



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# El Principio de las Fuerzas Virtuales: ejemplo de aplicación

<b>Apellidos, nombre</b>	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
<b>Departamento</b>	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
<b>Centro</b>	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



## 1 Resumen de las ideas clave

Las estructuras hiperestáticas pueden resolverse mediante diferentes métodos de cálculo entre los que se encuentra el Principio de las Fuerzas Virtuales. Este artículo docente propone un ejemplo práctico como medio para explicar el procedimiento a seguir.

## 2 Introducción

Las estructuras de edificación son hiperestáticas e hipercinemáticas y para resolverlas debe determinarse por una parte, el valor de las reacciones en los apoyos y de los esfuerzos en las barras (resolución estática) y, por otra parte, el valor de los movimientos en los nudos y en los extremos de las barras así como las leyes o funciones de desplazamientos (resolución cinemática). Las incógnitas estáticas y las cinemáticas están relacionadas mediante las leyes de comportamiento, por lo que, puede elegirse qué incógnitas se determinarán en primer lugar, es decir, si se empieza por la resolución estática o cinemática.

Uno de los métodos utilizados para la resolución estática es el Principio de las Fuerzas Virtuales. Mediante este método se plantean unos estados virtuales de fuerzas que conducen, cada uno de ellos, a una ecuación de balance energético en la que se iguala el trabajo virtual complementario generado por las fuerzas virtuales aplicadas con la energía de deformación virtual complementaria almacenada. Estos estados virtuales se generan aplicando sobre la estructura real hiperestática un conjunto de fuerzas virtuales en equilibrio que, al desplazarse, produce un trabajo virtual externo e interno.

Las ecuaciones de balance son ecuaciones de compatibilidad y sus incógnitas son las fuerzas redundantes (incógnitas estáticas principales).

El número de estados virtuales y, por tanto, de ecuaciones deberá coincidir con el grado de indeterminación estática de la estructura (número de fuerzas redundantes de la estructura).

Obtenidas las fuerzas redundantes, el resto de incógnitas estáticas se obtiene, a partir de ellas, mediante las ecuaciones de equilibrio.

## 3 Objetivos

El objetivo de este documento es que, tras su lectura, el alumno sea capaz de:

- A partir del grado de hiperestaticidad de la estructura y de la posterior selección de las incógnitas estáticas principales, plantear adecuadamente los estados virtuales de fuerza
- Obtener el valor del trabajo virtual complementario y de la energía de deformación virtual complementaria correspondiente a cada estado virtual y plantear las ecuaciones de balance energético correspondientes.
- Obtener el valor de las incógnitas estáticas principales (fuerzas redundantes), resolviendo estáticamente la estructura completa a partir de ellas.



## 4 Ejemplo de aplicación del Principio de las Fuerzas Virtuales

### 4.1 Datos de la estructura

La estructura que se propone como ejemplo (figura 1) está formada por dos elementos inclinados empotrados en A y C respectivamente. La barra 3, prolongación de la barra 1 está en voladizo, por lo que podrá sustituirse, para simplificar el cálculo, por una fuerza y un momento sobre el extremo de la barra 1. La barra 2, por su parte está articulada en B.

Se trata de una estructura con comportamiento elástico y lineal, en la que se considera despreciable la energía de deformación por cortante.

Datos de las barras: HEB 180:  $A = 65.3 \text{ cm}^2$   $I = 3830 \text{ cm}^4$   
 $E = 210000 \text{ N/mm}^2$

