligned} e_{n+1} = y_n - \alpha - H(\mu(x_n)) \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} = \\ - \gamma(1 - K_1)e_n + \frac{c_2}{2} [2\beta + \gamma\beta^2 K_2 - 2K_1(\gamma + \beta^2)] e_n^2 + \\ + \left\{ -\frac{K_2}{2}\beta^2 c_2^2 (\gamma + \beta^2) + 2\beta(-c_2^2 + c_3) + \right. \\ \left. + (\beta + 1)K_1 [(4\beta - 2)c_2^2 + (\beta^2 - 4\beta + 2)c_3] + \frac{M}{2N^5} \right\} e_n^3 + O(e_n^4), \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \gamma &= -1 + \beta, \\ K_1 &= H(0) - \frac{3\gamma N(2b_1 H'(0) - \gamma(2b_2 H'(0) + H''(0))) + \gamma^3 H'''(0)}{6N^3}, \\ K_2 &= \frac{b_1(2N(b_1 H'(0) - \gamma(b_2 H'(0) + H''(0))) + \gamma^2 H'''(0))}{N^4}, \\ M &= \beta^2 b_1 \gamma \{ H'(0) [-6b_1^3 c_2^2 - b_1^2 b_2 c_2^2 (\beta^2 - 9\gamma) - 2b_2^3 c_2^2 (\beta^2 - 3\gamma) + \\ &\quad + 2b_1 b_2^3 c_2^2 (2\beta^2 - 9\beta + 9) + 2N^2 c_3 (\beta - 3)(\gamma b_2 - b_1)] + \\ &\quad + H''(0) [b_1^2 c_2^2 (\beta^2 + 6\beta - 6) - 2\gamma^2 b_2^2 c_2^2 (\beta^2 - 3\gamma) + \\ &\quad + \gamma b_1 b_2 c_2^2 (\beta^2 - 12\gamma) + 2N^2 \gamma c_3 (\beta - 3)] - \\ &\quad - H'''(0) [\gamma^2 c_2^2 (\beta^2 - 3\gamma)(b_1 + b_2) + N\gamma^2 c_3 (\beta - 3)] \}. \end{aligned}$$

Por último, tomamos $H(0) = 1$, $H'(0) = 2b_1$, $|H''(0)| < \infty$, y $\beta = 1$, de forma que la ecuación del error verifica

$$e_{n+1} = \frac{(10b_1^2 + 4b_1 b_2 - H''(0)) c_2^3 - 2b_1^2 c_2 c_3}{2b_1^2} e_n^4 + O(e_n^5).$$

■

Todos los miembros de la familia tienen orden cuatro y son óptimos, ya que requieren tres evaluaciones de la función por paso. Observamos que la familia (5.3) incluye métodos ampliamente conocidos. Por ejemplo, para $H(t) = \frac{1}{1-t/2}$, $b_1 = \frac{1}{4}$ y $b_2 = 0$, estamos ante el método de Ostrowski, cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned}$$

Si tomamos $H(t) = 1 + 2t$, $b_1 = 1$ y b_2 arbitrariamente, nos encontramos con la familia de King [44]:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(x_n) + (2 + b_2)f(y_n)}{f(x_n) + b_2 f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned}$$

Además, se pueden obtener nuevos métodos óptimos de orden cuatro utilizando diferentes funciones $H(t)$ y valores de los parámetros b_1 y b_2 .

Ejemplo 5.2.1 Tomando $H(t) = 1 + t$, $b_1 = 1/2$ y $b_2 = 0$ obtenemos el esquema iterativo

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)^2 + f(x_n)f(y_n) + 2f(y_n)^2}{f(x_n)f'(x_n)}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

que denotaremos por $M1$.

Ejemplo 5.2.2 Utilizando la función $H(t) = \frac{4}{4-2t-t^2}$, $b_1 = 1/4$ y $b_2 = 1/4$ se obtiene un nuevo método.

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{(f(x_n) + f(y_n))^2}{f(x_n)^2 - 5f(y_n)^2} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned}$$

denotado por $M2$.

Es posible generar una familia paramétrica de cuarto orden que incluya a $M2$, fijando el valor de $b_1 = 1/4$ y $b_2 = \eta$ arbitrario. La expresión iterativa de esta familia es

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{[f(x_n) + 4\eta f(y_n)]^2}{f(x_n)^2 + (8\eta - 2)f(x_n)f(y_n) + (16\eta^2 - 8\eta - 4)f(y_n)^2} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.3 Análisis dinámico

Se ha demostrado en la sección previa que la elección de diferentes valores para los parámetros b_1 y b_2 dan lugar a distintos métodos iterativos. En esta sección presentaremos el efecto que tiene dicha elección sobre el comportamiento dinámico de los esquemas resultantes, al menos para polinomios de bajo grado.

5.3.1 Análisis del método M1

Sea $R_f(z)$ la función racional resultante de aplicar el método M1 sobre f :

$$R_f(z) = z - \frac{f(z)^2 + f(z)f'(z) + 2f'(z)^2}{f(z)f''(z)},$$

donde $y = z - f(z)/f'(z)$. A continuación, demostraremos que el Teorema del Escalado para el método M1 se puede extender, de forma análoga, al resto de los sistemas presentados.

Teorema 5.3.1 *Sea f una función analítica en la esfera de Riemann, y $A(z) = az + b$, con $a \neq 0$ una aplicación afín. Si $g(z) = (f \circ A)(z)$, entonces el operador de punto fijo R_f es conjugado analíticamente a R_g a través de A , es decir, $(A \circ R_g \circ A^{-1})(z) = R_f(z)$.*

Demostración 5.3.1 *A partir de la función iterativa $R(z)$, se tiene que*

$$\begin{aligned} R_g(A^{-1}(z)) &= A^{-1}(z) - \\ &\quad - \frac{g(A^{-1}(z))^2 + g(A^{-1}(z))g'(A^{-1}(z)) + \frac{g(A^{-1}(z))g''(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))}}{g(A^{-1}(z))g''(A^{-1}(z))} \\ &\quad - \frac{2g'(A^{-1}(z)) \left(A^{-1}(z) - \frac{g(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))} \right)^2}{g(A^{-1}(z))g''(A^{-1}(z))}. \end{aligned}$$

Como

$$(g \circ A^{-1})(z) = f(z) \rightarrow (g \circ A^{-1})'(z) = \frac{1}{a}g'(A^{-1}(z))$$

se cumple que $g'(A^{-1}(z)) = a(g \circ A^{-1})'(z) = af'(z)$ y $g''(A^{-1}(z)) = a^2f''(z)$. Entonces,

$$\begin{aligned} R_g(A^{-1}(z)) &= A^{-1}(z) - \\ &\quad - \frac{f(z)^2 + f(z)af'(z) + \frac{f(z)a^2f''(z)}{af'(z)}}{af(z)f''(z)}. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
 R_f(z) &= A(R_g(A^{-1}(z))) = aR_g(A^{-1}(z)) + b = \\
 &= aA^{-1}(z) - \\
 &\quad - \frac{f(z)^2 + f(z)g\left(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}\right) + 2g\left(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}\right)^2}{f(z)f'(z)} + b = \\
 &= z - \frac{f(z)^2 + f(z)g\left(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}\right) + 2g\left(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}\right)^2}{f(z)f'(z)}.
 \end{aligned}$$

Si $g\left(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}\right) = f\left(z - \frac{f(z)}{f'(z)}\right)$ la demostración está finalizada, dado que

$$\begin{aligned}
 g\left(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}\right) &= g(A^{-1}(z)) - g'(A^{-1}(z))\frac{f(z)}{af'(z)} + \\
 &\quad + g''(A^{-1}(z))\frac{f(z)^2}{2a^2f'(z)^2} - g'''(A^{-1}(z))\frac{f(z)^3}{6a^3f'(z)^3} + \dots \\
 &= f''(z)\frac{f(z)^2}{2f'(z)^2} - f'''(z)\frac{f(z)^3}{6f'(z)^3} + \dots \\
 &= f\left(z - \frac{f(z)}{f'(z)}\right).
 \end{aligned}$$

■

Como se indicó en la introducción, el cumplimiento del Teorema del Escalado implica un análisis más sencillo, puesto que con el estudio de polinomios simples, como $f_{2,\lambda}(z) = z^2 - \lambda$, el resultado se puede extender a cualquier polinomio cuadrático.

Proposición 5.3.1 Sea $q(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ un polinomio complejo, con $a_2 \neq 0$, y $f(z) = z^2 - \lambda$. Entonces hay una conjugación analítica entre R_q y R_f .

A continuación estudiamos la dinámica de la aplicación racional R_f correspondiente al esquema M1.

$$R_f(z) = z - \frac{f(z)^2 + f(z)f(y) + 2f(y)^2}{f(z)f'(z)},$$

donde $y = z - f(z)/f'(z)$, aplicado sobre un polinomio genérico con raíces simples.

Las raíces de f , como ocurre para la mayoría de métodos iterativos de búsqueda de raíces, son puntos superatractores de f . Los puntos críticos que no son superatractores se denominan **puntos críticos libres**. Estos puntos adquieren especial importancia como se deduce del siguiente resultado.

Teorema 5.3.2 *Fatou-Julia* *Sea R una función racional. Entonces, la cuenca de atracción inmediata de cada punto atractor contiene al menos un punto crítico.*

Como consecuencia directa de este teorema, resulta esencial detectar la existencia de ciclos atractores periódicos, puesto que en ese caso existe al menos un punto crítico próximo al ciclo, y los iterados de R^T que comienzan en el punto crítico convergen a ese ciclo y no a la raíz. Para detectar la existencia de ciclos periódicos atractores, las órbitas de los puntos críticos libres de R^T deben ser observadas y el conjunto de puntos límites tiene que ser determinado.

Los únicos puntos fijos atractores de $R^T(z)$ son las raíces del polinomio, que a su vez son puntos críticos, de forma que $[R^T]'(z) = \frac{5(z^2 - \lambda)^3}{16z^6}$. Al igual que sucede en el método de Newton, dichas raíces son también puntos críticos (de hecho, son los únicos puntos críticos), por lo que se trata de puntos fijos superatractores. Además, hay cuatro puntos fijos extraños,

$$z^F = \pm \sqrt{\frac{\lambda(7 \pm i4\sqrt{2})}{27}},$$

que son repulsores, de forma que caen en el conjunto de Julia.

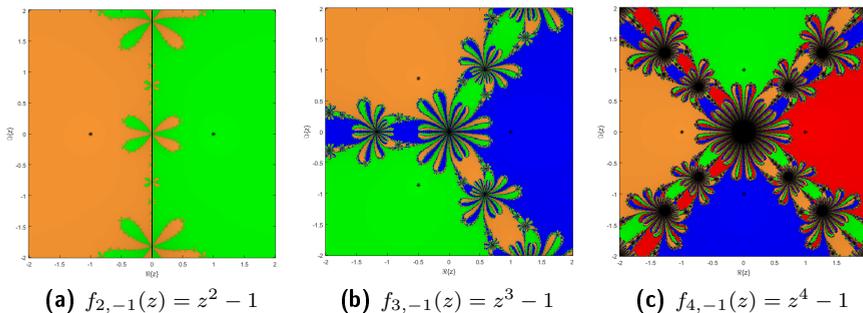


Figura 5.1: Plano dinámico de M1 sobre diferentes polinomios

De forma similar a lo que ocurre en el método de Newton, el conjunto de Fatou comprende las cuencas de atracción de las dos raíces del polinomio, lo que implica que M1 nunca falla sobre polinomios cuadráticos cuando se aplica sobre un conjunto abierto del plano complejo. El plano dinámico de este operador es similar al de Newton, aunque presenta mayor complejidad, como se puede observar en la Figura 5.1a para $\lambda = 1$.

Las Figuras 5.1b y 5.1c, basadas en polinomios de mayor orden, presentan cantidad de preimágenes del infinito en forma de flores. Si se utilizara un mayor número de iteraciones (el límite de iteraciones se ha establecido en 80), la región negra del centro de cada flor disminuiría y los pétalos serían más estrechos en la zona central.

En cuanto al comportamiento del método M1 sobre polinomios cúbicos o de mayor grado, los puntos fijos son las raíces del polinomio de grado mayor o igual 15, dependientes del parámetro λ . Aunque no se puede concluir nada al respecto debido al alto grado, algunas conclusiones parciales se pueden obtener, tales como la existencia de determinados polinomios cuya dinámica incluye órbitas periódicas. Para el caso mostrado en la Figura 5.1b, existen 12 puntos fijos extraños que son repulsores y los puntos críticos son

$$z^C = \left\{ \sqrt[3]{\frac{-185 \pm 3\sqrt{337}}{1114}}, -\sqrt[3]{\frac{185 \pm 3\sqrt{337}}{1114}} \right\},$$

que pertenecen a la cuenca de atracción de las raíces de la unidad.

Con la vista puesta en la obtención de un comportamiento periódico, Chun et al. presentan una técnica en [16] que permite establecer el siguiente resultado. Para el método M1 construimos un polinomio específico $f(z)$ tal que la aplicación racional R_f aplicada sobre el polinomio tiene una órbita periódica atractora de periodo 2 en $z = 1$.

Proposición 5.3.2 *El esquema (5.8) no es globalmente convergente para polinomios cúbicos, ya que presenta una órbita periódica de período 2 para $f(z) = z^3 - 3.13638z^2 + 1.73725z + 1.49038$.*

Para encontrar los valores anteriores de los coeficientes de $f(z)$ se ha resuelto un sistema de ecuaciones compuesto por las condiciones $R^T(1) = 2$, $R^T(2) = 1$ y $[R^T]'(1) = 0$. Se trata del único polinomio real solución del sistema, pero existen numerosas soluciones complejas que lo cumplen. En la Figura 5.2 esta órbita periódica (marcada en amarillo) se puede visualizar, junto con los agujeros negros en la cuenca de atracción de la órbita y sus preimágenes.

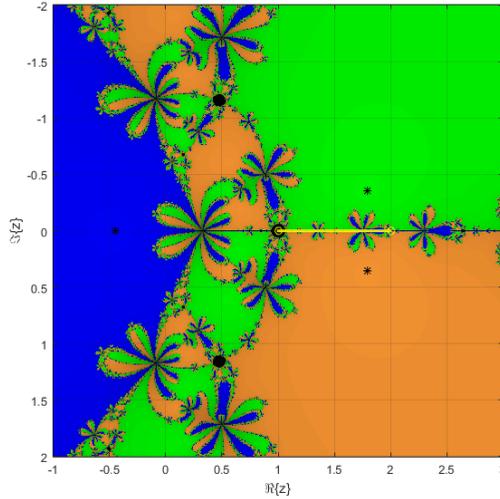


Figura 5.2: Plano dinámico del método M1 con una órbita periódica

5.3.2 Análisis de la familia M2

Al realizar un estudio similar sobre M2, cuya función racional asociada es

$$S_f(z) = y - \frac{[f(z) + f(y)]^2 f(y)}{f(z)^2 - 5f(y)^2 f'(z)},$$

se observa que, para polinomios cuadráticos, se pueden encontrar seis puntos fijos diferentes de las raíces del sistema,

$$z^F = \left\{ \pm i \sqrt{\frac{\lambda}{3}}, \pm \sqrt{\frac{\lambda(3 \pm 4\sqrt{2})}{23}} \right\}$$

de carácter repulsivo. Los puntos críticos libres son

$$z^C = \left\{ \pm \sqrt{\frac{3\lambda}{11}}, \pm \sqrt{\frac{\lambda(15 + 8\sqrt{5})}{19}} \right\}.$$

Además, el comportamiento de los puntos críticos es estable en el sentido de que sus órbitas permanecen en su cuenca de atracción original (o en Julia). Los planos dinámicos para polinomios de bajo grado se ilustran en la Figura 5.3 para las raíces de la unidad.

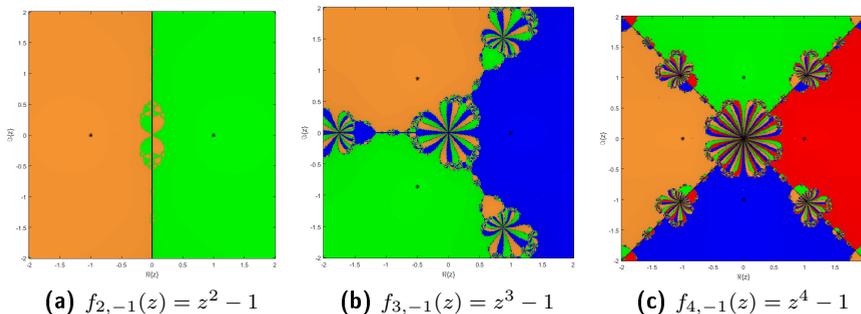


Figura 5.3: Planos dinámicos del método M2 sobre diferentes polinomios

En las Figuras 5.3b y 5.3c se observa el comportamiento dinámico del método M2 para polinomios de grados tres y cuatro, respectivamente. Nótese que parece tener mayor estabilidad que el método M1 dado que las preimágenes del infinito (regiones negras en el centro de las flores) son más estrechas. Así pues, el análisis dinámico de los métodos supone una herramienta interesante para determinar qué miembros de una familia se comportan mejor. Bajo esta premisa, recuperamos la función de iteración de la familia que contiene a M2 (5.9) dependiente del parámetro η .

En aras de analizar la estabilidad de dichos métodos sobre polinomios cuadráticos se utiliza la aplicación de conjugación de Blanchard (ver [7]).

