UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Conversión entre coordenadas geodésicas y coordenadas locales

Apellidos, nombre	García-Asenjo Villamayor, Luis[1] (lugarcia@cgf.upv.es)
Departamento	[1]Ingeniería cartográfica, Geodesia y Fotogrametría
Centro	Universitat Politècnica de València

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se aborda una cuestión que surge habitualmente en la práctica profesional como es la conversión entre coordenadas geodésicas (φ,λ,h) [1] y coordenadas expresadas en un determinado sistema cartesiano local $(x,y,z)^T$ [2], tanto en sentido directo como recíproco.

A pesar de ser una cuestión muy habitual, no existe una solución estándar a la misma. Tampoco se encuentra explícitamente abordada en la literatura especializada y por ello, los profesionales de la topografía suelen acudir a soluciones de diverso tipo que generalmente son aproximadas y modifican la geometría relativa de los puntos objeto del levantamiento. En no pocos casos, simplemente se sortea la cuestión argumentando que para ciertas aplicaciones solo es admisible calcular los levantamientos en coordenadas locales, lo cual no es cierto.

Además, disponer de una solución apropiada a la cuestión es importante por el hecho de que actualmente se emplean conjuntamente instrumental como estaciones estaciones totales o escáneres láser, que miden en sistemas locales y al mismo tiempo técnicas GNSS que producen coordenadas geodésicas.

La solución planteada en este artículo, al estar basada exclusivamente en conversiones de coordenadas, rotaciones y translaciones, no deforma la figura ni introduce variaciones en las distancias por lo que mantiene intacta la geometría relativa de los puntos levantados.

2 Introducción

La característica fundamental de los sistemas de coordenadas empleados en geodesia es que nos informan sobre la situación de un punto respecto a la Tierra. Un ejemplo son las coordenadas cartesianas geocéntricas $(X,Y,Z)^T$, en adelante ECEF[3], que son útiles para situar un satélite artificial respecto a la Tierra pero que no permiten distinguir componentes horizontales y verticales (Fig. 1). Por ello, para elaborar cartografía y para navegar se suelen emplear las denominadas coordenadas geodésicas[4] (φ,λ,h), en las que las dos primeras componentes (φ,λ) describen la parte horizontal y la tercera (h) representa la parte vertical o altitud del punto (Fig. 1). A pesar de su evidente utilidad, las coordenadas geodésicas no suelen emplearse en ingeniería ni en edificación porque, al ser coordenadas curvilíneas, la obtención de distancias, áreas o volúmenes requieren cálculos de

---

[1] Las coordenadas geodésicas son una tripleta pero no representan un vector debido a que la latitud y la longitud son ángulos.

[2] Las coordenadas cartesianas representan un vector de posición y como tal es tratado en el presente documento.

[3] Earth Centered Earth Fixed (ECEF).

[4] Las coordenadas geodésicas o geográficas son la latitud y la longitud proporcional la situación horizontal de un punto sobre la superficie de referencia. La incorporación de la altitud elipsoidal h permite situar dicho punto tridimensionalmente en el espacio.

geodesia geométrica que, aunque están documentados en la literatura especializada, pueden llegar a resultar ciertamente complejos.

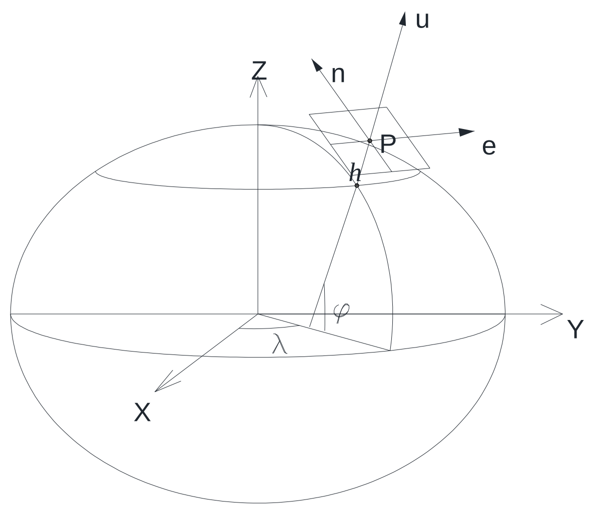

Figura 1. Sistemas de coordenadas geodésicos y locales

Por el contrario, si las coordenadas de los puntos de interés se expresan en un sistema de coordenadas cartesiano local $(e,n,u)^T$ cuyo origen $(0,0,0)^T$ se sitúa en un punto P la zona de interés tal como muestra la Fig.1, la determinación de distancias, áreas y volúmenes se resuelve fácilmente empleando sencillos cálculos geométricos (Fig. 1).