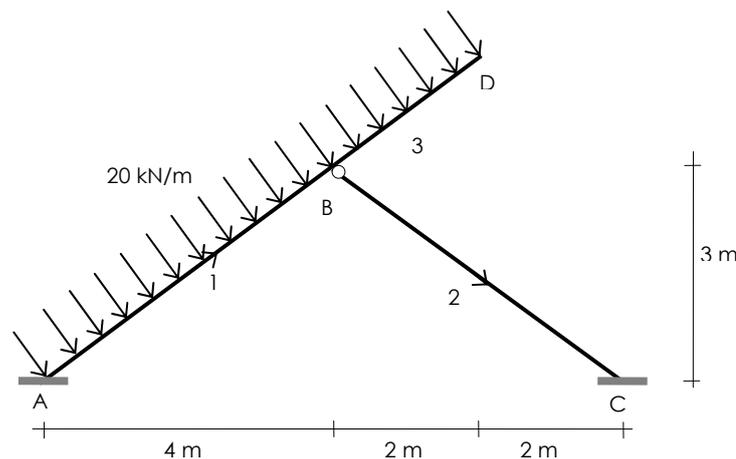


Figura 1. Esquema de la estructura

El grado de indeterminación estática o grado de hiperestaticidad es 2, ya que tiene 6 reacciones externas y 1 desconexión interna (que proporciona una ecuación de equilibrio adicional a las 3 de equilibrio global de la estructura), por lo que el balance entre incógnitas y ecuaciones es 2. El número de fuerzas redundantes es 2 y, por tanto, habrá que plantear dos estados de fuerzas virtuales para determinar su valor.

### 4.2 Esquema del proceso de cálculo

El proceso de cálculo es el siguiente:

- Seleccionar las fuerzas redundantes.
- Plantear el equilibrio en la estructura real, obteniendo reacciones y leyes de esfuerzos en función de las redundantes.
- Plantear el equilibrio en los dos estados virtuales de fuerzas, obteniendo reacciones y leyes de esfuerzos.



- Plantear las ecuaciones de balance energético de cada estado virtual y obtener las redundantes mediante la resolución del sistema de ecuaciones
- Obtener todas las incógnitas estáticas y las leyes de esfuerzos a partir de las redundantes.

### 4.3 Selección de redundante(s)

Las fuerzas redundantes deben ser independientes entre sí, siendo válidas tanto fuerzas incógnitas externas como internas. Se eligen  $R_{XA}$  y  $R_{YA}$ . ¿Se te ocurren otras posibilidades? Por ejemplo, podría haberse elegido  $R_{XA}$  y  $R_{MA}$  o bien  $R_{MA}$  y  $R_{MC}$ , etc. Te invito a que resuelvas el problema seleccionando otra pareja de fuerzas redundantes y a comprobar que obtienes el mismo resultado.

### 4.4 Planteamiento del equilibrio en la estructura real

Equilibramos la estructura real haciendo uso de las 3 ecuaciones de equilibrio global y de la ecuación de equilibrio de momentos aislando la barra 2. Para simplificar el cálculo se ha sustituido el voladizo tal y como se ha comentado en el apartado 4.1.

$$\sum F_x=0 \quad R_{XA} + R_{XC} + 60 + 30 = 0 \quad R_{XA} + R_{XC} = -90 \quad (1)$$

$$\sum F_y=0 \quad R_{YA} + R_{YC} = 80 + 40 \quad R_{YA} + R_{YC} = 120 \quad (2)$$

$$\sum M_A=0 \quad R_{MA} + R_{MC} + 8 R_{YC} - 62.5 - 500 = 0 \quad R_{MA} + R_{MC} + 8 R_{YC} = 562.5 \quad (3)$$

$$\text{Aislando la barra 2: } \sum M_{i2}=0 \quad R_{MC} + 3 R_{XC} + 4 R_{YC} = 0 \quad (4)$$

Expresamos todas las incógnitas estáticas así como las leyes de esfuerzos en función de las redundantes seleccionadas (figura 2).