Como se señaló en la introducción, se trata de una aplicación de Möbius tal que

$$O_p(z) = (h \circ S_p \circ h^{-1})(z) = \frac{N(z)}{D(z)},$$

donde

$$N(z) = z^4 [16\eta^2 z(2+z) + 4\eta(1+z)^2(3+2z) + (1+z)^2(-3+2z+z^2)],$$

$$D(z) = 1 + (4+8\eta)z + 2(1+14\eta+8\eta^2)z^2 + 4(-1+8\eta+8\eta^2)z^3 + 3(-1+4\eta)z^4,$$

y $h(z) = \frac{z-a}{z-b}$ satisface $h(\infty) = 1$, $h(a) = 0$ y $h(b) = \infty$, es decir, las raíces del polinomio $(z-a)(z-b)$ se mapean al cero y al infinito, y el infinito se mapea sobre el círculo unidad.

Nótese que el único parámetro que aparece en el operador conjugado $O_p(z)$ es η y, por tanto, la estabilidad del sistema se puede analizar exclusivamente en términos de η . El cero y el infinito son puntos fijos superatractores, y $z = 1$ puede ser superatractor, atractor o repulsor, en función del valor de η . De hecho, es superatractor para $\eta = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$ y es atractor si η está entre los puntos de la región

roja de la Figura 5.4, en la que se representa en diferentes colores los puntos en los que el valor absoluto de la derivada del operador en el plano complejo es menor o mayor que la unidad. En caso contrario, $z = 1$ es repulsor o parabólico. Los valores de η en los que $z = 1$ es superatractor se ilustran con estrellas negras.

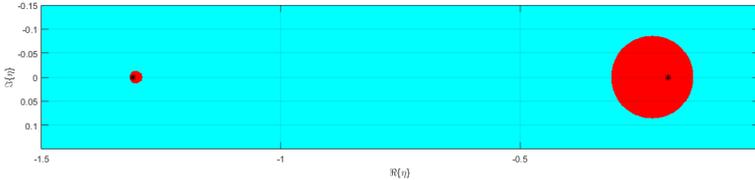


Figura 5.4: Estabilidad de $O'_p(1)$ en función de η

La estabilidad del punto fijo extraño $z = 1$ se resume en el siguiente resultado.

Proposición 5.3.3 *La familia (5.9) tiene un punto fijo extraño en $z = 1$, cuyo carácter es:*

- a) *superatractor, si $\eta = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$*
- b) *atractor, si $\left[\frac{48 + 84\Re(\eta) + 55\Re(\eta)^2 + 55\Im(\eta)^2}{2} \right]^2 < 521 + 1356\Re(\eta) + 884\Re(\eta)^2$, donde $\Re(\eta) \in \left(\frac{-8 - \sqrt{42}}{11}, \frac{-4 - \sqrt{6}}{5} \right) \cup \left(\frac{-4 + \sqrt{6}}{5}, \frac{-8 + \sqrt{42}}{11} \right)$,*
- c) *parabólico, si $\left[\frac{48 + 84\Re(\eta) + 55\Re(\eta)^2 + 55\Im(\eta)^2}{2} \right]^2 = 521 + 1356\Re(\eta) + 884\Re(\eta)^2$*

En cualquier otro caso, es un repulsor y pertenece al conjunto de Julia.

Asimismo, se puede demostrar que $z = -1$ es un punto crítico libre, generando una información esencial al respecto del comportamiento de los miembros de la familia en función del parámetro. Cabe reseñar que se trata de una información parcial, ya que el resto de los puntos críticos libres no han sido encontrados.

El análisis del comportamiento de estos puntos críticos libres da lugar al plano de parámetros de la Figura 5.5, en la que el color morado corresponde a los valores de η tales que la órbita del correspondiente método iterativo sobre el punto crítico tiende al cero o al infinito. Las regiones blancas indican que, para los métodos asociados a dichos valores del parámetro tienen, al menos, tres cuencas de atracción. Se aprecia que el comportamiento de los valores de η de la zona derecha de la región blanca tienen mayor estabilidad.

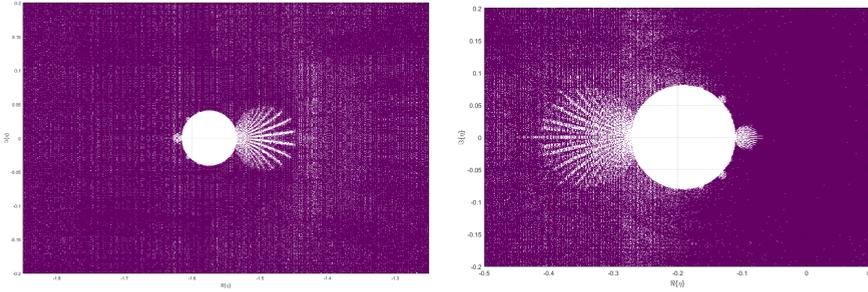
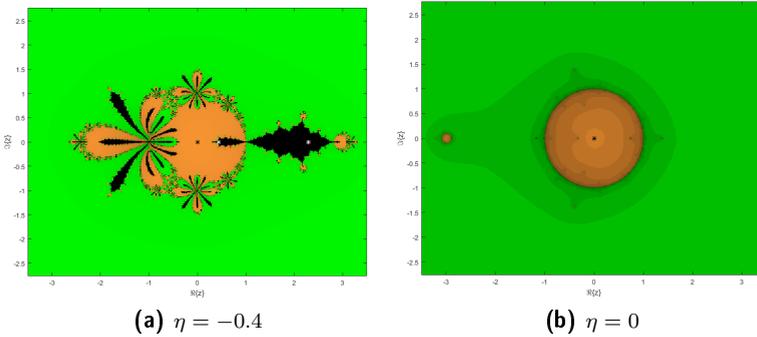


Figura 5.5: Dos regiones del plano de parámetros de la familia (5.9)



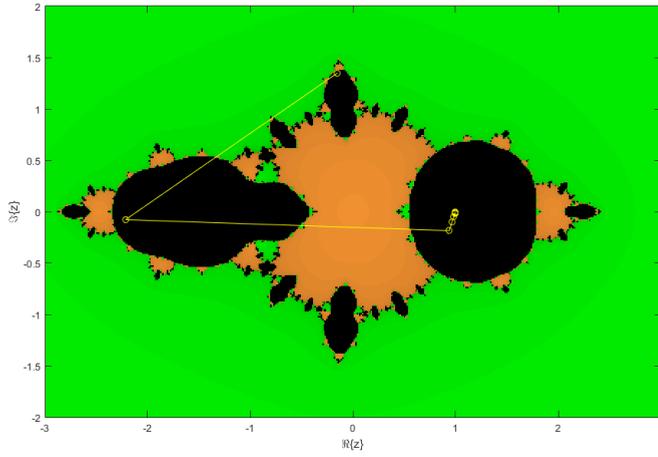
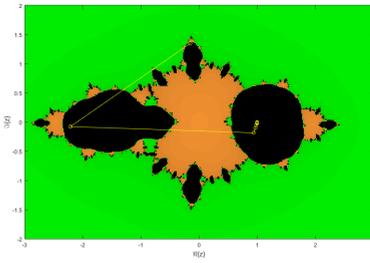
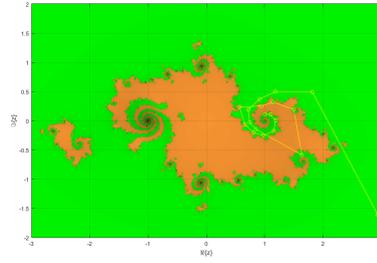
(a) $\eta = -0.4$

(b) $\eta = 0$

Figura 5.6: Casos inestable (a) y estable (b)

La Figura 5.6 ilustra dos casos en los que el parámetro η toma valores reales. La Figura 5.6a, correspondiente a $\eta = -0.4$, representa la atracción sobre los puntos $z = \{0.4363, 2.2922\}$, que no coinciden con las raíces. Este valor de η corresponde con la zona blanca de la Figura 5.5. Tomando un valor de η de la zona morada de la Figura 5.5 como, por ejemplo, $\eta = 0$, da lugar al plano dinámico de la Figura 5.6b, en el que se observa un comportamiento muy estable, similar al del método de Newton, pero con orden de convergencia cuatro.

Existen determinados valores del parámetro que presentan un comportamiento bastante peligroso del método. Cuando $z = 1$ es superatractor (ver Figura 5.7a), la cuenca de atracción de este punto es mucho mayor que la del cero y resulta bastante fácil que el método no converja a ninguna de las raíces. En un pequeño entorno de este valor de η , $z = 1$ mantiene este comportamiento atractor (ver Figura 5.7b), pero pronto lo abandona, convirtiéndose en repulsor (ver Figura 5.7c).

(a) $\eta = \frac{-3+\sqrt{5}}{4}$ (b) $\eta = \frac{-3+\sqrt{5}}{4} + 0.01i$ (c) $\eta = \frac{-3+\sqrt{5}}{4} + 0.07i$ **Figura 5.7:** Comportamiento de la familia M2 en un entorno de $\eta = \frac{-3+\sqrt{5}}{4}$

De este modo podemos concluir que el tanto el análisis dinámico como el plano de parámetros son herramientas imprescindibles que permiten elegir adecuadamente entre los miembros de una familia de métodos iterativos.

Capítulo 6

Dinámica compleja de métodos libres de derivadas para ecuaciones no lineales

Basado en [14]: "Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations," Applied Mathematics and Computation.

A lo largo del Capítulo 6 vamos a realizar un análisis exhaustivo de dos métodos iterativos libres de derivadas: el método de Steffensen y un método de orden cuatro. Ninguno de los dos esquemas satisface el Teorema del Escalado, por lo que recurriremos cuando sea posible a la representación del plano de parámetros para conocer los diferentes comportamientos de cada miembro de la familia. Asimismo, representaremos y compararemos los planos dinámicos asociados a cada uno de los métodos.

Resumen

Los esquemas iterativos libres de derivadas de Steffensen y M4 son analizados desde el punto de vista dinámico cuando se aplican sobre polinomios cuadráticos y cúbicos. Para el caso de los polinomios cuadráticos, se analiza el plano de parámetros. Para los polinomios cúbicos, el estudio se desarrolla sobre casos particulares de planos dinámicos. En todos los casos se analiza la propiedad de inmersión en las cuencas de atracción.

6.1 Introducción

La aplicación de los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales $f(z) = 0$, con $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, da lugar a funciones racionales cuya dinámica no es del todo conocida. Existe una extensa literatura al respecto del estudio de la iteración de aplicaciones racionales de variable compleja, como se puede observar en [23, 27]. Uno de los modelos más simples se obtiene cuando $f(z)$ es un polinomio cuadrático y el proceso iterativo es el método de Newton. La dinámica de este método iterativo ha sido profundamente estudiada, como se detalla en [7, 23, 32].

La mayoría de métodos iterativos analizados desde la perspectiva dinámica son métodos que incluyen derivadas en sus expresiones iterativas. A diferencia del método de Newton, el método libre de derivadas de Steffensen no ha sido tan estudiado. En [2, 62] se pueden encontrar comentarios dinámicos al respecto.

El índice de eficiencia I establece un criterio de clasificación para los métodos iterativos. Este índice fue introducido por Ostrowski en [56] como $I = p^{1/d}$, donde p es el orden de convergencia del método y d es la cantidad de evaluaciones de la función f a lo largo de cada iteración. Kung y Traub conjeturaron en [46] que $p \leq 2^{d-1}$. Si se alcanza el límite superior al método se le considera óptimo.

En este artículo analizamos la dinámica de dos procedimientos iterativos, óptimos bajo la conjetura de Kung-Traub, de órdenes dos y cuatro.

Como es conocido, si reemplazamos la derivada del método de Newton por la diferencia finita progresiva, obtenemos el método de Steffensen [55], cuya expresión iterativa es

$$z_{n+1} = z_n - \frac{[f(z_n)]^2}{f(v_n) - f(z_n)}, n = 1, 2, \dots,$$

donde $v_n = z_n + f(z_n)$. El método de Steffensen, al igual que el método de Newton, tiene orden de convergencia cuadrático y el mismo índice de eficiencia. A

partir de la conjetura de Kung-Traub se determina que el método de Steffensen es óptimo.

El operador de punto fijo del método de Steffensen sobre un polinomio $f(z)$ es

$$S_f(z) = z - \frac{f^2(z)}{f(v) - f(z)}, \quad (6.1)$$

donde $v = z + f(z)$.

Un procedimiento para mejorar el orden de convergencia local consiste en la composición de dos métodos iterativos, como se desarrolla en [55]. Esta técnica permite obtener esquemas iterativos de orden $p_1 \cdot p_2$, donde p_1 y p_2 son los órdenes de convergencia de los métodos compuestos. El método M4, desarrollado en [20], se obtiene a partir de la composición de los métodos de Newton y Steffensen, utilizando la aproximación de Padé de primer grado para evitar la última evaluación de la derivada. Su esquema iterativo es

$$y_n = z_n - \frac{f^2(z_n)}{f(v_n) - f(z_n)},$$

$$z_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)f[z_n, v_n]}{f[z_n, y_n]f[y_n, v_n]},$$

donde $f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ es la diferencia dividida de orden uno.

Se trata de un método de cuarto orden de convergencia, óptimo bajo la conjetura de Kung-Traub. El operador de punto fijo de M4 sobre $f(z)$ es

$$M_f(z) = y - \frac{f(y)f[z, v]}{f[z, y]f[y, v]}, \quad (6.2)$$

siendo $v = z + f(z)$ e $y = z - \frac{f^2(z)}{f(v) - f(z)}$.

De cara al estudio del comportamiento dinámico de un método iterativo aplicado sobre un polinomio $p(z)$ resulta imprescindible realizar un recordatorio de determinados conceptos básicos de dinámica compleja. Un desarrollo más exhaustivo se puede encontrar en [8, 25].

Sea $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional, donde $\hat{\mathbb{C}}$ es la esfera de Riemann. La órbita de un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ se define como

$$\{z_0, R(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}.$$

El comportamiento dinámico de la órbita de un punto en el plano complejo se puede clasificar en función de su comportamiento asintótico. Así pues, $z_0 \in \mathbb{C}$ es

un punto fijo de R si $R(z_0) = z_0$. Un punto fijo será atractor, repulsor o parabólico si $|R'(z_0)|$ es menor, mayor o igual a 1, respectivamente. Además, en el caso que $R'(z_0) = 0$, el punto fijo es superatractor. El valor de la derivada de la función racional en z_0 , $|R'(z_0)|$ se denomina multiplicador de ese punto fijo.

Sea z^* un punto fijo atractor de la función racional R . La cuenca de atracción de un punto fijo atractor $\mathcal{A}(z^*)$ se define como el conjunto de preimágenes de cualquier orden tal que

$$\mathcal{A}(z^*) = \left\{ z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow z^*, n \rightarrow \infty \right\}.$$

El conjunto de puntos cuyas órbitas tienen a un punto fijo atractor z^* definen el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(R)$. El conjunto complementario se denomina conjunto de Julia $\mathcal{J}(R)$, formado por el grupo de puntos repulsores, estableciendo las fronteras entre las cuencas de atracción.

A partir del operador de punto fijo asociado a un método cuando se aplica sobre un polinomio $f(z)$, $O_f(z)$, se pueden obtener los puntos fijos z^F y críticos z^C . Los puntos fijos satisfacen

$$O_f(z) = z, \tag{6.3}$$

mientras que los puntos críticos son aquellos que cumplen

$$O'_f(z) = 0. \tag{6.4}$$

Los puntos fijos atractores z^* son aquellos puntos fijos z^F que verifican

$$|O'_p(z^F)| < 1.$$

En el caso particular de que $O'_f(z^F) = 0$, el punto fijo es superatractor. Mayer y Schleicher definen en [52] las cuencas de atracción inmediatas de un punto fijo superatractor z^* como la componente conexa de la cuenca de atracción que contiene a z^* . Como es sabido, si z^* es un punto fijo superatractor, la cuenca de atracción inmediata $\mathcal{A}^\#$ contiene al menos un punto crítico.

Para estudiar la conjugación afín de los métodos iterativos es necesario mencionar los siguientes resultados.

Teorema 6.1.1 Teorema del Escalado para el método de Newton [23] Sea $g(z)$ una función analítica, y sea $A(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha \neq 0$ una aplicación afín. Sea

$h(z) = \lambda(g \circ A)(z)$, con $\lambda \neq 0$. Sea $N_g(z)$ el operador de punto fijo del método de Newton. Entonces

$$A \circ N_h \circ A^{-1}(z) = N_g(z),$$

de forma que N_g y N_h están analíticamente conjugados por A .

Este resultado permite el conocimiento de una familia de polinomios simplemente analizando unos pocos casos, a partir de un escalado adecuado. No obstante, para los métodos iterativos libres de derivadas cuya dinámica compleja se va a analizar, se puede demostrar que este resultado no es aplicable, como Amat et al. indican en [2]. De forma que la dinámica de los métodos no se puede generalizar bajo el resultado del Teorema del Escalado. Así que, para poder realizar un estudio completo tenemos que recurrir a otra herramienta diferente.

El plano de parámetros permite realizar un estudio similar, que será utilizado con polinomios cuadráticos; para los polinomios cúbicos, se estudiarán determinados casos particulares.

Así que consideremos una aplicación afín $A(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha \neq 0$. Sea $h(z) = \lambda(g \circ A)$, con $\lambda \neq 0$, y sea $S_h(z)$ el operador de punto fijo del método de Steffensen sobre $h(z)$. Como $A(x + y) = A(x) + A(y) - \beta$, $A(x - y) = A(x) - A(y) + \beta$ y $h(A^{-1}(z)) = \lambda g(z)$,

$$\begin{aligned} A \circ S_h \circ A^{-1} &= A \left(A^{-1}(z) - \frac{\lambda^2 g^2(z)}{h(A^{-1}(z) + \lambda g(z)) - g(z)} \right) = \\ &= A(A^{-1}(z)) - A \left(\frac{\lambda^2 g^2(z)}{h(A^{-1}(z) + \lambda g(z)) - \lambda g(z)} \right) - \beta = \\ &= z - \alpha \frac{\lambda^2 g^2(z)}{h(A^{-1}(z) + \lambda g(z)) - \lambda g(z)} = \\ &= z - \frac{\alpha \lambda g^2(z)}{g(z + \alpha \lambda g(z)) - g(z)}. \end{aligned}$$

De este modo, los operadores $S_h(z)$ y $S_g(z)$ están analíticamente conjugados si y solo si $\alpha = \lambda = 1$, por lo que el escalado no es posible. El principal motivo es la naturaleza del método de Steffensen, en el que en su esquema iterativo no hay derivadas. Por tanto no se puede establecer una extensión de los resultados de unos pocos casos particulares a un resultado general. En efecto, para M4 se puede demostrar un resultado similar.

