

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE COMUNICACIONES



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

TESIS DOCTORAL

«CONTRIBUCIÓN AL MODELADO Y AL ANÁLISIS MEDIANTE TEORÍA
DE JUEGOS DE LA COMPETENCIA ENTRE OPERADORES MÓVILES EN
ESCENARIOS CON TECNOLOGÍA "SMALL CELL"»

Autor: Julián Camilo Romero Chavarro

Dirigida por: Dr. Luis Guijarro Coloma

VALENCIA

Abril, 2017.

Agradecimientos

Una vez finalizada esta tesis, la cual me ha llevado 5 años de constancia, llega el momento de agradecer a todas esas personas que han vivido esto conmigo y me han ayudado en todo lo posible.

En primer lugar, quiero agradecer a Luis Guijarro, mi director, por todo el tiempo que me ha dedicado durante estos años así como todos los valiosos consejos, los cuales llevo conmigo, gracias a él esta tesis ha sido posible.

También al Grupo de Interconexión de Redes de Banda Ancha (laboratorio donde realicé la tesis), quienes me han brindado toda su ayuda y compañerismo en los momentos más difíciles, en especial a Diego, Luis, Israel, Ángel y todos los compañeros y excompañeros que han pasado por el laboratorio.

Y por último, pero no menos importante, a mi familia que siempre ha estado a mi lado desde el inicio hasta el final y a todos mis amigos que estando lejos o cerca siempre me han animado a continuar y a no rendirme en este largo camino.

Muchas gracias por hacer vuestra una meta mía/un sueño mío y formar parte de él.

Resum

Aquesta tesi s'ha creat en el marc de la línia de recerca d'Economia i Regulació de les Telecomunicacions del programa de doctorat de Telecomunicacions de la Universitat Politècnica de València, i s'ha desenvolupat en diferents projectes de recerca, especialment, el projecte de "Cooperació i Oportunisme en Xarxes d'Accés Sense fils i Heterogènies"(TIN2010-21378-C02-02) i el projecte S2EuNet-Security (FP7-PEOPLE-2009- IRSES, 247083).

Des dels seus inicis les comunicacions mòbils han experimentat un gran creixement, tant de dispositius mòbils com de quantitat d'amplada de banda demandada, la qual cosa ha provocat que els proveïdors es troben amb el desafiament de fer front a aquest creixement. Per a això, s'estan implementant diferents tècniques i tecnologies que s'integren amb el model actual de comunicacions mòbils.

En aquesta tesi ens centrarem en la solució que aporten les xarxes heterogènies, especialment a la tecnologia de Small cells que s'ha desplegat ràpidament en els últims anys i permet incrementar la capacitat de la xarxa, així com obtenir millor disponibilitat i cobertura per als usuaris, però falta un model de negoci clar on es mostre la seua viabilitat econòmica.

En aquesta tesi es planteja un model de negoci per a un proveïdor de servei que desplega Small cells i que competeix com el proveïdor de serveis incumbent. Per a l'anàlisi d'aquest model s'ha utilitzat la Teoria de Jocs la qual ha permès conèixer les decisions en equilibri que prenen els proveïdors

de servei quan competeixen entre si, així com les decisions en equilibri dels usuaris; d'aquesta manera s'ha obtingut l'efecte d'aquestes decisions sobre els beneficis de tots els agents del model i s'han identificat els avantatges i els inconvenients que té la implementació d'una nova tecnologia al mercat.

Aquesta tesi pretén ser una contribució a l'estudi d'implementació de noves tecnologies al mercat de comunicacions mòbils, més concretament plantejant models econòmics que estudien la seua viabilitat a través de l'anàlisi de la competència entre un nou proveïdor de servei de Small cells i el proveïdor de servei existent, i el comportament dels usuaris de comunicacions mòbils. Els resultats obtinguts mostren que els usuaris obtenen una millor utilitat, el SSP sempre té uns beneficis garantits, el MSP es veu obligat a competir i els seus beneficis es veuen perjudicats, a més que l'entrada del SSP millora el benestar dels usuaris i el benestar social.

Resumen

Esta tesis se ha creado en el marco de la línea de investigación de Economía y Regulación de las Telecomunicaciones del programa de doctorado de Telecomunicaciones de la Universitat Politècnica de València, y se ha desarrollado en diferentes proyectos de investigación, en especial, el proyecto de “Cooperación y Oportunismo en Redes de Acceso Inalámbricas y Heterogéneas” (TIN2010-21378-C02-02) y el proyecto S2EuNet-Security (FP7-PEOPLE-2009- IRSES, 247083).

Desde sus inicios las comunicaciones móviles han experimentado un gran crecimiento, tanto de dispositivos móviles como de cantidad de ancho de banda demandado, lo que ha provocado que los proveedores se encuentren con el desafío de hacer frente a este crecimiento. Para ello, se están implementando diferentes técnicas y tecnologías que se integran con el modelo actual de comunicaciones móviles. En esta tesis nos centraremos en la solución que aportan las redes heterogéneas, especialmente en la tecnología de Small cells que se desplegado rápidamente en los últimos años y permite incrementar la capacidad de la red, así como obtener mejor disponibilidad y cobertura para los usuarios, pero falta un modelo de negocio claro donde se muestre su viabilidad económica.

En esta tesis se plantea un modelo de negocio para un proveedor de servicio que despliega small cells y que compite como el proveedor de servicios incumbente. Para el análisis de este modelo se ha utilizado la Teoría de Juegos la cual ha permitido conocer las decisiones en equilibrio que toman

los proveedores de servicio cuando compiten entre sí, así como las decisiones en equilibrio de los usuarios; de esta manera se ha obtenido el efecto de estas decisiones sobre los beneficios de todos los agentes del modelo y se han identificado las ventajas y los inconvenientes que tiene la implementación de una nueva tecnología en el mercado.

Esta tesis pretende ser una contribución al estudio de implementación de nuevas tecnologías en el mercado de comunicaciones móviles, más concretamente planteando modelos económicos que estudien su viabilidad a través del análisis de la competencia entre un nuevo proveedor de servicio de Small cells y el proveedor de servicio existente, y el comportamiento de los usuarios de comunicaciones móviles. Los resultados obtenidos muestran que los usuarios obtienen una mejor utilidad, el SSP siempre tiene unos beneficios garantizados, el MSP se ve obligado a competir y sus beneficios se ven perjudicados, además que la entrada del SSP mejora el bienestar de los usuarios y el bienestar social.

Abstract

The present doctoral thesis has been realized in accordance with the research line of Economy and Regulation in Telecommunications under the doctoral programme in Telecommunications of Universitat Politècnica de València. It has been developed on the basis of various research projects, especially the “Cooperation and Opportunity for Wireless Heterogeneous Networks Project” (TIN2010-21378-C02-02), which acted as my funding agent and the “S2EuNet-Security Project” .

Mobile communications have undergone notable growth from their beginning up to the present day regarding devices and bandwidth available. Service providers have now to take the challenge of such increase. New technologies are being implemented to address the challenge and all of them belong to the world of mobile communications. This thesis will focus on the solutions provided by heterogeneous nets (HetNets) and, more specifically, we will look at the Small Cells technology. It is starting to be widely deployed lately and allows for a visible increase in network capacity and a resulting enhancement in availability and coverage on the user side. Abundant research has proved that the integration of these technologies within markets is technically feasible. A marketing model is however still necessary which is able to prove its economic viability.

A business model was laid out where a provider sets out to deploy small cells technology and stands as an incumbent service provider. The Theory of Games was used for the analysis of such models as it allows an insight of the

decisions in equilibrium when entering into a competition among themselves and try the decisions of users need to be predicted. In this way we will manage to know the effect of such decisions over the profits of all the agents in the model. A clear picture will be thus obtained of the advantages of the implementation of the new technology in the market as well as of its effects over the incumbent service providers.

This thesis intends to be a contribution towards the implementation of new technologies in the market of mobile technologies through the analysis of the competence between new service providers of Small Cells and an incumbent service providers along with the behaviour of the users of mobile communications. The result show that: users get a better service, the SSP profits are guaranteed and the entrance of the SSP improves the user comfort and social welfare.

Índice general

1. Introduction	5
1.1. Motivation for the thesis	5
1.2. Objectives	6
1.3. context	7
1.4. Layout of the thesis	9
2. Estado del Arte	11
2.1. Nuevas Técnicas y Tecnologías	12
2.1.1. Radio Cognitiva	12
2.2. Redes Heterogéneas	15
2.3. Microeconomía	19
2.3.1. Función de Utilidad	20
2.3.2. Monopolio	21
2.3.3. Oligopolio	21
2.3.4. Teoría de Juegos	22
3. Descripción del escenario y del modelo	29
3.1. Características del escenario	30

3.1.1. Transmisión y modelo del canal	33
3.2. Los usuarios	35
3.2.1. Función de utilidad de los usuarios	37
3.2.2. Ancho de banda óptimo suscrito por los usuarios	39
3.3. Los proveedores de servicios	40
3.3.1. Oferta de los proveedores de servicios	41
3.3.2. Demanda de los proveedores de servicios	42
3.3.3. Beneficios de los proveedores de servicios	43
3.4. Bienestar de los usuarios y bienestar social	44
3.5. Teoría de juegos para la toma de decisiones	45
3.6. Conclusiones	45
4. Proveedor de servicios monopolista	49
4.1. Características del Escenario	50
4.1.1. Los usuarios	50
4.1.2. El MSP	51
4.2. Decisiones en un modelo estático	51
4.2.1. Suscripción de los usuarios:	51
4.2.2. Precio del MSP	52
4.2.3. Decisiones de los agentes del escenario	52
4.3. Decisiones en un modelo evolutivo de la población de usuarios	53
4.3.1. Suscripción de los usuarios:	53
4.3.2. Precio del MSP	55
4.3.3. Decisiones de los agentes del escenario	56
4.4. Decisiones en un modelo dinámico	56
4.4.1. Suscripción de los usuarios:	56

