

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DOCTORAL

**Mejora de los elementos de transición en XFEM
aplicado a Mecánica de la Fractura
Elástica Lineal**

Presentada por: D^{ña} Ana Vercher Martínez
Dirigida por: Dr. D. José Enrique Tarancón Caro
Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández

Valencia, Mayo de 2010

TESIS DOCTORAL

Mejora de los elementos de transición en XFEM aplicado a Mecánica de la Fractura Elástica Lineal

que para la obtención del grado de

Doctora Ingeniera Industrial

presenta

Dña. Ana Vercher Martínez
Ingeniera Industrial, especialidad Mecánica

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de
la Universidad Politécnica de Valencia

Directores: **Dr. D. José Enrique Tarancón Caro**
Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández
Valencia, Mayo de 2010

TESIS DOCTORAL

Mejora de los elementos de transición en XFEM aplicado a Mecánica de la Fractura Elástica Lineal

Presentada por: D^{ña} Ana Vercher Martínez
Dirigida por: Dr. D. José Enrique Tarancón Caro
Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández

TRIBUNAL CALIFICADOR

PRESIDENTE: Dr. D.

VOCALES: Dr. D.

Dr. D.

Dr. D.

SECRETARIO: Dr. D.

En Valencia, a _____ de _____ de 2010

Resumen

El *Método de los Elementos Finitos* (MEF) constituye una de las técnicas más empleadas para la resolución de problemas de contorno. Uno de los fundamentos de la aproximación numérica en MEF es la interpolación polinómica, lo cual hace especialmente óptima su aplicación a problemas con solución suave.

El enfoque de la *Mecánica de la Fractura Elástica Lineal* (MFEL) tiene en consideración la posible presencia de grietas en el material. El comportamiento de la solución analítica no es suave en las cercanías de estas imperfecciones. El carácter local que aquí presenta la solución se ve gobernado por la singularidad, cuya intensidad, depende de la geometría y fuerzas actuantes.

El MEF se ha aplicado a problemas de MFEL con el objeto fundamental de obtener los *Factores de Intensidad de Tensiones* (FIT), parámetros que caracterizan el comportamiento de la solución cerca de la singularidad. El refinamiento adaptativo de la malla en el contorno y frente de la grieta así como el empleo de elementos especiales para el caso del extremo de grieta, han sido las principales estrategias para mejorar la solución. Para la obtención de los FIT, entre diferentes técnicas de postproceso, los *métodos energéticos* o *indirectos* presentan importantes ventajas, ya que utilizan los resultados obtenidos numéricamente en zonas alejadas del extremo de grieta, donde la solución muestra un menor error.

El *Método de los Elementos Finitos Extendidos* (XFEM), surge en aplicación a problemas con diversos tipos de singularidad. El método XFEM hace innecesaria la adaptación de la malla a la geometría de la singularidad. El enriquecimiento local de la solución basado en el cumplimiento de la partición de la unidad son sus principales características. En la aplicación de XFEM a problemas de MFEL, se emplean dos tipos de funciones de enriquecimiento, capaces de representar el comportamiento discontinuo de la solución entre las caras de la grieta y el comportamiento asintótico de la misma en el frente de grieta.

En la Tesis se ha implementado el método XFEM incluyendo las diferentes mejoras que, en los últimos años, han sido desarrolladas con el objetivo de perfeccionar el planteamiento básico de esta herramienta numérica. Los aspectos tratados han sido los siguientes: estrategia de enriquecimiento, velocidad de convergencia, integración numérica, condicionamiento numérico y elementos de transición.

En la Tesis se ha analizado en profundidad el error en los elementos de transición asociado a la falta de la partición de la unidad. Se ha realizado un estudio detallado de las diferentes estrategias aportadas para la solución de este problema. Se propone una técnica novedosa en MFEL para la mejora de estos elementos basada en la adición de nuevos grados de libertad a través de funciones de forma jerárquicas. El planteamiento ofrece grandes ventajas como se ha podido comprobar en diversos ejemplos numéricos. La precisión en los resultados crece significativamente sin un aumento importante del coste computacional ya que los nuevos grados de libertad se añaden convenientemente, sólo en los elementos de transición. El error medido en diferentes magnitudes se reduce considerablemente no sólo en los elementos de extremo de grieta sino también en elementos más alejados. Al mismo tiempo, con esta propuesta de mejora no se incrementa el mal condicionamiento del sistema de ecuaciones. La metodología propuesta ha sido extendida a problemas tridimensionales obteniéndose igualmente muy buenos resultados.

Abstract

The *Finite Element Method* (FEM) is one of the most employed techniques to solve boundary problems. One of the fundamentals of the numerical approximation in FEM is the polynomial interpolant, and therefore its application to smooth solution problems gives optimal results.

The possible presence of cracks in the material is taken into account in the *Linear Elastic Fracture Mechanic* (LEFM) approach. The behaviour of the analytical solution is not smooth near these imperfections. The local character exhibited by the solution is governed by the singularity, whose intensity depends on the geometry and applied loads.

Usually, the FEM has been applied to LEFM problems in order to calculate the *Stress Intensity Factors* (SIFs), the parameters that characterize the behaviour of the solution near the singularity. The adaptive refinement of the mesh in both crack surroundings and crack tip as well as the use of special elements in the crack tip zone, have been the principal strategies to enhance the solution. In order to obtain the SIFs, the *energetic* or *indirect methods* show important advantages because they use the results obtained numerically far away from the crack tip where the solution has low discretization error.

The *Extended Finite Element Method* (XFEM) arises as an alternative to problems with different types of singularity. In XFEM is not necessary to adapt the mesh to the geometry of the singularity. The local enrichment of the solution based on the partition of unity concept are the main characteristics of the method. When XFEM is applied to LEFM problems, two classes of enrichment functions are taken into consideration, in order to represent both the discontinuous solution between crack faces and the asymptotic behaviour of the solution near the crack front.

The XFEM has been programmed in this Thesis including several enhancements that, during last years, have been developed with the main objective of improving the bases of this numerical technique. The aspects treated are the following: enrichment strategies, rate of convergence, numerical integration, numerical conditioning and blending elements.

The error in blending elements, due to the lack of partition of unity property, has been deeply analyzed in this Thesis. A detailed study of the different methodologies that have been developed to enhance the blending elements has been performed. A new technique in XFEM to enhance these elements is proposed, based on the addition of new degrees of freedom through hierarchical

shape functions. The approach offers important advantages as it has been verified with different numerical examples. The accuracy of the results increases without an important growth of the computational cost because the new degrees of freedom are suitably added, only in the blending elements. The error in different magnitudes is reduced in a significant manner not only within the crack tip elements but in distant elements. At the same time, with this approach, the condition number of the system of equations dose not increase. The proposed methodology has been extended to three-dimensional problems giving also very good results.

Resum

El *Mètode dels Elements Finites* (MEF) constitueix una de les tècniques més utilitzades per a la resolució de problemes de contorn. Un dels fonaments de l'aproximació numèrica en MEF és la interpolació polinòmica, el que fa especialment òptima la seua aplicació a problemes amb solució suau.

L'enfocament de la *Mecànica de la Fractura Elàstica Lineal* (MFEL) té en consideració la possible presència de fissures en el material. El comportament de la solució analítica no és suau prop d'aquestes imperfeccions. El caràcter local que ací presenta la solució està governat per la singularitat i la seua intensitat depèn de la geometria i les forces aplicades.

El MEF s'ha aplicat a problemes de MFEL amb l'objectiu fonamental d'obtindre els *Factors d'Intensitat de Tensions* (FIT), paràmetres que caracteritzen el comportament de la solució prop de la singularitat. El refinament adaptatiu de la malla al voltant i front de la fissura així com l'ús d'elements especials per al cas d'extrem de fissura, han sigut les principals estratègies per a millorar la solució. Per a l'obtenció dels FIT, entre diferents tècniques de postprocés, els *mètodes energètics* o *indirectes* presenten importants avantatges, ja que utilitzen els resultats obtinguts numèricament en llocs allunyats de l'extrem de fissura, on la solució mostra un error més menut.

El *Mètode dels Elements Finites Enriquits* (XFEM), sorgeix en aplicació a problemes amb diversos tipus de singularitat. El mètode XFEM fa innecessària l'adaptació de la malla a la geometria de la singularitat. L'enriquiment local de la solució basat en el compliment de la partició de la unitat són les seues principals característiques. En l'aplicació de XFEM a problemes de MFEL, s'utilitzen dos tipus de funcions d'enriquiment, bones per a representar el comportament discontinu de la solució entre les cares de la fissura i el comportament asintòtic de la mateixa en el front de fissura.

En la Tesi s'ha implementat el mètode XFEM incloent les diferents millores que, al llarg dels últims anys, han sigut desenvolupades amb els objectius de perfeccionar el plantejament bàsic d'aquesta eina numèrica. Els aspectes tractats han sigut els següents: estratègia d'enriquiment, velocitat de convergència, integració numèrica, condicionament numèric i elements de transició.

En la Tesi s'ha analitzat amb profunditat l'error en els elements de transició associat a la falta de la partició de la unitat. S'ha realitzat un estudi detallat de les diferents estratègies aportades per a la solució d'aquest problema. Es

proposa una tècnica novadora en MFEL per a la millora d'aquests elements fonamentada en l'afegiment de nous graus de llibertat mitjançant funcions de forma jeràrquiques. El plantejament ofereix grans avantatges como s'ha pogut comprovar en diversos eixamples numèrics. La precisió en els resultats creix significativament sense un augment important del cost computacional ja que els nous graus de llibertat s'afigen degudament, sols en els elements de transició. L'error mesurat en diferents magnituds es redueix considerablement no sols als elements d'extrem de fissura sinó també en elements més allunyats. Al mateix temps, amb aquesta proposta de millora no s'incrementa el mal condicionament del sistema d'equacions. La metodologia proposta ha sigut estesa a problemes tridimensionals obtenint igualment molt bons resultats.

A Fabián y a mis hijos Fabián y Margarita.

A mis padres y hermano.

Al buen Dios.

Agradecimientos

Manifiesto mi más sincero agradecimiento a los directores de esta Tesis por su dedicación y apoyo. A Javier Fuenmayor, del que siempre he aprendido como profesor e investigador. Sus conocimientos, claridad y concreción de objetivos han servido siempre de guía acertada para la consecución de este trabajo. A José Enrique, por su ayuda siempre cercana en el desarrollo de esta Tesis. Su dedicación y consejos han resultado ser fundamentales en momentos de dificultad. Por encima de los amplios conocimientos científicos e ingenieriles de mis directores de Tesis, sitúo su extraordinaria calidad humana, siempre accesibles.

Agradezco también a mis compañeros de trabajo su comprensión, con los que he compartido muchos momentos de alegría y también de desánimo. Entre ellos, agradezco de manera especial al excelente grupo de investigación en la línea de los métodos numéricos del área de Ingeniería Mecánica del DIMM entre los que se encuentra Eugenio Giner.

A mis padres y hermano, que han sido apoyo incondicional en todo momento a lo largo de mi carrera. En sus palabras de ánimo y preocupación sincera he encontrado siempre motivación.

A Fabián, por su inestimable ayuda. Esta Tesis no hubiese sido posible sin su entrega. Sin duda, su esfuerzo y, en ocasiones sacrificio, han hecho posible este momento.

Índice general

Resumen	i
Abstract	iii
Resum	v
Agradecimientos	ix
Capítulo I I. Introducción	15
I.1 Justificación	15
I.2 Objetivos	16
I.3 Organización	17
Capítulo II II. Bases de Elementos Finitos. Aplicación a MFEL	21
II.1 Introducción	21
II.2 Planteamiento del problema elástico	22
II.2.1 Formulación fuerte	22
II.2.2 Formulación débil	23
II.2.3 Suavidad de la solución	24
II.3 Formulación mediante el MEF	26
II.3.1 Características de la interpolación	28
II.3.2 Integración numérica	30
II.4 Error de discretización	31
II.4.1 Leyes de convergencia	33
II.5 Modelado de la singularidad mediante el MEF	38
II.5.1 Métodos clásicos	38
II.5.2 Método de Partición de la Unidad y Enriquecimiento	38
II.6 Extracción del FIT mediante el MEF	41
II.6.1 Introducción	41

II.6.2	La integral de contorno J	44
II.6.3	Integrales de contorno en modo mixto	51
II.6.4	Método de la integral de dominio equivalente (EDI).....	54
Capítulo III	III. Método de los Elementos Finitos Extendido.....	61
III.1	Introducción.....	61
III.2	Level Set Method.....	67
III.2.1	Definición de la función <i>level set</i>	67
III.2.2	<i>Level set</i> para grietas.....	69
III.3	Problema de contorno.....	76
III.4	Planteamiento básico de XFEM	78
III.4.1	Enriquecimiento	78
III.4.2	Integración numérica	85
III.4.2.1	Introducción.....	85
III.4.2.2	Integración casi-polar	91
III.4.2.3	Ejemplo numérico	94
III.4.3	Velocidad de convergencia	96
III.4.3.1	Introducción.....	96
III.4.3.2	Enriquecimiento topológico	98
III.4.3.3	Ejemplo numérico	99
III.5	Mejoras en formulación XFEM.....	102
III.5.1	Enriquecimiento geométrico	102
III.5.1.1	Influencia de los nodos mixtos	104
III.5.1.2	Ejemplo numérico	107
III.5.2	Condicionamiento numérico.....	110
III.5.3	Gathering	111
III.5.3.1	Ejemplo numérico	113
Capítulo IV	IV. Elementos de transición	117
IV.1	Introducción.....	117
IV.2	Análisis del error en los elementos de transición.....	125
IV.3	Elemento de transición mejorado.....	129
IV.3.1	Funciones de forma jerárquicas.....	129
IV.3.2	Elemento de transición mejorado en XFEM aplicado a MFEL en problemas bidimensionales.....	136

IV.3.3	Extensión a 3D del elemento de transición mejorado en XFEM aplicado a MFEL.....	139
IV.4	Resultados numéricos	142
IV.4.1	Introducción	142
IV.4.2	Influencia de los modos de orden superior en la mejora de los elementos de transición.....	145
IV.4.3	Problema de una grieta en borde: modo I y modo II.....	148
IV.4.4	Problema de una grieta centrada en placa infinita	155
IV.4.5	Mejora del campo de tensiones con ETM	161
IV.4.6	Influencia de la posición del extremo de grieta en la malla.....	163
IV.4.7	Elemento de transición mejorado y acoplamiento de grados de libertad (<i>gathering</i>).....	168
IV.4.8	Influencia de los nodos mixtos en el <i>gathering</i>	172
IV.4.9	Comparación entre el método XFEM con ETM y el método XFEM modificado de Fries [135]	174
IV.4.10	Problema de grieta centrada en placa infinita. Caso 3D	177
Capítulo V	V. Conclusiones y futuros trabajos.....	189
V.1	Conclusiones	189
V.2	Futuros trabajos	192
Bibliografía.....		193

Capítulo I

Introducción

I.1 Justificación

El Método de los Elementos Finitos (MEF) constituye una potente herramienta numérica para la resolución de problemas de contorno. La solución aproximada del MEF puede converger a la exacta si ésta tiene un comportamiento polinómico, en cambio, cuando existe una singularidad, resulta difícil aproximar correctamente el campo de la solución en sus cercanías. En este caso, el carácter de la solución está dominado por el efecto local de la singularidad.

El Método de los Elementos Finitos Extendido (XFEM) constituye una alternativa eficaz para la modelización de este tipo de problemas. El XFEM se basa en el enriquecimiento local de la solución bajo el concepto de la partición de la unidad. El enriquecimiento se realiza con unas funciones conocidas *a priori*, que gobiernan el comportamiento de la solución en la región singular.

En esta Tesis, el problema que se resuelve está en el marco de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL) y, por lo tanto, la singularidad viene dada por una grieta. En este caso, el cálculo de los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) resulta muy importante. Cuando se aplican métodos numéricos para la extracción de los FIT, los métodos energéticos constituyen técnicas de postproceso que presentan grandes ventajas. Esto es así porque pueden utilizar la solución aproximada de elementos finitos alejados de la singularidad y, por lo tanto, evitar la zona de mayor error en los resultados.

En la Tesis se ha utilizado la combinación de métodos energéticos de extracción de los factores de intensidad de tensiones con el Método de Elementos Finitos Extendido con el objetivo de analizar problemas de MFEL con elevada precisión y bajo coste computacional.

I. INTRODUCCIÓN

En el Método de Elementos Finitos Extendido hay diversos aspectos importantes a tratar como son, la identificación de los nodos a enriquecer (problema asociado a la detección de la singularidad y, en su caso, al movimiento de la misma), la integración numérica, la velocidad de convergencia, el condicionamiento numérico y los elementos de transición. A lo largo de la última década, muchos trabajos han ido encaminados a la resolución de estos problemas, comunes en diversas clases de singularidad: movimiento de fronteras, inclusiones, diferencia de material, cambio de fase, contacto, grietas, etc. Su consecución resulta muy importante para así disponer de un método numérico eficiente y fiable.

La presencia de los elementos de transición, elementos parcialmente enriquecidos que conectan la malla enriquecida con la estándar, resulta especialmente crítica puesto que en estos elementos la aproximación no cumple la partición de la unidad. Esto supone la existencia de un error que, para el caso de grietas, implica importantes inconvenientes como la pérdida de precisión en la solución y mayor error en la estimación del campo de tensiones. La Tesis se justifica en la necesidad de aportar una solución eficiente a este problema.

I.2 Objetivos

El objetivo principal de esta Tesis es la *mejora de los elementos de transición en el Método de Elementos Finitos Extendido*. En este trabajo se han considerado únicamente problemas en el ámbito de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. La metodología propuesta, se hace extensible al caso 3D con ligeras modificaciones para lograr un comportamiento óptimo de la solución.

Para lograr este objetivo, ha sido necesario poner a punto la herramienta numérica del Método de los Elementos Finitos Extendidos. Se han programado en el código abierto de elementos finitos FEAP, elementos de usuario con la formulación de XFEM.

A continuación se enumeran los objetivos que se han establecido para, finalmente, disponer de un código que incorpore las recientes mejoras en XFEM:

1. Definición de la grieta a través de las funciones level set.
2. Definición de los tipos de enriquecimiento.
3. Análisis de la velocidad de convergencia.
4. Enriquecimiento mixto.
5. Integración numérica.
6. Resolución del problema del condicionamiento numérico.

I. INTRODUCCIÓN

Aunque el problema considerado en la Tesis es el caso concreto de la singularidad de extremo de grieta, cabe resaltar que el objetivo principal ha sido proporcionar una solución novedosa en MFEL a un problema inherente al método numérico de Elementos Finitos Extendido de aplicación más general.

I.3 Organización

La memoria de la Tesis se ha organizado en cinco capítulos.

En el Capítulo II se describen los fundamentos teóricos que han sido necesarios para el desarrollo de la Tesis. Tras una breve introducción, se explican los Fundamentos del Método de los Elementos Finitos. En primer lugar se describe el problema elástico lineal en ausencia de grietas en la formulación fuerte. A continuación se plantea la formulación débil en desplazamientos minimizando la energía potencial total, bajo la hipótesis de cargas constantes. Se llega a un sistema de ecuaciones algebraico donde, tras la aplicación de las condiciones de contorno, se obtiene la solución nodal. A partir de ella es posible obtener las deformaciones y tensiones en cualquier punto del dominio.

Seguidamente, se define la suavidad de la solución a partir de las características de su derivada en cuanto a integrabilidad y rapidez de variación en el dominio. Se muestran los factores de intensidad de tensiones generalizados de acuerdo con *Szabó*. A continuación, se definen las características de la interpolación en elementos finitos resumiendo las características de las funciones de forma convencionales así como la transformación de coordenadas.

La integración numérica basada en la cuadratura de *Gauss* se resume brevemente ya que merece una especial atención en los elementos intersectados por la grieta y los que contienen al extremo de grieta. Siguiendo con los fundamentos del MEF, se define el error de discretización y se resumen las leyes de convergencia del error en norma energética para diferentes estrategias de refinamiento. Aunque en la Tesis se ha realizado refinamiento h uniforme, se ha considerado importante indicar otros comportamientos en cuanto a velocidad de convergencia ya que muestra el contexto en el que se ha desarrollado la Tesis. Seguidamente se resumen brevemente los diferentes métodos que han sido desarrollados en el MEF para modelar correctamente la singularidad: refinamiento local y elementos singulares principalmente. A continuación, se presenta el concepto de partición de la unidad y su importancia para poder representar cualquier función correctamente. Seguidamente, se describe la aplicación del enriquecimiento en el marco de la partición de la unidad, para la resolución de problemas de MFEL.

I. INTRODUCCIÓN

El último punto tratado en el Capítulo II establece los conceptos teóricos de algunos métodos energéticos de extracción del FIT. En la introducción se expone el problema singular de un dominio con presencia de una grieta, con las ecuaciones correspondientes al primer término del desarrollo asintótico de la solución (campo de tensiones y desplazamientos). En ellas aparecen los factores de intensidad de tensiones (FIT) cuyo cálculo es objeto de la MFEL. La integral de contorno J , las integrales de contorno para modo mixto y la integral de dominio equivalente (método EDI), son las principales formas de obtención de los FIT. En la Tesis, se ha implementado la integral de dominio equivalente, por presentar importantes ventajas frente a las integrales de contorno.

En el Capítulo III se realiza una descripción detallada del Método de los Elementos Finitos Extendido. En la introducción se realiza una revisión bibliográfica siguiendo un orden cronológico, de muchas de las aportaciones relevantes en el estado del arte. Como se indica en la introducción, una de las ventajas más importantes del XFEM frente al MEF es que la malla no debe adaptarse necesariamente a la geometría de la singularidad. No obstante, es necesario identificar dónde se encuentra ya que de ello depende poder establecer los conjuntos de los nodos que deberán ser enriquecidos. A tal fin, en la Tesis, se emplea el *Level Set Method*, cuya aplicación a la definición de grietas se describe en este capítulo.

A continuación se formula el problema de contorno elástico con grieta libre de tracciones y su formulación débil.

El plantamiento básico de XFEM se realiza describiendo tres aspectos fundamentales donde se muestran, en algunos casos, ejemplos numéricos que permiten comparar cuantitativamente diversos parámetros:

- En primer lugar se tiene el enriquecimiento. La idea de mejorar localmente la aproximación con funciones conocidas *a priori*, puede realizarse principalmente siguiendo dos criterios, el enriquecimiento *intrínseco* y el *extrínseco*. El método XFEM se basa en un enriquecimiento extrínseco. Como tal, se añaden grados de libertad a medida que se incluyen funciones adicionales. En su versión estándar, la selección de los nodos a enriquecer obedece a un criterio estrictamente topológico, a partir de los valores de las funciones *level set*.
- En segundo lugar, se describe la integración numérica, resumiendo algunas aportaciones en este campo y destacando la opción que luego ha sido implementada en la Tesis, esto es, la subdivisión de los elementos intersectados por la grieta y la integración casi-polar para los elementos que contienen al extremo de grieta. Se muestran, a modo de ejemplos, cuadraturas para el caso 2D y 3D; a continuación, un ejemplo numérico en el

I. INTRODUCCIÓN

que se puede constatar la ventaja significativa del esquema de integración empleado para el caso de extremo de grieta.

- En tercer lugar, se analiza la velocidad de convergencia comparando FEM con XFEM en un problema determinado, para el caso de elementos lineales y cuadráticos, manteniendo el criterio de enriquecimiento topológico.

A continuación se detallan y ejemplifican numéricamente algunas de las mejoras que, en el transcurso de los años, se han realizado en XFEM. Se describe el concepto de enriquecimiento geométrico mostrando un ejemplo numérico. Seguidamente, se definen los denominados *nodos mixtos* y se analiza la influencia.

Al utilizar el XFEM hay que prestar atención al número de condicionamiento de la matriz de rigidez, que puede crecer rápidamente al refinar la malla. Se explica la técnica *gathering* desarrollada por *Laborde* y se aplica a un ejemplo numérico donde se observa que se logra mantener en niveles aceptables el condicionamiento de la matriz de rigidez global. No obstante, esta técnica induce reducciones importantes en cuanto a precisión y velocidad de convergencia puesto que obliga a la solución a seguir el comportamiento dado por el primer término del desarrollo asintótico del campo de desplazamientos de extremo de grieta en una zona concreta del dominio, tal y como se verá en los análisis de convergencia realizados en el capítulo IV.

En los elementos de transición, puesto que el enriquecimiento es parcial, no se cumple la partición de la unidad. La presencia de ciertos términos adicionales induce errores en la solución en el elemento. El Capítulo IV se centra en el objetivo fundamental de la Tesis. En él se expone de manera detallada tanto los conocimientos necesarios para comprender el error existente en la zona de transición como la técnica desarrollada en esta Tesis para su mejora. En primer lugar, se realiza una revisión bibliográfica de los estudios que han analizado los problemas asociados a la capa de transición así como las soluciones propuestas. De entre ellas, la técnica propuesta por *Chessa* ha sido considerada para su extensión a los problemas de MFEL. A continuación se muestra un análisis detallado del error en el elemento de transición para un caso bidimensional.

A continuación se presenta la propuesta de mejora de los elementos de transición. En primer lugar, se resumen las características de las funciones de forma jerárquicas que, posteriormente, van a ser utilizadas. La aproximación de la solución se modifica localmente en los elementos de transición, añadiendo nuevos grados de libertad, asociados a las funciones de forma jerárquicas, capaces de compensar, aunque sea parcialmente, los términos patológicos derivados de la falta de partición de la unidad. Puesto que la mejora es local, no supone un coste computacional importante. La aproximación se muestra para

I. INTRODUCCIÓN

el caso 2D y 3D con los criterios establecidos para identificar dónde deben situarse los grados de libertad adicionales.

Seguidamente, se muestran varios ejemplos numéricos. Para todos los casos bidimensionales se ha considerado el elemento cuadrilátero lineal y cuadrático, para el caso tridimensional, se han empleado elementos tetraédricos lineales. Se analiza la influencia de los modos de las funciones de forma jerárquicas de orden superior en la mejora de la aproximación y la influencia de la posición del extremo de grieta. A continuación se realiza un análisis de convergencia en dos problemas bidimensionales en modos I y II puros y modo mixto. Seguidamente, se analiza el comportamiento de la solución cuando se considera simultáneamente la técnica *gathering* y la técnica de mejora propuesta en la Tesis. También se analiza la propuesta reciente de *Fries* para eliminar el efecto de los elementos de transición en comparación con la metodología propuesta. Finalmente se plantea un ejemplo 3D en modo I y modo II.

En el Capítulo V se resumen las principales conclusiones de la Tesis y se plantean posibles trabajos futuros.

La memoria de la Tesis finaliza con la lista de referencias bibliográficas citadas.

Capítulo II

Bases de Elementos Finitos. Aplicación a MFEL

II.1 Introducción

En el presente capítulo, se establecen los fundamentos teóricos que han sido necesarios para el desarrollo de la Tesis. Por un lado se resumen las bases del método de elementos finitos y, a continuación, se considera su aplicación a MFEL para la extracción de los factores de intensidad de tensiones.

En la gran mayoría de problemas ingenieriles, resulta imposible encontrar la solución analítica. Esto puede ser debido a múltiples factores como la complejidad de la geometría, cargas o ambas. El Método de los Elementos Finitos constituye una herramienta de cálculo numérico que permite resolver gran diversidad de problemas de contorno. La solución así obtenida será siempre aproximada pero es posible estimar un error que puede ser reducido con diferentes estrategias de adaptatividad. El cumplimiento de ciertos requisitos de convergencia, garantiza que la solución aproximada pueda tender al valor exacto.

El MEF tiene una aplicación industrial ampliamente demostrada, su implementación en códigos comerciales permite realizar un uso extendido del método a multitud de problemas inherentes al ejercicio de la actividad profesional en la ingeniería.

Muchos esfuerzos de investigación se han dedicado a la mejora de la eficiencia y fiabilidad del MEF llegando al punto de haber madurado una herramienta cuyas bases, especialmente las relacionadas con la interpolación y el concepto de partición de la unidad, han servido para el desarrollo de nuevas técnicas

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

numéricas para estimar la solución en problemas donde, tradicionalmente, el MEF no había logrado ser una herramienta óptima.

Los problemas de MFEL se caracterizan por presentar un comportamiento singular en deformaciones y tensiones en el extremo de grieta. En estos casos, la aproximación de EF no proporciona buenos resultados siendo necesario reproducir el efecto local de la singularidad. La obtención de los factores de intensidad de tensiones suele ser el objetivo principal de la aplicación de los métodos numéricos a MFEL.

La organización de este capítulo se ha realizado del siguiente modo: en el apartado 2 se plantea el problema elástico en su formulación fuerte y débil y se realiza una revisión breve del concepto de suavidad de la solución. En el apartado 3, se introducen las bases del Método de los Elementos Finitos entre las que destacamos las características de la interpolación y el concepto de partición de la unidad, ambos fundamentales para el desarrollo del Capítulo III. Seguidamente, en el apartado 4 se describe el error de discretización y las leyes de convergencia.

Por otro lado, la aplicación de EF a MFEL para la obtención de los FIT, se resume en los apartados 5 y 6. En el 5 se describen brevemente, diferentes técnicas para modelar la singularidad en EF. En el apartado 6 se resumen las principales técnicas para la extracción de los FIT a partir de la solución de EF.

II.2 Planteamiento del problema elástico

II.2.1 Formulación fuerte

A continuación se resumen las ecuaciones que gobiernan el problema elástico-estático bajo las hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones. Sea el dominio considerado Ω y su frontera, Γ . Se definen las condiciones de contorno esenciales o de *Dirichlet*, \mathbf{u} , en la frontera Γ_d y las condiciones naturales o de *Neuman* \mathbf{t} en Γ_t . Se consideran también, las fuerzas por unidad de volumen, \mathbf{b} , (véase *Figura II-1*).

El tensor de tensiones de *Cauchy*, $\boldsymbol{\sigma}$, debe satisfacer las ecuaciones de equilibrio dadas por:

$$\begin{aligned}\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \text{ en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t} \text{ en } \Gamma_t\end{aligned}\tag{II-1}$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

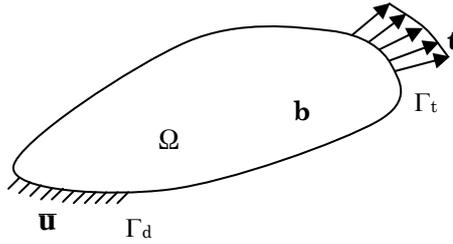


Figura II-1. Cuerpo elástico y condiciones de contorno.

Las relaciones deformaciones-desplazamientos vienen dadas por las ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla_s \mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_d\end{aligned}\quad (\text{II-2})$$

donde ∇_s es la parte simétrica del operador gradiente. La ecuación constitutiva viene dada por la ley de *Hooke*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II-3})$$

Donde \mathbf{D} es el tensor de elasticidad de *Hooke*.

II.2.2 Formulación débil

En el planteamiento de la formulación débil, manteniendo los desplazamientos como incógnita principal, es habitual aplicar el principio de *mínima energía potencial total*.

Se define $E(\Omega)$ como el conjunto de todos los campos de desplazamientos en Ω que tienen una energía de deformación finita. A los campos de desplazamientos $\mathbf{u} \in E(\Omega)$ que satisfacen las condiciones de contorno esenciales (desplazamientos impuestos en Γ_d) se les denomina campos de desplazamientos admisibles. Al conjunto de todos los campos de desplazamientos admisibles definidos en Ω lo denotamos con $\tilde{E}(\Omega)$.

La energía potencial total de un cuerpo elástico $\Pi_p(\mathbf{u})$ se define como la energía de deformación $U(\mathbf{u})$ más la energía potencial de las fuerzas aplicadas $P(\mathbf{u})$:

$$\Pi_p(\mathbf{u}) = U(\mathbf{u}) + P(\mathbf{u}) \quad (\text{II-4})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

La energía de deformación puede calcularse como:

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (\text{II-5})$$

La energía potencial de las fuerzas externas viene dada por:

$$P(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (\text{II-6})$$

El principio de la mínima energía potencial total establece que el campo de desplazamiento \mathbf{u}_{ex} que satisfacen las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema elástico, así como las condiciones de contorno, dan un mínimo para la energía potencial total en comparación con cualquier otro campo de desplazamientos admisible:

$$\Pi_p(\mathbf{u}_{\text{ex}}) = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{B}(\Omega)} \Pi_p(\mathbf{u}) \quad (\text{II-7})$$

Utilizando la ecuación (II-1) y de la (II-4) a la (II-6) se obtiene:

$$\Pi_p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D} \mathbf{L}\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (\text{II-8})$$

Donde \mathbf{L} es el operador de derivadas. Así pues, la energía potencial total se puede expresar en función únicamente del campo de desplazamientos \mathbf{u} . Minimizando la ecuación (II-8) puede encontrarse la solución del problema elástico lineal. Generalmente este problema no puede resolverse analíticamente y se precisa de algún método numérico para encontrar una solución. Como se ha expuesto en la introducción, el MEF es uno de los más utilizados.

II.2.3 Suavidad de la solución

La suavidad de una función es una medida de cuántas derivadas de cuadrado integrable tiene y cómo de rápido evolucionan sus derivadas en el dominio (véase Szabó [41]).

Los puntos donde las tensiones tienden a infinito reciben el nombre de *puntos singulares*. Es muy difícil reproducir a nivel local lo que ocurre en estos puntos. Las singularidades son regiones críticas y, en análisis de tensiones, están

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

ligadas a vértices que penetran en el dominio, cambios bruscos en las propiedades del material, en las condiciones de contorno o en las cargas aplicadas.

Cuando se tiene un dominio en el que no existen singularidades en su interior ni en su frontera, se tendrá una solución suave y el campo de desplazamientos será una función analítica (es decir, la solución en cualquier punto puede desarrollarse en serie de Taylor).

Un dominio que contenga un número finito de puntos singulares tendrá solución analítica excepto en dichos puntos, donde la solución se ve dominada por el efecto local. En Szabó [47] se presenta una expresión para la solución exacta para los desplazamientos en la cercanía de una singularidad en el caso bidimensional:

$$\mathbf{u}_{\text{ex}} = \mathbf{u}_1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i r^{\lambda_i} \boldsymbol{\psi}_i(\theta) \quad (\text{II-9})$$

Donde \mathbf{u}_1 es un vector de funciones suaves, r y θ son coordenadas polares centradas en el punto singular, A_i son coeficientes que dependen de la carga aplicada, λ_i son coeficientes generalmente complejos y $\boldsymbol{\psi}_i$ son vectores de funciones suaves conocidas *a priori* e independientes de \mathbf{u}_{ex} . λ_i y $\boldsymbol{\psi}_i$ están determinados por las condiciones que la solución exacta debe satisfacer en las cercanías de la singularidad. Los coeficientes A_i se denominan factores de intensidad de tensiones generalizados por su analogía con los factores de intensidad de tensiones de mecánica de la fractura.

Como consecuencia de que \mathbf{u}_{ex} tiene energía de deformación finita, todos los λ_i tienen que ser positivos (o su parte real si son números complejos). El valor mínimo de λ_i , denotado λ , es una medida práctica de la suavidad de la solución exacta en el entorno de un punto singular. Cuanto mayor es λ más suave es \mathbf{u}_{ex} . Cuando $\lambda < 1$ la solución es singular, siendo infinito el valor de la primera derivada de \mathbf{u}_{ex} con respecto a r en el punto singular ($r = 0$). Detalles de cómo calcular λ en problemas de elasticidad bidimensional pueden encontrarse en Szabó y Babuška [62] junto con algunos ejemplos y valores típicos.

La solución estimada de EF se puede ajustar con gran precisión a problemas donde la solución exacta tiene un comportamiento suave, capaz de ser aproximado mediante funciones polinómicas.

Es importante señalar el concepto de suavidad de la solución ya que buena parte del esfuerzo computacional para controlar el error de una solución de elementos finitos depende de la suavidad de la solución exacta.

II.3 Formulación mediante el MEF

Para obtener la solución de elementos finitos se subdivide el dominio Ω en un conjunto de n_e subdominios:

$$\Omega^e \ (e = 1, \dots, n_e) \ \text{donde} \ \bigcup_{e=1}^{e=n_e} \Omega^e = \Omega \ \text{y} \ \Omega^{e_i} \cap \Omega^{e_j} = \emptyset \ \text{para} \ i \neq j \quad (\text{II-10})$$

Estos subdominios constituyen los denominados elementos que suelen ser de geometría sencilla. Esta subdivisión constituye la malla. En cada elemento, la aproximación convencional del campo de desplazamientos, viene dada por la siguiente interpolación:

$$\mathbf{u}_{ef} = \mathbf{N}\mathbf{a}^e \quad (\text{II-11})$$

donde \mathbf{u}_{ef} representa el campo de desplazamientos de elementos finitos, \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma $N_i(x,y)$ que interpola la solución en el punto considerado y \mathbf{a}^e es el vector de amplitudes de las funciones base (constante para cada elemento). Para que las funciones de desplazamientos \mathbf{u}_{ef} sean admisibles se fijan algunas amplitudes (correspondientes a las condiciones de contorno esenciales). El número n de amplitudes libres es el número de grados de libertad. Así pues, las amplitudes libres constituyen las incógnitas o grados de libertad del problema discretizado.

Resulta más conveniente definir las funciones de interpolación en un sistema de coordenadas local (ξ, η) para cada elemento, $N_i(\xi, \eta)$. Para relacionar las funciones de forma en los dos sistemas de coordenadas se utilizan funciones de transformación de coordenadas. En el apartado II.3.1 se detallan las características de las funciones de interpolación y la transformación de coordenadas para los elementos isoparamétricos utilizados en esta Tesis.

El campo de deformaciones y el campo de tensiones de elementos finitos se obtiene como sigue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ef} = \mathbf{L}\mathbf{u}_{ef} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{a}^e = \mathbf{B}\mathbf{a}^e \quad (\text{II-12})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ef} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{ef} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}^e \quad (\text{II-13})$$

Donde \mathbf{B} es la matriz de derivadas de las funciones de forma y \mathbf{D} es la matriz de elasticidad del material.

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

La energía de deformación de un elemento e puede calcularse como:

$$\begin{aligned} U^e(\mathbf{u}_{ef}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}_{ef}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_{ef} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} (\mathbf{B} \mathbf{a}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^e d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{a}^e = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

donde \mathbf{k}^e es la matriz de rigidez del elemento:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{II-15})$$

A su vez, la energía potencial de las fuerzas externas de un elemento será:

$$\begin{aligned} P^e(\mathbf{u}_{ef}) &= - \int_{\Omega^e} (\mathbf{N} \mathbf{a}^e)^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_t} (\mathbf{N} \mathbf{a}^e)^T \mathbf{t} d\Gamma = \\ &= -\mathbf{a}^{eT} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \right] = -\mathbf{a}^{eT} \mathbf{f}^e \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

donde \mathbf{f}^e es el vector de fuerzas nodales del elemento e :

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (\text{II-17})$$

Si las funciones de forma se eligen de manera que el campo de desplazamientos de EF sea continuo entre elementos (continuidad C^0), la energía potencial total puede calcularse como la suma de las energías potenciales totales de cada elemento:

$$\Pi_p(\mathbf{u}_{ef}) = \sum_{e=1}^{n_e} \Pi_p^e(\mathbf{u}_{ef}) \quad (\text{II-18})$$

Si ahora sustituimos las ecuaciones (II-14) y (II-16) en (II-18) se obtiene:

$$\Pi_p(\mathbf{u}_{ef}) = \sum_{e=1}^{n_e} \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{a}^{eT} \mathbf{f}^e \right] \quad (\text{II-19})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Utilizando el ensamblado habitual se define la matriz de rigidez global:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{k}^e \quad (\text{II-20})$$

y el vector de fuerzas global:

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}^e \quad (\text{II-21})$$

Finalmente podemos expresar la energía potencial total como:

$$\Pi_p(\mathbf{u}_{ef}) = \left[\frac{1}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{F} \right] \quad (\text{II-22})$$

donde \mathbf{A} es el vector de amplitudes global y contiene las incógnitas del problema.

La condición de mínima energía potencial total se expresa haciendo estacionaria la energía potencial total con respecto a las amplitudes:

$$\frac{\partial \Pi_p(\mathbf{u}_{ef})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{II-23})$$

Este sistema de ecuaciones algebraico representa las ecuaciones de equilibrio discretizadas, expresado habitualmente como:

$$\mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (\text{II-24})$$

Para resolver este sistema de ecuaciones es necesario tener en cuenta los desplazamientos impuestos en Γ_d (para que \mathbf{u}_{ef} sea admisible hay que imponer condiciones de contorno de *Dirichlet*), lo que elimina los movimientos de cuerpo rígido que hacen singular la matriz \mathbf{K} .

II.3.1 Características de la interpolación

Las propiedades de las funciones de interpolación en elementos finitos son las que determinan las propiedades de la solución en el elemento, es por ello, que dichas funciones deben ser convenientemente formuladas. La interpolación en un elemento viene dada por la ecuación (II-11) que aquí se recuerda:

$$\mathbf{u}_{ef} = \mathbf{N} \mathbf{a}^e \quad (\text{II-25})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

En la formulación convencional de elementos finitos, las funciones de forma N_i se definen para cada nodo del elemento, siendo generalmente funciones polinómicas. Las propiedades de la interpolación deben ser tales que garanticen la convergencia de la solución. Para el problema elástico, se pueden resumir en las siguientes:

- continuidad C^0 en las fronteras entre elementos,
- inclusión de los términos constante y lineales de forma que sea posible representar movimientos de sólido rígido y estados de deformación constante, respectivamente.

Además, para cualquier problema, resulta conveniente:

- Isotropía o invarianza geométrica, para poder representar por igual la variación de la función en cualquier dirección.

Otra propiedad de las funciones de forma nodales es que cumplen la función *delta de Kronecker*, es decir, su valor es la unidad en el nodo de definición y cero en el resto. Esta condición resulta necesaria para garantizar que el valor de los coeficientes \mathbf{a}^e coincide con el valor de la solución nodal \mathbf{u} .

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II-26})$$

Para que las funciones N_i y, por lo tanto, la solución aproximada de elementos finitos \mathbf{u}_{ef} , satisfagan la continuidad C^0 , resulta fundamental que cada función N_i se anule en la frontera del elemento donde no esté el nodo de definición. Esta propiedad hace que el valor de la solución aproximada por EF en un punto situado en un lado, dependa exclusivamente del valor de la solución en los nodos de dicho lado.

La interpolación se puede realizar en coordenadas globales (x,y) o en coordenadas locales (ξ,η) . Es más habitual realizarla en coordenadas locales pues facilita la integración numérica de las matrices de elemento y garantiza la continuidad C^0 . En el sistema de referencia local se definen los elementos finitos normalizados o de referencia. En tal caso resulta necesaria la definición de una transformación de coordenadas (véase *Figura II-2*) que permita obtener las coordenadas globales a partir de las locales. La transformación de coordenadas más empleada en elementos finitos es la transformación *isoparamétrica*, (véase (II-27)):

$$\mathbf{x} = \sum_i N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i \quad (\text{II-27})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Para obtener las derivadas globales de las funciones de forma expresadas en locales, necesarias en la ecuación (II-12), así como para relacionar el área del elemento real con el área del elemento normalizado, se define la matriz *Jacobiana*. Para el caso 2D resulta:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (\text{II-28})$$

La definición es análoga para el caso 3D.

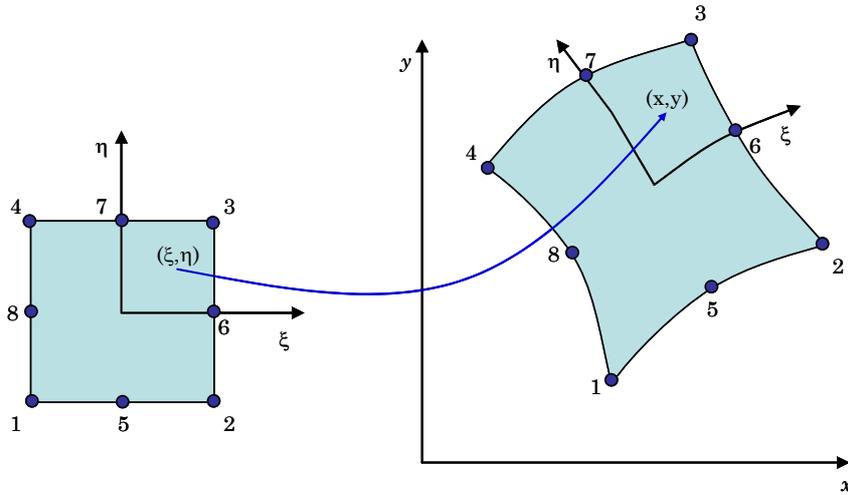


Figura II-2. Transformación de coordenadas.

II.3.2 Integración numérica

El cálculo numérico de una integral se denomina *cuadratura*, siendo la cuadratura de *Gauss-Legendre* la más utilizada para determinar las integrales en el MEF.

Como ejemplo, se considera el elemento cuadrilátero bilineal. La expresión para el cálculo de la matriz de rigidez, empleando la integración numérica de *Gauss*, resulta:

$$\mathbf{k}^e \approx \sum_{i=1}^{N_G} \sum_{j=1}^{N_G} \left(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} | \mathbf{J} | H_i H_j \right)_{(\xi_i, \eta_j)} \quad (\text{II-29})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Las posiciones de los puntos de integración, dados por las coordenadas (ξ_i, η_j) , y los pesos H_i y H_j pueden consultarse en la bibliografía, por ejemplo, en el libro de Bathe [83] o Zienkiewicz y Taylor [127]. N_G representa, en este caso, el número de puntos de integración en cada dirección.

Si se considera un elemento tridimensional tetraédrico, la expresión para el cálculo de la integral que define la matriz de rigidez de elemento resulta:

$$\mathbf{k}^e \approx \sum_{i=1}^{N_G} \left(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{J} |H_i| \right)_{(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)} \quad (\text{II-30})$$

Donde N_G representa el número total de puntos de integración. Las coordenadas de los puntos de integración, (ξ_i, η_i, ζ_i) y el peso en cada punto H_i , pueden consultarse en la bibliografía, véase Zienkiewicz y Taylor [127].

II.4 Error de discretización

Una solución de elementos finitos es una solución aproximada y por tanto dicha solución contiene un error. Son varias las fuentes de error que podemos encontrar:

- errores de modelado, debidos a la diferencia que existe entre el sistema físico y su modelo matemático,
- errores numéricos: de redondeo, de integración numérica, etc.,
- errores en la representación de la geometría,
- error de discretización.

El error de discretización tiende asintóticamente a cero cuando el número de gdl crece, pero al aumentar el número de gdl se tiene un mayor esfuerzo computacional. Por lo tanto, es necesario, un compromiso entre el error de una solución de EF y el coste computacional. A continuación, se consideran algunos aspectos fundamentales del error de discretización, propio del MEF.

Generalmente la solución del MEF no coincidirá con la solución exacta, a no ser que el campo de desplazamientos \mathbf{u}_{ex} pueda ser representado exactamente a través de las funciones de interpolación. La calidad de la solución de EF dependerá de:

- si la solución exacta es suave o tiene singularidades,
- de la discretización, es decir, del mallado en su adaptación a la geometría y del tamaño de los elementos,

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

- de las funciones de transformación de coordenadas y del orden polinómico de las funciones de interpolación definidas en cada elemento.

A medida que se aumenten el número de grados de libertad mejor será la aproximación. Atendiendo a esto, existen dos formas básicas de mejorar la calidad de la solución:

- reducir el tamaño de los elementos,
- aumentar el orden polinómico de las funciones de forma.

La versión h del MEF, o *método h* , se basa en la primera técnica donde h hace referencia al tamaño de los elementos. Ésta es la versión del MEF más empleada industrialmente. La versión p , o *método p* , se basa en la segunda opción, donde p hace referencia al orden de la interpolación en los elementos. La versión hp del MEF se basa en la utilización conjunta de ambas técnicas para reducir el error. Para conocer con detalle estas estrategias de mejora de la solución así como la cuantificación del error de discretización puede verse Tarancón [115].

Se puede definir el error del campo de desplazamientos \mathbf{e} como la diferencia entre el campo de desplazamientos exacto y el de elementos finitos:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_{\text{ef}} \quad (\text{II-31})$$

Una definición como ésta no resulta práctica, ya que es una función de punto. En general se busca cuantificar el error mediante una medida global, un escalar, por ejemplo una norma con forma integral. Puesto que el método de los elementos finitos está basado en la minimización de la energía potencial total, parece natural evaluar el error mediante la norma energética.

Asociada a $E(\Omega)$ podemos definir la norma energética, $\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)}$, como la raíz cuadrada del doble de la energía de deformación:

$$\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)} = \sqrt{2U(\mathbf{u})} \quad (\text{II-32})$$

De este modo, se define el error de discretización en norma energética, $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}$, como la norma energética del error en desplazamientos:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)} = \|\mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_{\text{ef}}\|_{E(\Omega)} = \sqrt{2U(\mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_{\text{ef}})} \quad (\text{II-33})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

que es equivalente a:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{\text{ex}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{\text{ex}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}}) d\Omega} \quad (\text{II-34})$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_{\text{ex}}$ es el campo de tensiones exactas.

Esta norma puede calcularse sobre el dominio completo Ω o sobre elementos individuales Ω^e . Es importante notar que:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}^2 = \sum_{e=1}^{n_e} \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega^e)}^2 \quad (\text{II-35})$$

Existen otras normas pero ésta es la más extendida en la solución del problema elástico.

Resulta conveniente utilizar una medida del error que sea adimensional, por ello se define el error relativo en norma energética η como:

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_{\text{ex}}\|_{E(\Omega)}} \times 100 \quad (\text{II-36})$$

que también puede definirse a nivel local:

$$\eta^e = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega^e)}}{\|\mathbf{u}_{\text{ex}}\|_{E(\Omega^e)}} \times 100 \quad (\text{II-37})$$

donde η^e es el error relativo del elemento e .

II.4.1 Leyes de convergencia

El conocimiento *a priori* del error teórico en norma energética y de su velocidad de convergencia permite, en el caso de refinamientos uniformes, estimar el error de discretización mediante técnicas de extrapolación a partir de varios análisis. En el caso de refinamientos adaptativos permite diseñar estrategias de refinamiento óptimas (alcanzar el error deseado con el menor coste computacional) cuando se utilizan en combinación con estimadores de error *a posteriori*.

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Una de las expresiones más completas para el error teórico en norma energética es la dada por Babuška y Dorr [29]:

$$\|e\|_{E(\Omega)} \leq Ch^{\min(p,\lambda)-\varepsilon} p^{-\lambda+\varepsilon} \quad \text{con } 0 < \varepsilon < \min(1, \lambda) \quad (\text{II-38})$$

donde h es el mayor tamaño de los elementos empleados, p es el orden polinómico de las funciones de forma, λ es una medida del orden de singularidad de la solución exacta, C es una constante que depende del problema y ε representa una tolerancia. En la ecuación (II-38) puede observarse la afirmación realizada anteriormente de que el error tiende asintóticamente a cero tanto al disminuir el tamaño de los elementos como al aumentar el grado de los polinomios. Esta expresión es válida para refinamiento uniforme.

Se denomina *velocidad de convergencia* a la pendiente (con signo contrario) de la curva que se obtiene al representar el error en norma energética frente al número de grados de libertad en un diagrama logarítmico-logarítmico. La velocidad de convergencia es una medida de cómo de difícil es controlar el error. A mayor velocidad de convergencia más rápido se acerca la solución de EF a la exacta al aumentar el número de *gdl*. Si la pendiente de la curva obtenida es constante (línea recta) la convergencia se denomina algebraica, mientras que si la pendiente aumenta (se hace más negativa) con el número de *gdl*, la convergencia se denomina exponencial.

A continuación se muestra un resumen de las leyes de convergencia en las versiones h , p y hp del MEF. En Szabó y Babuška [62], se pueden encontrar todos los detalles.

Convergencia en la versión h

En el caso de refinamientos h , el error en norma energética tiene convergencia algebraica y su estimación teórica es:

$$\|e\|_{E(\Omega)} \leq \frac{\kappa}{N^\beta} \quad (\text{II-39})$$

donde κ y β son constantes positivas y N es el número de grados de libertad.

El valor de κ depende del problema, es decir, de \mathbf{u}_{ex} . El coeficiente β coincide con la velocidad de convergencia y su valor depende del tipo de refinamiento h ,

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

existiendo dos posibilidades: refinamiento uniforme o cuasiuniforme¹ y refinamiento adaptativo. En el primer caso se tiene que β es:

$$\beta = \frac{1}{2} \min(p, \lambda) \quad (\text{II-40})$$

donde p es el orden polinómico de las funciones de forma y λ es el mismo parámetro de la ecuación (II-9), que da una medida del orden de la singularidad. Cuando la solución exacta es suave ($\lambda > 1$) la velocidad de convergencia está limitada por el orden polinómico de los elementos (suponiendo $\lambda > p$, que es lo habitual ya que en la versión h los elementos suelen ser de orden lineal o cuadrático). Para el caso de refinamiento adaptativo, β se obtiene mediante la expresión siguiente:

$$\beta = \frac{1}{2} p \quad (\text{II-41})$$

Cuando las mallas son óptimas, (distribución uniforme del error entre los elementos, Zienkiewicz y Zhu [50]) la velocidad de convergencia del error está limitada por el orden p de los elementos, con independencia de si la solución es suave o singular (se elimina el efecto de la singularidad).

Convergencia en la versión p

En el caso de refinamientos p existen varias posibilidades para la velocidad de convergencia del error. Ésta puede ser algebraica o exponencial en función del tipo de solución y del mallado.

Atendiendo a la suavidad de la solución exacta, la expresión para la estimación teórica del error en norma energética viene dada por Szabó y Babuška [62]. Si la solución es suave, la convergencia es exponencial:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)} \leq \frac{\kappa}{\exp(\gamma N^\theta)} \quad (\text{II-42})$$

donde κ , γ y $\theta \geq 1/2$ son constantes positivas que dependen de \mathbf{u}_{ex} .

En cambio, si la solución es singular, la convergencia es algebraica y viene dada por la ecuación (II-39).

¹ Un refinamiento es cuasiuniforme cuando en cada malla del proceso la relación entre el máximo y el mínimo tamaño de elemento está acotada.

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

En este caso, la velocidad de convergencia depende del mallado, si la singularidad no coincide con ningún nodo, el coeficiente β se obtiene como:

$$\beta = \frac{1}{2} \lambda \quad (\text{II-43})$$

En esta situación, la velocidad de convergencia es la misma que con refinamiento h -uniforme.

Si el punto singular coincide con un nodo, el coeficiente β resulta de la expresión:

$$\beta = \lambda \quad (\text{II-44})$$

en este caso la velocidad de convergencia es el doble que en refinamiento h -uniforme.

Según lo visto para la versión h y para la versión p , la velocidad de convergencia siempre será mayor con refinamientos p que con refinamientos h para problemas con solución suave. En problemas con singularidades los refinamientos p siempre tendrán una velocidad de convergencia igual o doble a la de refinamientos h -uniformes. Sin embargo, los refinamientos h -adaptativos tienen una mayor velocidad de convergencia en problemas con singularidades.

Convergencia en la versión hp

En la versión hp se busca combinar las propiedades deseables de la versión h (capacidad para aislar el efecto de las singularidades) con las de la versión p (convergencia exponencial donde la solución es suave). Cuando se utilizan simultáneamente mallas óptimas y distribuciones p óptimas, (refinamiento hp -adaptativo), la convergencia de la norma energética del error es exponencial, independientemente de la suavidad de la solución exacta. En este caso la estimación del error teórico en norma energética es de la forma dada por la ecuación (II-42), con $\theta \geq 1/3$.

Una forma sencilla de realizar refinamientos hp consiste en diseñar *a priori* una malla aproximadamente óptima y realizar sobre ella un refinamiento p . Esto es posible porque en la mayoría de aplicaciones los analistas conocen de antemano dónde están situados los puntos singulares, por lo que pueden diseñar una malla que se aproxime a la que se obtendrá por un refinamiento h -adaptativo. Tales mallas tienen una disminución del tamaño de los elementos en progresión geométrica hacia los puntos singulares, por lo que se denominan mallados geométricos. El factor geométrico más utilizado es 0.15, Szabó y Babuška [62], que resulta óptimo alrededor de puntos singulares como vértices en el contorno o fondos de grieta (realmente es óptimo en problemas

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

unidimensionales pero también se utiliza en problemas multidimensionales). La distribución p óptima es tal que los elementos más grandes son de orden mayor y los de menor orden se sitúan por tanto alrededor de los puntos singulares. Aunque también puede optarse por una distribución p -uniforme, ya que, aun siendo computacionalmente más costosa que las p -adaptadas, permite estimar el error en norma energética con buena precisión mediante extrapolación. En este caso (distribución p -uniforme) la convergencia del error es exponencial para p bajos y se hace algebraica para p altos (a partir del orden p que es óptimo para la malla). Esto se debe a que para p pequeño el error viene de la parte del dominio donde la solución es suave y los elementos grandes (convergencia exponencial), mientras que al aumentar el orden polinómico el error causado por las singularidades se hace dominante (convergencia algebraica). La zona de convergencia exponencial se denomina pre-asintótica mientras que la zona de convergencia algebraica se denomina asintótica. Evidentemente conviene diseñar las mallas para que se alcance la precisión deseada en la zona de convergencia pre-asintótica, es decir, sin superar el orden p óptimo de la malla. En la *Figura II-3* se resumen las diferentes curvas de convergencia para cada tipo de refinamiento.

