



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

El Principio de las Fuerzas Virtuales

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se explica de forma asequible y sencilla en qué consiste el Principio de las Fuerzas Virtuales (PFV), las variables que intervienen, las condiciones que deben cumplir las fuerzas virtuales así como su aplicación a la resolución de estructuras hiperestáticas formadas por barras con comportamiento elástico y lineal, tomando como incógnitas principales las fuerzas redundantes. El Principio de las Fuerzas Virtuales permite por tanto su resolución estática.

2 Introducción

Cuando sobre obre una estructura (hiperestáticas e hipercinemáticas) actúan unas fuerzas exteriores, ésta se desplaza y deforma, modificándose asimismo su estado tensional. La respuesta de esta estructura queda definida cuando la resolvemos estáticamente y cinemáticamente.

El principio de los Trabajos Virtuales tiene dos planteamientos complementarios mediante los cuales la estructura se resuelve primero cinemáticamente (Principio de los Desplazamientos Virtuales) o primero estáticamente (Principio de las Fuerzas Virtuales), para luego mediante la relación entre ambos conocer la respuesta completa de la misma.

En el Principio de las Fuerzas Virtuales se plantea sobre la estructura real en equilibrio y cumpliendo las condiciones de compatibilidad un conjunto de fuerzas virtuales que, por haberse desplazado y deformado la estructura generarán un trabajo virtual complementario externo y un trabajo virtual complementario interno almacenado en forma de energía virtual complementaria de deformación. Al plantear el balance energético se dispone de una ecuación que garantiza el cumplimiento de las condiciones de compatibilidad de la estructura.

En función del número de incógnitas habrá que plantear un número igual de estados virtuales con el fin de contar con un sistema de ecuaciones independientes que nos permita obtener las fuerzas redundantes que son las incógnitas principales. A partir de las fuerzas redundantes obtendremos las reacciones, los esfuerzos de extremo de barra y las leyes de esfuerzos.

3 Objetivos

El objetivo de este documento es que, tras su lectura, el alumno sea capaz de:

- Determinar si es aplicable el principio de las fuerzas virtuales para resolver estáticamente la estructura
- Determinar el número de estados virtuales de fuerza, a partir del grado de indeterminación estática de la estructura que indica el número de fuerzas redundantes.
- Plantear adecuadamente los estados virtuales de fuerza a partir de la selección de las fuerzas redundantes
- Obtener la expresión del trabajo virtual complementario de las fuerzas exteriores correspondiente a cada estado virtual de fuerzas en el caso de una estructura plana con comportamiento elástico y lineal



- Obtener la expresión de la energía virtual complementaria de deformación correspondiente a cada estado virtual de fuerzas en el caso de una estructura plana con comportamiento elástico y lineal
- Plantear las ecuaciones de balance energético para la obtención de las fuerzas redundantes.

4 El Principio de las Fuerzas Virtuales

4.1 Planteamiento

En cualquier estructura real de barras, podemos agrupar las componentes estáticas en lo que llamamos grupo estático del sistema estructural real. Este grupo tiene componentes externas (acciones y reacciones) y componentes internas (solicitaciones y tensiones).

Por otra parte, podemos agrupar las componentes cinemáticas en lo que llamamos grupo cinemático del sistema estructural real. Este grupo tiene también componentes externas (desplazamientos) y componentes internas (deformaciones).

Tras la actuación de las fuerzas exteriores sobre la estructura que cumple con las hipótesis de la Tª de Pequeños Movimientos mediante un proceso de puesta en carga lenta, las componentes del grupo estático real estarán en equilibrio y las componentes del grupo cinemático real cumplirán con las condiciones de compatibilidad. Se impone entonces un estado virtual de fuerzas cuya puesta en carga es instantánea.