4.4.2.	Precio del MSP	57
4.4.3.	Decisiones de los agentes del escenario	59
4.5.	Resultados	59
4.5.1.	Resolución numérica	60
4.5.2.	Modelo estático	61
4.5.3.	Modelo evolutivo de la población de usuarios	62
4.5.4.	Modelo Dinámico	64
4.5.5.	Comparación de resultados	69
4.6.	Conclusiones	72
5.	Competition between service providers. Static model.	75
5.1.	Model description	76
5.1.1.	Users	77
5.1.2.	Service providers	77
5.2.	Analysis	77
5.2.1.	Stage II: subscription game	78
5.2.2.	Stage I: Stackelberg game	82
5.2.3.	Analysis summary	90
5.3.	Results	91
5.3.1.	Effect of SSP coverage ratio	92
5.3.2.	Effect of spectral efficiency	96
5.3.3.	Effect of SSP's available bandwidth	97
5.4.	Conclusions	99

6. Competencia entre SPs. Modelo evolutivo de la población.	101
6.1. Características del Escenario	102
6.1.1. Los usuarios	102
6.1.2. Los Proveedores de Servicios	103
6.2. Teoría de Juegos para la toma de decisiones	103
6.2.1. Etapa II: Juego de Suscripción	104
6.2.2. Etapa I: Juego de Elección de Precios	107
6.3. Resultados	110
6.3.1. Resolución numérica	110
6.3.2. Comportamiento evolutivo de la población	111
6.3.3. Estrategias en equilibrio de los proveedores de servicios	113
6.3.4. Efecto de la tasa de cobertura del SSP	115
6.3.5. Efecto de la eficiencia espectral	121
6.3.6. Efecto de ancho de banda disponible del SSP	122
6.4. Conclusiones	125
7. Competencia entre SPs. Modelo dinámico.	127
7.1. Características del Escenario	128
7.1.1. Los usuarios	128
7.1.2. Los Proveedores de Servicios	129
7.2. Teoría de Juegos para la toma de decisiones óptimas	129
7.2.1. Etapa II: Juego Evolutivo de Suscripción	131
7.2.2. Etapa I: Juego de Elección de Precios	132
7.3. Resultados	137
7.3.1. Resolución numérica	137
7.3.2. Efecto de la eficiencia espectral	138

7.3.3. Efecto del ancho de banda disponible del SSP	141
7.4. Conclusiones	143
8. Competencia entre SPs. Aceptación de nuevos usuarios.	145
8.1. Utilidad percibida por los usuarios con los SPs	146
8.2. Modelo Estático	147
8.3. Modelo evolutivo de la población de usuarios	148
8.4. modelo dinámico	148
8.5. Resultados	151
8.5.1. Resolución numérica	152
8.5.2. Modelo estático	153
8.5.3. Modelo evolutivo de la población de usuarios	155
8.5.4. Modelo dinámico	158
8.6. Conclusiones	160
9. Competencia entre SPs. Modelo con variación de recursos	163
9.1. Escenarios de Estudio	164
9.2. Monopolio	167
9.2.1. Modelo estático	167
9.2.2. Modelo evolutivo de la población de usuarios	168
9.2.3. Modelo dinámico	170
9.3. Duopolio	171
9.3.1. Modelo Estático: Una decisión a lo largo del tiempo	171
9.3.2. Modelo Estático: Una decisión en cada instante	173
9.3.3. Modelo evolutivo de la población de usuarios	175
9.3.4. Modelo Dinámico	176

9.4. Usuarios que podrían suscribir el servicio	179
9.4.1. Modelo Estático: Una decisión a lo largo tiempo	180
9.4.2. Modelo Estático: Una decisión en cada instante	181
9.4.3. Modelo evolutivo de la población de usuarios	183
9.4.4. Modelo dinámico	185
9.5. Comparación de resultados	186
9.5.1. Beneficios de los SPs	187
9.5.2. Bienestar social y bienestar de los usuarios	188
9.6. Conclusiones	189
10. Conclusions	191
Apéndices	195
A. Abreviaturas y acrónimos	195
B. Análisis de la dinámica del replicador en Monopolio	197
C. Análisis de la dinámica del replicador	201
D. Discretización de las funciones	209
D.1. Discretización de la dinámica del replicador	209
D.2. Discretización de la función objetivo	210

Índice de figuras

2.1. Red heterogénea	16
3.1. Escenario de estudio	30
3.2. Small cell i	32
3.3. Escenario de comunicaciones móviles donde compiten los SPs	34
3.4. Eficiencia espectral y distribución de los usuarios en el área.	36
3.5. Estructura de los juegos	46
4.1. Modelo de monopolio en comunicaciones móvil	50
4.2. Evolución de la población con δ bajo	63
4.3. Evolución de la población con δ alto	63
4.4. Evolución del estado de la población con δ bajo	65
4.5. Precio del MSP con δ bajo	65
4.6. Evolución del estado de la población con δ alto	68
4.7. Precio del MSP con δ alto	68
4.8. Estado final de la población ($x_m(T)$) en los modelos	70
4.9. Beneficios medios del MSP en los modelos	70
4.10. UW Medios en los modelos	71

4.11. SW Medios en los modelos	72
5.1. Scenario.	76
5.2. Game structure	78
5.3. Different regions.	85
5.4. Population ratios as a function of A_s/A_m	93
5.5. Prices and UW as a function of A_s/A_m	94
5.6. Population ratios as a func. of A_s/A_m with heterogeneous θ_{is}	95
5.7. Prices and UW as a function of A_s/A_m with heterogeneous θ_{is}	95
5.8. Fracciones de la población en función de θ_m	96
5.9. Prices and UW as a function of θ_m	97
5.10. Population ratios as a function of B_s	98
5.11. Prices and UW as a function of B_s	98
6.1. Estructura del juego	104
6.2. Solución estacionaria	112
6.3. Evolución de la población con el tiempo	112
6.4. Evolución de la población con el tiempo	114
6.5. Evolución de la población con el tiempo	114
6.6. Equilibrio de precios para $T = 10$	116
6.7. Equilibrio de precios para $T = 100$	116
6.8. Fracciones de la población en función de A_s/A_m	117
6.9. Precios en función de A_s/A_m	118
6.10. UW en función de A_s/A_m	118
6.11. Frac. de población en función de $\frac{A_s}{A_m}$ con θ_{is} heterogéneos.	119
6.12. Precios en función de A_s/A_m con θ_{is} heterogéneos.	120

6.13. UW en función de A_s / A_m con θ_i s heterogéneos.	120
6.14. Fracciones de la población en función de θ_m	122
6.15. Precios en función de θ_m	122
6.16. UW en función de θ_m	123
6.17. Fracciones de la población en función de B_s	123
6.18. Precios en función de B_s	124
6.19. UW en función de B_s	124
7.1. Estructura del juego	130
7.2. Precios de los SPs a lo largo del tiempo en función de θ_m	138
7.3. Comportamiento evolutivo de la población en función de θ_m . . .	139
7.4. Π_m, Π_s, SW y UW en función de θ_m	140
7.5. Precios de los SPs a lo largo del tiempo en función de B_s	141
7.6. Comportamiento evolutivo de la población en función de B_s . . .	142
7.7. Π_m, Π_s, SW y UW en función de m	143
8.1. Efecto de los usuarios sobre los precios	153
8.2. Efecto de los usuarios sobre la población	154
8.3. Efecto de los usuarios sobre los beneficios, UW y SW	155
8.4. Efecto de los usuarios sobre los precios	156
8.5. Efecto de los usuarios sobre la población	156
8.6. Efecto de los usuarios sobre los beneficios, UW y SW	157
8.7. Efecto de los usuarios sobre los precios	159
8.8. Efecto de los usuarios sobre la población	159
8.9. Efecto de los usuarios sobre los beneficios, UW y SW	160
9.1. small cell i	164

9.2. Escenario de estudio.	165
9.3. Estudio del tráfico TCP en la Universidad de Washington.	166
9.4. Ancho de banda utilizado para el Servicio de Internet.	166
9.5. Ancho de banda disponible para el SSP	167
9.6. Evolución de la población	169
9.7. Evolución de la población	170
9.8. Camino de acción óptimo del MSP	171
9.9. Distribución de la población	173
9.10. Precios en equilibrio de los SPs	174
9.11. Evolución de la población	176
9.12. Evolución de la población de los usuarios del MSP	177
9.13. Evolución de la población de los usuarios del SSP	177
9.14. Precios en equilibrio del MSP	178
9.15. Precios en equilibrio del MSP	178
9.16. Usuarios que podrían suscribir el servicio	181
9.17. Precios en equilibrio de los SPs en cada instante de tiempo	182
9.18. Distribución de los usuarios en cada instante de tiempo	182
9.19. Distribución de los usuarios con el tiempo	184
9.20. Usuarios que podrían suscribir el servicio	185
9.21. Distribución de los usuarios en cada instante de tiempo	186
9.22. Beneficios de los SPs en todos los modelos	187
9.23. Bienestar social y bienestar de los usuarios	189

Índice de tablas

2.1. Dilema de los Presos.	24
4.1. Parámetros	60
4.2. Resultados del modelo estático	62
4.3. Resultados cuando la población evoluciona con δ bajo	64
4.4. Resultados cuando la población evoluciona con δ alta	64
4.5. Resultados del modelo dinámico con δ bajo	67
4.6. Resultados cuando la población evoluciona con δ alta	69
5.1. Population ratio when $p_s > p_m / \theta_{m_i}$	80
5.2. Population ratio when $p_s < p_m / \theta_{m_i}$	81
5.3. Population ratio when $p_s = p_m / \theta_{m_i}$	81
5.4. Parameter setting	92
6.1. Parámetros del escenario	110
7.1. Parámetros del escenario	137
8.1. Parámetros del escenario	151
9.1. Parámetros del MSP	165