De lo visto se deduce que un refinamiento hp -adaptativo es la forma más eficiente de controlar el error de discretización en un problema con singularidades. En problemas con solución muy suave lo más eficiente puede ser un refinamiento p con una malla con tamaño de elemento relativamente grande.

Por último hay que decir que la relación menor o igual (\leq) en las ecuaciones (II-39) y (II-42) puede ser reemplazada por aproximadamente igual (\approx) al aumentar suficientemente el número de grados de libertad. Esto justifica el uso de estas expresiones como estimadores del error *a priori*.

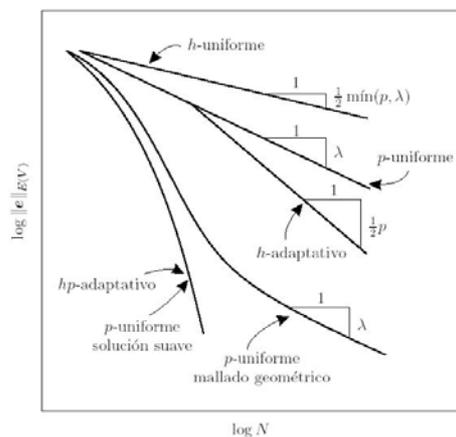


Figura II-3. Curvas de convergencia teórica del error en norma energética.

II.5 Modelado de la singularidad mediante el MEF

II.5.1 Métodos clásicos

Cronológicamente, la primera opción para intentar reproducir el comportamiento singular en MFEL fue el uso de mallas extremadamente refinadas en el entorno de grieta (véase Chan et ál. [3]). Este planteamiento no requiere de modificación especial de un código estándar de elementos finitos, pero resulta poco eficiente. Por ejemplo, para obtener valores de K con un error del 5% en un problema 2D, se necesita un número elevado de grados de libertad (entorno a 2000 con elementos lineales). En problemas 3D, el inconveniente es mayor.

Se han planteado alternativas como la subestructuración, donde se considera como macroelemento una zona refinada en el entorno de la grieta. No obstante sigue siendo necesario un número elevado de grados de libertad (véase Liebowitz y Moyer, [55]).

Poco después, surgió un gran número de trabajos relacionados con el desarrollo de elementos específicos que permiten modelar de forma adecuada el comportamiento singular en el entorno del extremo de grieta, véase, por ejemplo, la revisión de Gallagher [17]. Estos elementos se denominan genéricamente *elementos singulares* y su utilización evita los elevados refinamientos necesarios para modelar correctamente el comportamiento teórico.

De acuerdo con Lo y Lee [65] los elementos singulares se pueden clasificar de la siguiente forma:

- elementos con funciones de forma especiales,
- elementos híbridos,
- elementos basados en transformaciones geométricas.

En Liebowitz y Moyer [55], se encuentran definidos otra clase de elementos singulares: los elementos enriquecidos. Para ver con detalle las características de estos elementos, se puede consultar el trabajo de Giner [112].

II.5.2 Método de Partición de la Unidad y Enriquecimiento

Las funciones de forma nodales cumplen la propiedad denominada *Partición de la Unidad*. La suma de las funciones de forma de todos los nodos de un

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

elemento, evaluadas en un punto cualquiera del mismo, da como resultado la unidad:

$$\sum_i N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (\text{II-45})$$

El concepto de partición de la unidad resulta esencial para que la interpolación sea capaz de representar una solución del mismo orden que el elemento o constante.

En el caso de aplicar un enriquecimiento local, $\psi(\mathbf{x})$, esta propiedad es la que permite representar la función de enriquecimiento correctamente en cualquier punto del interior del elemento:

$$\sum_i N_i(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \quad (\text{II-46})$$

En los métodos clásicos de resolución de problemas de MFEL a través de EF existe el inconveniente común de tener que adaptar la malla a la geometría de la grieta. La idea de enriquecer la aproximación de la solución a través de funciones conocidas *a priori* y que caracterizan el comportamiento singular de la solución, fue aportada por Fleming et ál. [85] en el método sin malla. Con esta idea, no es necesario mallar considerando la discontinuidad de la grieta.

El enriquecimiento debe realizarse teniendo en cuenta la partición de la unidad, PUM (concepto o método desarrollado por Babuška et ál. [74], [80] y [84]). El método de elementos finitos estándar cumple esta propiedad, como se ha explicado en el apartado II.3.1.

Cuando se enriquece la solución de EF en el marco de PUM, la aproximación dada por la ecuación (II-25) queda:

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \left(\mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_{jk} \right) \quad (\text{II-47})$$

Donde $\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x})$ representa la solución aproximada mediante elementos finitos en un elemento, $N_j(\mathbf{x})$ son las funciones de forma estándar, \mathbf{u}_j representa el vector de la solución nodal, $p_k(\mathbf{x})$ las funciones de enriquecimiento, \mathbf{a}_{jk} los grados de libertad asociados a las funciones de enriquecimiento, n el número total de nodos del elemento y m el número de funciones de enriquecimiento.

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

La ecuación (II-47) es claramente partición de la unidad. Si se particulariza la ecuación para un nodo enriquecido, \mathbf{x}_i , se tiene:

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}_i) \left(\mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{a}_{jk} \right) \quad (\text{II-48})$$

Donde el primer sumando se anula excepto para $N_i(\mathbf{x}_i)\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i$, entonces:

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_i + \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{a}_{jk} \quad (\text{II-49})$$

Como se observa en la ecuación (II-49), no se garantiza el cumplimiento de las condiciones de *Dirichlet*, cuando se impone $\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i$. Por lo tanto, si un nodo enriquecido tuviese impuesta una condición de contorno esencial, sería necesario alguna condición adicional que relacionara los grados de libertad \mathbf{u}_i y \mathbf{a}_{jk} para poder satisfacerla.

Una forma sencilla de garantizar el cumplimiento de las condiciones de *Dirichlet* consiste en “desplazar” la función de enriquecimiento restándole el valor nodal:

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \left(\mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^m (p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{x}_j)) \cdot \mathbf{a}_{jk} \right) \quad (\text{II-50})$$

El método de elementos finitos con partición de la unidad (PUFEM) plantea el enriquecimiento a nivel global, lo cual resulta problemático desde el punto de vista computacional (véase apartado III.5.2). De la misma manera se plantea el enriquecimiento en el método de elementos finitos generalizado, GFEM, (Stroboloulis et ál. [102], [103] y [108] y Duarte et ál. [105]).

El método de elementos finitos extendido, XFEM, considera el enriquecimiento a nivel local, cumpliendo, en la medida de lo posible, la partición de la unidad. Este método, ha sido aplicado a gran variedad de problemas. En concreto, para modelizar la singularidad en grietas, fue considerado por primera vez por Belytschko y Black [94]. En el Capítulo III se describe con detalle este método numérico en su aplicación a MFEL.

II.6 Extracción del FIT mediante el MEF

II.6.1 Introducción

Los problemas de MFEL se caracterizan por presentar un comportamiento singular en deformaciones y tensiones en el extremo de grieta. Las expresiones correspondientes al primer término (término singular) del desarrollo analítico de la solución en tensiones se pueden encontrar en cualquier texto básico sobre Mecánica de la Fractura (véase p.ej. Gdoutos [69] o Anderson [75]).

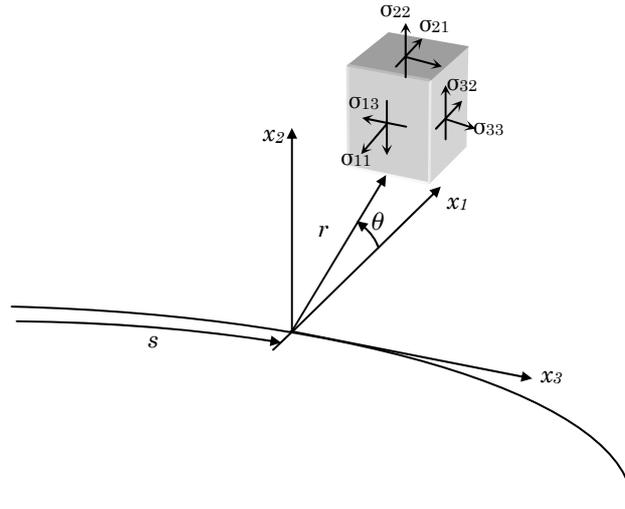


Figura II-4. Notación utilizada en la definición del campo de tensiones y desplazamientos en un punto cercano al frente de grieta en MFEL.

De acuerdo con la nomenclatura de la Figura II-4, las expresiones de las componentes de tensión en un punto para el caso general 3D en un sólido con comportamiento elástico, lineal e isótropo son:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (\text{II-51})$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (\text{II-52})$$

$$\sigma_{33} = 0 \text{ (en tensión plana); } \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{II-53})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (\text{II-54})$$

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (\text{II-55})$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (\text{II-56})$$

Análogamente, los primeros términos del desarrollo del campo de desplazamientos en puntos cercanos al extremo de grieta son:

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) \quad (\text{II-57})$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) \quad (\text{II-58})$$

$$u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (\text{II-59})$$

Donde μ es el módulo de rigidez a cizalladura y κ es una constante que toma los siguientes valores según el tipo de estado tensional (constante de *Kolosov*):

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en deformación plana} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{en tensión plana} \end{cases} \quad (\text{II-60})$$

Siendo ν el coeficiente de *Poisson*. Las ecuaciones de la (II-51) a la (II-59) son básicas en MFEL y como se observa están descritas en función de los factores de intensidad de tensiones, como únicos parámetros característicos.

La obtención de los factores de intensidad de tensiones suele ser el objetivo principal de la aplicación de los métodos numéricos a MFEL. Su evaluación forma parte del postproceso de resultados obtenidos a partir de la herramienta numérica. Distinguimos dos grandes grupos de métodos de extracción de los FIT: los *métodos locales o directos* y los *métodos energéticos o indirectos*.

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Métodos locales (o directos)

Se denominan métodos directos o locales a aquellos que permiten obtener una estimación directa de K , basada en la correcta representación de los campos singulares de deformaciones en la proximidad del extremo de grieta. Por ello estos métodos se utilizan casi exclusivamente en combinación con elementos singulares. Para ver más detalles, véase Giner [112].

Métodos energéticos (o indirectos)

Se basan en planteamientos energéticos extendidos a zonas que no necesariamente corresponden al entorno cercano al extremo de la grieta, lo que hace menos importante una modelización precisa de la singularidad.

Mediante los métodos energéticos, es posible obtener resultados precisos utilizando mallas con tamaño de elemento relativamente grande y sin necesidad de ningún refinamiento especial en el entorno de grieta ni empleo de elementos especiales aunque, obviamente, de este modo se podrían obtener resultados más precisos. En estos métodos se evalúan de manera global ciertas magnitudes energéticas a partir de resultados obtenidos en elementos alejados del extremo de grieta. Su elevada precisión se deriva conceptualmente del fundamento mismo del MEF, esto es, minimización de forma global de un funcional de carácter energético².

Un gran inconveniente de los métodos energéticos es su dificultad para separar las contribuciones asociadas a cada uno de los modos de apertura de grieta y así obtener estimaciones independientes de K_I , K_{II} y K_{III} . Existen técnicas específicas para desacoplar los modos y mejorar este inconveniente.

Otro aspecto negativo de los métodos energéticos se manifiesta en su aplicación a problemas 3D, donde la equivalencia de G con K sólo queda definida si se asume un estado en el frente de grieta de deformación plana o bien de tensión plana. Lejos de la intersección del frente de grieta con la superficie del sólido es frecuente suponer un estado de deformación plana, pero en situaciones intermedias no es posible suponer ninguno de los dos estados.

En los apartados que vienen a continuación, se describen los métodos empleados en esta Tesis:

- la integral de contorno J (II.6.2),
- integrales de contorno en modo mixto (II.6.3),
- método de la integral de dominio equivalente (EDI) (II.6.4).

² Minimización del funcional energía potencial total Π_p .

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Entre estas alternativas destaca el método EDI basado en el concepto de extensión virtual de grieta. Una ventaja fundamental es su fácil extensión a problemas 3D (Parks [10], Delorenzi [30], Li et ál. [39]).

II.6.2 La integral de contorno J

En un problema de MFEL, la definición de la tasa de liberación de energía G por unidad de área formada es:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \left| \frac{dU}{dA} \right| \quad (\text{II-61})$$

donde se ha supuesto que las fuerzas exteriores aplicadas son constantes y U representa la energía de deformación elástica.

La evaluación correcta del campo de deformaciones en las inmediaciones de una entalla o grieta con el objetivo de permitir su caracterización suele presentar dificultades. Este hecho llevó a Rice [2] a proponer la conocida integral de contorno J , originalmente para una entalla en un problema bidimensional. *Eshelby* en 1956 ya utilizó una integral análoga definiendo su *energy-momentum tensor* para el estudio de dislocaciones y defectos internos en campos elásticos. También *Sanders* en 1960. Por su parte *Cherepanov* en 1967 desarrolló un planteamiento similar al de *Rice*, (véase *Cherepanov* [25]).

Bajo las hipótesis de sólido homogéneo con comportamiento elástico (no necesariamente lineal), en ausencia de fuerzas por unidad de volumen y fuerzas por unidad de superficie en la entalla, *Rice* definió la integral J como sigue (teniendo en cuenta la disposición de la entalla con arreglo al sistema de referencia mostrado en la *Figura II-5*):

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} d\Gamma \right) \quad (\text{II-62})$$

donde Γ es cualquier camino que rodee al extremo de entalla (cuyo contorno es Γ_i), recorrido en sentido antihorario desde una cara de la entalla a la otra, W es la energía de deformación por unidad de volumen, \mathbf{T} es el vector de tracciones en el contorno Γ , \mathbf{u} es el vector de desplazamientos y $d\Gamma$ es un elemento diferencial de contorno Γ .

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

La densidad de energía de deformación W para el caso elástico (lineal o no) viene dada por la expresión³

$$W = W(x, y) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (\text{II-63})$$

en la que σ_{ij} y ε_{ij} representan el tensor de tensiones y deformaciones infinitesimales respectivamente. Por otra parte, las componentes del vector de tracciones \mathbf{T} sobre el contorno Γ se definen con arreglo al vector normal unitario \mathbf{n} indicado en la *Figura II-5*, como

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (\text{II-64})$$

Conviene remarcar que la ecuación (II-62) está planteada para una entalla del tipo mostrado en la *Figura II-5* cuyas caras son paralelas al eje x , resultando evidente que una grieta alineada con dicho eje es un caso límite del mismo problema.

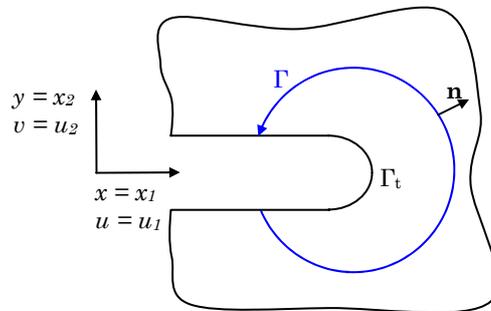


Figura II-5. Entalla en un dominio bidimensional. Γ es cualquier curva que contenga el fondo de entalla Γ_t .

J como integral independiente del camino

La independencia de la integral J con respecto al camino Γ utilizado para su evaluación es sin duda la propiedad que ha hecho de este método energético uno de los más versátiles en las técnicas numéricas aplicadas a Mecánica de la Fractura.

³ En parte de este capítulo se utiliza notación tensorial y el correspondiente criterio de suma respecto a los índices repetidos.

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Es posible estimar J en zonas alejadas del extremo de la entalla o grieta, donde los gradientes de deformación no son elevados y donde la solución numérica del problema suele ser razonablemente precisa.

Rice [2] demostró que la integral que aparece en la ecuación (II-62) es nula cuando se evalúa a lo largo de un contorno cerrado Γ^* que encierre un dominio "libre de singularidades" A^* (véase *Figura II-6*), de forma que las funciones a integrar presenten continuidad C^1 .

En estas condiciones es aplicable el teorema de *Green*⁴ (ver por ejemplo Apostol [27]) y la ecuación (II-62) se puede escribir utilizando la notación indicial como:

$$\oint_{\Gamma^*} \left(W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right) = \int_{A^*} \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right) dx_1 dx_2 \quad (\text{II-65})$$

Por otra parte la derivada de la energía de deformación por unidad de volumen se puede expresar del siguiente modo:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (\text{II-66})$$

ya que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ (puesto que por hipótesis se ha asumido ausencia de fuerzas por udv. en el dominio):

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (\text{II-67})$$

lo que implica que la integral que aparece en las ecuaciones (II-62) y (II-65) es nula si Γ^* es un contorno cerrado:

$$\oint_{\Gamma^*} \left(W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right) = 0 \quad (\text{II-68})$$

⁴ Bajo otras expresiones se le denomina también teorema de *Gauss* o de la divergencia.

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Si se elige convenientemente el camino Γ^* (véase *Figura II-6*) resulta inmediato demostrar la independencia de J con respecto al camino considerado: la contribución de los tramos que recorren las caras de la entalla, Γ_2 y Γ_4 , es nula ya que en ellos se verifica que $dx_2 = 0$ y que $\mathbf{T} = 0$ al estar las caras de entalla libres de fuerzas aplicadas. Por tanto para que se cumpla la ecuación (II-68) la contribución de Γ_1 y Γ_3 ha de ser necesariamente la misma, aunque con signos opuestos debido al sentido diferente con el que se recorren dichos tramos. Es decir, J tiene el mismo valor si se evalúa con caminos que partan de la cara inferior plana de la entalla, terminen en la cara superior y sean recorridos en igual sentido.

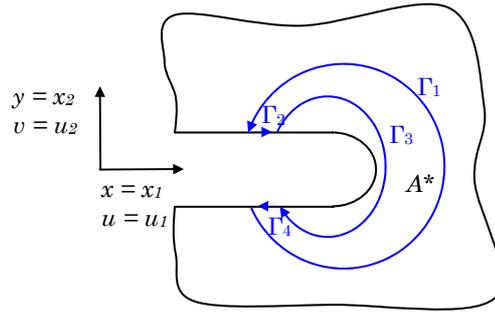


Figura II-6. Camino cerrado $\Gamma^ = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ utilizado en la demostración de J como independiente del camino.*

El hecho de presentar la integral J como un parámetro aplicable a entallas permite dar un cierto sentido físico (Rice [2]).

Si se elige como camino aquél que recorre el fondo de entalla Γ_t (ver *Figura II-5*). La ecuación (II-62) se reduce a:

$$J = \int_{\Gamma_t} W dx_2 \quad (\text{II-69})$$

ya que $\mathbf{T} = 0$ al estar las superficies de la entalla libres de fuerzas aplicadas. Por consiguiente, J es una medida del grado de deformación alcanzado en el fondo de entalla, evaluado a través de una integral de la densidad de energía de deformación.

Obviamente, se pierde este sentido físico cuando se trata de un extremo de grieta, ya que entonces Γ_t es infinitamente pequeño y, bajo la hipótesis de comportamiento elástico, W es infinitamente grande.

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Relación entre J y K en MFEL

En Mecánica de la Fractura Elástica Lineal es sabido que el campo de tensiones en el entorno de la grieta está dominado por la singularidad de tipo $1/\sqrt{r}$, donde r es la distancia al extremo de grieta. Las tensiones del campo elástico bidimensional en coordenadas polares (r, θ) con origen en el extremo de grieta vienen dadas por las ecuaciones de la (II-51) a la (II-56). Para el Modo I el campo está caracterizado únicamente por K_I a través de ecuaciones del tipo siguiente ($i, j = 1, 2$):

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \text{otros términos acotados} \quad (\text{II-70})$$

donde los términos acotados son despreciables en todo entorno de grieta suficientemente pequeño comparado con las dimensiones del problema y con la longitud de grieta. Si se considera una grieta lateral semi-infinita en un dominio infinito con comportamiento elástico lineal, es evidente que estos términos acotados son despreciables para toda distancia finita desde el extremo de grieta. En esta situación se puede evaluar J tomando un camino circular Γ de radio r desde el extremo de grieta e integrar el campo elástico singular antes mencionado (Rice [2]). Expresando la ecuación (II-62) en coordenadas polares resulta:

$$J = r \int_{-\pi}^{+\pi} \left(W(r, \theta) \cos \theta - \mathbf{T}(r, \theta) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}(r, \theta) \right) d\theta \quad (\text{II-71})$$

Si se tiene en cuenta que el campo de deformaciones viene dado por expresiones del tipo:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}(\theta, \kappa) \quad (\text{II-72})$$

(donde κ es la constante de *Kolosov*, ver ecuación (II-60) y g_{ij} son funciones diferentes según se trate de deformación plana o tensión plana) es inmediato observar de nuevo la independencia de J con respecto al radio r del camino tomado tras sustituir en la ecuación (II-71), ya que los términos del integrando son esencialmente productos de tensiones y deformaciones y por tanto:

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \propto \frac{1}{r} \quad (\text{II-73})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Llevando a cabo la integración en la ecuación (II-71) resulta:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad (\text{II-74})$$

donde E' equivale a:

$$E' = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en deformación plana} \\ E & \text{en tensión plana} \end{cases} \quad (\text{II-75})$$

Este resultado es generalizable a otros problemas reales de dimensión finita, incluso con pequeña plastificación en el fondo de grieta (*small scale yielding*) siempre que se pueda encontrar una zona lo suficientemente pequeña comparada con las dimensiones del problema y la longitud de grieta y suficientemente alejada de la zona de plastificación. En otras palabras, una zona donde el campo elástico esté regido por las ecuaciones (II-70) con términos acotados despreciables.

La gran ventaja que ofrece la independencia de J con respecto al camino tomado es que permite su evaluación lejos de la zona dominada por las ecuaciones (II-70), donde el campo elástico (en general, analíticamente desconocido) es estimado con mucha mayor precisión cuando se utilizan métodos numéricos.

La ecuación (II-74) se puede generalizar a otros modos de apertura de grieta o su combinación, obteniéndose:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (\text{II-76})$$

Dado que la relación entre J y K es la misma que la relación entre la tasa de liberación de energía G y K (demostrada por *Irwin* en 1957, véase por ejemplo Gdoutos [69], Anderson [75], Kanninen y Popelar [35], Broek [45], etc.), este planteamiento prueba la equivalencia $J = G$ en MFEL.

Evaluación numérica de la integral J mediante el MEF

En este apartado se dan indicaciones acerca de la evaluación numérica de la integral J , restringida a expresiones como la ecuación (II-62). En estas condiciones, J es simplemente una integral de línea.

El camino Γ es arbitrario y supondremos en el desarrollo que sigue que está formado por tramos rectilíneos. Es preferible escoger un camino alejado del entorno del extremo de grieta, con el fin de evitar la zona donde los campos

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

solución del MEF son peor estimados. El camino Γ puede intersectar los lados de los elementos o bien recorrerlos exactamente (ver *Figura II-7*).

Desde un punto de vista topológico la segunda opción es la más recomendable, pues hace innecesaria la búsqueda de los puntos de intersección de Γ con los lados de los elementos que atraviesa. Además, en este caso los puntos inicial y final del tramo recorrido en el elemento coinciden con nodos.

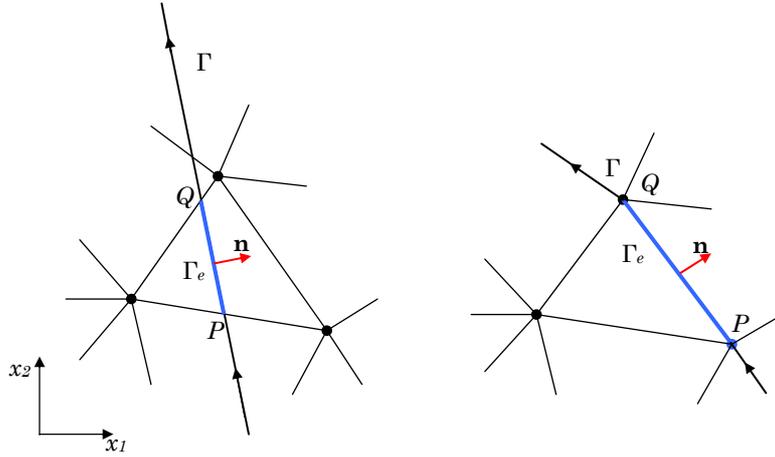


Figura II-7. Izquierda, intersección del camino Γ con un elemento. El tramo comprendido es Γ_e . Derecha: el camino se superpone a un lado.

En cualquiera de las dos situaciones, por las propiedades de la integral se puede escribir

$$J = \sum_{e=1}^{N_e \in \Gamma} J_e \quad (\text{II-77})$$

donde N_e es el número de elementos atravesados por Γ .

Si se denomina Γ_e a la porción de camino Γ que atraviesa el elemento e , J_e será:

$$J_e = \int_{\Gamma_e} \left(W n_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) d\Gamma_e \quad (\text{II-78})$$

Si se realiza un cambio de coordenadas a un sistema de referencia unidimensional $\xi \in [-1,1]$ de forma que el punto P de la *Figura II-7* esté asociado con la coordenada local $\xi = -1$ y el punto Q con la coordenada $\xi = 1$,

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

la integral en el sistema de referencia será:

$$J_e = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) \frac{\overline{PQ}}{2} d\xi \quad (\text{II-79})$$

donde \overline{PQ} es la distancia entre los puntos P y Q en el sistema de referencia global (x_1, x_2) .

En estas condiciones es inmediato aproximar la integral numéricamente mediante la cuadratura de *Gauss* en N_G puntos:

$$J_e \approx \frac{\overline{PQ}}{2} \sum_{m=1}^{N_G} H_m \left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right)_{\xi_m} \quad (\text{II-80})$$

donde ξ_m es la coordenada asociada al punto de *Gauss* m y H_m su peso. Si se utilizan elementos lineales con una formulación en desplazamientos, los campos de tensiones y deformaciones son constantes en cada elemento. Es suficiente entonces tomar un único punto de *Gauss*, $m = 1$, de coordenada unidimensional $\xi_1 = 0$ y peso $H_1 = 2$. Si se utilizan elementos cuadráticos, el integrando de la ecuación (II-79) deja de ser constante y es necesario realizar la integración numérica unidimensional al menos con dos puntos de *Gauss*, $m = 2$. Los campos de tensiones y deformaciones se pueden estimar en las coordenadas ξ_m con una interpolación lineal a partir de sus valores en los puntos P y Q ($\xi = -1$ y $\xi = 1$, respectivamente).

En cuanto a la independencia de J con respecto al camino, ésta se verifica razonablemente siempre que el camino Γ no atraviere los elementos inmediatos al extremo de grieta (véase, por ejemplo, Owen y Fawkes [31], Banks-Sills [61], Stresscheck [99]).

II.6.3 Integrales de contorno en modo mixto

Uno de los grandes inconvenientes de los planteamientos energéticos en MFEL es la dificultad de obtener estimaciones independientes de los FIT en problemas sometidos a modo mixto de apertura de grieta. Las integrales de contorno, como la integral J , vista en el apartado II.6.2, no son una excepción, ya que $J = G$ en MFEL y por tanto está relacionada con la tasa de liberación de energía total de casos de modos combinados (véase ecuación (II-76)). Diversos autores han propuesto métodos para separar los modos haciendo uso de integrales de contorno, generalmente restringidos al caso 2D (único en el que la

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

aplicación práctica de integrales de contorno tiene más sentido). A continuación se citan los resultados más relevantes:

- método de la integral M_I (integral de interacción I),
- método de descomposición de campos,
- aplicación de las relaciones J_k-K ,
- método basado en el *Principio de Reciprocidad*.

De entre estos métodos, cabe resaltar los tres primeros puesto que son susceptibles a la aplicación del *Método de la Integral de Dominio Equivalente* (EDI) que se desarrolla en el punto II.6.4. El método EDI, como se verá, presenta ventajas muy importantes desde diversos puntos de vista en relación a los demás métodos de extracción del FIT. La principal ventaja consiste en que la integral que se plantea con el método EDI para la obtención de los FIT es una integral de dominio, lo cual, resulta muy ventajoso desde el punto de vista del cálculo en el MEF.

Puesto que en esta Tesis, el método empleado para resolver el problema de modo mixto ha sido el de la integral de interacción en su adaptación al método EDI, únicamente se va a presentar con detalle este método.

Método de la integral M_I (integral de interacción I)

Budiansky y Rice [8] definieron la integral de contorno J_k mediante la expresión:

$$J_k = \oint_C \left(Wn_k - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma \quad (\text{II-81})$$

donde el camino C es un contorno cerrado en el plano x_1, x_2 .

Resulta evidente que la integral dada por la ecuación (II-81) coincide con la integral J (ver ecuación (II-62)) para el caso $k = 1$. En cuanto a J_3 es trivial comprobar que es siempre nula en un problema bidimensional. Por ello Budiansky y Rice [8] también denominaron a la ecuación (II-81) como J_a ($a=1, 2$).

Si se considera un sólido elástico homogéneo, la expresión de la integral J_k para 3D ha de ser evaluada sobre un contorno S que englobe todo el frente de grieta:

$$J_k = \int_S \left(Wn_k - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS \quad (\text{II-82})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Por otro lado, suponiendo comportamiento elástico lineal y si se consideran dos estados de equilibrio independientes con sus correspondientes campos de desplazamientos $u_i^{(1)}$ y $u_i^{(2)}$, es evidente que la suma de estos dos estados $u_i^{(1,2)} = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ corresponde a un nuevo estado de equilibrio. Aprovechando las propiedades de linealidad de la derivación e integración, Chen y Shield [16] aplicaron la definición de integral J_k dada por Budiansky y Rice [8] al campo $u_i^{(1,2)}$ obteniendo:

$$J_k(\mathbf{u}^{(1,2)}) = J_k(\mathbf{u}^{(1)}) + J_k(\mathbf{u}^{(2)}) + M_k(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) \quad (\text{II-83})$$

donde $M_k(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$ incluye los términos cruzados, es decir:

$$M_k(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \int_S \left\{ W^{(1,2)} n_k - \sigma_{ij}^{(2)} n_i \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_k} - \sigma_{ij}^{(1)} n_i \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_k} \right\} dS \quad (\text{II-84})$$

siendo $W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$. Supongamos se aplican estas expresiones al caso de la integral J , es decir, $k = 1$. Si se denota por simplicidad $J^{(1)} = J_I(\mathbf{u}^{(1)})$, $J^{(2)} = J_I(\mathbf{u}^{(2)})$ y $J^{(1,2)} = J_I(\mathbf{u}^{(1,2)})$, se puede escribir para cada uno de los dos estados de equilibrio:

$$J^{(1)} = \frac{1}{E'} \left[\left(K_I^{(1)} \right)^2 + \left(K_{II}^{(1)} \right)^2 \right] \quad J^{(2)} = \frac{1}{E'} \left[\left(K_I^{(2)} \right)^2 + \left(K_{II}^{(2)} \right)^2 \right] \quad (\text{II-85})$$

De la expresión análoga para $J^{(1,2)}$ y aprovechando la linealidad de los FIT, es inmediato demostrar que:

$$J^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E'} \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (\text{II-86})$$

Por comparación con la ecuación (II-83) se tiene:

$$M_I(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \frac{2}{E'} \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (\text{II-87})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

A la hora de aplicar el método a un problema bidimensional en modo mixto, con un campo de desplazamientos $\mathbf{u}^{\text{mixto}}$, conviene tomar como segundo estado de equilibrio un estado de modo I puro, con campo de desplazamiento $\mathbf{u}^{*,I}$ y cuyo K_I^* sea conocido, por lo que la ecuación (II-87) se reduce a:

$$M_I(\mathbf{u}^{\text{mixto}}, \mathbf{u}^{*,I}) = \frac{2}{E'} K_I K_I^* \quad (\text{II-88})$$

donde K_I es el FIT desconocido del problema en modo mixto. Habitualmente suele tomarse como campo auxiliar el campo asintótico en el entorno de grieta, especificando por simplicidad $K_I^* = 1$. De esta forma es posible calcular K_I para el problema en modo mixto a través de la integral M_I y obtener el correspondiente K_{II} con ayuda de una de las ecuaciones (II-85).

También es posible calcular K_{II} a través de la aplicación de la integral M_I como un campo $\mathbf{u}^{*,II}$ asociado a un modo II puro y cuyo K_{II}^* sea conocido:

$$M_I(\mathbf{u}^{\text{mixto}}, \mathbf{u}^{*,II}) = \frac{2}{E'} K_{II} K_{II}^* \quad (\text{II-89})$$

El método ha sido muy utilizado en combinación con otras técnicas numéricas, como el método extendido de EF (Moës et ál. [96], Sukumar et ál. [101]), véase Capítulo III, o el método sin malla EFGM (Belytschko et ál. [78]). Para ello se utiliza una equivalencia de la integral de interacción en forma de integral de dominio.

II.6.4 Método de la integral de dominio equivalente (EDI)

El *Método de la Integral de Dominio* (Equivalent Domain Integral Method, EDI) propuesto por Li, Shih, y Needleman [39] varía ingeniosamente la formulación de la integral correspondiente de forma que no es necesaria la evaluación de una integral de contorno, sino únicamente una integral de dominio, siempre preferible por su mayor precisión y facilidad de cálculo.

Planteamiento en dos dimensiones

Recordemos que J es independiente del camino en un problema bidimensional con comportamiento elástico y homogéneo, ausencia de fuerzas por udv. y en caras de grieta.

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

Para el caso de una grieta orientada en dirección x_1 y crecimiento en la misma dirección, y de acuerdo con la denominación y sentido de los caminos empleados en la *Figura II-6*, J viene dada por la siguiente expresión:

$$J = - \int_{\Gamma_3} \left(W \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_i d\Gamma = - \int_{\Gamma_3} \Sigma_{1i} n_i d\Gamma \quad (\text{II-90})$$

siendo \mathbf{n} el vector normal al contorno que queda a la derecha del camino cuando se recorre en su sentido de definición y Σ representa el tensor de *Eshelby*. Al ser nulas las cargas en caras de grieta y al encontrarse éstas orientadas en dirección x_1 , esta integral se puede escribir como extendida al camino cerrado $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ (véase *Figura II-6*) si el integrando se multiplica por una función q_1 que valga la unidad en Γ_3 y se anule en Γ_1 :

$$J = - \oint_{\Gamma^*} \left(W \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) q_1 n_i d\Gamma = - \oint_{\Gamma^*} \Sigma_{1i} q_1 n_i d\Gamma \quad (\text{II-91})$$

con

$$q_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \\ 1 & \text{si } (x_1, x_2) \in \Gamma_3 \end{cases} \quad (\text{II-92})$$

Suponiendo que q_1 sea una función suficientemente continua en A^* se puede aplicar el teorema de *Gauss*, resultando

$$J = - \int_{A^*} \left(\frac{\partial \Sigma_{1i}}{\partial x_i} q_1 + \Sigma_{1i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right) dA = - \int_{A^*} \Sigma_{1i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (\text{II-93})$$

ya que $\frac{\partial \Sigma_{1i}}{\partial x_i} = 0$ en las condiciones anteriormente expuestas. Por tanto, J se puede calcular a partir de una integral de área como

$$J = \int_{A^*} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (\text{II-94})$$

Multiplicando y dividiendo la ecuación (II-94) por un incremento virtual de grieta Δa se tiene una interpretación física de q_1 como una función de ponderación que hace variar el desplazamiento virtual Δx_1 de los puntos contenidos en A^* en dirección x_1 entre el valor máximo Δa en el contorno Γ_3 y 0 en el contorno Γ_1 (véase *Figura II-8*).

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

En la ecuación (II-95) se muestra el resultado:

$$J = \frac{1}{\Delta a} \int_{A^*} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i} dA \quad \text{con } \Delta x_1 = \Delta a q_1 \quad (\text{II-95})$$

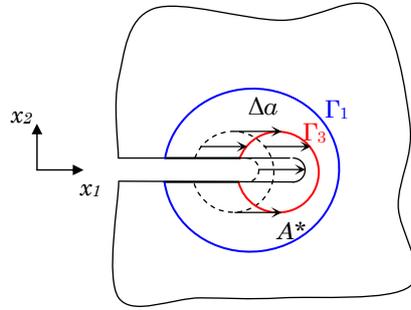


Figura II-8. Desplazamiento virtual Δa de los puntos de Γ_3 (y de todos los puntos encerrados por Γ_3) que inducen un desplazamiento virtual Δx_1 de los puntos en A^* .

Expresado de otra manera, q_1 es el desplazamiento virtual Δx_1 de cada punto en A^* adimensionalizado con respecto al incremento virtual de longitud de grieta Δa , es decir $q_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta a}$ y en el límite $q_1 = \frac{dx_1}{da}$. Ésta es precisamente la particularización de la expresión más general obtenida por Delorenzi [30] bajo un planteamiento de Mecánica del Medio Continuo.

Formulación del método mediante el MEF. Aplicación a 2D

Varios autores dan detalles acerca de la implementación del método como postproceso de la solución numérica obtenida mediante el MEF (Delorenzi [40], Li et ál. [39], Shih et ál. [46], Nikishkov y Atluri [49], Shivakumar y Raju [67], Anderson [75]). En cada caso la formulación varía ligeramente en función del enfoque teórico seguido, hipótesis asumidas, etc.

A continuación se incluye el planteamiento utilizado en esta Tesis.

Elección de la función q_1

La función q_1 ha de ser suficientemente continua. La estimación en la zona cercana al extremo de grieta es siempre menos precisa que en zonas alejadas. En estas condiciones, sí puede afectar el área A^* y la función q_1 elegidas. Como

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

regla general, cuanto más se extienda el área A^* lejos del extremo de grieta, las estimaciones de J podrán ser más precisas.

Existen diferentes tipos de función q_1 utilizados en la práctica. En la *Figura II-9* se representan la función q_1 tipo *plateau* utilizada en esta Tesis (propuesta entre otras por Shih et ál. [46]). Se define el dominio de integración alrededor del extremo cumpliéndose que $q_1 = 0$ en el contorno exterior, $q_1 = 1$ en el contorno interior. La transición se realiza de forma continua.

Para un problema en el que las hipótesis de carga garanticen la independencia de J del camino tomado, la utilización de una función tipo *plateau* equivale a la integración en un dominio A^* anular, ya que la única contribución es debida a aquellos elementos donde q_1 no es constante. En estos casos la elección de una función q_1 tipo *plateau* presenta la ventaja de evaluar los resultados lejos de la zona de elevados gradientes, donde la solución de EF es más exacta.

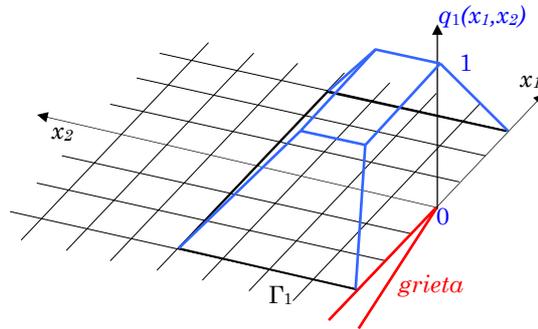


Figura II-9. Función q_1 tipo plateau para problemas 2D.

Integración numérica

La integración extendida al área A^* equivale a la suma de las integrales extendidas al área de los elementos incluidos en A^* . La integral en cada elemento se realiza numéricamente en el dominio de referencia ξ, η mediante la cuadratura de *Gauss*. A continuación se incluye a modo de ejemplo la expresión discretizada de la ecuación (II-94) (válida en ausencia de cargas por *udv.*, efectos térmicos o dinámicos o cargas en caras de grietas). Se supone el uso de elementos isoparamétricos:

$$J \approx \sum_{e=1}^{N_e \in A^*} \left\{ \sum_{m=1}^{N_G} \sum_{n=1}^{N_G} H_m H_n \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{J}} \right]_{(\xi_m, \eta_m)} \right\}_e \quad (\text{II-96})$$

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

donde N_e es el número de elementos contenidos en el área de integración A^* , N_G es el número de puntos de *Gauss* tomados en cada dirección local de integración ξ, η siendo H_m, H_n sus correspondientes pesos de *Gauss* y $|\mathbf{J}|$ es el determinante de la matriz jacobiana \mathbf{J} de la transformación de coordenadas. El integrando (expresión entre corchetes) ha de ser evaluado en las coordenadas de los puntos de integración de *Gauss* (ξ_m, η_n) . Para la evaluación de $\partial q_1 / \partial x_i$ resulta conveniente definir la función q_1 en cada elemento como interpolación a partir de sus valores nodales:

$$q_1(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{N_{ne}} N_n(\xi, \eta) q_{1n} \quad (\text{II-97})$$

Donde N_{ne} es el número de nodos por elemento, $N_n(\xi, \eta)$ es la función de forma del nodo n en coordenadas de referencia de elemento y q_{1n} es el valor de q_1 asociado al nodo n . De esta manera, las derivadas de q_1 con respecto a las coordenadas espaciales x_i , se calculan como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^{N_{ne}} \frac{\partial N_n(\xi, \eta)}{\partial \xi} q_{1n} \\ \sum_{n=1}^{N_{ne}} \frac{\partial N_n(\xi, \eta)}{\partial \eta} q_{1n} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-98})$$

Aplicación de la integral $M_1 \equiv I^{(1,2)}$

La formulación del método EDI también es aplicable a otras integrales de contorno distintas de la integral J . Así en el caso 2D y bajo las hipótesis que permiten la aplicación del método EDI, Shih y Asaro [54] dan una expresión en forma de integral de dominio para la integral de interacción $M_1 \equiv I^{(1,2)}$

$$M_1 \equiv I^{(1,2)} = \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{li} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (\text{II-99})$$

Estos autores utilizaron este planteamiento para el estudio en grietas de interfases de materiales heterogéneos. Recientemente, la expresión (II-99) ha sido utilizada con éxito en combinación con nuevas técnicas numéricas, como el método extendido de EF (Moës et ál. [96], Sukumar et ál. [101]) o el método sin malla EFGM (Belytschko et ál. [78]).

II. BASES DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A MFEL

En esta Tesis se han implementado las ecuaciones (II-94) y (II-99) para la estimación de las integrales J (EDI) y de interacción $I^{(1,2)}$ respectivamente, para problemas bidimensionales.

Capítulo III

Método de los Elementos Finitos Extendido

III.1 Introducción

El análisis de componentes con grietas bajo el enfoque de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL), permite encontrar la solución analítica para modos mixtos en algunos casos concretos, en aquellos donde tanto la geometría como la carga son sencillas. Para configuraciones más generales, resulta inevitable el empleo de técnicas numéricas para llevar a cabo la resolución, en este caso aproximada, del problema.

En diversos campos de la ingeniería y ciencias aplicadas, el Método de los Elementos Finitos (MEF) es un método numérico consolidado, ampliamente utilizado en la resolución de problemas de contorno. No obstante, el MEF presenta algunos inconvenientes en la resolución de problemas con grietas, esto es porque la solución estándar del MEF se puede ajustar con elevada precisión a problemas cuya solución presente un campo suave, sin embargo, la solución en un problema con grieta es singular, dominada por funciones no polinómicas. Por otro lado, con el MEF es necesario ajustar la malla a la topología de la grieta. Esto resulta un inconveniente evidente en el estudio de crecimiento de grieta puesto que es necesario un remallado que adapte la malla a la nueva configuración geométrica. Además, para obtener resultados precisos con el MEF en problemas con grietas, es necesario un refinamiento local de la malla en las cercanías de la singularidad, lo cual conduce a un importante aumento de grados de libertad.

Con el fin de incrementar la velocidad de convergencia, se han realizado varios planteamientos que permitan incluir la singularidad de extremo de grieta en la formulación de los elementos. En este sentido se dirigen los trabajos de

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

Gallager [17], Fawkes et ál. [24], Owen y Fawkes [31], Liebowitz y Moyer [55] y Liebowitz et ál. [90]. Barsoum [14] y Kwon et ál. [56] emplearon el método de elementos finitos sin y con elementos singulares respectivamente, para la resolución de problemas en MFEL.

El trabajo de Strang y Fix [7] muestra los inicios de una nueva aproximación. Su idea consistía en tener en cuenta en la formulación, términos exactos de la solución conocidos *a priori*. En este sentido, en el caso del MFEL, añadir los términos del campo asintótico de extremo de grieta a la base de la formulación de elementos finitos podía ser una buena idea.

Posteriormente, Babuška et ál. [74], [80] y [84] consideraron la partición de la unidad en unión con el método de los elementos finitos para lograr una buena aproximación local con la condición de continuidad global (método PUFEM). En el método PUFEM es sencillo incluir información analítica en el problema cuando es resuelto en el espacio de elementos finitos. Presentaron resultados matemáticos para esta nueva aproximación.

Fleming et ál. [85] introdujeron el método llamado *Element Free-Galerkin* (EFG) que consistía en un método sin malla para fractura y crecimiento de grieta. Los resultados en tensiones alrededor del extremo de grieta presentaban oscilaciones a menos que se realizara un intenso refinamiento. Para salvar esta dificultad, introdujeron términos de enriquecimiento en la formulación. Asimismo, añadieron un algoritmo de transformación para tratar el problema con grietas curvas.

En el trabajo de Belytschko y Black [94] se plantea un método para resolver problemas de crecimiento de grieta en MFEL que ofrece, entre otras ventajas, la necesidad de un mínimo remallado. Este método se formula en el marco de los elementos finitos y se basa en enriquecer la aproximación con las mismas funciones que empleó Fleming [85] en el método EFG. La malla es independiente de la grieta. En este método la grieta se representa enriqueciendo convenientemente la aproximación en los elementos cercanos al extremo de grieta. Este enriquecimiento se realiza con las funciones del campo asintótico de la solución en extremo de grieta, cumpliendo la partición de la unidad (Babuška y Melenk, [80] y [84]).

Moës et ál. [96] perfilaron un procedimiento más elegante y extendible para tener en cuenta el campo discontinuo a través de las caras de las grietas sin incluir su extremo, adaptando la función generalizada de Heaviside. También desarrollaron reglas sencillas para su aplicación así como para enriquecer en el extremo de grieta. Con este método no es necesario el remallado para estudiar crecimiento de grieta.

Más tarde, Daux et ál. [100] introdujeron el concepto de función *ramificada* para considerar grietas con múltiples ramas y lo denominaron *método de los*

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

elementos extendidos (XFEM). Emplearon este método para modelar geometrías complejas como grietas con múltiples ramas, huecos y grietas que parten de agujeros sin necesidad de mallar las diferentes entidades geométricas.

Sukumar et ál. [101] estudiaron grietas planas en modo I en tres dimensiones con XFEM. Dolbow et ál. [104] estudiaron la fractura en placas Mindlin-Reissner y crecimiento de grieta 2D bajo tres diferentes leyes constitutivas entre las caras de la grieta: contacto perfecto, contacto unilateral con o sin fricción (Dolbow, [107]).

Una formulación bastante similar a la que plantea XFEM es la del método generalizado de elementos finitos (*Generalized Finite Element Method*, GFEM) introducido por Stroboloulis et ál. [102], [103] y [108] y Duarte et ál. [105] que incorpora las funciones, analíticamente conocidas o calculadas numéricamente y recogidas en *handbooks*, a la formulación tradicional del MEF para mejorar la aproximación local y global de la solución, bajo el marco de la partición de la unidad.

Tanto el XFEM como el GFEM tienen como punto común de partida el Método de los Elementos Finitos, sin embargo, ambos métodos permiten resolver problemas de ingeniería con dominios complejos que resultan prácticamente imposibles de resolver con el MEF. En el GFEM se puede emplear la p -adaptatividad de forma que es capaz de proporcionar buenos resultados numéricos incluso con mallas poco refinadas. Por otro lado, el XFEM hace mayor hincapié en el enriquecimiento de nodos para modelar los contornos interiores (grietas o inclusiones) de interés y presenta una mayor independencia de la solución conocida y por lo tanto mayor flexibilidad.

En XFEM y en GFEM la predicción de los desplazamientos globales es muy buena pero para calcular con precisión el factor de intensidad de tensiones (FIT) en el extremo de grieta es necesario el empleo de técnicas de post-proceso, bien sea a través de integrales de contorno (Belytschko et ál. [94]; Moës et ál. [96]; Daux et ál. [100]; Sukumar et ál. [101]; Dolbow et ál. [107]; Belytschko et ál. [109]; Stolarska et ál. [110]) o mediante el método de ajuste de mínimos cuadrados (Duarte et ál. [111]).

Con el objetivo de mejorar los campos locales y determinar de forma directa los FIT, Liu et ál. [126], enriquecían la aproximación de elementos finitos en los nodos de extremo de grieta, no sólo con el primer término sino también con términos de orden superior del campo asintótico de extremo de grieta, usando la partición de la unidad. Además, los FIT aparecen como los grados de libertad asociados a las funciones de enriquecimiento evitando así, la necesidad de postproceso.

Para el modelado de configuraciones complejas de grietas, son necesarias técnicas capaces de representar convenientemente las discontinuidades

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

internas. El *Level Set Method* (LSM), desarrollado por Osher et ál. [51] y Sethian et ál. [97] y que permite modelar interfaces en movimiento, resulta muy interesante. Belytschko et ál. [109] y Stolarska et ál. [110] extendieron el LSM al modelado de la evolución de un segmento curvo abierto. Acoplando el LSM con el XFEM, Stolarska et ál. [110] estudiaron el crecimiento de una grieta en fatiga.

Llegados a este punto, podríamos resumir las características del método XFEM del siguiente modo: el método de los elementos finitos enriquecido o extendido hace uso del concepto de partición de la unidad introducido por Babuška y Melenk, [80] y [84] (PUM). Este método proporciona una gran flexibilidad para elegir las funciones que definen el espacio de aproximación local. Es posible añadir funciones determinadas a la solución estándar dada por elementos finitos. Desde el punto de vista de la mecánica de la fractura, resulta deseable introducir los términos necesarios para poder representar el campo discontinuo de desplazamientos a lo largo de las caras de grieta y los términos del campo de desplazamientos asintótico de frente de grieta.

En XFEM el mallado del dominio se realiza sin tener en cuenta la existencia de grietas o inclusiones. La singularidad se representa enriqueciendo el campo de desplazamientos de elementos finitos con funciones adicionales. Además, la formulación del XFEM se adapta al empleo de elementos de orden superior o elementos finitos especiales.

Una ventaja que ofrece el método XFEM es la precisión de los resultados que obtiene, aunque, no siempre la velocidad de convergencia es la óptima. Puesto que en la nueva aproximación se introducen los términos singulares, cabría esperar la misma velocidad que obtendríamos en caso de emplear el método de elementos finitos convencional para resolver un problema suave. Esta pérdida de velocidad de convergencia se muestra en los trabajos de Stazi et ál. [118], y Chessa et ál. [119].

Chessa et ál. [119] atribuyen este comportamiento a la falta de partición de la unidad en los elementos de transición, proponiendo algunas técnicas para mejorar la convergencia en problemas con funciones de enriquecimiento polinómicas. Los elementos de transición son los situados entre la zona enriquecida y la zona no enriquecida, que presentan un enriquecimiento parcial, es decir, enriquecimiento en algunos de sus nodos y, por lo tanto, las funciones de interpolación no forman una partición de la unidad. Estos autores intentan recuperar en la medida de lo posible la partición de la unidad en los elementos de transición, bien modificando su formulación (*Enhanced Strain Formulation*) o bien añadiendo de forma jerárquica funciones polinómicas de orden superior en estos elementos. El planteamiento de Chessa para la mejora de los elementos de transición es detallado en el Capítulo IV de la Tesis.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

Para muchos tipos de enriquecimientos, el espacio que define la aproximación en los elementos de transición introduce términos parásitos que produce oscilaciones en la solución (Chessa et ál. [119]). Frecuentemente, estas oscilaciones degradan tanto la precisión como la velocidad de convergencia.

En los métodos donde el enriquecimiento es global, como el PUM de Melenk y Babuska [80], no existen elementos de transición. Sin embargo, el coste computacional de enriquecer todos los nodos es muy elevado y, por lo tanto, el esquema de enriquecimiento local es preferido.

Laborde et ál. [129] estudian varios factores que pueden deteriorar la velocidad de convergencia utilizando elementos 2D de orden lineal, cuadrático y cúbico en XFEM y proponen algunas mejoras. La primera mejora está relacionada con la partición de la unidad asociada a la función Heaviside que representa la discontinuidad en el desplazamiento, que tiene que ser del mismo orden polinómico que la interpolación de elementos finitos estándar. La segunda mejora consiste en definir una zona de enriquecimiento alrededor del extremo de grieta independiente del tamaño de los elementos. La tercera mejora tiene que ver de nuevo con los elementos de transición. Estos autores proponen eliminar dichos elementos pasando directamente de la zona enriquecida a la no enriquecida, de esta manera la malla de elementos finitos es no conforme y se necesita alguna condición adicional para acoplar ambas zonas (como continuidad del desplazamiento en los nodos de la frontera común).

Béchet et ál. [128] también proponen utilizar una zona de enriquecimiento independiente de la densidad de malla, lo que denominan enriquecimiento geométrico.

La velocidad de convergencia se ve condicionada por la zona de enriquecimiento. En los trabajos de Laborde et ál. [129] y Béchet et ál. [128], queda probado que es esencial establecer un área fija de enriquecimiento para lograr la velocidad de convergencia óptima. No obstante, esto tiene el inconveniente de incrementar el número de condicionamiento de las matrices de rigidez, que crece rápidamente al aumentar el número de nodos enriquecidos debido al mayor número de autovalores nulos en las matrices de rigidez de los elementos enriquecidos.

Béchet et ál. [128] mejoran el condicionamiento utilizando matrices de pre-condicionamiento locales mientras que Laborde et ál. [129] lo consiguen reduciendo el número de grados de libertad asociados al campo asintótico de desplazamientos. En esta última técnica se exige que los coeficientes asignados al mismo término del campo asintótico sean iguales en todos los nodos enriquecidos lo cual resulta atractivo por su simplicidad. No obstante, los resultados muestran una reducción en la velocidad de convergencia que los autores resuelven eliminando los elementos de transición.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

Otro aspecto de interés en el XFEM es la integración numérica debido a la presencia de funciones discontinuas y singulares en la aproximación de XFEM. Las técnicas de integración numérica han recibido una especial atención en varios trabajos [96], [107], [120], [121], [128], [129], [131]. Para el caso bidimensional, estas técnicas se basan en la división del elemento en varios triángulos o cuadriláteros con sus lados orientados con la grieta, en los que se aplica una regla de integración estándar. Recientemente Ventura [132] ha propuesto una técnica diferente que permite utilizar una cuadratura estándar sin particionar el elemento, reemplazando las funciones discontinuas o no derivables del integrando por polinomios equivalentes.

En esta Tesis se describe una técnica novedosa para mejorar los elementos de transición. El procedimiento es una extensión del trabajo de Chessa et ál. [119] a la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal con aplicación a problemas bidimensionales y tridimensionales. Mejorar los elementos de transición hace posible tener una mayor precisión en XFEM sin añadir un coste computacional significativo, aunque para conseguir la velocidad de convergencia óptima sigue siendo imprescindible que el enriquecimiento se realice independientemente del tamaño de la malla (enriquecimiento geométrico). Además para reducir el número de condicionamiento, se puede emplear la técnica descrita por Laborde et ál. [129].

El contenido de este capítulo es el siguiente: en el apartado III.2 se describe la técnica utilizada para establecer los conjuntos de nodos que se van a enriquecer en función de su posición relativa a la grieta. Esta técnica está basada en el denominado *Level Set Method*. En el apartado III.3 se formulan las ecuaciones que gobiernan el problema de contorno en Mecánica de la Fractura Elástica Lineal así como la formulación débil. En el apartado III.4 se plantean de manera básica los principios del XFEM tratando aspectos esenciales como son las funciones de enriquecimiento, la integración numérica y la velocidad de convergencia. Todo ello se ilustra mediante ejemplos numéricos. En el apartado III.5 se describen y se muestran ejemplos numéricos de las mejoras realizadas al método XFEM. Estas mejoras tratan sobre la recuperación de la velocidad de convergencia óptima y la reducción del condicionamiento numérico. El aspecto a mejorar en XFEM de gran importancia y que ha sido el objeto principal de esta Tesis, es el inconveniente derivado de la presencia de elementos de transición. El Capítulo 4 se centra en plantear este problema y describe las diversas aportaciones realizadas hasta la fecha así como la del presente trabajo.