Debido a que los levantamientos locales no siempre están orientados al norte geodésico y que al origen se le suelen atribuir unas coordenadas arbitrarias $(x_0, y_0, z_0)^T$, el sistema de coordenadas $(e,n,u)^T$ ha de ser rotado un ángulo acimutal α y trasladado a continuación para que las coordenadas del origen coincidan con las coordenadas arbitrarias escogidas. En el sistema cartesiano local $(x,y,z)^T$ finalmente obtenido el eje z sigue en la dirección de la vertical de P y por tanto el plano xy es horizontal en dicho punto. Con ello, no solamente es posible determinar distancias, áreas y volúmenes empleando sencillos cálculos geométricos, sino que la interpretación geométrica de dichos cálculos se vuelve más intuitiva.

El principal inconveniente de los sistemas de coordenadas locales es que, al no informar sobre cuál es la situación del punto respecto a la Tierra, no sirven para elaborar cartografía ni para navegar y por tanto solamente están indicados para describir la geometría de zonas relativamente pequeñas o las mediciones de una estación total, un escáner láser o un nivel.

La cuestión que se plantea en este artículo consiste en cómo efectuar la conversión entre ambos tipos de coordenadas conservando la geometría relativa y sin que se produzca pérdida de precisión. Una conversión de esas características permite, por ejemplo, georeferenciar levantamientos locales muy precisos o realizar de forma sencilla cálculos geométricos a partir de coordenadas obtenidas con técnicas GNSS.

3 Objetivos

Una vez que el estudiante lea con detenimiento este documento, será capaz de:

- Realizar adecuadamente la conversión directa de coordenadas geodésicas (φ, λ, h) a coordenadas en un sistema cartesiano local $(x, y, z)^T$.
- Realizar adecuadamente la conversión inversa de coordenadas en un sistema cartesiano local $(x, y, z)^T$ a geodésicas (φ, λ, h).

4 Definición del sistema local

Para llevar a cabo la conversión se necesitan conocer la situación del origen en ambos sistemas de coordenadas y además como el ángulo acimutal α que forma el eje y del sistema local con respecto al norte geodésico.

Tanto las coordenas geodésicas del origen $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)$ como sus correspondientes coordenadas locales $(x_0, y_0, z_0)^T$ o el valor del ángulo α se pueden escoger de manera arbitraria, pero para que el sistema local sea realmente útil en la práctica suele establecerse siguiendo unos principios lógicos y adaptados al caso en cuestión.

Por ejemplo, la base de calibración de la UPV dispone de coordenadas geodésicas con precisión submilimétrica de los 7 puntos que la forman[5], aunque para ciertas aplicaciones resulta más conveniente establecer un sistema local. Por ello, en su momento se decidió definir un sistema local con las siguientes características: origen de coordenadas $(0,0,0)^T$ en el punto 1 con el eje y en la dirección y sentido de la línea definida por los vertices 1 y 6. Dicha alineación tiene un acimut geodésico de `332.91358` gon.

De todas formas, para facilitar la comprensión de la solución descrita y poner de manifiesto que el origen del sistema local puede escogerse arbitrariamente se empleará como origen el punto 7, cuyas coordenadas en ambos sistemas se muestran en la siguiente tabla

Latitud (φ_0)	Longitud (λ_0)	Altitud (h_0)
39°28'45.32814"	-0°20'15.16913"	57.0256
x_0 (m)	**y_0 (m)**	**z_0 (m)**
154.05357	-6.21686	0.17571

Tabla 1. Coordenadas del origen expresadas en ambos sistemas.

[5] Por limitaciones de espacio solo se incluirán en el ejemplo los pilares 1,4,6 y 7.