9.2. Resultados del modelo estático en un mercado monopolista . . . 168

9.3. Result. del modelo evolutivo de la población en monopolio . . . 169

9.4. Resultados del modelo dinámico en un mercado monopolista . 170

9.5. Resultados del modelo estático con una única decisión 172

9.6. Resultados del modelo estático con múltiples decisiones 174

9.7. Resultados del modelo evolutivo de la población de usuarios . 175

9.8. Resultados del modelo dinámico 179

9.9. Resultados del modelo estático con una única decisión 180

9.10. Resultados del modelo estático con múltiples decisiones 183

9.11. Resultados del modelo evolutivo de la población de usuarios . 184

9.12. Resultados del modelo dinámico 186

C.1. La fracción de la población cuando $p_s > p_m/\theta_{m_i}$ 205

C.2. La fracción de la población cuando $p_s < p_m/\theta_{m_i}$ 205

C.3. La fracción de la población cuando $p_s = p_m/\theta_{m_i}$ 207

Notación, variables y parámetros

Γ_l	la SNR mínima para lograr una tasa de w_l bps
δ	tasa de aprendizaje de los usuarios
θ_m^n	eficiencia espectral que percibe el usuario n con el MSP
θ_{m_i}	eficiencia espectral que percibe un usuario en s_i con el MSP
$\theta_{s_i}^n$	eficiencia espectral que percibe el usuario n con la s_i
μ_m	Ingresos del MSP
μ_s	Ingresos del SSP
π_m	beneficios del MSP en un instante de tiempo
π_s	beneficios del SSP en un instante de tiempo
Π_m	beneficios totales del MSP
Π_s	beneficios totales del SSP
ρ	tasa de descuento
A_m	área de cobertura del MSP
A_s	área de cobertura del SSP
A_{s_i}	área de cobertura de la s_i
B_i	recursos disponibles del ISP con el usuario i -ésimo
$B_{m_i}(t)$	ancho de banda disponible del MSP para cada s_i
$B_{s_i}(t)$	ancho de banda disponible para cada s_i
B_s	recursos disponibles del SSP
$BR(p_m)$	Función de mejor respuesta del SSP
$b_m^n(t) = b_m(t)$	ancho de banda que suscribe el usuario n con el MSP
$b_s^n(t) = b_s(t)$	ancho de banda que suscribe el usuario n con el SSP
$b_m^{n*}(t) = b_m^{n*}(t)$	ancho de banda óptimo que suscribe el usuario n con el MSP
$b_s^{n*}(t) = b_s^{n*}(t)$	ancho de banda óptimo que suscribe el usuario n con el SSP

G	modelo de la capacidad de Shannon de la velocidad de transmisión alcanzable con M-QAM
h	tamaño del paso en el método de discretización
H_m	función hamiltoniana del MSP
H_s	función hamiltoniana del SSP
K	usuarios del ISP
L	tasas discretas
w_l	La tasa en un canal
N	usuarios de comunicaciones móviles
N_i	usuarios de comunicaciones móviles en s_i
N_{m_i}	usuarios que se suscriben con el MSP en la s_i
N_{s_i}	usuarios que se suscriben con el SSP en la s_i
N_m	usuarios que se suscriben con el MSP
N_s	usuarios que se suscriben con el SSP
$p_m(t)$	precios anunciado por el MSP
$p_s(t)$	precios anunciado por el SSP
$p_m^*(t)$	precios en equilibrio del MSP
$p_s^*(t)$	precios en equilibrio del SSP
$p_{m_i}(p_s)$	p_m mínimo que permitirá a todos los usuarios en s_i suscribir
$p_{s_i}(p_m)$	p_s mínimo que permitirá a todos los usuarios en s_i suscribir
Q_{m_i}	ancho de banda suscrito por los usuarios en s_i con el MSP
Q_{s_i}	ancho de banda suscrito por los usuarios en s_i con el SSP
Q_m	ancho de banda suscrito por los usuarios con el MSP
Q_s	ancho de banda suscrito por los usuarios con el SSP
$r_i(t)$	fracción de ancho de banda disponible de la s_i
$r_m(t)$	fracción de ancho de banda disponible del MSP
\mathbf{r}	matriz de las fracciones de ancho de banda disponible del SSP
\mathcal{S}	conjunto de estrategias
s_0	área de la macrocell que no tiene cobertura del SSP
s_i	i -ésimo small cells
SW	bienestar social
T	tiempo durante el cual se evalúa el escenario

$u_m^n = u_m$	utilidad percibida por el usuario n suscrito con el MSP
$u_s^n = u_s$	utilidad percibida por el usuario n suscrito con el SSP
$u_o^n = u_o$	utilidad percibida por el usuario n que no se suscribe
$u_{m_i}^n = u_{m_i}$	utilidad percibida por el usuario n suscrito con el MSP en s_i
$u_{s_i}^n = u_{s_i}$	utilidad percibida por el usuario n suscrito con el SSP en s_i
$u_{o_i}^n = u_{o_i}$	utilidad percibida por el usuario n que no se suscribe en s_i
U	utilidad esperada por un usuario
U_i	utilidad esperada por un usuario en una s_i
$u_m^n = u_m$	utilidad percibida por el usuario n suscrito con el MSP
$u_s^n = u_s$	utilidad percibida por el usuario n suscrito con el SSP
$u_o^n = u_o$	utilidad percibida por el usuario n que no se suscribe
$u_{m_i}^{n*} = u_{m_i}^*$	utilidad percibida por un usuario suscrito con el MSP en s_i dada la elección de ancho de banda óptimo
$u_{s_i}^{n*} = u_{s_i}^*$	utilidad percibida por un usuario suscrito con el SSP en s_i dada la elección de ancho de banda óptimo
$u_{o_i}^{n*} = u_{o_i}^*$	utilidad percibida por un usuario que no se suscribe en s_i
UW	bienestar de los usuarios
w_l	La tasa en un canal
$x_{m_i}(t)$	fracción de usuarios que se suscriben con el MSP en s_i
$x_{s_i}(t)$	fracción de usuarios que se suscriben con el SSP en s_i
$x_{o_i}(t)$	fracción de usuarios que no suscriben en s_i
$x_m(t)$	fracción de usuarios que se suscriben con el MSP
$x_s(t)$	fracción de usuarios que se suscriben con el SSP
$x_o(t)$	fracción de usuarios que no suscriben
$x_{m_i}^*(t)$	fracción de usuarios en equilibrio que suscribe con el MSP en s_i
$x_{s_i}^*(t)$	fracción de usuarios en equilibrio que suscribe con el SSP en s_i
$x_{o_i}^*(t)$	fracción de usuarios en equilibrio que no suscriben en s_i
$x_m^*(t)$	fracción de usuarios en equilibrio que se suscriben con el MSP
$x_s^*(t)$	fracción de usuarios en equilibrio que se suscriben con el SSP
$x_o^*(t)$	fracción de usuarios en equilibrio que no suscriben

Capítulo 1

Introduction

1.1. Motivation for the thesis

Mobile communications have undergone exponential growth over the latest years in the form of handheld devices, smartphones, tablets and laptops, as well as in bandwidth demand. Cisco reports that the number of connected mobile devices will be around 5500 million in 2020 and that 70 % of the world's population will be connected [1]. Over 2/ thirds of traffic will be video and their study shows that the traffic of mobile data generated will increase by 800 % and the demand of bandwidth from users will grow accordingly. The present times show a picture where mobile communications and their associated services have become an everyday need which expresses the users' need to be connected all the time, everywhere with better and faster connections.

Service providers are faced with the need to confront this growth in the number of users and their demand of bandwidth and this explains their constant quest for innovation which enables total connection everywhere. Despite their efforts, many users experience low reception in indoor environments. This is due to the present mobile network model, also called

Macro- Cell, whose signal will become significantly lessened by factors such as distance, climate and obstacles.

In order to solve the issues related to the increase of mobile data and of the lessening of signal in indoor environments, various technologies are being developed and integrated within the present model of mobile communications such as Cognitive Radio Networks and Heterogeneous Nets. In this thesis we will concentrate on the solutions provided by HetNets and, more specifically, on one of its key elements: the Small Cells Technology -Micro, Pico and Femto Cells. This technology has been developed and deployed over the latest years making use of small stations connected to the internet able to capture the signal of users and route the calls towards the mobile network [4], thus achieving significant improvements in data speed, availability and coverage [55] [43].

The integration of this technology is feasible from a technical point of view as far as it incorporates improvements to the network, but significant challenges are still pending for its full deployment. One of them is a feasibility study which makes it attractive for service providers in economic terms by considering the necessary improvements in infrastructures [44] [22] and the added value before the rest of providers who would not implement this technology.

This thesis presents a solution to the lack of a realistic business model where a new provider deploying Small Cell services is the competitor of an already existing Macrocell service and where a dynamic re-usage of resources is suggested.

1.2. Objectives

The objective of this thesis is to develop economic models for analyzing the feasibility of a service implementing Small Cells Technology and to determine the effects in the market of the incorporation of a new provider offering new technologies for mobile communications. In addition

to predicting the behaviour of service providers and users at the moment of decision taking and how it will affect the users, developing the models will allow us to:

- Introduce greater competence in the marketing
- Create an economic model showing the feasibility to implement a service of Small Cells, thus increasing the quality of communication services through an improvement in the efficiency of the resources available.
- Introduce a dynamic model which allows to delve into the evolution of the users' behaviour as the decisions of the service providers and the resources vary.
- Analyze and obtain the behaviour of service providers and users according to changing resources over a period of time and adjust the decisions according to the situations taking place for each scenario.

1.3. context

The making of the thesis has taken place in the Group of Interconnection of Broadband Networks within the 'Instituto Universitario de Tecnologías de la Información y Comunicación' of Universitat Politècnica de València over the last 5 years, where several projects were started, mainly the Cooperation and Entrepreneurship in Heterogeneous Wireless Networks (COHWAN, TIN2010-21378-C02-02) from the Ministry of Science and Innovation which funded my doctoral studies and the project S2EuNetSecurity, Services, networking and performance of next generation IP based multimedia wireless networks (FP7-PEOPLE-2009-IRSES, 247083) which provided the funding for my research stay at the University of Minnesota.