$$R_{XC} = -90 - R_{XA} \quad (5)$$

$$R_{YC} = 120 - R_{YA} \quad (6)$$

$$R_{MA} = -3 R_{XA} + 4 R_{YA} - 187.5 \quad (7)$$

$$R_{MC} = 3 R_{XA} + 4 R_{YA} - 210 \quad (8)$$

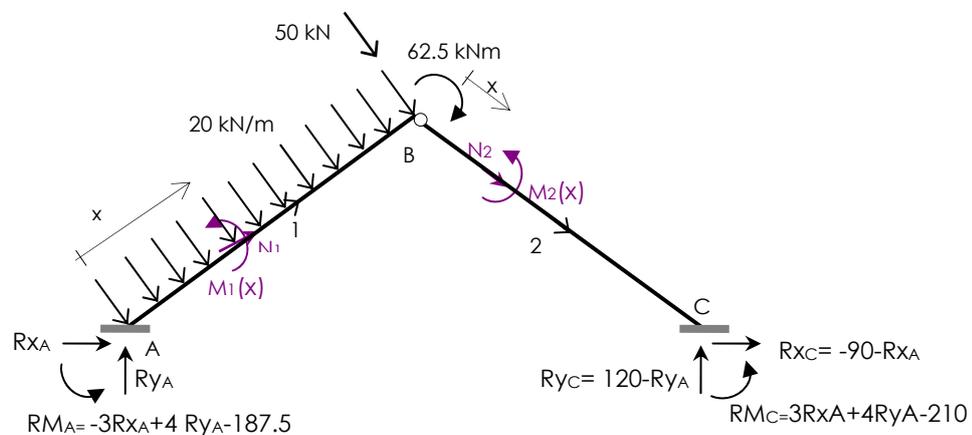


Figura 2. Esquema del equilibrio en la estructura real

Leyes de esfuerzos

$$\text{Barra 1: } N1 = -0.8 R_{xA} - 0.6 R_{yA} \quad (9)$$

$$M1(x) = (0.8x - 4) R_{yA} + (3 - 0.6x) R_{xA} + 187.5 - 10x^2 \quad (10)$$

$$\text{Barra 2: } N2 = -144 - 0.8 R_{xA} + 0.6 R_{yA} \quad (11)$$

$$M2(x) = -42x + 0.8 R_{yA} x + 0.6 R_{xA} x \quad (12)$$

## 4.5 Planteamiento del estado virtual 1

En el estado virtual 1 aplicaremos una fuerza virtual de valor unidad en el apoyo A, en la dirección de la redundante  $R_{xA}$  (figura 3). Para tener una configuración estática admisible, anularemos las redundantes virtuales coincidentes con las redundantes reales, es decir,  $\delta R_{xA} (= 0)$  y  $\delta R_{yA} (= 0)$ .

Equilibramos el estado virtual 1 y obtenemos las leyes de esfuerzos.

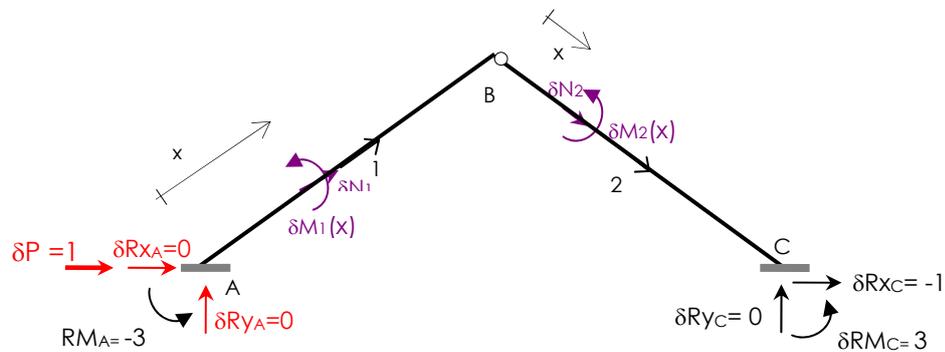


Figura 3. Esquema del equilibrio en la estructura virtual 1

Equilibrio en el estado virtual 1

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad \boxed{\delta R_{xC} = -1} \\ \sum F_y = 0 & \quad \boxed{\delta R_{yC} = 0} \\ \sum M = 0 & \quad \delta R_{MA} + \delta R_{MC} = 0 \quad \delta R_{MA} = -\delta R_{MC} \\ \text{Aislando la barra 2: } \sum M_{i2} = 0 & \quad \boxed{\delta R_{MC} = 3} \quad \boxed{\delta R_{MA} = -3} \end{aligned}$$

Leyes de esfuerzos en el estado virtual 1

$$\text{Barra 1: } \delta N_1 = -0.8 \quad (13)$$

$$\delta M1(x) = 3 - 0.6x \quad (14)$$

$$\text{Barra 2: } \delta N_2 = -0.8 \quad (15)$$

$$\delta M2(x) = 0.6x \quad (16)$$

## 4.6 Planteamiento del estado virtual 2

En el estado virtual 2 aplicaremos una fuerza virtual de valor unidad en el apoyo A, en la dirección de la redundante  $R_{yA}$  (figura 4). Para tener una configuración estática admisible, anularemos las redundantes virtuales coincidentes con las redundantes reales, es decir,  $\delta R_{xA} (= 0)$  y  $\delta R_{yA} (= 0)$ .

Equilibramos el estado virtual 2 y obtenemos las leyes de esfuerzos.