Al desplazar el origen del sistema es necesario calcular el ángulo que forma el eje y local con respecto a la dirección del norte geodésico en el punto escogido como origen, en este caso el punto 7. El proceso empleado para calcular dicho ángulo se basa en una transformación de semejanza y en este caso el valor obtenido resulta $\alpha = -167.087495160$ gon.

5 Conversión directa: de coordenadas geodésicas a coordenadas locales

5.1 Descripción del proceso

Conocidas las coordenadas geodésicas del origen $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)$, las coordenadas locales del origen $(x_0, y_0, z_0)^T$ y el ángulo de rotación α, la conversión directa consiste en los siguientes pasos:

1. Conversión de las coordenadas geodésicas $(\varphi_i, \lambda_i, h_i)$ de todos los puntos a coordenadas ECEF $(X_i, Y_i, Z_i)^T$ empleando para ello las expresiones

$$\begin{aligned} X_i &= (\nu_i + h_i)\cos\varphi_i \cos\lambda_i \\ Y_i &= (\nu_i + h_i)\cos\varphi_i \sin\lambda_i \\ Z_i &= \left[(1-e^2)\nu_i + h_i\right]\sin\varphi_i \end{aligned}$$

   en las que $\nu_i = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i}$ es el radio de curvatura de la sección normal del primer vertical y los parámetros a y e son respectivamente el semieje mayor y la primera excentricidad del elipsoide de referencia. Alternativamente se puede emplear alguna de las calculadoras geodésicas reseñadas en la bibliografía. Este paso también incluye la conversión de las coordenadas del origen $(\varphi_0, \lambda_0, h_0) \rightarrow (X_0, Y_0, Z_0)^T$.

2. Obtención de los incrementos de coordenadas ECEF con respecto al origen

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i - X_o \\ Y_i - Y_0 \\ Z_i - Z_0 \end{pmatrix}$$

3. Conversión de los incrementos de coordenadas ECEF al sistema local con origen $(0,0,0)^T$ y orientado al norte geodésico empleando para ello las coordenadas geodésicas del origen $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)$

$$\begin{pmatrix} e \\ n \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0 \\ -\sin\varphi_0 \cos\lambda_0 & -\sin\varphi_0 \sin\lambda_0 & \cos\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 & \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 & \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$$

4. Rotación de los incrementos locales $(e, n, u)^T$ para llevarlos al sistema local con origen $(0,0,0)^T$ y orientación α.

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ n \\ u \end{pmatrix}$$

5. Traslación de los incrementos locales $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ para llevarlos al sistema local con origen en $(x_0, y_0, z_0)^T$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

5.2 Ejemplo de conversión directa

A partir del ajuste de una red local se han obtenido las siguientes coordenadas geodésicas

Punto	Latitud (φ)	Longitud (λ)	Altitud (h)
1	39°28'45.32814"	-0°20'15.16913"	57.0256
4	39°28'48.50519"	-0°20'22.36839"	57.2299
6	39°28'50.61691"	-0°20'27.17246"	57.3392
7	39°28'48.87249"	-0°20'19.53867"	57.0659

Tabla 1. Coordenadas geodésicas de partida.

A partir de ellas se quieren obtener las correspondientes coordenadas cartesianas en un sistema local cuyo origen y orientación se definieron en el apartado 5.1.

1. Conversión de las coordenadas geodésicas $(\varphi_i, \lambda_i, h_i)$ a coordenadas ECEF $(X_i, Y_i, Z_i)^T$

Punto	X (m)	X (m)	Z (m)
0	4929558.7776	-29146.3082	4033646.9348
1	4929628.8612	-29042.2893	4033562.5389
4	4929565.7061	-29213.9796	4033638.2958
6	4929523.7009	-29328.5474	4033688.6328
7	4929558.7776	-29146.3082	4033646.9348

2. Obtención de los incrementos de coordenadas ECEF $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T$ con respecto al origen $(X_0, Y_0, Z_0)^T$

Punto	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)
1	70.0835	104.0189	-84.3959
4	6.9285	-67.6714	-8.6390
6	-35.0767	-182.2392	41.6980
7	0.0000	0.0000	0.0000

3. Conversión de los incrementos de coordenadas ECEF $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T$ al sistema local con origen $(0,0,0)^T$ y orientado al norte geodésico $(e, n, u)^T$