The following stages have been considered during the realization of the present thesis

I In the first place the analysis of the technologies which can be implemented by a service provider in order to achieve competitiveness in the market of mobile communications such as spectrum sharing models by using cognitive radio where a provider rents part of their spectrum to a provider of virtual mobile services and the users decide what amount of spectrum to subscribe to and what provider to go for. The following documents were issued on the basis of such studies.

- **Conference:** 2013 IEEE 24th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications: Workshop on Spectrum sharing strategies for wireless broadband services -Workshop on Spectrum Sharing
Title: Competition Between Primary and Secondary Operators with Spectrum Leasing and Optimal Spectrum Subscription by Users
- **Conference:** XI Jornadas de Ingeniería Telemática (JITEL 2013)
Title: Competencia entre operador primario y secundario con alquiler de espectro y suscripción óptima de espectro por parte de los usuarios

II In the second place to define the payment functions received by each of the agents in the model which will allow for a mathematical analysis of the rational decisions taken by the agents in the model. Such decisions were obtained by applying Theory of Games and optimization techniques. An academic stay at a research centre specializing in optimization techniques was arranged for the purpose of acquiring greater knowledge in this field.

- **University :** University of Minnesota, EE. UU.
Department: Department of Electrical and Computer Engineering
Start date: 01/05/2014
End date: 01/08/2014

III Finally the results are processed through a mathematical approach, specific to each of the scenarios implied. The static model later went

through a numeric analysis whose results were published in the following journal:

1.4. Layout of the thesis

Chapter 2 is concerned with a review of the current state of the art in the world of technologies as to whether they would permit the entrance of a new service provider in the market of mobile communications with special attention to Heterogeneous Nets. Some microeconomy concepts are later introduced with the aim of analyzing the behaviour of individual economic units. Finally the optimization techniques are analyzed.

In chapter 3 we analyze the scenario where the model will be evaluated by considering the limitations and the dynamic re-utilization of bandwidth of the SSP while the payment functions of users and providers are assessed and their decisions evaluated.

In chapter 4 the monopoly model is analyzed as a market model where the SSP is not present, within which the decisions of the MSP and the users are assessed. The profits of MSP and of users are determined so the results inside an oligopolistic market can be perceived, as well as its effects over the MSP and the users.

The analysis of the competence is attempted according to three different models: in chapter 5 the static model is analyzed, where the decisions of providers and users are made once in one go and the decisions of users are taken at every instant along time. over time. In chapter 6 an evolving population model is analyzed where the decisions of providers are taken once but the decisions of users are made every instant in over time. In chapter 7 the entrance of SSP into a dynamic scenario is reviewed where the decisions of providers and users are taken at every instant of time.

In chapter 8 all the reviewed scenarios in the thesis are analyzed on the grounds that there should exist a number of users likely to subscribe the

service because the degree of usefulness perceived is higher.

In chapter 9 a case study is solved under the hypothesis of all the scenarios considered. Resources are used here in a dynamic way as we take into consideration the advantages of a dynamic model allowing for such re-utilization.

Chapter 10 presents a summary of all the scenarios analyzed as well as its conclusions and possible future working lines.

The thesis concludes with the respective references and annexes.

Capítulo 2

Estado del Arte

Para abordar el escenario estudiado en esta tesis y dar la mejor solución ha sido necesario realizar una investigación de los trabajos dedicados al estudio de nuevas técnicas y tecnologías que permitan aumentar la capacidad de la red de telefonía móvil y a su vez realizar un uso más eficiente del espectro, como lo son: trabajos relacionados con las técnicas de compartición de espectro mediante la implementación de radio cognitiva y trabajos relacionados con nuevas e innovadoras tecnologías que permitan aumentar la capacidad de la red especialmente en escenarios indoor mediante múltiples tecnologías de acceso de radio, un ejemplo de ello son las HetNets.

Se ha estudiado diversos trabajos que abordan las diferentes problemáticas que se generan en su implementación de las HetNets, centrado el interés en el estudio de las decisiones óptimas que toman todos los agentes del escenario para plantear un modelo de negocios viable que permita la implementación de nuevas técnicas y tecnologías y a su vez abrir el mercado a nuevos proveedores de servicios que no se pueden hacer un hueco en el mercado debido al limitado espectro radioeléctrico. La toma de decisiones óptimas de los proveedores de servicios y los usuarios son estudiados a través de la Teoría de Juegos.

Este capítulo se divide en tres partes, en la primera parte se muestran los

trabajos previos que se han realizado en el campo de los modelos económicos que permiten la incorporación de nuevas técnicas y tecnologías en el mercado de telefonía móvil, en la segunda parte se muestran los conocimientos necesarios sobre la Teoría de Juegos que fueron necesarios para afrontar el problema planteado en esta tesis, y una tercera parte donde se muestra la investigación realizada sobre técnicas de optimización y como se resuelven de manera numérica.

2.1. Nuevas Técnicas y Tecnologías

2.1.1. Radio Cognitiva

Teniendo en cuenta que gran parte del espectro asignado está infrautilizado la FCC (Federal Communications Commission) propuso replantear las arquitecturas de redes inalámbricas utilizando la Radio Cognitiva (CR) [3]. Un dispositivo de CR es un sistema de radiofrecuencia capaz de variar sus parámetros de transmisión basándose en su interacción con el entorno en el que opera, y una forma de utilizar la CR es mediante la compartición de espectro. En base a esto se estudió en [10], [9], [24], [7], [8], [11], [12] diferentes escenarios en redes de radio cognitiva que buscan realizar un uso más eficiente del espectro y además que sea viable su implementación.

Para realizar un uso más eficiente del espectro se ha estudiado un modelo económico que permita incorporar las técnicas de compartición dinámica del espectro como en [8], donde se estudia un escenario de compartición del espectro de manera cooperativa entre los usuarios primarios y múltiples usuarios secundarios: los usuarios secundarios retransmiten tráfico para los usuarios primarios, a cambio de tiempo de transmisión dedicado a sus propias necesidades de comunicación. Este proceso se realiza en tres fases logrando que los usuarios secundarios puedan acceder al espectro usando TDMA para no interferir entre sí. Este tipo de escenarios permite a los usuarios secundarios poder acceder al espectro y de dicha manera realizar

un uso más eficiente del mismo. Otros estudios consideran la compartición del espectro entre un usuario primarios y múltiples usuarios secundarios mediante un problema de competencia en un mercado de oligopolio y el uso de un juego de Cournot para obtener la asignación del espectro para los usuarios secundarios como en [11], pero no se garantiza el acceso de todos los usuarios y el incentivo lo tendría el usuario primario, por tanto es de esperar que un usuario no busque un modelo de negocio que solo permita que los usuarios se conecten a través del espectro que deja libre, por ello la tesis se enfocó en modelos que permitan el acceso de múltiples usuarios en el mercado de telefonía móvil.

Una forma de lograr el acceso masivo de usuarios a través de la compartición de espectro mediante el alquiler de espectro de un proveedor de servicio secundario; en [10] se estudió el alquiler de espectro dentro de las redes de radio cognitiva, en un escenario donde un proveedor de servicio primario tiene una licencia de espectro y un proveedor de servicio secundario alquila parte del espectro adoptando la tecnología de radio cognitiva para acceder de forma oportunista a éste, de tal manera que el proveedor de servicio secundario puede competir para prestar el servicio a los usuarios, y dicha competencia se realiza con un modelo de Bertrand, el cual determina los precios que deben pagar los usuarios a los proveedores de servicios; por otra parte, los usuarios toman sus decisiones en función de la utilidad que perciben con cada proveedor de servicio, de tal manera que suscribirán con el proveedor que les genere una mayor utilidad. Ese escenario es estudiado en un juego de dos etapas y resuelto por inducción hacia atrás y las decisiones se toman en el mismo período de tiempo. Este trabajo muestra que los usuarios se benefician con la incorporación de un nuevo proveedor en el mercado y además demuestra la posibilidad de un caso de negocio para el proveedor de servicio secundario aunque depende de la cantidad de espectro alquilado por el proveedor de servicio primario, por tanto hay un condicional en dicho escenario estudiado. Adicionalmente a este trabajo se realiza un estudio más completo en [9] donde se analiza la negociación entre el proveedor de servicio primario y el secundario por la cantidad de espectro que alquilará,

en ambos estudios se demuestra la mejora que perciben los usuarios, pero el proveedor de servicios primario no aumenta sus beneficios alquilando espectro al proveedor de servicios secundario, por tanto no tiene ningún incentivo para permitir la entrada del nuevo proveedor, por dicha razón concluyen que es necesaria la intervención de una autoridad que obligue al proveedor de servicio primario a alquilar espectro.

Si el proveedor de servicio primario se dedica a alquilar espectro a los proveedores de servicios secundarios y dichos proveedores compiten entre sí, se evita la intervención de una autoridad regulatoria que obligue al proveedor de servicio primario a alquilar espectro, porque ya obtiene los beneficios del alquiler de espectro a otros proveedores de servicio y no compete en el mercado, como se muestra en [24] donde se estudia un modelo de un proveedor de servicio dueño de una licencia que alquila espectro de forma dinámica a dos proveedores de servicios secundarios, el alquiler de espectro se realiza de forma dinámica a corto plazo por la captación de los vacíos del espectro. Este modelo se resuelve como un Juego por Etapas, en la primera etapa los proveedores de servicios determinan las cantidades de espectro a alquilar según las limitaciones presupuestarias que tiene cada uno, en la segunda etapa los proveedores de servicios secundarios compiten entre sí para prestar el servicio a los usuarios, y dicha competencia se realiza utilizando un modelo de Bertrand donde el factor de control es el precio que deben pagar los usuarios por el servicio, y en la tercera etapa los usuarios toman sus decisiones óptimas en base a las utilidades percibidas; estas decisiones son qué proveedor de servicio suscribir y cuánto ancho de banda suscribir. Este modelo permite a los proveedores de servicios secundarios acceder de manera rápida a los recursos que no utiliza el proveedor de servicio primario. La problemática de este escenario es que no se tiene en cuenta la competencia entre el proveedor de servicio primario y los proveedores de servicios secundarios. Continuando con este estudio se analizó en [7] un escenario donde un proveedor de servicio secundario debe determinar las cantidades óptimas de detección de espectro, la cantidad de espectro a alquilar y el precio que deben pagar los usuarios, dicho escenario

se resuelve mediante un juego por etapas utilizando el Juego de Stackelberg. Pero este modelo utiliza solo un proveedor de servicio secundario y no hay una competencia entre los proveedores, además hay un dinamismo en el escenario que se debería tener en cuenta ya que las decisiones se toman en un periodo de tiempo fijo.