Cuando se aplican polinomios de grado g sobre los métodos de Steffensen (6.1) y M4 (6.2) se obtienen dos funciones iterativas racionales. Su grado dependerá de g . La Tabla 6.1 presenta una comparativa entre los métodos bajo estudio y otros

métodos clásicos como Newton, Halley, Chebyshev y el método de dos pasos. A continuación se detallan sus expresiones iterativas.

- Método de Newton

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}. \quad (6.5)$$

- Método de Halley o de las hipérbolas tangentes

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \frac{2[f'(z_n)]^2}{2 - f(z_n)f''(z_n)}. \quad (6.6)$$

- Método de Chebyshev o de las parábolas tangentes

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \left(1 + \frac{f(z_n)f''(z_n)}{2[f'(z_n)]^2} \right). \quad (6.7)$$

- Método de los dos pasos

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad z_{n+1} = w_n - \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}. \quad (6.8)$$

Método	Expresión iterativa	p	G
Newton	(6.5)	2	g
Halley	(6.6)	3	$2g - 1$
Chebyshev	(6.7)	3	$3g - 2$
Dos pasos	(6.8)	3	g^2
Steffensen	(6.1)	2	$g^2 - g + 1$
M4	(6.2)	4	$2g^3 - 2g^2 + g$

Tabla 6.1: Grado G máximo de la función racional de diferentes métodos iterativos aplicados sobre polinomios de grado g , siendo p el orden de convergencia.

Nótese que el valor de G de la Tabla 6.1 es un límite superior para los grados de las funciones racionales implicadas. Se trata de un límite extremo porque se alcanza para situaciones particulares. No obstante, hay polinomios cuyas funciones racionales son de menor grado. En particular, considerando polinomios con raíces múltiples nunca se alcanza el límite superior del grado G . Como se señala en [39] la dependencia de las funciones iterativas respecto de g^2 , e incluso respecto de g^3 , complica considerablemente el estudio dinámico correspondiente.

Quisiéramos finalizar esta sección con unas consideraciones en cuanto al carácter del infinito como punto fijo para los métodos (6.1) y (6.2). Así como el infinito es un punto fijo repulsor en la mayoría de los métodos iterativos más habituales (Newton, Halley, Chebyshev, etc), en el método de Steffensen (6.1) es un punto neutral. Sin embargo, para el método M4 (6.2), el infinito mantiene su carácter repulsor. Siguiendo [39] podemos clasificar al infinito como punto fijo de una función iterativa $R(z)$ a partir de su multiplicador μ , donde

$$\frac{1}{\mu} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{R(z)}{z}.$$

La Tabla 6.2 muestra el carácter dinámico y el multiplicador del infinito para los métodos indicados en la Tabla 6.1 cuando se aplican sobre ecuaciones polinómicas.

Método	Expresión iterativa	Carácter	μ
Newton	(6.5)	R	$g/(g-1)$
Halley	(6.6)	R	$(g+1)/(g-1)$
Chebyshev	(6.7)	R	$2g^2/(2g^2-3g+1)$
Dos pasos	(6.8)	R	$g/[g-1-(1-1/g)^g]$
Steffensen	(6.1)	N	1
M4	(6.2)	R	$g/(g-1)$

Tabla 6.2: Carácter y multiplicador μ del infinito sobre determinados métodos iterativos aplicados sobre un polinomio de grado g . R: repulsor, N: neutral.

6.2 Polinomios cuadráticos

En esta sección se estudian en profundidad los métodos de Steffensen (6.1) y M4 (6.2) cuando se aplican sobre polinomios cuadráticos $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$. Debido a que el Teorema del Escalado no se cumple para estos métodos, no es posible realizar un estudio general sobre los polinomios cuadráticos. En el caso de Steffensen, el operador de punto fijo y los puntos fijos y críticos se presentan en función de λ , siendo el numerador de $S_{f_\lambda}(z)$ un polinomio de grado 3. Para el caso del método M4, realizaremos el estudio para casos particulares de λ , puesto que el operador de punto fijo asociado tiene en el numerador un polinomio de alto grado.

El operador de punto fijo asociado al método de Steffensen (6.1), cuando es aplicado sobre un polinomio $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$, es

$$S_{f_\lambda}(z) = \frac{z^3 + z^2 + \lambda z - \lambda}{z^2 + 2z + \lambda}.$$

Es inmediata la comprobación de la propiedad de simetría

$$S_{f_{\bar{\lambda}}}(\bar{z}) = \overline{S_{f_{\lambda}}(z)}, \quad \forall \lambda, z \in \mathbb{C}. \quad (6.9)$$

Esta propiedad implica que el plano dinámico del método iterativo tendrá alguna de las siguientes características:

- si $\Im\{\lambda\} = 0$, existe una simetría respecto al eje de abscisas, y
- si $\Im\{\lambda\} \neq 0$, existe una simetría entre los métodos al aplicar los polinomios $f_{\lambda}(z) = z^2 + \lambda$ y $f_{\bar{\lambda}}(z) = z^2 + \bar{\lambda}$.

Los puntos fijos de $S_{f_{\lambda}}(z)$ son $z_{1,2}^F = \pm i\sqrt{\lambda}$, de forma que los únicos puntos fijos son las raíces del polinomio, lo que facilita la convergencia del método. La particularización del valor absoluto de la derivada sobre estos puntos permite su clasificación. En este caso, para ambos puntos fijos, $|S'_{f_{\lambda}}(z_{1,2}^F)| = 0$, de forma que $z_{1,2}^F$ son puntos fijos superatractores, y los denotaremos como $z_{1,2}^*$. Como señalamos en la sección anterior, el infinito es un punto fijo neutral. Los puntos críticos anulan el operador derivada, como se indica en (6.4). De este modo

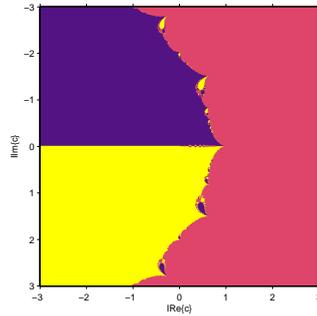
$$S'_{f_{\lambda}} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} z_{1,2}^C = \pm i\sqrt{\lambda}, \\ z_{3,4}^C = -2 \pm \sqrt{2 - \lambda}. \end{cases}$$

Nótese que para $\lambda = 2$, $z_{3,4}^C = 2$.

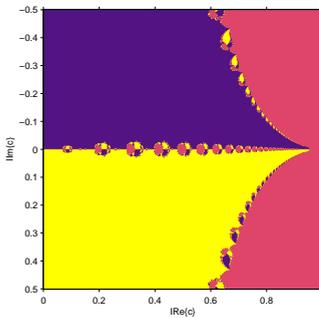
A pesar de que el uso del Teorema del Escalado no es posible, se pueden generalizar determinados comportamientos de la familia $S_{f_{\lambda}}(z)$ a partir de su plano de parámetros asociado. La Figura 6.1 ilustra el plano de parámetros de $S_{f_{\lambda}}(z)$ en diferentes regiones de λ . La Figura 6.1a representa de forma global el plano de parámetros, donde $\Re\{\lambda\} \in (-3, 3)$ e $\Im\{\lambda\} \in (-3, 3)$. Las Figuras 6.1b-6.1c son dos magnificaciones de la Figura 6.1a, donde se amplía la región de la antena central, con $\Re\{\lambda\} \in (0, 1)$, $\Im\{\lambda\} \in (-0.5, 0.5)$, y de una célula individual, donde $\Re\{\lambda\} \in (0.295, 0.365)$, $\Im\{\lambda\} \in (-0.032, 0.032)$, respectivamente.

El punto crítico $z_4^C = -2 - \sqrt{2 - \lambda}$ pertenece a la cuenca de atracción del infinito, $\mathcal{A}(\infty)$. Los planos de parámetros de la Figura 6.1 ilustran la cuenca de atracción que contiene al punto crítico $z_3^C = -2 + \sqrt{2 - \lambda}$. Cuando λ está en la región amarilla, $z_3^C \in \mathcal{A}(z_1^*)$. Si λ está en la región morada, $z_3^C \in \mathcal{A}(z_2^*)$. La región rosa sitúa a ambos puntos críticos en $\mathcal{A}(\infty)$.

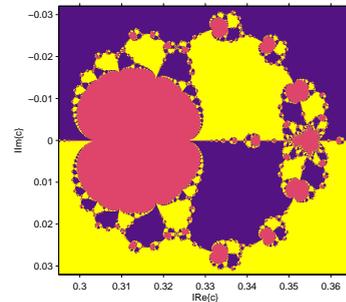
Para cada valor de λ hay convergencia a uno de los puntos fijos superatractores, incluido el infinito, a pesar de que se puedan encontrar órbitas periódicas, como muestra la Figura 6.2.



(a) Plano de parámetros



(b) Antena



(c) Célula

Figura 6.1: Planos de parámetros de $S_{f_\lambda}(z)$ sobre polinomios cuadráticos en diferentes regiones de λ

En las figuras 6.3-6.5 se muestran los planos dinámicos de S_{f_λ} para diferentes valores de λ .

El operador de punto fijo del método M4 (6.2) cuando se aplica sobre $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ es

$$M_{f_\lambda}(z) = \frac{N_{f_\lambda}(z)}{D_{f_\lambda}(z)}, \quad (6.10)$$

donde $N_{f_\lambda}(z) = z^{10} + 7z^9 + (16 + 3\lambda)z^8 + (15 + 12\lambda)z^7 + (5 + 2\lambda^2)z^6 - (31\lambda + 6\lambda^2)z^5 - (23\lambda + 48\lambda^2 + 2\lambda^3)z^4 - (43\lambda^2 + 20\lambda^3)z^3 + (3\lambda^2 - 32\lambda^3 - 3\lambda^4)z^2 + (3\lambda^3 - 9\lambda^4)z - \lambda^3 - \lambda^5$ y $D_{f_\lambda}(z) = (z^4 + 4z^3 + (3 + 2\lambda)z^2 + 4\lambda z + \lambda^2 - \lambda)(2z^3 + 3z^2 + 2\lambda z - \lambda)(z^2 + 2z + \lambda)$. Se puede demostrar que el infinito es un punto repulsor para $M_{f_\lambda}(z)$.

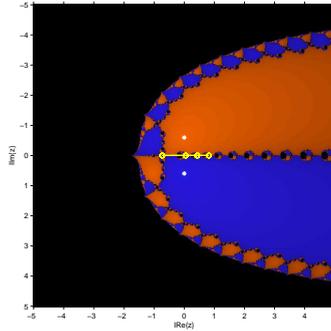


Figura 6.2: Órbita periódica en $S_{f_\lambda}(z)$, $\Re\{z\} \in (-5, 5)$, $\Im\{z\} \in (-5, 5)$.

Al igual que en el método de Steffensen, M4 satisface la propiedad de simetría

$$M_{f_\lambda}(\bar{z}) = \overline{M_{f_\lambda}(z)}, \quad \forall \lambda, z \in \mathbb{C}. \quad (6.11)$$

En cuanto a los puntos críticos, el análisis del plano de parámetros indica que $z_1^C = -1 + i\sqrt{\lambda}$ permanece en la cuenca de atracción de z_2^* , mientras que $z_2^C = -1 - i\sqrt{\lambda} \in \mathcal{A}(z_1^*)$. Como no han sido encontrados de forma explícita otros puntos críticos, dada la complejidad de la expresión (6.10), no se puede obtener el plano de parámetros y, por tanto, realizaremos el estudio de determinados casos particulares.

El operador de punto fijo de M4, al ser aplicado sobre $f_1(z) = z^2 + 1$, es

$$M_{f_1}(z) = \frac{z^{10} + 7z^9 + 19z^8 + 27z^7 + 7z^6 - 37z^5 - 73z^4 - 63z^3 - 32z^2 - 6z - 2}{z(z+1)^2(z^3 + 4z^2 + 5z + 4)(2z^3 + 3z^2 + 2z - 1)}.$$

Aplicando (6.3), los puntos fijos de $M_{f_1}(z)$ son

$$\begin{aligned} z_{1,2}^F &= \pm i, & z_{3,4}^F &= -0.0247075 \pm i0.347611, \\ z_{5,6}^F &= -0.516776 \pm i0.987314, & z_{7,8}^F &= -0.939241 \pm i0.884754, \\ z_{9,10}^F &= -2.51928 \pm i1.27208. \end{aligned}$$

A partir de la evaluación del módulo del operador derivada de $M_{f_1}(z)$, los puntos fijos se clasifican en (super)atractores, repulsores o neutrales. En este caso, los puntos fijos $z_{1,2}^F = z_{1,2}^*$ son superatractores, y el resto de puntos fijos z_{3-10}^F son repulsores. Por tanto, el plano dinámico tendrá dos cuencas de atracción, $\mathcal{A}(z_1^*)$ y $\mathcal{A}(z_2^*)$. De este modo, cuando se toma un punto inicial de cualquiera de las dos

cuenca de atracción, la órbita de dicho punto converge a su correspondiente valor superatractor. Los únicos puntos fijos superatractores coinciden con las raíces del polinomio, favoreciendo la convergencia del método.

Los puntos críticos se obtienen anulando la derivada del operador de punto fijo, cuyos valores son

$$\begin{array}{ll} z_{1-6}^C = \pm i, & z_7^C = 0.143866, \\ z_8^C = -0.241736, & z_9^C = -2.02613, \\ z_{10,11}^C = -0.899354 \pm i0.750718, & z_{12,13}^C = -0.776073 \pm i0.944697, \\ z_{14,15}^C = -1 \pm i, & z_{16,17}^C = -3.26257 \pm i1.78652. \end{array}$$

La Figura 6.3b muestra el plano dinámico de M4 cuando se aplica sobre $f_1(z) = z^2 + 1$. La cuenca de atracción azul corresponde al punto fijo $z_1^* = i$, mientras que la cuenca naranja es la correspondiente a $z_2^* = -i$. Las raíces de los polinomios se representan con una estrella blanca. A diferencia de lo que ocurría con Steffensen, el infinito no tiene cuenca de atracción para M4, de forma que todos los puntos del plano dinámico pertenecen a una de las cuencas de atracción de las raíces, salvo los puntos del conjunto de Julia.

Cuando M4 se aplica sobre $f_{-1}(z) = z^2 - 1$, el numerador del operador de punto fijo es un polinomio de grado 10 y se obtienen 10 puntos fijos. De nuevo, los únicos puntos fijos superatractores son las raíces del polinomio $z_{1,2}^* = \pm 1$, mientras que el resto de puntos fijos son repulsores. La Figura 6.3d muestra el plano dinámico de $M_{f_{-1}}(z)$.

El operador de punto fijo de M4 sobre $f_0(z) = z^2$ es

$$M_{f_0}(z) = \frac{z^4 + 6z^3 + 10z^2 + 5z}{(z+2)(2z^2 + 9z + 9)}.$$

El grado del numerador disminuye con respecto a los operadores asociados a $\lambda = \pm 1$. Uno de los cuatro puntos fijos es la raíz de $f_0(z)$, siendo el único punto superatractor. Su dinámica se puede observar en la Figura 6.4b.

Cuando $f_{\pm i}(z) = z^2 \pm i$, hay 10 puntos fijos, siendo los puntos fijos de $f_i(z)$ conjugados a los de $f_{-i}(z)$. Al igual que en los casos anteriores, los únicos puntos fijos superatractores son las raíces del polinomio, resultando el resto repulsores. De este modo, $M_{f_i}(z)$ tiene sus cuencas de atracción en $z_{1,2}^* = \pm \sqrt{-i}$ y $M_{f_{-i}}(z)$ las tiene en $z_{1,2}^* = \pm \sqrt{i}$. Los planos dinámicos de ambos métodos se muestran en las Figuras 6.5b y 6.5d, respectivamente.

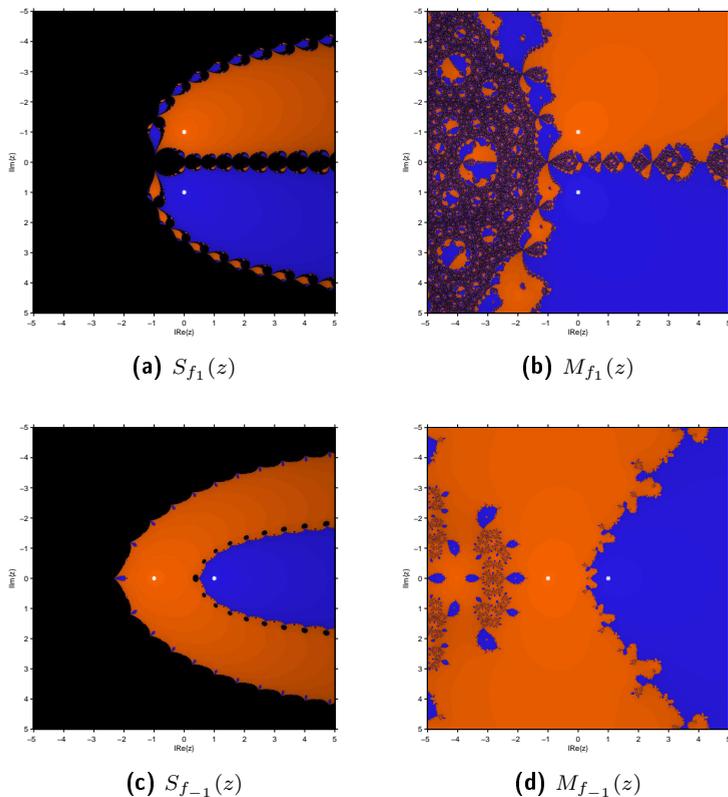


Figura 6.3: Planos dinámicos de S_{f_λ} y M_{f_λ} al aplicarlos sobre el polinomio cuadrático $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$, con $\lambda = \pm 1$.