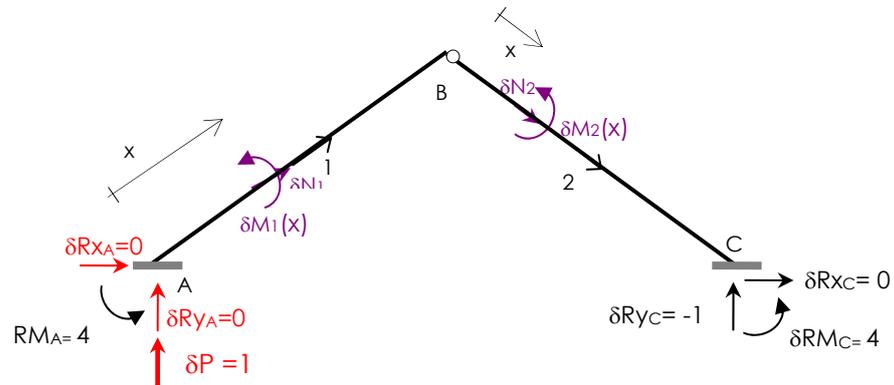


Figura 4. Esquema del equilibrio en la estructura virtual 2

Equilibrio en el estado virtual 2

$$\begin{aligned} \Sigma F_x=0 & \quad \boxed{\delta R_{xC} = 0} \\ \Sigma F_y=0 & \quad \boxed{\delta R_{yC} = -1} \\ \Sigma M=0 & \quad \delta R_{MA} + \delta R_{MC} + 8 \delta R_{yC} = 0 \quad \delta R_{MA} = -\delta R_{MC} - 8 \delta R_{yC} \\ \text{Aislado la barra 2: } \Sigma M_{i2}=0 & \quad \boxed{\delta R_{MC} = 4} \quad \boxed{\delta R_{MA} = 4} \end{aligned}$$

Leyes de esfuerzos en el estado virtual 2

$$\begin{aligned} \text{Barra 1: } \delta N_1 &= -0.6 & (17) \\ \delta M_1(x) &= 0.8 x - 4 & (18) \\ \text{Barra 2: } \delta N_2 &= 0.6 & (19) \\ \delta M_2(x) &= 0.8 x & (20) \end{aligned}$$

## 4.7 Ecuaciones de balance energético en cada estado virtual y obtención de las fuerzas redundantes

En cada estado virtual, las fuerzas virtuales externas realizarán un trabajo virtual complementario ( $\delta W^*$ ) y las fuerzas internas un trabajo virtual complementario interno que expresaremos como energía de deformación virtual complementaria ( $\delta U^*$ ).

La ecuación de balance energético del principio de las Fuerzas Virtuales se expresa como:

$$\delta W^* = \delta U^* \tag{21}$$

ESTADO VIRTUAL 1:

- Trabajo virtual complementario:

Es el trabajo producido por la fuerza virtual exterior horizontal ( $\delta P=1$ ) y los desplazamientos reales de su punto de aplicación. Este trabajo es nulo ya que no hay desplazamiento horizontal en A en la estructura real.

$$\delta W^* = 1 \cdot 0 = 0 \tag{22}$$

- Energía de deformación virtual complementaria:

Será la suma de la energía virtual complementaria por axil y por flector de las barras de la estructura.



$$\begin{aligned}
 \delta U^* &= \delta U_{a1}^* + \delta U_{f1}^* + \delta U_{a2}^* + \delta U_{f2}^* = \frac{N_1}{EA_1} \delta N_1 L_1 + \int_0^{L_1} \frac{M_1(x)}{EI_1} \delta M_1(x) dx + \frac{N_2}{EA_2} \delta N_2 L_2 + \int_0^{L_2} \frac{M_2(x)}{EI_2} \delta M_2(x) dx = \\
 &= \frac{(-0.8R_{X_A} - 0.6R_{Y_A}) \cdot (-0.8) \cdot 5}{1371300} + \int_0^5 \frac{[(0.8x - 4)R_{Y_A} + (3 - 0.6x)R_{X_A} + 187.5 - 10x^2](3 - 0.6x)}{8043} dx + \\
 &+ \frac{(-144 - 0.8R_{X_A} + 0.6R_{Y_A}) \cdot (-0.8) \cdot 5}{1371300} + \int_0^5 \frac{[-42x + 0.6xR_{X_A} + 0.8xR_{Y_A}](0.6x)}{8043} dx = \\
 &= 5.8595 \cdot 10^{-3} + 3.7345 \cdot 10^{-3} R_{X_A}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Siendo:

$\delta U_{a1}^*$ , la energía de deformación virtual complementaria por axil de la barra 1

$\delta U_{f1}^*$ , la energía de deformación virtual complementaria por flexión de la barra 1

$\delta U_{a2}^*$ , la energía de deformación virtual complementaria por axil de la barra 2

$\delta U_{f2}^*$ , la energía de deformación virtual complementaria por flexión de la barra 2

#### ESTADO VIRTUAL 2:

- Trabajo virtual complementario:

Es el trabajo producido por la fuerza virtual exterior vertical ( $\delta P=1$ ) y los desplazamientos reales de su punto de aplicación Este trabajo es nulo ya que no hay desplazamiento vertical en A en la estructura real.

$$\delta W^* = 1 \cdot 0 = 0 \tag{24}$$

- Energía de deformación virtual complementaria:

Será la suma de la energía virtual complementaria por axil y por flector de las barras de la estructura.

$$\begin{aligned}
 \delta U^* &= \delta U_{a1}^* + \delta U_{f1}^* + \delta U_{a2}^* + \delta U_{f2}^* = \frac{N_1}{EA_1} \delta N_1 L_1 + \int_0^{L_1} \frac{M_1(x)}{EI_1} \delta M_1(x) dx + \frac{N_2}{EA_2} \delta N_2 L_2 + \int_0^{L_2} \frac{M_2(x)}{EI_2} \delta M_2(x) dx = \\
 &= \frac{(-0.8R_{X_A} - 0.6R_{Y_A}) \cdot (-0.6) \cdot 5}{1371300} + \int_0^5 \frac{[(0.8x - 4)R_{Y_A} + (3 - 0.6x)R_{X_A} + 187.5 - 10x^2](0.8x - 4)}{8043} dx + \\
 &+ \frac{(-144 - 0.8R_{X_A} + 0.6R_{Y_A}) \cdot (0.6) \cdot 5}{1371300} + \int_0^5 \frac{[-42x + 0.6xR_{X_A} + 0.8xR_{Y_A}](0.8x)}{8043} dx = \\
 &= -0.3556 + 6.633 \cdot 10^{-3} R_{Y_A}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Ecuaciones de balance energético:  $\delta W^* = \delta U^*$

Estado 1: con las ecuaciones (22) y (23):

$$5.8595 \cdot 10^{-3} + 3.7345 \cdot 10^{-3} R_{X_A} = 0 \tag{26}$$

Estado 1: con las ecuaciones (24) y (25):

$$-0.3556 + 6.633 \cdot 10^{-3} R_{Y_A} = 0 \tag{27}$$

A partir de las ecuaciones de balance energético se obtiene el valor de las redundantes.

$R_{X_A} = -1.57 \text{ kN}$	$R_{Y_A} = 53.62 \text{ kN}$
------------------------------	------------------------------



## 4.8 Obtención de las incógnitas estáticas a partir de la fuerza redundante

Una vez calculado el valor de las fuerzas redundantes se sustituye en las ecuaciones (5), (6) y (7), (8), (9), (10), (11) y (12) para obtener todas las incógnitas estáticas así como las leyes de esfuerzos

Reacciones:

(5)	$R_{XC} = -90 - R_{XA}$	$\Rightarrow$	$R_{XC} = -88.43 \text{ kN}$
(6)	$R_{YC} = 120 - R_{YA}$	$\Rightarrow$	$R_{YC} = 66.38 \text{ kN}$
(7)	$R_{MA} = -3 R_{XA} + 4 R_{YA} - 187.5$	$\Rightarrow$	$R_{MA} = 31.69 \text{ kNm}$
(8)	$R_{MC} = 3 R_{XA} + 4 R_{YA} - 210$	$\Rightarrow$	$R_{MC} = -0.23 \text{ kNm}$

Leyes de esfuerzos:

Barra 1:

(9)	$N_1 = -0.8 R_{XA} - 0.6 R_{YA}$	$\Rightarrow$	$N_1 = 30.916$
(10)	$M_1(x) = (0.8x - 4) R_{YA} + (3 - 0.6x) R_{XA} + 187.5 - 10x^2$	$\Rightarrow$	$M_1(x) = 43.838x - 31.69 - 10x^2$

Barra 2:

(11)	$N_2 = -144 - 0.8 R_{XA} + 0.6 R_{YA}$	$\Rightarrow$	$N_2 = -110.572$
(12)	$M_2(x) = -42x + 0.8 R_{YA}x + 0.6 R_{XA}x$	$\Rightarrow$	$M_2(x) = -0.046x$

El equilibrio final se representa en la figura 5.