Características de las fuerzas virtuales:

- Serán arbitrarias, es decir, independientes de las fuerzas exteriores reales que actúan sobre la estructura
- Estarán en autoequilibrio es decir, cumplirán las condiciones de equilibrio constituyendo una configuración estática admisible. El equilibrio del estado virtual de fuerzas se plantea sobre la geometría indeformada de la estructura
- Actuarán con su valor constante final

Las fuerzas virtuales exteriores y los desplazamientos reales realizan, en cada estado virtual, un trabajo virtual instantáneo llamado trabajo virtual complementario de las fuerzas exteriores (δW^*). Internamente, las tensiones virtuales y las deformaciones reales realizan un trabajo virtual complementario interno que se acumula en forma de energía virtual complementaria de deformación (δU^*)

Las condiciones de compatibilidad de la estructura real no se modifican, por tanto, el trabajo virtual complementario de las fuerzas exteriores será igual a la energía virtual complementaria de deformación. Se trata de una ecuación de balance energético que representa una condición de compatibilidad de la estructura:

$$\delta W^* = \delta U^* \quad (1)$$



4.2 Trabajo virtual complementario de las fuerzas exteriores (δW^*)

El Trabajo Virtual complementario de las Fuerzas Exteriores (δW^*) es el trabajo realizado por las componentes externas del grupo estático virtual y las componentes externas del grupo cinemático del sistema estructural real. Las variables independientes son las fuerzas.

Este trabajo virtual complementario total será la suma del trabajo virtual complementario realizado por todas las fuerzas exteriores virtuales que trabajen con los desplazamientos reales.

Según el tipo de fuerza la expresión del trabajo virtual será la siguiente:

a) Trabajo virtual complementario realizado por una fuerza virtual puntual δP :

$$\delta W^*_{\text{fuerza puntual}} = \pm \delta P \cdot \Delta \quad (2)$$

siendo δP una fuerza puntual virtual aplicada en un punto cualquiera de la estructura y Δ el desplazamiento real del punto de aplicación de dicha fuerza en su dirección

b) Trabajo virtual complementario realizado por un momento virtual δM :

$$\delta W^*_{\text{momento puntual}} = \pm \delta M \cdot \theta \quad (3)$$

siendo δM un momento virtual aplicado en un punto cualquiera de la estructura y θ el giro real de ese punto en la estructura real.

c) Trabajo virtual complementario realizado por una fuerza virtual axial a la barra $\delta p_a(x)$:

$$\delta W^*_{\text{fuerza axial}} = \int_0^L \pm \delta p_a(x) \cdot u(x) \cdot dx \quad (4)$$

siendo δp_a una fuerza virtual axial real (según eje X local) aplicada en una barra de la estructura y $u(x)$ la función de desplazamiento real axial de esa barra

d) Trabajo virtual complementario realizado por una fuerza virtual normal a la barra $\delta p_n(x)$:

$$\delta W^*_{\text{fuerza normal}} = \int_0^L \pm \delta p_n(x) \cdot v(x) \cdot dx \quad (5)$$

siendo δp_n una fuerza virtual normal real (según eje Y local) aplicada en una barra de la estructura y $v(x)$ la función de desplazamiento real según el eje Y de esa barra

En las cuatro expresiones el signo dependerá de si la carga virtual es positiva o negativa respecto de los ejes considerados (locales en el caso de una carga aplicada en barra).

En la estructura de la figura 1 trabajaría la fuerza puntual δP , el momento δM . En los cuatro casos los trabajos serán positivos.