Para poder realizar una comparativa entre los comportamientos, definimos que la cuenca de atracción inmediata $\mathcal{A}_1^\#$ está **inmersa** en otra cuenca de atracción $\mathcal{A}_2^\#$ si es posible encontrar dos puntos de $\mathcal{A}_2^\#$ tales que la línea que los une cruce $\mathcal{A}_1^\#$.

Los planos dinámicos asociados a los métodos de Steffensen y M4 cuando se aplican sobre polinomios cuadráticos $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ se muestran en las figuras 6.3-6.5 con diferentes valores de λ . En los planos se representan los puntos del plano complejo de la región comprendida por $\Re\{z\} \in (-5, 5)$, $\Im\{z\} \in (-5, 5)$. Asimismo, reseñar que la cuenca de atracción azul se corresponde con $z_1^* = i\sqrt{\lambda}$, mientras que la correspondiente a $z_2^* = -i\sqrt{\lambda}$ se representa en naranja. La cuenca de atracción del infinito, cuando existe, aparece en negro.

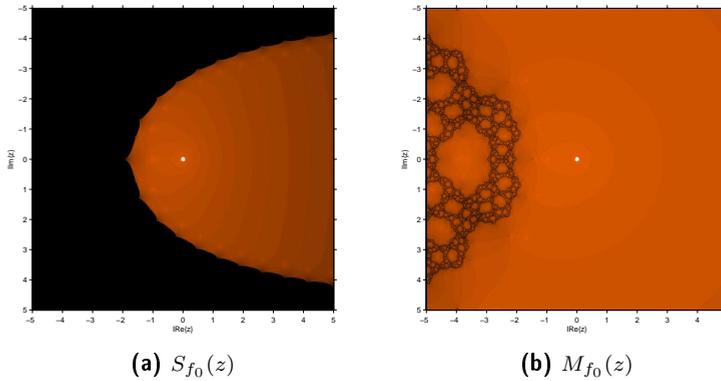


Figura 6.4: Planos dinámicos de S_{f_λ} y M_{f_λ} al aplicarlos sobre el polinomio cuadrático $f_0(z) = z^2$.

Al estudiar los planos dinámicos del método de Steffensen, y relacionándolos con el plano de parámetros de la Figura 6.1, el punto crítico $z_1^C = -2 + \sqrt{2 - \lambda}$ está en la cuenca de atracción $\mathcal{A}(z_1^*)$, $\mathcal{A}(z_2^*)$ o $\mathcal{A}(\infty)$ cuando el valor de λ se encuentra en la región amarilla, morada o rosa, respectivamente. Por contra, para cualquier valor de λ , z_2^C siempre pertenece a $\mathcal{A}(\infty)$.

Además, $\mathcal{A}(z_2^*)$ está inmersa en $\mathcal{A}(z_1^*)$ cuando el valor de λ pertenece a las regiones amarilla o morada del plano de parámetros. Es el caso de $\lambda = \{-1, \pm i\}$, correspondiente a las Figuras 6.3c, 6.5a y 6.5c. Si el valor de λ está en la región rosa, $\mathcal{A}(z_1^*)$ y $\mathcal{A}(z_2^*)$ no están inmersas, como ocurre en la Figura 6.3a, en la que $\lambda = 1$. El mismo comportamiento en cuanto a las cuencas de inmersión se aprecia para el método M4.

Se puede concluir que la estabilidad del método M4 es más amplia que la de Steffensen. Cuando se toma un punto del conjunto de Fatou en M4, la órbita converge a uno de los puntos fijos superatractores, ya que el infinito no tiene cuenca de atracción.

En cuanto a las expresiones de las simetrías de Steffensen (6.9) y de M4 (6.11), resulta sencillo comprobar la simetría respecto al eje de abscisas para los métodos con $\lambda \in \mathbb{R}$ (Figuras 6.3 y 6.4). En la Figura 6.5 la simetría se produce entre los métodos, puesto que los valores de λ son conjugados.

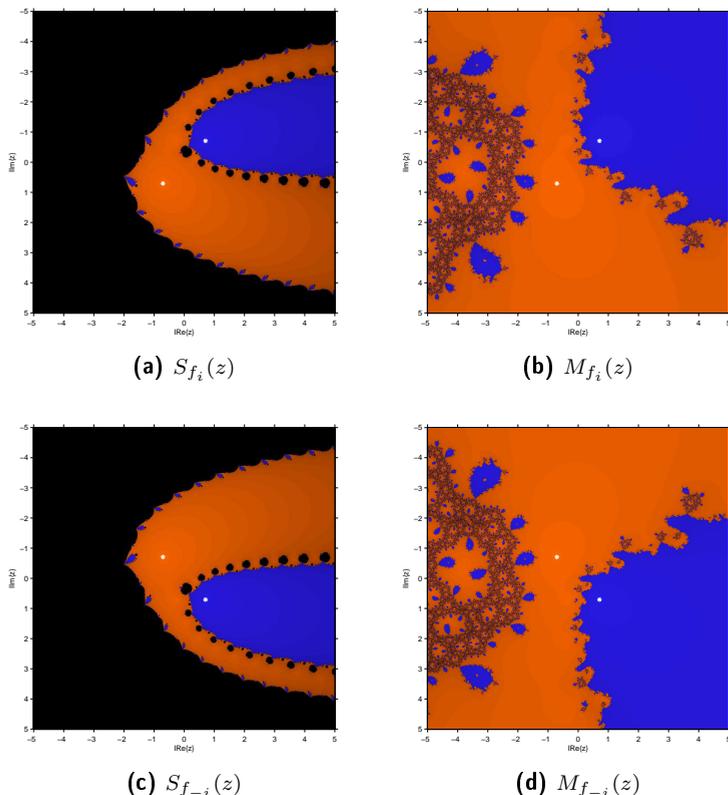


Figura 6.5: Planos dinámicos de $S_{f_{\lambda}}$ y $M_{f_{\lambda}}$ al aplicarlos sobre el polinomio cuadrático $f_{\lambda}(z) = z^2 + \lambda$, con $\lambda = \pm i$.

6.3 Polinomios cúbicos

A continuación vamos a realizar el análisis del comportamiento dinámico de los métodos libres de derivadas de Steffensen y M4 sobre polinomios cúbicos del tipo $f_{\lambda}(z) = z^3 + \lambda$, mostrando sus diferencias y similitudes.

El operador de punto fijo del método de Steffensen, cuando se aplica sobre el polinomio $f_{\lambda}(z) = z^3 + \lambda$ es

$$S_{f_{\lambda}}(z) = \frac{z^7 + 3z^5 + 2\lambda z^4 + 2z^3 + 3\lambda z^2 + \lambda^2 z - \lambda}{z^6 + 3z^4 + 2\lambda z^3 + 3z^2 + 3\lambda z + \lambda^2}. \quad (6.12)$$

Se puede demostrar que el operador $S_{f_\lambda}(z)$ satisface la propiedad de simetría

$$S_{f_\lambda}(\bar{z}) = \overline{S_{f_\lambda}(z)}, \quad \forall \lambda, z \in \mathbb{C}, \quad (6.13)$$

que puede ser observada gráficamente en los diferentes planos dinámicos. Del mismo modo que con los polinomios cuadráticos, se van a estudiar cinco casos particulares de $f_\lambda(z) = z^3 + \lambda$, teniendo en cuenta que tampoco se cumple el Teorema del Escalado. Además, el infinito vuelve a ser un punto fijo neutral.

Cuando el operador de punto fijo se aplica sobre $f_1(z) = z^3 + 1$, los puntos fijos son

$$z_{k+1}^F = -e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Estos puntos fijos $z_{1,2,3}^F = z_{1,2,3}^*$ son superatractores, y coinciden con las raíces del polinomio $f_1(z)$. El plano dinámico tiene cuatro cuencas de atracción, $\mathcal{A}(z_1^*)$, $\mathcal{A}(z_2^*)$, $\mathcal{A}(z_3^*)$ y $\mathcal{A}(\infty)$.

Aplicando (6.4) al operador $S_{f_1}(z)$, los puntos críticos son

$$\begin{aligned} z_1^C &= z_1^F, & z_2^C &= z_2^F, \\ z_3^C &= z_3^F, & z_4^C &= -0.471717, \\ z_{5,6}^C &= -0.295567 \pm i0.649277, & z_{7,8}^C &= 0.283565 \pm i1.34654, \\ z_{9,10}^C &= -0.573381 \pm i1.44982, & z_{11,12}^C &= 0.821242 \pm i1.71625. \end{aligned}$$

El plano dinámico de $S_{f_1}(z)$ se muestra en la Figura 6.6a. Las tres cuencas de atracción, $\mathcal{A}(z_1^*)$, $\mathcal{A}(z_2^*)$ y $\mathcal{A}(z_3^*)$ se representan en naranja, verde y azul, respectivamente. La cuenca del infinito permanece en negro.

Para $\lambda = -1$ en (6.12), el numerador del operador de punto fijo es un polinomio de grado 7 (como ocurría en $\lambda = 1$). Se obtienen tres puntos fijos superatractores finitos, que se corresponden con las raíces de $f_{-1}(z) = z^3 - 1$, es decir, $z_{k+1}^* = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$. Las cuatro cuencas de atracción están representadas en el plano dinámico de $S_{f_{-1}}(z)$ de la Figura 6.6c.

Los siguientes casos se corresponden con los polinomios $f_{\pm i}(z) = z^3 \pm i$. El polinomio del numerador de $S_{f_{\pm i}}(z)$ es de grado 7. Los únicos puntos superatractores finitos son las tres raíces, conjugadas entre $S_{f_i}(z)$ y $S_{f_{-i}}(z)$. De acuerdo con la propiedad (6.13), las Figuras 6.7a y 6.7c (los planos dinámicos correspondientes a $S_{f_i}(z)$ y $S_{f_{-i}}(z)$, respectivamente) son simétricos.

Por último, aplicando (6.1) a $f_0(z) = z^3$, el grado del numerador es 5. En este caso, solo hay un punto fijo superatractor finito en $z_1^F = z_1^* = 0$. La Figura 6.8a muestra el plano dinámico de $S_{f_0}(z)$.

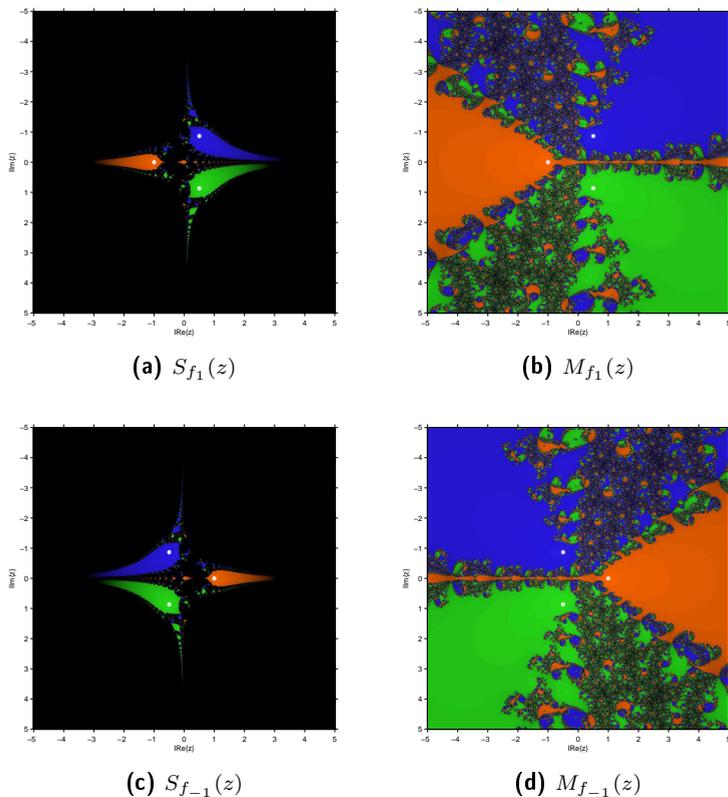


Figura 6.6: Planos dinámicos de S_{f_λ} y M_{f_λ} al aplicarlos sobre el polinomio cúbico $f_\lambda(z) = z^3 + \lambda$, con $\lambda = \pm 1$.

Al aplicar M4 sobre el polinomio $f_\lambda(z) = z^3 + \lambda$, la expresión general de $M_{f_\lambda}(z)$ es

$$M_{f_\lambda}(z) = \frac{N_{f_\lambda}(z)}{D_{f_\lambda}(z)}, \quad (6.14)$$

siendo $N_{f_\lambda}(z)$ y $D_{f_\lambda}(z)$ polinomios de grados 39 y 38, respectivamente. De nuevo, el operador satisface la propiedad de simetría

$$M_{f_\lambda}(\bar{z}) = \overline{M_{f_\lambda}(z)}, \quad \forall \lambda, z \in \mathbb{C}.$$

Cuando se evalúan los puntos fijos sobre el módulo de la derivada de $M_{f_1}(z)$ se obtiene el comportamiento superatractor de las raíces, de modo que $z_{1,2,3}^F = z_{1,2,3}^*$. Sus cuencas de atracción se pueden observar en la Figura 6.6b. El resto de puntos

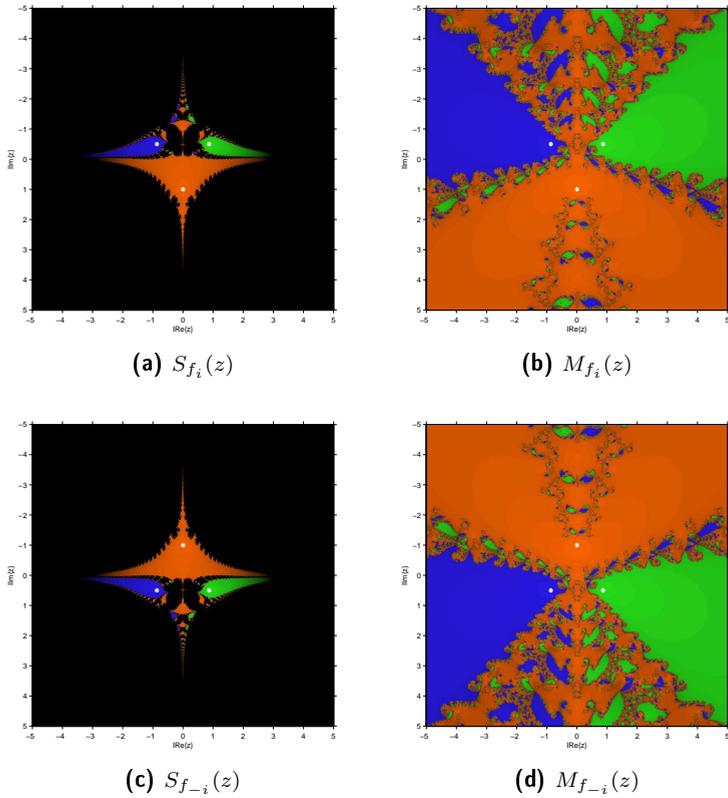


Figura 6.7: Planos dinámicos de S_{f_λ} y M_{f_λ} al aplicarlos sobre el polinomio cúbico $f_\lambda(z) = z^3 + \lambda$, con $\lambda = \pm i$.

fijos son repulsores, incluido el infinito. Aplicando (6.4) al operador $M_{f_1}(z)$ se obtienen 76 puntos críticos, tres de los cuales coinciden con las raíces de $f_1(z)$.

Si se aplica (6.14) sobre el polinomio $f_{-1}(z) = z^3 - 1$, el operador de punto fijo tiene como numerador un polinomio de grado 39. Los puntos fijos superatractores son las raíces de $f_{-1}(z)$. Los otros 36 puntos fijos son repulsores. El plano dinámico de $M_{f_{-1}}(z)$ se muestra en la Figura 6.6d.

Sustituyendo el parámetro λ por valores imaginarios puros, como $\lambda = \pm i$, el operador de punto fijo asociado al método M4 cuando se aplica sobre $f_{\pm i}(z) = z^3 \pm i$ tiene como numerador un polinomio de grado 39. Los únicos puntos fijos superatractores son las raíces de $f_{\pm i}(z)$, es decir, $z_1^* = \pm i$ y $z_{2,3}^* = 0.8660 \mp i0.5$.

En las Figuras 6.7b y 6.7d se representan los planos dinámicos de $M_{f_i}(z)$ y $M_{f_{-i}}(z)$, respectivamente. Los puntos repulsores pertenecen al conjunto de Julia.

Cuando $\lambda = 0$, el numerador del operador de punto fijo es un polinomio de grado 21. El único punto fijo superatractor es la raíz de $f_0(z)$, $z_1^* = 0$. El comportamiento dinámico de $M_{f_0}(z)$ se muestra en la Figura 6.8b. Los puntos repulsores pertenecen al conjunto de Julia.

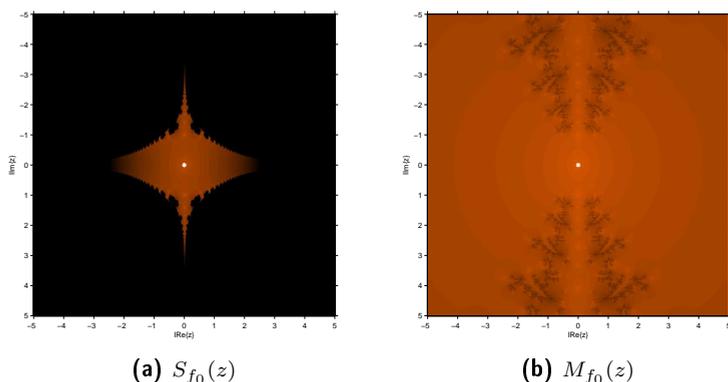


Figura 6.8: Planos dinámicos de S_{f_λ} y M_{f_λ} al aplicarlos sobre el polinomio cúbico $f_0(z) = z^3$.