Punto	e (m)	n (m)	u (m)
1	104.4315	-109.3086	-0.0420
4	-67.6293	-11.3275	0.1637
6	-182.4434	53.8011	0.2705
7	0.0000	0.0000	0.0000

4. Rotación de los incrementos locales $(e, n, u)^T$ para llevarlos al sistema local con origen en $(0,0,0)^T$ y orientación α, dando lugar a los incrementos $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$

Punto	Δx (m)	Δy (m)	Δz (m)
1	-144.8110	43.4060	-0.0420
4	53.1920	43.2740	0.1637
6	185.1920	43.4060	0.2705
7	0.0000	0.0000	0.0000

5. Traslación de coordenadas locales $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ para llevarlos al sistema local con origen en $(x_0, y_0, z_0)^T$.

Punto	x (m)	y (m)	z (m)
1	0.0000	0.0000	0.0000
4	198.0030	-0.1320	0.2057

6	330.0030	0.0000	0.3125
7	144.8110	-43.4060	0.0420

6 Conversión inversa: de coordenadas locales a coordenadas geodésicas

6.1 Descripción del proceso

Conocidas las coordenadas geodésicas del origen $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)$, las coordenadas locales del origen $(x_0, y_0, z_0)^T$ y el ángulo α, la conversión directa consiste en los siguientes pasos:

1. Obtención de los incrementos de coordenadas locales respecto al origen $(x_0, y_0, z_0)^T$ del sistema local

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

2. Rotación α de los incrementos $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ para convertirlos a incrementos en un sistema local $(e, n, u)^T$ orientado al norte geodésico y origen $(0,0,0)^T$

$$\begin{pmatrix} e \\ n \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

3. Conversión de los incrementos $(e, n, u)^T$ a incrementos de coordenadas ECEF empleando para ello las coordenadas geodésicas del origen $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)^T$

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_0 & -\sin\varphi_0 \cos\lambda_0 & \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 \\ \cos\lambda_0 & -\sin\varphi_0 \sin\lambda_0 & \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 \\ 0 & \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ n \\ u \end{pmatrix}$$

4. A los incrementos $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T$ se le suman las coordenadas ECEF del origen $(X_0, Y_0, Z_0)^T$ obtenidas a partir de las geodésicas $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)$ mediante las expresiones

$$\begin{aligned} X_0 &= (\nu_0 + h_0)\cos\varphi_0 \cos\lambda_0 \\ Y_0 &= (\nu_0 + h_0)\cos\varphi_0 \sin\lambda_0 \\ Z_0 &= \left[(1 - e^2)\nu_i + h_0\right]\sin\varphi_0 \end{aligned}$$

   en las que $\nu_0 = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}$ es el radio de curvatura de la sección normal del primer vertical y los parámetros a y e son respectivamente el semieje mayor y la primera excentricidad del elipsoide de referencia.

5. Finalmente, las coordenadas ECEF se convierten a coordenadas geodésicas mediante

$$\varphi = arctg\frac{Z + e'^2 bsen^3\theta}{p - e^2 acos^3\theta} \qquad \lambda = arctg\frac{Y}{X} \qquad h = \frac{p}{\cos\varphi} - \nu$$

con

$$\theta = arctg\frac{Za}{pb} \qquad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \qquad p = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

en las que a y b son respectivamente el semieje mayor y menor del elipsoide de referencia. Alternativamente se puede emplear alguna de las calculadoras geodésicas reseñadas en la bibliografía.

6.2 Ejemplo de conversión inversa

A partir del ajuste de una red local se han obtenido las siguientes coordenadas locales en un sistema local cuyo origen y orientación se definieron en el apartado 5.1

Punto	x (m)	y (m)	z (m)
1	0.0000	0.0000	0.0000
4	198.0030	-0.1320	0.2057
6	330.0030	0.0000	0.3125
7	144.8110	-43.4060	0.0420

Tabla 1. Coordenadas locales de partida.

A partir de ellas se quieren obtener las correspondientes coordenadas geodésicas.