Hay estudios en redes de radio cognitiva que tienen en cuenta el dinamismo del escenario como por ejemplo en [12] donde se determinan las decisiones óptimas que deben tomar varios proveedores de servicios primarios que compiten entre sí para ofrecer oportunidades de acceso al espectro a los usuarios secundarios, este modelo se resolvió mediante un juego dinámico, mediante la búsqueda de estabilidad del juego dinámico en términos de convergencia el cual es un equilibrio de Nash.

Como vemos se ha planteado diversos modelos económicos en las redes de radio cognitiva y cada uno de ellos se estudió una competencia entre proveedores de servicio, pero siempre partiendo de la base que es posible y existe un interés del proveedor de servicio primario en alquilar espectro, por dicha razón hemos estudiado otras tecnologías que den la posibilidad de entrar en el mercado de telefonía móvil.

2.2. Redes Heterogéneas

La heterogeneidad en términos de tecnologías de acceso de radio múltiple (multi-RAT) y de múltiples niveles en una red de comunicaciones móviles se ha introducido como una característica principal de la próxima generación de las comunicaciones móviles, para aumentar la cobertura y la capacidad de red móvil, y además mejorar la experiencia del usuario especialmente en escenarios indoor [14]. En la Figura 2.1 se muestra un modelo de la Red heterogénea (HetNets).

Hay diversos documentos dedicados al estudio de la adopción de HetNets para el mercado de las comunicaciones móviles, el despliegue de una HetNets se hace con estaciones base de corto alcance (que corresponde a

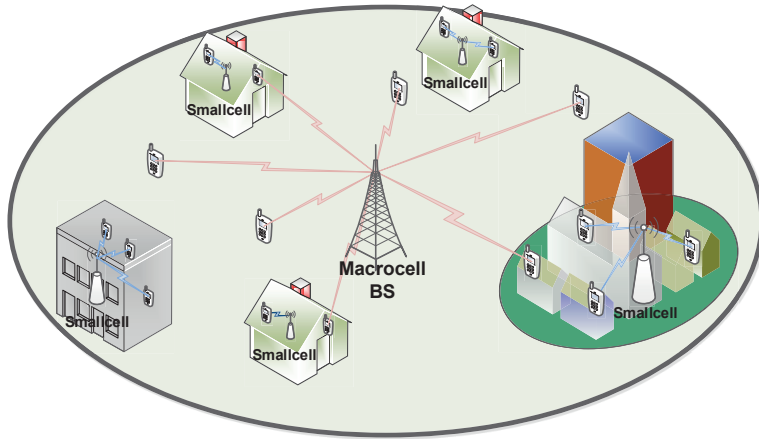


Figura 2.1: Red heterogénea

Small cells, picocells o femtocells) como se muestra en la Fig. 2.1, debido al área de cobertura más pequeña, la misma banda de frecuencias con licencia puede ser reutilizada varias veces de manera eficiente dentro de los elementos de segundo nivel de un HetNet, mejorando así la eficiencia espectral por unidad de área y por tanto la capacidad de la red [65]. Pero uno de los desafíos para el despliegue de esta tecnología es la necesidad de un modelo de negocio viable [44], [23] y que además muestre el incentivo para los proveedores de servicios existente o de un nuevo proveedor para implementar dicha tecnología [21].

Las limitaciones prácticas y desafíos para el éxito del despliegue de una Hetnet son discutidos en [16], donde se propuso un modelo teórico para mostrar la efectividad de incorporar las HetNets en el modelo de red existente. En [13] y [5] se realiza un estudio para conocer cuál es el incentivo económico que tiene un proveedor de servicio de Macrocells que desea implementar el servicio de femtocells y lo realiza mediante un juego de líder seguidor donde el proveedor de servicio es el líder en determinar las asignaciones de espectro y las decisiones de fijación

de precios de los servicios tanto de Macrocells como de femtocells, y posteriormente los usuarios deciden el servicios y la cantidad de ancho de banda. Este planteamiento demuestra que los beneficios del proveedor de servicio aumenta ya que puede atender a más usuarios a un precio más alto y cuanto mayor sean los costes de implementación van a ser atendidos menos usuarios con el servicio de femtocells. Este modelo nos muestra la viabilidad de implementar el servicio para un proveedor de servicio ya existente ya que aumentará sus recursos de la red, obtendrá mayores beneficios y los usuarios podrán escoger que servicio suscribir. Este modelo no incorpora la entrada de un nuevo proveedor de servicios en el mercado que aumente la competencia en él, además es un modelo donde no se estudia el comportamiento que tienen los usuarios a lo largo del tiempo.

En [55] se plantea un modelo económico que motive a los proveedores de servicios de Small cells existentes para alquilar parte de los recursos al proveedor de servicio de macrocells y de dicha manera permitir el acceso de los usuarios de la macrocells y así poder aumentar la capacidad de las redes, y lo hace de la siguiente manera: (I) el proveedor de servicio de macrocells paga un precio cada periodo de tiempo al proveedor de servicio de Small cells por unidad de ancho de banda alquilado, (II) el proveedor de servicio de Small cells conociendo este precio decide la cantidad óptima de ancho de banda que le va alquilar en cada periodo de tiempo, las decisiones de los proveedores de servicios se obtienen utilizando un juego diferencial de Stackelberg donde el proveedor de servicio de macrocells y el de Small cells actúan como el líder y seguidor respectivamente, (III) los usuarios conociendo los recursos que tienen para el servicio de Small cells o macrocells deciden con que proveedor suscribir mediante un juego evolutivo y dada una función de utilidad en la que se mide el nivel de satisfacción rendimiento y coste. Este modelo realiza un control dinámico de los recursos que alquila el proveedor de servicio de Small cells al proveedor de servicio de macrocells lo que permite utilizar de manera más eficientes los recursos de la red de Small cells existentes, y además tiene en cuenta el comportamiento evolutivo de los usuarios a lo largo del tiempo.

Hay modelos donde se estudian la entrada de un nuevo proveedor de servicios como en [15] donde analizan los efectos que tiene la entrada de un nuevo proveedor de servicios que utiliza femtocells para competir contra el proveedor de servicios de macrocells existente tanto en los usuarios como en los proveedores de servicios, y los usuarios pueden elegir con cuál de los dos suscribir ya que ambos tienen el mismo área de cobertura y el proveedor de servicio de femtocells alquila espectro del proveedor de servicio de macrocells. Este escenario se resuelve en un juego de tres etapas, en la primera se resuelve la negociación del espectro, en la segunda la competencia de los proveedores de servicios utilizando un modelo de Bertrand y en la tercera la elección óptima de los usuarios, y los resultados obtenidos muestran que todos los agentes del sistema mejoran con la implementación de la tecnología de femtocells, pero este tipo de modelos necesitan de una negociación con la que debe estar de acuerdo el proveedor de servicio existente; y el escenario al ser un modelo estático no contempla el comportamiento evolutivo cuando los recursos varían. Adicionalmente en [8] se estudia un modelo similar donde las interacciones entre un proveedor de servicios de macrocell, proveedor de servicios de femtocells, y los usuarios como un juego dinámico de tres etapas, en este modelo no se hace una reutilización de los recursos existente y además dependen de la negociación con el proveedor de servicio de Small cells.

Como vemos se han realizado numerosos trabajos que abordan modelos económicos que permiten la integración de la tecnología de Small cells en las redes de telefonía móvil actual, en todas ellas concluyen que existe un incentivo no solo económico por parte de los proveedores de servicio sino también de la mejora en la calidad del servicio ya que aumenta la capacidad de la red y la eficiencia espectral del canal de transmisión.

2.3. Microeconomía

Para plantear y resolver el modelo económico estudiado fue necesario investigar la teoría económica y especialmente la microeconomía, puesto que es la rama que se encarga del estudio de la conducta de unidades económicas individuales [34], como lo son en nuestro escenario los proveedores de servicios y los usuarios. La microeconomía describe las disyuntivas a las que se enfrentan los usuarios y los proveedores de servicios y nos ayuda a conocer el cómo y el porqué de todas las decisiones que toman, de esta manera se evalúa el comportamiento del mercado de Telefonía móvil.

Para resolver las disyuntivas es necesario conocer el tipo de mercado en el que se encuentran los proveedores de servicios ya que nos ayuda a determinar su comportamiento y a conocer la forma de actuar de cada uno de ellos, dado las características del modelo planteado los proveedores de servicio se encuentra en un mercado oligopolístico [34] puesto que el producto es un bien idéntico (ancho de banda para acceder al servicio de telefonía móvil) y solo unas cuantas empresas producen la mayor parte o toda la producción total de dicho bien.

Además es necesario determinar un indicador de bienestar de cada uno de ellos, de tal manera que describa las preferencias que tienen cada uno, para ello es necesario conocer una función que describa este tipo de preferencias, ésta se conoce como función de utilidad [34], la cual permite asignar un número a todas las posibles elecciones existentes, de tal forma que la elección que prefiere un individuo (usuario o proveedor de servicio) es aquella que le genere una utilidad mayor.