A modo de resumen, los planos dinámicos de los métodos de Steffensen y M4, cuando son aplicados sobre polinomios cúbicos, se muestran en las Figuras 6.6-6.8, para diferentes valores de λ . Análogamente al caso de los polinomios cuadráticos, los puntos fijos superatractores se representan con estrellas blancas. Las cuencas de atracción están representadas en azul, naranja y verde, correspondiendo el color negro a la cuenca de atracción del infinito cuando existe.

Al comparar los métodos de Steffensen y M4 bajo la perspectiva de la estabilidad, la región de convergencia del método de cuarto orden es mayor que la del método de orden dos. La cuenca de atracción del infinito no aparece en M4. Con la aplicación de M4 todos los puntos del plano complejo, salvo los correspondientes al conjunto de Julia, convergen a una de las raíces de $f_\lambda(z)$.

La propiedad de simetría respecto del eje de abscisas se evidencia en las Figuras 6.6 y 6.8, en las que el valor de λ es real. Además, $S_{f_i}(z)$ y $S_{f_{-i}}(z)$ (Figuras 6.7a y 6.7a), por un lado, y $M_{f_i}(z)$ y $M_{f_{-i}}(z)$ (Figuras 6.7b y 6.7d), por otro, son simétricas entre ellas.

Resulta interesante resaltar que, conforme el valor de λ aumenta, el comportamiento dinámico de M4 tiende al de Newton, como muestra la Figura 6.9.

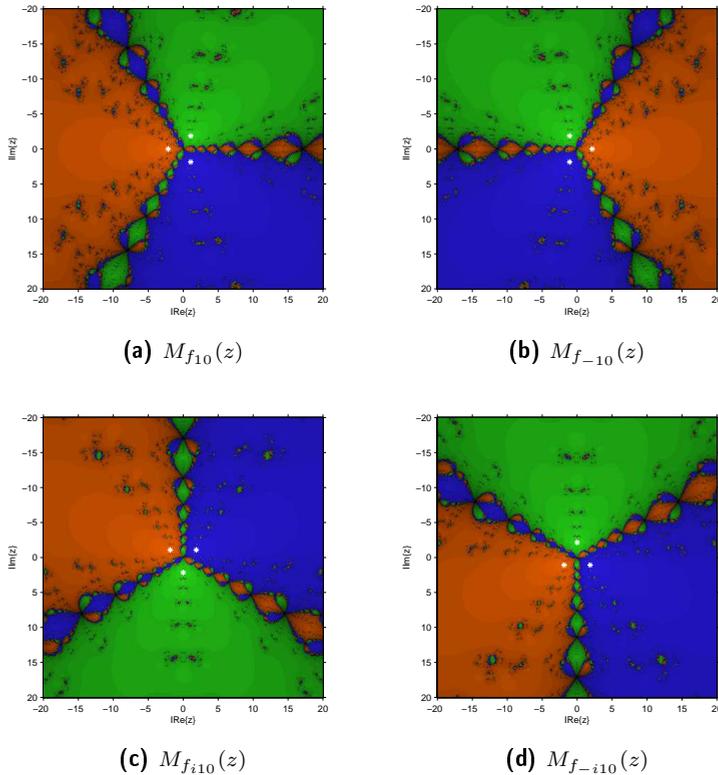


Figura 6.9: Planos dinámicos de M_{f_λ} al aplicarlos sobre el polinomio cúbico $f_\lambda(z) = z^3 + \lambda$, con $\lambda = \{\pm 10, \pm 10i\}$.

Las cuencas de atracción inmediatas de todos los casos estudiados de Steffensen no están inmersas. Sin embargo, para el método M4 con $\lambda = \pm i$ sí lo están; en el resto de casos particulares no hay inmersión. Para valores imaginarios puros, a medida que el valor de λ aumenta, las cuencas de atracción dejan de estar inmersas, como se puede interpretar de las Figuras 6.9c-6.9d, donde $\lambda = \pm i10$, respectivamente.

6.4 Conclusiones

Mientras que el infinito es un punto repulsor en la mayoría de métodos iterativos, incluido M4, en el método de Steffensen se trata de un punto neutral. La existencia de la cuenca de atracción del infinito en el método de Steffensen, tanto para polinomios cuadráticos como cúbicos, supone un problema para asegurar su estabilidad. Afortunadamente, el método M4 elimina la cuenca de atracción del infinito y tiene convergencia general en el plano complejo, salvo para los puntos del conjunto de Julia.

Cuando los valores de λ en los polinomios $f_\lambda(z) = \{z^2, z^3\} + \lambda$ son reales, la propiedad de simetría permite el estudio del semiplano $\Im\{z\} \geq 0$ para obtener el comportamiento dinámico del plano completo. Asimismo, si se ha estudiado el plano dinámico de $S_{f_\lambda}(z)$ o $M_{f_\lambda}(z)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, el plano dinámico de $S_{\bar{f}_\lambda}(z)$ o $M_{\bar{f}_\lambda}(z)$ es inmediato.

Una herramienta de gran utilidad para el análisis dinámico de los métodos es el plano de parámetros. En el método de Steffensen, el plano de parámetros establece la cuenca de atracción sobre la que estará la órbita final de un punto crítico. Asimismo, se puede conocer a priori si las cuencas de atracción están inmersas.

El comportamiento relativo a las inmersiones en los métodos de Steffensen y M4 para polinomios cuadráticos es análogo. No obstante, para el caso de polinomios cúbicos, las características de inmersión de ambos métodos para valores imaginarios puros pequeños de λ son diferentes.

Determinación de órbitas de satélites artificiales a partir de métodos iterativos libres de derivadas de alto orden

Basado en [11]: "Derivative-free high-order methods applied to preliminary orbit determination," Mathematical and Computer Modelling.

La aplicación de los conceptos relacionados con la mecánica orbital adquiere protagonismo en el Capítulo 7. Tras el planteamiento riguroso de la determinación preliminar de la órbita de un satélite, dentro del algoritmo reemplazaremos el método clásico de la secante por métodos iterativos libres de derivadas como Steffensen, LZZ, CT ó M8. La aplicación de los nuevos métodos dotará de mejores prestaciones al algoritmo en términos de eficiencia y convergencia.

Resumen

A partir de la posición y la velocidad en dos instantes es posible determinar los elementos orbitales de la trayectoria preliminar de un satélite, teniendo solo en cuenta la interacción gravitacional entre la Tierra y el satélite. No obstante, dado que se trata de una trayectoria preliminar, las medidas tienen que ser refinadas con observaciones posteriores realizadas desde estaciones base, cuyas coordenadas geográficas son conocidas previamente. Los algoritmos desarrollados para tal efecto requieren de la solución de una ecuación no lineal. Clásicamente ha sido habitual el uso de esquemas basados en los métodos de punto fijo o de la secante, siendo este último el más utilizado cuando no es posible determinar la derivada de la función no lineal. En la actualidad existen métodos numéricos más eficientes capaces de mejorar considerablemente los resultados obtenidos. Centraremos nuestra atención en el método de la iteración de la anomalía verdadera, en el que el esquema de la secante se sustituirá por otros métodos de mayor eficiencia, tales como el método de Steffensen de convergencia cuadrática u otros esquemas, también libres de derivadas, de mayor orden de convergencia.

7.1 Introducción

Actualmente el movimiento de los satélites naturales o artificiales se comprende gracias al trabajo de científicos como Brahe, Kepler o Newton. Brahe rehizo las tablas de predicción de los planetas del Sistema Solar, consiguiendo una precisión de un arco de minuto. Kepler le dio continuidad a dicho trabajo, dando lugar a sus famosas leyes primera y segunda en 1609; la tercera vio la luz en 1618. Newton publicó *Philosophiæ naturalis principia mathematica* en 1687, en el que se incluía la ley de gravitación universal. A partir de la ley de Newton y los resultados de Kepler, Gauss resolvió el problema de dos cuerpos, mostrando que la órbita de un planeta describe una forma cónica. Considerando el problema de dos cuerpos definido por la Tierra y un satélite, diferentes observaciones nos permiten afirmar que la órbita está acotada, por lo que la cónica es una elipse.

El siguiente paso consiste en determinar la posición y la velocidad del satélite. A partir de estos dos vectores, es posible obtener una estimación de los elementos orbitales y, a continuación, mejorar la aproximación con el análisis de la diferencia entre las posiciones calculada y real.

Asumiendo que dos vectores de posición del satélite y el intervalo temporal entre la toma de las muestras son conocidos, la determinación de la órbita que cumple las condiciones anteriores se puede realizar a partir de diferentes técnicas. Algunas

de ellas requieren el cálculo de las soluciones de una ecuación no lineal. Nuestro objetivo es mejorar, en términos de eficiencia y estabilidad, las prestaciones de los esquemas clásicos a partir de su sustitución por métodos novedosos.

El método original de la determinación de la órbita denominado Iteración de la Anomalía Verdadera (IAV) incluye el uso del esquema de la secante. En el método modificado que introducimos, descrito en la Sección 7.3, se utilizan diferentes métodos libres de derivadas de alto orden de convergencia.

Actualmente, los cálculos de la posición de un satélite son críticos. Algunas aplicaciones son el control de navegación, el seguimiento y supervisión de satélites artificiales, la exploración del campo gravitatorio o el estudio del nivel del mar. Asimismo, el conocimiento de la trayectoria de un satélite es fundamental para prever el uso de baterías autónomas ante un eclipse Solar [34].

7.2 El problema de dos cuerpos

Sean M y m las masas de los cuerpos primario (Tierra) y secundario (satélite), respectivamente, G la constante de gravitación universal y μ el parámetro gravitacional, definido por $\mu = G(M + m) \approx GM$. Aplicando la ley de Newton a cada masa y sumando ambas expresiones se obtiene:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0,$$

donde la magnitud del vector de posición \vec{r} es (ver [31])

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}. \quad (7.1)$$

La Figura 7.1 ilustra los elementos orbitales que intervienen en el desarrollo de las expresiones matemáticas asociadas, descritas a continuación. La ecuación (7.1) puede ser interpretada como una cónica, siendo p el semiparámetro de la cónica, e su excentricidad ($0 < e < 1$) y el ángulo polar ν es la anomalía verdadera. Esta es la distancia angular entre el perigeo (el punto más próximo entre la órbita y la Tierra) y la posición actual del satélite, medida desde el foco de la elipse.

La velocidad escalar del satélite, dada por la Ecuación Vis-Viva [31], se puede obtener como:

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)},$$

siendo a el semieje mayor de la cónica ($0 < a < \infty$).

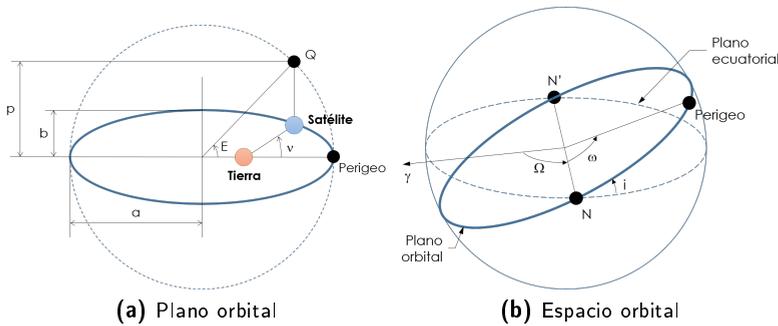


Figura 7.1: Mecánica orbital

La posición del satélite en el plano de la órbita se puede determinar a partir de dos ángulos: las anomalías excéntrica y verdadera. Consideremos la órbita inscrita en una circunferencia cuyo radio es el semieje mayor de la elipse. El ángulo central de la circunferencia desde el perigeo hasta la proyección vertical Q de la posición actual del satélite es denominada anomalía excéntrica E .

Existen un conjunto de parámetros de la órbita, denominados elementos orbitales o Keplerianos y denotados por $(a, e, i, \omega, \Omega, \tau)$, que determinan la posición y la velocidad de un satélite en el espacio (y viceversa). La inclinación i es la distancia angular entre el ecuador y el plano de la órbita. El equinoccio vernal γ apunta la dirección en la que el Sol cruza directamente sobre el ecuador en primavera, y establece el origen de la recta ascensión. La línea de nodos es la intersección de los planos orbital y ecuatorial. Los puntos inicial y final de la línea de nodos son N y N' , es decir, los nodos ascendente y descendente, respectivamente. Ω es la recta ascensión del nodo ascendente N , es decir, la distancia angular entre la dirección de γ y N sobre el plano ecuatorial. El argumento del perigeo ω es la distancia angular entre N y el perigeo sobre el plano orbital. El perigeo es el punto más próximo de la órbita elíptica al foco, de forma que la época del perigeo τ es el instante en el que el satélite cruza el perigeo.

En el método IAV, la órbita se obtiene resolviendo una ecuación no lineal, definida por la diferencia entre la época del perigeo real y la calculada a partir del resto de elementos orbitales.

7.3 Determinación de una órbita preliminar a partir de dos posiciones y el intervalo temporal

En la Sección 7.2 hemos comprobado que una órbita se puede determinar a partir de la posición y la velocidad del satélite. En [31] se utilizan métodos que emplean diferente información de las observaciones, tales como dos vectores de posición y el intervalo temporal, ángulos o información mixta.

A partir de dos vectores de posición del satélite y del intervalo temporal entre las muestras, $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ y $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$, podemos obtener la velocidad del satélite a partir de

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{r}_2 - f\vec{r}_1}{g}, \quad (7.2)$$

siendo f y g las series (descritas en [31]) que determinaremos más adelante.

7.3.1 Iteración de la anomalía verdadera

Sea d_ν la distancia angular entre las anomalías verdaderas de \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , disponibles a partir de los datos y de (7.2). Sea Δt el intervalo temporal entre la toma de las dos muestras. El algoritmo de este método, para determinar la órbita preliminar, tiene los siguientes pasos:

1. Estimación inicial de ν_1 : $\hat{\nu}_1$.
2. Cálculo de $\hat{\nu}_2 = \hat{\nu}_1 + d_\nu$.
3. Evaluación de $e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos \hat{\nu}_1 - r_2 \cos \hat{\nu}_2}$. Si $e \notin (0, 1)$ volver al paso 2, incrementando $\hat{\nu}_1$ en 10° .
4. Determinación de $a = \frac{r_1(1+e \cos \hat{\nu}_1)}{1-e^2}$. Si $a < 0$ volver al paso 2, incrementando $\hat{\nu}_1$ en 10° .
5. Obtención de las anomalías excéntricas estimadas, E_1 y E_2 a partir de

$$\sin E_i = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \hat{\nu}_i}{1+e \cos \hat{\nu}_i}, \quad \cos E_i = \frac{\cos \hat{\nu}_i + e}{1+e \cos \hat{\nu}_i}, \quad i = 1, 2.$$

6. Evaluación de la función no lineal definida por la diferencia entre la época del perigeo dada por las observaciones reales y por los cálculos derivados de la estimación de la anomalía verdadera,

$$F = k \cdot \Delta t - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [E_2 - E_1 + e (\sin E_1 - \sin E_2)],$$

siendo $k = 0.07436574(e \cdot r)^{3/2}/min.$

(a) Si $|F| > \epsilon_1 \rightarrow F^* = F, (\hat{v}_1)_0 = \hat{v}_1.$

Volver al paso 2, incrementando \hat{v}_1 en $2e - 7^\circ.$

Al alcanzar el paso 6 se aplica el método de la secante:

$$(\hat{v}_1)_1 = (\hat{v}_1)_0 - \frac{F^*}{dF}, \text{ siendo } dF = \frac{F-F^*}{2e-7}.$$

Mientras $|(\hat{v}_1)_1 - (\hat{v}_1)_0| > \epsilon_2,$ volver al paso 2 tomando $\hat{v}_1 = (\hat{v}_1)_1.$

(b) Si $|F| < \epsilon_1 \rightarrow$ ir al paso 7.

7. Obtención de las series f y g :

$$f = 1 - \frac{a}{r_1} [1 - \cos(E_2 - E_1)],$$

$$g = k \cdot \Delta t - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)].$$

8. Cálculo de la velocidad a partir de (7.2).

Una vez la posición y la velocidad quedan determinadas, el cálculo de los elementos orbitales es inmediato [31]. La Figura 7.2 ilustra el algoritmo a partir de un diagrama de flujo para facilitar su comprensión.