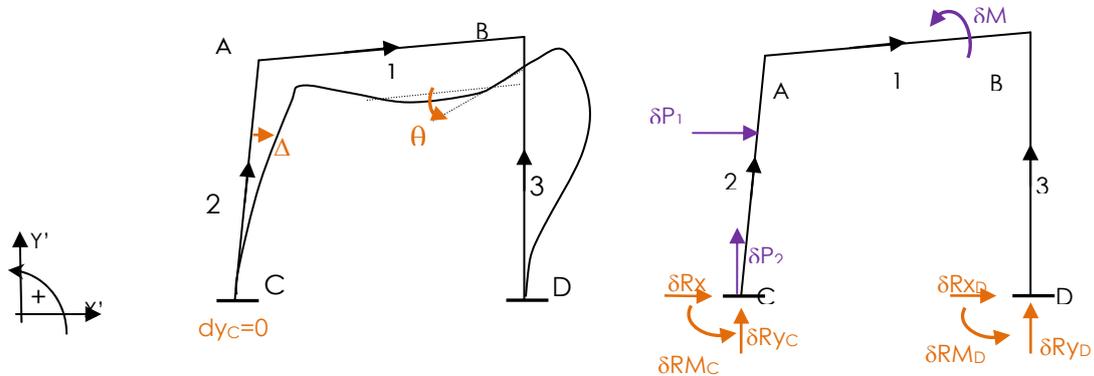


Figura 1. Estado real de desplazamientos y Estado virtual de fuerzas.

4.3 Energía virtual complementaria (δU)

El Trabajo virtual complementario interno (δW_{int}^*) es el trabajo realizado por las componentes internas del grupo estático del sistema estructural virtual y las componentes internas del grupo cinemático real. Este trabajo se acumula en forma de Energía virtual complementaria (δU^*). Las variables independientes son las tensiones.

La energía virtual complementaria será la suma de la energía virtual complementaria de todas las barras de la estructura que deforman en el estado virtual. En el caso de estructural planas, aceptando un comportamiento elástico y lineal y despreciando la deformación por cortante, la energía virtual complementaria será la suma de la energía virtual complementaria por axil y la energía virtual complementaria por flexión.

Estas tienen las siguientes expresiones:

a) Energía virtual complementaria por axil (δU_{ax}^*):

$$\delta U_{ax}^* = \int_0^L \frac{N(x)}{EA} \delta N(x) dx \quad (7)$$

siendo E el módulo de elasticidad longitudinal, A el área de la sección transversal de la barra, N(x) la ley de axiles real de la barra y $\delta N(x)$ la ley de axiles virtual de ésta.

b) Energía virtual complementaria por flector (δU_{flex}^*):

$$\delta U_{flex}^* = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} \delta M(x) dx \quad (8)$$

siendo E el módulo de elasticidad longitudinal, I el momento de inercia de la sección transversal de la barra, M(x) la ley de momentos real de la barra y $\delta M(x)$ la ley de momentos virtual de ésta.



4.4 Resolución de estructuras hiperestáticas con el PFV

El Principio de las Fuerzas Virtuales (PFV) permite la obtención de todas las fuerzas redundantes de la estructura, que serán las incógnitas principales estáticas. Estas incógnitas están en la expresión de la energía virtual complementaria (δU^*), en las leyes de esfuerzos reales $N(x)$ y $M(x)$ de cada barra.

Una vez determinemos el número de fuerzas redundantes (es decir, obtengamos el grado de indeterminación estática de la estructura) y seleccionadas éstas de entre todas las incógnitas estáticas, deberemos plantear el mismo número de estados virtuales de fuerzas. Estos estados virtuales deberán ser independientes entre sí, cumplir con las condiciones de equilibrio y no generar incógnitas en la expresión del trabajo virtual complementario de las fuerzas exteriores (δW^*).

Cada estado virtual nos proporcionará una ecuación de balance ($\delta W^* = \delta U^*$) de forma que, al final, tendremos un sistema de ecuaciones independientes (ecuaciones de compatibilidad) que nos permitirá obtener el valor de las incógnitas estáticas.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Determinación del número de incógnitas estáticas: será el número de fuerzas redundantes de la estructura que conocemos como grado de indeterminación estática (n)
2. Selección de las fuerzas redundantes.
3. En la estructura real garantizar el cumplimiento de las condiciones de equilibrio: Obtención de las leyes de esfuerzos de las barras ($N(x)$ y $M(x)$), que estarán expresadas en función de las fuerzas redundantes, al estarlo tanto las reacciones como los esfuerzos de extremo de barra
4. Planteamiento de los n estados virtuales de fuerzas, en los que garantizaremos el cumplimiento de las condiciones de equilibrio

Cada estado virtual consiste en:

- una única fuerza virtual de valor arbitrario (se asignará el valor 1) en la dirección y punto de aplicación de una fuerza redundante (si se trata de una redundante externa, si fuera una redundante interna se aplicaría un par de fuerzas de sentido contrario y valor arbitrario=1)
- se elige como redundantes virtuales de la estructura las mismas que lo eran en el estado real
- las fuerzas redundantes virtuales serán dato (se les asigna valor 0, quedando el estado virtual definido estáticamente)
- En cada estado virtual se obtienen, por equilibrio, las leyes de esfuerzos de las barras ($\delta N(x)$ y $\delta M(x)$).