III.2 Level Set Method

III.2.1 Definición de la función *level set*

El *Level Set Method* (LSM) es un procedimiento numérico propuesto inicialmente por Osher y Sethian [51] para modelar el movimiento de fronteras. En su trabajo se presentan los algoritmos llamados *PSC* (*Propagation of Surfaces under Curvature*) que permiten seguir el movimiento de una superficie de dimensión $N-1$ en un espacio N dimensional. En el método LSM se define una función $\phi(\mathbf{x})$ de manera que la frontera de interés viene representada por el valor cero de dicha función. La evolución de la frontera se puede expresar como una ecuación de la evolución de ϕ con el tiempo. El uso del LSM para representar el movimiento de superficies tiene varias ventajas, entre ellas se pueden citar las siguientes: el movimiento de la frontera se calcula en una malla fija Euleriana, resulta sencillo seguir los cambios en la topología de la frontera, el método es fácilmente extendible a problemas tridimensionales y, finalmente, la geometría de la frontera se obtiene a partir de la función *level set*, ϕ .

El inconveniente del método es que la función ϕ es una dimensión superior a la dimensión de la frontera. Por ejemplo, para un problema en el que la frontera es unidimensional, es necesario definir una función *level set* de dos dimensiones. Si se tiene en cuenta el movimiento de la frontera, es necesario actualizar el valor de la función *level set* en cada paso de tiempo lo cual supone un importante coste computacional. No obstante, es posible solucionar este inconveniente si la zona, en la que resulta necesaria la actualización de las funciones *level set*, es relativamente pequeña. En Adalsteinsson y Sethian [79] se presenta una solución a este problema que consiste básicamente en calcular las funciones *level set* justo alrededor de la frontera en movimiento, en una banda estrecha (*narrow band*).

Sea el dominio Ω dividido en dos subdominio Ω_1 y Ω_2 de forma que no se superponen y comparten la frontera Γ , como ilustra la *Figura III-1*.

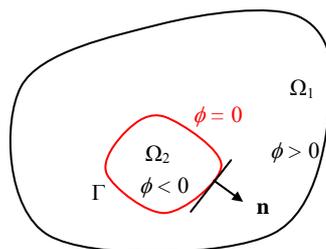


Figura III-1. Definición de la función *level set*.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

La función *level set* ϕ puede definirse como la función distancia:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} d & x \in \Omega_1 \\ -d & x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

donde d representa la distancia normal desde un punto \mathbf{x} a la frontera Γ . Notar que el gradiente de la función distancia signada satisface:

$$\|\nabla\phi(\mathbf{x})\| = 1 \quad (\text{III-2})$$

El vector \mathbf{n} que aparece en la *Figura III-1* es el vector normal a la frontera Γ en el punto $\mathbf{x} \in \Gamma$ y puede ser definido como:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi(\mathbf{x})}{\|\nabla\phi(\mathbf{x})\|} \quad (\text{III-3})$$

Para el caso de $\|\nabla\phi(\mathbf{x})\| = 1$, se tiene que el vector unitario \mathbf{n} es:

$$\mathbf{n} = \nabla\phi(\mathbf{x}) \quad (\text{III-4})$$

Supóngase que la frontera Γ se mueve en una dirección perpendicular a sí misma con una velocidad \mathbf{v} . Podemos asumir que la posición inicial del frente se corresponde con el valor nulo de la función ϕ de forma que se puede representar la evolución de ϕ con la propagación del frente a través de una ecuación función del tiempo con la condición inicial conocida. En cualquier instante la frontera viene dada por el valor cero de la función, por lo tanto, se puede obtener la ecuación de movimiento de la función ϕ imponiendo que la derivada material con respecto al tiempo sea nula:

$$\frac{d\phi(\mathbf{x},t)}{dt} = 0 \quad (\text{III-5})$$

Si se deriva teniendo en cuenta la regla de la cadena, se obtiene la ecuación de movimiento de *Hamilton-Jacobi*:

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla\phi(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = 0 \quad (\text{III-6})$$

Con $\phi(x, t = 0)$ conocido y siendo \mathbf{v} la velocidad de propagación normal del frente en el punto \mathbf{x} . Un procedimiento detallado de resolución de la ecuación (III-6) se puede encontrar en Sethian [82].

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

III.2.2 *Level set* para grietas

El LSM ha sido utilizado para representar grietas en simulaciones de mecánica de la fractura en lugar de realizar una descripción explícita de la geometría de las caras de grieta. Por ejemplo, en dos dimensiones la grieta podría ser representada por la unión de segmentos lineales y en tres dimensiones podría ser representada por la unión de facetas triangulares.

Como se ha comentado, el LSM es un método numérico propuesto por Osher y Sethian [51] y descrito con todo detalle por Sethian [82]. Storlarska et ál. [110] propusieron el LSM para representar grietas.

Existen importantes diferencias entre el LSM aplicado a problemas con grietas y el LSM aplicado a problemas de evolución de fronteras. Dufloy [134], resume las diferencias siguientes:

- La grieta es una curva abierta o una superficie abierta en 3D, que crece desde sus extremos o frentes. Como consecuencia son necesarias dos funciones *level set* para representar la grieta.
- El nivel cero no debe ser actualizado en los puntos por los que ya ha pasado la grieta.
- Las funciones de nivel no son actualizadas con la velocidad de la frontera en la dirección normal a sí misma sino con la velocidad del frente de grieta.

En cuanto a la primera diferencia, la definición realizada en el apartado III.2.1 del LSM para fronteras cerradas debe ser modificada en caso de considerar fronteras abiertas, como es el caso de las grietas. Una función *level set* ϕ , no es generalmente suficiente para describir la grieta.

Storlarska en [110] propone una extensión del LSM para representar fronteras abiertas utilizando dos funciones *level set*: la función *level set* normal ϕ representa la distancia a la superficie de grieta. Su valor nulo se corresponde con la superficie de la grieta. La función *level set* tangente ψ tiene en cuenta la distancia al frente de grieta. La intersección del nivel cero de las funciones $\psi(\mathbf{x},t)$ y $\phi(\mathbf{x},t)$ da como resultado la localización del frente de grieta. En la *Figura III-2* se muestran ejemplos para 2D y 3D, donde las funciones ϕ y ψ son funciones distancia.

La localización del frente de grieta y de la superficie de grieta viene dada por las siguientes relaciones (Gravouil et ál. [117]):

$$\phi(\mathbf{x},t) = 0, \psi(\mathbf{x},t) < 0 \quad \mathbf{x} \text{ se encuentra en la superficie de la grieta} \quad (\text{III-7})$$

$$\phi(\mathbf{x},t) = 0, \psi(\mathbf{x},t) = 0 \quad \mathbf{x} \text{ se encuentra en el frente de la grieta} \quad (\text{III-8})$$

$$\psi(\mathbf{x},t) > 0 \quad \mathbf{x} \text{ no está afectado por la grieta} \quad (\text{III-9})$$

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

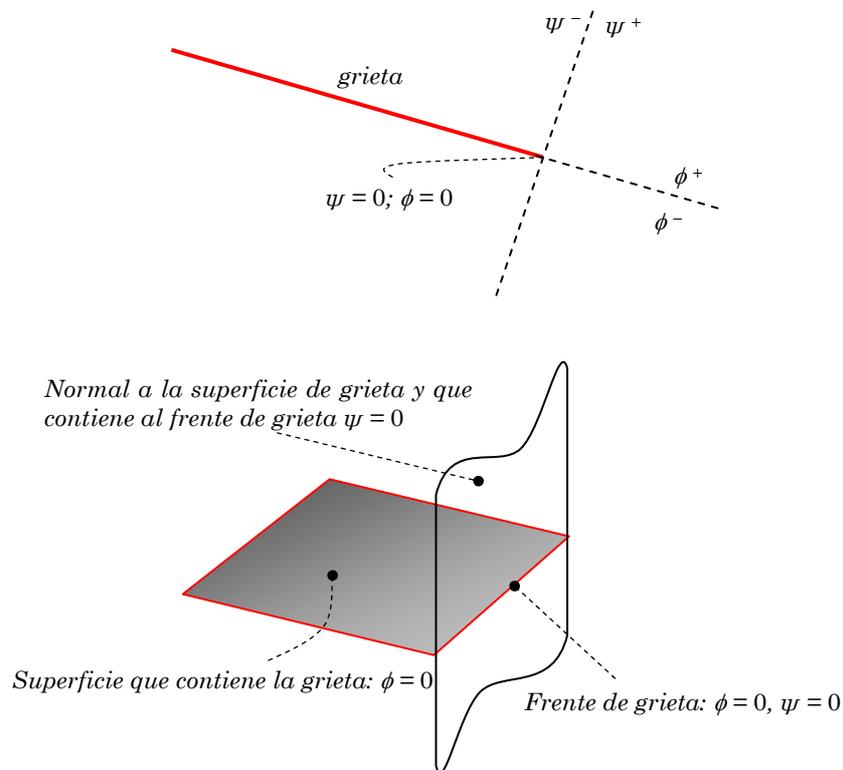


Figura III-2. Caracterización de la grieta a partir de las funciones de nivel (2D y 3D).

Se debe hacer notar que, aunque la notación de las funciones *level set* es contraria a la propuesta por Storlarska en [110], es la que ha sido utilizada en todos los trabajos posteriores como en Mões et ál. [116] y Gravouil et ál. [117].

Por lo que respecta a la segunda y tercera diferencias que hay en el método LSM cuando es aplicado a fronteras cerradas o a grietas, se debe tener en cuenta que una frontera cerrada crece en dirección normal a sí misma mientras que una grieta crece desde su frente (ver Figura III-3). En el caso de una frontera cerrada, la función *level set* se mueve libremente mientras que para el caso de una grieta, en los puntos donde la función normal es cero ($\phi = 0$) y la función tangente es negativa ($\psi < 0$), las funciones *level set* no deben cambiar ya que identifican la superficie de grieta y, por lo tanto, el dominio ya ha sido partido.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

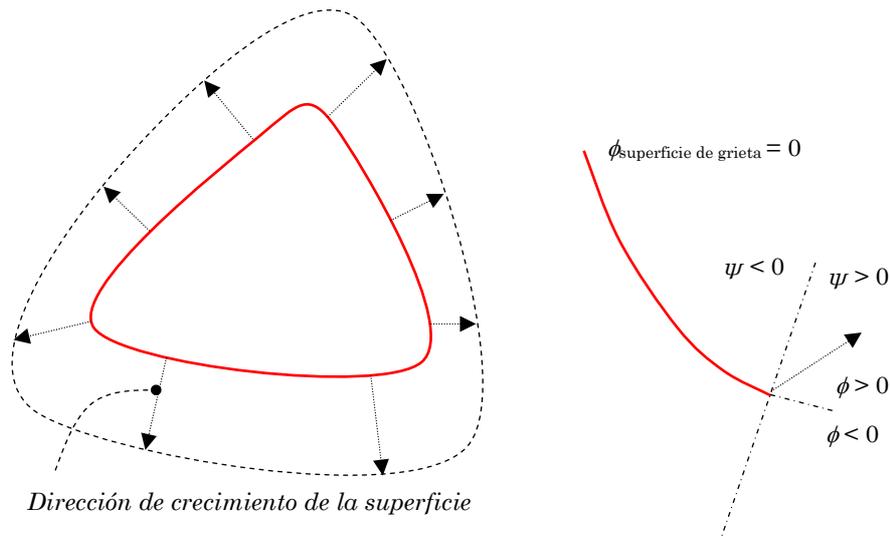


Figura III-3. Diferencia entre la evolución de una frontera cerrada y una grieta.

Ésta es una de las principales dificultades de aplicación del LSM en los problemas de propagación de grietas. Aunque la actualización de las funciones de *level set* se suele realizar resolviendo la ecuación de *Hamilton-Jacobi*, es necesario adoptar técnicas especiales para que las funciones que describen la grieta existente no varíen (Ventura et ál. [123]). En el trabajo de Ventura et ál. [123], se introduce una nueva aproximación basada en la formulación de un vector *level set*. En este método las funciones *level set* son únicamente definidas en una estrecha banda alrededor de la grieta y la evolución de la misma no altera la grieta ya existente.

La función ψ normalmente se supone ortogonal a ϕ :

$$\nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0 \quad \forall t \quad (\text{III-10})$$

La condición de ortogonalidad de las funciones *level set* ϕ y ψ , permite utilizarlas para definir un sistema de referencia en coordenadas curvilineas intrínsecas a la grieta. La aproximación numérica de ϕ y ψ no resultará exactamente ortogonal pero puede aproximarse lo suficiente para obtener resultados precisos.

El vector unitario normal al frente de grieta viene dado por:

$$\mathbf{n}_\psi = \frac{\nabla \psi}{\|\nabla \psi\|} \quad (\text{III-11})$$

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

El vector unitario normal a la superficie de grieta se obtiene mediante una expresión análoga para la función de nivel ϕ :

$$\mathbf{n}_\phi = \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \quad (\text{III-12})$$

El vector unitario tangente al frente de grieta será:

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{n}_\psi \times \mathbf{n}_\phi \quad (\text{III-13})$$

De este modo los vectores base vienen dados en cualquier punto del dominio de definición de las funciones de nivel (ver *Figura III-4*):

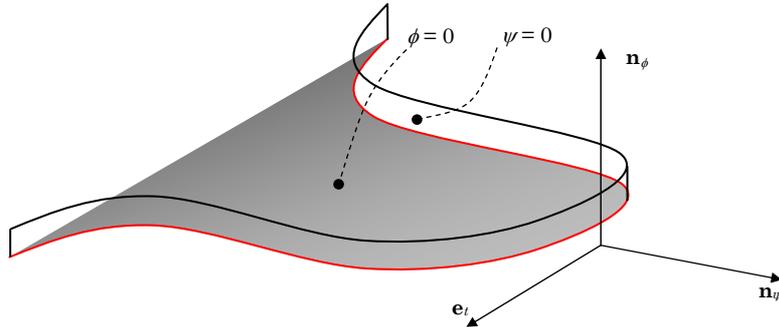


Figura III-4. Vectores base a partir de las funciones level set en una grieta.

Cuando se considera crecimiento de grieta, es necesario actualizar las funciones *level set*, para ello se tiene en cuenta el vector velocidad definido por \mathbf{V} . Esta velocidad depende de la ley de crecimiento de grieta. La velocidad \mathbf{V} se puede descomponer en sus proyecciones en las direcciones \mathbf{n}_ϕ y \mathbf{n}_ψ (véase *Figura III-5*).

$$\mathbf{V} = V_\psi \mathbf{n}_\psi + V_\phi \mathbf{n}_\phi \quad (\text{III-14})$$

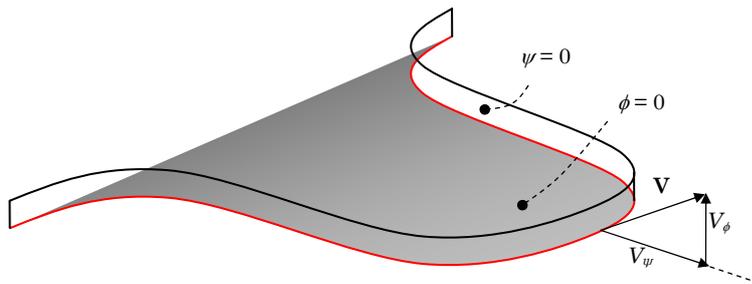


Figura III-5. Descomposición de la velocidad del frente de grieta V_ϕ y V_ψ .

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

Los valores de las funciones ϕ y ψ son únicamente almacenados en los nodos, cuando se trabaja con una aproximación de elementos finitos. Las funciones se interpolan al resto del dominio utilizando las mismas funciones de forma que los elementos finitos (Stolarska y Chopp [125]):

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}, t) \quad (\text{III-15})$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}, t) \quad (\text{III-16})$$

Un aspecto fundamental para representar el crecimiento de grieta utilizando *level set* es la extensión del campo de velocidad desde el frente de grieta al dominio completo. La actualización del campo de velocidad no debe afectar a la grieta ya existente, esto es, para valores de $\psi < 0$. En Gravouil et ál. [117] se encuentra una explicación detallada de cómo realizar la extensión del campo de velocidad y la actualización de las funciones *level set*. En Duflot [134] se comparan diferentes técnicas para mejorar la definición de los *level sets* en grietas.

A continuación se describe cómo se utilizan las funciones de nivel para diferenciar los dominios donde, en XFEM, se enriquece la solución aproximada, con la función Heaviside, con las funciones singulares del campo asintótico de extremo de grieta, o bien con ambas.

Uso de las funciones level set para representar la discontinuidad en desplazamientos

Una grieta en un sólido es una frontera interna a través de la cual existe un salto en el campo de desplazamientos, es decir una discontinuidad en la propia solución. A continuación se describe cómo se pueden emplear las funciones de nivel para representar correctamente la discontinuidad cuando se emplea el método numérico XFEM.

Como se ha comentado en diferentes puntos de la Tesis, la malla en XFEM no necesita adaptarse a la grieta. En su lugar, se añaden grados de libertad adicionales en los nodos cuyo soporte esté incluido en la zona de influencia de la grieta. La función de interpolación asociada a estos nuevos grados de libertad es la función de forma estándar multiplicada por la función Heaviside.

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) \cdot H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}_j \quad (\text{III-17})$$

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

En el apartado III.4.1 se puede ver una explicación detallada de qué representan cada uno de los términos de esta ecuación.

La representación de las funciones *level set* permite clasificar los elementos de manera muy sencilla. La función ϕ cambia de signo en cada lado del plano de la grieta y la función ψ lo hace en un plano normal a ϕ y que contiene al frente de la grieta. Se evalúan estas funciones en todos los nodos de la malla mediante reglas sencillas y se identifican los elementos intersectados por la grieta y los que contienen al extremo de grieta (véase ecuación (III-18)).

$$\begin{aligned} \phi_{\text{máx}} \cdot \phi_{\text{mín}} \leq 0, \psi_{\text{máx}} < 0 &\Leftrightarrow \text{Elemento intersectado por la grieta} \\ \phi_{\text{máx}} \cdot \phi_{\text{mín}} \leq 0, \psi_{\text{máx}} \cdot \psi_{\text{mín}} \leq 0 &\Leftrightarrow \text{Elemento contiene extremo de grieta} \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

Por ejemplo, en un elemento que es cortado completamente por la grieta, el valor de la función tangente ψ para todos sus nodos es negativo y, en cambio, el valor de la función normal ϕ cambia de signo en al menos un nodo de dicho elemento (ver *Figura III-6*).

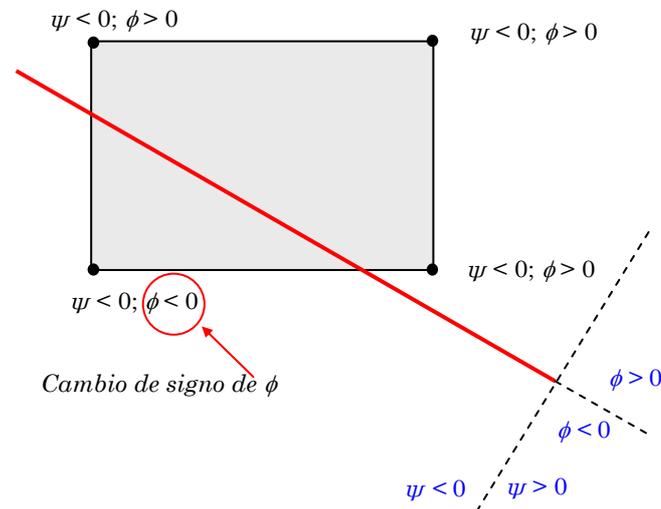


Figura III-6. Valor nodal de las funciones level set en un elemento cortado por la grieta.

Para el caso de un elemento que contiene el extremo de grieta, las funciones ϕ y ψ cambian de signo en al menos un nodo (véase *Figura III-7*).

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

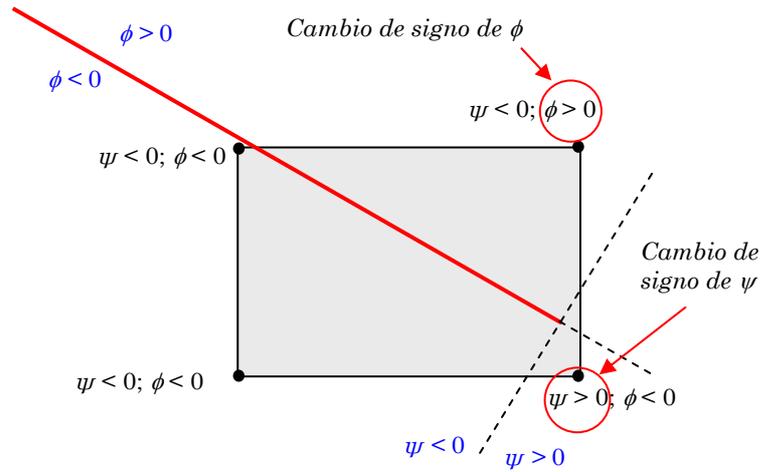


Figura III-7. Valor nodal de las funciones level set en un elemento que contiene al extremo de grieta.

Uso de las funciones level set para enriquecer la aproximación

La calidad de la solución en XFEM se ve aumentada de manera importante por el enriquecimiento en la aproximación de desplazamientos. Esto se consigue porque se tiene un conocimiento *a priori* del campo de desplazamiento en las cercanías del frente de grieta. En mecánica de la fractura elástica lineal para un material homogéneo e isótropo el campo de desplazamiento, para una situación de carga en la que se combinan los modos I y II y, siendo un problema en dos dimensiones, viene dado por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = K_I \mathbf{Q}_I(\mathbf{x}) + K_{II} \mathbf{Q}_{II}(\mathbf{x}) \quad (\text{III-19})$$

$$\mathbf{Q}_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2\text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{pmatrix} \quad (\text{III-20})$$

$$\mathbf{Q}_{II}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2\text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[-\kappa + 1 + 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{pmatrix} \quad (\text{III-21})$$

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

El campo de tensiones en las cercanías del frente de grieta viene dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = K_I \mathbf{S}_I(\mathbf{x}) + K_{II} \mathbf{S}_{II}(\mathbf{x}) \quad (\text{III-22})$$

$$\mathbf{S}_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) & \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) & 1 + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{III-23})$$

$$\mathbf{S}_{II}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{III-24})$$

Donde r y θ son las coordenadas polares de \mathbf{x} , con θ medido desde la prolongación tangente al frente de grieta; μ es el módulo a cortadura, κ es la constante de *Kolosov*, K_I y K_{II} son los factores de intensidad de tensiones (FIT) de los modos de apertura y deslizamiento, respectivamente. En el contexto de XFEM, Belytschko y Black [94] proponen un enriquecimiento local basado en la partición de la unidad utilizando las funciones dadas por la ecuación (III-46), que al igual que la solución asintótica en extremo de grieta depende de r y θ .

Usando el sistema de coordenadas definido por las funciones *level set*, Stolarska et ál. [110] proponen expresar el sistema de coordenadas polar asociado al frente de grieta como:

$$r = \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \quad (\text{III-25})$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\phi}{\psi}\right) \quad (\text{III-26})$$

En la ecuación (III-26) se garantiza que $\theta = \pm\pi$ en la superficie de grieta, porque $\phi = 0$ y $\psi < 0$.

III.3 Problema de contorno

Considérese el dominio $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$ con el contorno Γ que se puede descomponer en: Γ_a , donde se imponen desplazamientos o condiciones de *Dirichlet* $\bar{\mathbf{u}}$, Γ_t que denota la frontera en la que se aplican las fuerzas por unidad de superficie o condiciones de *Neumann* $\bar{\mathbf{t}}$ y, por último, Γ_c para identificar la grieta. El

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

contorno cumple $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_c$ (véase *Figura III-8*). En el problema elástico estático bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos, las ecuaciones de equilibrio en el dominio son:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \text{ en } \Omega \quad (\text{III-27})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ en } \Gamma_t \quad (\text{III-28})$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_d \quad (\text{III-29})$$

Suponiendo la superficie de la grieta libre de tracciones se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^+ = 0 \text{ en } \Gamma_c^+ \quad (\text{III-30})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^- = 0 \text{ en } \Gamma_c^- \quad (\text{III-31})$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a la cara de grieta, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de *Cauchy*, \mathbf{b} es el vector de fuerzas por unidad de volumen. Γ_c^+ y Γ_c^- representan las superficies a ambos lados de la grieta. Considerando pequeñas deformaciones, éstas se definen a partir de los desplazamientos a través de las ecuaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla_s \mathbf{u} \quad (\text{III-32})$$

donde ∇_s es la parte simétrica del operador gradiente. La ecuación constitutiva viene dada por la ley de *Hooke*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{III-33})$$

donde \mathbf{C} es el tensor de *Hooke*.

En Belytschko y Black [94], por ejemplo, se muestra la equivalencia entre la formulación débil y fuerte del problema, incluyendo la condición de ausencia de tracciones en las caras de la grieta. A continuación se define la formulación débil del problema. El espacio donde se define el campo admisible de desplazamientos viene dado por:

$$U = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_u, \mathbf{v} \text{ discontinua en } \Gamma_c\} \quad (\text{III-34})$$

Cabe señalar que el espacio V donde se encuentra la solución permite definir funciones discontinuas a lo largo de las caras de la grieta.

El espacio de funciones de prueba viene definido de manera similar por:

$$U_0 = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Gamma_u, \mathbf{v} \text{ discontinua en } \Gamma_c\} \quad (\text{III-35})$$

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

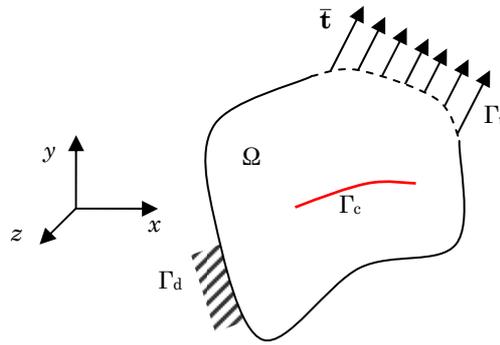


Figura III-8. Definición del problema de contorno.

La forma débil de las ecuaciones de equilibrio resulta:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in U_0 \quad (\text{III-36})$$

Utilizando la ecuación constitutiva y las restricciones cinemáticas en la formulación débil, el problema es encontrar la solución $\mathbf{u} \in U$ tal que:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in U_0 \quad (\text{III-37})$$

III.4 Planteamiento básico de XFEM

III.4.1 Enriquecimiento

Existen problemas estructurales en los que la naturaleza de la solución es discontinua o bien lo son sus derivadas. El comportamiento singular puede mostrarse a nivel local. Podemos distinguir dos tipos de discontinuidades, la fuerte y la débil. Se entiende por discontinuidad fuerte cuando la solución del problema es discontinua en sí y, se llama discontinuidad débil, cuando la discontinuidad tiene lugar en la derivada de la solución. Un ejemplo típico de cada una de ellas es la interfase entre diferentes materiales para el caso de discontinuidad débil y el dominio con grieta para el caso de discontinuidad fuerte.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

En problemas donde la naturaleza de la solución presenta un comportamiento singular, la aproximación por EF estándar no resulta eficiente ya que ésta es polinómica (Strang et ál. [7] y Babuška et ál. [84]) y, por lo tanto, es capaz de reproducir adecuadamente un comportamiento continuo y diferenciable pero no un comportamiento singular, incluso empleando elementos de elevado orden polinómico o mallas muy finas.

Considérese la aproximación clásica de la variable de campo \mathbf{u} en el método de elementos finitos:

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_j \quad (\text{III-38})$$

donde \mathbf{u}_j representa los grados de libertad del nodo j . También se puede expresar según los términos de las m funciones que definen la base \mathbf{p} :

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{a} = \sum_{k=1}^m p_k \cdot a_k \quad (\text{III-39})$$

donde las incógnitas a_k se determinan a partir de la solución nodal.

Dependiendo de la dimensión del problema y según sea el orden del polinomio completo de la interpolación, la base queda constituida por un determinado conjunto de términos. Por ejemplo, para el caso 2D si se aproxima mediante un polinomio completo de grado 2 (caso del elemento triangular cuadrático), se tiene que \mathbf{p} es:

$$\mathbf{p}^T = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \quad (\text{III-40})$$

Cuando la solución presenta un comportamiento singular, la aproximación dada por la ecuación (III-38) no ofrece buenos resultados. Con la finalidad de mejorar el campo de desplazamiento cuando se aplica el método de EF estándar, se han desarrollado varios métodos que introducen características especiales a la solución dentro del espacio de la aproximación. El método de la partición de la unidad PUM (Babuška et ál. [84]) es el concepto base de todos los métodos desarrollados en este sentido. Algunos ejemplos en los que este método se aplica son los siguientes: el método de elementos finitos con partición de la unidad, PUFEM, (Melenk et ál. [80]), el método de elementos finitos generalizado, GFEM, (Strouboulis et ál. [102] y Strouboulis et ál. [108]) y el método de elementos finitos extendido, XFEM, (Moës et ál. [96] y Belytschko et ál. [109]). Todos estos métodos comparten la propiedad de que funciones de enriquecimiento especiales se añaden a la solución aproximada estándar, tratando de preservar en todo momento la partición de la unidad.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

Existen dos formas de enriquecer la aproximación: enriquecer el vector de las funciones que constituyen la base, modificando así el conjunto dado en la ecuación (III-40) o bien, enriquecer la aproximación añadiendo términos en la ecuación (III-38). La primera idea recibe el nombre de enriquecimiento intrínseco y la segunda enriquecimiento extrínseco. A continuación se describen estos dos métodos.

Enriquecimiento intrínseco

El enriquecimiento intrínseco ha sido empleado en el contexto de los elementos finitos sin malla (*Meshfree*) por Liu et ál. [87]. En XFEM ha sido planteado en el trabajo de Fries y Belytschko [133]. La idea básica del método consiste en incluir las funciones de enriquecimiento sin añadir nuevos grados de libertad al problema. Para ello, el dominio completo se descompone en dos subdominios que se superponen en una zona de transición determinada. Los detalles de esta descomposición se pueden consultar en [133]. Se define una única función de forma por nodo que resulta ser la estándar para el caso de nodos no enriquecidos y una función de forma especial, basada en el método *Moving Least-Square* (MLS) para el caso de los nodos cercanos a la discontinuidad. En el caso de la zona de transición se realiza un acoplamiento de las funciones de forma. En este método se logra también satisfacer la partición de la unidad.

Las principales ventajas de este método son que no añade nuevas incógnitas a la formulación estándar de EF, no existen problemas derivados de enriquecimiento parcial en los elementos de transición y el número de condicionamiento de las matrices del problema se mantiene del orden del método clásico de EF. La principal desventaja de este método es el coste computacional asociado al cálculo de las funciones del MLS y la integración numérica.

Enriquecimiento extrínseco

En el método de la partición de la unidad (PUFEM), introducido por Melenk y Babuška [80], se enriquece la solución aproximada utilizando términos de la solución analítica conocidos *a priori*. De este modo, la aproximación queda:

$$\mathbf{u}_{ef}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i + \text{términos de enriquecimiento} \quad (\text{III-41})$$

donde N_i son las funciones de forma de EF estándar. El método PUFEM utiliza un tipo de enriquecimiento extrínseco global.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

Para un punto general \mathbf{x} dentro de un elemento, la aproximación en desplazamientos se obtiene como:

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \left(\mathbf{u}_i + \sum_{k=1}^m g_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_{ik} \right) \quad (\text{III-42})$$

donde el término $g_k(\mathbf{x})$ representa la función de enriquecimiento k y \mathbf{a}_{ik} son los grados de libertad por nodo y función de enriquecimiento. $N_i(\mathbf{x})$ son las funciones de forma del método de elementos finitos clásico. Las funciones de enriquecimiento deben ser capaces de representar el comportamiento singular de la solución y, evidentemente, serán diferentes en función del problema que se resuelva.

Cuando la zona enriquecida no intersecta la frontera externa del dominio, las condiciones de contorno esenciales no afectan a los grados de libertad correspondientes al enriquecimiento. Sin embargo, cuando esto sucede, para facilitar la imposición de las condiciones de contorno de *Dirichlet* de forma que \mathbf{u}_i represente el valor de la solución nodal, es frecuente modificar las funciones de enriquecimiento restando el valor de la función calculada en el nodo. De este modo, la ecuación (III-42) se escribiría:

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \left(\mathbf{u}_i + \sum_{k=1}^m (g_k(\mathbf{x}) - g_k(\mathbf{x}_i)) \cdot \mathbf{a}_{ik} \right) \quad (\text{III-43})$$

También es posible utilizar el método de los multiplicadores de *Lagrange* para imponer las condiciones de contorno esenciales.

Este tipo de enriquecimiento es a nivel global y por ello no resulta atractivo desde el punto de vista computacional. Pero el concepto de la partición de la unidad en sí, ha sido el fundamento sobre la que se han propuestos otros métodos de enriquecimiento local, como elementos finitos extendidos [96, 109].

El método XFEM estándar utiliza un enriquecimiento local extrínseco, por lo tanto, necesariamente existirá un sub-dominio de transición que enlaza con el sub-dominio no enriquecido. Este es el planteamiento utilizado en la Tesis.

En el método XFEM, la aproximación en desplazamientos del método estándar de EF, se enriquece con dos tipos de funciones. Por un lado es necesario representar la discontinuidad de la solución cuando un elemento es intersectado completamente por la grieta, lo cual puede realizarse con la función Heaviside. Además, es necesario poder representar correctamente la singularidad del extremo de grieta.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

La función Heaviside modificada, $H(\mathbf{x})$, toma el valor -1 en la región del dominio situada a un lado de la grieta y +1 en el lado opuesto. Se define como muestra la ecuación (III-44), donde $\phi(\mathbf{x})$ es la función distancia signada a la grieta:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \phi(\mathbf{x}) < 0 \\ +1 & \text{si } \phi(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III-44})$$

El conjunto de funciones que pueden representar con mayor precisión la solución cerca del extremo de grieta son denominadas *branch functions* y están basadas en las funciones de tensiones de *Westergaard*. Oden y Duarte [89] introdujeron las funciones que aparecen en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{tip-x}} &= \left\{ \sqrt{r} \left[\left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right], \sqrt{r} \left[\left(\kappa + \frac{3}{2} \right) \text{sen} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \mathbf{L}_{\text{tip-y}} &= \left\{ \sqrt{r} \left[\left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \text{sen} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right], \sqrt{r} \left[\left(\kappa - \frac{3}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{III-45})$$

donde r y θ son las coordenadas polares del extremo de grieta. Para definir este sistema local de coordenadas, se considera el extremo de grieta, \mathbf{x}_g , como origen del sistema de referencia (véase *Figura III-9*), κ la constante de *Kolosov* y ν es el coeficiente de *Poisson*.

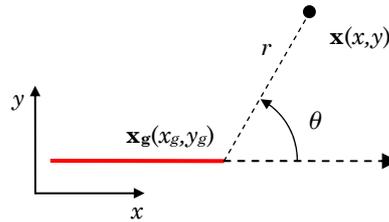


Figura III-9. Coordenadas polares de extremo de grieta. Problema 2D.

Los vectores $\mathbf{L}_{\text{tip-x}}$ y $\mathbf{L}_{\text{tip-y}}$ contienen las funciones de enriquecimiento alrededor del extremo de grieta en las direcciones x e y respectivamente.

Belytschko y Black [94] utilizaron otras funciones:

$$\{F_l(r, \theta)\} \equiv \left\{ \sqrt{r} \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right), \sqrt{r} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right), \sqrt{r} \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \text{sen}(\theta), \sqrt{r} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \text{sen}(\theta) \right\} \quad (\text{III-46})$$

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

Éstas son las funciones de enriquecimiento empleadas en ambas direcciones x e y . Para el caso bidimensional, *Oden* introduce 4 funciones de enriquecimiento por nodo mientras que *Belytschko* introduce 8 funciones adicionales por nodo.

En el trabajo de Park et ál. [137] se realiza un análisis comparativo entre estos dos conjuntos de funciones de enriquecimiento. Se considera un problema de solución conocida y se analiza el resultado para diferentes configuraciones de la posición del extremo de grieta con respecto a la topología de la malla. La precisión y la velocidad de convergencia que se obtiene son muy similares, si bien, las funciones de *Belytschko* muestran una precisión ligeramente mayor. No obstante, los autores emplean las funciones de *Oden* porque en los análisis tridimensionales, supone una reducción en el coste computacional ya que hay que integrar cuatro funciones singulares menos, por nodo enriquecido.

En el dominio discreto, la aproximación de la solución en cada elemento estará dada por la ecuación (III-47):

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) \cdot H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}_j + \sum_{k \in K} N_k^1(\mathbf{x}) \cdot \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_{kl} \cdot F_l(\mathbf{x}) \right) \quad (\text{III-47})$$

Si se tiene en cuenta la función de enriquecimiento desplazada tal y como se ha explicado en la ecuación (III-43), la ecuación (III-47) se reescribiría como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) \cdot (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_j)) \cdot \mathbf{b}_j + \\ & + \sum_{k \in K} N_k^1(\mathbf{x}) \cdot \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_{kl} \cdot (F_l(\mathbf{x}) - F_l(\mathbf{x}_k)) \right) \end{aligned} \quad (\text{III-48})$$

donde $N_i(\mathbf{x})$ es la función de forma asociada al nodo i (lineal o cuadrática en esta Tesis). Los coeficientes \mathbf{u}_i son los grados de libertad nodales de acuerdo con el planteamiento de elementos finitos estándar (coincidirá con el valor del desplazamiento nodal para el caso de un nodo no enriquecido). Los coeficientes \mathbf{b}_j son los grados de libertad asociados a la función Heaviside, $H(\mathbf{x})$. $N_k^1(\mathbf{x})$ representan las funciones de forma lineales estándar y se utilizan para conseguir partición de la unidad en las funciones singulares, y \mathbf{c}_{kl} son los correspondientes grados de libertad.

Para lograr la partición de la unidad asociada a la función Heaviside, se utilizan las mismas funciones de forma que en la interpolación estándar, tal y como recomienda Laborde [129]. En algunos problemas en los que la discontinuidad llega cerca de nodos en los que se aplican condiciones de

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

contorno de *Dirichlet*, es necesario desplazar el valor de la función de enriquecimiento, tal como se expresa en la ecuación (III-48).

La definición de los conjuntos K y J de acuerdo con el trabajo de Moës et ál. [96], viene dada por la ecuación (III-49):

$$\begin{aligned} K &= \{k \in N : \mathbf{x}_g \in \omega_k\} \\ J &= \{j \in N : \omega_j \cap C \neq \emptyset, j \notin K\} \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

donde \mathbf{x}_g representa las coordenadas del punto extremo de grieta, mediante C se define la geometría de la propia grieta, $N = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ el conjunto formado por todos los nodos de la malla y $\omega_j = \text{soporte}(n_j)$ representa la zona de influencia del nodo j que consiste en la unión de todos los elementos que contienen a n_j .

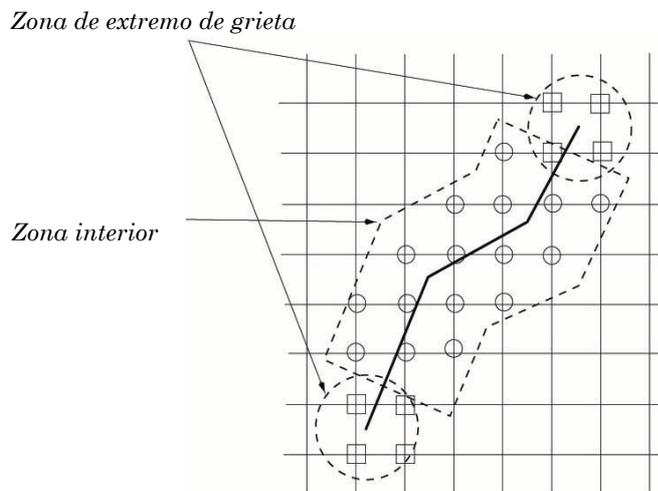


Figura III-10. Ejemplo de enriquecimiento en XFEM (grieta con dos extremos).

De la ecuación (III-49) se deduce que un nodo cuya zona de influencia sea completamente cortada por la geometría de la grieta, se enriquece con la función Heaviside, $H(\mathbf{x})$. Si un nodo cuya zona de influencia contiene al extremo de grieta pero no es completamente cortada, entonces se enriquece con las funciones del primer término del campo asintótico, $F_1(\mathbf{x})$, ver Figura III-10, este tipo de enriquecimiento es el estándar o topológico.

Los conjuntos J y K pueden ser determinados utilizando el *Level Set Method*, técnica descrita en el apartado III.2.2.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

III.4.2 Integración numérica

III.4.2.1 Introducción

La solución en problemas donde existe una grieta se caracteriza por ser discontinua en ambas caras de la grieta y estar gobernada por funciones singulares y discontinuas (ver (III-46)) en el frente de grieta.

La integración mediante la cuadratura de *Gauss-Legendre* es muy empleada en el análisis por elementos finitos para evaluar numéricamente varias integrales sobre el dominio de interés. Cuando el integrando es un polinomio la cuadratura de *Gauss* puede llegar a ser exacta. Sin embargo para el caso de funciones discontinuas o singulares, el resultado puede ser bastante impreciso incluso aumentando significativamente el número de puntos de integración.

Cuando se emplea el método de EF en la resolución de problemas de MFEL la malla se adapta a la geometría de la grieta con lo que es posible utilizar un esquema de integración como el de *Gauss-Legendre* para el caso de los elementos cuyas caras están contenidas en los planos de grieta. En este caso, dentro de cada elemento se interpola una solución continua a ambos lados de la grieta. Para el caso de los elementos que contienen el frente de grieta, es frecuente el empleo de los llamados elementos *singulares* como se ha descrito en el apartado II.5. Este tipo de elementos se emplean para mejorar la modelización de la singularidad.

En el método XFEM para la resolución de problemas de MFEL, la malla no se adapta a la geometría de la grieta sino que ésta es representada añadiendo términos conocidos a priori de la solución analítica al campo de aproximación clásico de EF. Por lo tanto, es necesario integrar de manera precisa términos no polinómicos propios de la naturaleza del problema y representar la discontinuidad de la solución en el dominio intersectado por los planos de la grieta.

En la formulación de las matrices de rigidez de los elementos enriquecidos con las funciones del campo de desplazamiento asintótico de extremo de grieta, existen términos singulares cuya integración numérica ha sido objeto de varios trabajos [96], [107], [120], [121], [128], [129], [131].

Las funciones que se emplean para enriquecer el campo singular de extremo de grieta son de la forma que muestra la ecuación (III-50):

$$F(r, \theta) = \sqrt{r} \cdot f(\theta) \quad (\text{III-50})$$

donde la función $f(\theta)$ es el producto de funciones armónicas. La singularidad se presenta en los términos de la matriz de rigidez de elemento que se obtienen

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

por el producto del gradiente de dos funciones de interpolación, Laborde [129] ver ecuación (III-51).

$$\nabla(F_i N_j) \cdot \nabla(F_k N_l) \quad (\text{III-51})$$

Si se desarrollan estos productos aparecen términos singulares del estilo: $\{1/r, 1/\sqrt{r}\}$ multiplicados por funciones armónicas, más los términos propios de las funciones de forma.

En la Tesis Doctoral de Dolbow [95] se presentan dos métodos de integración en XFEM. Tal como indica, el algoritmo de selección de nodos y el de integración deben estar muy relacionados. El primer método consiste en subdividir el elemento intersectado por la grieta en sub-triángulos cuyos lados se adapten a las caras de la grieta y el segundo método se basa en subdividir el elemento intersectado en cuadriláteros sin considerar la grieta como frontera.

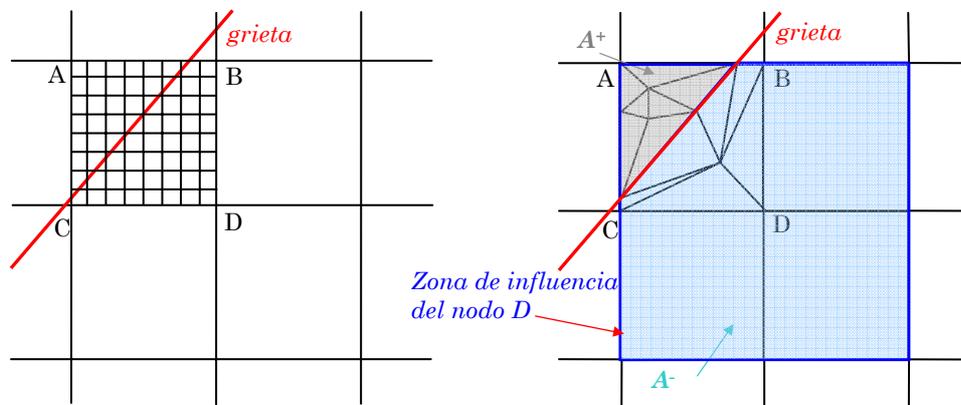


Figura III-11. Dos métodos de subdivisión de los elementos cortados por la grieta. Izquierda, sub-cuadriláteros; derecha, sub-triángulos.

Ambos métodos se han representado esquemáticamente en la Figura III-11. Dolbow indica que la subdivisión en triángulos adaptados a la geometría de la grieta proporciona resultados más precisos que cuando se realiza en cuadriláteros no adaptados. No obstante, la segunda propuesta resulta muy interesante por la sencillez de implementación, además, en caso de tener materiales con comportamiento no lineal, la subdivisión en triángulos no resulta práctica. Cuando las ecuaciones constitutivas son función de la carga (caso plástico o viscoelástico) y se desea simular el crecimiento de grieta, la solución en un instante dado necesita los resultados en un momento anterior. Por lo tanto, es necesario un algoritmo que permita mapear la solución. La

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

regeneración de nuevos subtriángulos resulta un claro inconveniente que, por otro lado, no existe cuando se subdivide con cuadriláteros.

Para el caso de subdivisión en triángulos, los elementos que resultan partidos por la grieta pueden quedar subdivididos de forma que se cree un subdominio excesivamente pequeño. La definición de puntos de integración en este subdominio puede conducir a problemas de mal condicionamiento.

Para solucionar este inconveniente, en el trabajo de Dolbow [95] se establece una tolerancia por debajo de la cual el nodo no es enriquecido. Se definen A^+ y A^- como las porciones de la zona de influencia del nodo que queda por arriba y por debajo de la grieta respectivamente (véase *Figura III-11* derecha). Si el valor de la relación $A^+/(A^++A^-)$ o $A^-/(A^++A^-)$ es menor que un valor de tolerancia dado, el nodo D no debe ser enriquecido por posibles problemas de integración. Dolbow [95] propuso una tolerancia de un 0.01% aunque se debe tener en cuenta el problema específico que se resuelve. La misma idea es utilizada en Daux et ál. [100] en problemas con grietas ramificadas y con el mismo valor de tolerancia.

La idea de subdividir los elementos intersectados por la grieta en subdominios de integración, también es aplicada por Moës et ál. [96] y Sukumar et ál. [120] donde se hace coincidir el borde del subdominio con la discontinuidad.

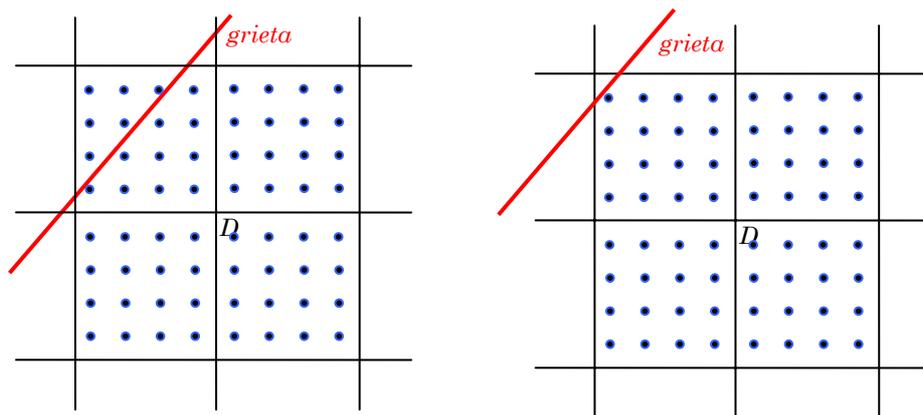


Figura III-12. Criterio para enriquecer un nodo basado en la existencia de algún punto de Gauss en A^+ y A^- . Izquierda, nodo D es enriquecido; derecha, nodo D no es enriquecido.

Para el caso de subdividir en cuadriláteros, un nodo se debe enriquecer si en A^+ y A^- se incluye al menos un punto de integración. Bajo este criterio no es necesario definir una tolerancia ya que viene dada de manera implícita al seleccionar el número de subcuadriláteros en el que se va a dividir el elemento afectado por la grieta. En la *Figura III-12* izquierda, el nodo D sí debe ser

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

enriquecido mientras que en la *Figura III-12* derecha, aunque la grieta corta el elemento, el nodo *D* no debe ser enriquecido porque no hay ningún punto de *Gauss* en el área sobre la grieta común a la zona de influencia del nodo.

Cuando la aproximación nodal está enriquecida con la función Heaviside, realizar una integración por subdominios, permite tratar funciones continuas dentro de cada subelemento. Dentro de estos subdominios sí resulta apropiado utilizar el esquema de integración de *Gauss-Legendre* (ver *Figura III-16*).

Ventura [132] propone un método para integrar los elementos enriquecidos con la función Heaviside (ver ecuación (III-44)) sin necesidad de subdividir el dominio. Analiza las expresiones de la matriz de rigidez de un elemento intersectado y demuestra que es posible encontrar un polinomio equivalente que, al integrarlo, dé exactamente el mismo resultado que integrar los elementos dividiendo en subdominios. *Ventura* obtiene estos polinomios para problemas con grieta y discontinuidad en el material. En el caso de grietas, obtiene los polinomios equivalentes para 1D, 2D (triángulos y cuadriláteros) y 3D (tetraedros).

Los elementos que contienen el frente de grieta merecen especial atención ya que las funciones de enriquecimiento añaden términos singulares y discontinuos a la aproximación. Las funciones singulares como $1/r, 1/\sqrt{r}$ no deben integrarse con la cuadratura estándar ya que los resultados no son buenos. Esto lo podemos constatar en el próximo ejemplo numérico. Laborde [129] propone un esquema de integración para los elementos que contienen el frente de grieta, basado en una transformación de coordenadas de los puntos de integración de manera que queden concentrados alrededor de la singularidad siguiendo una distribución polar centrada en el extremo de grieta. Este procedimiento fue llamado por los autores “integración casi-polar” (véase *Figura III-13*).

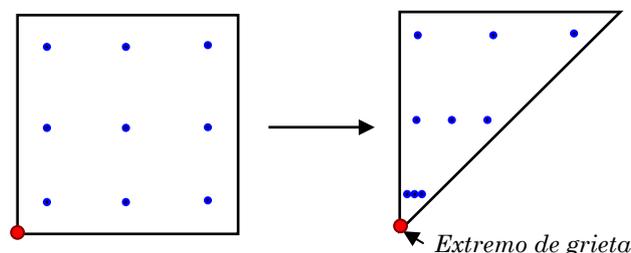


Figura III-13. Transformación del método de integración para elementos cuadriláteros en un método de integración para elementos triangulares para funciones de extremo de grieta.

De manera independiente, Béchet [128] propone un método de integración que también consigue eliminar los términos singulares del integrando. Para ello

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

define un elemento triangular específico a partir del elemento cuadrilátero de referencia (ver *Figura III-14*). Ello lo consigue a través de tres transformaciones o cambios de variable que le permiten finalmente, expresar el integrando en función de términos polinómicos y suaves. Aunque este método esencialmente funciona por el mismo principio que el propuesto por Laborde [129], resulta bastante más laborioso de implementar puesto que hay que realizar varias transformaciones. Asimismo, este procedimiento resulta difícil de extender a problemas tridimensionales.

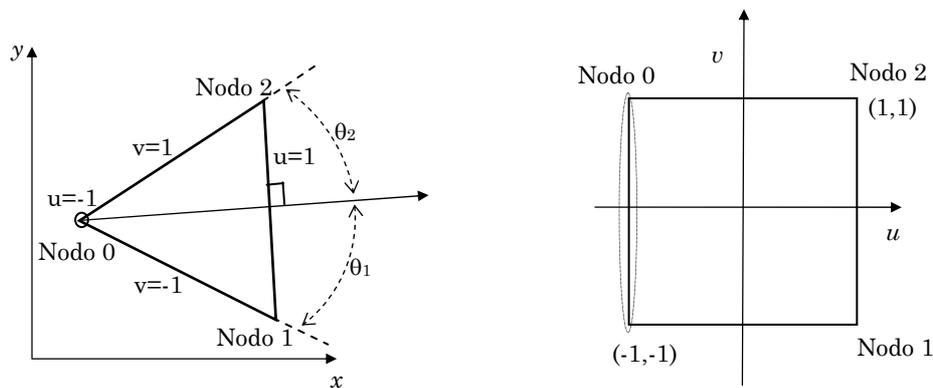


Figura III-14. Elemento triangular y elemento cuadrilátero de referencia de Béchet [128].

Otros trabajos como los de Strouboulis et ál. [103] proponen emplear el algoritmo Dcuhre, desarrollado por Berntson [64]. Este algoritmo consiste básicamente en una estrategia de subdivisión, que elige en cada instante, la subregión con mayor error estimado. El algoritmo utiliza una cuadratura de setenta y cinco puntos de integración en cada subregión para el cálculo de las integrales y control de error. El error se calcula a partir de la diferencia entre dos reglas de integración. El inconveniente de este algoritmo es que es válido únicamente para cuadriláteros y hexaedros.

Recientemente Ventura et ál. [138] han desarrollado un esquema de integración alternativo a la técnica casi-polar. Se basa en transformar la integral de dominio utilizada para calcular las matrices de rigidez de elemento en una integral de contorno equivalente. Para evaluar numéricamente la integral, los puntos de integración se disponen en la frontera de los elementos que tienen todos sus nodos enriquecidos con las funciones del campo asintótico de extremo de grieta (véase *Figura III-15*).

Ventura realiza una comparación de su técnica con la casi-polar y con la integración estándar con subdivisión de dominio mostrando mayor precisión con menor número de puntos de integración. Este método es aplicable únicamente a los elementos que tienen todos sus nodos enriquecidos y, además, los grados de libertad de los nodos enriquecidos de un elemento deben ser

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

iguales, es decir, para el caso de un cuadrilátero lineal, los coeficientes c_{kl} de la ecuación (III-48) deben satisfacer: $c_{1l} = c_{2l} = c_{3l} = c_{4l}$ para todas las funciones de enriquecimiento F_l .

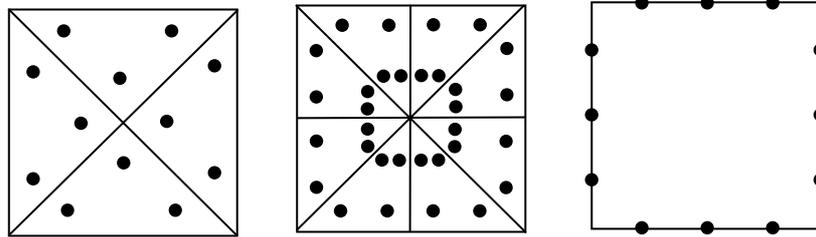


Figura III-15. Localización de los puntos de integración según diferentes esquemas: izquierda, método de integración por subdominios con cuatro subdominios y cuadratura de segundo orden para triángulo; centro, método de integración casi polar con ocho subdominios y transformación de coordenadas del elemento cuadrilátero de referencia con integración de segundo orden; derecha, método de integración en el contorno con una cuadratura de quinto orden en cada borde del elemento.

A continuación se describe la estrategia de integración seguida en esta Tesis. La orientación de la grieta en los elementos que interseca puede ser arbitraria, por lo tanto para tener en cuenta la solución en cada lado del plano de grieta, los elementos afectados son partidos en varios subdominios de integración (triángulos o cuadriláteros) de forma que sus bordes queden alineados con los planos de grieta (Moës et ál. [96] y Sukumar et ál. [120]), (véase *Figura III-16*).

Una vez realizada esta subdivisión podemos encontrarnos en los siguientes casos: si un elemento partido no es enriquecido con funciones singulares asociadas con el campo asintótico de desplazamientos en extremo de grieta, entonces se utiliza una cuadratura de integración estándar en cada una de las particiones. Si, en cambio, un elemento es enriquecido con las funciones singulares pero no contiene el extremo de grieta, se emplea una cuadratura de *Gauss* de 5×5 puntos para sub-cuadriláteros y cuadratura de *Gauss* de 13 puntos para sub-triángulos en el caso de elementos lineales (15×15 y 73 puntos de *Gauss* respectivamente para el caso de elementos cuadráticos). En este grupo se tienen incluidos los elementos de transición.

Si el elemento contiene el extremo de grieta, entonces se emplea la integración casi-polar descrita por Laborde [129] para cada sub-triángulo que resulta de la partición, con 5×5 puntos de *Gauss* para el caso de lineales y 15×15 puntos de *Gauss* para el caso de cuadráticos.