7.3.2 Métodos libres de derivadas de alto orden

Para mejorar la eficiencia del método IAV, vamos a sustituir el método de la secante que aparece en el paso 6 por métodos iterativos libres de derivadas de alto orden de convergencia. Es conocido que el método de la secante (SEC) está basado en el método de Newton (NEW), cuya expresión viene determinada por

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

Bajo este esquema, si sustituimos la derivada $f'(z_n)$ por la diferencia finita progresiva $f'(z_n) \approx \frac{f(z_n+f(z_n))-f(z_n)}{f(z_n)}$ se obtiene el conocido método de Steffensen (STF)

$$z_{n+1} = z_n - \frac{[f(z_n)]^2}{f(z_n + f(z_n)) - f(z_n)}.$$

Una técnica utilizada de forma habitual para la mejora del orden de convergencia local es la composición de dos métodos iterativos de órdenes p_1 y $p_2,$ dando lugar

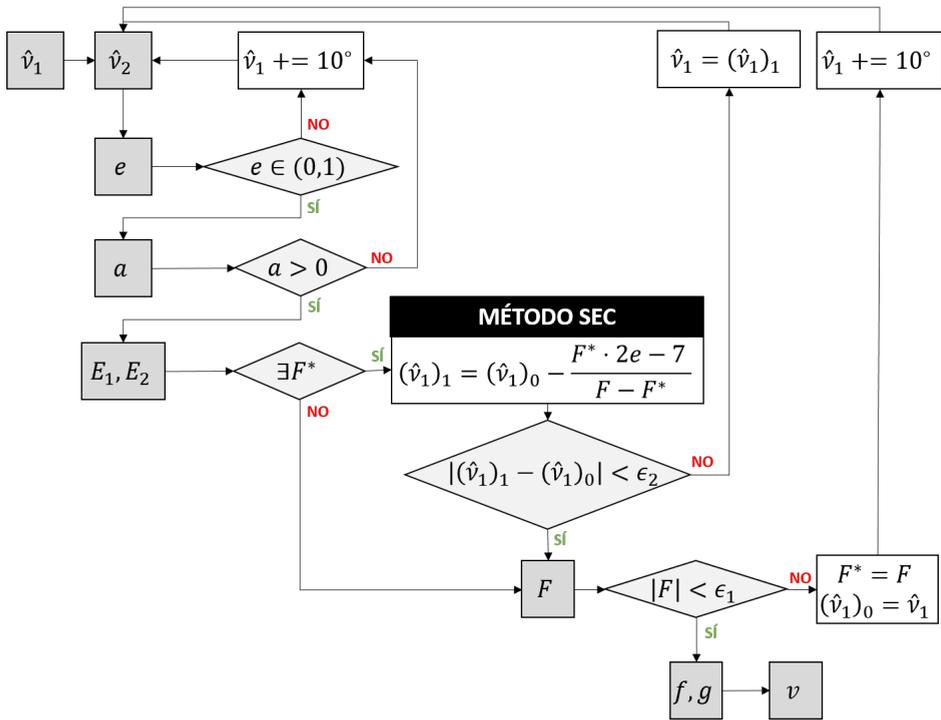


Figura 7.2: Diagrama de flujo del algoritmo de la determinación de una órbita preliminar

a un método de orden $p_1 \cdot p_2$ como se describe en [55]. Además, se tienen que realizar determinadas aproximaciones para evitar el aumento de las evaluaciones funcionales, de forma que se mantenga el orden de convergencia. Así pues, vamos a introducir algunos de los métodos compuestos.

Liu et al. diseñaron en [47] un método de cuarto orden a partir de la composición de STF y NEW, utilizando una nueva estimación de la derivada. El esquema lo denotamos por LZZ (Liu-Zheng-Zhao) y su expresión iterativa es

$$z_{n+1} = y_n - \frac{f[z_n, y_n] - f[y_n, v_n] + f[z_n, v_n]}{(f[z_n, y_n])^2} f(y_n),$$

siendo y_n la iteración de STF, $v_n = z_n + f(z_n)$ y $f[\cdot, \cdot]$ la diferencia dividida de orden uno.

Cordero y Torregrosa presentaron en [17] una familia paramétrica de métodos óptimos de cuarto orden libres de derivadas. La expresión iterativa de esta familia

es

$$z_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{\frac{f(y_n) - \beta f(v_n)}{y_n - v_n} + \frac{f(y_n) - \delta f(z_n)}{y_n - z_n}},$$

siendo de nuevo y_n la iteración de STF, $v_n = z_n + f(z_n)$ y los parámetros β y δ tales que verifican $\beta + \delta = 1$. En la sección numérica tomaremos $\beta = 1$ y $\delta = 0$, nombrando a este método por CT.

Los autores diseñaron en [22] un nuevo método de orden cuatro libre de derivadas utilizando una aproximación de Padé de grado uno. A partir de la composición de este método de orden cuatro con NEW, y utilizando una aproximación de Padé de grado dos, obtuvieron un método óptimo de octavo orden libre de derivadas, denotado por M8 y descrito en [22], cuya expresión iterativa es

$$z_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{b_2 - b_1 b_4},$$

donde $u_n = y_n - \frac{f(y_n)f(z_n, v_n)}{f[z_n, y_n]f[y_n, v_n]}$ es el método de cuarto orden mencionado previamente, $b_1 = f(u_n)$, $b_2 = f[y_n, u_n] - b_3(y_n - u_n) + b_4 f(y_n)$, $b_3 = f[y_n, u_n, v_n] + b_4 f[y_n, v_n]$, $b_4 = \frac{f[y_n, u_n, z_n] - f[y_n, u_n, v_n]}{f[y_n, v_n] - f[y_n, z_n]}$ y $f[\cdot, \cdot, \cdot]$ es la diferencia dividida de orden dos.

Para comparar estos métodos utilizaremos el **índice de eficiencia** $I = p^{1/d}$, donde p es el orden de convergencia y d es el número de evaluaciones de la función f en cada paso. Kung y Traub conjeturaron en [46] que $p \leq 2^{d-1}$ para métodos sin memoria. Si el orden de convergencia de estos métodos alcanza el límite 2^{d-1} se denomina **método óptimo**. Salvo el método SEC, el resto de métodos descritos en esta sección son óptimos. En la Tabla 7.1 se muestran los índices de eficiencia de estos esquemas.

Método	NEW	SEC	STF	LZZ	CT	M8
p	2	1.618	2	4	4	8
d	2	2	2	3	3	3
I	1.4142	1.2720	1.4142	1.5874	1.5874	1.6818

Tabla 7.1: Comparativa de los métodos

7.3.3 Resultados numéricos

Los cálculos numéricos se han llevado a cabo utilizando aritmética de precisión variable con 500 dígitos significativos en MATLAB® R2009B. El criterio de parada ha sido $|z_{n+1} - z_n| < 10^{-498}$.

Sobre cada método se han aplicado diferentes referencias orbitales que pueden ser encontradas en [31]. El estudio está basado en la peor estimación inicial, es decir, el valor de ν_0 que fuerza al método SEC a realizar la máxima cantidad de iteraciones. En la Tabla 7.2 se muestran los valores de ν_0 en grados y Δt en días Julianos (el intervalo temporal entre las dos muestras de la posición) para cada referencia orbital.

Referencia	ν_0	Δt
I	156.8515	0.01044412
II	68.7325	0.01527809
III	165.9299	0.01316924

Tabla 7.2: Parámetros de cada referencia orbital

Los resultados de las simulaciones se recogen en la Tabla 7.3. Para cada método, se calcula el último valor $|z_{n+1} - z_n|$, el número de iteraciones requeridas para alcanzar la tolerancia definida en el criterio de parada, el retardo medio (obtenido a través del comando tic-toc de MATLAB®, tras 100 ejecuciones del programa) y el orden de convergencia computacional aproximado ρ definido en [18] como

$$p \approx \rho = \frac{\log\left(\frac{|z_{n+1} - z_n|}{|z_n - z_{n-1}|}\right)}{\log\left(\frac{|z_n - z_{n-1}|}{|z_{n-1} - z_{n-2}|}\right)}.$$

Las especificaciones del sistema de computación son: INTEL®CORE™ i7 CPU, 950@3.07 GHz con 16.00 GB de RAM.

A partir de la Tabla 7.3 se pueden obtener diferentes conclusiones. Los métodos LZZ, CT y M8 tienen un mayor orden de convergencia computacional que SEC y STF, de modo que el número de iteraciones necesitadas para alcanzar el criterio de parada disminuye conforme el orden del método aumenta.

Centrándonos en los métodos de cuarto orden, CT tiene un mejor comportamiento que LZZ bajo el retardo medio.

Ref	Parámetro	SEC	STF	LZZ	CT	M8
I	$ z_{n+1} - z_n $	3.39e-319	1.02e-186	2.82e-305	9.33e-216	2.89e-136
	Iter	56	12	7	6	5
	ρ	1	2	4	4	8.24
	Retardo	18.2864	2.7509	2.5310	2.2068	1.4625
II	$ z_{n+1} - z_n $	3.95e-323	1.74e-258	1.35e-173	1.74e-133	1.62e-74
	Iter	63	15	7	6	5
	ρ	1	2	4	4	7.75
	Retardo	15.7550	3.0288	2.1762	1.8823	1.4507
III	$ z_{n+1} - z_n $	3.63e-318	1.20e-233	1.26e-160	1.29e-262	1.33e-260
	Iter	105	28	7	6	5
	ρ	1	2	4	4	8
	Retardo	22.5885	7.0391	2.5951	2.2656	1.6436

Tabla 7.3: Resultados numéricos para las referencias orbitales I, II y III

El método M8 es el que mejor índice de eficiencia posee, de forma que, por un lado, es el que menor número de iteraciones requiere y, por otro, es el más rápido.

En general, todos los métodos IAV modificados muestran un mejor comportamiento que el método clásico SEC, en términos de estabilidad y eficiencia.

Conclusiones y líneas futuras

8.1 Conclusiones

Las acciones que se han realizado a lo largo de esta Tesis se resumen a continuación.

- Se ha realizado el análisis de la dinámica compleja asociada a los métodos conocidos de Newton, Steffensen, King, Kim y Cordero-Torregrosa.
- Se han diseñado los métodos M1 y M2 en el Capítulo 4 a partir de la familia de King, tomando diferentes expresiones de $H(t)$. Se han diseñado los métodos M4, M8 y M16 a partir de la técnica de composición de métodos, con las sucesivas composiciones de Newton y Steffensen y la estimación de la derivada a partir de la aproximación de Padé. Se ha realizado el análisis complejo a todos estos métodos, obteniendo sus puntos fijos (normales y extraños), sus puntos críticos (normales y libres).
- Se han obtenido las características dinámicas de los métodos, haciendo especial hincapié en aquellos métodos uniparamétricos en los que los comportamientos varían en función del parámetro.
- Se han realizado demostraciones del orden de convergencia para la familia de métodos de King.

- Se han implementado rutinas en MATLAB® para la representación de planos dinámicos y planos de parámetros.
- Se ha realizado el análisis de la estabilidad de los métodos de Steffensen, M1, M2 y M4 a partir de la representación de sus planos de parámetros.
- Se han representado los planos dinámicos de los distintos métodos cuando se aplican sobre polinomios de grados dos, tres y cuatro.
- Se han aplicado los métodos iterativos para mejorar las prestaciones de un algoritmo clásico de cara a obtener la órbita preliminar de un satélite artificial.

A modo de resumen, presentamos una serie de planos dinámicos, correspondientes a los métodos presentados en el Capítulo 2. La Figura 8.1 muestra los planos dinámicos cuando los métodos se aplican sobre polinomios del tipo $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$, $\lambda = \{\pm 1, \pm i\}$. Los planos dinámicos se han obtenido para los valores de $z \in [-2, 2] + i[-2, 2]$.

Del mismo modo, la Figura 8.2 ilustra los planos dinámicos de los mismos métodos que la Figura 8.1 pero, en este caso, cuando se aplica sobre polinomios del tipo $f_\lambda(z) = z^3 + \lambda$, con $\lambda = \{\pm 1, \pm i\}$.

Las conclusiones obtenidas tras el trabajo de investigación realizado se resumen a continuación.

- Los planos de parámetros posibilitan la realización de un estudio previo del comportamiento dinámico de una familia uniparamétrica de métodos iterativos. Su resultado permite la elección de un miembro de la familia cuya estabilidad quede garantizada.
- Los planos dinámicos ilustran el comportamiento de una gran cantidad de puntos iniciales, aportando una idea muy intuitiva del estado final de la órbita de cada uno de estos puntos. Asimismo, las características de las cuencas de atracción de cada plano dinámico aportan una información muy valiosa al respecto de las propiedades de cada método.
- La dimensión fractal aporta una cuantificación de los conjuntos de Julia asociados a cada uno de los métodos, si bien es cierto que no aporta un valor universal, puesto que el resultado varía para diferentes implementaciones del algoritmo de box-counting, la precisión de los puntos, los píxeles sobre los que se calcula y otras variables.

- Los planos dinámicos de los métodos libres de derivadas se aproximan al método de Newton conforme se va aumentando el orden de convergencia del método. No obstante, estos métodos no cumplen el Teorema del Escalado, por lo que es necesario el estudio de diferentes miembros de la familia para comprender el comportamiento global.
- Las cuencas de atracción de los métodos con parámetros reales tienen simetría respecto del eje de abscisas, correspondiendo cada semiplano a un punto fijo atractor diferente. A nivel computacional, será suficiente con obtener el plano dinámico de un semiplano para extender los resultados al semiplano contrario.
- Las cuencas de atracción de los métodos con parámetros complejos tienen simetría con sus conjugados respecto del eje de abscisas. De este modo, dado un plano dinámico en el que el parámetro es $\lambda = a + ib$, la obtención del plano dinámico correspondiente al parámetro $\bar{\lambda} = a - ib$ es inmediata.

8.2 Líneas futuras

Tras la investigación realizada y los resultados obtenidos, se presentan una serie de líneas futuras que se sintetizan a continuación.

- Diseño de métodos iterativos óptimos libres de derivadas sin memoria de mayores órdenes de convergencia.
- Estudio de la dinámica real asociada a los métodos iterativos implementados.
- Aplicación de los métodos iterativos libres de derivadas sobre sistemas.
- Diseño de métodos iterativos con memoria para su aplicación sobre filtros digitales de señal.

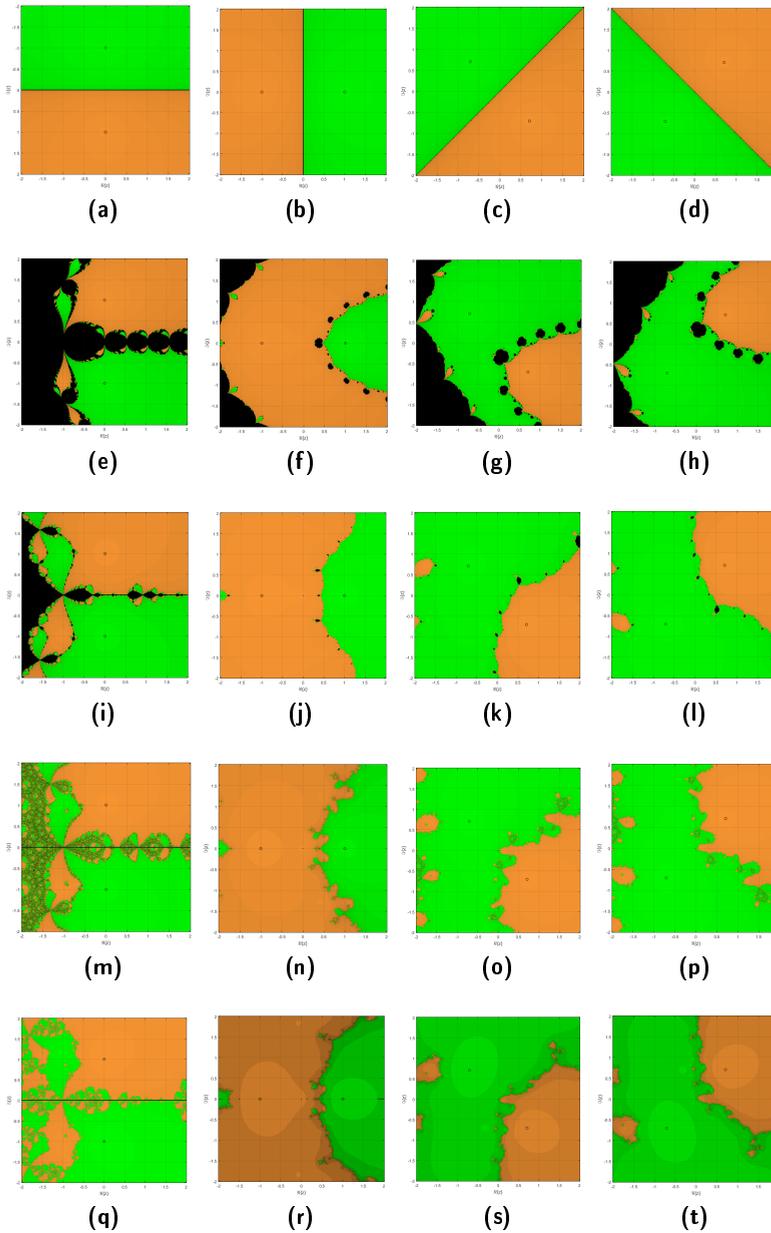


Figura 8.1: Planos dinámicos de los métodos Newton (a-d), Steffensen (e-h), Cordero-Torregrosa (i-l), M4 (m-o), M8 (p-s) sobre $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ con $\lambda = 1$ (primera columna), $\lambda = -1$ (segunda columna), $\lambda = i$ (tercera columna) $\lambda = -i$ (cuarta columna)