5. Planteamiento de las ecuaciones de balance energético de cada estado virtual de fuerzas ($\delta W^* = \delta U^*$)
6. Resolución del sistema de ecuaciones: Obtención de las fuerzas redundantes
7. Obtención de todas las incógnitas estáticas de la estructura y de las leyes de esfuerzos reales de las barras: Sustituyendo los valores de las fuerzas redundantes con su signo en las expresiones correspondientes.

8. Obtención de las funciones de desplazamiento y de todas las incógnitas cinemáticas (movimientos) de la estructura: Se obtienen a partir de las leyes de esfuerzos mediante las expresiones:

$$\left[u(x) = \int_0^x \frac{N(x)}{EA} dx + dx_i \right] \left[\theta(x) = \int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx + \theta_i \right] \text{ y } \left[v(x) = \int_0^x \int \frac{M(x)}{EI} dx + \theta_i x + dy_i \right]$$

4.5 Ejemplo de resolución de estructuras hiperestáticas

En la figura 2 se representa el estado de fuerzas y desplazamientos de la estructura que vamos a utilizar como ejemplo de aplicación del Principio de las Fuerzas Virtuales. Seguiremos los pasos indicados en el apartado anterior.

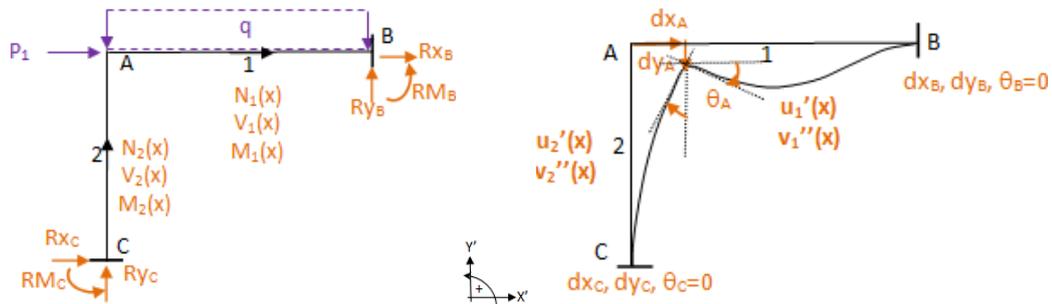


Figura 2. Estructura real

1. Incógnitas estáticas principales: El grado de indeterminación estática de esta estructura es 3, por tanto, el número de fuerzas redundantes es tres.

2. Selección de las fuerzas redundantes:

Seleccionamos como fuerzas redundantes las reacciones en el empotramiento B, es decir, \$R_{xB}\$, \$R_{yB}\$ y \$M_B\$.

3. Estructura real:

Equilibramos la estructura real haciendo uso de las 3 ecuaciones de equilibrio global, obteniendo las reacciones en C y las leyes de esfuerzos en ambas barras en función de las redundantes (\$L\$=longitud barra 1 y \$H\$=longitud barra 2).