En el caso del elemento que contiene el extremo de grieta, aunque los términos armónicos no crean problemas de integración, la función $\text{sen}(\theta)$ crea discontinuidad en las caras de grieta.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

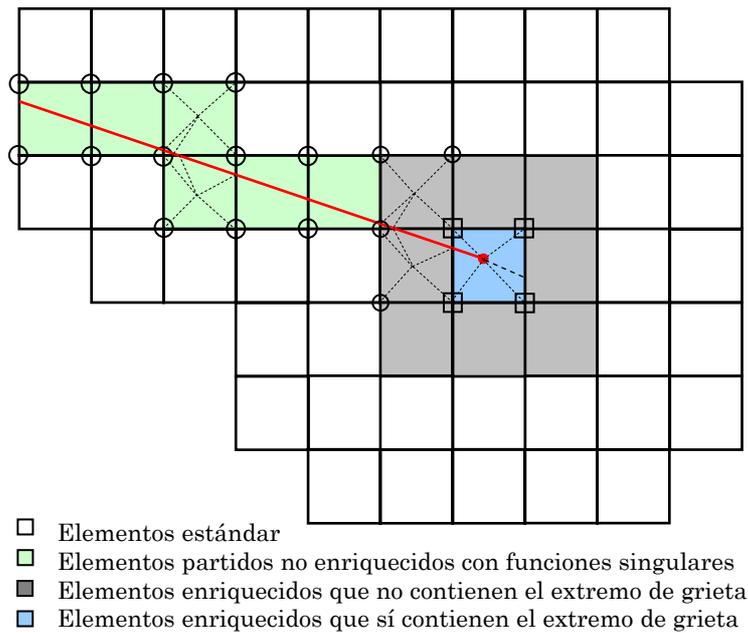


Figura III-16. Subdivisión de los elementos enriquecidos para la integración numérica.

III.4.2.2 Integración casi-polar

En el cálculo de las matrices de rigidez de los elementos que contienen el frente de grieta existen términos singulares que no pueden ser integrados correctamente con la cuadratura de *Gauss-Legendre* (ver ecuación (III-51)). En la introducción se han expuesto algunas técnicas propuestas para solucionar este problema. Además de las funciones singulares, es necesario integrar convenientemente las funciones armónicas que no son singulares pero sí introducen discontinuidad en el campo de la solución. En concreto la función $\sin(\theta)$ introduce discontinuidad en las caras de grieta. Por este motivo se subdividen los elementos en los que esté contenido el frente de grieta en subdominios triangulares. La subdivisión se realiza, en primer lugar, extendiendo virtualmente la grieta hasta “partir” el elemento. Los vértices de los subtriángulos se hacen coincidir con los nodos y el propio extremo de grieta.

En la *Figura III-17* se muestra, para un ejemplo bidimensional, varias posibilidades de subdivisión de elemento en función de la posición relativa en la que quede el extremo de la grieta. La subdivisión es un requisito conveniente para la integración numérica pues se necesita definir subdominios de integración que no contengan internamente la discontinuidad.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

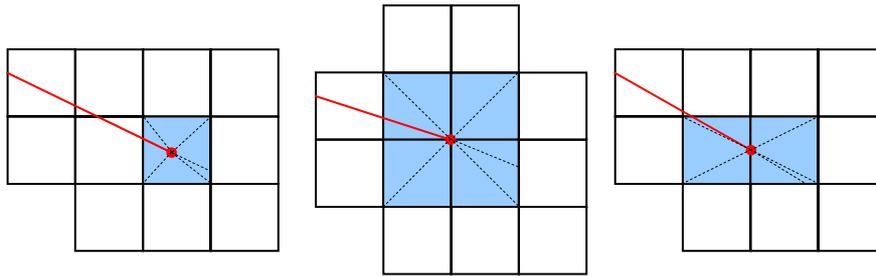


Figura III-17. Partición de los elementos para integración numérica, en función de la localización del extremo de grieta en la malla: izquierda, interior de elemento; centro, nodo; derecha, lado de elemento.

La técnica de integración casi-polar desarrollada por Laborde [129], muestra unos resultados buenos y además resulta sencilla de implementar y trasladar a los problemas tridimensionales. En la integración casi-polar es posible integrar la ecuación (III-51) evitando la singularidad.

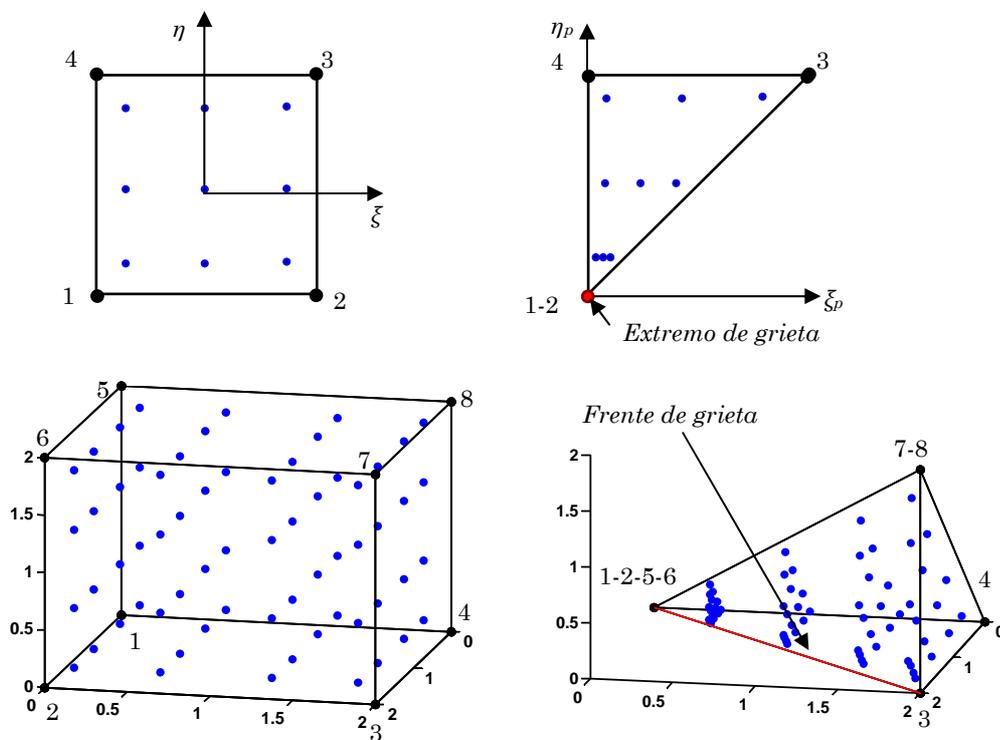


Figura III-18. Transformación de coordenadas: integración casi polar: problema 2D (arriba), problema 3D (abajo).

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

A partir de los puntos de integración del elemento de referencia, cuadrilátero para el caso 2D o hexaedro para el caso 3D, se realiza una transformación de coordenadas que permite concentrar los puntos de integración numérica cerca de la singularidad. Para el caso 2D se colapsan dos nodos en uno solo que se hace coincidir con el extremo de grieta. La nueva disposición de los puntos de integración puede verse en el ejemplo mostrado en la *Figura III-18* (arriba).

En la *Figura III-18* (abajo) se muestra un ejemplo de transformación de coordenadas para el caso hipotético de que el frente de grieta pase por un lado del tetraedro. En este caso colapsa una cara del hexaedro de referencia en un nodo (en el ejemplo de la *Figura III-18* (abajo), la cara definida por los nodos 1, 2, 5 y 6 se colapsa en el nodo 1), y otros dos nodos en uno solo (los nodos 7 y 8 se colapsan en el 7 de la misma figura). De este modo, los puntos de integración se agrupan hacia uno de los lados del tetraedro. En el caso de que sea un lado del elemento el que coincida con el frente de grieta, la agrupación de puntos resultará más eficiente que en el caso en que sea un solo nodo el que esté sobre el frente de grieta.

La transformación de coordenadas que se aplica para obtener la nueva posición de los puntos de integración en triángulos, se tiene en la ecuación (III-52):

$$\begin{aligned}\eta_P &= (\eta + 1) \\ \xi_P &= \frac{1}{2} \cdot (\xi + 1) \cdot (\eta + 1)\end{aligned}\tag{III-52}$$

Donde ξ y η representan las coordenadas locales del cuadrilátero de referencia y ξ_P y η_P representan el sistema de coordenadas del triángulo que se obtiene al colapsar dos nodos del cuadrilátero (véase *Figura III-18* (arriba)). En la *Figura III-18* (arriba), los nodos superpuestos 1 y 2, se corresponden con el vértice del triángulo que se hace coincidir con el extremo de grieta.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_P}{\partial \xi} & \frac{\partial \eta_P}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi_P}{\partial \eta} & \frac{\partial \eta_P}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\eta + 1) & 0 \\ \frac{1}{2}(\xi + 1) & 1 \end{bmatrix}\tag{III-53}$$

$$|J| = \frac{1}{2} \cdot (\eta + 1)\tag{III-54}$$

En las ecuaciones (III-53) y (III-54) se presenta la matriz jacobiana de la transformación y el jacobiano respectivamente.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

Para el caso 2D, las coordenadas de área se calculan teniendo en cuenta esta transformación:

$$\begin{aligned}L_1 &= 1 - \frac{1}{2} \cdot (\eta + 1) \\L_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\xi + 1) \\L_3 &= 1 - L_1 - L_2 = \frac{1}{2} \cdot (\eta - \xi)\end{aligned}\tag{III-55}$$

Donde (ξ, η) son las coordenadas del elemento cuadrilátero de referencia.

En el trabajo de Laborde [129] se muestra la eficiencia de este procedimiento de integración. Con el objeto de analizar las ventajas que presenta, a continuación se muestra un ejemplo numérico en el que se comparan los resultados obtenidos mediante diferentes procedimientos de integración. A la vista de los buenos resultados obtenidos cuando se emplea la integración casi-polar, éste es el esquema de integración empleado en los análisis que se muestran en esta Tesis.

III.4.2.3 Ejemplo numérico

Se pretende analizar la precisión de diversas estrategias de integración numérica en la modelización del problema mediante XFEM y demostrar las ventajas de la integración casi-polar. Para ello se halla la norma de la matriz de rigidez \mathbf{k}^e de un elemento que contiene el extremo de grieta mediante distintos procedimientos de integración y se compara con un valor de referencia que previamente deberá ser calculado. La norma considerada para poder comparar magnitudes escalares se ha obtenido como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todos los términos de la matriz. Este análisis es similar al realizado por Laborde [129] aunque en él no se especifica claramente qué tipo de norma se ha empleado. Las estrategias de integración comparadas son las siguientes:

- división regular en triángulos de los elementos que contienen el extremo de grieta:
 - integración estándar en triángulo: 7 puntos de *Gauss*,
 - integración estándar en triángulo: 12 puntos de *Gauss*.

Cada análisis se corresponde con un incremento del número de divisiones, para el caso de 7 puntos de integración de 0 hasta 7 divisiones y para el caso de 12 puntos de 0 hasta 6 divisiones con incrementos unitarios y un análisis adicional

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

con 10 divisiones y 73 puntos de integración. Un ejemplo de cómo se realiza la subdivisión se tiene en la *Figura III-19*.

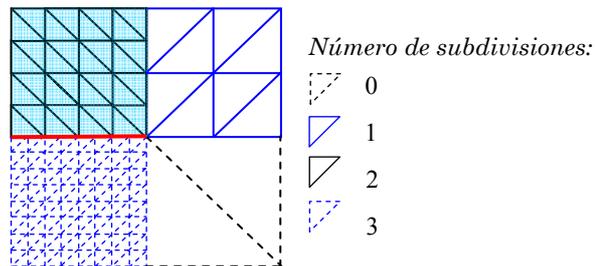


Figura III-19. Ejemplos de subdivisión regular en triángulos para los elementos que contienen el extremo de grieta.

- Integración casi-polar en elementos que contienen el extremo de grieta. En cada análisis se aumenta la cuadratura de integración del cuadrilátero de referencia: 2x2, 3x3, 4x4, 5x5 y 15x15.

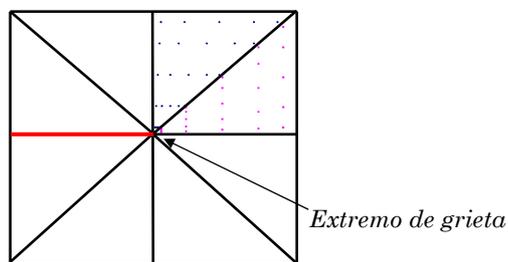


Figura III-20. Ejemplo de integración casi polar en uno de los elementos que contienen al extremo de grieta. Cuadratura 5x5.

La matriz de rigidez de referencia considerada se ha obtenido del análisis en el que se han realizando 9 subdivisiones regulares en triángulos e integrado los que contienen al extremo de grieta mediante el procedimiento de integración casi polar con 15x15 y el resto en 12 puntos de *Gauss*.

En la *Figura III-21* se representa el error relativo en la norma de la matriz \mathbf{k}^e de elemento frente al número de puntos de integración. A la vista de los resultados, el método de integración casi-polar presenta una velocidad de convergencia superior al procedimiento de subdivisión e integración estándar, para los dos casos estudiados de 7 y 12 puntos de *Gauss*. Para lograr valores de error similares al obtenido con la integración casi polar con 15x15 puntos de integración, mediante subdivisión e integración estándar, serían necesarias 10 subdivisiones con 73 puntos de *Gauss* en cada triángulo. Aún así, en este segundo caso, el número total de puntos de integración resulta significativamente mayor.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

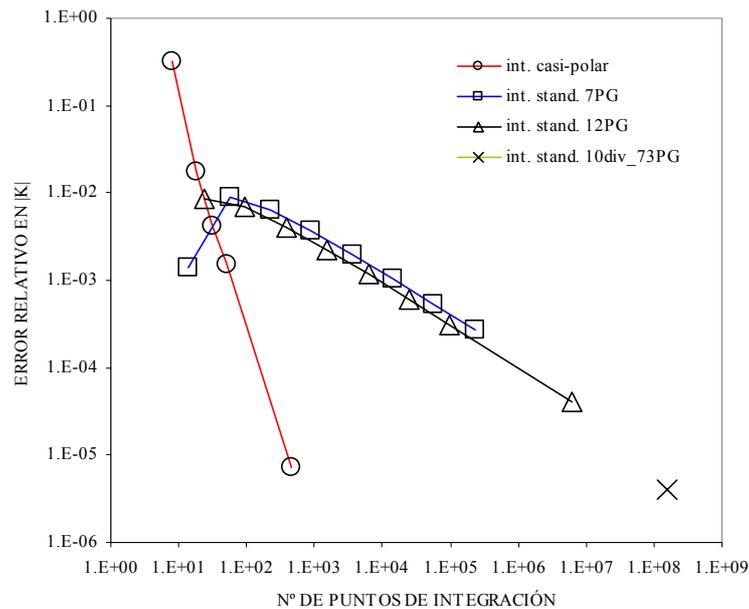


Figura III-21. Convergencia del error en norma de la matriz de rigidez de elemento frente al número de puntos de integración.

Puesto que en este ejemplo la distribución de los puntos de integración presenta doble simetría, el número de puntos de integración del eje de abscisas de la Figura III-21 se corresponde con una cuarta parte del elemento.

III.4.3 Velocidad de convergencia

III.4.3.1 Introducción

En el apartado II.4.1 se define velocidad de convergencia, s , como la pendiente (con signo contrario) de la curva que se obtiene al representar el error en norma energética frente al número de grados de libertad en un diagrama logarítmico-logarítmico.

La convergencia en la versión h del método de EF para resolución de problemas con solución suave ($\lambda > 1$) y refinamiento uniforme o cuasiuniforme, alcanza el valor de la velocidad óptima. Esto no sucede cuando el problema tiene una singularidad. En tal caso, la velocidad de convergencia se ve condicionada por el orden de la singularidad y no mejora aumentando el orden del polinomio del elemento.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

El método XFEM aplicado a MFEL permite obtener resultados más precisos sin tener que usar mallas muy refinadas puesto que las funciones de enriquecimiento son capaces de reproducir el campo asintótico de desplazamientos en el extremo de grieta. Por este motivo también cabría esperar que la velocidad de convergencia óptima fuera alcanzada con un refinamiento uniforme (Strang y Fix [7]) tal y como ocurre cuando se utiliza el método de elementos finitos convencional en problemas de solución suave. Esto, sin embargo, no ocurre, la velocidad de convergencia en norma energética sigue siendo $O(h^{1/2})$ incluso aumentando el orden polinómico (algo que resulta característico de este tipo de problemas en MFEL cuando se emplea refinamiento uniforme y la singularidad no es bien capturada, Stazi et ál. [118]).

En el trabajo de Strouboulis [102] se analiza la convergencia del error en un problema singular para diferentes números de capas enriquecidas manteniendo el orden de las funciones de forma de la aproximación. El resultado muestra que la precisión de los resultados sí mejora a medida que se aumenta el número de capas enriquecidas pero la velocidad de convergencia del error en norma energética permanece constante e igual al resultado obtenido con el método de EF estándar.

Considerando una aplicación sin campos singulares, con discontinuidad en la derivada de la solución, Chessa et ál. [119] demostraron que en XFEM, y en general para cualquier método de enriquecimiento local que cumpla la partición de la unidad, los elementos de transición son muy importantes para conseguir una velocidad de convergencia óptima.

Laborde et ál. [129], en el contexto de la MFEL, muestran que en estos problemas la velocidad de convergencia está por debajo de la óptima, con una pérdida de orden $O(h^{1/2})$ en elementos lineales y cuadráticos. Estos autores argumentan (y muestran resultados numéricos) que, para alcanzar la velocidad de convergencia óptima, la zona de enriquecimiento debe ser independiente del tamaño de elemento, es decir, debe ser una región geométrica fija. Béchet et ál. [128] también utilizan un área fija de enriquecimiento para alcanzar la convergencia óptima.

A continuación se describe la estrategia de enriquecimiento estándar y se muestra un ejemplo numérico que permite llegar a conclusiones análogas a las de *Laborde* y *Béchet*. Al igual que en sus trabajos, aparecen problemas de mal condicionamiento de la matriz de rigidez, derivados del considerable aumento de nodos enriquecidos en un área fija al refinar la malla. En la sección III.5.2 se realiza una revisión bibliográfica de las diferentes propuestas encaminadas a solucionar el problema del mal condicionamiento. Así mismo, se presenta un ejemplo numérico en el que se pone de manifiesto las ventajas de la opción escogida en este trabajo con el fin de reducir el número de condicionamiento de la matriz de rigidez del sistema.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

En los diversos análisis de convergencia que se muestran en la Tesis, la velocidad de convergencia s , se ha calculado según la ecuación:

$$s = \frac{\log(e_{ef}^1) - \log(e_{ef}^2)}{\log(N^1) - \log(N^2)} \quad (\text{III-56})$$

Donde e_{ef}^1 y e_{ef}^2 representan los errores en norma energética estimados en dos análisis 1 y 2. N^1 y N^2 representan los grados de libertad de la malla correspondientes. Este cálculo se realiza por tramos y finalmente se promedia su valor.

III.4.3.2 Enriquecimiento topológico

Como se ha visto hasta ahora, en XFEM se añade a la aproximación estándar $\mathbf{u}_{ef}(\mathbf{x})$ del MEF, otros términos incluidos en la naturaleza de la solución exacta en las cercanías del extremo de grieta o bien en el modelado de la discontinuidad asociada a la propia geometría de la grieta (ver ecuación (III-47)). La definición del conjunto de nodos K que se realiza en el apartado III.4.1 se corresponde con una estrategia de enriquecimiento estándar y que Béchet et ál. [128] denominaron *enriquecimiento topológico*. En este caso el enriquecimiento es función del tamaño de elemento, h , y el conjunto de nodos K es función de la localización del extremo de grieta en la malla (véase *Figura III-22*).

Aunque el método XFEM proporciona resultados más precisos que el método estándar de elementos finitos con refinamiento uniforme, la velocidad de convergencia en XFEM no es la óptima. En este caso, las funciones de enriquecimiento introducidas en la aproximación no están captando correctamente el efecto de la singularidad, lo cual permitiría obtener una velocidad de convergencia como si se tratara de un problema de solución suave.

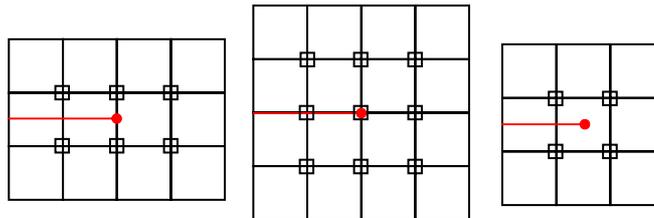


Figura III-22. Conjunto K de nodos que deben enriquecerse con las funciones del campo asintótico de extremo de grieta para el caso de enriquecimiento estándar. Extremo de grieta en: izquierda, lado de elemento; centro, nodo; derecha, interior de elemento.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

III.4.3.3 Ejemplo numérico

El ejemplo que se ha considerado es el problema de una secuencia infinita de grietas colineales representado en la *Figura III-23*. La solución exacta a este problema (supuesta $h = \infty$) se puede encontrar en Kanninen y Popelar [35]. Este problema fue resuelto numéricamente en Fuenmayor et ál. [88].

$$K_{I,ex} = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}} \quad (III-57)$$

$$G_{ex} = \frac{K_{I,ex}^2}{E} (1 - \nu^2)$$

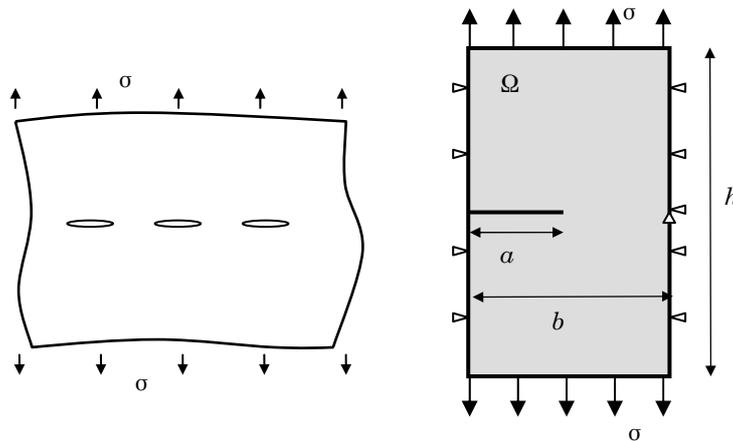


Figura III-23. Problema de secuencia infinita de grietas colineales. Izquierda, modelo; derecha, dominio analizado.

El dominio considerado para el análisis numérico es una placa rectangular de dimensiones $h = 30$ y $b = 2$. La longitud de grieta se supone $a = 1$. La altura h debe ser lo suficientemente grande para que el resultado converja al valor exacto conocido para una altura infinita (Giner [112]). Se supone aplicada una carga de tracción en el infinito de valor $\sigma = 100$. Para modelizar correctamente el dominio completo, las condiciones de contorno son las de simetría indicadas en la *Figura III-23*, además se ha restringido un grado de libertad en la dirección vertical para evitar movimientos de cuerpo rígido.

El material se supone elástico isótropo y homogéneo, con módulo de elasticidad $E = 10^7$ y coeficiente de *Poisson* $\nu = 0.333$. La carga aplicada es $\sigma = 100$ y se asume un estado de deformación plana. Las unidades de las magnitudes son siempre en el Sistema Internacional.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

Con los datos anteriores se tiene una aproximación a la solución exacta:

$$\begin{aligned} G_{\text{ex}} &= 0.000853826662258 && \text{para } a = 0.3 \\ G_{\text{ex}} &= 0.003556444000000 && \text{para } a = 1.0 \\ G_{\text{ex}} &= 0.014813655375539 && \text{para } a = 1.7 \end{aligned} \quad (\text{III-58})$$

Para este ejemplo numérico, la discretización en la dirección x e y es tal que el extremo de grieta coincide con un nodo de forma que el conjunto K resulta ser el mostrado en la *Figura III-22* (centro). Los análisis que se han realizado son los siguientes:

- método clásico de EF,
- método XFEM con enriquecimiento topológico o estándar.

Los resultados obtenidos son para elementos cuadriláteros bilineales y cuadráticos. El número de elementos en las direcciones x e y han sido $b \times [2, 4, 6, 8, 10, 14, 18, 22, 26]$ y $h \times [2, 4, 6, 8, 10, 14, 18, 22, 26]$ respectivamente.

En la *Figura III-24* se representa el error relativo en la tasa de liberación de energía G frente al número de grados de libertad en escala logarítmica para los diferentes análisis realizados.

El método de EF para problemas singulares como los de MFEL, donde la intensidad de la singularidad $\lambda = 1/2$ predomina sobre el orden completo de polinomio, presenta una velocidad de convergencia, s , en energía de deformación y , por tanto en G , de $1/2$ (véase *Figura III-24*). Como se puede observar en los resultados de estos análisis, la velocidad que se alcanza con el método X-FEM con enriquecimiento estándar es la misma que en el método de elementos finitos. Esto se mantiene igualmente al aumentar el orden polinómico de la aproximación.

Todas las rectas muestran la misma pendiente, si bien la precisión de XFEM es superior a FEM especialmente en elementos cuadráticos. En la *Figura III-25* se representa el error relativo en norma energética frente al número de grados de libertad del problema en escala logarítmica para los diferentes casos considerados.

Conforme el trabajo de Szabó y Mehta [18], se tiene que la velocidad de convergencia, s , en norma energética es la mitad que en G que resulta ser la misma que presenta el error en energía de deformación.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

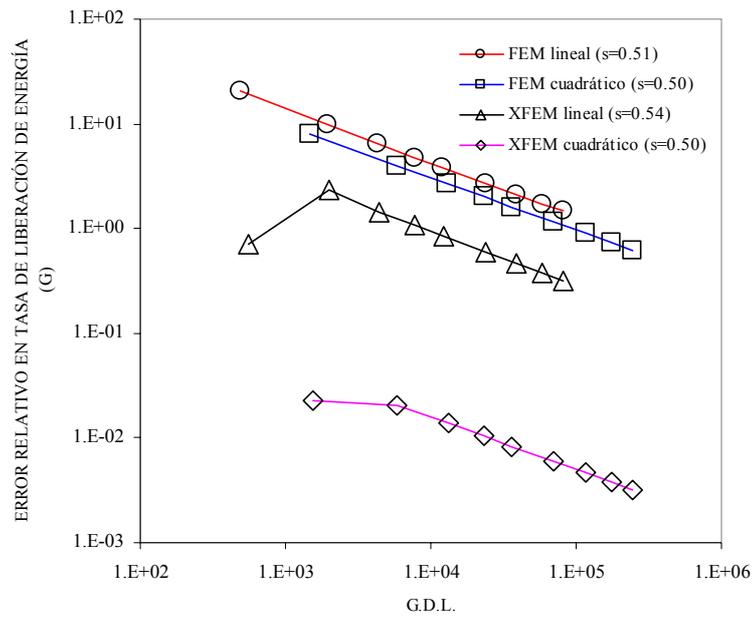


Figura III-24. Convergencia del error relativo en la tasa de liberación de energía G .

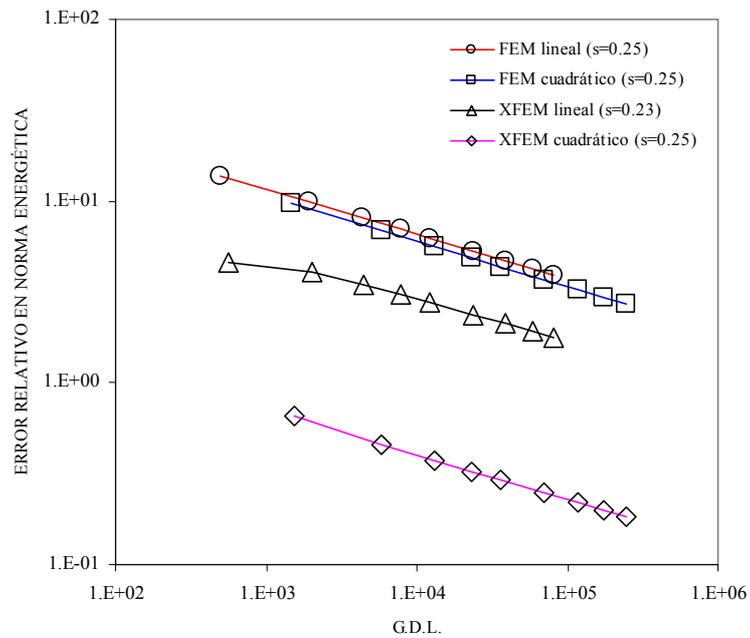


Figura III-25. Convergencia del error relativo en norma energética.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

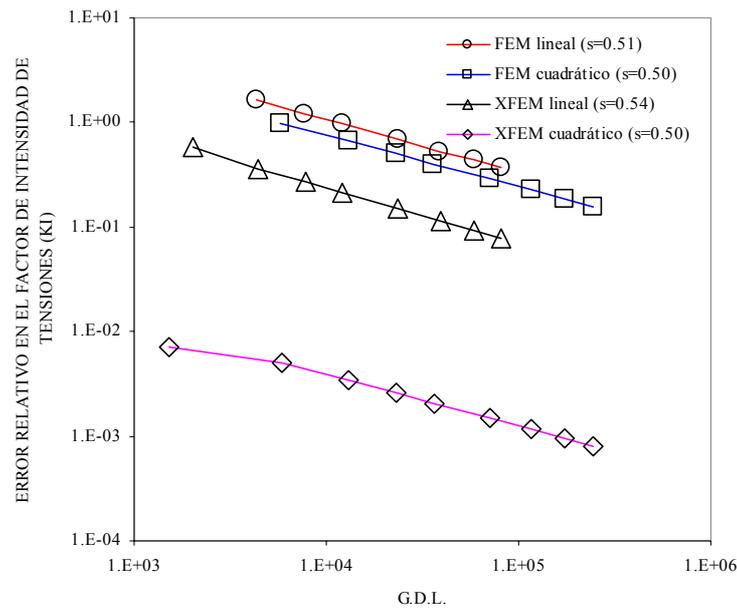


Figura III-26. Convergencia del error relativo en el FIT.

En la *Figura III-26* se representa el error relativo en el factor de intensidad de tensiones frente al número de grados de libertad en escala logarítmica. La velocidad de convergencia, s , en el FIT es la misma que en la tasa de liberación de energía G (Giner [112]).

III.5 Mejoras en formulación XFEM

III.5.1 Enriquecimiento geométrico

En el trabajo de Tong y Piang [6] sobre el análisis de la velocidad de convergencia en problemas que presentan una singularidad en la solución exacta, señalaban la necesidad de extender el uso de elementos especiales más allá de la propia singularidad, en concreto a una capa adyacente al punto singular. Según los autores, la solución no estará bien representada si el uso de los elementos especiales se limita a una zona muy pequeña. En ese caso, si se refina la malla cerca de la singularidad y el tamaño de los elementos tiende a cero, por la misma razón, la capacidad de simular la singularidad también tenderá a cero. Esta reflexión, aunque se realice desde el MEF convencional con uso de elementos singulares, puede extenderse al concepto de enriquecimiento local de la solución en XFEM.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

Béchet et ál. [128] y Laborde et ál. [129], introducen otra estrategia de enriquecimiento que permite definir el conjunto de nodos a enriquecer a partir de un área fija (este método fue llamado enriquecimiento *geométrico* por Béchet et ál. [128]). El enriquecimiento en área fija (ver *Figura III-27*), consiste en definir una región alrededor del extremo de grieta dentro de la cual todos los nodos van a ser enriquecidos con las funciones del campo asintótico de extremo de grieta, independientemente del tamaño de malla y de dónde quede el extremo de grieta en relación con la topología de la malla. Con esta estrategia, la zona a enriquecer es prácticamente independiente del tamaño de elemento.

Laborde et ál. [129], demostraron cómo el enriquecimiento topológico limita la velocidad de convergencia en XFEM a la que se obtiene empleando el MEF para problemas singulares cuando no se consigue reproducir correctamente el efecto de la singularidad. La demostración se realiza para un ejemplo unidimensional pero resulta extensible al problema bidimensional. El valor del radio de enriquecimiento suele tomarse en función de consideraciones geométricas exclusivamente. Un valor habitual es 1/10 veces la dimensión del problema (Laborde et ál. [129]).

Cuando el enriquecimiento con las funciones del campo asintótico de extremo de grieta se realiza en un área fija, puede haber nodos con enriquecimiento Heaviside que se vean incluidos en dicha área, a estos nodos les hemos denominado *nodos mixtos*. En la *Tabla III-1* se muestran los grados de libertad que posee un nodo en 2D y su símbolo en función del enriquecimiento (véase *Figura III-27*).

<i>Función de enriquecimiento</i>	<i>Grados de libertad por nodo</i>	<i>Símbolo</i>
ninguna	2	
$H(\mathbf{x})$	4	○
$F_i(\mathbf{x})$	10	□
$H(\mathbf{x}), F_i(\mathbf{x})$	12	△

Tabla III-1. Grados de libertad nodal para el caso 2D y símbolo en función del enriquecimiento.

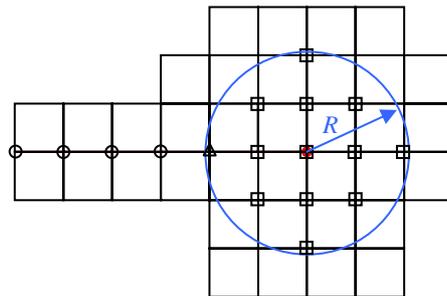


Figura III-27. Enriquecimiento en área fija o geométrico.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

En el ejemplo numérico que sigue se muestran los resultados que confirman la necesidad de enriquecer en área fija para alcanzar la velocidad de convergencia óptima, como también sucede en los trabajos de *Laborde y Béchet*.

III.5.1.1 Influencia de los nodos mixtos

Considerando enriquecimiento del tipo geométrico, al refinar la malla, un nodo enriquecido con Heaviside puede quedar incluido en el área de enriquecimiento definida por el radio R (véase *Figura III-27*). En esta circunstancia, el enriquecimiento puede ser considerado de dos formas, por un lado, se puede enriquecer el nodo con las funciones de extremo de grieta exclusivamente (no es un *nodo mixto*), o bien, se pueden considerar los dos tipos de enriquecimiento, en este último caso, sí es un *nodo mixto*.

En el caso bidimensional, los *nodos mixtos* tienen asociados 12 grados de libertad, correspondientes a 2 estándares, 2 de enriquecimiento Heaviside y 8 de enriquecimiento con las funciones singulares.

En este apartado se muestra la influencia de los nodos mixtos que, aunque no es lo usual, hemos visto su conveniencia. El ejemplo numérico considerado en este caso viene dado por el dominio $\Omega = [-1,1]^2$ con una grieta en el borde de longitud $a = 1$ tal y como se muestra en la *Figura III-28*.

En el contorno se imponen las condiciones de desplazamiento de manera que la solución analítica conocida del campo de desplazamientos asintótico en extremo de grieta es la solución exacta en todo el dominio, dada por las ecuaciones (II-57) y (II-58). El campo de tensiones correspondientes a la solución exacta viene dado por las ecuaciones (II-51), (II-52) y (II-54).

Se ha considerado el estado de tensión plana, con módulo de *Young* $E = 10000$ y el coeficiente de *Poisson* $\nu = 0.3$. El problema se considera de modo I puro con $K_I = 100$ y $K_{II} = 0$.

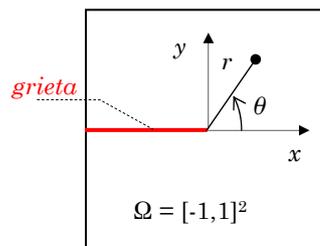


Figura III-28 Dominio considerado en el problema de grieta en el borde.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

En la *Figura III-29* se muestra, para elementos bilineales y cuadráticos, dos mallas, correspondientes a los siguientes casos: por un lado no se tiene en cuenta la existencia de *nodos mixtos* y, por otro, sí se consideran (véase *Figura III-29* izquierda y derecha respectivamente). Se ha representado el radio de enriquecimiento, R .

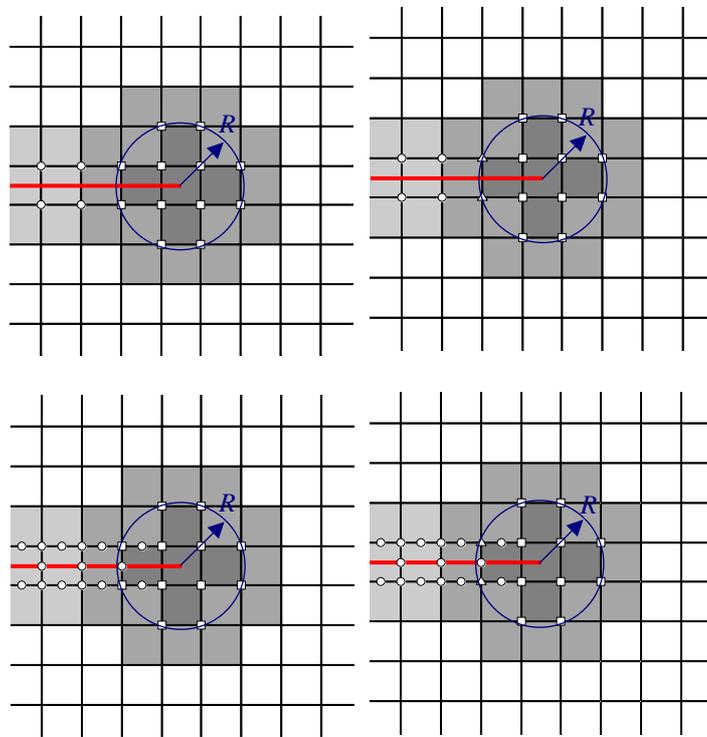


Figura III-29. De izquierda a derecha malla sin y con nodos mixtos. Elementos lineales y cuadráticos de arriba abajo.

En la *Figura III-30* se representa la convergencia, en el error relativo en norma energética. Los análisis realizados son:

- XFEM con enriquecimiento topológico (top XFEM),
- XFEM con enriquecimiento geométrico con nodos mixtos (geo XFEM),
- XFEM con enriquecimiento geométrico sin nodos mixtos (geo XFEM sin nodos mixtos).

Se observa que el enriquecimiento mixto está justificado ya que permite alcanzar resultados más precisos, si bien, su influencia es más importante para el caso de elementos lineales. No obstante, como se verá en el apartado IV.4.8 del Capítulo IV, la influencia de los nodos mixtos cuando simultáneamente se

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

aplica la técnica de mejora del número de condicionamiento *gathering* (véase apartado III.5.3) es más significativa.

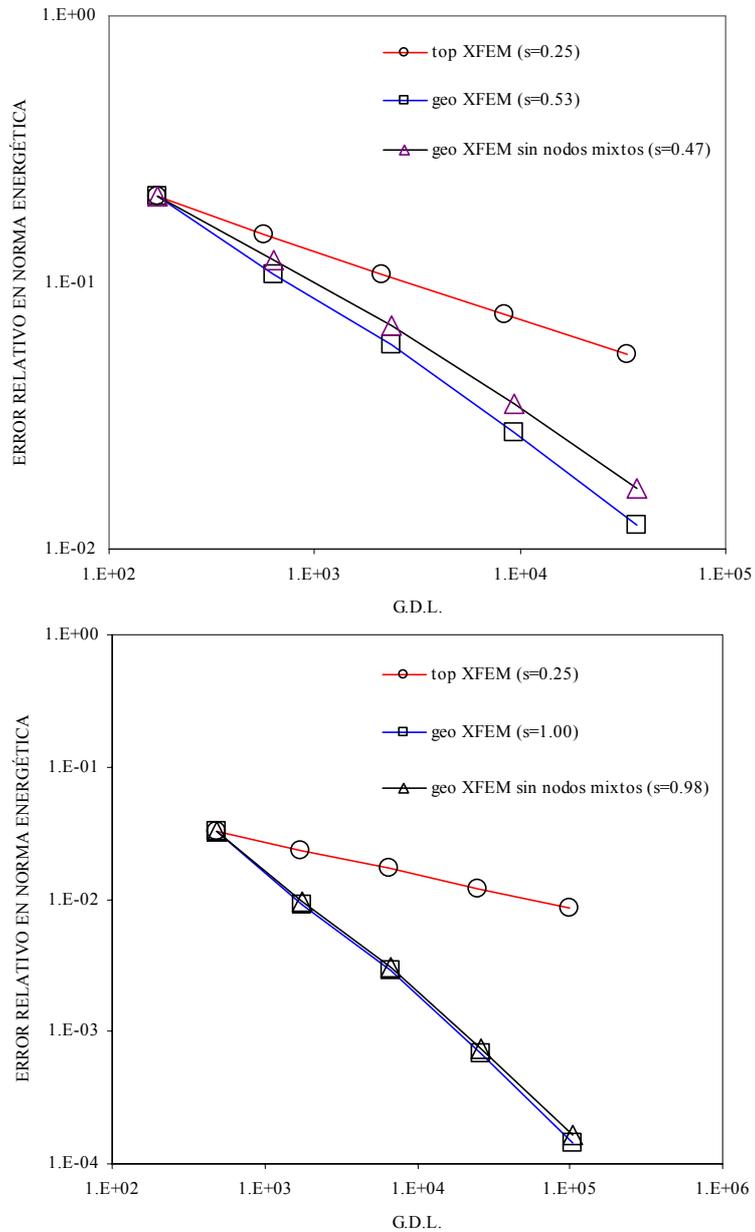


Figura III-30. Convergencia del error relativo en norma energética para el problema de solución singular en modo I. Arriba, elementos lineales; abajo, elementos cuadráticos. Influencia de los nodos mixtos en caso de enriquecimiento en área fija.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

III.5.1.2 Ejemplo numérico

Se ha considerado de nuevo el problema de secuencia infinita de grietas colineales definido en Fuenmayor et ál. [88] (véase *Figura III-23*).

Para el análisis con enriquecimiento topológico, se ha hecho coincidir el extremo de grieta con un nodo. En el caso de enriquecimiento en área fija, se emplea un área circular con centro en el extremo de grieta y radio determinado $R = 0.5$, de este modo todos los nodos que quedan en el interior de esta área son enriquecidos. Al refinar la malla manteniendo el radio constante, aumenta el número de nodos enriquecidos.

En la *Figura III-31* se muestran los nodos que quedan en el área de enriquecimiento a medida que se refina la malla de manera uniforme. Las imágenes se corresponden con sólo cuatro mallas consecutivas de un conjunto de análisis más amplio.

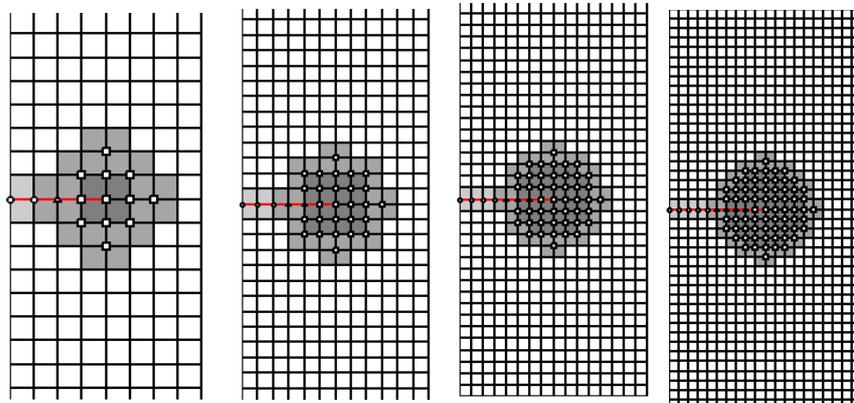


Figura III-31. Enriquecimiento en área fija: ampliación de la malla en entorno cercano al extremo de grieta. Refinamiento uniforme. Número de elementos en la malla de izquierda a derecha: 960, 2160, 3840 y 6000.

Los análisis que se han realizado son los siguientes:

- método de EF estándar,
- XFEM con enriquecimiento estándar o topológico,
- XFEM con enriquecimiento en área fija o geométrico.

Para cada uno de estos análisis se han considerado elementos cuadriláteros bilineales y cuadráticos. Se han utilizado nodos mixtos. Los resultados obtenidos permiten afirmar que cuando se emplea el enriquecimiento en área fija o geométrico, el resultado es justo el que cabría esperar en problemas sin

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

singularidad y extensión tipo h , esto es, el orden polinómico p de la aproximación.

En la *Figura III-32* se ha representado el error relativo en la tasa de liberación de energía G frente al número de grados de libertad en escala logarítmica.

Se observa que para el caso de EF convencionales, al aumentar el orden de interpolación mejora únicamente la precisión, la velocidad de convergencia, s , es gobernada por la singularidad. La misma tendencia se aprecia para el caso de XFEM cuando el enriquecimiento es topológico o función del tamaño de la malla, si bien la precisión es notablemente mejor con respecto a EF estándar. En cambio, al analizar XFEM con enriquecimiento geométrico se alcanza la velocidad de convergencia óptima y sí se manifiesta el uso de elementos de orden superior, asimismo la precisión es todavía mayor que en los análisis previos. Se observa en los resultados una ligera superconvergencia para el caso de los elementos cuadráticos, esto es debido a que la solución exacta de Kanninen y Popelar [35] es para altura infinita y en este caso la altura del dominio considerado es finita. A medida que se aumentara h este efecto desaparecería.

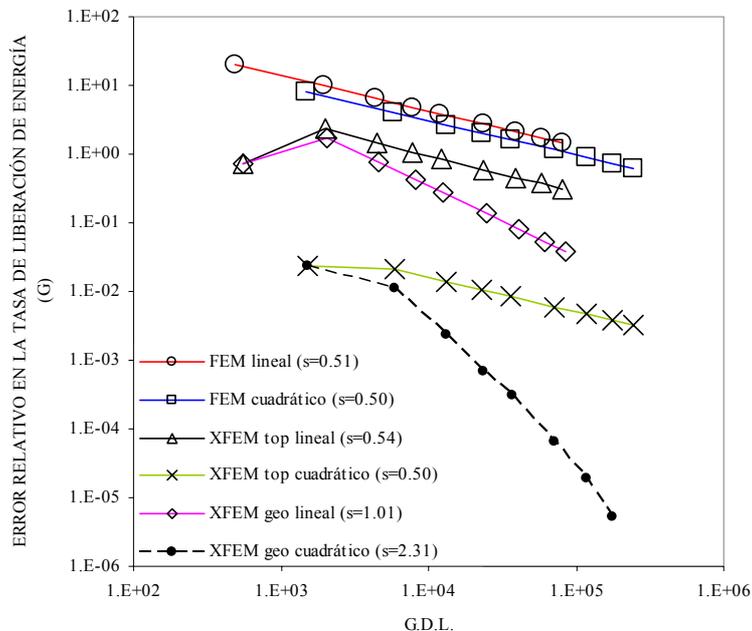


Figura III-32. Convergencia del error relativo en la tasa de liberación de energía G .

En la *Figura III-33* y la *Figura III-34* se representa el error relativo en norma energética y el error relativo en el FIT frente al número de grados de libertad en escala logarítmica respectivamente. El análisis sobre la tendencia observada para el caso del error en G se repite con el resto de errores, alcanzándose la

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

velocidad de convergencia, s , óptima para cada magnitud (véase apartado III.4.3).

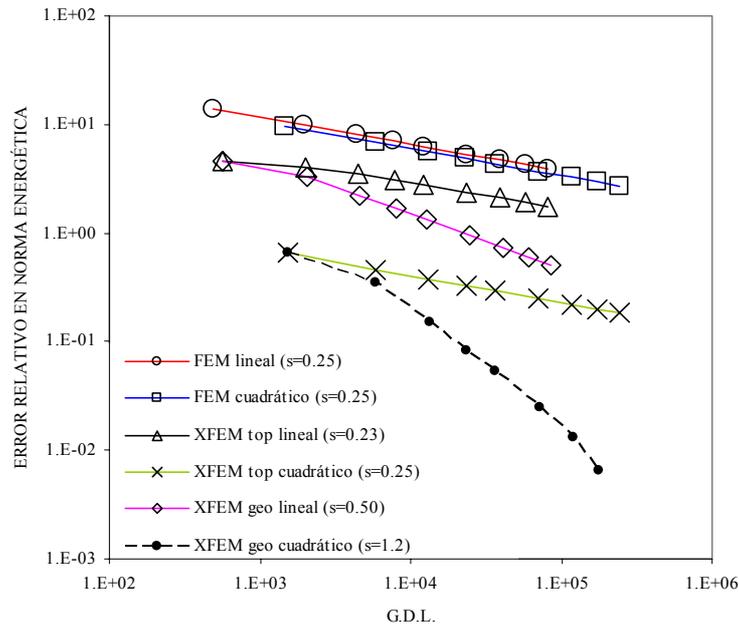


Figura III-33. Convergencia del error relativo en norma energética.

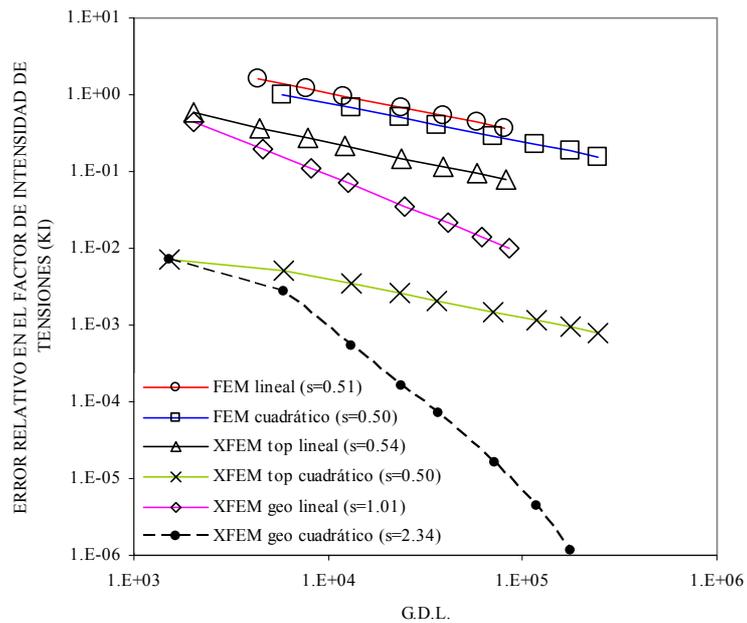


Figura III-34. Convergencia del error relativo en el FIT.

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

III.5.2 Condicionamiento numérico

El condicionamiento numérico de una matriz mide la sensibilidad de la solución de un sistema de ecuaciones lineal a posibles errores. Proporciona un indicador de la precisión de los resultados procedentes de la inversión de la matriz y la solución del sistema de ecuaciones.

Existen varios criterios para definir el número de condicionamiento. En este trabajo se ha empleado el cociente entre el máximo y el mínimo autovalor de la matriz. Valores de condicionamiento cercanos a la unidad indican que la matriz está bien condicionada.

Cuando una matriz posee todas sus filas linealmente dependientes el condicionamiento numérico es infinito, el valor del determinante de la matriz es 0, la matriz, por lo tanto, es singular. Esta situación se corresponde por ejemplo, con el caso del movimiento de sólido rígido donde los desplazamientos de todos sus puntos son iguales.

El enriquecimiento de la solución bajo el concepto de partición de la unidad debe ser local para resultar eficiente desde el punto de vista computacional. Utilizando el enriquecimiento geométrico es posible alcanzar la velocidad de convergencia óptima cuando se refina la malla. Sin embargo, este tipo de enriquecimiento produce un número de condicionamiento de la matriz de rigidez bastante peor que en el caso del enriquecimiento topológico. El número de condicionamiento crece rápidamente porque aumenta el número de nodos enriquecidos con las funciones singulares de extremo de grieta.

Laborde et ál. [129] señala como posible causa el hecho de que el número de ecuaciones linealmente dependientes para el caso de la matriz de rigidez de un elemento completamente enriquecido, por ejemplo, aumenta con respecto a un elemento convencional FEM. En efecto, para el caso de un elemento cuadrilátero bilineal completamente enriquecido tendremos 40 ecuaciones; cabría esperar que 3 resultaran linealmente dependientes debido a los posibles movimientos de sólido rígido, en cambio, aparecen un total de siete, esto es, existen 4 relaciones dependientes (2 por cada dirección en el espacio).

En la *Figura III-35* se muestra el número de ecuaciones linealmente dependientes en la matriz de rigidez de cada elemento, para lineales y cuadráticos. Este resultado se ha obtenido a partir del rango de la matriz antes de ensamblarla y teniendo en cuenta el tamaño de la matriz de elemento en cada caso.

Si se tuviera una malla completamente enriquecida, la matriz global del sistema sería singular y, por lo tanto, el problema no resoluble. Esto no llega a suceder porque el enriquecimiento es local y los elementos estándares hacen de

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

La idea consiste en utilizar solamente una función global de enriquecimiento $F_j(\mathbf{x})T_R(\mathbf{x})$ por cada función singular $F_j(\mathbf{x})$, donde $T_R(\mathbf{x})$ es la función de corte dada por la ecuación (III-59):

$$T_R(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I(R)} N_i(\mathbf{x}) \quad (\text{III-59})$$

donde $N_i(\mathbf{x})$ son las funciones de forma de primer orden e $I(R)$ es el conjunto de todos los nodos contenidos en el interior de la zona, en este caso radio, de enriquecimiento.

Si se considera un elemento completamente enriquecido, puesto que las funciones de forma verifican la partición de la unidad, se tiene $T_R(\mathbf{x})=1$. Esto sucede para todos los elementos contenidos completamente dentro del área fija de enriquecimiento de radio R centrada en el extremo de grieta. El valor de la función $T_R(\mathbf{x})$ decrece linealmente hasta 0 en la capa de elementos de transición (véase *Figura III-36*).

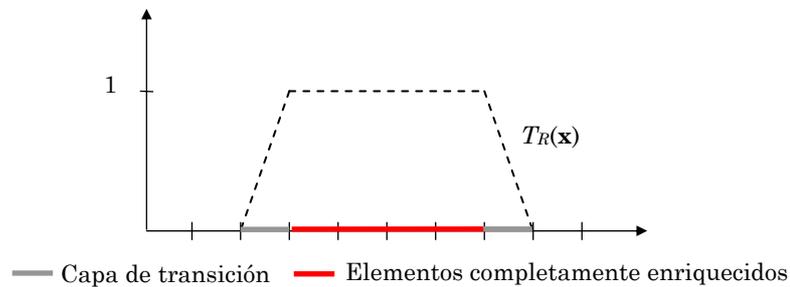


Figura III-36. Función $T_R(\mathbf{x})$.

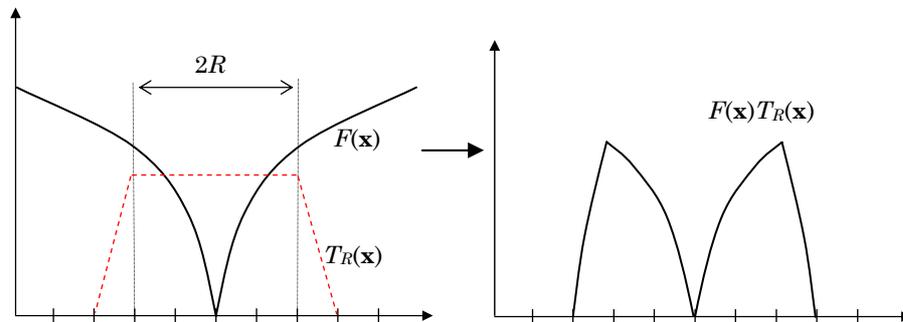


Figura III-37. Corte de la función de enriquecimiento $F(\mathbf{x})$ (ejemplo unidimensional) al multiplicarla por $T_R(\mathbf{x})$ (ecuación (III-59)).

Si la función de enriquecimiento que se tiene es por ejemplo $F(\mathbf{x})$ (representada en negro en la *Figura III-37* izquierda), se establece como radio de

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

enriquecimiento R y se aplica la función $T_R(\mathbf{x})$ (representada en rojo en la *Figura III-37* izquierda), el resultado será el mostrado en la *Figura III-37* derecha.

Es importante señalar que, para un problema bidimensional, el método clásico de XFEM tiene ocho grados de libertad adicionales por nodo enriquecido (empleando las funciones de enriquecimiento de *Belytschko* y *Black* dadas por la ecuación (III-46)). Con la técnica de gathering, el grado de libertad correspondiente a cada función de enriquecimiento y dimensión es único en todo el problema. De este modo, se consigue reducir a un total de ocho grados de libertad extras para toda la malla, independientemente del número de nodos enriquecidos. Esto supone forzar la solución al imponer, en toda el área de enriquecimiento, que la aproximación considere únicamente el primer término del desarrollo asintótico de la solución en el extremo de grieta. El bajo coste computacional de esta técnica hace admisible poder enriquecer con más funciones (Laborde et ál. [129]) lo cuál podría conducir a resultados precisos empleando la técnica de gathering. En el siguiente ejemplo se analiza el condicionamiento numérico del sistema de ecuaciones, se muestran los resultados obtenidos con el *d.o.f. gathering*.

III.5.3.1 Ejemplo numérico

El problema considerado en este ejemplo es el mismo que en el apartado III.5.1.1, representado en la *Figura III-28*. El dominio considerado viene dado por $\Omega = [-1,1]^2$ con una grieta en el borde de longitud $a = 1$. En el contorno se imponen las condiciones de desplazamiento correspondientes a la solución analítica conocida del campo de desplazamientos asintótico en extremo de grieta (véase ecuaciones (II-57) y (II-58)).