1. Obtención de los incrementos de coordenadas locales $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ respecto al origen del sistema $(x_0, y_0, z_0)^T$

Punto	Δx (m)	Δy (m)	Δz (m)
1	-144.8110	43.4060	-0.0420
4	53.1920	43.2740	0.1637
6	185.1920	43.4060	0.2705
7	0.0000	0.0000	0.0000

2. Rotación α de los incrementos $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ para convertirlos a incrementos en un sistema local $(e, n, u)^T$ orientado al norte geodésico y origen $(0,0,0)^T$

Punto	e (m)	n (m)	u (m)
1	104.4315	-109.3086	-0.0420
4	-67.6293	-11.3275	0.1637
6	-182.4434	53.8011	0.2705
7	0.0000	0.0000	0.0000

3. Conversión de los incrementos $(e,n,u)^T$ a incrementos de coordenadas ECEF empleando para ello las coordenadas geodésicas del origen $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)^T$

Punto	IX (m)	IY (m)	IZ (m)
1	70.0835	104.0189	-84.3959
4	6.9285	-67.6714	-8.6390
6	-35.0767	-182.2392	41.6980
7	0.0000	0.0000	0.0000

4. A los incrementos $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T$ se le suman las coordenadas ECEF del origen obtenidas a partir de las geodésicas $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)^T$

Punto	X (m)	X (m)	Z (m)
0	4929558.7776	-29146.3082	4033646.9348
1	4929628.8612	-29042.2893	4033562.5389
4	4929565.7061	-29213.9796	4033638.2958
6	4929523.7009	-29328.5474	4033688.6328
7	4929558.7776	-29146.3082	4033646.9348

5. Finalmente, las coordenadas ECEF $(X,Y,Z)^T$ se convierten a coordenadas geodésicas (φ, λ, h)

Punto	Latitud (φ)	Longitud (λ)	Altitud (h)
1	39°28'45.32814"	-0°20'15.16913"	57.0256
4	39°28'48.50519"	-0°20'22.36839"	57.2299
6	39°28'50.61691"	-0°20'27.17246"	57.3392
7	39°28'48.87249"	-0°20'19.53867"	57.0659

7 Conclusiones

Las coordenadas geodésicas que proporcionan las técnicas GNSS siempre nos informan de la localización de un punto respecto a la Tierra. A partir de ellas se puede navegar o elaborar cartografía pero no permiten calcular de forma sencilla distancias, superficies o volúmenes y por tanto, no se suelen emplear en ingeniería civil o edificación.

Por el contrario, los sistemas cartesianos locales si permiten efectuar de forma sencilla dichos cálculos e interpretarlos de una manera intuitiva. Además, se pueden obtener sin necesidad de información adicional externa empleando una estación total o un escáner láser y por ello se emplean a menudo en aplicaciones de ingeniería civil, aunque no estén georreferenciadas ni se puedan incluir directamente en la cartografía oficial existente.

Teniendo en cuenta que cada vez es más habitual el uso conjunto de técnicas GNSS, estaciones totales y escáneres láser y que existe una demanda creciente de levantamientos correctamente georeferenciados para su inclusión en la cartografía oficial, es necesario emplear conversiones de coordenadas que relacionen cooordenadas geodésicas y coordenadas cartesianas en un sistema local sin que se produzcan distorsiones ni pérdidas de exactitud.

La solución presentada, basada en cambios de coordenadas, rotaciones y traslaciones permite establecer un doble juego de coordenadas sin alterar la geometría relativa de los puntos y gracias a ello diferentes cuestiones pueden resolverse de manera eficiente en el sistema de coordenadas más conveniente para cada aplicación

8 Bibliografía

8.1 Libros:

García-Asenjo, L.: "Apuntes de Geodesia Geométrica", Ed. Universidad Politécnica de Valencia, 2015, pág. 39-41.

Meyer, T.H.: "Introduction to Geometrical and Physical Geodesy: foundations of geomatics", Ed. ESRI Press, 2010, pág. 73-84.

8.2 Calculadoras geodésicas:

Programa de Aplicaciones Geodésicas (PAG) del Instituto Geográfico Nacional (IGN) http://www.ign.es/web/ign/portal/gds-area-geodesia

Calculadora geodésica del Institut Cartogràfic Valencià (ICV)
http://www.icv.gva.es/ca/calculadora-geodesica