Equilibrio en la estructura real:

$$\sum F_x=0 \quad R_{xc} + R_{xB} + P_1 = 0 \quad R_{xc} = -P_1 - R_{xB} \quad (9)$$

$$\sum F_y=0 \quad R_{yc} + R_{yB} = q L \quad R_{yc} = q L - R_{yB} \quad (10)$$

$$\sum M_C=0 \quad M_c + M_B + R_{yB} L = q L^2/2 + P_1 H \quad M_c = - M_B - R_{yB} L + q L^2/2 + P_1 H \quad (11)$$

Leyes de esfuerzos de la estructura real

BARRA 1:

$$N_1 = R_{xB} \quad (12)$$

$$M_1(x) = R_{yB} (L - x) + M_B + q (Lx + L^2) \quad (13)$$

BARRA 2:

$$N_2 = R_{yB} - q L \quad (14)$$

$$M_2(x) = R_{xB} x + R_{yB} L + M_B + P_1 (x - H) - q L^2/2 \quad (15)$$

4.1. Estado virtual de fuerzas 1

En el estado virtual 1 aplicaremos una fuerza virtual positiva de valor unidad en el apoyo B, en la dirección de la redundante R_{x_B} (figura 3). Para tener una configuración estática admisible, anularemos las redundantes virtuales coincidentes con las redundantes reales, $\delta R_{x_B} (= 0)$, $\delta R_{y_B} (= 0)$ y $\delta R_{M_B} (= 0)$.

Equilibramos el estado virtual 1 y obtenemos las leyes de esfuerzos. La barra 1 solo trabaja a axil y la barra 2 solo a flexión.

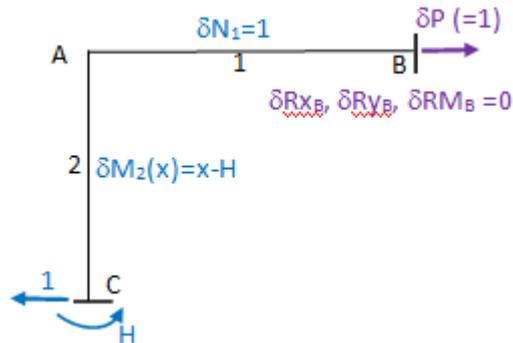


Figura 3. Estructura virtual 1

Equilibrio en el estado virtual 1

$$\sum F_x = 0 \quad \delta R_{x_C} = -1$$

$$\sum F_y = 0 \quad \delta R_{y_C} = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \delta R_{M_C} = H$$

Leyes de esfuerzos en el estado virtual 1

$$\text{Barra 1:} \quad \delta N_1 = 1 \quad \delta M_1(x) = 0 \quad (16)(17)$$

$$\text{Barra 2:} \quad \delta N_2 = 0 \quad \delta M_2(x) = x - H \quad (18)(19)$$

4.2. Estado virtual de fuerzas 2

En el estado virtual 2 aplicaremos una fuerza virtual de valor unidad en el apoyo B, en la dirección de la redundante R_{y_B} (figura 4). Para tener una configuración estática admisible, anularemos las redundantes virtuales coincidentes con las redundantes reales, $\delta R_{x_B} (= 0)$, $\delta R_{y_B} (= 0)$ y $\delta R_{M_B} (= 0)$.

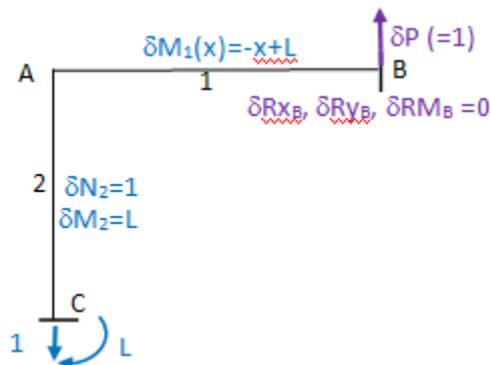


Figura 4. Estructura virtual 2

Equilibramos el estado virtual 2 y obtenemos las leyes de esfuerzos. La barra 1 solo trabaja a flexión y la barra 2 a axil y a flexión.