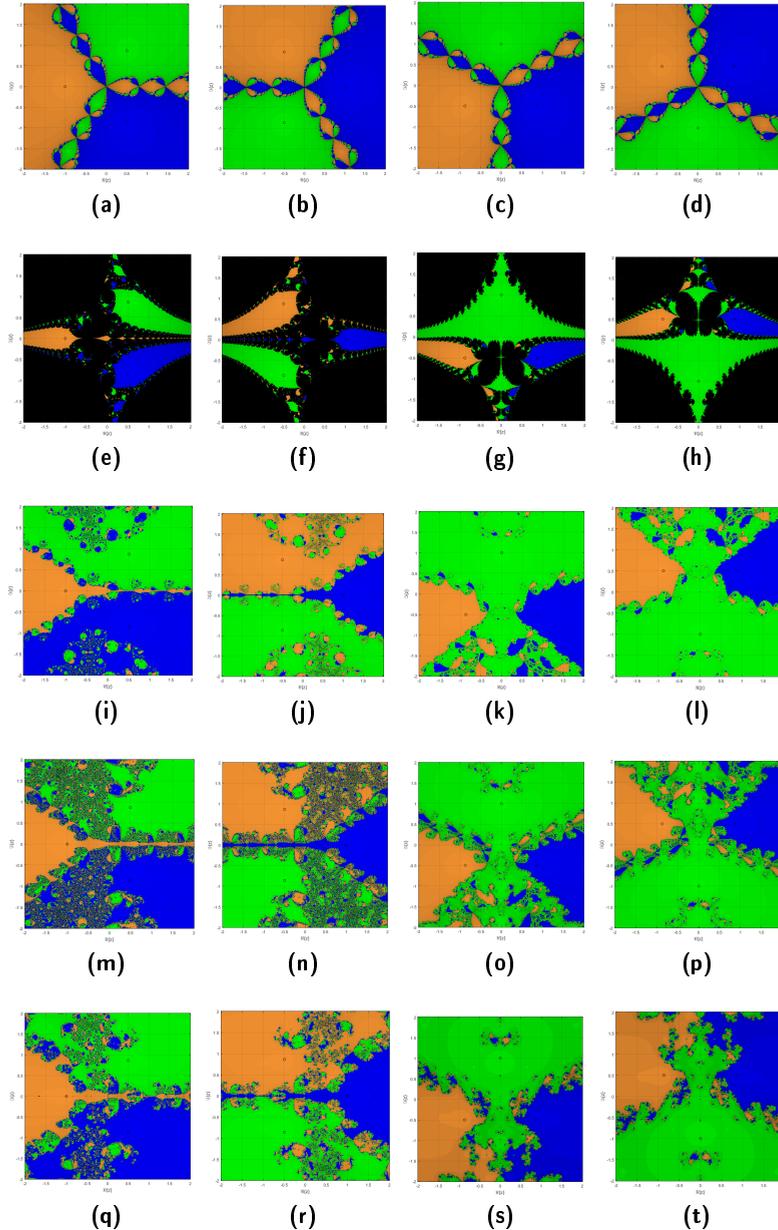


Figura 8.2: Planos dinámicos de los métodos Newton (a-d), Steffensen (e-h), Cordero-Torregrosa (i-l), M4 (m-o), M8 (p-s) sobre $f_\lambda(z) = z^3 + \lambda$ con $\lambda = 1$ (primera columna), $\lambda = -1$ (segunda columna), $\lambda = i$ (tercera columna) $\lambda = -i$ (cuarta columna)

Apéndice A

Catálogo de méritos

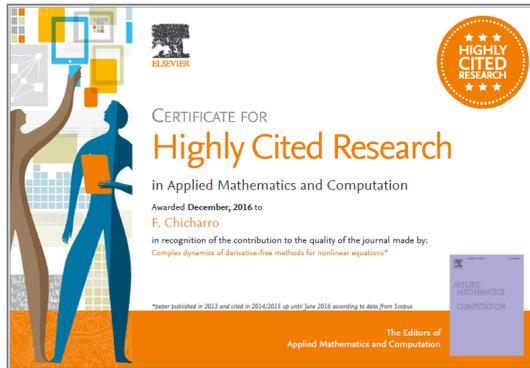
A.1 Publicaciones

La Tabla A.1 recoge la información de las publicaciones, actualizada a marzo de 2017.

Referencia	Año publicación	Citas (Google Scholar)	Citas (Scopus)
[3]	2013	15	9
[14]	2013	71	49
[11]	2013	1	1
[12]	2013	59	20
[13]	2015	2	2

Tabla A.1

[14] obtuvo el certificado de **Highly Cited Research** en la revista *Applied Mathematics and Computation* en diciembre de 2016, como se muestra a continuación.



A.2 Congresos

A lo largo de los estudios de Doctorado se ha participado en los siguientes congresos:

- Mathematical Modelling in Engineering and Human Behaviour 2011. Valencia 2011.
 - Improvements of true anomaly iteration method for preliminary orbit determination.
- VI Jornadas de Análisis Numérico y Aplicaciones. Logroño 2011.
 - Dimensión fractal de métodos iterativos aplicados a la determinación de órbitas de satélites.
- Dinámica, Atractores y No Linealidad. Caos y Estabilidad. Ddays 2012. Benicàssim 2012.
- 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. La Manga 2012.
 - A family of optimal fourth-order iterative methods and its dynamics.
- 8th International Conference on Engineering Computational Technology. Dubrovnik (Croacia) 2012.
 - Dynamic behaviour of Steffensen-type methods.

- Mathematical Modelling in Engineering and Human Behaviour 2012. Valencia 2012.
 - A comparative analysis between some iterative methods from a dynamical point of view.
- VII Jornadas de Análisis Numérico y Aplicaciones. Logroño 2012.
 - Dinámica compleja y dimensión fractal de métodos de tipo Steffensen.

A.3 Otros méritos

A.3.1 Relacionados con el área de Matemáticas

- Generación de la asignatura “Sistemas dinámicos discretos y continuos” del Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación de la Universidad Internacional de La Rioja. Curso 2016-2017.
- Trabajo final de carrera “Dimensión fractal de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales. Aplicación a la determinación de órbitas de satélites artificiales” para la obtención del título de Ingeniero en Telecomunicación. Presentado el 28/09/2011. Calificación: 10 (M. H.).
- Beca formativa de colaboración con el Instituto de Matemática Multidisciplinar, de la Universitat Politècnica de València (Código 10/0073). Período 01/03/2011 - 30/09/2011.
- Beca formativa de colaboración con el Instituto de Matemática Pura y Aplicada, de la Universitat Politècnica de València (Proyecto PAID 06-2010, Ref. E2677). Período 01/02/2012 - 30/09/2012

A.3.2 Relacionados con el área de Ingeniería

- Titulaciones
 - Ingeniero en Telecomunicaciones, por la Universitat Politècnica de València.
 - Máster en Tecnologías, Sistemas y Redes de Comunicaciones, por la Universitat Politècnica de València.

- Becas formativas
 - Beca del Subprograma de Formación de Personal Investigador del Ministerio de Economía y Competitividad, asociado al Proyecto Nacional TEC2011-26642 NEWTON (New generation optical OFDM transmission techniques for future WDM PONs), en el Instituto de Telecomunicaciones y Aplicaciones Multimedia, de la Universitat Politècnica de València. Período 01/12/2012 - 30/11/2016.
 - Estancia Breve dentro del programa de movilidad predoctoral del Ministerio de Economía y Competitividad en Instituto de Telecomunicações de la Universidade de Aveiro (Portugal). Período 03/03/2015 - 21/06/2015.

- Publicaciones
 - F. I. Chicharro, B. Ortega, J. Mora, “Paired SSB optical OFDM channels for high spectral efficient signal transmission over DWDM networks,” *Optics Communications*, vol. 370, pp. 239-244, Jul 2016.
 - F. I. Chicharro, B. Ortega, M. De Diego, J. Mora, “OOFDM signal transmission using a single optical broadband source,” *Photonics Technology Letters*, vol. 29, pp. 563-566, Feb 2017.
 - F. I. Chicharro, B. Ortega, M. De Diego, J. Mora, “Broadband optical sources for low-cost WDM-MB-OFDMA networks,” *IEEE Communications Letters*, doi: 10.1109/LCOMM.2017.2702175, May 2017.

- Congresos y seminarios
 - “OFDM Techniques for Spectrally Efficient Access Networks”, en VIII Seminar in Multi-Gigabit Optical Networks, 09/06/2015, Aveiro (Portugal).
 - “Sistemas ópticos de transmisión de señales OFDM en redes DWDM con canales pareados de alta densidad espectral”, en XXXI Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio, 07/09/2016, Madrid.

A.3.3 Relacionados con el área de Idiomas

- First Certificate in English, University of Cambridge. Junio de 2014.
- Grau Superior en Coneixements de Valencià, Junta Qualificadora de Coneixements de Valencià. Julio de 2001.

Apéndice B

Código de los programas de representación de planos

B.1 Selección del método iterativo para el plano dinámico

El programa `seleccionaMetodo.m` obtiene la expresión iterativa del operador de punto fijo cuando se aplica sobre un polinomio cuadrático de la forma $f(z) = z^2 + \lambda$ o un polinomio cúbico de la forma $f(z) = z^3 + \lambda$. A este programa se le invoca desde dentro del programa principal `planoDinamico.m`.

```
1 function [m] = seleccionaMetodo(metodo,grado)
2 % Métodos: Newton, STF, CT, M4, M8, M16
3 % Grado: 2, 3
4 switch grado
5     case 2
6         F=@(Z,L) Z.^2+L; DF=@(Z) 2*Z;
7     case 3
8         F=@(Z,L) Z.^3+L; DF=@(Z) 3*Z.^2;
9 end
10 switch metodo
11     case 'Newton'
12         m=@(Z,L) Z-F(Z,L) ./DF(Z);
13     case 'STF'
14         V=@(Z,L) Z+F(Z,L);
```

```

15     m=@(Z,L)Z-F(Z,L).^2./(F(V(Z,L),L)-F(Z,L));
16 case 'CT'
17     V=@(Z,L)Z+F(Z,L);
18     Y=@(Z,L)Z-F(Z,L).^2./(F(V(Z,L),L)-F(Z,L));
19     FYV=@(Z,L)(F(Y(Z,L),L)-F(V(Z,L),L))./(Y(Z,L)-V(Z,L));
20     m=@(Z,L)Y(Z,L)-F(Y(Z,L),L)./(FYV(Z,L)+F(Y(Z,L),L))./(Y(Z,L)-Z));
21 case 'M4'
22     V=@(Z,L)Z+F(Z,L);
23     Y=@(Z,L)Z-F(Z,L).^2./(F(V(Z,L),L)-F(Z,L));
24     FZV=@(Z,L)(F(Z,L)-F(V(Z,L),L))./(Z-V(Z,L));
25     FZY=@(Z,L)(F(Z,L)-F(Y(Z,L),L))./(Z-Y(Z,L));
26     FYV=@(Z,L)(F(Y(Z,L),L)-F(V(Z,L),L))./(Y(Z,L)-V(Z,L));
27     m=@(Z,L)Y(Z,L)-F(Y(Z,L),L).*FZV(Z,L)./FZY(Z,L)./FYV(Z,L);
28 case 'M8'
29     V=@(Z,L)Z+F(Z,L);
30     Y=@(Z,L)Z-F(Z,L).^2./(F(V(Z,L),L)-F(Z,L));
31     FZV=@(Z,L)(F(Z,L)-F(V(Z,L),L))./(Z-V(Z,L));
32     FZY=@(Z,L)(F(Z,L)-F(Y(Z,L),L))./(Z-Y(Z,L));
33     FYV=@(Z,L)(F(Y(Z,L),L)-F(V(Z,L),L))./(Y(Z,L)-V(Z,L));
34     U=@(Z,L)Y(Z,L)-F(Y(Z,L),L).*FZV(Z,L)./FZY(Z,L)./FYV(Z,L);
35     FYU=@(Z,L)(F(Y(Z,L),L)-F(U(Z,L),L))./(Y(Z,L)-U(Z,L));
36     FVU=@(Z,L)(F(V(Z,L),L)-F(U(Z,L),L))./(V(Z,L)-U(Z,L));
37     FUZ=@(Z,L)(F(U(Z,L),L)-F(Z,L))./(U(Z,L)-Z);
38     FYVU=@(Z,L)(FYV(Z,L)-FVU(Z,L))./(Y(Z,L)-U(Z,L));
39     FUZY=@(Z,L)(FUZ(Z,L)-FZY(Z,L))./(U(Z,L)-Y(Z,L));
40     FZYV=@(Z,L)(FZY(Z,L)-FYV(Z,L))./(Z-V(Z,L));
41     m=@(Z,L)U(Z,L)-(F(U(Z,L),L).*FZYV(Z,L))./...
42     (FYVU(Z,L).*FUZY(Z,L).* (U(Z,L)-Z)+FZYV(Z,L).*FYU(Z,L));
43 case 'M16'
44     V=@(Z,L)Z+F(Z,L);
45     Y=@(Z,L)Z-F(Z,L).^2./(F(V(Z,L),L)-F(Z,L));
46     FZV=@(Z,L)(F(Z,L)-F(V(Z,L),L))./(Z-V(Z,L));
47     FZY=@(Z,L)(F(Z,L)-F(Y(Z,L),L))./(Z-Y(Z,L));
48     FYV=@(Z,L)(F(Y(Z,L),L)-F(V(Z,L),L))./(Y(Z,L)-V(Z,L));
49     U=@(Z,L)Y(Z,L)-F(Y(Z,L),L).*FZV(Z,L)./FZY(Z,L)./FYV(Z,L);
50     FYU=@(Z,L)(F(Y(Z,L),L)-F(U(Z,L),L))./(Y(Z,L)-U(Z,L));
51     FVU=@(Z,L)(F(V(Z,L),L)-F(U(Z,L),L))./(V(Z,L)-U(Z,L));
52     FUZ=@(Z,L)(F(U(Z,L),L)-F(Z,L))./(U(Z,L)-Z);
53     FYVU=@(Z,L)(FYV(Z,L)-FVU(Z,L))./(Y(Z,L)-U(Z,L));
54     FUZY=@(Z,L)(FUZ(Z,L)-FZY(Z,L))./(U(Z,L)-Y(Z,L));
55     FZYV=@(Z,L)(FZY(Z,L)-FYV(Z,L))./(Z-V(Z,L));
56     W=@(Z,L)U(Z,L)-(F(U(Z,L),L).*FZYV(Z,L))./...
57     (FYVU(Z,L).*FUZY(Z,L).* (U(Z,L)-Z)+FZYV(Z,L).*FYU(Z,L));
58     FZW=@(Z,L)(F(Z,L)-F(W(Z,L),L))./(Z-W(Z,L));
59     FYW=@(Z,L)(F(Y(Z,L),L)-F(W(Z,L),L))./(Y(Z,L)-W(Z,L));
60     FVW=@(Z,L)(F(V(Z,L),L)-F(W(Z,L),L))./(V(Z,L)-W(Z,L));
61     FUW=@(Z,L)(F(U(Z,L),L)-F(W(Z,L),L))./(U(Z,L)-W(Z,L));
62     FZYW=@(Z,L)(FZY(Z,L)-FYW(Z,L))./(Z-W(Z,L));
63     FYVW=@(Z,L)(FYV(Z,L)-FVW(Z,L))./(Y(Z,L)-W(Z,L));
64     FVUW=@(Z,L)(FVU(Z,L)-FUW(Z,L))./(V(Z,L)-W(Z,L));
65     FZYVW=@(Z,L)(FZYV(Z,L)-FYVW(Z,L))./(Z-W(Z,L));
66     FZYVU=@(Z,L)(FZYV(Z,L)-FYVU(Z,L))./(Z-U(Z,L));
67     FYVUW=@(Z,L)(FYVU(Z,L)-FVUW(Z,L))./(Y(Z,L)-W(Z,L));

```

```

68     FZYVUW=@(Z,L)(FZYVU(Z,L)-FYVUW(Z,L))./(Z-W(Z,L));
69     c5=@(Z,L)-FZYVUW(Z,L)./FZYVU(Z,L);
70     c4=@(Z,L)FZYVW(Z,L)+c5(Z,L).*FZYV(Z,L);
71     c3=@(Z,L)FZYW(Z,L)-c4(Z,L).*(Z-Y(Z,L)-2*W(Z,L))+...
72         c5(Z,L).*FZY(Z,L);
73     m=@(Z,L)W(Z,L)-F(W(Z,L),L)./(FZW(Z,L)+(Z-W(Z,L)).*(c5(Z,L).*...
74         FZW(Z,L)-c3(Z,L)-c4(Z,L).*(Z-W(Z,L))));
75 end

```

B.2 El plano dinámico

Código del programa para generar planos dinámicos.

```

1  function [Z,I]=planoDinamico(metodo,grado,parametro,reZ,imZ,maxiter)
2  % Metodo: Newton, STF, CT, M4, M8, M16
3  % Grado: 2, 3
4  % Parámetro: $\lambda$
5  % reZ: parte real de los puntos de z del plano dinámico
6  % imZ: parte imaginaria de los puntos de z del plano dinámico
7  % maxiter: número máximo de iteraciones
8  % Z: valor final de la órbita de cada punto del plano complejo
9  % I: imagen del plano dinámico
10
11 % Inicialización de las variables
12 puntos=length(reZ);
13 [RZ,IZ]=meshgrid(reZ,imZ); Z=RZ+1i*IZ;
14 iter=1; dZ=1;
15 R=zeros(puntos,puntos); G=R; B=R;
16 IT=maxiter*ones(size(Z));
17 % Selección del método iterativo
18 m=seleccionaMetodo(metodo,grado);
19 % Obtención de los puntos fijos atractores
20 p=zeros(1,grado+1); p(1)=1; p(end)=parametro; r=roots(p);
21 % Ejecución del método iterativo
22 while iter<=maxiter&&dZ>1e-12
23     Z0=Z;
24     Z=m(Z0,parametro);
25     Z0a=Z0(:); Za=Z(:);
26     [a]=find(isinf(Za)); Za(a)=[]; Z0a(a)=[];
27     [a]=find(isnan(Za)); Za(a)=[]; Z0a(a)=[];
28     dZ=norm([real(Za)-real(Z0a) imag(Za)-imag(Z0a)]);
29     iter=iter+1;
30     for fil=1:puntos
31         for col=1:puntos
32             Zfc=Z(fil,col);
33             if norm([real(Zfc)-real(r(1)) imag(Zfc)-imag(r(1))])<1e-9
34                 R(fil,col)=1; G(fil,col)=153/255; B(fil,col)=51/255;
35                 IT(fil,col)=min([iter,IT(fil,col)]);
36             else if norm([real(Zfc)-real(r(2)) imag(Zfc)-imag(r(2))])<1e-9