Se ha considerado el estado de tensión plana, con módulo de *Young* $E = 10000$ y el coeficiente de *Poisson* $\nu = 0.3$. El problema se considera de modo I puro con $K_I=100$ y $K_{II} = 0$.

Los análisis realizados son los siguientes (consideramos en todos ellos XFEM), (ver *Figura III-38*):

- enriquecimiento topológico y elementos cuadriláteros bilineales (en la leyenda *XFEM top lineal*),
- enriquecimiento geométrico y elementos cuadriláteros bilineales (en la leyenda *XFEM geo lineal*),
- enriquecimiento geométrico y elementos cuadriláteros bilineales y gathering (en la leyenda *XFEM geo lineal gath*),
- enriquecimiento geométrico y elementos cuadriláteros cuadráticos (en la leyenda *XFEM geo cuad*),

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

- enriquecimiento geométrico y elementos cuadriláteros cuadráticos y gathering (en la leyenda *XFEM geo cuad gath*).

Para el caso de enriquecimiento en área fija se ha considerado un área circular con centro en el extremo de grieta y radio 0.2. En la *Figura III-38* se representa el número de condicionamiento de la matriz de rigidez global frente al número de grados de libertad.

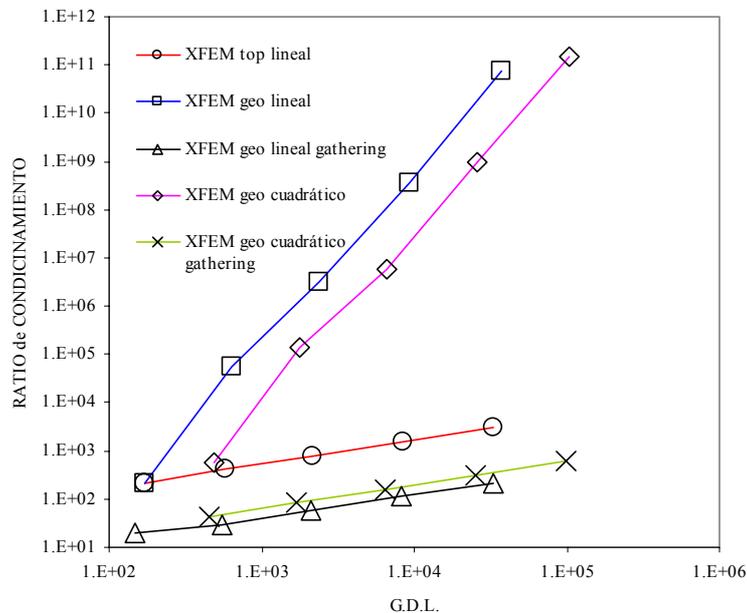


Figura III-38 Número de condicionamiento de la matriz de rigidez: ratio ($D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$).

Los resultados muestran que el enriquecimiento geométrico produce un crecimiento del número de condicionamiento mucho mayor que el enriquecimiento topológico. Se puede observar que la técnica de agrupar los grados de libertad asociados a los nodos enriquecidos con funciones singulares mejora considerablemente los resultados.

Asimismo, puesto que las funciones de enriquecimiento utilizan sólo funciones de forma lineales, para el caso de los elementos cuadráticos con enriquecimiento en área fija, el elevado número de condicionamiento no muestra peor tendencia por el hecho de utilizar un orden polinómico mayor en la aproximación de la parte suave de la solución (tal como indica Laborde et ál. [129]).

No obstante, esta técnica ocasiona un incremento del error en la solución obtenida y además empeora la velocidad de convergencia. Esto es debido en parte a que se está forzando la solución al exigir que todos los grados de

III. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

libertad correspondientes a una función de enriquecimiento sean iguales. También tienen gran influencia los elementos de transición (elementos sombreados de la *Figura III-35*). *Laborde* propone recuperar la convergencia eliminando los elementos de transición y conectando las dos zonas directamente. Como consecuencia la malla resultante es no conforme y se requiere de alguna técnica adicional para ajustar ambas regiones (restricciones multipunto, mortár, etc.). En el capítulo dedicado al elemento de transición mejorado se describe la solución aportada en esta Tesis.

Capítulo IV

Elementos de transición

IV.1 Introducción

En la aproximación de XFEM aplicado a MFEL la interpolación en ciertos elementos es enriquecida con funciones que permiten representar el campo de desplazamiento asintótico de extremo de grieta usando de manera local el método de la partición de la unidad. Sin embargo, el enriquecimiento es sólo parcial en los elementos de transición que conectan la zona enriquecida con el resto de la malla; consecuentemente, aparecen términos patológicos en la interpolación que conllevan un incremento del error y, en ocasiones, pérdida de velocidad de convergencia (Chessa et ál. [119]).

En la bibliografía se encuentran algunos trabajos con el objeto de solucionar el problema derivado de la zona de transición. Chessa et ál. [119] consideran el caso unidimensional en el que se enriquece la aproximación localmente para poder representar una discontinuidad en el gradiente de la solución (en concreto, el problema de la frontera entre materiales diferentes). Para este caso, analizan detalladamente el error de interpolación que aparece en los elementos de transición y muestran que dicho error es de orden superior que en otros elementos. Esto, justifica el autor, es debido a la ausencia de partición de la unidad en estos elementos, donde el enriquecimiento es sólo parcial. Se observa cómo en los elementos de transición no solamente es imposible representar las funciones de enriquecimiento correctamente sino que no se puede reproducir campos de solución de orden equivalente al elemento considerado.

Chessa y coautores realizan dos propuestas para recuperar, en la medida de lo posible, la partición de la unidad en los elementos de transición: el uso del método de *deformación mejorada* (*enhanced strain method*) y la adición de funciones polinómicas jerárquicas de orden superior. Los dos métodos se

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

aplican a la formulación de los elementos de transición únicamente. En los resultados numéricos mostrados en su trabajo, ambas propuestas parecen compensar los términos no deseados que existen en la interpolación. El método de la deformación mejorada, basado en el principio variacional de *Hu-Washizu*, puede ser utilizado para cualquier tipo de función de enriquecimiento pero, con el inconveniente de que es necesario construir un campo de deformaciones mejorado diferente según sea la función de enriquecimiento. El segundo método, basado en el uso de funciones de forma jerárquicas en los elementos de transición, es aplicado por los autores únicamente al caso en el que la función de enriquecimiento es polinómica, en concreto la función distancia con signo.

Posteriormente, en el contexto de MFEL, Laborde et ál. [129] examinan el error en norma L^2 de los elementos de transición en una dimensión para una función de enriquecimiento arbitraria. En sus análisis, los resultados numéricos muestran una pérdida de precisión atribuida a la capa de elementos de transición. Tras observar que el ancho de la capa de transición no tiene influencia en la velocidad de convergencia, *Laborde* propone hacer despreciable dicha capa. Elimina los elementos de transición e impone condiciones adicionales para preservar la conformidad de la malla (restricciones multipunto).

En el siguiente ejemplo unidimensional se considera un problema de dominio Ω dividido en dos subdominios Ω_1 y Ω_2 , donde Ω_1 es la unión de los elementos que tienen algún nodo enriquecido con las funciones de enriquecimiento características de la singularidad, $g_I(\mathbf{x})$, y Ω_2 es la unión de todos los elementos que tienen al menos un nodo no enriquecido con dichas funciones. Como se observa en la *Figura IV-1*, en este ejemplo, se consideran tres nodos enriquecidos y el resto nodos estándares. Los elementos que aparecen sombreados son los elementos de transición. Como se observa, la definición de los subdominios Ω_1 y Ω_2 es tal que se solapan en la capa de transición.

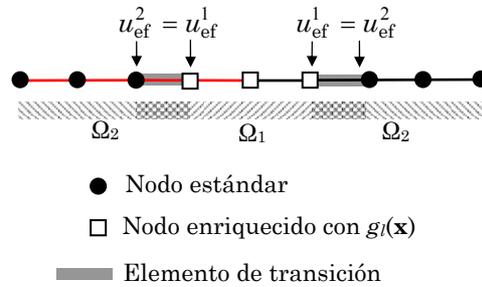


Figura IV-1. Ejemplo unidimensional. Descomposición en dos subdominios que se solapan Ω_1 y Ω_2 . Se elimina la capa de transición y se aplican restricciones multipunto.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Tras eliminar los elementos de transición, los subdominio Ω_1 y Ω_2 constituyen la partición del dominio completo Ω de forma que desaparece el solape. En este caso, para evitar que la solución sea discontinua, se impone que la aproximación en desplazamientos u_{ef} sea única en los nodos situados justo en la frontera $\Gamma_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Para el caso del ejemplo unidimensional mostrado en la *Figura IV-1*, la frontera Γ_{12} son nodos. Si u_{ef}^1 y u_{ef}^2 representan la aproximación en Ω_1 y Ω_2 respectivamente, entonces se tiene que $u_{ef}^1 = u_{ef}^2$ para los nodos frontera.

$$u_{ef}^1(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I(\Omega_1)} N_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{k \in K(\Omega_1)} N_k^1(\mathbf{x}) \cdot \left(\sum_{l=1} \mathbf{c}_{kl} \cdot \mathbf{g}_l(\mathbf{x}) \right) \quad (\text{IV-1})$$

$$u_{ef}^2(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I(\Omega_2)} N_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_i \quad (\text{IV-2})$$

En el trabajo de *Laborde* y coautores, se aplican simultáneamente el enriquecimiento geométrico o en área fija, la técnica *d.o.f gathering* descrita en la sección III.5.3 y las restricciones multipunto. Se recuerda que en la técnica *gathering*, se escala la función de enriquecimiento $F_l(\mathbf{x})$ por una función $T_R(\mathbf{x})$ de valor uno en el área enriquecida y cero en el resto del dominio con una evolución lineal en la zona de transición. De este modo, *Laborde* recupera la velocidad de convergencia óptima. No obstante, el inconveniente que tiene este método es la necesidad de aplicar técnicas adicionales para conservar la continuidad C^0 de la solución aproximada.

Recientemente, han surgido otros métodos para la mejora de los elementos de transición. Gracie et ál. [136] han desarrollado dos propuestas basadas en una formulación de *Galerkin* discontinua que consigue eliminar los problemas asociados a los elementos de transición. Un primer planteamiento consiste en hacer una subdivisión del dominio del problema en varias áreas (*patches*) no superpuestas. Esta subdivisión es función de las áreas donde se enriquece. En cada *patch* se aproxima el campo de desplazamientos de manera independiente utilizando la aproximación de *Galerkin* y la continuidad en la frontera de los subdominios es impuesta mediante un método de penalti. Un segundo planteamiento consiste en llevar esta misma idea a cada elemento, siendo tratado como un subdominio o *patch*. Aunque la precisión de ambos métodos es similar para un tamaño de elemento dado, el primer planteamiento requiere menor número de grados de libertad.

En este trabajo también se muestra el análisis de la influencia de los elementos de transición en el cumplimiento de las condiciones de contorno naturales en las caras de la grieta. Es sabido que el método de elementos finitos no logra

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

satisfacer, en general, las condiciones naturales. En este sentido, se demuestra mediante un ejemplo numérico, que los elementos de transición son causa de un mayor error. Para este análisis, *Gracie* y coautores implementan el método de *deformación mejorada* (también empleado en Chessa et ál. [119]). Las funciones de forma del nuevo campo de deformaciones se obtienen a partir de la ortogonalización de las funciones que constituyen los términos parásitos de la aproximación en los elementos de transición. El desarrollo de tales términos se realiza para el caso del elemento triangular lineal. En los resultados se compara la evolución de la tensión normal a las caras de la grieta obtenida mediante dos análisis, con la solución exacta. Estos análisis se diferencian en el postproceso para obtener el campo de tensiones: bien a partir del gradiente de desplazamientos, o bien a partir del campo mejorado de deformaciones. Concluye que la segunda alternativa de postproceso da mejores resultados. Su propuesta, basada en la aproximación discontinua de Galerkin y aplicación del método de penalti, no es comparada con el método del campo de deformaciones mejoradas.

El principal inconveniente del método propuesto por *Gracie* y coautores es la necesidad de definir un factor de penalti que depende del problema que se resuelve. El valor oscila en el amplio rango de $10E$ a $100E$ siendo E el módulo de *Young*. Se observa cómo la precisión de su método se reduce cuando se emplean valores del factor de penalti elevados. Esto es debido, explica el autor, a que los espacios de aproximación en los diferentes subdominios o *patches* son frecuentemente incompatibles, en este caso, valores elevados del factor de penalti hacen tender a cero los grados de libertad correspondientes al enriquecimiento y, por lo tanto, se reduce la precisión.

En el trabajo de Fries [135] se realiza una propuesta para corregir el problema asociado a los elementos de transición en XFEM cuando se tiene cualquier tipo de enriquecimiento que, por sus buenos resultados y su simplicidad en la implementación, resulta interesante. En la *Figura IV-2* se muestra un ejemplo unidimensional en el que aparecen sombreados en oscuro los elementos completamente enriquecidos y en claro los elementos de transición. En la *Figura IV-2* se aprecia claramente que, en la capa de transición, el enriquecimiento es parcial puesto que no todos los nodos de estos elementos están enriquecidos.

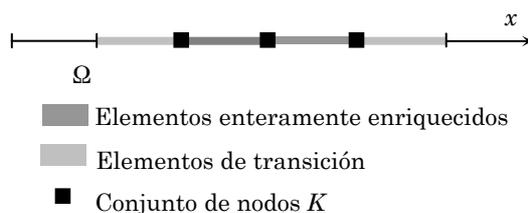


Figura IV-2. Dominio discretizado en una dimensión.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Es deseable que la incorporación de la función de enriquecimiento evolucione suavemente en el interior de los elementos de transición desde el valor que corresponda al nodo enriquecido hasta cero para el caso del nodo estándar. Esto se puede conseguir con una función que valga la unidad en la zona enriquecida, cero en la estándar y evolucione linealmente en la capa de transición (véase *Figura IV-3*).

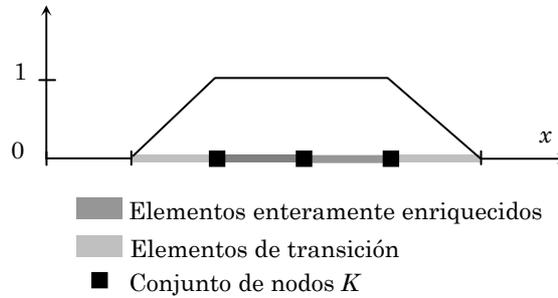


Figura IV-3. Función de valor unitario en la zona enriquecida, nula en la zona estándar y de evolución lineal en la capa de transición.

Fries define la función que se ilustra en la *Figura IV-3* a partir de las funciones de forma estándares, como se indica en la ecuación (IV-3).

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{k \in K} N_k(\mathbf{x}) \quad (\text{IV-3})$$

donde K representa el conjunto de nodos enriquecidos. Se introduce una función de enriquecimiento modificada $\psi^{\text{mod}}(\mathbf{x})$, que varía de forma suave en los elementos de transición y se anula al llegar a la zona no enriquecida.

$$\psi^{\text{mod}}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \cdot R(\mathbf{x}) \quad (\text{IV-4})$$

Para los problemas de fractura, $\psi(\mathbf{x})$ representa cada una de las funciones que aparecen en la ecuación (III-46) correspondientes al primer término del desarrollo del campo asintótico de desplazamiento en extremo de grieta.

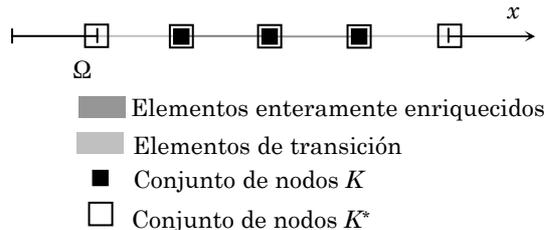


Figura IV-4. Dominio discretizado en una dimensión con los conjuntos nodales K y K^ . La definición de los elementos de transición se mantiene en base al conjunto K .*

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Con la definición de $\psi^{\text{mod}}(\mathbf{x})$ se garantiza que la función de enriquecimiento se reproduce perfectamente en los elementos enteramente enriquecidos $\psi^{\text{mod}}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$, se anula en los estándares y evoluciona de forma suave en los elementos de transición desde su valor $\psi(\mathbf{x})$ hasta cero. Se introduce un nuevo conjunto de nodos K^* que está formado por los nodos del conjunto K más los nodos de los elementos de transición (véase *Figura IV-4*).

Por lo tanto, las funciones de enriquecimiento local quedan definidas como sigue:

$$M_k^{\text{mod}}(\mathbf{x}) = N_k(\mathbf{x}) \cdot \psi^{\text{mod}}(\mathbf{x}) \quad \forall k \in K^* \quad (\text{IV-5})$$

La aproximación modificada propuesta por *Fries*, corrige el método XFEM del siguiente modo:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{k \in K^*} M_k^{\text{mod}}(\mathbf{x}) \cdot a_k \quad (\text{IV-6})$$

En esta aproximación, se cumple la partición de la unidad en todos los elementos. Puesto que el conjunto de nodos enriquecidos se amplía a los de los elementos de transición, cabe destacar que el número de incógnitas del problema aumenta ligeramente.

Fries aplica su corrección del método XFEM a varios tipos de discontinuidades. Para el caso de discontinuidades fuertes, como es la discontinuidad en desplazamientos introducida en la aproximación a través del enriquecimiento con la función Heaviside, destaca el hecho de no existir problemas en los elementos de transición. Esto sucede porque, en un elemento de transición, la función Heaviside toma valores constantes y, al emplear las mismas funciones de forma en la interpolación de la solución nodal y en este tipo de enriquecimiento, siempre es posible compensar los términos no deseados y satisfacer la partición de la unidad. En la *Figura IV-5* se muestra un ejemplo unidimensional donde se tiene una discontinuidad en el interior del elemento central representada por la función Heaviside. El enriquecimiento local de la solución afecta únicamente a los nodos del elemento intersectado, por lo tanto, resultan dos elementos con enriquecimiento parcial, es decir, elementos de transición (aparecen sombreados).

Por simplicidad, se considera el origen de la coordenada x en el nodo 1 y se supone que la longitud de un elemento es h . Así pues, las funciones de forma de los nodos 1 y 2 vienen dadas por expresiones polinómicas muy sencillas.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

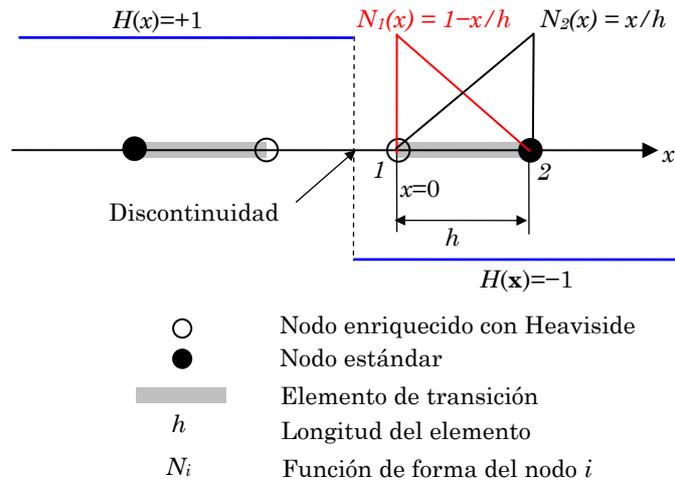


Figura IV-5. Ejemplo unidimensional de enriquecimiento local con función Heaviside, $H(x)$. El valor de la función en los elementos de transición es constante.

La interpolación en el elemento de transición derecho mostrado en la Figura IV-5 quedará como sigue:

$$u^h(x) = N_1(x) \cdot a_1 + N_2(x) \cdot a_2 + N_1(x) \cdot (-1) \cdot b_1 \quad (\text{IV-7})$$

$$u^h(x) = \left(1 - \frac{x}{h}\right) \cdot a_1 + \frac{x}{h} \cdot a_2 + \left(1 - \frac{x}{h}\right) \cdot (-1) \cdot b_1 = \left(1 - \frac{x}{h}\right) \cdot (a_1 - b_1) + \frac{x}{h} \cdot a_2 \quad (\text{IV-8})$$

Como se observa en la ecuación (IV-8), con el enriquecimiento parcial mediante la función Heaviside, no se añaden términos que modifiquen el orden de la interpolación dentro del elemento de transición.

En el caso de enriquecimiento en MFEL, mediante las funciones correspondientes al primer término del desarrollo del campo asintótico de desplazamiento en el extremo de grieta, Fries analiza el problema de dominio $L \times L$, siendo $L = 2$ con una grieta de longitud $a = 1$ en el borde y con las condiciones de *Dirichlet* impuestas en la frontera del dominio correspondientes a los casos de modo I y modo II (véase apartado III.5.1.1, Figura III-28). Aplicando la integración casi-polar de Laborde et ál. [129] así como el enriquecimiento en área fija, compara los resultados obtenidos utilizando tres métodos: enriquecimiento intrínseco (véase Fries y Belytschko [133]), XFEM estándar y XFEM con las funciones de enriquecimiento modificadas, véase ecuación (IV-4). Se obtiene la conclusión de que, para el caso de XFEM estándar, el error que existe en la zona de transición no reduce la velocidad de convergencia. Este hecho resulta coherente con el trabajo de Laborde et ál.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

[129] en el que se demuestra que el ancho de la capa de transición no tiene influencia en la velocidad de convergencia de la solución. Por otro lado, el valor óptimo de velocidad de convergencia viene dado por el enriquecimiento independiente del tamaño de elemento que logra reproducir el carácter singular del problema conforme se refina la malla. Este resultado sólo es aplicable al caso de enriquecimiento en MFEL.

Para los problemas con discontinuidad débil, se suele emplear como función de enriquecimiento el valor absoluto de la función distancia a la frontera donde se encuentra la discontinuidad. Esta situación se encuentra, por ejemplo, en un dominio formado por dos materiales diferentes como es el caso de una inclusión en el interior de otro material. Para este tipo de enriquecimiento, los elementos de transición sí muestran una clara influencia en la reducción de la velocidad de convergencia de la solución. Esta tendencia se muestra en los resultados de *Fries*, su técnica de mejora de los elementos de transición permite obtener la velocidad de convergencia óptima, así como el método de XFEM con enriquecimiento intrínseco descrito en el apartado III.4.1. Otros autores como Sukumar et ál. [113] eliminan el problema de transición haciendo evolucionar de manera suave la función de enriquecimiento desde los elementos intersectados por la discontinuidad al resto del dominio. De este modo logra la velocidad de convergencia óptima. En cuanto a la precisión, el método XFEM modificado por *Fries* consigue niveles de error bastante inferiores al método XFEM estándar y muy similares al método XFEM con enriquecimiento intrínseco. No obstante, en cualquier caso, el nivel de error se mantiene superior al obtenido mediante un análisis MEF convencional con la malla adaptada a la frontera de la inclusión.

Como ha sido mencionado, el esquema de integración que *Fries* emplea en su trabajo es la integración casi-polar para los elementos que contienen el extremo de grieta y, dado que el orden de la función de enriquecimiento modificada aumenta, incrementa el orden de integración numérica en los elementos de transición. Asimismo, el autor destaca el interés de enriquecer en un área fija para preservar la velocidad de convergencia óptima y muestra también los resultados que se obtienen para el caso de enriquecimiento topológico. Los resultados son análogos a los mostrados en esta Tesis en el ejemplo numérico de III.5.1, esto es la velocidad de convergencia se reduce a la mitad para el caso del elemento lineal y a la cuarta parte para el caso del elemento cuadrático. Esto muestra la necesidad de mantener el enriquecimiento independiente de la malla para garantizar la velocidad de convergencia óptima aún en el caso de que se corrija el problema de los elementos de transición.

No obstante, el método de *Fries* tiene un inconveniente y es que, puesto que el enriquecimiento se extiende a todos los nodos de los elementos de transición, se tiene una deficiencia en el rango de la matriz de rigidez global del sistema superior al método XFEM estándar con enriquecimiento en área fija. En

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

concreto, para el caso de un elemento cuadrilátero de cuatro nodos con todos sus nodos enriquecidos con las funciones del primer término del desarrollo del campo asintótico de extremo de grieta, resultan 16 funciones de enriquecimiento por cada dirección del espacio. *Fries* prueba que 2 de estas funciones son linealmente dependientes. El autor observa que, cuando se añaden más elementos completamente enriquecidos, el número de relaciones dependientes no aumenta. Por lo tanto, es necesaria alguna técnica adicional que resuelva este problema. *Fries* elimina dos ecuaciones por dirección en el sistema global. Este procedimiento no resulta útil en el caso de mallas no estructuradas o elementos triangulares ya que, el conjunto de coeficientes que aparecen en la combinación lineal de las 16 funciones, resulta expresado en función de las coordenadas nodales. Así pues, es de esperar que con mallas irregulares o elementos triangulares, el número de relaciones linealmente dependientes fuese distinto. Por último, la técnica de *gathering* no da buenos resultados con la propuesta del XFEM modificado de *Fries*, como más adelante se mostrará mediante ejemplos numéricos.

En las próximas secciones de este capítulo, se presenta la propuesta realizada en esta Tesis de mejora de los elementos de transición. Ésta consiste básicamente, en añadir funciones de forma jerárquicas donde resulte apropiado. Estos nuevos grados de libertad permiten compensar parcialmente los términos no deseados en la interpolación.

La técnica es una extensión del trabajo de Chessa et ál. [119] aplicado al problema de Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. Los resultados numéricos muestran que la mejora propuesta siempre aumenta la precisión y, además, permite recuperar la velocidad de convergencia que se ve reducida cuando se aplica la técnica de mejora del condicionamiento numérico de la matriz de rigidez agrupando los grados de libertad asociados a las funciones de enriquecimiento.

La estructura del presente capítulo es la siguiente: en el apartado IV.2 se examina el error que se encuentra en los elementos de transición para un problema 1-D cuando se utiliza una función de enriquecimiento arbitraria. En la sección IV.3 se introduce la técnica para mejorar el elemento de transición a través de funciones de forma jerárquicas de orden superior a la interpolación estándar. Por último, en la sección IV.4 se muestran ejemplos numéricos.

IV.2 Análisis del error en los elementos de transición

Chessa et ál. [119] resaltan la importancia de los elementos de transición en la obtención de resultados precisos en XFEM y en la velocidad de convergencia de la solución. Estos autores muestran la problemática en un ejemplo

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

unidimensional suponiendo que se enriquece con una función discontinua en la primera derivada de la solución, aplicable por ejemplo, al caso de bimateriales.

En este apartado se realiza un desarrollo similar pero extendiéndolo a una función de enriquecimiento cualquiera $\psi(x)$. Considerando el ejemplo unidimensional mostrado en *Figura IV-6*, la aproximación de XFEM viene dada por:

$$u_{\text{ef}}(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) \cdot a_i + \sum_{k \in K} N_k^l(x) \cdot \psi(x) \cdot b_k \quad (\text{IV-9})$$

donde I es el conjunto de nodos en la malla y K es el conjunto de nodos enriquecidos (nodos 1 y 2 de la *Figura IV-6*).

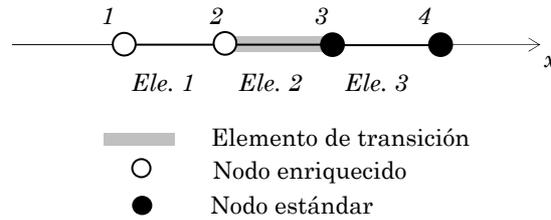


Figura IV-6. Malla utilizada en el análisis del error en el elemento de transición para un problema unidimensional.

Se consideran funciones de forma lineales tanto para la interpolación estándar como para cumplir con la partición de la unidad en la interpolación del enriquecimiento. La aproximación que resulta en el elemento de transición es:

$$u_{\text{ef}}(x) = a_2(1 - \xi) + a_3\xi + b_2(1 - \xi)\psi(x) \quad (\text{IV-10})$$

donde

$$\xi = \frac{x - x_2}{h} \quad (\text{IV-11})$$

y h es la longitud del elemento 2.

El término $b_2(1 - \xi)\psi(x)$ en la ecuación (IV-10) preserva la continuidad C^0 entre el elemento enriquecido (elemento 1) y el estándar (elemento 3). Sin embargo, este término no puede reproducir exactamente la función de enriquecimiento $\psi(x)$ en el elemento de transición sea cual sea el valor b_2 . Más aún, este término, llamado *término patológico*, hace imposible representar campos lineales cuando el enriquecimiento está activo ($b_2 \neq 0$).

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Para ilustrar cómo el error y la convergencia pueden ser mejorados incrementando el orden polinómico de la interpolación en el elemento de transición, la función de enriquecimiento es reemplazada por el desarrollo de *Taylor* alrededor de un punto v :

$$\psi(x) = \psi(v) + \psi'(v)(x - v) + O(h^2) \quad (\text{IV-12})$$

donde x y v son dos puntos del elemento de transición. Sustituyendo en la ecuación (IV-10) y despreciando los términos de orden superior queda:

$$u_{\text{ef}}(x) \approx a_2(1 - \xi) + a_3 \xi + b_2(1 - \xi)(\psi(v) + \psi'(v)(x - v)) \quad (\text{IV-13})$$

Sea $u^{\text{int}}(x)$ una aproximación dada por la ecuación (IV-13) de forma que su valor coincida con $u(x)$ en los nodos. El error en la aproximación, $\Delta(x)$, viene dado por:

$$\Delta(x) = u(x) - u^{\text{int}}(x) \quad (\text{IV-14})$$

Sea z el punto en el elemento de transición con máximo error. Se supone, por ejemplo, que ese punto está en la mitad del intervalo más cercano al nodo 2, de forma que $z - x_2 \leq h/2$. Esta hipótesis no implica ninguna restricción y de este modo se obtienen expresiones en un punto determinado lo cual facilita su comparación con el método de elementos finitos estándar. Entonces, el desarrollo de *Taylor* de la función error alrededor de z resulta:

$$\Delta(x) = \Delta(z) + \Delta'(z)(x - z) + \frac{1}{2} \Delta''(z)(x - z)^2 + O(h^3) \quad (\text{IV-15})$$

Se supone que en el punto z la función error, $\Delta(x)$, tiene un máximo relativo, por lo tanto su derivada se anula, $\Delta'(z) = 0$. Si se considera $x = x_2$, el error se anula, es decir $\Delta(x_2) = 0$, porque estamos en un nodo y $u^{\text{int}}(x)$ se ha definido de forma que su valor en los nodos sea exactamente igual a $u(x)$. Entonces, para $x = x_2$, y despreciando los términos de orden superior, la ecuación (IV-15) resulta:

$$\Delta(z) = -\frac{1}{2} \Delta''(z)(x_2 - z)^2 \quad (\text{IV-16})$$

Considerando valor absoluto:

$$|\Delta(z)| = \left| \frac{1}{2} \Delta''(z)(x_2 - z)^2 \right| \quad (\text{IV-17})$$

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Además, de las ecuaciones (IV-13) y (IV-14) se deduce:

$$\Delta''(x) = u''(x) + \frac{2b_2}{h} \psi'(v) \quad (\text{IV-18})$$

Recordando la hipótesis $z - x_2 \leq h/2$, se tiene:

$$\frac{1}{2}(z - x)^2 \leq \frac{1}{8}h^2 \quad (\text{IV-19})$$

Así pues,

$$|\Delta(z)| = \max|\Delta(x)| \leq \frac{1}{8}h^2 \max\left|u''(x) + \frac{2b_2}{h} \psi'(v)\right| \quad (\text{IV-20})$$

El último término en la ecuación (IV-20), $\frac{2b_2}{h} \psi'(v)$, no aparece en la interpolación lineal estándar (es decir, la que no posee el término de enriquecimiento). Este término aumenta el error en la aproximación y es posible que reduzca la velocidad de convergencia en determinados tipos de enriquecimiento. Éste es el término que se desea compensar de algún modo. Cuando la función de enriquecimiento es polinómica, este término puede ser cancelado compleamente aumentando el orden polinómico de la interpolación estándar en el elemento de transición, Chessa et ál. [119]. Cuando el enriquecimiento es con una función arbitraria, la cancelación es aparentemente posible gracias a la aproximación dada por la ecuación (IV-12); sin embargo no será completa, debido al error en la aproximación introducido por el residuo en la serie de *Taylor* de la función de enriquecimiento. Por ejemplo, si se añade una función jerárquica de segundo orden en el elemento de transición de la *Figura IV-6*, la aproximación del desplazamiento en el elemento queda:

$$u_{\text{ef}}(x) = a_2(1 - \xi) + a_3\xi + b_2(1 - \xi) \cdot \psi(x) + d_2\xi(1 - \xi) \quad (\text{IV-21})$$

donde d_2 es un nuevo grado de libertad asociado a la función jerárquica de segundo orden. Aplicando la ecuación (IV-12) y realizando el mismo desarrollo que se ha hecho desde la ecuación (IV-14) hasta la (IV-18) se tiene:

$$\max|\Delta(x)| \leq \frac{1}{8}h_2 \max\left|u''(x) + \frac{2b_2}{h} \psi'(v) + \frac{2b_2}{h^2}\right| \quad (\text{IV-22})$$

Cuando $d_2 = -b_2h\psi'(v)$, la ecuación (IV-22) queda:

$$\max|\Delta(x)| \leq \frac{1}{8}h_2 \max|u''(x)| \quad (\text{IV-23})$$

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

En general, cuando este nuevo grado de libertad se introduce en la interpolación, la solución de elementos finitos puede compensar parcialmente los términos no deseados, $2b_2/h\psi'(v)$, producidos por el enriquecimiento parcial.

IV.3 Elemento de transición mejorado

Como se ha descrito en la sección IV.2, los elementos de transición pueden ser mejorados en XFEM aumentando el orden polinómico de la aproximación estándar de forma local. Una opción sencilla para realizar esto es añadir convenientemente funciones de forma jerárquicas con el fin de compensar los términos patológicos en los elementos de transición causados por un enriquecimiento parcial. A continuación, en el apartado IV.3.1, se realiza una descripción general de las funciones de forma jerárquicas. En el apartado IV.3.2 se detalla su utilización en el método de XFEM aplicado a problemas de Mecánica de la Fractura Elástica Lineal.

IV.3.1 Funciones de forma jerárquicas

Las funciones de forma jerárquicas presentan ciertas ventajas frente a las funciones de forma convencionales (funciones nodales en la versión h) que las hace especialmente interesantes para nuestro propósito. Cuando se está utilizando el método p , la principal ventaja es que no es necesario recalcular completamente las matrices de elemento por el hecho de añadir un orden superior a la interpolación ya que parte de los cálculos previos son válidos y no tienen por qué volverse a realizar. Tampoco se incrementa el número de nodos del sistema puesto que lo que se introducen son grados de libertad adicionales, aunque en este caso no representarán el valor de la función incógnita en ningún nodo.

Existen varias familias de polinomios para definir las funciones de forma jerárquicas, como por ejemplo, los polinomios de *Lagrange*, de *Chebyshev* y de *Legendre*. En todas las familias, las funciones asociadas a los nodos son las mismas y el grado de libertad correspondiente es el desplazamiento nodal. Para órdenes cuadráticos y superiores se añaden términos polinómicos que no están asociados a ningún nodo, por lo que los grados de libertad de estas funciones ya no representan desplazamientos nodales ni tienen interpretación física directa.

Las funciones de forma correspondientes a las distintas familias contienen los mismos términos polinómicos. Por tanto, la precisión de los cálculos y la solución que se obtiene es la misma para todas (a excepción de errores numéricos). No obstante, en el cálculo de la matriz de rigidez se tiene mejor

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

condicionamiento numérico cuando se emplea la familia de polinomios de *Legendre*. Una descripción exhaustiva de las funciones de forma jerárquicas se puede encontrar en Szabó y Babuška [62]. Las funciones de forma jerárquicas empleadas en esta Tesis son las basadas en los polinomios de *Legendre*.

En dominios bidimensionales, las funciones de forma se organizan en tres categorías:

- *modos nodales*: definidos como producto de funciones de forma nodales unidimensionales. Por cada nodo existe un modo nodal que toma el valor unidad en el nodo de definición y cero en el resto de nodos. Se anulan en los contornos del elemento a los que no pertenece el nodo de definición,
- *modos laterales*: definidos como productos de funciones de forma nodales y jerárquicas unidimensionales. Si p representa el orden polinómico de la función de forma jerárquica, se definen $p-1$ funciones por cada lado del elemento que se anulan en todos los nodos y en los lados distintos al asociado,
- *modos internos*: definidos como producto de funciones de forma jerárquicas unidimensionales. Se anulan en el contorno del elemento.

El caso tridimensional es análogo al bidimensional pero aparecen también *modos superficiales* asociados a las caras del elemento.

A continuación se describen los elementos normalizados. Para el caso bidimensional se consideran los elementos cuadriláteros y triángulos y para el caso tridimensional, el tetraedro. Asimismo, se muestran algunas funciones de forma jerárquicas correspondientes al caso 2D.

Caso bidimensional: Elemento cuadrilátero

El elemento cuadrilátero normalizado es el mostrado en la *Figura IV-7*, con las coordenadas $\xi, \eta \in [-1,1]^2$. Se trata de un elemento de cuatro nodos con independencia del grado de interpolación.

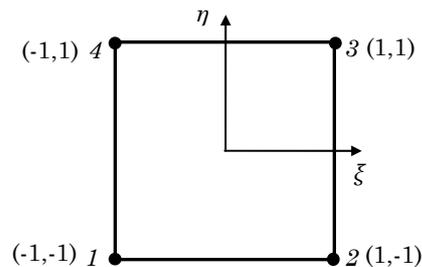


Figura IV-7. Elemento cuadrilátero normalizado.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

En la Tesis se han empleado las funciones de forma de orden 2, 3 y 4 que vienen dadas a continuación. Para conocer más detalles de su obtención se puede consultar el trabajo de Tarancón J.E. [115].

Funciones de forma jerárquicas de orden 2 (modos laterales):

$$\begin{aligned}
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta)\phi_2(\xi) \\
 N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)\phi_2(\eta) \\
 N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\eta)\phi_2(\xi) \\
 N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)\phi_2(\eta) \\
 \phi_2(\xi) &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\xi^2) \quad \phi_2(\eta) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{IV-24}$$

Funciones de forma jerárquicas de orden 3 (modos laterales):

$$\begin{aligned}
 N_9(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta)\phi_3(\xi) \\
 N_{10}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)\phi_3(\eta) \\
 N_{11}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2}(1+\eta)\phi_3(\xi) \\
 N_{12}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2}(1-\xi)\phi_3(\eta) \\
 \phi_3(\xi) &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\xi(1-\xi^2) \quad \phi_3(\eta) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\eta(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{IV-25}$$

Funciones de forma jerárquicas de orden 4 (modos laterales y modo interno para N_{17}):

$$\begin{aligned}
 N_{13}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta)\phi_4(\xi) \\
 N_{14}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)\phi_4(\eta) \\
 N_{15}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\eta)\phi_4(\xi) \\
 N_{16}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)\phi_4(\eta)
 \end{aligned} \tag{IV-26}$$

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

$$N_{17}(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

$$\phi_4(\xi) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{8}} (5\xi^2 - 1)(1 - \xi^2) \quad \phi_4(\eta) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{8}} (5\eta^2 - 1)(1 - \eta^2)$$

donde ξ y η son las coordenadas del elemento de referencia cuadrilátero representado en la *Figura IV-7*. N_i son las funciones de forma y ϕ_i son las funciones denominadas *modos burbuja*.

En la *Tabla IV-1* se representan las funciones de forma jerárquicas basadas en polinomios de *Legendre* para elementos cuadriláteros. Se han representado las funciones de forma de hasta orden 5. La clasificación se ha realizado teniendo en cuenta el orden polinómico de interpolación, p , y el modo:

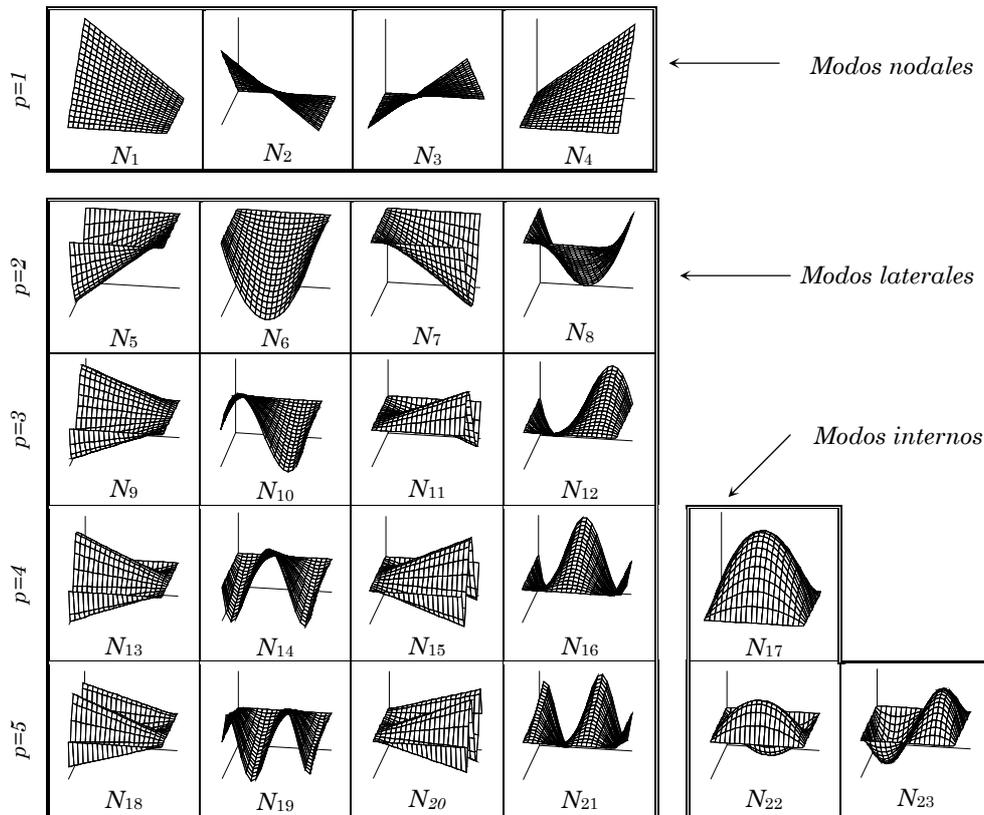


Tabla IV-1 Funciones de forma jerárquicas. Elemento cuadrilátero.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Caso bidimensional: Elemento triangular

En la *Figura IV-8* se representa el triángulo normalizado. Se trata de un elemento con tres nodos con independencia del orden polinómico.

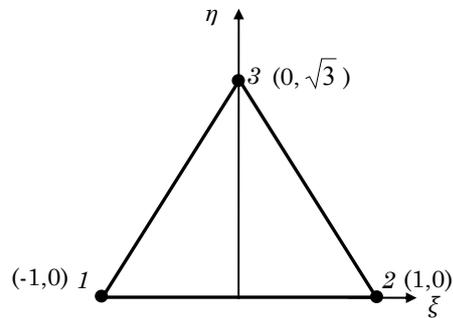


Figura IV-8. Elemento triangular normalizado.

Las coordenadas de área y de volumen se emplean con frecuencia en los triángulos y tetraedros respectivamente. La coordenada L_i está asociada al nodo i , y se define como el cociente entre la distancia del punto considerado al lado opuesto al nodo i y la distancia del nodo a dicho lado. De este modo cada coordenada varía entre 0 y 1. Las coordenadas de área cumplen $L_1+L_2+L_3=1$ para cualquier punto del triángulo.

La relación entre las coordenadas de área y las coordenadas cartesianas ξ y η viene dada en la ecuación (IV-27):

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\ L_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\ L_3 &= \frac{\eta}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{IV-27}$$

A continuación se presentan las funciones de forma jerárquicas de orden 2 (modos laterales):

$$\begin{aligned} N_4(L_1, L_2, L_3) &= L_1 L_2 \varphi_2(L_2 - L_1) \\ N_5(L_1, L_2, L_3) &= L_2 L_3 \varphi_2(L_3 - L_2) \\ N_6(L_1, L_2, L_3) &= L_3 L_1 \varphi_2(L_1 - L_3) \end{aligned} \tag{IV-28}$$

φ_i es el denominado polinomio de *Lobatto*, para el caso de las funciones de forma jerárquicas de orden 2, se tiene $\varphi_2(\xi) = -\sqrt{6}$ (ver Tarancón J.E. [115]).

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

En la *Tabla IV-2* se representan las funciones de forma jerárquicas basadas en polinomios de *Legendre* para el elemento triangular.

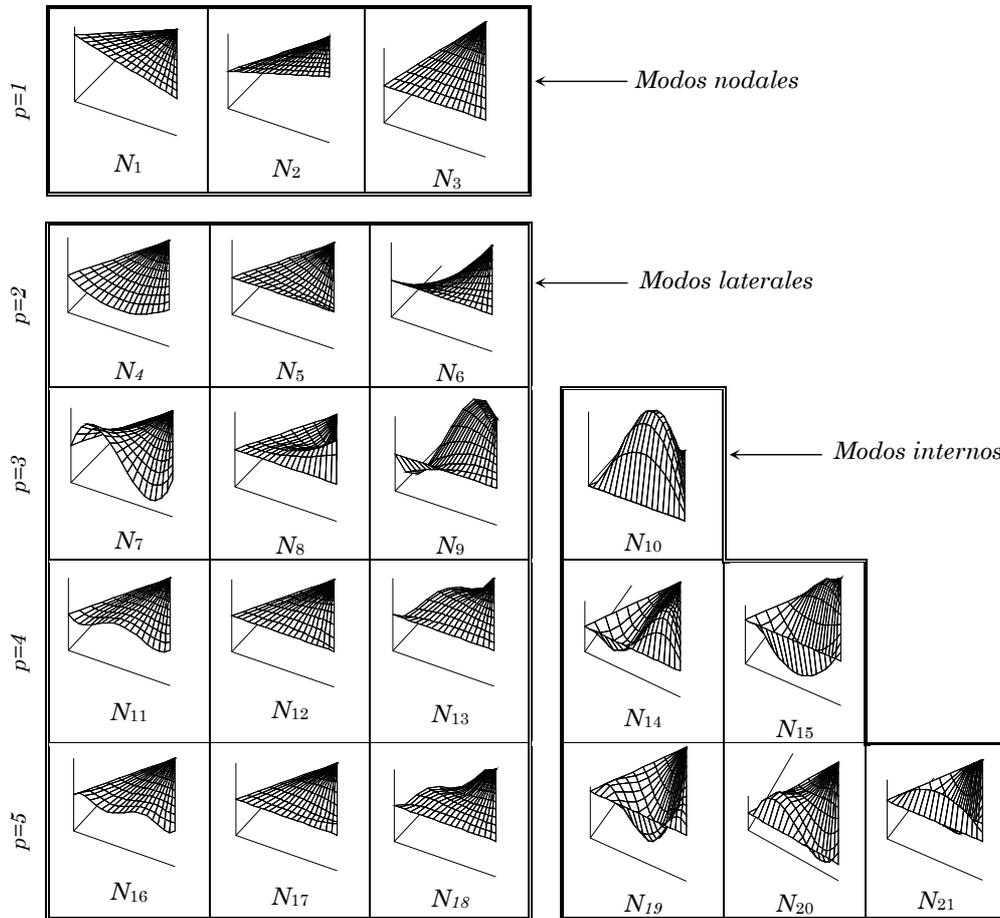


Tabla IV-2. Funciones de forma jerárquicas. Elemento triangular.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Caso tridimensional: elemento tetraédrico

El tetraedro de referencia o normalizado definido por Szabó y Babuška [62] se representa en la *Figura IV-9*.

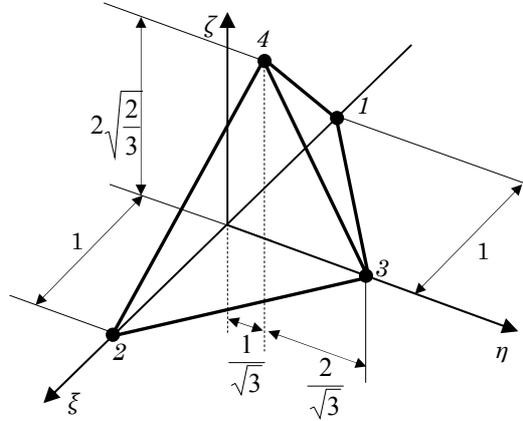


Figura IV-9. Elemento tetraedro normalizado.

Las coordenadas de volumen se pueden relacionar con las coordenadas cartesianas ξ , η , y ζ como sigue:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} - \frac{\zeta}{\sqrt{6}} \right); & L_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} - \frac{\zeta}{\sqrt{6}} \right) \\ L_3 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{8}} \zeta \right); & L_4 &= \sqrt{\frac{3}{8}} \zeta \end{aligned} \quad (\text{IV-29})$$

Para el problema tridimensional, las funciones de forma jerárquicas utilizadas en la Tesis han sido de orden 2, definidas como:

$$\begin{aligned} N_5 &= L_1 L_2 \varphi_2(L_2 - L_1) \\ N_6 &= L_2 L_3 \varphi_2(L_3 - L_2) \\ N_7 &= L_3 L_1 \varphi_2(L_1 - L_3) \\ N_8 &= L_1 L_4 \varphi_2(L_4 - L_1) \\ N_9 &= L_2 L_4 \varphi_2(L_4 - L_2) \\ N_{10} &= L_3 L_4 \varphi_2(L_4 - L_3) \\ \varphi_2(\xi) &= -\sqrt{6} \end{aligned} \quad (\text{IV-30})$$

donde N_i son las funciones de forma jerárquicas asociadas a los lados del tetraedro y φ_2 es el polinomio de *Lobatto* que, para el grado 2, resulta una constante.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

IV.3.2 Elemento de transición mejorado en XFEM aplicado a MFEL en problemas bidimensionales

En este apartado se detallan los aspectos de la formulación e implementación del elemento de transición mejorado en los problemas de MFEL en el caso bidimensional. En el apartado IV.3.3 se extienden estos conceptos al caso tridimensional.

Para el caso bidimensional, los nodos jerárquicos se añaden en los lados entre elementos de transición. Estos son los lados del elemento que conectan un nodo enriquecido, como mínimo con las funciones asociadas al campo asintótico de desplazamiento en extremo de grieta, con un nodo sin este tipo de enriquecimiento. La aproximación dada por la ecuación (III-47) se modifica como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) \cdot H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}_j + \sum_{k \in K} N_k^1(\mathbf{x}) \cdot \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_{kl} \cdot F_l(\mathbf{x}) \right) + \\ & + \sum_{p \in P} \hat{N}_p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}_p + \sum_{q \in Q} \hat{N}_q(\mathbf{x}) \cdot H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_q \end{aligned} \quad (\text{IV-31})$$

Como se observa, se han añadido dos nuevos conjuntos a la aproximación, P y Q . El conjunto P está formado por los nodos jerárquicos asociados con el lado que conecta un nodo enriquecido (miembro del conjunto K) con uno estándar (sin ningún tipo de enriquecimiento), o bien el asociado al modo interno en los elementos de transición no divididos por la grieta. El conjunto Q es el formado por los nodos jerárquicos añadidos restante, esto es, los asociados a los lados que conectan un nodo de conjunto K con un nodo enriquecido del conjunto J que no pertenece a K (es decir, enriquecido únicamente con la función Heaviside), o bien los asociados con el interior de los elementos de transición divididos por la grieta (véanse *Figura IV-10* y *Figura IV-11*). \hat{N}_p y \hat{N}_q son las funciones jerárquicas, los coeficientes \mathbf{d}_p y \mathbf{e}_q son los grados de libertad adicionales que, por tratarse de una mejora local, no afectarán de manera importante al tiempo de cálculo. Con la modificación propuesta en los elementos de transición, la continuidad C^0 de la aproximación permanece invariable.

Cuando un elemento intersectado completamente por la grieta es un elemento de transición, es necesario añadir la función de enriquecimiento Heaviside a las funciones de forma jerárquicas que van a corregir dicho elemento. Esto es así porque el dominio de influencia de las funciones de forma jerárquicas es cortado por la grieta igual que les sucede a las funciones de forma de la interpolación estándar. De este modo, el elemento mejorado permitirá

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

representar la discontinuidad en los elementos intersectados por la grieta. Esto justifica la necesidad de establecer dos conjuntos de nodos Q y P con sus respectivas funciones de interpolación.

Las funciones de forma jerárquicas de orden superior a las utilizadas en la interpolación estándar pueden compensar parcialmente los términos no deseados que aparecen en los elementos de transición como sucedía con la función $\xi(1-\xi)$ en la ecuación (IV-21) en el análisis unidimensional previo (véase sección IV.2).

Como se indicó en la sección IV.2, en el campo de MFEL, la propuesta de mejorar los elementos de transición tiene como objetivo incrementar la precisión. Para alcanzar la velocidad de convergencia óptima es necesario realizar un enriquecimiento geométrico (véase sección III.4.3.2).

En la *Figura IV-10* se muestra un ejemplo, considerando cuadriláteros lineales, en el que aparecen los diferentes conjuntos (J , K , P y Q) en los que se modifica la aproximación estándar (véase ecuación (IV-31)) así como el orden de las funciones de forma jerárquicas empleadas. En esta misma figura, se muestran las funciones de forma jerárquicas utilizadas en la mejora de los elementos de transición para el caso del cuadrilátero lineal. Como se observa, las funciones son de orden dos, correspondientes a modos laterales del elemento.

En la *Figura IV-11* se tiene el caso análogo al anterior para elementos cuadriláteros cuadráticos. El orden cuadrático de los elementos se consigue empleando el método p , es decir, se mantienen los modos nodales dados por las funciones de forma lineales (funciones N_1 , N_2 , N_3 y N_4 representadas en la *Tabla IV-1*) y se añaden las funciones de forma jerárquicas de segundo orden. Notar que el enriquecimiento con funciones Heaviside se realiza empleando funciones de forma del mismo orden que la interpolación estándar en el elemento, es decir, orden 2. Las funciones de forma empleadas para mejorar los elementos de transición son de orden 3 y únicamente la función de orden 4 asociada al primer modo interno del cuadrilátero.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

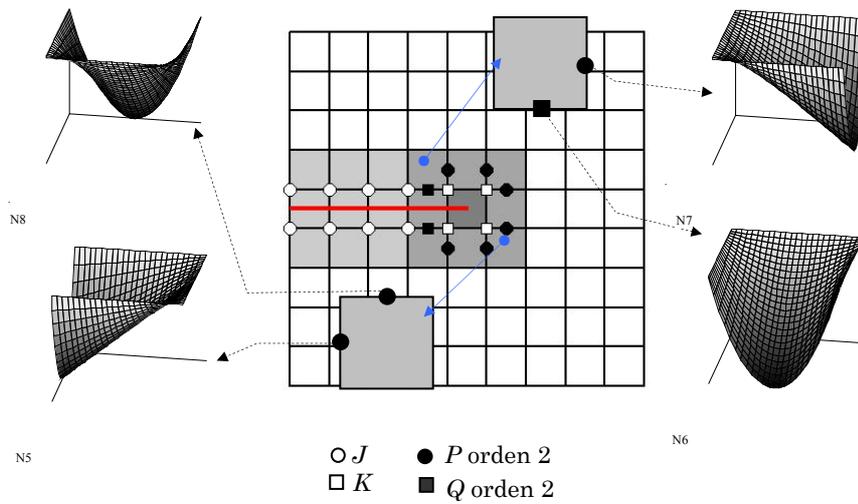


Figura IV-10. Funciones de forma jerárquicas en elementos de transición para mallas con cuadriláteros lineales.

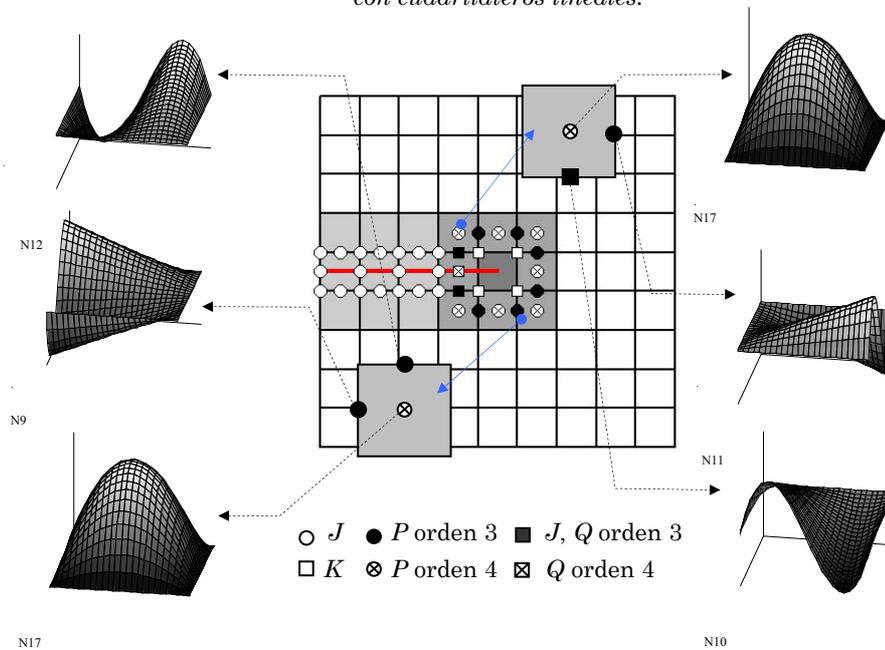


Figura IV-11. Funciones de forma jerárquicas en elementos de transición para mallas con cuadriláteros cuadráticos.