Equilibrio en el estado virtual 2

$$\begin{aligned} \sum F_x=0 & \quad \delta R_{x_C} = 0 \\ \sum F_y=0 & \quad \delta R_{y_C} = -1 \\ \sum M=0 & \quad \delta R_{M_C} = -L \end{aligned}$$

Leyes de esfuerzos en el estado virtual 2

Barra 1: $\delta M_1(x) = -x + L$ (20)

Barra 2: $\delta N_2 = 1 \quad \delta M_2(x) = L$ (21)(22)

4.3. Estado virtual de fuerzas 3

En el estado virtual 3 aplicaremos un momento virtual de valor unidad en el apoyo B, como la redundante R_{M_B} (figura 5). Para tener una configuración estática admisible, anularemos las redundantes virtuales coincidentes con las redundantes reales, $\delta R_{x_B} (= 0)$, $\delta R_{y_B} (= 0)$ y $\delta R_{M_B} (= 0)$.

Equilibramos el estado virtual 3 y obtenemos las leyes de esfuerzos. Las barras 1 y 2 solo trabajan a flexión.

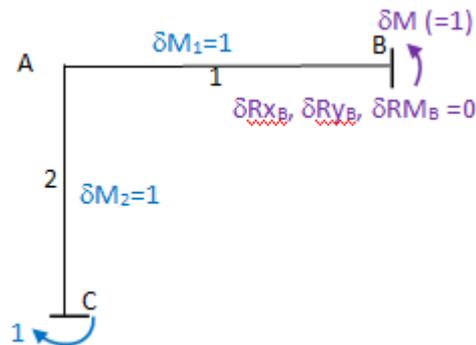


Figura 5. Estructura virtual 3

Equilibrio en el estado virtual 3

$$\begin{aligned} \sum F_x=0 & \quad \delta R_{x_C} = 0 \\ \sum F_y=0 & \quad \delta R_{y_C} = 0 \\ \sum M=0 & \quad \delta R_{M_C} = -1 \end{aligned}$$

Leyes de esfuerzos en el estado virtual 3

Barra 1: $\delta M_1 = 1$ (23)

Barra 2: $\delta M_2 = 1$ (24)

5. Ecuaciones de balance energético ($\delta W^* = \delta U^*$):

Ecuación balance 1 (estado virtual 1):

- Trabajo virtual complementario: Es el trabajo producido por la fuerza exterior virtual horizontal ($\delta P=1$) y el desplazamiento de su punto de aplicación en la estructura real. Este trabajo es nulo ya que no hay desplazamiento horizontal en B ($dx_B=0$) en la estructura real.

$$\delta W^* = \delta P \cdot dx_B = 0 \quad \rightarrow \quad \delta W^* = 1 \cdot 0 = 0 \quad (25)$$

- Energía virtual complementaria: Será la suma de la energía virtual complementaria por axil de la barra 1 y por flector de la barra 2.

$$\delta U^* = \delta U_{ax1}^* + \delta U_{flex2}^* \quad (26)$$



Siendo:

$$\delta U_{ax1}^* = \int_0^{L_1} \frac{N_1}{EA_1} \delta N_1 dx \quad y \quad \delta U_{flex2}^* = \int_0^{L_2} \frac{M_2(x)}{EI_2} \delta M_2(x) dx$$

Ecuación balance 2 (estado virtual 2):

- Trabajo virtual complementario: Es el trabajo producido por la fuerza exterior virtual vertical ($\delta P=1$) y el desplazamiento de su punto de aplicación en la estructura real. Este trabajo es nulo ya que no hay desplazamiento vertical en B ($dy_B=0$) en la estructura real.

$$\delta W^* = \delta P \cdot dy_B = 0 \quad \rightarrow \quad \delta W^* = 1 \cdot 0 = 0 \quad (27)$$

- Energía virtual complementaria: Será la suma de la energía virtual complementaria por flector de la barra 1 y axil y flector de la barra 2.

$$\delta U^* = \delta U_{flex1}^* + \delta U_{ax2}^* + \delta U_{flex2}^* \quad (28)$$

Siendo:

$$\delta U_{flex1}^* = \int_0^{L_1} \frac{M_1(x)}{EI_1} \delta M_1(x) dx$$

$$\delta U_{ax2}^* = \int_0^{L_2} \frac{N_2}{EA_2} \delta N_2 dx \quad y \quad \delta U_{flex2}^* = \int_0^{L_2} \frac{M_2(x)}{EI_2} \delta M_2 dx$$