```

```

37         G(fil,col)=1;
38         IT(fil,col)=min([iter,IT(fil,col)]);
39     else if grado==3
40         if norm([real(Zfc)-real(r(3)) imag(Zfc)-imag(r(3))])<1e-9
41             B(fil,col)=1;
42             IT(fil,col)=min([iter,IT(fil,col)]);
43         end
44     end
45 end
46 end
47 end
48 end
49 end
50 maxiter=iter;
51 % Generación de la imagen
52 I(:, :, 1)=R.*(maxiter-IT)./maxiter;
53 I(:, :, 2)=G.*(maxiter-IT)./maxiter;
54 I(:, :, 3)=B.*(maxiter-IT)./maxiter;
55 % Representación de la imagen
56 figure, imagesc(reZ,imZ,I); axis square, axis xy,
57 xlabel('\Re\{z\}'), ylabel('\Im\{z\}')
58 hold on, plot(real(r),imag(r),'ko'), grid,
59 if parametro<0
60     par=num2str(parametro);
61 else
62     par=strcat('+',num2str(parametro));
63 end
64 title(strcat(metodo, ': z^', num2str(grado), par))

```

B.3 Selección del método iterativo para el plano de parámetros

El programa selecciona MetodoPar.m obtiene la expresión iterativa del operador de punto fijo cuando se aplica sobre un polinomio cuadrático de la forma $f(z) = z^2 + \lambda$. A este programa se le invoca desde dentro del programa principal planoParametros.m.

```

1 function [m,ZC,ZF] = seleccionaMetodoPar(metodo)
2 % Métodos: STF, CT, M4
3 % Grado: 2
4
5 switch metodo
6     case 'STF'
7         F=@(Z,L) Z.^2+L;
8         ZC=@(L) -2+sqrt(2-L);
9         ZF={@(L) 1i*sqrt(L);
10             @(L) -1i*sqrt(L)};
11         V=@(Z,L) Z+F(Z,L);
12         m=@(Z,L) Z-F(Z,L).^2./(F(V(Z,L),L)-F(Z,L));
13     case 'CT'
14         F=@(Z,L) Z.^2+L;

```

```

15     ZC=@(L)-2+sqrt(2-L);
16     ZF=@(L)1i*sqrt(L);
17     @(L)-1i*sqrt(L));
18     V=@(Z,L)Z+F(Z,L);
19     Y=@(Z,L)Z-F(Z,L).^2./(F(V(Z,L),L)-F(Z,L));
20     FYZ=@(Z,L)(F(Y(Z,L),L)-F(V(Z,L),L))./(Y(Z,L)-V(Z,L));
21     m=@(Z,L)Y(Z,L)-F(Y(Z,L),L)./(FYV(Z,L)+F(Y(Z,L),L)./(Y(Z,L)-Z));
22     case 'M4'
23         F=@(Z,L)Z.^2+L;
24         ZC=@(L)-1-sqrt(-L);
25         ZF=@(L)1i*sqrt(L);
26         @(L)-1i*sqrt(L));
27         V=@(Z,L)Z+F(Z,L);
28         Y=@(Z,L)Z-F(Z,L).^2./(F(V(Z,L),L)-F(Z,L));
29         FZV=@(Z,L)(F(Z,L)-F(V(Z,L),L))./(Z-V(Z,L));
30         FZY=@(Z,L)(F(Z,L)-F(Y(Z,L),L))./(Z-Y(Z,L));
31         FYZ=@(Z,L)(F(Y(Z,L),L)-F(V(Z,L),L))./(Y(Z,L)-V(Z,L));
32         m=@(Z,L)Y(Z,L)-F(Y(Z,L),L).*FZV(Z,L)./FZY(Z,L)./FYV(Z,L);
33
34     end

```

B.4 El plano de parámetros

Código del programa para generar planos de parámetros.

```

1 function [Z,I,maxiter]=planoParametros(metodo,reL,imL,maxiter)
2 % Metodo: STF, CT, M4
3 % Grado: 2
4 % reL: parte real de los puntos de lambda del plano de parametros
5 % imL: parte imaginaria de los puntos de lambda del plano de parametros
6 % maxiter: número máximo de iteraciones
7 % Z: valor final de la órbita de cada punto del plano complejo
8 % I: imagen del plano dinámico
9
10 % Inicialización de las variables
11 [RL,IL]=meshgrid(reL,imL); L=RL+1i*IL;
12 iter=1; dZ=1;
13 R=zeros(size(L)); G=R; B=R;
14 IT=maxiter*ones(size(L));
15 % Selección del método iterativo
16 [m,C,F]=seleccionaMetodoPar(metodo);
17 ZC=C(L); F1=F{1}(L); F2=F{2}(L);
18 Z0=ZC;
19 % Obtención de los puntos fijos atractores
20 % p=zeros(1,grado+1); p(1)=1; p(end)=parametro; r=roots(p);
21 % Ejecución del método iterativo
22 while iter<=maxiter&&dZ>1e-12
23     Z=m(Z0,L);
24     Z0a=Z0(:); Za=Z(:);

```

```

25     [a]=find(isinf(Za)); Za(a)=[]; Z0a(a)=[];
26     [a]=find(isnan(Za)); Za(a)=[]; Z0a(a)=[];
27     dZ=norm([real(Za)-real(Z0a) imag(Za)-imag(Z0a)]);
28     iter=iter+1; Z0=Z;
29     for fil=1:size(L,1)
30         for col=1:size(L,2)
31             Zfc=Z(fil,col); ZF1=F1(fil,col); ZF2=F2(fil,col);
32             if norm([real(Zfc)-real(ZF1) imag(Zfc)-imag(ZF1)])<1e-9
33                 R(fil,col)=1; G(fil,col)=1;
34                 IT(fil,col)=min([iter,IT(fil,col)]);
35             else if norm([real(Zfc)-real(ZF2) imag(Zfc)-imag(ZF2)])<1e-9
36                 R(fil,col)=1; B(fil,col)=80/255; G(fil,col)=80/255;
37                 IT(fil,col)=min([iter,IT(fil,col)]);
38             end
39         end
40     end
41 end
42 end
43 end
44 maxiter=iter;
45 % Generación de la imagen
46 I(:, :, 1)=R.*(maxiter-IT)./maxiter;
47 I(:, :, 2)=G.*(maxiter-IT)./maxiter;
48 I(:, :, 3)=B.*(maxiter-IT)./maxiter;
49 % Representación de la imagen
50 figure, imagesc(reL,imL,I); axis square, axis xy,
51 xlabel('\Re\{\lambda\}'), ylabel('\Im\{\lambda\}'),grid
52 title(strcat('Plano de parámetros del método ',metodo))

```

Bibliografía

- [1] S. Amat, S. Busquier y S. Plaza. "On two families of high order Newton type methods". *Applied Mathematics Letters* 25 (2012), págs. 2209-2217.
- [2] S. Amat, S. Busquier y S. Plaza. "Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view". *Scientia* 10 (2004), págs. 3-35.
- [3] S. Artidiello, F. I. Chicharro, A. Cordero y J. R. Torregrosa. "Local convergence and dynamical analysis of a new family of optimal fourth-order iterative methods". *International Journal of Computer Mathematics* 90 (2013), págs. 2049-2060.
- [4] M. Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic Press, 1988.
- [5] W. Bi, H. Ren y Q. Wu. "Three-step iterative methods with eighth-order convergence for solving nonlinear equations". *J. Computational and Applied Mathematics* 225 (2009), págs. 105-112.
- [6] M. I. Binimelis. *Una nueva manera de ver el mundo. La geometría fractal*. RBA Coleccionables, 2010.
- [7] P. Blanchard. *Complex dynamical systems*. American Mathematical Society, 1994, págs. 139-154.

- [8] P. Blanchard. *Nonlinear and global analysis*. American Mathematical Society, 1984, págs. 85-141.
- [9] L. Carleson y T. W. Gamelin. *Complex dynamics*. Springer-Verlag, 1992.
- [10] F. I. Chicharro. “Dimensión fractal de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales. Aplicación a la determinación de órbitas de satélites artificiales”. *Trabajo final de Carrera - Ingeniería en Telecomunicación: Universitat Politècnica de València* (2011).
- [11] F. I. Chicharro, A. Cordero y J. R. Torregrosa. “Derivative-free high-order methods applied to preliminary orbit determination”. *Mathematical and Computer Modelling* 57 (2011), págs. 1795-1799.
- [12] F. I. Chicharro, A. Cordero y J. R. Torregrosa. “Drawing Dynamical and Parameters Planes of Iterative Families and Methods”. *The Scientific World Journal* 780153 (2013), págs. 1-11.
- [13] F. I. Chicharro, A. Cordero y J. R. Torregrosa. “Dynamics and Fractal Dimension of Steffensen-Type Methods”. *Algorithms* 8 (2015), págs. 271-279.
- [14] F. I. Chicharro, A. Cordero, J. M. Gutiérrez y J. R. Torregrosa. “Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations”. *Applied Mathematics and Computation* 219 (2013), págs. 7023-7035.
- [15] C. Chun y B. Neta. “An analysis of a new family of eighth-order optimal methods”. *Applied Mathematics and Computation* 245 (2014), págs. 86-107.
- [16] C. Chun, M. Y. Lee, B. Neta y J. Dzunic. “On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics”. *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012), págs. 6427-6438.
- [17] A. Cordero y J. R. Torregrosa. “A class of Steffensen type methods with optimal order of convergence”. *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011), págs. 7653-7659.
- [18] A. Cordero y J. R. Torregrosa. “Variants of Newton’s method using fifth-order quadrature formulas”. *Applied Mathematics and Computation* 190 (2007), págs. 686-698.

-
- [19] A. Cordero, J. R. Torregrosa y P. Vindel. "Dynamics of a family of Chebyshev-Halley-type methods". *Applied Mathematics and Computation* 219 (2013), págs. 8568-8583.
- [20] A. Cordero, J. L. Hueso, E. Martínez y J. R. Torregrosa. "A new technique to obtain derivative-free optimal iterative methods for solving nonlinear equations". *Journal of Computer and Applied Mathematics* 252 (2013), págs. 95-102.
- [21] A. Cordero, J. García-Maimo, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva y P. Vindel. "Chaos in King's iterative family". *Applied Mathematics Letters* 26 (2013), págs. 842-848.
- [22] A. Cordero, J. L. Hueso, E. Martínez y J. R. Torregrosa. "Fourth and eighth-order optimal derivative-free methods for solving nonlinear equations". *11th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*. Ed. por J. Vigo. Vol. 1. 2011, págs. 365-373.
- [23] J. Curry, L. Garnet y D. Sullivan. "On the iteration of a rational function: computer experiments with Newton's method". *Communications in Mathematical Physics* 91 (1983), págs. 267-277.
- [24] R. L. Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. Westview Press, 1992.
- [25] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [26] R. L. Devaney. "The Mandelbrot set, the Farey tree, and the Fibonacci sequence". *The American Mathematical Monthly* 106 (1999), págs. 289-302.
- [27] A. Douady y J. H. Hubbard. "Annales scientifiques de l'ENS 1985". Vol. 18. Gauthier-Villars, 1985, págs. 287-343.
- [28] A. Douady y J. H. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes*. Publications Mathématiques d'Orsay, 1984.
- [29] V. Drakopoulos. "How is the dynamics of König iteration functions affected by their additional fixed points?" *Fractals* 7 (1999), págs. 327-334.

- [30] B. I. Epureanu y H. S. Greenside. "Fractal basins of attraction associated with a damped Newton's method". *Society of Industrial and Applied Mathematics* 40 (1998), págs. 102-109.
- [31] P. R. Escobal. *Methods of orbit determination*. Krieger Publishing Company, 1965.
- [32] N. Fagella. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*. Vol. 23. Institut d'Estudis Catalans, 2008, págs. 29-51.
- [33] K. J. Falconer. *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*. Willey, 2003.
- [34] Z. Sun G. Maral M. Bousquet. *Satellite communications systems: systems, techniques and technologies*. Wiley, 1998.
- [35] R. C. González, R. E. Woods y S. L. Eddins. *Digital image processing using MATLAB*. Pearson Prentice Hall, 2004.
- [36] R. J. Gunkel, D. N. Lascody y D. S. Merilees. "Impulsive midcourse correction of an interplanetary transfer". *Tenth International Astronautical Congress*. 1959, págs. 650-670.
- [37] J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández y N. Romero. "Dynamics of a new family of iterative processes for quadratic polynomials". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233 (2010), págs. 2688-2695.
- [38] J. M. Gutiérrez, Á. A. Magreñán y J. L. Varona. "The "Gauss-Seidelization" of iterative methods for solving nonlinear equations in the complex plane". *Applied Mathematics and Computation* 218 (2011), págs. 2467-2479.
- [39] J. M. Gutiérrez, S. Plaza y N. Romero. "Dynamics of a fifth-order iterative method". *International Journal of Computer Mathematics* 89 (2012), págs. 822-835.
- [40] M. W. Hirsch, S. Smale y R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier, 2004.

-
- [41] G. Honorato, S. Plaza y N. Romero. "Dynamics of a high-order family of iterative methods". *Journal of Complexity* 27 (2011), págs. 221-229.
- [42] G. Julia. "Memoire sur l'iteration des fonctions rationelles". *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 1 (1918), págs. 47-246.
- [43] Y. I. Kim. "A triparametric family of three-step optimal eighth-order methods for solving nonlinear equations". *International Journal of Computer Mathematics* 89 (2012), págs. 1051-1059.
- [44] R. F. King. "A family of fourth order methods for nonlinear equations". *SIAM J. Numer. Anal.* 10 (1973), págs. 876-879.
- [45] K. Kneisl. "Julia sets for the super-Newton method, Cauchy's method and Halley's method". *Chaos* 11 (2001), págs. 359-370.
- [46] H.T. Kung y J.F. Traub. "Optimal order of one-point and multipoint iteration". *J. Assoc. Comput. Math.* 21 (1974), págs. 643-651.
- [47] Z. Liu, Q. Zheng y P. Zhao. "A variant of Steffensen's method of fourth-order convergence and its applications". *Applied Mathematics and Computation* 216 (2010), págs. 1978-1983.
- [48] C. Madrid. *La mariposa y el tornado*. RBA Coleccionables, 2011.
- [49] Á. A. Magreñán. "A new tool to study real dynamics: the convergence plane". *Applied Mathematics and Computation* 248 (2014), págs. 215-224.
- [50] Á. A. Magreñán. "Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado". *Tesis doctoral - Doctorado en Matemáticas: Universidad de La Rioja* (2013).
- [51] B. Mandelbrot. *Les objects fractals: forme, hasard et dimension*. Flammarion, 1973.
- [52] S. Mayer y D. Schleicher. "Immediate and virtual basins of Newton's method for entire functions". *Annales de l'Institut Fourier* 56 (2006), págs. 325-336.

- [53] B. Neta, M. Scott y C. Chun. "Basin attractors for various methods for multiple roots". *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012), págs. 5043-5066.
- [54] B. Neta, M. Scott y C. Chun. "Basins of attraction for several methods to find simple roots of nonlinear equations". *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012), págs. 10548-10556.
- [55] J. M. Ortega y W. G. Rheinboldt. *Iterative solutions of nonlinear equations in several variables*. SIAM, 1970.
- [56] A. M. Ostrowski. *Solutions of equations and systems of equations*. Academic Press, 1966.
- [57] H. O. Peitgen, H. Jurgens y D. Saupe. *Chaos and fractals: new frontiers of science*. Springer-Verlag, 2004.
- [58] M. S. Petkovic, B. Neta, L. D. Petkovic y J. Dzunic. *Multipoint methods for solving nonlinear equations*. Elsevier, 2013.
- [59] M. Scott, B. Neta y C. Chun. "Basin attractors for various methods". *Applied Mathematics and Computation* 218 (2011), págs. 2584-2599.
- [60] B. A. Shenoi. *Introduction to digital signal processing and filter design*. Wiley-Interscience, 2006.
- [61] J. F. Traub. *Iterative methods for the solution of equations*. Chelsea Publishing Company, 1977.
- [62] J. L. Varona. "Graphic and numerical comparison between iterative methods". *Mathematical Intelligencer* 24 (2002), págs. 37-46.
- [63] X. Wang y L. Liu. "Two new families of sixth-order methods for solving nonlinear equations". *Applied Mathematics and Computation* 213 (2009), págs. 73-78.

Numerosos problemas en ciencias e ingeniería requieren de la obtención de la solución de una ecuación no lineal. Uno de los métodos más conocidos y el más utilizado es el método de Newton. Se trata de un método que tiene muy buena estabilidad, pero en su esquema iterativo incluye la derivada de una función, y existen ocasiones en las que no se puede obtener.

El trabajo desarrollado en esta memoria se basa en el diseño y aplicación de nuevos esquemas iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales que permitan mejorar las prestaciones del método de Newton. A partir de la técnica de composición de métodos, podremos incrementar el orden de convergencia de los esquemas iterativos, de modo que converjan a la solución, en su caso, con un menor número de iteraciones.

La estabilidad se analizará recurriendo a los conceptos de dinámica compleja. Los métodos iterativos, cuando son aplicados sobre una ecuación polinómica no lineal, tienen un operador de punto fijo asociado, representado por una función racional. Las características de esta función son analizadas para la obtención de los puntos fijos y críticos. Se representarán los planos dinámicos de cada uno de los métodos iterativos para su análisis. Asimismo, cuando sea posible, se obtendrá la dimensión fractal de los conjuntos de Julia de cada método para cuantificar su complejidad y tratar de obtener relaciones con los órdenes de convergencia de los métodos.

Por último, se aplicarán las técnicas de resolución de ecuaciones no lineales y los conceptos de dinámica compleja a la resolución de un problema real de telecomunicaciones. Este problema será la determinación de órbitas de satélites artificiales a partir del conocimiento de dos posiciones del mismo y el intervalo temporal entre la toma de muestras.



Francisco Israel Chicharro López. Nacido en Puerto de Sagunto (Valencia) en 1984, es Ingeniero en Telecomunicaciones (2011) y obtuvo el Máster en Tecnologías, Sistemas y Redes de Comunicaciones (2014) por la Universitat Politècnica de València. Presenta esta Tesis Doctoral para la obtención del Título de Doctor en Matemáticas.