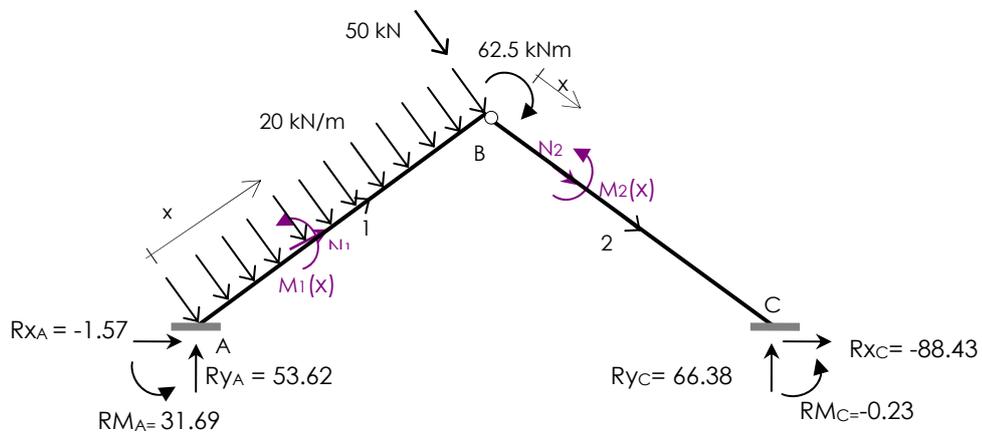


Figura 5. Equilibrio final de la estructura real



## 5 Cierre

En este documento hemos resuelto estáticamente una estructura hiperestática de grado 2 mediante el Principio de las Fuerzas Virtuales.

Se propone, como ejercicio de aplicación y autoevaluación, resolver estáticamente la estructura de la figura 6.

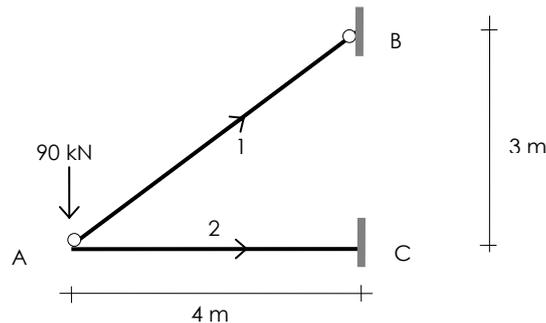


Figura 6. Estructura propuesta

Datos de las barras: barra 1:  $\Phi$  20 mm  
barra 2:  $A = 62.6 \text{ cm}^2$   $I = 11770 \text{ cm}^4$   
 $E = 210000 \text{ N/mm}^2$

(Resultado: La estructura es hiperestática de grado 1 por lo que habrá que plantear un único estado virtual de fuerzas.

$R_{x_C} \approx -96 \text{ kN}$ ,  $R_{y_C} \approx 18 \text{ kN}$ ,  $R_{M_C} \approx -72 \text{ kNm}$ ,  $R_B$  (en la dirección de la barra 2)  $\approx 120 \text{ kN}$ )

## 6 Bibliografía

### 6.1 Libros:

[1] Abdilla E. "Fundamentos energéticos de la Teoría de Estructuras. Segunda parte-Aplicaciones. Volumen 1". Editorial UPV, ref.: 2003.718, 2003

[2] Basset, L.; Apuntes de clase.

### 6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset

Figura 1. Esquema de la estructura.

Figura 2. Esquema del equilibrio en la estructura real

Figura 3. Esquema del equilibrio en la estructura virtual 1

Figura 4. Esquema del equilibrio en la estructura virtual 2

Figura 5. Equilibrio final en la estructura real

Figura 6. Estructura propuesta