Ecuación balance 3 (estado virtual 3):

- Trabajo virtual complementario: Es el trabajo producido por el momento virtual ($\delta M=1$) y el giro de su punto de aplicación en la estructura real. Este trabajo es nulo ya que no hay giro en B ($\theta_B=0$) en la estructura real.

$$\delta W^* = \delta M \cdot \theta_B = 0 \quad \rightarrow \quad \delta W^* = 1 \cdot 0 = 0 \quad (29)$$

- Energía virtual complementaria: Será la suma de la energía virtual complementaria por flector de las barras 1 y 2.

$$\delta U^* = \delta U_{flex1}^* + \delta U_{flex2}^* \quad (30)$$

Siendo:

$$\delta U_{flex1}^* = \int_0^{L_1} \frac{M_1(x)}{EI_1} \delta M_1 dx \quad y \quad \delta U_{flex2}^* = \int_0^{L_2} \frac{M_2(x)}{EI_2} \delta M_2 dx$$

6. Resolución del sistema de ecuaciones y obtención de las fuerzas redundantes

Una vez planteadas las tres ecuaciones de balance:

$$(25)=(26) \qquad (27)=(28) \qquad (29)=(30)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones obteniendo R_{xB} , R_{yB} y R_{MB} .

7 y 8. Obtención de las reacciones, las leyes de esfuerzos y funciones de desplazamiento.

Se sustituyen los valores obtenidos para las fuerzas redundantes en las ecuaciones (9), (10), (11), (12), (13), (14) y (15) obteniendo las reacciones y las leyes de esfuerzos.



Posteriormente se obtienen las funciones de desplazamiento de ambas barras como se indica en el apartado 4.4.

5 Cierre

En este documento se ha explicado el Principio de las Fuerzas Virtuales. Se propone, como ejercicio de aplicación y autoevaluación, resolver estáticamente la estructura de la figura 6.

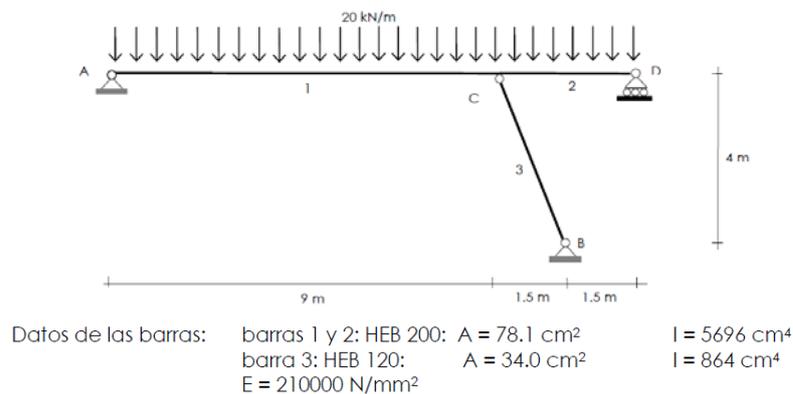


Figura 6. Estructura propuesta

(Resultado: La estructura es hiperestática de grado 1 por lo que habrá que plantear un único estado virtual de fuerzas.

$R_{XA} = 70$ kN, $R_{YA} = 73.4$ kN, $R_{XB} = -70$ kN, $R_{YB} = 187$ kN, $R_{YD} = -20.4$ kN)

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Abdilla E. "Fundamentos energéticos de la Teoría de Estructuras. Segunda parte-Aplicaciones. Volumen 1". Editorial UPV, ref.: 2003.718, 2003

[2] Basset-Salom L. (2013). Aplicación del Principio de las Fuerzas Virtuales a la resolución estática de estructuras hiperestáticas Colección Artículos docentes ETSA. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10251/30428>

6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset

Figura 1. Estado real de desplazamientos y Estado virtual de fuerzas.

Figura 2. Estructura real

Figura 3. Estructura virtual 1

Figura 4. Estructura virtual 2

Figura 5. Estructura virtual 3

Figura 6. Estructura propuesta