En el ejemplo numérico del apartado IV.4.2 se muestra que la influencia de las funciones de forma de orden superior a las aquí mostradas, para el caso de

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

elemento lineal, así como la influencia de las funciones de cuarto orden asociadas a los modos laterales para el caso del elemento cuadrático, resulta despreciable en la mejora de los elementos de transición.

Cuando el enriquecimiento es geométrico es posible que se tengan los denominados *nodos mixtos*, es decir los nodos que son enriquecidos con las funciones del campo asintótico de extremo de grieta y con la función Heaviside al mismo tiempo (ver apartado III.5.1).

En la *Figura IV-12* se muestra un ejemplo para diferentes grados de interpolación. Para elementos lineales, cuando el lado del elemento de transición conecta un *nodo mixto* con uno estándar, se corrige con la función de forma jerárquica y si conecta un *nodo mixto* con uno enriquecido con Heaviside se corrige con la función jerárquica multiplicada por el valor de la función Heaviside. En cualquier otro caso no se corrige. Para el caso de elementos cuadráticos, el tratamiento de los lados es análogo al caso de elementos lineales pero, en este caso, la función de forma jerárquica es de orden 3. El criterio para añadir el modo interno no varía con respecto al enriquecimiento topológico.

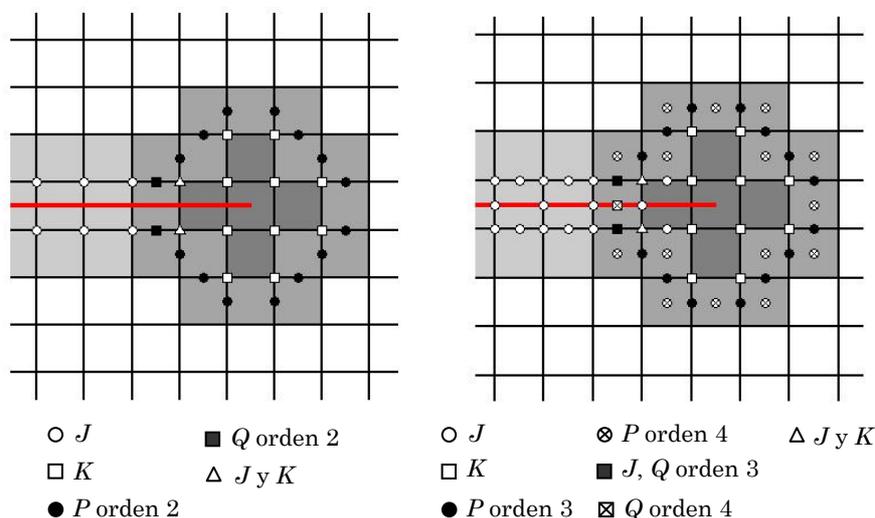


Figura IV-12. Corrección de los elementos de transición. Presencia de nodos mixtos. Izquierda, malla de elementos lineales; derecha, malla de elementos cuadráticos.

IV.3.3 Extensión a 3D del elemento de transición mejorado en XFEM aplicado a MFEL

Para el caso 3D, se ha considerado el elemento tetraedro lineal de referencia que viene representado en la *Figura IV-9*. La metodología expuesta en el

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

apartado IV.3.2 para la mejora de los elementos de transición es extensible a 3D. Así, la interpolación del campo de desplazamiento en los elementos de transición viene dada por la ecuación (IV-31), que a continuación se recuerda:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) \cdot H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}_j + \sum_{k \in K} N_k^1(\mathbf{x}) \cdot \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_{kl} \cdot F_l(\mathbf{x}) \right) + \\ & + \sum_{p \in P} \hat{N}_p(\mathbf{x}) \mathbf{d}_p + \sum_{q \in Q} \hat{N}_q(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{e}_q \end{aligned} \quad (\text{IV-32})$$

Como se ha indicado en el caso 2D, para mejorar el elemento de transición se deben añadir las funciones de forma de orden inmediatamente superior a la interpolación estándar. Además, en el caso de elementos cuadráticos resulta beneficioso incluir también el modo interno de cuarto orden. Recordar que los nodos jerárquicos se añaden en los lados que conectan un nodo enriquecido con las funciones del primer término del desarrollo del campo asintótico de extremo de grieta (conjunto K) con cualquier otro nodo.

Para el caso 3D, esta idea se debe extender a todos los lados del elemento de transición aún cuando conecten dos nodos no enriquecidos o dos nodos del conjunto K . Esto es debido a que resulta necesario completar el orden de la aproximación en las caras del tetraedro para compensar los términos patológicos no deseados.

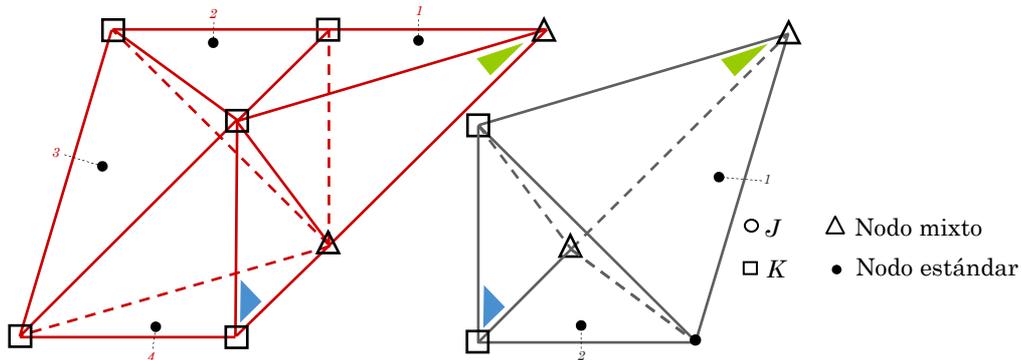


Figura IV-13. Descomposición de una malla de tetraedros: izquierda, dominio completamente enriquecido; derecha, elementos de transición.

En la *Figura IV-13* se muestra un ejemplo en el que se han diferenciado los elementos completamente enriquecidos de los de transición. A la izquierda se consideran cuatro elementos cuyos nodos pertenecen al conjunto K , esta condición incluye por lo tanto a los nodos mixtos. A la derecha se tienen dos elementos de transición. Como se observa, para este caso, los elementos que

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

ahora se consideran separados, en la malla real comparten las caras sombreadas del mismo color. En un caso más general, es posible que los elementos sólo compartan un lado.

Los nodos jerárquicos se añaden en todos los lados de los dos elementos de transición siguiendo el mismo criterio que ha sido utilizado en el caso 2D (véase *Figura IV-14*).

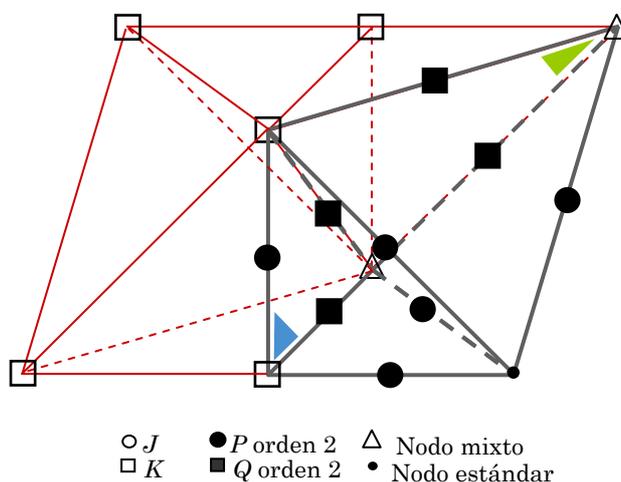


Figura IV-14. Elemento de transición mejorado en 3D (en gris).

En el caso 3D se han considerado elementos lineales, por lo tanto las funciones de forma jerárquicas que se añaden son de orden dos. Estas funciones vienen dadas por las ecuaciones (IV-30). Al igual que en el caso 2D, cuando el lado del elemento de transición conecta un nodo enriquecido con funciones singulares con un nodo mixto, se añade la correspondiente función de forma jerárquica multiplicada por el valor de la función Heaviside (conjunto Q). En el caso de que el elemento conecte dos nodos mixtos, se corrige del mismo modo y en cualquier otro caso se añade únicamente la función de forma jerárquica (conjunto P) o bien se aplica el mismo criterio que en el caso 2D.

Considérese el problema tridimensional descrito en el apartado IV.4.10 donde el dominio analizado se representa en la *Figura IV-46*. En la *Figura IV-15* se muestra cómo se mejora el elemento de transición en el caso considerado. Ayudándose de la vista correspondiente al plano de corte $z = 0$, se pueden diferenciar los casos estudiados. Por un lado se tiene la malla XFEM estándar (imágenes superiores). La adición de las funciones de forma jerárquicas según el criterio 2D (imágenes centrales), es decir, en aquellos lados que conectan un nodo enriquecido con las funciones singulares con otro no enriquecido con estas funciones, no resulta la mejor opción para el caso 3D como se ha podido comprobar numéricamente (ver apartado IV.4.10). Es necesario mejorar la

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

aproximación en todos los lados de los elementos de transición (imágenes inferiores) para lograr resultados óptimos. Ésta es la propuesta de mejora del elemento de transición en el caso 3D en la Tesis, *XFEM+ETM mod.*

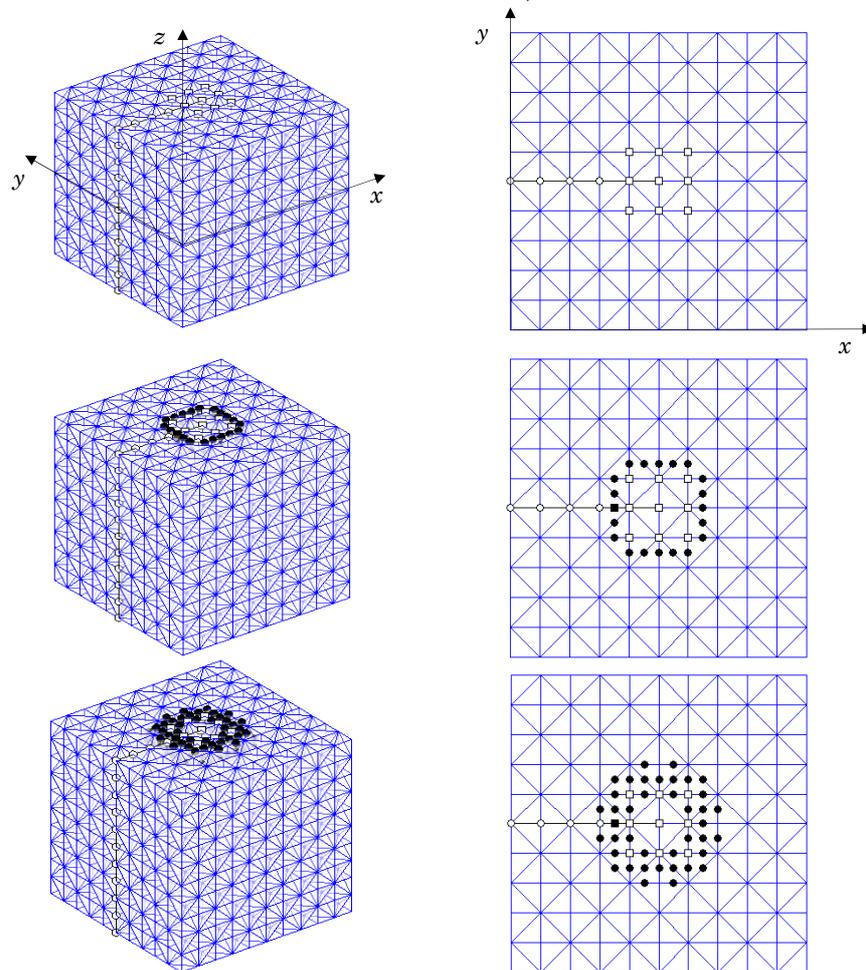


Figura IV-15. De arriba a abajo: XFEM, XFEM+ETM, XFEM+ETM mod. Malla tridimensional (izquierda), corte de la malla por el plano $z = 0$ (derecha).

IV.4 Resultados numéricos

IV.4.1 Introducción

En esta sección se muestran algunos ejemplos de aplicación de la propuesta realizada para mejorar el elemento de transición en el método XFEM. En todos ellos se ha utilizado enriquecimiento geométrico o área fija puesto que es la

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

condición que garantiza la velocidad de convergencia óptima, cuando las funciones de enriquecimiento que se utilizan son las del primer término del campo asintótico de extremo de grieta (ver sección III.5.1). Para analizar el error en la aproximación, se utilizan dos problemas con solución exacta conocida. Las magnitudes analizadas son el *error relativo en norma energética* y el *error relativo en el factor de intensidad de tensiones*.

La *norma energética* para la solución exacta se determina como:

$$\|\mathbf{u}_{\text{ex}}\| = \sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\text{ex}}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{\text{ex}} d\Omega} = \sqrt{2U_{\text{ex}}} \quad (\text{IV-33})$$

De forma similar, se tiene la definición de la norma energética para la solución estimada por elementos finitos:

$$\|\mathbf{u}_{\text{ef}}\| = \sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}} d\Omega} = \sqrt{2U_{\text{ef}}} \quad (\text{IV-34})$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_{\text{ex}}$ y $\boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}}$ son los campos de tensiones exacto y estimado por elementos finitos respectivamente y \mathbf{D} es la matriz de elasticidad que relaciona las deformaciones con las tensiones. Como se muestra en las ecuaciones (IV-33) y (IV-34), el sentido físico de la norma energética es que representa la raíz cuadrada del doble de la energía de deformación (U_{ex} y U_{ef}).

La norma energética del error se determina como:

$$\|\mathbf{e}_{\text{ex}}\| = \|\mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_{\text{ef}}\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{\text{ex}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{\text{ex}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}}) d\Omega} \quad (\text{IV-35})$$

Esta norma de error se calcula a nivel local, integrando en cada subdominio Ω_e (elemento). Para obtener la norma energética del error global (para la malla

entera) se suma la contribución de cada elemento ($\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^e$):

$$\|\mathbf{e}_{\text{ex}}\|^2 = \sum_{e=1}^{n_e} \|\mathbf{e}_{\text{ex}}\|_e^2 \quad (\text{IV-36})$$

El *error relativo exacto en norma energética* viene dado por la relación entre la norma energética del error (ecuación (IV-36)) y la norma energética exacta (ecuación (IV-33)):

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

$$\eta_{ex} = \frac{\|\mathbf{e}_{ex}\|}{\|\mathbf{u}_{ex}\|} \quad (IV-37)$$

La norma del error así definida se puede aproximar a (ver Bugeda [63]):

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx \sqrt{\|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2} \quad (IV-38)$$

La igualdad en la ecuación anterior se tiene cuando no existen esfuerzos por unidad de superficie aplicados. Teniendo en cuenta las ecuaciones (IV-33) y (IV-34) la expresión anterior queda:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx \sqrt{\|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2} = \sqrt{2(U_{ex} - U_{ef})} \quad (IV-39)$$

Si se consideran las ecuaciones (IV-33), (IV-43) y (IV-39), η_{ex} se puede calcular de manera aproximada como:

$$\eta_{ex} \approx \sqrt{\frac{U_{ex} - U_{ef}}{U_{ex}}} \quad (IV-40)$$

Para el cálculo del factor de intensidad de tensiones se ha utilizado como método de extracción la integral de interacción (método ampliamente utilizado por precisión y bien adaptado a su utilización con FEM y XFEM, véase apartado II.6). La integral viene dada por:

$$I^{(1,2)} = \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{li} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (IV-41)$$

Donde los campos marcados con el superíndice (1) son los correspondientes a la aproximación numérica a la solución del problema sometido a análisis, y los marcados con el superíndice (2) son los campos auxiliares que representan el primer término del campo de desplazamiento asintótico para los modos I y II; u_i es la componente del campo de desplazamiento en la dirección x_i (sistema local de coordenadas en el extremo de grieta con x_1 paralelo a las caras de la grieta); σ_{ij} es el campo de tensiones; ε_{ij} es el campo de deformaciones; $W^{(1,2)}$ es la densidad de la energía de deformación en términos del producto $\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$; δ_{ij} es la delta de *Kronecker*; y q_1 es una función de ponderación lo suficientemente suave que toma valor cero en el contorno exterior al dominio de extracción y 1 en el extremo de grieta.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

De la ecuación (IV-41), los factores K_I y K_{II} se pueden calcular como sigue:

$$K_I = \frac{E' I^{(I,I)}}{2}, \quad K_{II} = \frac{E' I^{(I,II)}}{2} \quad (IV-42)$$

Donde $E' = E$ en el caso de tensión plana y $E' = E(1-\nu^2)/2$ en deformación plana, siendo E el módulo de *Young* y ν el coeficiente de *Poisson*. La función q_1 utilizada en este estudio, toma valor uno para todos los nodos contenidos en el círculo de radio r_q medido desde el extremo de grieta, y se anula en el resto de nodos.

IV.4.2 Influencia de los modos de orden superior en la mejora de los elementos de transición

Como se ha descrito en el apartado IV.3.2, la mejora de los elementos de transición se puede conseguir añadiendo términos de orden superior a la interpolación estándar capaces de cancelar el efecto de los términos patológicos consecuencia de la falta de partición de la unidad en el dominio de transición. En este apartado se analiza la influencia de las funciones de forma jerárquicas de orden superior en la mejora de los elementos de transición.

Para el caso bidimensional se considera, en primer lugar, el elemento cuadrilátero bilineal. Como se ha descrito en el apartado IV.3.2, para mejorar la aproximación en el dominio local de transición, se añaden las funciones de forma jerárquicas de orden 2. En este apartado, se muestra la influencia de las funciones de orden 3 y orden 4.

Considerando elementos cuadriláteros cuadráticos, si se sigue el mismo planteamiento realizado para el caso lineal, se debería añadir a la formulación estándar las funciones de forma jerárquicas asociadas a los modos laterales de tercer orden, esto es, un orden más que la interpolación. No obstante, en el siguiente ejemplo numérico se muestra la influencia beneficiosa del modo interno de cuarto orden. Asimismo, se observa cómo la influencia de las funciones de forma jerárquicas asociadas a modos laterales de cuarto orden resulta despreciable.

Se considera el problema descrito en el ejemplo numérico de la sección III.5.3. El dominio a estudio viene dado por $\Omega = [-1,1]^2$ con una grieta en el borde de longitud $a = 1$, como se muestra en la *Figura IV-16*.

Se imponen los desplazamientos correspondientes al campo de la solución exacta para un problema en modo I puro, en concreto para valores de $K_I = 100$ y $K_{II} = 0$. El número de elementos considerado para ambas direcciones x e y ha sido [9, 17, 33, 65].

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

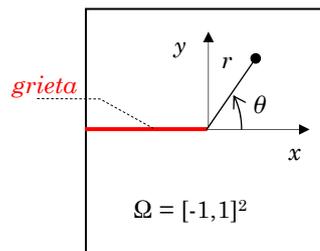


Figura IV-16 Problema de grieta en el borde.

Para el caso lineal se han realizado los siguientes análisis:

- XFEM sin elemento de transición mejorado (ETM),
- XFEM con ETM empleando funciones de forma jerárquicas de orden 2 (funciones N_5, N_6, N_7 y N_8 de la Tabla IV-1),
- XFEM con ETM empleando las funciones de forma jerárquicas de orden 2 más las de orden 3 (funciones N_9, N_{10}, N_{11} y N_{12} de la Tabla IV-1),
- XFEM con ETM empleando las funciones de forma jerárquicas de orden 2, 3 y de orden 4, tanto las asociadas a modos laterales (funciones N_{13}, N_{14}, N_{15} y N_{16} de la Tabla IV-1) como la función asociada al modo interno (función N_{17} de la Tabla IV-1).

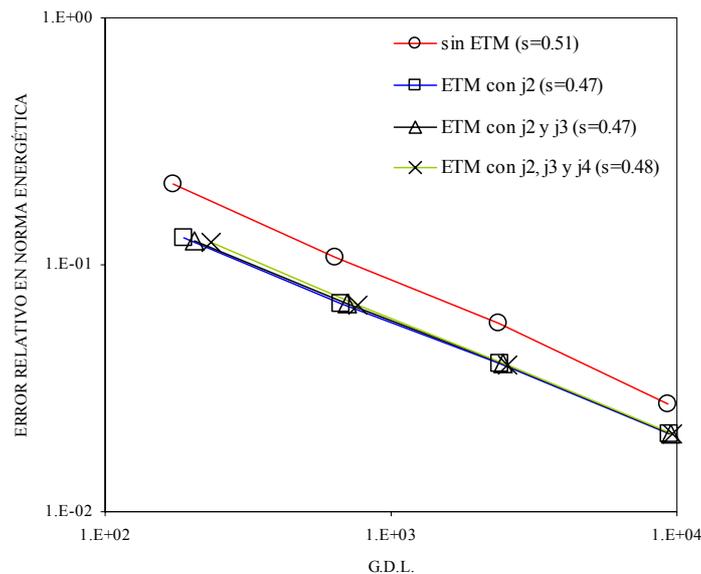


Figura IV-17. Convergencia del error relativo en norma energética. XFEM con elementos cuadriláteros lineales.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

En la *Figura IV-17* se muestran los resultados obtenidos. Como era sabido, al mejorar los elementos de transición disminuye el error en los análisis. No obstante, la influencia de las funciones de forma jerárquicas de orden superior a 2 resulta despreciable, tanto en precisión como en la velocidad de convergencia, s . Por lo tanto, estas funciones de orden superior no serán consideradas para mejorar los elementos de transición en el caso de mallas con cuadriláteros lineales.

Para el caso de cuadriláteros cuadráticos se han analizado los siguientes casos:

- XFEM sin elemento de transición mejorado,
- XFEM con ETM empleando las funciones de forma jerárquicas de orden 3,
- XFEM con ETM empleando las funciones de forma jerárquicas de orden 3 y, además, la función de forma jerárquica de orden 4 asociada al modo interno del elemento,
- XFEM con ETM empleando las funciones de forma jerárquicas de orden 3 y de orden 4, asociadas a los modos laterales del elemento y la función de orden 4 correspondiente al modo interno.

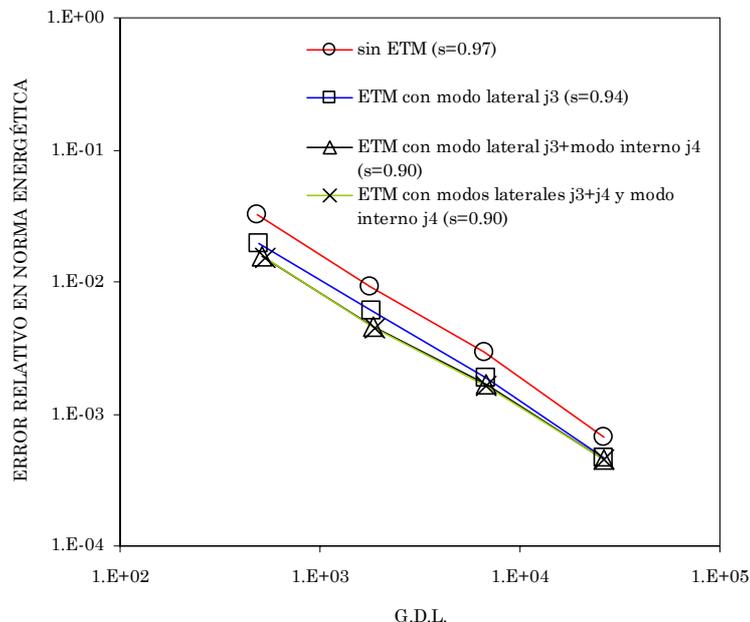


Figura IV-18. Convergencia del error relativo en norma energética. XFEM con elementos cuadriláteros cuadráticos.

Como se observa en la *Figura IV-18*, el efecto beneficioso más importante se tiene cuando se añade a la interpolación un orden inmediato superior, en este caso, orden 3. Si bien es verdad que añadir el primer modo interno (orden 4)

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

resulta ventajoso especialmente en las mallas con mayor tamaño de elemento. Asimismo, se observa despreciable la influencia del cuarto orden para el caso de los modos laterales, no siendo pues necesaria su implementación. Por lo tanto, para el caso de elementos cuadriláteros cuadráticos, no es necesaria la implementación de las funciones de cuarto orden asociadas a los modos laterales para mejorar los elementos de transición.

IV.4.3 Problema de una grieta en borde: modo I y modo II

Se considera el problema descrito en el ejemplo numérico de la sección IV.4.2. El dominio a estudio viene dado por $\Omega=[-1,1]^2$ con una grieta en el borde de longitud $a = 1$ tal y como se muestra en la *Figura IV-16*. En el contorno se imponen las condiciones de desplazamiento correspondientes a la solución exacta dadas por las ecuaciones (II-57) y (II-58).

Para el análisis de convergencia se ha utilizado una secuencia de mallas estructuradas de elementos cuadriláteros (lineales y cuadráticos) con 9, 17, 33, 65 y 129 elementos en cada dirección respectivamente. El enriquecimiento geométrico con las funciones singulares correspondientes al primer término del desarrollo asintótico de la solución de extremo de grieta, se ha realizado en un área circular con $R = 0.2$ con centro en el extremo de grieta. Para la extracción de los FIT se han calculado las integrales de interacción, a través de la ecuación (IV-41). La función q se ha determinado con $r_q = 0.9$.

El primer problema considerado es el modo I, con $K_I = 100$ y $K_{II} = 0$. En la *Figura IV-19* se muestra el error relativo en norma energética frente al número de grados de libertad del problema analizado. En este caso, se compara el error que se tiene utilizando el método estándar XFEM con el obtenido cuando se añade el elemento de transición mejorado (XFEM+ETM) en los dos esquemas de enriquecimiento, el topológico y el geométrico. Como se puede ver, la precisión que se alcanza cuando se utiliza el elemento de transición mejorado es mayor en cualquier caso.

En la *Figura IV-19* también se muestran las velocidades de convergencia, s . Como es sabido, cuando la singularidad está correctamente modelada, la velocidad de convergencia óptima es 0.5 para el caso de elementos lineales y 1 para cuadráticos lo cual sólo se consigue con el enriquecimiento geométrico como ya se había comentado en la sección III.4.3.2.

También se muestra cómo, a medida que la malla se refina, para el caso de elementos cuadráticos fundamentalmente, la mejora de la precisión no resulta tan significativa. Esto puede ser debido a que, a medida que se disminuye el tamaño de elemento, se reduce la proporción de la capa formada por los

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

elementos de transición en relación al dominio del problema. Este efecto sólo se tiene para el caso de enriquecimiento geométrico.

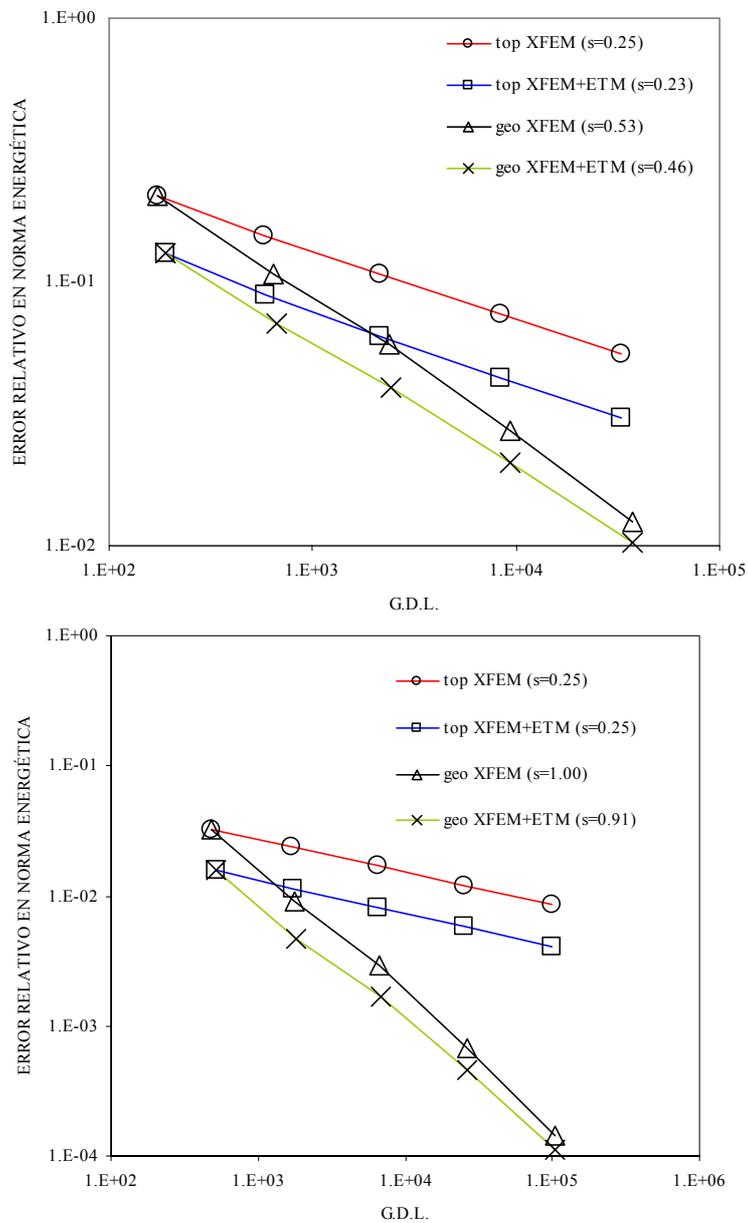


Figura IV-19. Convergencia del error relativo en norma energética para el modo I: (arriba) lineales, (abajo) cuadráticos (s es la velocidad de convergencia).

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Como se observa en la *Figura IV-19*, los resultados obtenidos con enriquecimiento topológico correspondientes a XFEM y a XFEM+ETM, se ajustan a rectas paralelas, tanto para elementos lineales como cuadráticos. Este resultado es coherente con las conclusiones que se han podido deducir en el apartado IV.4.6.

En la *Figura IV-20* se muestra la distribución de la norma energética del error (véase (IV-35)) en cada elemento. Se ha considerado una malla de 33×33 elementos utilizando enriquecimiento geométrico para ambos tipos de análisis (XFEM y XFEM+ETM). Las zonas más oscuras se corresponden al valor máximo del error local que se alcanzan con el método XFEM estándar; los colores más claros representan errores más pequeños (en blanco se representa el error nulo). También se indican sobre la malla los nodos enriquecidos. Con el método XFEM estándar el error es mayor en la región enriquecida con las funciones singulares, especialmente en los elementos que contienen las caras de la grieta. Se puede ver cómo el elemento de transición mejorado reduce considerablemente el error en toda la región enriquecida.

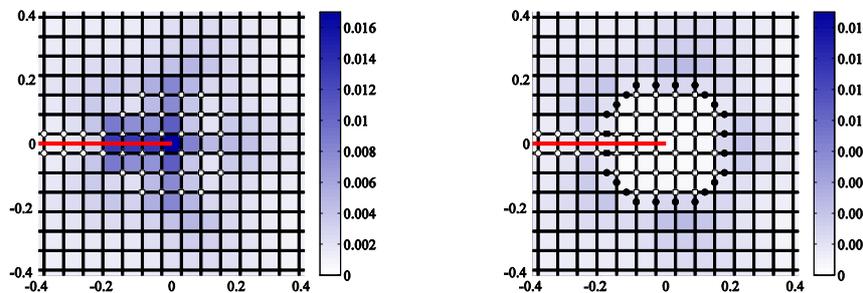


Figura IV-20. Distribución de la norma energética del error para el modo I, 33×33 elementos lineales. Izquierda, XFEM estándar; derecha, XFEM con ETM.

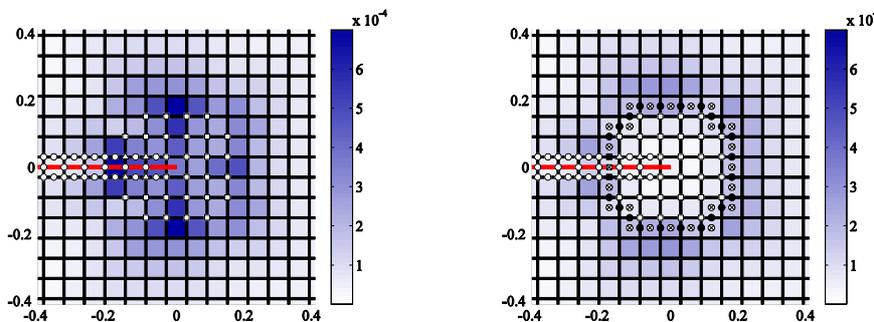


Figura IV-21. Distribución de la norma energética del error para el modo I, 33×33 elementos cuadráticos. Izquierda, XFEM estándar; derecha, XFEM con ETM.

La misma información se tiene en la *Figura IV-21* para el caso de elementos cuadráticos. En este caso el error en XFEM estándar es mayor en los elementos

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

de transición. Al mejorar estos elementos, aumenta la precisión en la zona enriquecida.

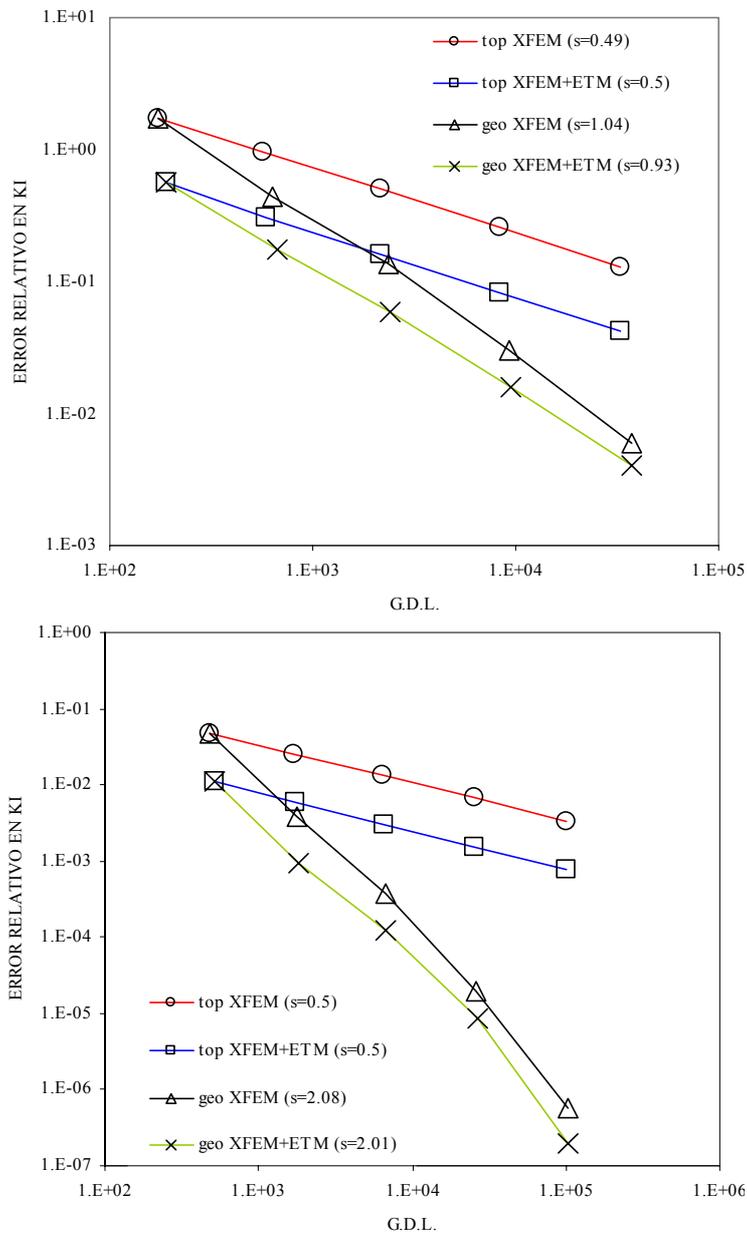


Figura IV-22. Convergencia del error relativo en el factor de intensidad de tensiones K_I : (arriba) elementos lineales, (abajo) elementos cuadráticos (s es la velocidad de convergencia).

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

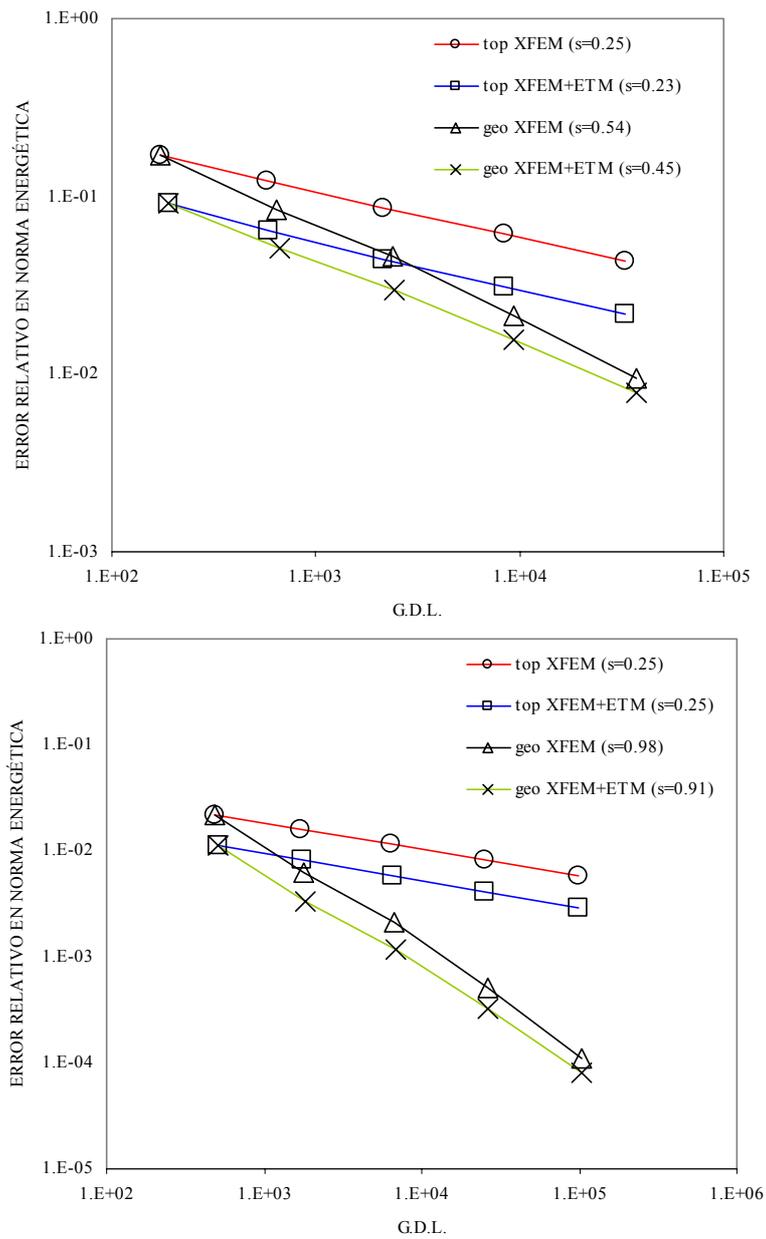


Figura IV-23. Convergencia del error relativo en norma energética para el modo II: (arriba) elementos lineales, (abajo) elementos cuadráticos (s es la velocidad de convergencia).

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

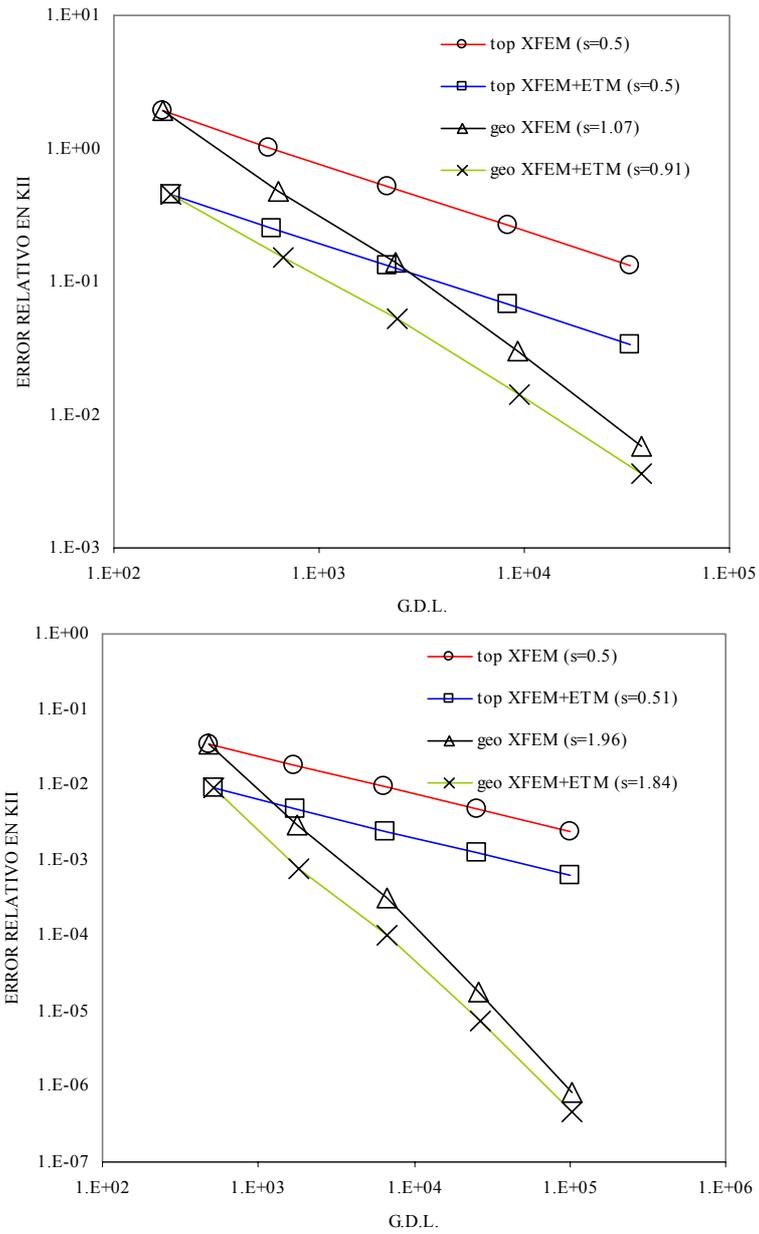


Figura IV-24. Convergencia del error relativo en el factor de intensidad de tensiones K_{II} : arriba: elementos lineales, abajo: elementos cuadráticos (s es la velocidad de convergencia).

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

En la *Figura IV-22* se representa la convergencia del error relativo en el factor de intensidad de tensiones K_I frente al número de grados de libertad. La velocidad de convergencia óptima es 1 para elementos lineales y 2 para cuadráticos. Se muestra nuevamente que los elementos de transición mejorados propuestos siempre dan mejores resultados, y que para lograr la velocidad de convergencia óptima es necesario utilizar el enriquecimiento geométrico.

En la *Figura IV-23* se muestra el error relativo en norma energética bajo las condiciones de contorno correspondientes al modo II, con $K_{II} = 100$ ($K_I = 0$).

En La *Figura IV-24* se representa el error relativo en el factor de intensidad de tensiones para el modo II. Los resultados son similares a los mostrados para el problema en modo I.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Además se tienen las siguientes relaciones:

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau_\infty \sqrt{\pi a} \quad (\text{IV-44})$$

$$t = m + in, \quad m = x_1^2 - x_2^2 - a^2, \quad n = 2x_1x_2 \quad (\text{IV-45})$$

$$\bar{\phi} = \arg t = \arg(m + in), \quad \phi = \arg(m - in) \quad (\text{IV-46})$$

siendo $i = \sqrt{-1}$. Se ha considerado un estado de deformación plana. El campo de tensiones correspondiente a la solución exacta viene dado por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{\sqrt{\pi a |t|}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \cos \frac{\phi}{2} - x_2 \sin \frac{\phi}{2} + x_2 \frac{a^2}{|t|^2} \left(m \sin \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \\ x_2 \frac{a^2}{|t|^2} \left(m \cos \frac{\phi}{2} + n \sin \frac{\phi}{2} \right) \\ x_1 \cos \frac{\phi}{2} - x_2 \sin \frac{\phi}{2} - x_2 \frac{a^2}{|t|^2} \left(m \sin \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \end{array} \right\} + \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a |t|}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \left(x_1 \sin \frac{\phi}{2} + x_2 \cos \frac{\phi}{2} \right) - x_2 \frac{a^2}{|t|^2} \left(m \cos \frac{\phi}{2} + n \sin \frac{\phi}{2} \right) \\ x_1 \cos \frac{\phi}{2} - x_2 \sin \frac{\phi}{2} + x_2 \frac{a^2}{|t|^2} \left(m \sin \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \\ x_2 \frac{a^2}{|t|^2} \left(m \cos \frac{\phi}{2} + n \sin \frac{\phi}{2} \right) \end{array} \right\} \quad (\text{IV-47}) \end{aligned}$$

Los análisis numéricos se han realizado sobre el dominio finito Ω mostrado en la *Figura IV-25* con $a = 1$ y $b = 2$. El campo de desplazamiento dado por la ecuación (IV-43) ha sido impuesto a lo largo del contorno del dominio con condiciones de modo mixto tal que $K_I = 100$ y $K_{II} = 100$. Las propiedades del material considerado son, el módulo de *Young* $E = 10^7$ y el coeficiente de *Poisson* $\nu = 0.333$. Para el análisis de convergencia, se ha utilizado una secuencia de mallas estructuradas de cuadriláteros (de orden lineal y cuadrático) con 9, 17, 33, 65 y 129 elementos en cada dirección respectivamente. Las funciones de ponderación empleadas para calcular los FIT son $r_q = 0.9$ y el radio de enriquecimiento $R = 0.2$, igual que para el problema de solución singular (véase sección IV.4.3).

La *Figura IV-26* muestra el error relativo en norma energética frente al número de grados de libertad. Los casos analizados son XFEM y XFEM+ETM para el caso de enriquecimiento topológico y geométrico. Se han considerado elementos lineales y cuadráticos. En los resultados se observa que, al igual que en el problema del apartado anterior, la velocidad de convergencia óptima se alcanza

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

utilizando enriquecimiento geométrico y la mejora en los elementos de transición siempre aumenta la precisión de los resultados.

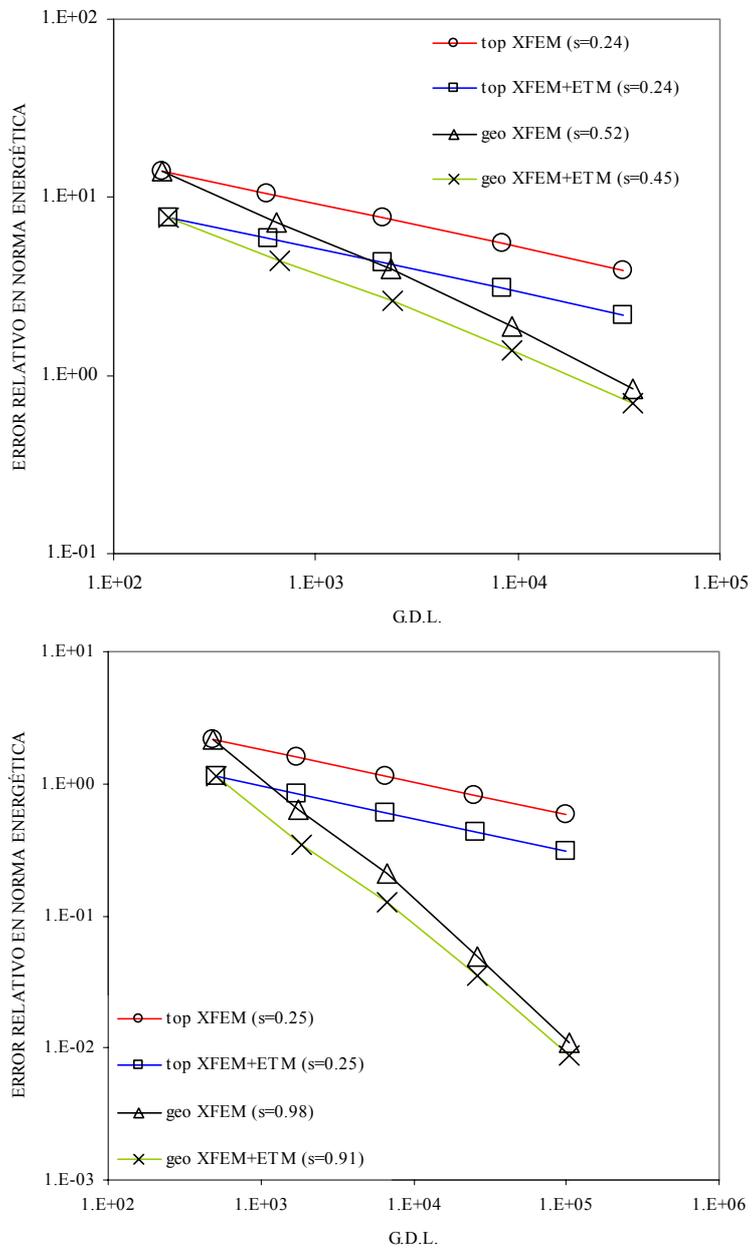


Figura IV-26. Convergencia del error relativo en norma energética para modo mixto: (arriba) elementos lineales, (abajo) elementos cuadráticos.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

En la *Figura IV-27* y la *Figura IV-28* se muestra la distribución de la norma energética del error por elemento considerando nuevamente la malla de 33×33 elementos con enriquecimiento geométrico; se presentan los resultados para XFEM y para XFEM+ETM, con elementos lineales y cuadráticos respectivamente. Los resultados son similares al ejemplo anterior y la mejora de los elementos de transición reduce considerablemente el error en la zona enriquecida.

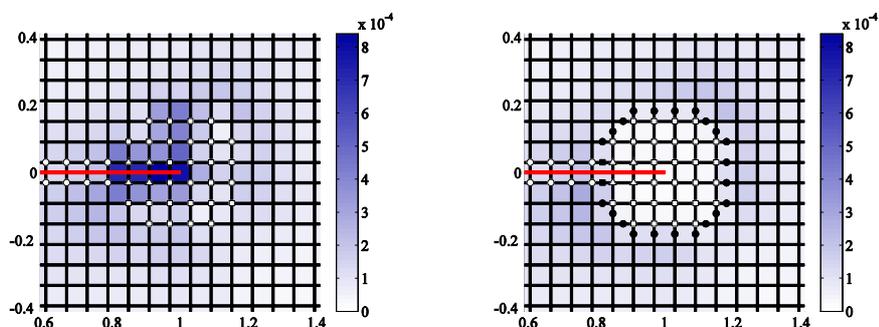


Figura IV-27. Distribución de la norma energética del error en cada elemento para modo mixto, malla de 33×33 elementos lineales. Izquierda, XFEM estándar; derecha, XFEM con elemento de transición mejorado.

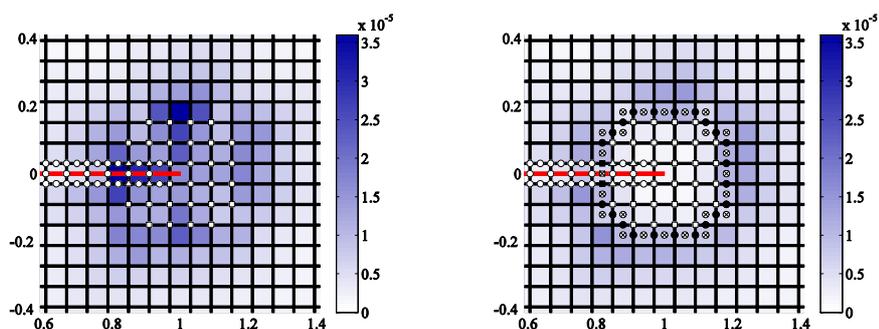


Figura IV-28. Distribución de la norma energética del error en cada elemento para modo mixto, malla de 33×33 elementos cuadráticos. Izquierda, XFEM estándar; derecha, XFEM con elemento de transición mejorado.

La *Figura IV-29* y la *Figura IV-30* muestran el error relativo en los factores de intensidad de tensiones, K_I y K_{II} respectivamente, frente al número de grados de libertad del problema. Se observa una tendencia similar al caso del error en norma energética con la velocidad de convergencia, s , esperada para el caso de los FIT (véase apartado III.4.3.3).

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

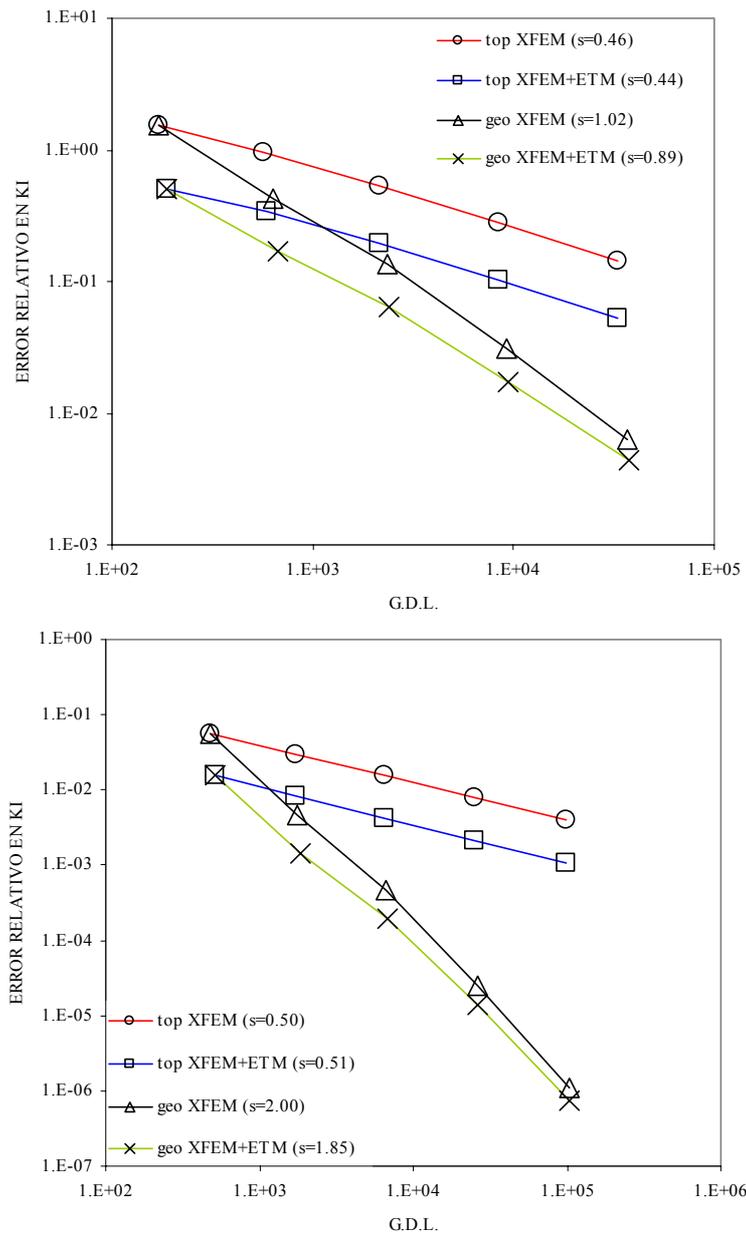


Figura IV-29. Convergencia del error relativo en el FIT Ki. Arriba: elementos lineales. Abajo: elementos cuadráticos. s es la velocidad de convergencia.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

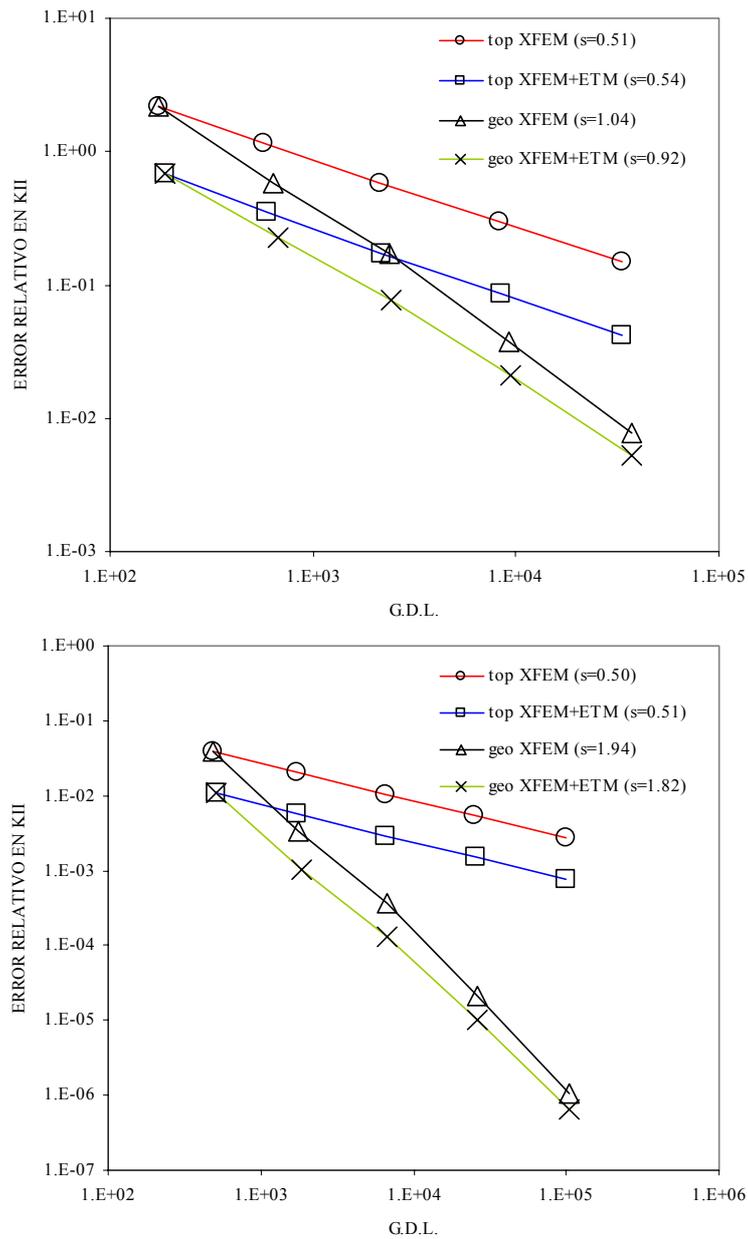


Figura IV-30. Convergencia del error relativo en el FIT K_{II} . Arriba: elementos lineales. Abajo: elementos cuadráticos. s es la velocidad de convergencia.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

IV.4.5 Mejora del campo de tensiones con ETM

El método de elementos finitos, en general, no satisface las condiciones de contorno naturales. En los ejemplos considerados en la Tesis, la superficie de la grieta se supone libre de tracciones, lo que constituye una condición natural. Como se muestra en el trabajo de Gracie et ál. [136], los elementos de transición causan un mayor error en el cumplimiento de las condiciones naturales del problema y, su mejora, permite reducirlo.