Conociendo los indicadores de bienestar y el tipo de interrelación que existe entre los proveedores de servicios es necesario estudiar las estrategias óptimas que toman cada uno de ellos y para ello se utiliza la Teoría de Juegos [38] ya que analiza la interdependencia estratégica que tienen los proveedores de servicios y permite conocer cómo evolucionan y actúan los mercados, es decir, permite analizar como el cambio de estrategia de una empresa afecta a

dicha empresa, a sus competidores y al mercado.

2.3.1. Función de Utilidad

Las preferencias que tienen los proveedores de servicios se determinan en función de los beneficios recibidos, los cuales están dados como los ingresos menos los costes [34]. El ingreso es el precio de un bien multiplicado por la cantidad vendida de dicho bien, en nuestro modelo el ingreso es el precio por suscribir un servicio multiplicado por la cantidad vendida de dicho servicio, y los costes es el valor monetario de todos los factores que intervienen en la producción. El factor de control de los proveedores de servicios es el precio por unidad de ancho de banda que deben pagar los usuarios por suscribir el servicio de telefonía móvil.

Las preferencias de los usuarios son más difíciles de determinar, por ello se ha estudiado múltiples funciones de utilidad que midan las preferencias de los usuarios en el mercado de telefonía móvil, como en [24], [7] y [8] donde se propone una función de utilidad de cada usuario que dependa del pago que realizan, la cantidad de ancho de banda que suscribe y el logaritmo de la Relación señal a ruido del canal wireless de cada usuario, de tal manera que cuanto mayor sea el precio menor será la utilidad y cuanto mayor sea la Relación señal a ruido del canal wireless mayor será la utilidad percibida del usuario. Similarmente en [9] y [10] se propone una función de utilidad que tiene en cuenta la calidad de servicio la cual depende del el logaritmo de la Relación señal a ruido del canal wireless de cada usuario y adicionalmente un factor que considera la posibilidad de un usuario con la disposición a pagar. De forma similar en [11] y [12] se propone una función de utilidad que depende directamente de la eficiencia espectral percibida por cada usuario. El comportamiento de todas las funciones de utilidad que se han propuesto en estos documentos se comporta de manera similar cuando se varia el precio anunciado por los proveedores de servicios.

Todas ellas dejan claro que el factor de control de los proveedores de servicio es una pieza importante en la toma de decisiones de los

usuarios, dado que el precio que anuncian dichos proveedores de servicios repercute directamente en las decisiones de los usuarios. Otro de los factores importantes es la cantidad de ancho de banda que suscribe cada usuario ya que cuanto mayor sea esa cantidad mayor será el pago que se debe hacer, adicionalmente todos los trabajos relacionados utilizan un factor que mida la mejora en la utilidad dado las características que tiene cada proveedor de servicio, este factor en algunos trabajos es la calidad de servicio [9], [10], las características del canal wireless [24] y [7], la eficiencia espectral [11], [12] y [10] o la Relación señal a ruido [24] y [8]. En general todos miden cuanto mejor es suscribir con un proveedor de servicios con respecto a otro en función de calidad, precio y cantidad contratada.

2.3.2. Monopolio

En los mercados Monopolísticos para un producto o servicio determinado, solo existe una empresa que lo produce y dicho bien o servicio no tiene un sustituto, por lo tanto, las elecciones de los usuarios no es elegir entre diversas empresas sino decidir si comprar el bien o servicio que ofrece la empresa monopolista.

La empresa monopolista sabe que sus decisiones influyen directamente en el mercado, tanto su producción como el precio que anuncia por el bien o servicio que ofrece, por lo tanto, las decisiones de una empresa monopolista se basan en manejar adecuadamente los factores de control (producción y precios) para maximizar sus objetivos.

2.3.3. Oligopolio

En los mercados oligopolísticos el producto, el bien o el servicio de las empresas es idéntico y existe una interdependencia estratégica en las variables de interés, las cuales son: el precio que cobran o las cantidades que producen. En base a estas variables las empresas toman sus decisiones

dependiendo sus objetivos y del tipo de interrelación que exista entre ellas. Las empresas pueden trabajar bajo dos modelos:

- *Modelo de Cournot*: Este modelo describe el problema de elección de la cantidad a producir teniendo en cuenta la decisión que tomará el competidor, es decir, cada empresa elige el nivel de producción que maximice sus beneficios en función de la estrategia que cree que va a realizar su competidor. Además las empresas saben que el precio de mercado depende de la producción total de las empresas [35].
- *Modelo de Bertrand*: Este modelo describe el problema de elección de precios teniendo en cuenta la decisión que tomará el competidor [36], es decir, cada empresa elige su precio en función de sus beneficios y de lo que cree que anunciará su competidor. Los precios obtenidos se encuentran en un equilibrio competitivo [37].

2.3.4. Teoría de Juegos

Para definir las estrategias óptimas que toman tanto los proveedores de servicio como los usuarios nos adentraremos en el estudio de modelos matemáticos que analizan las estrategias de agentes racionales e inteligentes, lo cual lo hace la Teoría de Juegos. En sus orígenes se llamada la teoría de la decisión por Daniel Bernoulli y basaba su estudio en el análisis del comportamiento de los jugadores que participan en un juego de salón, posteriormente se realizaron otros estudios de la Teoría de Juegos por Ernst Zermelo y Émile Borel, pero la Teoría de Juegos empezó a crecer con los estudios realizados por von Neumann and Morgenstern [38] donde la aplicaba al comportamiento económico.

La Teoría de Juegos permite conocer el resultado más probable del juego o el conjunto de resultados que a priori resultan más probables dados los supuestos establecidos, es decir, permite conocer que estrategias serán tomadas por los agentes del escenario con una mayor probabilidad, y cuáles son las mejores que pueden tomar cada agente, por tanto ninguno de ellos se

arrepentirá ni tendrá incentivo para cambiarla, estas estrategias se encuentran en *equilibrio* ya que los agentes maximizan la utilidad esperada.

Para obtener las estrategias que se encuentren en equilibrio es necesario cumplir con los supuestos establecidos por el juego, los cuales son:

- I Todos los jugadores conocen los resultados que pueden obtener, es decir, su función de utilidad.
- II Los jugadores conocen todas las estrategias posibles, es decir, la variable de control que tiene cada uno de los agentes, en el caso de los proveedores de servicios es el precio que deben pagar los usuarios y en el caso de los usuarios es la cantidad de ancho de banda que van a suscribir y el proveedor con el que suscriben.
- III Se considera que los jugadores son racionales, es decir, que ellos buscaran su propio bien, en este caso será maximizar su utilidad.
- IV Toda la información del juego es de conocimiento público, es decir, todos los jugadores conocen su función de utilidad y la función de utilidad de los demás, además de conocer todas las posibles estrategias que tienen cada uno.

Cumpliendo estos supuestos la Teoría de Juegos nos permite llegar a estrategias que estén en equilibrio. Pero para llegar a las estrategias que estén en equilibrio es necesario plantear el tipo de juego, puesto que es esencial comprender el punto de vista de los jugadores y de esa manera deducir como actuará en determinado momento cada uno de ellos. A través del juego del dilema del prisionero mostrado en la Tabla 2.1 se explicarán los tipos de juegos que existen, en este juego dos individuos (jugadores) cometen un delito y tienen que decidir si confesar o callar, y dada sus decisiones cada uno puede obtener 0, 1, 4 o 6 años en prisión dependiendo de su elección y de la del otro jugador. Se observa que si un jugador calla puede obtener 6 o 1 años de prisión y si confiesa puede obtener -4 o 0 años de prisión dependiendo de la elección del otro jugador.

Tabla 2.1: Dilema de los Presos.

		Jugador B	
		Confesar	Callar
Jugador A	Confesar	-4, -4	0, -6
	Callar	-6, 0	-1, -1

- **Juegos No Cooperativos:** Los jugadores competirán entre sí por lo que no es posible una negociación entre ellos. En este tipo de juegos pueden ser juegos simultáneos y los juegos consecutivos.

 - **Juego Simultáneo:** Cuando las empresas no conocen la decisión que va a tomar su competidor tendrán que anticipar las decisiones que tomará su competidor y en base a ésta tomar la decisión más sensata. Ambas empresas toman sus decisiones al mismo tiempo. En el dilema del prisionero el equilibrio sería Confesar - Confesar, porque los jugadores no conocen las decisión del otro entonces y puesto que $-4 > -6$ y $0 > -1$ será siempre una estrategia dominante a que uno tome la decisión de callar.
 - **Juego Consecutivo:** Cuando una de las empresas toma su decisión primero y en base a ésta la otra empresa tomará su decisión más sensata, dichas decisiones pueden ser precios o cantidad que producen. Este modelo se denomina Modelo de Stackelberg [39] y se utiliza para describir mercados donde una empresa es dominante, dicha empresa será la líder, es decir la primera empresa que toma la decisión y la otra u otras empresas son la/las seguidoras en la toma de decisiones.

Continuando con el dilema del prisionero vemos que el jugador A es el líder en la elección (en las empresas es la producción o

el precio) y el jugador B es el seguidor, el seguidor tomará su decisión óptima dada la elección del líder, como vemos la elección optima del seguido es confesar ($-4 > -6$ y $0 > -1$). El líder debe anticipar la respuesta óptima del seguidor y en base a eso debe tomar su decisión, es decir, el líder sabe que cualquier decisión de él, el seguidor decidirá siempre confesar y conociendo eso toma su decisión óptima, la cual es confesar ($-4 > -6$).

En este caso los resultados obtenidos en el juego simultáneo y en el consecutivo son los mismos pero no siempre se cumple dicho resultado, en nuestro escenario de estudio este juego es muy interesante porque existe una SP dominante en el mercado.

- **Juegos Cooperativos:** En este tipo de juegos las empresas pueden coludir en lugar de competir entre sí, es decir, las empresas pueden llegar a un acuerdo y entre ellas decidir el precio a anunciar y/o la cantidad a producir, este tipo de coalición se le llama cártel y su mayor problema es que debe existir una confianza de que la otra empresa no cambiará la estrategia, puesto que si uno de las empresas lo realiza puede obtener un mayor incentivo.