A continuación se muestra cómo el campo de tensiones en las proximidades del extremo de grieta es mejorado cuando se emplea el elemento de transición mejorado propuesto en la Tesis.

Se considera el problema de una grieta centrada en placa infinita descrito en el apartado IV.4.4. En la *Figura IV-31* se representa una ampliación de la malla correspondiente a 65×65 elementos lineales con enriquecimiento geométrico. En la *Figura IV-31* se han marcado los elementos en los que se extraen los valores de tensiones en los puntos de integración para posteriormente representarlos en un mapa de contorno. Los elementos considerados son cercanos al extremo de grieta donde, para el caso de mallas lineales, se ha observado un mayor error en norma energética (véase *Figura IV-27*).

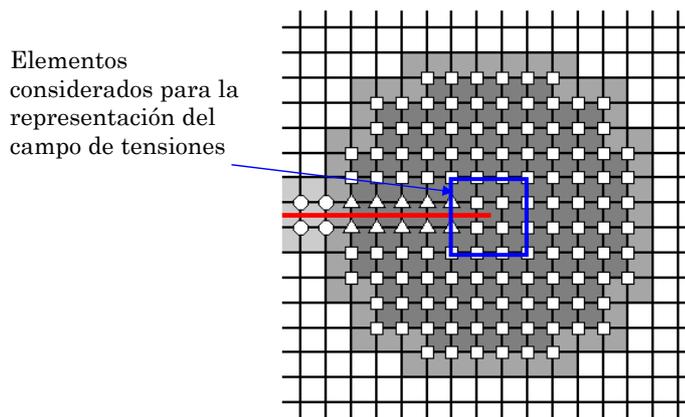


Figura IV-31. Elementos cercanos al extremo de grieta donde se extraen los valores de tensiones en puntos de integración.

A continuación, se muestran los resultados para el caso de modo I, con $K_I = 100$. En la *Figura IV-32* se comparan los campos de tensiones σ_1 , σ_2 y σ_{12} cuando se utiliza XFEM, XFEM+ETM y con la solución exacta. Se han representado las mismas curvas de iso-tensión en una misma escala para cada componente. Se

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

debe hacer notar que el máximo de la escala es un valor prefijado ya que el máximo teórico tiende a infinito.

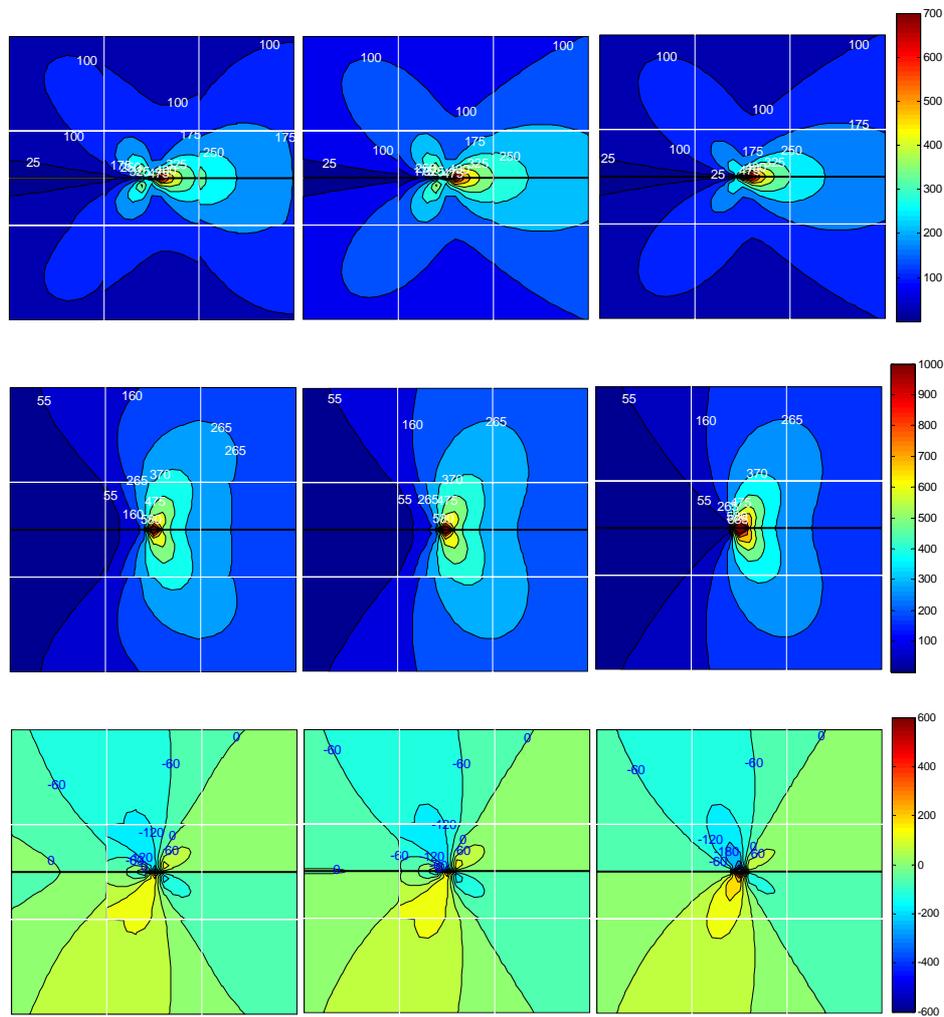


Figura IV-32. Mapa de contorno de las componentes del campo de tensiones. Componentes σ_1 , σ_2 y σ_{12} de arriba hacia abajo y análisis XFEM, XFEM+ETM y campo exacto de izquierda a derecha.

Como se observa en los resultados, la discontinuidad del campo de tensiones en los lados de los elementos se suaviza cuando se mejoran los elementos de transición. Las curvas de iso-tensión muestran una mayor aproximación a los resultados exactos cuando se mejoran los elementos de transición.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

IV.4.6 Influencia de la posición del extremo de grieta en la malla

Como es sabido, una de las ventajas de XFEM frente al método convencional de elementos finitos para representar una discontinuidad como una grieta, es que no resulta necesario adaptar la malla a la frontera de la discontinuidad. Es previsible que en un problema genérico la localización del extremo de grieta no sea controlada, es decir, puede caer en cualquier posición relativa a un elemento. Puesto que la singularidad viene representada por el enriquecimiento de la aproximación, el resultado debe ser, en la medida de lo posible, insensible a la localización del extremo de grieta en la malla. En el trabajo de Moës et ál. [96] se analiza la robustez de los resultados en la obtención del factor K_I para variaciones de la posición del extremo de grieta en la malla. El dominio analizado es una placa de dimensiones conocidas ($W \times L$) con una grieta de longitud a sometida a tracción. Los resultados muestran una desviación menor al 1% entre las diversas configuraciones probadas.

En el presente apartado se comparan los resultados obtenidos en un problema concreto cuando se modifica la posición del extremo de grieta y se analiza la influencia de la mejora en la aproximación de los elementos de transición. Se considera de nuevo el problema descrito en el ejemplo numérico de la sección IV.4.2 (véase *Figura IV-16*).

El dominio a estudio viene dado por $\Omega = [-1,1]^2$ con una grieta en el borde de longitud $a = 1$ tal y como se muestra en la *Figura IV-16*. Para este análisis se imponen las condiciones de contorno en desplazamientos correspondientes a la solución singular pura (sin parte suave) del problema en modo I siendo $K_I = 100$. En este ejemplo se analiza la convergencia del error relativo en norma energética en los siguientes casos:

- XFEM con el extremo de grieta (EG) en centro de elemento,
- XFEM con el EG en nodo,
- XFEM con el EG en lado de elemento.

Los análisis se realizan para mallas de elementos lineales y cuadráticos, con enriquecimiento topológico y con enriquecimiento geométrico de área fija de radio 0.25. La secuencia de mallas analizada ha sido la siguiente:

- XFEM con EG en centro de elemento: número de elementos impar igual en x y en y : [9, 17, 33, 65, 129],
- XFEM con EG en nodo: número de elementos par igual en x y en y : [8, 16, 32, 64, 128],
- XFEM con EG en lado de elemento: número de elementos par en una dirección, por ejemplo la x , e impar en la otra, en este caso la y : [8, 16, 32, 64, 128] \times [9, 17, 33, 65, 129].

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

En la *Figura IV-33* se muestran 2 mallas de la secuencia de análisis, para el caso de elementos lineales con enriquecimiento en área fija.

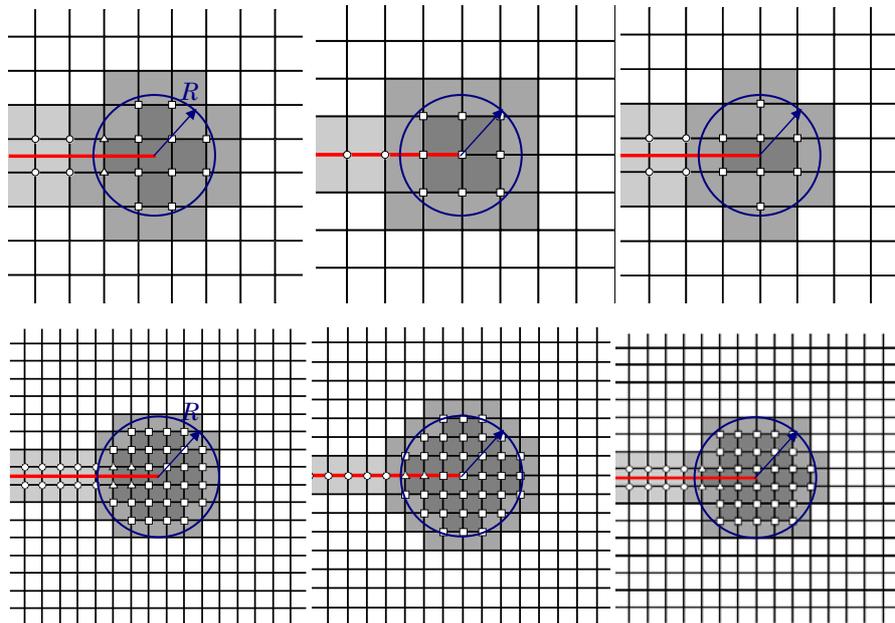


Figura IV-33. Elementos lineales en XFEM con enriquecimiento en área fija. De izquierda a derecha, extremo de grieta en centro de elemento, en nodo y en lado.

En la *Figura IV-34* se presenta la convergencia del error relativo en norma energética para las diferentes posiciones del extremo de grieta en función del número de grados de libertad de la malla.

Se aprecia una mayor precisión en los resultados cuando el extremo de grieta coincide con un nodo, esto sucede principalmente en las mallas de tamaño de elemento mayor. Para estos casos, los elementos de transición están más alejados del extremo de grieta (véase *Figura IV-33*) por lo que su influencia será menor. A medida que la malla se refina, la precisión de todos los casos tiende a ser la misma puesto que el número de nodos contenidos en el área de enriquecimiento tiende a ser idéntico y la influencia de la capa de transición será la misma en cualquiera de los casos considerados. Es por ello que se observa una ligera diferencia en la velocidad de convergencia, s , entre los diferentes análisis realizados.

En la *Figura IV-35* se muestran los resultados para el caso de elementos lineales con el elemento de transición mejorado. De nuevo se consideran tres posibles situaciones del extremo de grieta en la malla: en el centro de un elemento, en un nodo y en un lado de elemento.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

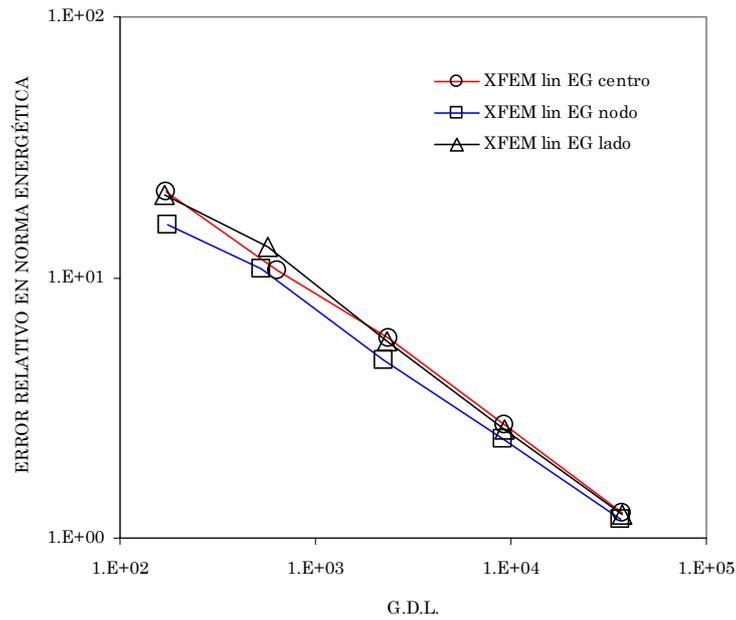


Figura IV-34. Convergencia del error en norma energética para elemento lineal en XFEM.

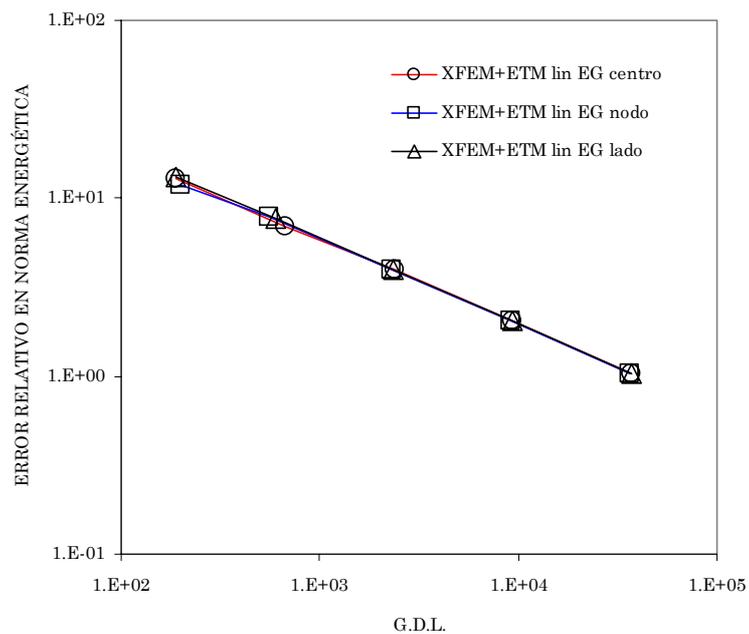


Figura IV-35. Convergencia del error en norma energética para elemento lineal en XFEM con elemento de transición mejorado.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Como se observa en la *Figura IV-35*, cuando se mejora el elemento de transición mediante la adición de funciones de forma jerárquicas el resultado muestra un comportamiento de la solución muy similar en cualquier caso. Las diferencias en los resultados prácticamente desaparecen.

Considérese ahora, la malla formada por elementos cuadriláteros cuadráticos. En la *Figura IV-36* se muestran dos casos de la secuencia de discretización.

En la *Figura IV-37* y la *Figura IV-38* se tienen los resultados para el caso de XFEM estándar y XFEM con elemento de transición mejorado respectivamente. Comparando estos resultados con los obtenidos para el caso del elemento lineal (*Figura IV-34* y *Figura IV-35*), vemos que la tendencia se repite. Mejorar el elemento de transición consigue que la solución sea prácticamente independiente de la localización del extremo de grieta incluso en las mallas menos refinadas. Este resultado es especialmente interesante en problemas donde el enriquecimiento topológico es recomendable como, por ejemplo, en los que la grieta tiene frente curvo o existe más de un extremo de grieta. En estos casos, al refinar la malla, los elementos de transición se encuentran siempre en las cercanías del extremo de grieta. Es por esto que resulta muy conveniente mejorar su aproximación ya que tendrán una influencia importante incluso en las mallas más refinadas.

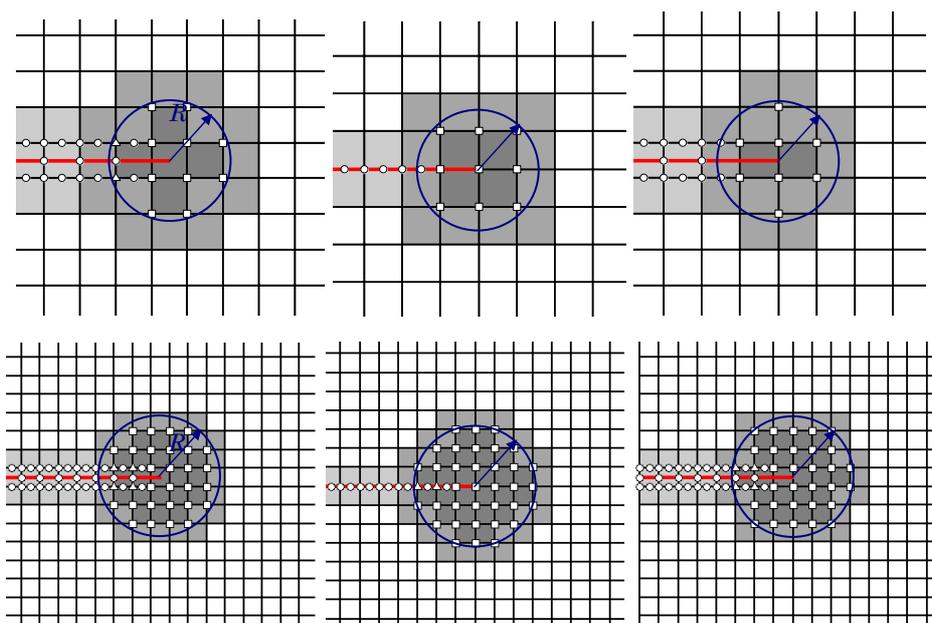


Figura IV-36. Elementos cuadráticos en XFEM con enriquecimiento en área fija. De izquierda a derecha, extremo de grieta en centro de elemento, en nodo y en lado.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

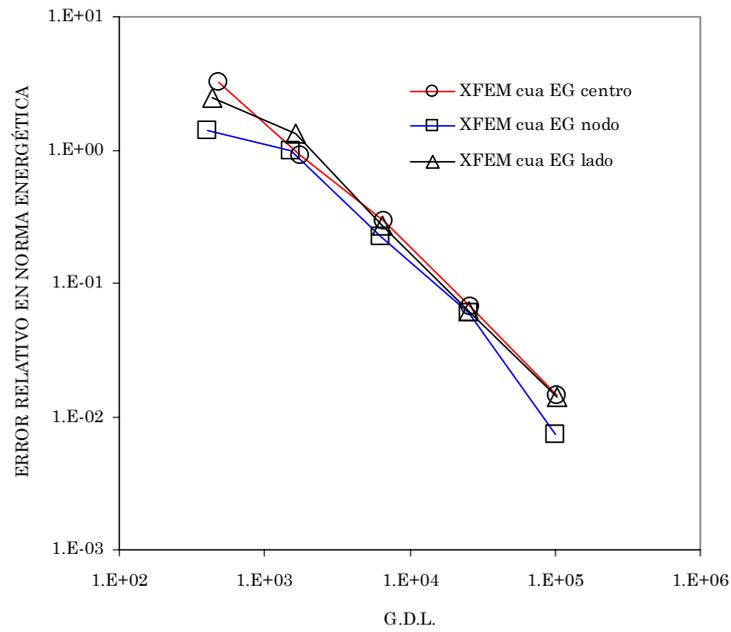


Figura IV-37. Convergencia del error relativo en norma energética para elemento cuadrático en XFEM.

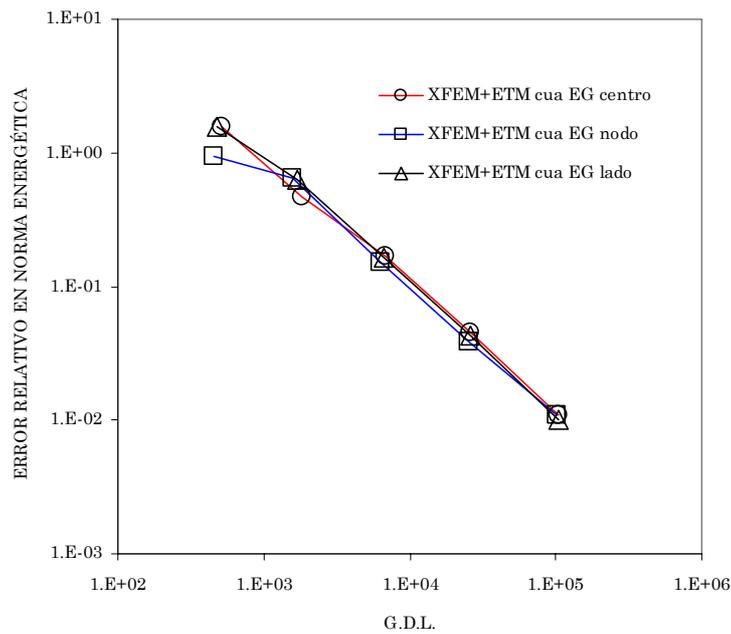


Figura IV-38. Convergencia del error relativo en norma energética para elemento cuadrático en XFEM con elemento de transición mejorado.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

IV.4.7 Elemento de transición mejorado y acoplamiento de grados de libertad (*gathering*)

Como se indica en el apartado III.5.2 el enriquecimiento geométrico lleva asociado el problema del mal condicionamiento de la matriz de rigidez del sistema. Esto es debido fundamentalmente a que el número de grados de libertad adicionales, consecuencia del enriquecimiento extrínseco, incrementa considerablemente al refinar la malla manteniendo el área fija de enriquecimiento. Estos resultados se pueden ver en la *Figura III-38*.

Una de las técnicas posibles para evitar este problema consiste, básicamente, en agrupar los grados de libertad correspondientes al enriquecimiento. Esta técnica, conocida como *gathering* fue introducida por Laborde et ál. [129] y se describe con detalle en el apartado III.5.3. No obstante, la técnica *gathering* supone tanto un incremento del error en los resultados como una pérdida de velocidad de convergencia. Como se verá a continuación, al usar el elemento de transición mejorado propuesto junto con la técnica de agrupar grados de libertad, se recupera la velocidad de convergencia óptima y la precisión.

En el siguiente ejemplo numérico, se ha aplicado la técnica de agrupar grados de libertad (DG), utilizando XFEM estándar (XFEM+DG), y XFEM con elementos de transición mejorados (XFEM+DG+ETM). Primero se ha considerado el problema de solución singular puro (descrito en la sección IV.4.3) en condiciones de modo I. Éste es el mismo ejemplo que resuelve Laborde et ál. [129] eliminando los elementos de transición y aplicando restricciones multipunto para recuperar la conformidad de la malla.

En la *Figura IV-39* se muestra el error relativo en norma energética para modo I ($K_I = 100$, $K_{II} = 0$) considerando el ejemplo numérico de solución singular pura (apartado IV.4.2). Para el análisis de convergencia se ha utilizado una secuencia de mallas estructuradas de elementos cuadriláteros (lineales y cuadráticos) con 9, 17, 33, 65 y 129 elementos en cada dirección. Como se puede ver, la adición de DG a la solución estándar de elementos finitos empeora la velocidad de convergencia. Con la mejora de los elementos de transición se recupera la tendencia óptima.

A continuación, se presentan los resultados para el problema de *Westergaard* (apartado IV.4.4) que tiene una solución más general, compuesta de parte suave y parte singular, y que ha sido descrito en la sección 0. Se muestran los resultados para el problema en condiciones de modo mixto ($K_I = 100$, $K_{II} = 100$).

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

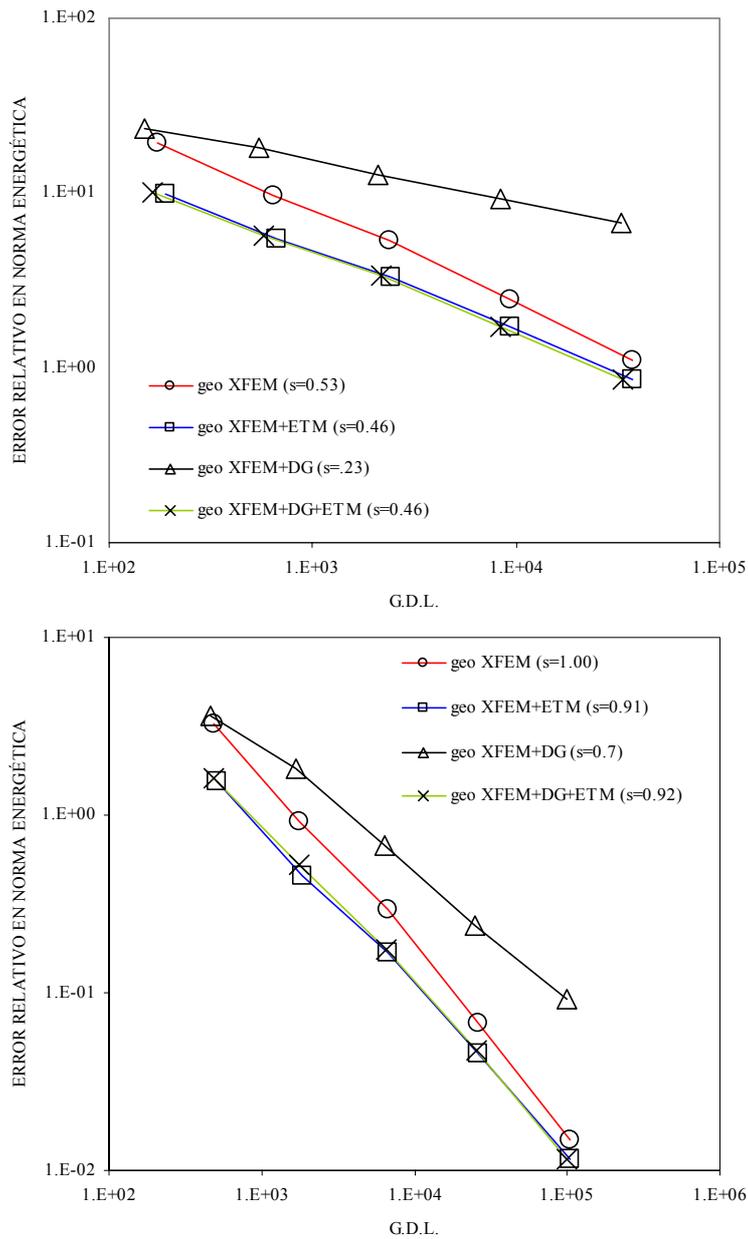


Figura IV-39. Convergencia del error relativo en norma energética para modo I: arriba elementos lineales; abajo, elementos cuadráticos.

En la Figura IV-42 se representa el error relativo en norma energética para diferentes análisis con elementos lineales y cuadráticos. En el caso de elementos lineales, el uso conjunto de elemento de transición mejorado y DG

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

permite recuperar la precisión y la velocidad de convergencia óptima, al igual que en el ejemplo de solución singular pura. Para elementos cuadráticos la mejora en precisión y velocidad de convergencia es significativa aunque no se alcanzan valores óptimos. Este resultado es consistente con Laborde et ál. [129], donde se indica que para alcanzar la velocidad óptima con DG y elementos de orden superior puede que sea necesario introducir más términos del campo asintótico de desplazamiento en las funciones de enriquecimiento. La técnica de agrupar grados de libertad adicionales permite representar sólo el primer término y es por eso que no es posible alcanzar la velocidad óptima de convergencia.

En la *Figura IV-40* se muestra la distribución de la norma energética del error en cada elemento. La malla considerada es de 33×33 elementos, como en los ejemplos anteriores. Se ha utilizado enriquecimiento geométrico. Los análisis considerados son XFEM+DG sin y con la mejora de los elementos de transición. En la *Figura IV-41* se muestran los resultados para elementos cuadráticos.

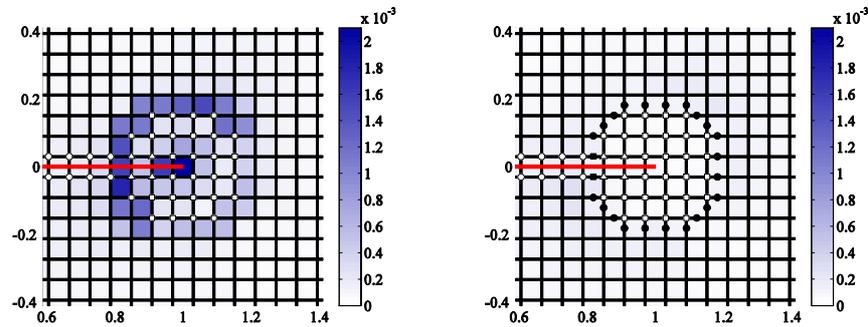


Figura IV-40. Distribución de la norma energética del error por elemento para modo mixto, malla de 33×33 elementos lineales. Izquierda, XFEM+DG; derecha, XFEM+DG+ETM.

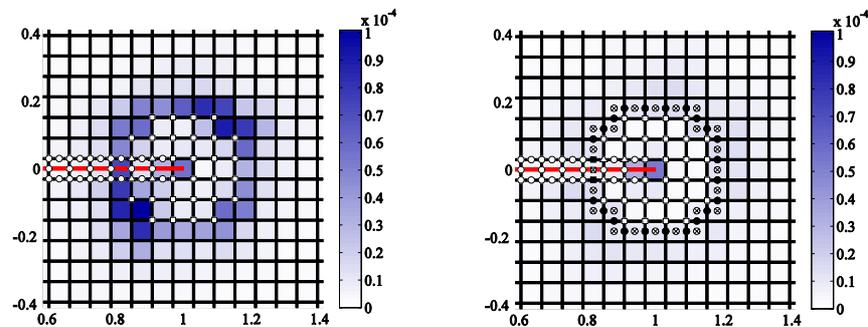


Figura IV-41. Distribución de la norma energética del error por elemento para modo mixto, malla de 33×33 elementos cuadráticos. Izquierda, XFEM+DG; derecha, XFEM+DG+ETM.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

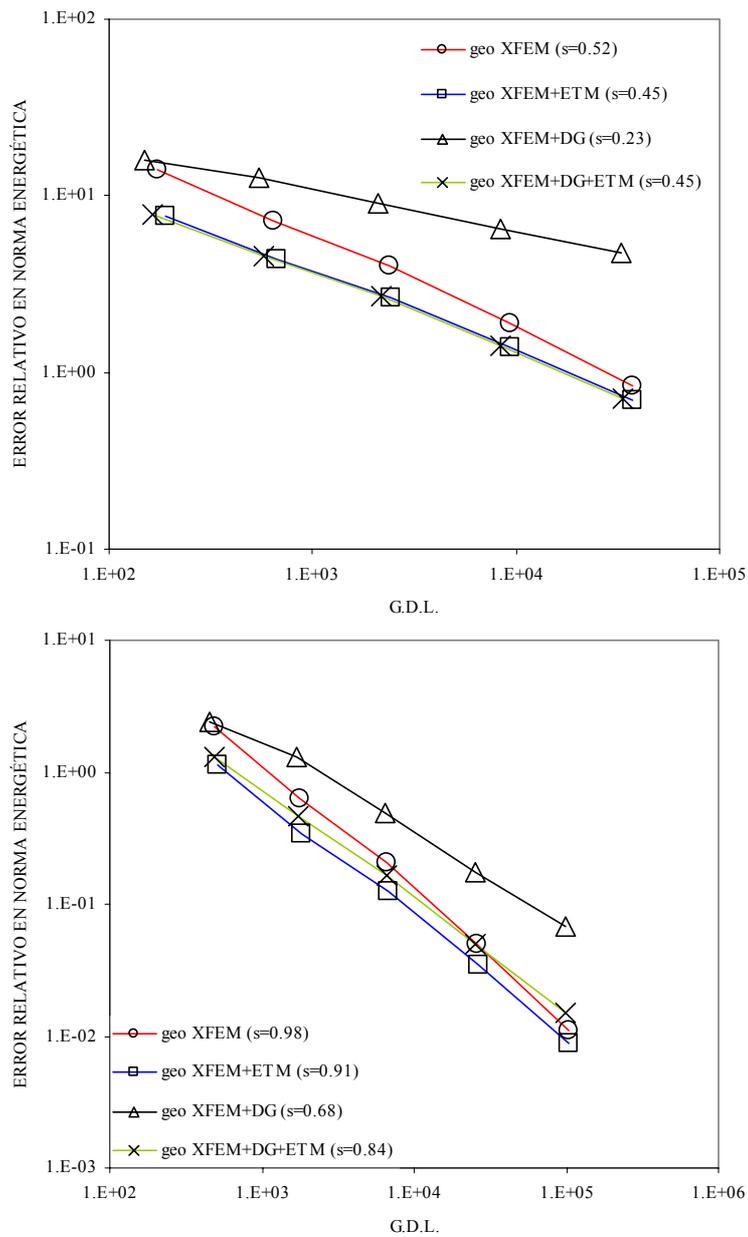


Figura IV-42. Convergencia del error relativo en norma energética para problema en modo mixto: (arriba) elementos lineales; (abajo) elementos cuadráticos.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Cuando se utiliza DG con XFEM estándar el error es mayor en los elementos de transición y en el elemento de extremo de grieta. Cuando se añade el ETM la precisión aumenta en la región enriquecida cuando se emplean elementos lineales. En el caso de elementos cuadráticos, la precisión también aumenta en la zona enriquecida pero no tan significativamente en el elemento que contiene el extremo de grieta.

IV.4.8 Influencia de los nodos mixtos en el *gathering*

En el apartado IV.4.3 se ha analizado la influencia de los nodos mixtos en un problema de solución singular puro. Como resultado a destacar es que resulta ventajoso su uso especialmente en elementos lineales ya que permite aumentar la precisión en los resultados. En este apartado se pretende mostrar cómo el empleo de la técnica de *gathering* resulta ser notablemente sensible al uso de los *nodos mixtos* cuando el problema que se resuelve posee tanto parte suave como singular en su solución.

Se considera el problema de *Westergaard* descrito en el apartado IV.4.4 (véase *Figura IV-25*), donde se imponen las condiciones de contorno y las cargas correspondientes al modo I ($K_I = 100$). Para el análisis de convergencia, se ha utilizado una secuencia de mallas estructuradas de cuadriláteros (lineal y cuadrático) con 9, 17, 33 y 65 elementos en cada dirección respectivamente. En la *Figura IV-43* se muestran las gráficas de convergencia del error relativo en norma energética para mallas lineales y cuadráticas.

Como se observa, para mallas cuadráticas la influencia de los *nodos mixtos* resulta muy importante cuando se emplea la técnica *gathering*. El efecto no resulta tan importante en el caso lineal. Asimismo, esta tendencia tampoco se manifiesta en un problema de solución singular como el analizado en el apartado IV.4.3. El problema de *Westergaard* tiene la particularidad de tener una solución compuesta tanto de parte singular como de suave; al emplear la técnica *gathering*, se fuerza a la solución a un comportamiento dado por el primer término del desarrollo del campo asintótico de extremo de grieta. Esta imposición se extiende a toda el área de enriquecimiento.

Al mantener el radio de enriquecimiento constante, a medida que la malla se refina, la presencia de los nodos mixtos aumenta. Si no se consideran como tales, el enriquecimiento con Heaviside no existe en estos nodos. Se debe tener en cuenta que la solución en los elementos intersectados por la grieta está más influenciada por la discontinuidad que por la singularidad de extremo de grieta.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

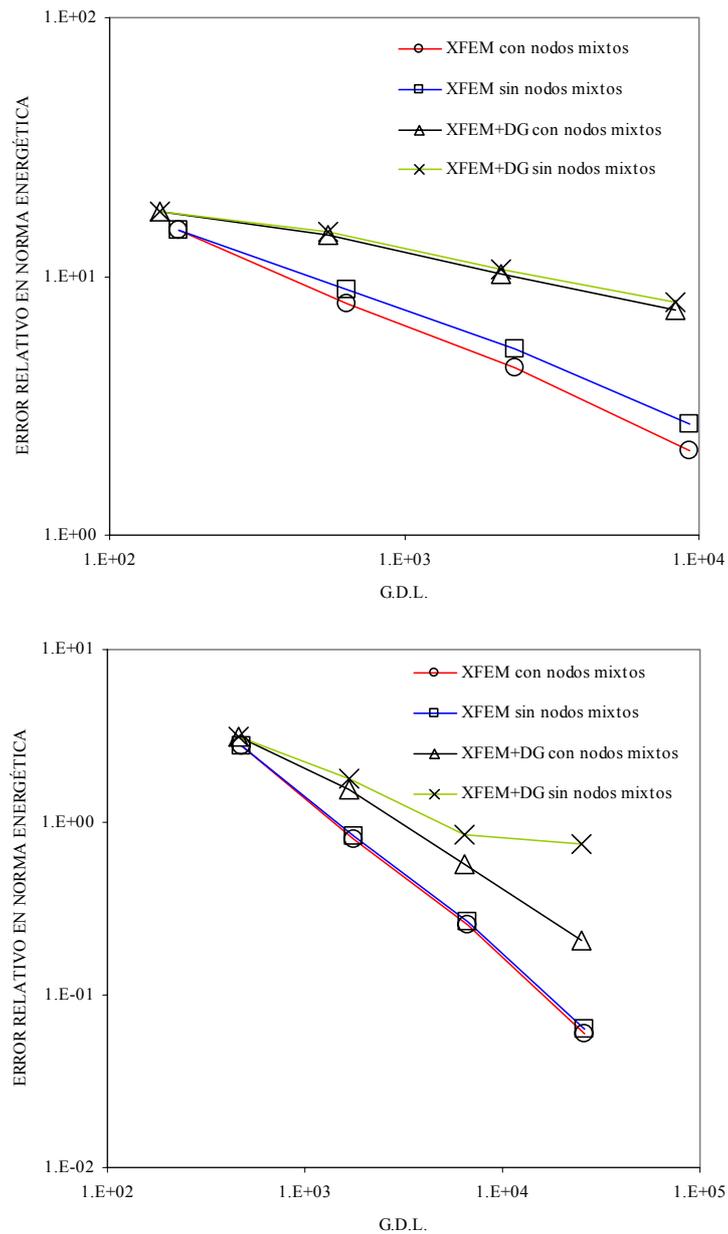


Figura IV-43. Convergencia del error en norma energética. Problema de Westergaard Modo I. Arriba, elementos lineales; abajo, elementos cuadráticos.

En el caso de elementos cuadráticos, puesto que el enriquecimiento Heaviside se realiza también en los nodos de medio lado, la influencia del gathering en ausencia de nodos mixtos es mayor. Esto sucede porque los nodos vértice

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

incluidos en el área de enriquecimiento se ven obligados a seguir la solución dada por el primer término del desarrollo asintótico mientras que el resto de nodos del mismo elemento siguen siendo capaces de representar la discontinuidad, tendencia principal de la solución en estos elementos.

IV.4.9 Comparación entre el método XFEM con ETM y el método XFEM modificado de Fries [135]

Como se ha comentado en la introducción del capítulo, hay varios autores que han intentado solucionar el problema en los elementos de transición. En este apartado se muestran algunos resultados que comparan la técnica propuesta en esta Tesis para mejorar los elementos de transición (XFEM+ETM) con la propuesta realizada, en concreto, en el trabajo de Fries [135]. Como se indicó, el trabajo de *Fries* resulta interesante por la gran sencillez en su implementación y porque constituye una verdadera recuperación de la partición de la unidad en la zona de transición. No obstante, como se podrá ver a continuación, su propuesta posee algunos inconvenientes.

Un inconveniente del planteamiento de *Fries* es que conduce a una matriz global singular (como se explica en la sección IV.1). La técnica propuesta por el autor para solucionar este problema, considerando el caso de cuadriláteros bilineales, consiste en eliminar cuatro ecuaciones del sistema para hacer no singular la matriz global. Con ello obtiene resultados muy precisos y con velocidad de convergencia óptima. No obstante, en su método, el número de condicionamiento es significativamente más elevado que en XFEM estándar o el método XFEM con elemento de transición mejorado propuesto en esta Tesis. Éste es un problema que no es resuelto por el autor.

Se ha considerado el problema de la grieta en el borde con condiciones de *Dirichlet* correspondientes al modo I ($K_I = 100$), problema descrito en la sección IV.4.3. Este problema también es analizado por Fries [135].

En la *Figura IV-44* se representa el ratio de condicionamiento, obtenido como el cociente entre el máximo y mínimo autovalor de la matriz de rigidez global, frente al número de grados de libertad de la malla. Los cuatro primeros análisis que se han realizado son:

- XFEM estándar,
- XFEM con elemento de transición mejorado (XFEM+ETM),
- XFEM con agrupación de grados de libertad adicionales y elemento de transición mejorado (XFEM+DG+ETM),
- XFEM con corrección de *Fries* y aplicación de restricciones multipunto mediante multiplicadores de Lagrange para resolver la singularidad del sistema resultante (XFEM+corrección *Fries*+MPC).

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Para el análisis de convergencia, se ha utilizado una secuencia de mallas estructuradas de cuadriláteros lineales con 9, 17, 33, 65 y 129 elementos en cada dirección. Como se observa en la *Figura IV-44*, los resultados obtenidos con el método de *Fries* suponen un incremento del número de condicionamiento muy significativo.

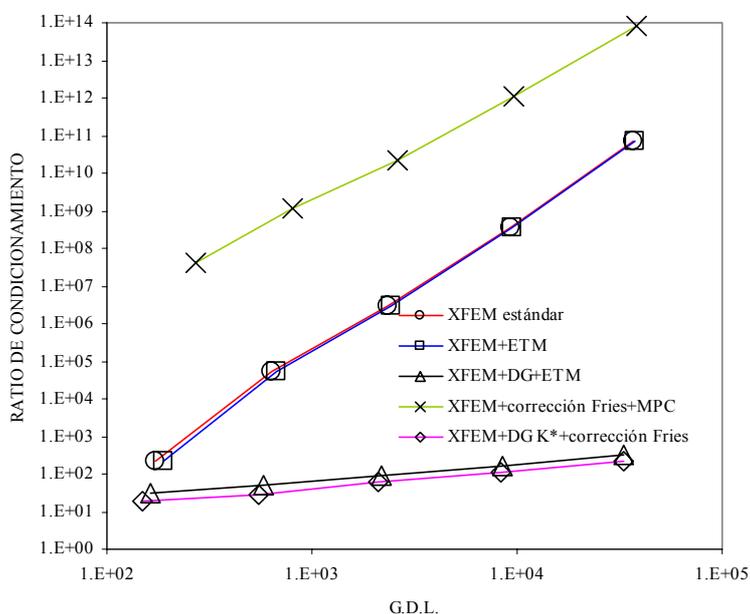


Figura IV-44. Ratio ($D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$) de la matriz de rigidez global frente al número de grados de libertad. Malla con elementos lineales. Enriquecimiento en área fija $R=0.2$.

En la Tesis se ha analizado también la opción de unir la propuesta de mejora del elemento de transición de *Fries* con la técnica *gathering*, basada en la agrupación de grados de libertad correspondientes al enriquecimiento (XFEM+DG K^* +corrección *Fries*). Notar que, en este último análisis, la técnica del *gathering* ha sido aplicada al conjunto ampliado K^* de nodos enriquecidos que considera *Fries*, esto es, los contenidos en el área fija de enriquecimiento más todos los nodos de los elementos de transición aún estando fuera de esta área. El resultado (para XFEM+DG K^* +corrección *Fries*), es un sistema con una matriz bien condicionada (véase *Figura IV-44*). No obstante, como muestran los resultados de la *Figura IV-45*, la precisión y la velocidad de convergencia empeoran considerablemente.

Cuando se considera la propuesta de mejora del elemento de transición realizada en la Tesis, el incremento del ratio de condicionamiento crece de forma prácticamente despreciable si se compara con el método XFEM estándar (véase *Figura IV-44*). Al añadir la técnica *gathering*, los resultados en cuanto a

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

ratio de condicionamiento mejoran a la vez que se obtiene una mayor precisión recuperando la velocidad de convergencia óptima (véase *Figura IV-45*).

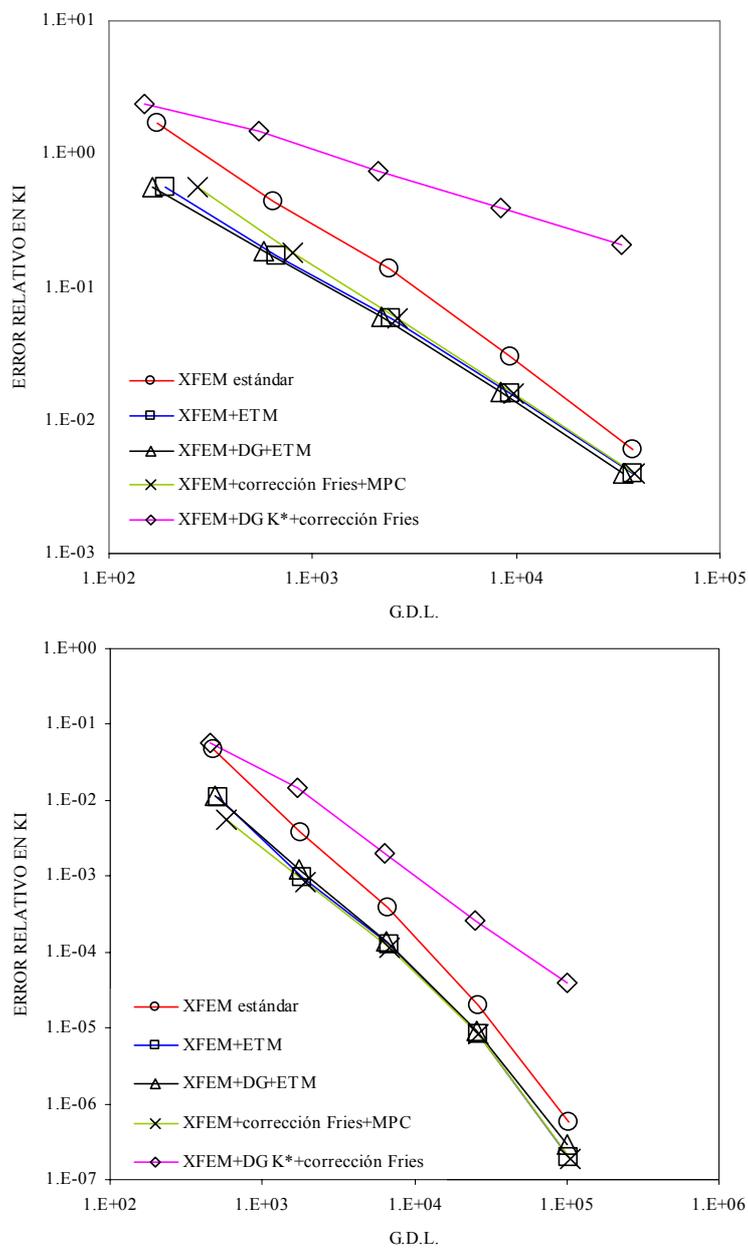


Figura IV-45 Convergencia del error en el FIT para el problema singular puro en modo I ($K_1=100$). Área fija $R=0.2$. Arriba, elementos lineales; abajo, elementos cuadráticos.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

En la *Figura IV-45* se representa el error relativo en K_I frente al número de grados de libertad de la malla para el caso de elementos lineales y cuadráticos.

IV.4.10 Problema de grieta centrada en placa infinita. Caso 3D

A continuación se muestra el ejemplo numérico correspondiente al problema de *Westergaard* (véase apartado IV.4.4) en el que se ha supuesto un dominio tridimensional. Las dimensiones del dominio vienen dadas en la *Figura IV-46*, se considera la longitud de la grieta $a = 1$ y $b = 2$. En las caras que aparecen sombreadas se aplican las cargas correspondientes a los modos analizados. Para el Modo I se aplica el campo de tensiones correspondiente a $K_I = 100$ y para el modo II el campo de tensiones correspondiente a $K_{II} = 100$. Asimismo, las condiciones de contorno se especifican para cada tipo de análisis. Cabe señalar que los desplazamientos impuestos en el frente de grieta son estrictamente necesarios. Igualmente, los desplazamientos en la dirección del eje z en las caras contenidas en planos $z = -1$ y $z = 1$, se impiden para anular los efectos del coeficiente de *Poisson*, garantizando así un comportamiento de deformación plana en todo el frente de grieta.

El problema así planteado, permite calcular el error exacto puesto que su solución analítica es conocida.

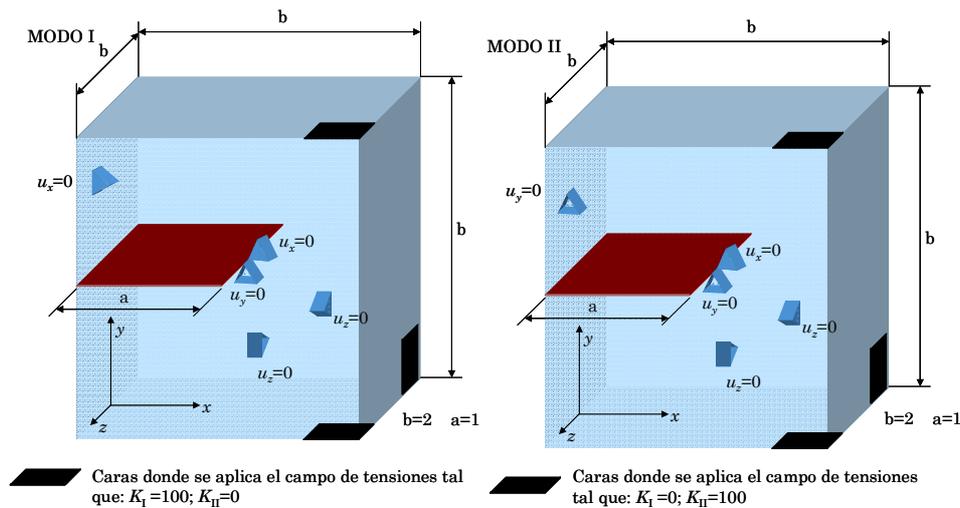


Figura IV-46. Esquema del dominio analizado en el ejemplo 3D. Problema de Westergaard. Condiciones de contorno y carga para el modo I (izquierda) y modo II (derecha).

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Los análisis se han realizado en primer lugar teniendo en cuenta una secuencia de mallas estructuradas. Para ello se ha empleado un algoritmo de subdivisión de hexaedros en cinco tetraedros, como muestra la *Figura IV-47*.

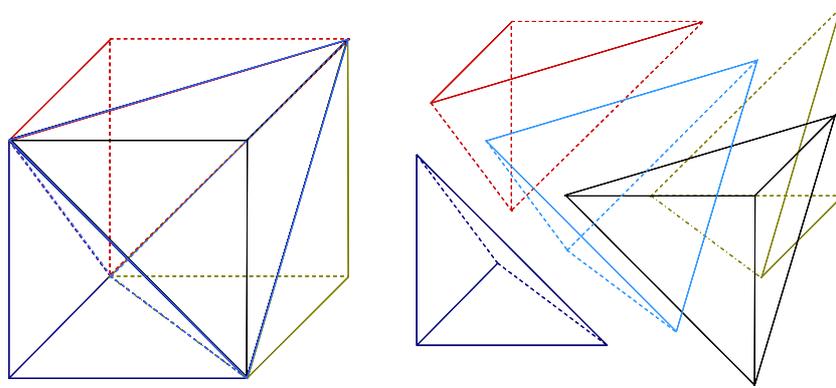


Figura IV-47. Subdivisión de un hexaedro en cinco tetraedros para la obtención de mallas estructuradas.

En la *Figura IV-48* se muestran las fuerzas equivalentes en nodos, para la malla de elementos de mayor tamaño, correspondientes a los modos analizados.

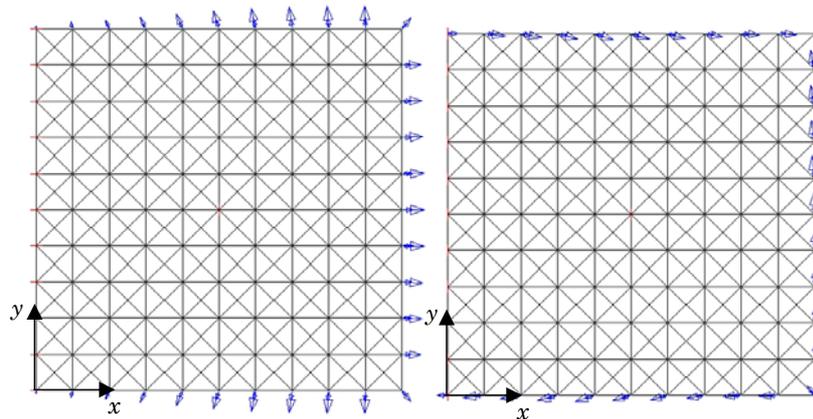


Figura IV-48. Fuerzas equivalentes en nodos para los modos de fractura I y II (izquierda y derecha respectivamente).

Se ha considerado la siguiente secuencia de mallas: $h = [0.2, 0.1, 0.0667, 0.05, 0.05]$ en las tres direcciones x, y, z , donde h es el tamaño de elemento. Para el análisis de convergencia del error relativo en norma energética, se ha considerado como energía de deformación exacta el doble de la correspondiente al problema bidimensional de dominio definido en el apartado IV.4.4, utilizando la malla de 129×129 elementos.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

Los valores de energía resultan, por tanto:

$$\begin{aligned} U_{ex} &= 0.00145651909012244 \quad \text{para modo I} \\ U_{ex} &= 0.00348992559065620 \quad \text{para modo II.} \end{aligned}$$

En la *Figura IV-49* se muestra una imagen de la malla estructurada correspondiente al tamaño de elemento mayor. Así mismo, se observa la localización del sistema de referencia cartesiano que posteriormente se usará para representar determinadas vistas de la malla.