Al no existir una competencia es de esperar que las empresas solo piensen en su propio bien y no en el bienestar de los usuarios, así que su coalición se basará en maximizar la suma de los beneficios de las empresas.

Siguiendo con el dilema del prisionero, si los prisioneros jugaran un juego cooperativo, es decir, si pudieran armar una coalición de tal manera que ambos confiaran que su competidor no cambiara de decisión, ellos maximizaran la suma de sus utilidades, por lo tanto, la respuesta en equilibrio de ambos jugadores es callar, con lo que ambos pagarían 1 año de prisión y en total los dos pagarían 2 años.

El modelo que se evalúa en esta tesis está basado en juegos no cooperativos, puesto que existe una competencia entre los proveedores de

servicios, y las técnicas para resolver este tipo de juegos son: Estrategias dominantes o Equilibrios.

Las estrategias dominantes son aquellas que dominan estrictamente sobre la otra de forma que ante cualquier estrategia de sus oponentes la utilidad asociada a la estrategia dominante es estrictamente mayor que las demás estrategias, es decir, una estrategia que es óptima sin importar la estrategia que tome el adversario [34]. En muchos de los juegos estudiados se carecen de una estrategia dominante.

Las estrategias de los jugadores están en equilibrios si ningún jugador aumenta su utilidad de forma unilateral mediante un cambio de estrategia, puede existir más de un equilibrio en el juego pero no todos los equilibrios son óptimos, en base a esto John Nash formuló un equilibrio en el que un conjunto de estrategias donde un jugador hace lo mejor para él, dado las estrategias que toma su adversario, esto se llama un **Equilibrio de Nash** y es estable porque ningún jugador tiene incentivo para cambiar de estrategia [37].

Cuando se realiza un juego consecutivo las reglas del juego cambian, puesto que un jugador es líder en la elección y el otro es el seguidor, para este tipo de juego existen otro equilibrio como lo es el Equilibrio de Stackelberg [39], donde las estrategias están en equilibrio cuando el seguidor realiza su conjunto de estrategia óptimas dado el conjunto de estrategias del líder y el líder realiza su mejor elección anticipando el movimiento que hará el seguidor.

Es natural descomponer un juego en diversos subjuegos de tal manera que nos queda un juego por etapas donde las etapas se ordenan de forma temporal a como se realizan la elecciones y el estudio de los equilibrio en cada una de las etapas se realiza por inducción hacia atrás (background induction), es decir, se busca el equilibrio desde la última etapa a la primera para garantizar un equilibrio perfecto en subjuegos [33].

Todo lo que se ha descrito anteriormente permite conocer cuáles son las estrategias que con mayor probabilidad toman los jugadores en un determinado juego pero solo si el juego se juega una vez y solo se toma

una elección, pero si el juego sucede cada instante de tiempo y además los jugadores van aprendiendo de los resultados obtenidos con anterioridad esto hace que la racionalidad que tenían los jugadores en uno de los supuesto del juego se vea afectada por sus decisiones anteriores. La **Teoría de Juegos evolutiva** permite incorporar la noción darwiniana que las buenas estrategias se difunden a través de las poblaciones de jugadores en lugar de ser aprendida por los agentes racionales y en base a esto buscar las estrategias que son evolutivamente estable [42]. Los juego dinámicos presentados por el economista Ross [41] permiten el estudio a lo largo de un horizonte de tiempo (finito o infinito) y en cada periodo los jugadores reciben un pago, el objetivo de los jugadores es obtener la mayor rentabilidad global, es decir, la suma de los pagos a lo largo del horizonte de tiempo teniendo en cuenta la variación del juego en cada periodo de tiempo. Las técnicas de solución de estos juegos dependen del tipo de modelo propuesto y son las siguientes:

- **Open-loop Control Systems:** Este tipo de sistemas la salida no tiene ningún efecto sobre la acción de control, es decir que la evolución del sistema no depende de las salidas y estas no retroalimentaran el sistema, por tanto el sistema evolucionará sin ninguna restricción.
- **Closed-loop Control Systems:** Este tipo de sistemas utilizan la señal de error, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la señal de salida o una función de la señal de salida y sus derivados) para alimentar al controlador a fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado, es decir, el sistema se retroalimenta para que la salida sea la deseada.
- **Feedback Control Systems:** Este tipo de sistemas realizan una comparación entre la salida y la entrada y utilizan la diferencia como un medio de control del sistema, lo que permite al sistema ajustar su rendimiento para cumplir con una respuesta de salida deseada.

Capítulo 3

Descripción del escenario y del modelo

Esta tesis se centra en un estudio económico que muestre la viabilidad de incorporar la tecnología de Small cells en el modelo de red existente, de tal manera que permitirá cuantificar las ventajas que tiene la incorporación de una nueva tecnología desde el punto de vista de los beneficios económicos, aprovechamiento del espectro, el aumento de la capacidad de la red y el aumento del bienestar de los usuarios y el bienestar social.

Los escenarios descritos en esta tesis son atractivos para nuevos proveedores de servicios, puesto que les permite entrar en un mercado, el cual están demandando día tras día mayor ancho de banda. Por ello, en este capítulo se va a detallar las características del escenario y los factores que intervienen en el despliegue de la tecnología de Small cells.

A continuación se describe las características del escenario, los agentes que intervienen en el modelo, es decir, los usuarios y los proveedores de servicios, para ello se explicarán el comportamiento de las decisiones y las funciones objetivo de los proveedores de servicios y de los usuarios. Posteriormente, se define las funciones de bienestar social y de bienestar de los usuarios, las cuales nos permitirá identificar que tan viable es el estudio del modelo. Por último, se describe los juegos que se evaluarán para la toma de decisiones de los proveedores de servicios y de los usuarios.

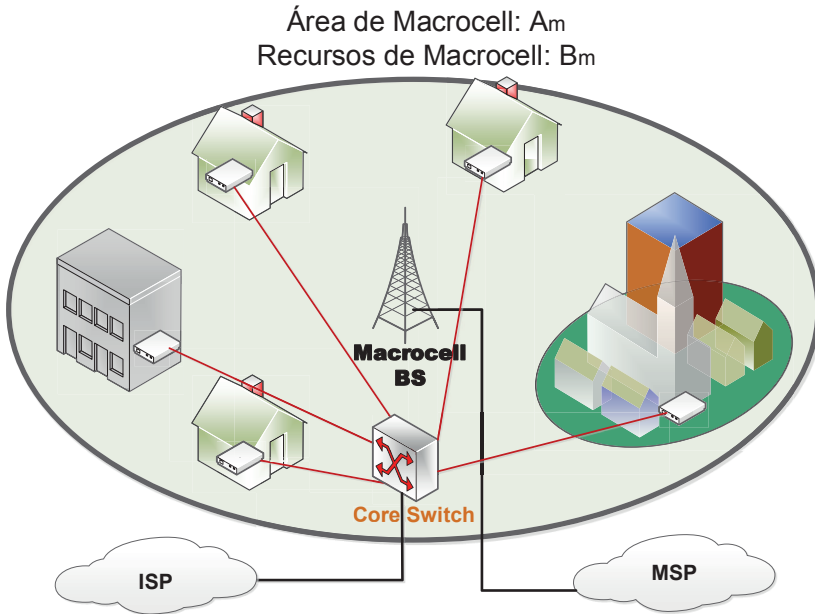


Figura 3.1: Escenario de estudio

3.1. Características del escenario

El escenario objeto de estudio se puede observar en la figura 3.1 y sus características principales son las siguientes:

1. Se considera un escenario donde se presta el servicio de comunicaciones móviles mediante la tecnología de Macrocells y Small cells. La tecnología de Macrocells es desplegada por el Proveedor de Servicio de Macrocells (a partir de ahora llamado MSP), es el operador convencional que posee un conjunto de estaciones base donde cada una presta el servicio en una Macrocells y proporciona cobertura total en el área de servicio. La tecnología de Small cells es desplegada por el Proveedor de Servicio de Small-cells (a partir de ahora llamado SSP).

2. El área de estudio es la Red de Acceso Radio (RAN) que cubre una estación base (BS) del MSP con un área de cobertura de A_m y los recursos disponibles para prestar el servicio son B_m .
3. En el área de cobertura de la BS se presta el servicio de comunicaciones móviles (voz y datos) y el servicio de acceso a Internet. El servicio de comunicaciones móviles es prestado por el MSP, mientras el servicio de acceso a Internet es prestado por un proveedor de servicios de Internet (ISP).
4. Dentro del área de servicio existen K usuarios que están suscritos con el ISP. El ISP puede ofrecer un ancho de banda de B_i al i -ésimo usuario.
5. Dentro del área de servicio existen N usuarios que quieren contratar el servicio de comunicaciones móviles.

La implementación de la tecnología de Small cells en el área de servicio permite aumentar los recursos de la red, aprovechar de manera más eficiente el espectro de frecuencia, mejorar la calidad de servicios en escenarios indoor, además de la entrada a nuevas tecnologías en el mercado de comunicaciones móviles, lo cual permitirá la entrada de nuevos SP y así aumentar la competencia en el mercado [4], [55] y [43].