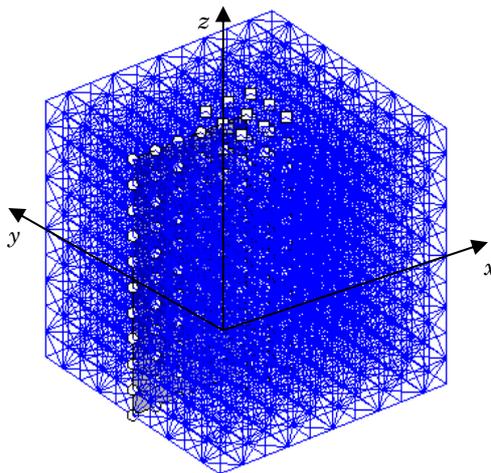


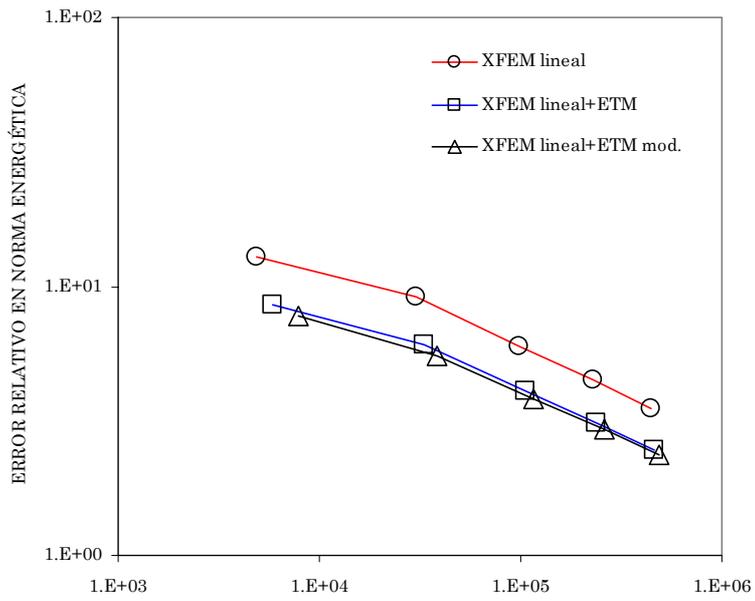
Figura IV-49. Malla 3D correspondiente a $h=0.2$. Problema de Westergaard caso 3D. h representa el tamaño de elemento.

Se ha utilizado enriquecimiento geométrico. En este caso se define un cilindro de radio constante ($R = 0.2$) cuyo eje de revolución coincide con el frente de grieta. Los análisis realizados son los siguientes:

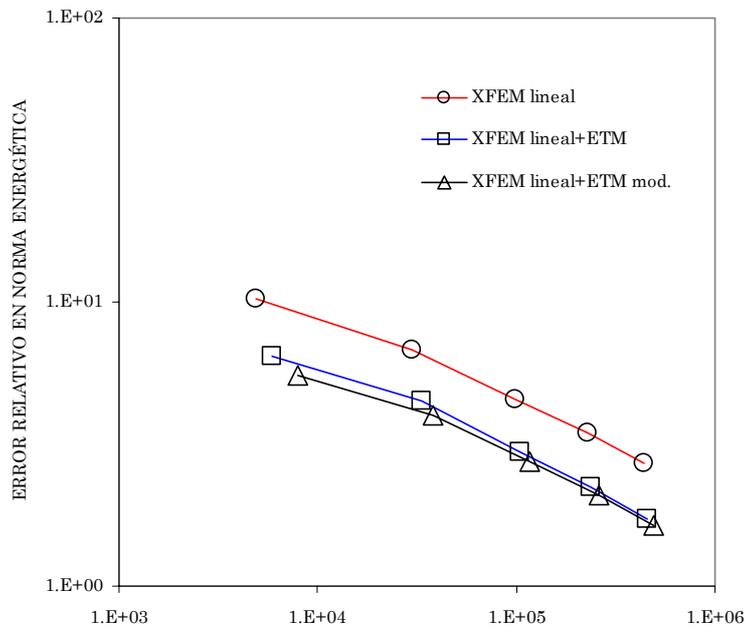
- XFEM estándar,
- XFEM+ETM con el criterio seguido en 2D,
- XFEM+ETM *mod.* en el que se mejora la aproximación en todos los lados de los elementos de transición.

En la *Figura IV-50* se muestran los resultados obtenidos en la convergencia del error en norma energética frente al número de grados de libertad. Se puede afirmar que la metodología propuesta para la mejora del elemento de transición es igualmente válida para problemas 3D. Se observa cómo la técnica XFEM+ETM *mod.* ofrece mejores resultados con un ligero aumento del coste computacional.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN



G.D.L.



G.D.L.

Figura IV-50. Convergencia del error relativo en norma energética. Problema de Westergaard caso 3D. Arriba, modo I; abajo, modo II.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

En la *Figura IV-51* se representa el error relativo en norma energética por elemento para el Modo I. La imagen superior se corresponde con la vista $z = 1$ y en la inferior una vista tridimensional del dominio. Los elementos cuyos lados se han representado en amarillo son los intersectados por el plano de la grieta y en azul, los elementos de transición. Los símbolos utilizados para representar el tipo de enriquecimiento así como la adición de los grados de libertad correspondiente a las funciones de forma jerárquicas, son los establecidos en el apartado IV.3.3.

El color blanco indica un nivel de error cero, creciente hacia el azul oscuro correspondiente al nivel máximo de error. Notar que la escala empleada es la misma para todos los análisis considerados. Se aprecia cómo la propuesta *ETM mod.* disminuye el error en la zona enriquecida y en la de transición principalmente llegando a valores de error similares a los presentes en los elementos estándar.

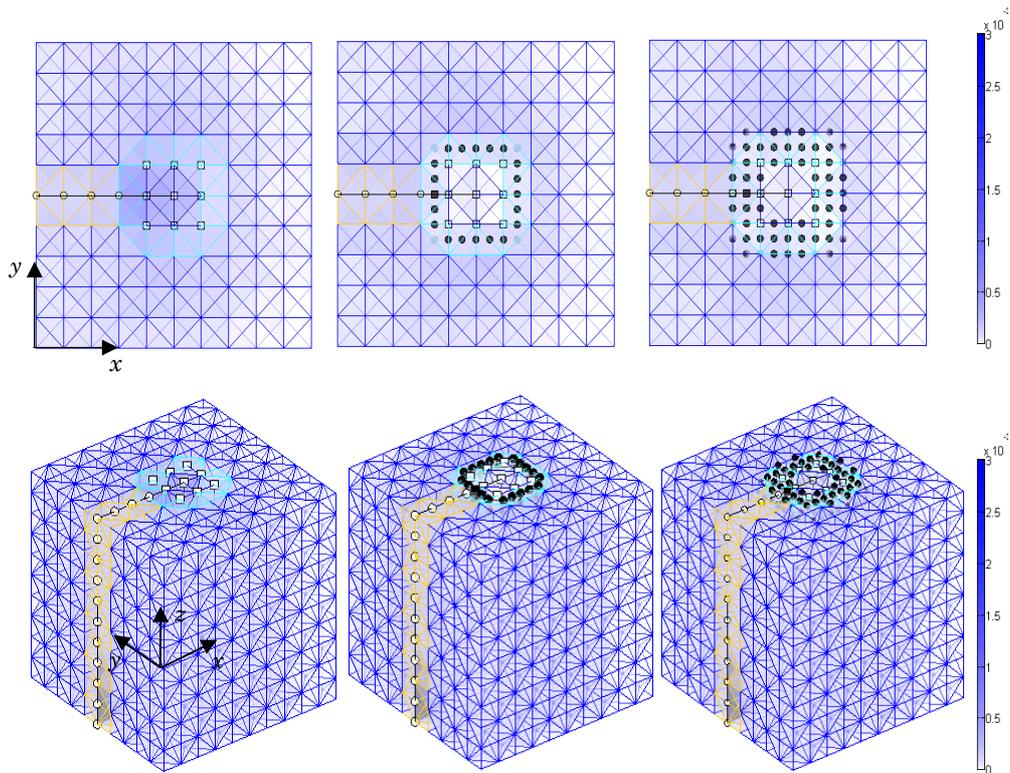


Figura IV-51. Error relativo en norma energética. Modo I. De izquierda a derecha: XFEM, XFEM+ETM, XFEM+ETM mod.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

En la *Figura IV-52* se representa la distribución del error en cada elemento representado por la coordenada x de su centroide (eje de abcisas). Para $x = 1$, se tiene la posición del frente de grieta.

Para el caso XFEM se aprecia una concentración del error en las proximidades del frente de grieta, siendo máximo en algunos de los elementos intersectados por la misma. Al mejorar el elemento de transición, se observa una distribución, en general, más uniforme del error, siendo mayor la precisión. Para el caso de XFEM+ETM *mod.*, se tiene el mejor resultado.

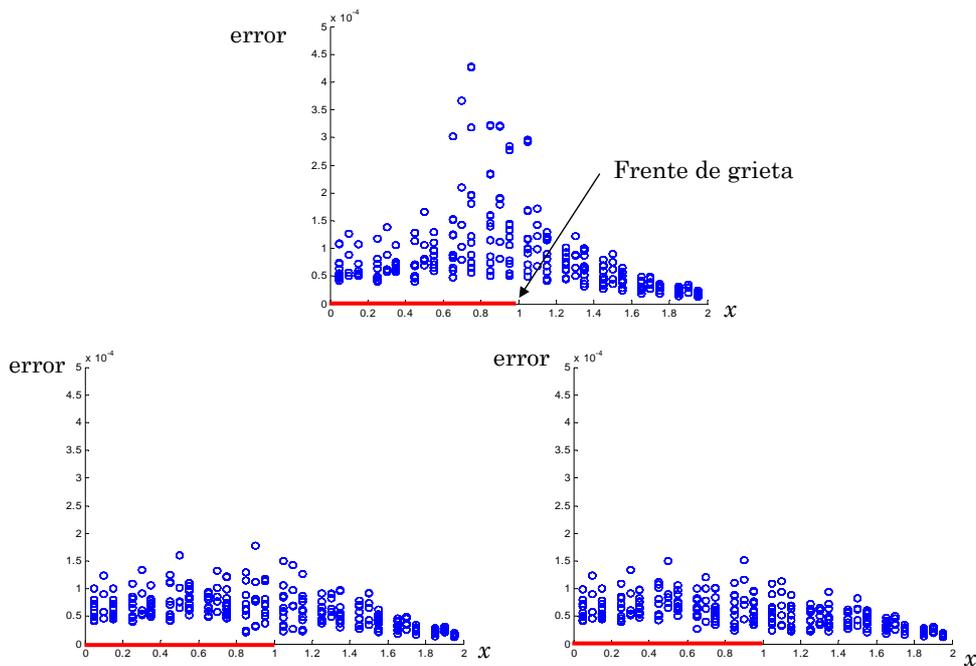


Figura IV-52. Error relativo en norma energética frente a la coordenada x . Modo I. Arriba, método XFEM; debajo, de izquierda a derecha, método XFEM+ETM y método XFEM+ETM mod.

A continuación se muestran los resultados análogos para el Modo II. Se mantiene la secuencia de mallas estructuradas analizadas anteriormente. En la *Figura IV-53* se representa nuevamente la distribución de la norma energética del error en elemento. En la imagen superior, correspondiente a la vista $z = 1$ del dominio, se observa que la mejora de la capa de transición implica una importante reducción en el error cometido en los elementos cercanos al frente de grieta y en los propios elementos de transición.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

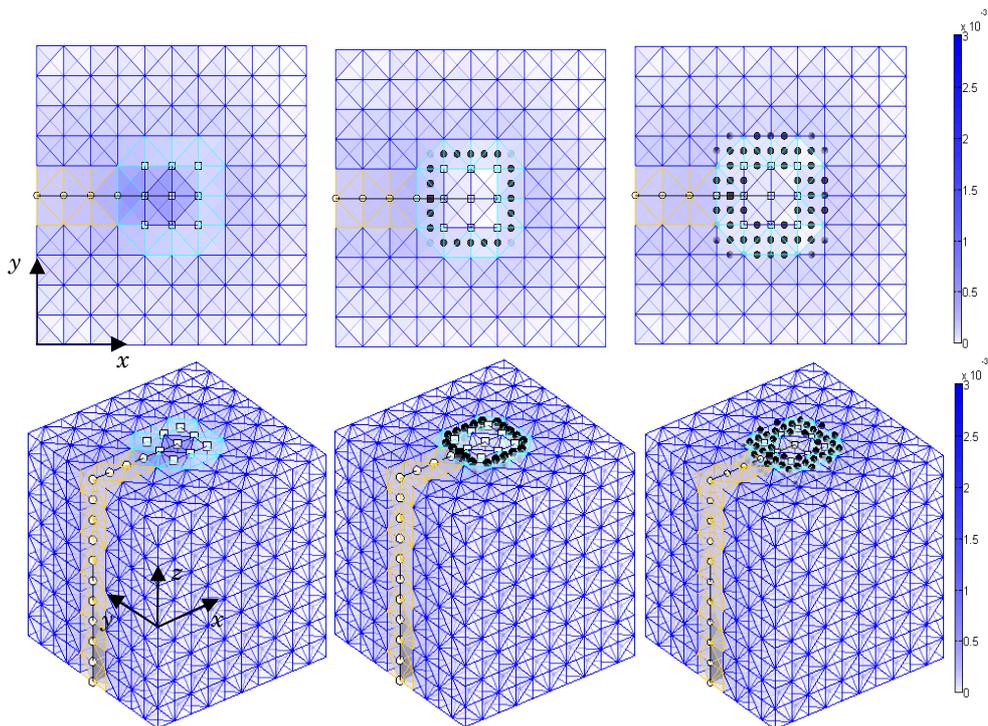


Figura IV-53. Error relativo en norma energética. Modo II. De izquierda a derecha: XFEM, XFEM+ETM, XFEM+ETM mod.

En la *Figura IV-54* se representa en el eje de ordenadas, el error en norma energética de cada elemento de la malla. En el eje de abcisas se tiene la coordenada x del centroide del elemento. Los resultados son similares a los obtenidos para el caso de Modo I.

Se considera ahora una secuencia de mallas no estructuradas obtenidas mediante el código comercial de elementos finitos Ansys. Se analizan nuevamente los siguientes casos:

- XFEM estándar,
- XFEM+ETM con el criterio seguido en 2D,
- XFEM+ETM *mod.* en el que se mejora la aproximación en todos los lados de los elementos de transición.

En la *Figura IV-55* se representa una imagen de la malla de mayor tamaño de elemento. Se han marcado en amarillo los elementos cortados por la grieta y en azul claro los de transición.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

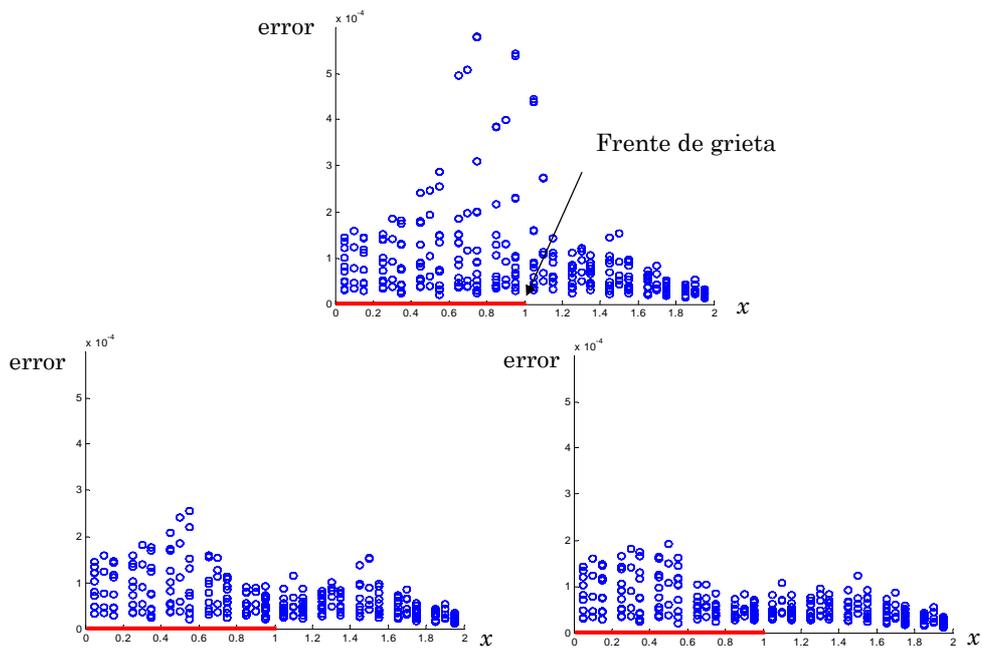


Figura IV-54. Error relativo en norma energética frente a la coordenada x . Modo II. Arriba, método XFEM, debajo de izquierda a derecha, método XFEM+ETM y método XFEM+ETM mod.

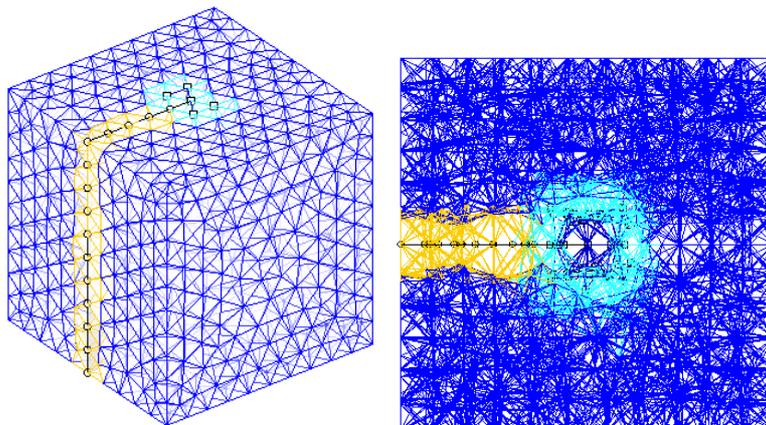


Figura IV-55. Malla no estructurada de tetraedros. Problema de Westergaard en 3D.

Para poder aplicar las condiciones de contorno de desplazamiento en el frente de grieta (véase esquema representado en la Figura IV-46), se ha mallado el dominio haciendo coincidir nodos en dicho frente. En la imagen de la derecha

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

de la *Figura IV-55* no se ha aplicado ninguna opacidad para visualizar la irregularidad de la malla.

En primer lugar se considera el Modo I de carga, aplicando las fuerzas equivalentes en los nodos y las condiciones de desplazamiento correspondientes (véase *Figura IV-46*).

La convergencia del error en norma energética frente al número de grados de libertad para el problema en Modo I se muestra en la *Figura IV-56*. Se ajusta una línea recta a los puntos correspondientes a los resultados. Como se observa, la tendencia mostrada para mallas estructuradas se repite para el caso de mallas arbitrarias.

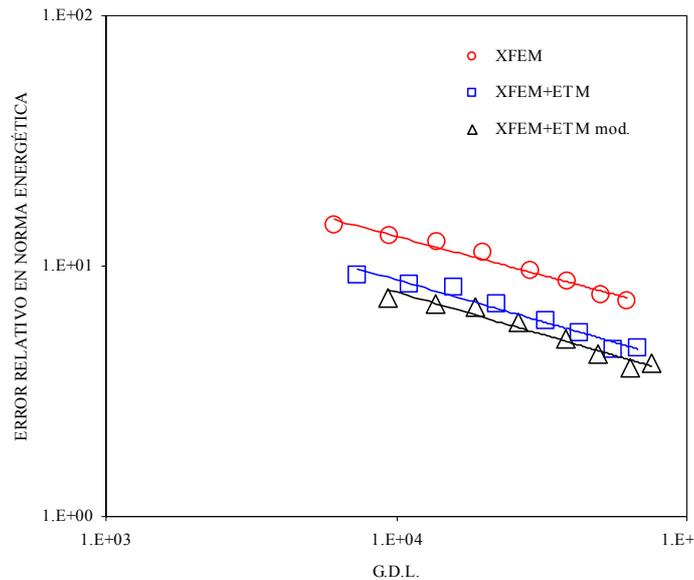


Figura IV-56. Convergencia del error en norma energética para el problema de Westergaard en 3D con mallas nos estructuradas. Modo I.

En la *Figura IV-57* se muestra, para la primera malla de la secuencia analizada, la distribución de la norma energética del error en elemento. Se han considerado los análisis XFEM, XFEM+ETM de acuerdo al criterio 2D y XFEM+ETM mod.

Dada la irregularidad de la malla resulta algo difícil visualizar la disminución del error cuando se mejora el elemento de transición. En este caso, resulta conveniente representar, como se ha hecho en análisis anteriores, la distribución del error en norma energética para cada elemento de la malla en un gráfico. En la *Figura IV-58* se representa el error en el eje de ordenadas y la coordenada x del centroide de cada elemento en el eje de abcisas.

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

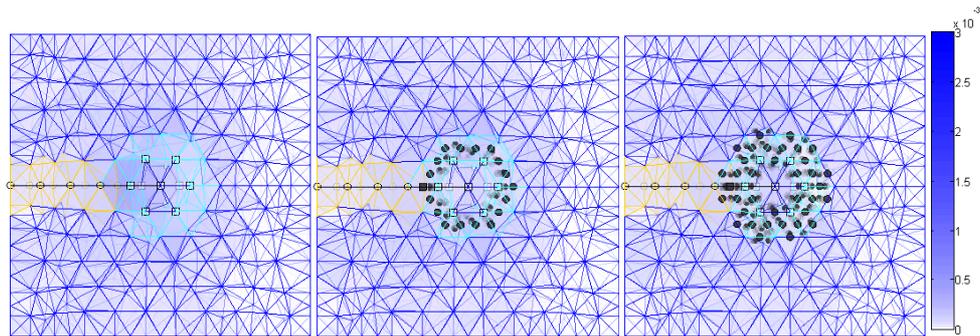


Figura IV-57. Distribución de la norma energética del error en elemento. De izquierda a derecha: XFEM, XFEM+ETM, XFEM+ETM mod.

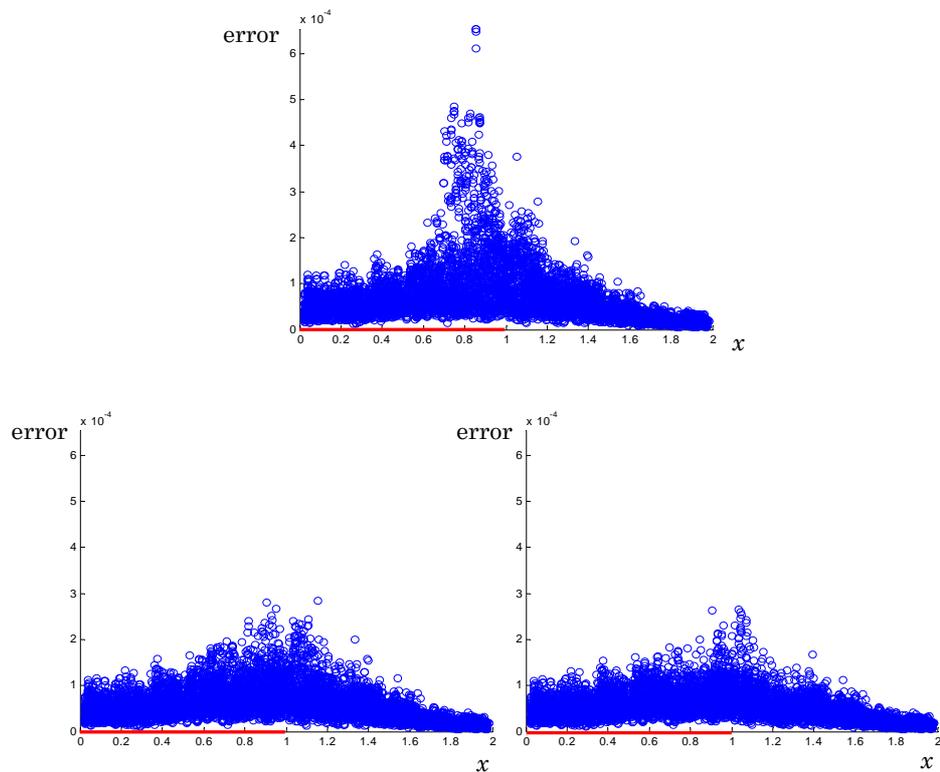


Figura IV-58. Distribución del error en norma energética por elemento, Modo I. En el eje de abscisas se representa la coordenada x del centroide de cada elemento.

En la Figura IV-59 se muestra la convergencia del error en norma energética frente al número de grados de libertad para el caso de Modo II. Aunque la dispersión de los resultados es algo mayor que en el modo I, al ajustar, para

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

cada análisis, los puntos a una recta, la tendencia es análoga a la resultante en modo I y, a su vez, a los resultados obtenidos para mallas estructuradas.

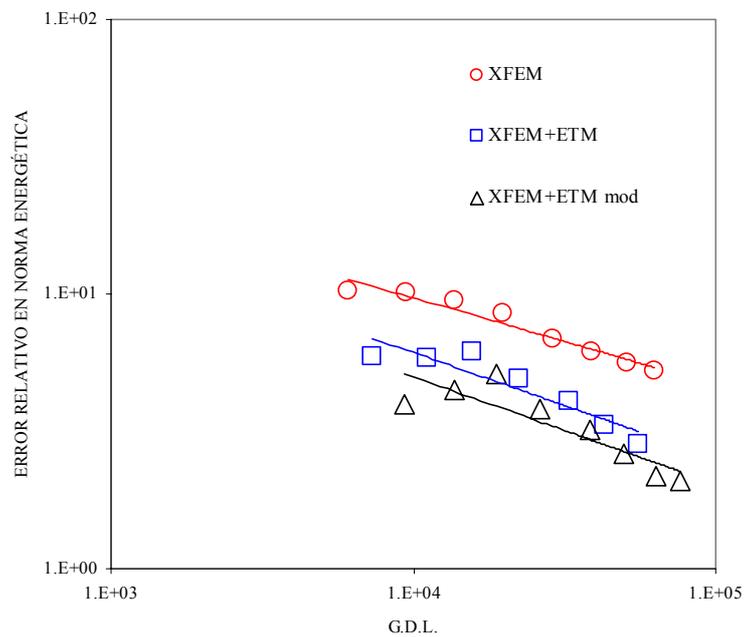


Figura IV-59. Convergencia del error en norma energética para el problema de Westergaard en 3D con mallas no estructuradas. Modo II.

En la Figura IV-60 se muestra la distribución de la norma energética del error en cada elemento.

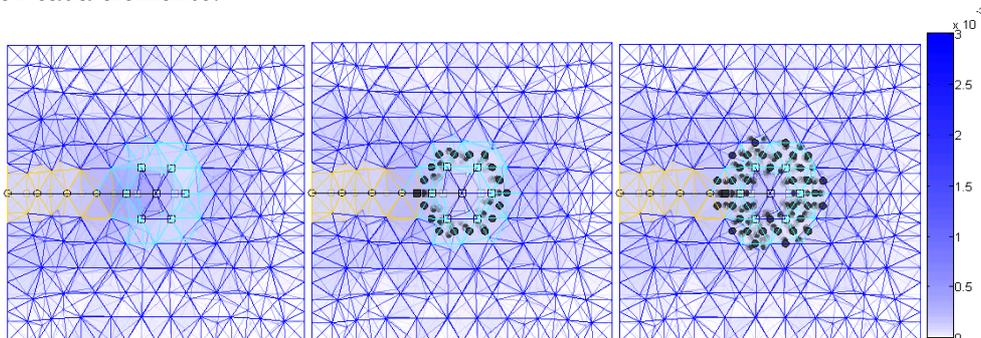


Figura IV-60. Distribución de la norma energética del error en elemento. De izquierda a derecha: XFEM, XFEM+ETM, XFEM+ETM mod.

En la Figura IV-61 se muestra nuevamente la distribución de la norma energética del error en cada elemento identificado por la coordenada x de su centroide. Los resultados son similares a los obtenidos anteriormente, el

IV. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN

elemento de transición mejorado reduce el error especialmente en los elementos cercanos al frente de grieta.

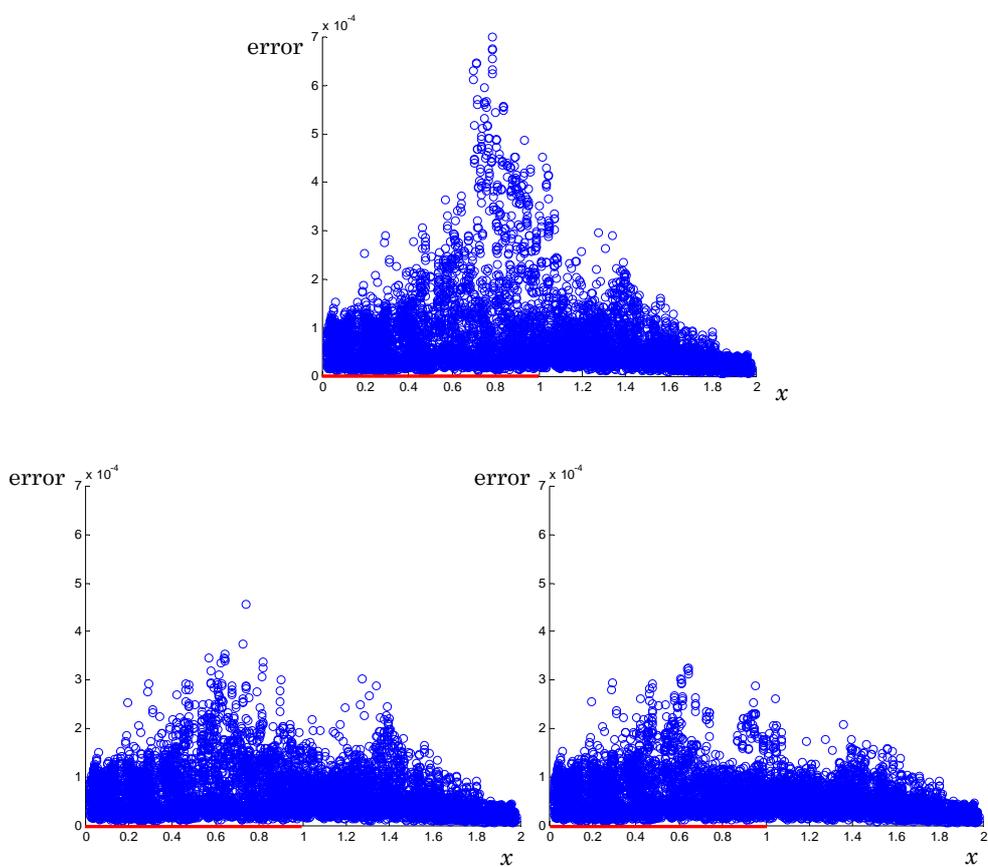


Figura IV-61. Distribución del error en norma energética por elemento, Modo II. En el eje de abscisas se representa la coordenada x del centroide de cada elemento.

Capítulo V

Conclusiones y futuros trabajos

V.1 Conclusiones

El enriquecimiento local en el XFEM supone la existencia de elementos de transición que conectan la zona enriquecida con la estándar. En estos elementos no se cumple la partición de la unidad pudiendo existir términos parásitos, como consecuencia del enriquecimiento parcial, que introducen errores en la aproximación. Estos errores implican, fundamentalmente, pérdida de precisión y, en ocasiones, pérdida de la velocidad de convergencia.

La aportación más importante de la Tesis es la propuesta de un elemento de transición mejorado.

El objetivo principal de esta Tesis ha sido conseguido satisfactoriamente. Aumentar el orden polinómico de la aproximación sólo en los elementos de transición permite alcanzar una mayor precisión en el análisis de problemas de MFEL utilizando el método XFEM. Además, la propuesta permite recuperar la velocidad de convergencia óptima cuando se utiliza en combinación con la técnica *gathering* para mejorar el condicionamiento numérico de la matriz de rigidez global.

A continuación se resumen las principales contribuciones y conclusiones que se han podido realizar en la Tesis:

- Es posible compensar los términos patológicos derivados de un enriquecimiento parcial con la adición de grados de libertad adicionales.

V. CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS

- La adición de los grados de libertad adicionales debe realizarse en la frontera entre los elementos de transición, es decir, en los lados que conectan un nodo enriquecido con las funciones singulares con cualquier otro nodo.
- Para el caso 3D con elementos tetraédricos lineales, es necesario corregir la aproximación en todos los lados del elemento de transición para garantizar la compensación de los términos no deseados en las caras del elemento.
- Las funciones de forma jerárquicas de orden superior muestran un comportamiento muy eficiente para este propósito.
- El orden de la función de forma jerárquica debe ser, como mínimo, uno más que el de la aproximación estándar siendo también conveniente añadir el primer modo interno en el caso 2D para mallas con elementos cuadráticos.
- El coste computacional asociado a la técnica propuesta es muy bajo puesto que la mejora de la aproximación se realiza a nivel local.
- La técnica propuesta de mejora de los elementos de transición reduce el error local en norma energética en todos los elementos enriquecidos (no sólo en los de transición). Esto implica que se pueden obtener resultados más precisos en la estimación de las tensiones.
- Con este método, el incremento de la precisión se alcanza tanto utilizando enriquecimiento topológico como geométrico. Sin embargo, para lograr una velocidad de convergencia óptima, es necesario emplear el segundo.
- La mejora de los elementos de transición aumenta la robustez de los resultados frente a la posición relativa del extremo o frente de grieta dentro de un elemento. Resultado especialmente importante cuando se emplea enriquecimiento topológico, ya que la capa de elementos de transición siempre queda cerca de la singularidad a medida que se refina la malla.
- La técnica propuesta es aplicable con indiferencia del tipo de función causa del comportamiento singular de la solución. Esto no ocurre en otros métodos como el método del campo mejorado de deformaciones (*Enhanced Strain Field*).
- La mejora propuesta de los elementos de transición permite una formulación continua del método de Galerkin. No subdivide el dominio ni

V. CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS

requiere de técnicas adicionales como el método de penalti para forzar la continuidad (Gracie et ál. [136]).

- La técnica propuesta para la mejora de los elementos de transición, no conduce a mallas no conformes como sí ocurre en propuestas como la de Laborde et ál. [129]. Por consiguiente, no es necesario el uso de técnicas que permitan acoplar las zonas estándar y enriquecida.
- El uso de la técnica de agrupar los grados de libertad (*gathering*) (Laborde [129]) junto con la mejora de los elementos de transición, ofrece resultados, en cuanto a precisión y velocidad de convergencia muy buenos. Esto no es posible, por ejemplo, con la técnica propuesta por Fries [135].
- La presencia de *nodos mixtos* cuando se considera la técnica *gathering* es muy importante, especialmente en mallas de elementos cuadráticos.
- La metodología expuesta se ha aplicado también a problemas 3D mostrando igualmente resultados satisfactorios. Si bien, para este caso, la mejora local en la aproximación debe ser realizada en todo el elemento de transición.

Otras conclusiones relativas a aspectos de implementación del XFEM y que en gran medida han sido ya consideradas por otros autores, se han podido comprobar en la Tesis. A continuación se resumen:

- Para obtener la velocidad de convergencia óptima en XFEM cuando se aplica a MFEL, es necesario enriquecer el dominio de manera independiente del tamaño de elemento (enriquecimiento geométrico, Laborde et ál. [129] y Béchet et ál. [128]).
- Hay que tener especial atención a la integración numérica de los elementos intersectados por la grieta así como los que contienen al extremo de grieta. La integración por subdominios resulta eficaz (Dolbow [95], Moës et ál. [96], Sukumar et ál. [120]). La técnica de integración casi-polar (Laborde et ál [129]) ofrece resultados significativamente mejores que la integración estándar de *Gauss-Legendre*, cuando se integran los elementos que contienen al extremo de grieta.
- Las funciones de enriquecimiento pueden introducir ecuaciones linealmente dependientes al sistema, que afectan al condicionamiento de la matriz de rigidez global. Con el enriquecimiento geométrico, el mal condicionamiento de la matriz de rigidez global aumenta rápidamente al refinar la malla. La técnica *gathering* (Laborde et ál. [129]) resulta

V. CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS

eficiente para evitar el mal condicionamiento aunque conduce a resultados imprecisos y pérdida de la velocidad de convergencia.

V.2 Futuros trabajos

Algunos trabajos que se podrían desarrollar a partir de esta Tesis serían los siguientes:

- Aplicación de la técnica propuesta a otro tipo de singularidad como borde libre y problemas de contacto, donde se tengan otras funciones de enriquecimiento parcial.
- Analizar la influencia de la técnica propuesta en la velocidad de convergencia para problemas de singularidad débil, donde otros autores (Sukumar et ál. [113], Fries [135]) han demostrado que la mejora de los elementos de transición les conduce a resultados óptimos, sin necesidad de enriquecer en un área fija.
- Implementación en triángulos para problemas 2D y hexaedros en 3D.
- Analizar la influencia de la mejora de los elementos de transición en el campo de tensiones desde el punto de vista de un estimador de error.

Bibliografía

1. Hill, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford Classic Texts. Oxford University Press, New York, 1998 reprinted edition, 1950.
2. Rice, J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, 35: 379-386, 1968.
3. Chan, S.K., Tuba, I.S. y Wilson, W.K. On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engrg. Fracture Mech.*, 2: 1-17, 1970.
4. Tracey, D.M. Finite element for determination of crack tip elastic stress intensity factors. *Engrg. Fracture Mech.*, 3: 255-265, 1971.
5. Walsh, P.F. The computation of stress intensity factors by a special finite element technique. *Int. J. Solids Structures*, 7: 1333-1342, 1971.
6. Tong, P. y Pian, T.H.H. On the convergence of the finite element method for problems with singularity. *Int. J. Solids Struct.*, 313-321, 1973
7. Strang, G. y Fix, G.J. *Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1973.
8. Budiansky, B. y Rice, J.R. Conservation laws and energy-release rates. *J. Appl. Mech.*, 40: 201-203, 1973.
9. Benzley, S.E. Representation of singularities with isoparametric finite elements. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 8: 537-545, 1974
10. Parks, D.M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. *Int. J. Fracture*, 10: 487-502, 1974.
11. Henshell, R.D. y Shaw, K.G. Crack tip elements are unnecessary. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 9: 495-507, 1975.
12. Akin, J.E. The generation of elements with singularities. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 10: 1249-1259, 1976
13. Barsoum, R.S. On the use of isoparametric finite elements in linear elastic fracture mechanics. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 10(1): 25-37, 1976.

BIBLIOGRAFÍA

14. Barsoum, R. Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 11: 85-98, 1977.
15. Eftis, J., Subramonian, N. y Liebowitz, H. Crack border stress and displacement equations revisited. *Engrg. Fracture Mech.*, 9:189-210, 1977.
16. Chen, F.H.K. y Shield, R.T. Conservation laws in elasticity of the J-integral type. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 28: 1-22, 1977.
17. Gallagher, R.H. A review of finite element techniques in fracture mechanics. In *Proceedings of the 1st International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, Luxmoore, A.R., Owen, D.R.J. (eds.). Pineridge: Swansea, 1-25, 1978.
18. Szabó, B.A. y Mehta, A.K. P-convergent finite element approximation in fracture mechanics. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 12: 551-560, 1978.
19. Hilton, P.D., Kiefer, B.V. y Sih, G.C. Specialized finite element procedures for three dimensional crack problems. *Numerical Methods in Fracture Mechanics, Proceedings 1st Conference*. Owen, D.R.J. y Luxmoore, A.R. editors, págs.: 411-421, Swansea, 1978. Pineridge Press.
20. Lin, K.Y. y Tong, P. A hybrid crack element for the fracture mechanics analysis of composite materials. *Numerical Methods in Fracture Mechanics, Proceedings 1st Conference*. Owen, D.R.J. y Luxmoore, A.R. editors, Swansea, Pineridge Press, págs.: 733-746, 1978.
21. Pian, T.H.H. y Moriya, K. Three dimensional fracture analysis by assumed stress hybrid elements. *Numerical Methods in Fracture Mechanics, Proceedings 1st Conference*. Owen, D.R.J. y Luxmoore, A.R. editors, Swansea, Pineridge Press, págs.: 363-373, 1978.
22. Pu, S.L., Hussain, M.A. y Lorensen, W.E. The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems. *Int. J. Numr. Methods Engrg.*, 12: 1727-1742, 1978.
23. Lynn, P.P. e Ingraffea, A.R. Transition elements to be used with quarter-point crack-tip elements. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 12: 1031-1036, 1978.
24. Fawkes, A.J., Owen, D.R.J., Luxmoore, A.R. An assessment of crack tip singularity models for use with isoparametric elements. *Engrg. Fracture Mech.*, 11: 143-159, 1979.
25. Cherepanov, G.P. *Mechanics of Brittle Fracture*. McGraw-Hill, Nueva York, 1979. Traducido del ruso por De Wit, R. y Cooley, W.

BIBLIOGRAFÍA

26. Ingraffea, A.R. y Manu, C. Stress-intensity factors computation in three dimensions with quarter-point elements. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 15: 1427-1445, 1980.
27. Apostol, T.M. *Calculus*, volumen 2, capítulo 11, págs.: 462-467. Ed. Reverté, 2ª edición, 1980.
28. Yau, J.F., Wang, S.S. y Corten, H.T. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *J. Appl. Mech.*, 47: 335-341, 1980.
29. Babuška, I. y Dorr, M.R. Error Estimates for the Combined h and p Versions of the Finite Element Method. *Numerische Mathematik*, 37, 257-277, 1981.
30. DeLorenzi, H.G. On the energy release rate and the J-integral for 3-D crack configurations. *Int. J. Fracture*, 19: 183-193, 1982.
31. Owen, D.R.J. y Fawkes, A.J. *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*. Pineridge: Swansea, 1983.
32. Carey, G.F. y Oden, J.T. *Finite Elements: A Second Course*, volumen II de The Texas Finite Element Series. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
33. Michavila, F. y Gavete, L. On the use of quadratic transition elements. *Numerical Methods in Fracture Mechanics, Proceedings 3rd Conference*. Owen, D.R.J. y Luxmoore, A.R., editores, Swansea, Pineridge Press, págs.: 95-111, 1984.
34. Saouma, V.E. y Schwemmer, D. Numerical evaluation of the quarter-point crack-tip element. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 20: 1629-1641, 1984.
35. Kanninen, M.F. y Popelar, C.H. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford Engineering Science Series. Oxford University Press, New York, 1985.
36. Yuqiu, L. y Yiqiang, Z. Technical note: Calculation of stress intensity factors in plane problems by the sub-region mixed finite element method. *Adv. Eng. Software*, 7(1): 32-35, 1985.
37. Thompson, G.M. y Whiteman, J.R. Analysis of strain representation in linear elasticity by both singular and non-singular finite elements. *Numer. Methods for Partial Differential Eqns.*, 2: 85-104, 1985.

BIBLIOGRAFÍA

38. Yehia, N.A.B. y Shephard, M.S. On the effect of quarter point element size on fracture criteria. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 21: 1911-1924, 1985.
39. Li, F.Z., Shih, C.F. y Needleman, A. A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engrg. Fracture Mech.*, 21(2): 405-421, 1985.
40. DeLorenzi, H.G. Energy release rate calculations by the finite element method. *Engrg. Fracture Mech.*, 21(1): 129-143, 1985.
41. Szabó, B.A. *PROBE Theoretical Manual, Release 1.0*. NOETIC Technologies Corporation, St. Louis, 1985.
42. Atluri, S.N., editor. Computational Methods in the Mechanics of Fracture, volumen 2, *Computational Methods in Mechanics*. North-Holland (Elsevier Science), Amsterdam, 1986.
43. Atluri, S.N. y Nakagaki, M. "Computational Methods for Plane Problems of Fracture". Computational Methods in the Mechanics of Fracture, volumen 2 de *Computational Methods in Mechanics*, capítulo 6, págs.: 169-227. North-Holland (Elsevier Science), Amsterdam, 1986.
44. Atluri, S.N. y Kobayashi, A.S. "Elastic-Plastic Fracture (Quasi-Static)". Computational Methods in the Mechanics of Fracture, volumen 2 de *Computational Methods in Mechanics*, capítulo 3, págs.: 55-83. North-Holland (Elsevier Science), Amsterdam, 1986.
45. Broek, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Holanda, 4ª edición, 1986.
46. Shih, C.F., Moran, B. y Nakamura, T. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *Int. J. Fracture*, 30: 79-102, 1986.
47. Szabó, B.A. Estimation and Control of Error Based on p Convergence. Editado por Babuška, I., Zienkiewicz, O.C., Gago, J. y de A. Oliveira, E.R. En *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*, John Wiley & Sons, Chichester, págs.: 61-78, 1986.
48. Hughes, T.J.R. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
49. Nikishkov, G.P. y Atluri, S.N. Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the "equivalent domain integral" method. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 24: 1801-1821, 1987.

BIBLIOGRAFÍA

50. Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z. A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 24, 337-357, 1987.
51. Osher, S., Sethian, J.A. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79: 12-49, 1988.
52. Michavila, F. y Gavete, L. Métodos numéricos para el estudio de singularidades en elasticidad lineal. En *Métodos Numéricos Aplicados a Mecánica de la Fractura*. Oliver, J., Elices, M., Oñate, E. y Astiz, M.A., editores, Barcelona, CIMNE, págs.: 1-25, 1988.
53. Gavete, L. Michavila, F. y Heras, F. Un nuevo elemento finito de transición en problemas de fractura en modo mixto. En *Métodos Numéricos Aplicados a Mecánica de la Fractura*. Oliver, J., Elices, M., Oñate, E. y Astiz, M.A. editores, Barcelona, CIMNE, págs.: 163-175, 1988.
54. Shih, C.F. y Asaro, R.J. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterials interfaces: Part I- small scale yielding. *J. Appl. Mech.*, 55: 299-316, 1988.
55. Liebowitz, H., Moyer, ET. *Finite element methods in fracture mechanics*. *Computers and Structures*, 31: 1-9, 1989.
56. Kwon, Y.W., Akin, J.E. Development of a derivative singular element for application to crack propagation problems. *Computers and Structures*, 31(3): 467-471, 1989.
57. Banks-Sills, L. y Sherman, D. On quarter-point three dimensional finite elements in linear elastic fracture mechanics. *Int. J. Fracture*, 41: 177-196, 1989.
58. Koers, R.W.J. Use of modified standard 20-node isoparametric brick elements for representing stress/strain fields at a crack tip for elastic and perfectly plastic material. *Int. J. Fracture*, 40: 79-110, 1989.
59. Kuna, M. y Zwicke, M. A mixed hybrid finite element for three-dimensional elastic crack analysis. *Int. J. Fracture*, 45: 65-79, 1990.
60. Shivakumar, K.N. y Raju, I.S. Treatment of singularities in cracked bodies. *Int. J. Fracture*, 45: 159-178, 1990.
61. Banks-Sills, L. Application of the finite element method to linear elastic fracture mechanics. *Applied Mechanics Review*, 44(10): 447-461, 1991.

BIBLIOGRAFÍA

62. Szabó, B.A. y Babuška, I. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
63. Bugada, G. *Estimación y Corrección del Error en el Análisis Estructural por el MEF*. CIMNE, Barcelona, 1991.
64. Berntson, J., Espelid, T.O. y Genz, A. An adaptive algorithm for the approximate calculation of multiple integrals. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 17:437-451, 1991.
65. Lo, S.H. y Lee, C.K. Solving crack problems by an adaptive refinement procedure. *Engrg. Fracture Mech.*, 43 (2): 147-163, 1992.
66. Yuqiu, L. y Qian, J. Calculation of stress intensity factors for surface cracks in a three-dimensional body by the sub-region mixed FEM. *Compt. Struct.*, 44(1): 75-78, 1992.
67. Shivakumar, K.N. y Raju, I.S. An equivalent domain integral method for three-dimensional mixed-mode fracture problems. *Engrg. Fracture Mech.*, 42(6): 935-959, 1992.
68. Lim, I.L. Johnston, I.W. y Choi, S.K. Application of singular quadratic distorted isoparametric elements in linear fracture mechanics. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 36: 2473-2499, 1993.
69. Gdoutos, E.E. *Fracture Mechanics: an Introduction*. Solid Mechanics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda, 1993.
70. Jayaswal, K. y Grosse, I.R. Finite element error estimation for crack tip singular elements. *Finite Element in Analysis and Design*, 14: 17-35, 1993.
71. Dhondt, G. General behaviour of collapsed 8-node 2-D and 20-node 3-D isoparametric elements. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 36: 1223-1243, 1993.
72. Dowling, N.E. *Mechanical Behaviour of Materials*. Prentice-Hall, New Jersey, 1993.
73. Lemaitre, J y Chaboche, J-L. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press: Cambridge, 1994.
74. Babuška, I., Caloz, G. y Osborn, J. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31: 945-981, 1994.

BIBLIOGRAFÍA

75. Anderson, T.L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. CRC Press, Boca Ratón, Florida, 2ª edición, 1995.
76. Menandro, F.C.N., Moyer, E.T. Jr. y Liebowitz, H. A methodology for crack tip mesh design. *Engrg. Fracture Mech.*, 50 (5/6): 713-726, 1995.
77. Liebowitz, H., Sandhu, J.S., Lee, J.D. y Menandro, F.C.N. Computational fracture mechanics: research and application. *Engrg. Fracture Mech.*, 50(5/6): 653-670, 1995.
78. Belytchko, T., Lu, Y.Y. y Gu, L. Crack propagation by element-free galerkin methods. *Engrg. Fracture Mech.*, 51(2): 295-315, 1995.
79. Adalsteinsson, D. y Dethian, J.A. A Fast Level Set Method for Propagating Interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118, 269-277, 1995.
80. Melenk, J.M. y Babuška, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39: 289-314, 1996.
81. Kpégba, K.W., Ottavy, N. y Souchet, R. Stress intensity factors in two-dimensional crack problems by using the superimposed meshes method. *Engrg. Fracture Mech.*, 54(1): 113-125, 1996.
82. Sethian, J.A. *Level Set Methods and Fast Marching Method: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Material Science*. Cambridge University Press: Cambridge, MA, 1996.
83. Klaus-Jürgen Bathe. *Finite Element Procedures*. By Prentice-Hall Inc. A Simon & Schuster Company, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.
84. Babuška, I. y Melenk, J.M. The partition of unity method. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 40: 727-758, 1997.
85. Fleming, M., Chu, Y.A., Moran, B. y Belytschko, T. Enriched element-free Galerkin methods for crack-tip field. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 40: 1483-1504, 1997.
86. Pageau, S.S. y Biggers, S.H. Enrichment of finite elements with numerical solutions for singular stress fields. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 40: 2693-2713, 1997.
87. Liu, W.K., Uras, R.A. y Chen, Y. Enrichment of finite element method with the reproducing kernel particle method. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 64:861-870, 1997.

BIBLIOGRAFÍA

88. Fuenmayor, J., Domínguez, J., Giner, E. y Oliver, J.L. Calculation of the stress intensity factor and estimation of its error by a shape sensitivity analysis. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 20(5), págs. 813-828, 1997.
89. Oden, J.T. y Duarte, C.A., Chapter: clouds, cracks and FEM's. En *Recent Developments in Computational and Applied Mechanics*, Reddy BD (ed.) *International Center for Numerical Methods in Engineering*, CIMNE: Barcelona, Spain, 302-321, 1997.
90. Liebowitz, H., Sandhu, J.S., Lee, J.D. y Menandro, F.C.M. Computational fracture mechanics research and application. *Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge*, Cherepanov, G.P. (ed.). Malabar, Krieger: FL, 512-525, 1998.
91. Xiao, D. y Dexter, R.J. Finite element calculation of applied J-integral for cracked ship structural details. *Engrg. Fracture Mech.*, 60(1): 59-82, 1998.
92. Rashid, M.M. The arbitrary local mesh replacement method: an alternative to remeshing for crack propagation analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 154: 133-150, 1998.
93. Gosz, M., Dolbow, J. y Moran, B. Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *Int. J. Solids Structures*, 35(15): 1763-1783, 1998.
94. Belytschko, T., Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 45(5):601-620, 1999.
95. Dolbow, J.E. An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics. *PdH dissertation, Theoretical and Applied Mechanics*, Northwestern University, USA.
96. Moës, N., Dolbow, J., y Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 46, 131-150, 1999.
97. Sethian, J.A. *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Cambridge: Cambridge University Press; 1999.
98. Kaneko, H. y Padilla, P.A. A note on the finite element method with singular basis functions. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 45: 491-495, 1999.
99. *StressCheck. Advanced Guide, release 5.0*. Engineering Software Research & Development, Inc., St. Louis, 1999.

BIBLIOGRAFÍA

100. Daux, C., Möes, N., Dolbow, J., Sukumar, N. y Belytschko, T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 48: 1741-1760, 2000.
101. Sukumar, N., Möes, N., Moran, B. y Belytschko, T. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 48: 1549-1570, 2000.
102. Strouboulis, T., Babuška, I. y Copps, K. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181: 43-69, 2000.
103. Strouboulis, T., Copps, K. y Babuška, I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. *Int. J. Numer. Method Engrg.*; 47: 1401-1417, 2000.
104. Dolbow, J., Möes, N. y Belytschko, T. Modelling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method. *Int. J. Solids Struct.*, 37:7161-7183, 2000.
105. Duarte, C.A., Babuška, I. y Oden, J.T., Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems. *Comput. Struct.*, 77: 215-232, 2000.
106. Murthy, K.S.R.K. y Mukhopadhyay. Adaptive finite element analysis of mixed-mode crack problems with automatic mesh generator. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 49: 1087-1100, 2000.
107. Dolbow, J., Möes, N. y Belytschko, T. An extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190: 6825-6846, 2001.
108. Strouboulis, T., Copps, K. y Babuška, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190: 4081-4193, 2001.
109. Belytschko, T., Möes, N., Usui, S. y Parimi, C., Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int. J. Numer. Method Engrg.*; 50: 993-1013l, 2001.
110. Storlarska, M., Chopp, D.L., Möes, N. y Belytschko, T. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 51: 943-960, 2001.

BIBLIOGRAFÍA

111. Duarte, C.A., Hamzeh, O.N., Liszka, T.J. y Tworzydło, W.W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamics crack propagation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 190: 2227-2262, 2001.
112. Giner, E. *Estimación del error de discretización en el cálculo del factor de intensidad de tensiones mediante elementos finitos*. Tesis Doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia (España), 2001.
113. Sukumar, N., Chopp, D., Moës, N. y Belytschko, T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 90: 6183-6200, 2001.
114. Manuel Vázquez Fernández y Eloísa López Pérez. *El Método de los Elementos Finitos Aplicado al Análisis Estructural*. ISBN: 84-880012-06-03. Ed. Noela, Madrid, 2001.
115. Tarancón, J.E. *Estimación y control del error de discretización en el método hp de elementos finitos*. Tesis Doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia (España), 2002.
116. Moës, N., Gravouil, A. y Belytschko, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets- Part I: Mechanical model. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 53: 2549-2568, 2002.
117. Gravouil, A., Moës, N. y Belytschko, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets- Part II: Level set update. *Int. J. Numer. Method Engrg*, 53: 2569-2586, 2002.
118. Stazi, FL., Budyn, E., Chessa, J. y Belytschko, T. An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics*, 31: 38-48, 2003.
119. Chessa, J., Wang, H. y Belytschko, T. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57: 1015-1038, 2003.
120. Sukumar, N. y Prevost, J. H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 40(26): 7513-7537, 2003.
121. Karihaloo, B. L. y Xiao, Q. Z. Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review. *Computers & Structures*, 81(3): 119-129, 2003.

BIBLIOGRAFÍA

122. Nagashima, T., Omoto, Y., y Tani, S. Stress intensity factor analysis of interface cracks using X-FEM. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 56(8): 1151-1173, 2003.
123. Ventura, G., Budyn, E. y Belytschko, T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 58(10):1571-1592, 2003.
124. Xiao, Q.Z. y Karihaloo, B.L., Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 26(8): 719-729, 2003.
125. Stolarska, M. y Chopp, D.L. Modelling thermal fatigue cracking in integrate circuits by level set and the extended finite element method. *Intenational Journal of Engineering Science*, 41, 2381-2410, 2003.
126. Liu, X.Y., Xiao, Q.Z. y Karihaloo, B.L. XFEM for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 59: 1103-1118, 2004.
127. Zienkiewicz O.C. y Taylor R.L. *El Método de los Elementos Finitos*. Las bases. Vol. 1. 5ª edición. CINME. Barcelona. España.
128. Béchet, E., Minnebo, H., Moës, N. y Burgardt, B. Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 64: 1033-1056, 2005.
129. Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y. y Salaün, M. High-order extended finite element method for cracked domains. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 64: 354-381, 2005.
130. Giner, E., Fuenmayor, F.J., Baeza, L., y Tarancón, J.E. Error estimation for the finite element evaluation of G_I y G_{II} in mixed-mode linear elastic fracture mechanics. *Finite Element Analysis and Design*, 41:1079-1104, 2005.
131. Xiao, Q. Z. y Karihaloo, B. L. Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 66(9): 1378-1410, 2006.
132. Ventura, G. On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 66: 761-795, 2006.

BIBLIOGRAFÍA

133. Fries T-P y Belytschko T. The intrinsic XFEM: a method for arbitrary discontinuities without additional unknowns. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 68: 1358-1385, 2006.
134. Duflot, M. A study of the representation of cracks with level sets. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 70: 1261-1302, 2007.
135. Fries T-P. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 75: 503-532, 2008.
136. Gracie, R., Wang, H, y Belytschko, T. Blending in the extended finite element method by discontinuous Galerkin and assumed strain methods. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 74:1645-1669, 2008.
137. Park, K., Pereira, J.P., Duarte, C.A. y Paulino, G.H. Integration of singular enrichment functions in the generalized/extended finite element method for three dimensional problems. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 78: 1220-1257, 2009.
138. Ventura, G., Gracie, R. y Belytschko, T. Fast integration and weight function blending in the extended finite element method. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 77:1-29, 2009.