La implementación de esta tecnología se realiza mediante el despliegue de una RAN que consiste en Small cells dispuestas de la siguiente manera:

- Un SSP aprovecha la infraestructura existente de los K usuarios que se suscriben con el ISP para conectar una Small cell (a partir de ahora llamada s_i a la i -ésimo Small cells) a cada punto de acceso de los K usuarios, como se muestra en la Fig. 3.2.
- El SSP reutiliza los recursos del ISP para prestar el servicio de comunicaciones móviles y lo hace de la siguiente manera: dado que el ISP puede ofrecer un ancho de banda de B_i y el usuario del servicio de Internet es un instante de tiempo utiliza un ancho de banda de

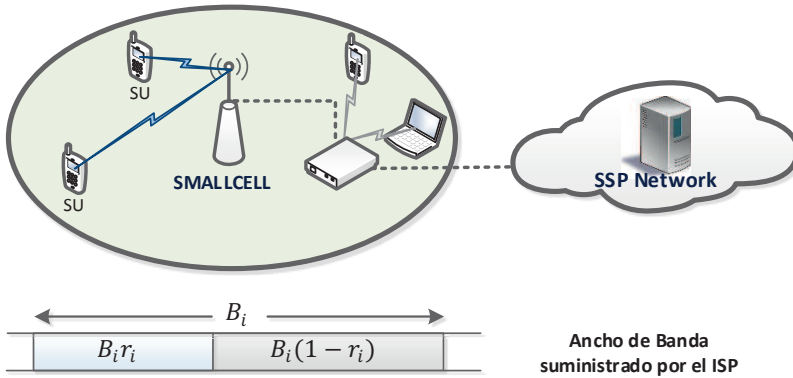


Figura 3.2: Small cell i

$B_i(1 - r_i(t))$, el ancho de banda restante es el que puede utilizar cada s_i para prestar el servicio de comunicaciones móviles, es decir, $B_{s_i}(t) = B_i r_i(t)$, $r_i(t)$ es la fracción de ancho de banda disponible para cada s_i en un instante de tiempo, como se muestra en la Fig. 3.2.

Se aprecia que si $r_i(t) = 0$ la s_i solo presta el servicio de Internet y si $r_i(t) = 1$ la s_i solo presta el servicio de comunicaciones móviles.

Se define la matriz de las fracciones de ancho de banda disponible para el SSP como: $\mathbf{r}_s = [r_1 \cdots r_i \cdots r_K]$.

- El SSP se encarga de conectar todas las K s_i que se encuentran dentro del área de servicio, de esta manera crea la red de Small cells. Dicha red se encarga de prestar el servicio a todos los usuarios que suscriban con él dentro del área de cobertura la cual está compuesta por la cobertura de las K s_i , como se muestra en la Fig. 3.3.
- Los recursos disponibles del SSP en cada instante de tiempo son $\sum_{i \in K} B_{s_i}(t)$, pero estos recursos son independientes en cada s_i , es decir, los recursos de una s_i solo pueden suplir la demanda de los usuarios de dicha s_i .
- Además de las K Small cells, s_1, \dots, s_K , se define s_0 como el área de la

macrocell que no se solapa con el área de cobertura de ninguna Small cells; claramente $B_{s_0} = 0$.

- Los N usuarios de comunicaciones móviles pueden suscribir con el MSP o el SSP, pagan por una velocidad de datos nominal, que es igual al ancho de banda asignado por el SP. Entonces diremos que los usuarios *suscriben el ancho de banda de los SPs*. La velocidad real de datos obtenida por el usuario dependerá de la eficiencia espectral del canal de radio. Como en [5] que siguen este mismo enfoque.

Si bien el MSP posee una licencia para explotar una banda de espectro, el SSP no posee tal licencia, sino una autorización genérica para proporcionar servicios de comunicaciones inalámbricas. Actualmente, la mayoría de las Autoridades Reguladoras Nacionales (por ejemplo, la Unión Europea incluyó esta posibilidad en la Reforma Regulatoria de Telecomunicaciones de 2009). Por lo tanto, se permite al SSP utilizar espectro que un proveedor de servicio con licencia pone a disposición mediante un acuerdo comercial secundario.

3.1.1. Transmisión y modelo del canal

Consideramos un modelo de compartición del espectro entre los usuarios N similar al de [43], [49] y [55] para el MSP, donde el canal entre la BS y los usuarios está dada por una pérdida de trayecto dependiente de la distancia, un componente que varía lentamente modelado por ensombrecimiento lognormal, y desvanecimiento de Rayleigh rápido con potencia de media unidad.

Se supone que se utiliza M-QAM con modulación adaptativa y sin control de potencia. La tasa en un canal secundario de ancho de banda b (en Hz) se encuentra en un conjunto de L tasas discretas y se puede expresar como [64].

$$w_l = b \log_2(1 + \Gamma_l/G), \quad \text{if } \text{SNR} \in [\Gamma_l, \Gamma_{l+1}), \quad l = 1, \dots, L, \quad (3.1)$$

donde G expresa el modelo de la desviación de la capacidad de Shannon de

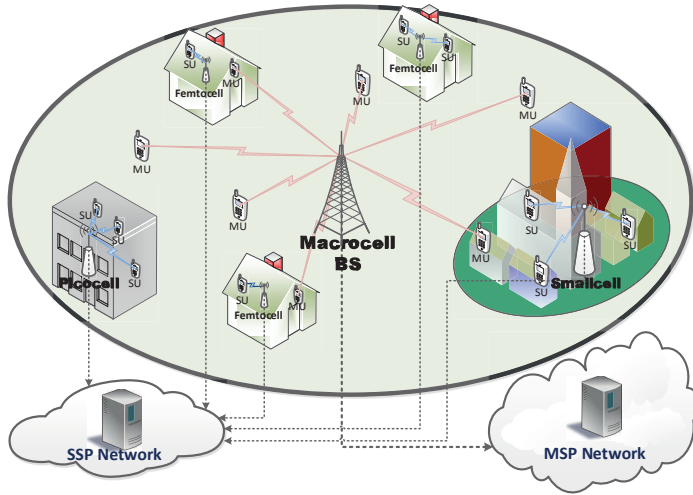


Figura 3.3: Escenario de comunicaciones móviles donde compiten los SPs

la velocidad de transmisión alcanzable con M-QAM, y Γ_l es la SNR mínima para lograr una tasa de w_l bps.

Los usuarios experimentan diferentes condiciones de canal debido a la distancia entre la BS y el usuario, interferencias debidas a obstáculos, entre otros factores de atenuación. Por simplicidad, asumimos que no existe interferencia entre los usuarios, con estas condiciones se define la eficiencia del espectro que obtiene un usuario n con el MSP, cuya SNR está en el intervalo $[\Gamma_l, \Gamma_{l+1})$, dada en [66]

$$\theta_m^n = w_l/b = \log_2(1 + \Gamma_l/G). \quad (3.2)$$

a partir de nuestra discusión anterior, podemos considerar que existe un conjunto de L valores discretos para la eficiencia espectral, θ_m^n .

θ_m^n está normalizado en el intervalo $[0, 1]$, de tal manera que si un usuario n percibe $\theta_m^n = 1$ quiere decir que la distancia entre él y la BS es mínima, por lo tanto, las pérdidas que perciben son nulas y si percibe $\theta_m^n = 0$ quiere decir que el usuario se encuentra fuera del área de servicio de la BS, por lo tanto,

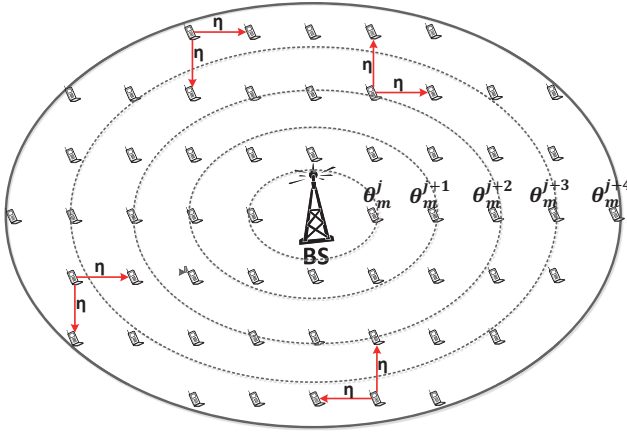


Figura 3.4: Eficiencia espectral y distribución de los usuarios en el área.

ésta no le podrá servir. La eficiencia espectral que percibe un usuario con el MSP se puede ver en la Fig. 3.4, donde $\theta_m^j \geq \theta_m^{j+1} \geq \theta_m^{j+2} \geq \theta_m^{j+3} \geq \theta_m^{j+4}$.

Puesto que el área de cobertura de cada Small cell es relativamente pequeña, se supone que los usuarios suscriptos con el MSP que están en la misma Small cell obtienen la misma eficiencia espectral,

$$\theta_m^n = \theta_{m_i} \quad (3.3)$$

por la misma razón, se supone que la eficacia espectral de todos los usuarios que se suscriben con el SSP es igual a 1, es decir

$$\theta_{s_i}^n = \begin{cases} 1 & \text{si el usuario } n \text{ está dentro de la } s_i, \\ 0 & \text{si el usuario } n \text{ no está dentro de la } s_i, \end{cases} \quad (3.4)$$

La eficiencia espectral del SSP no se está limitada por un valor de 1. Puesto que, usando una eficiencia espectral del SSP igual a 1 y una eficiencia

espectral del MSP en el intervalo $[0, 1]$, estamos normalizando la máxima eficiencia espectral alcanzable por el MSP al alcanzado por el SSP.

Se define $b_m^n(t)$ como el ancho de banda que suscribe el usuario n con el MSP y se define $b_s^n(t)$ como el ancho de banda que suscribe el usuario n con el SSP. Entonces, el usuario n obtiene una tasa instantánea de $\theta_m^n b_m^n$ bits si se suscribe con el MSP o b_s^n si se suscribe con el SSP [43].

3.2. Los usuarios

En el área de cobertura estudiada existen N usuarios de comunicaciones móviles (definimos el conjunto de usuarios como: $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$) que quieren suscribir el servicio y pueden cambiar sus elecciones entre los diferentes SPs de forma independiente y dinámica de acuerdo a la utilidad instantánea percibida, es decir, los usuarios tienen la libertad de elegir el SP al que prefieren suscribir en cada instante de tiempo.

Asumimos que los usuarios se encuentran distribuidos uniformemente dentro del área de cobertura, es decir, el número de usuarios en s_i es $N_i = N(A_{s_i}/A_m)$, donde A_m y A_{s_i} son el área de cobertura del MSP y s_i respectivamente, dicha distribución de los usuarios se puede ver claramente en la Fig. 3.4, donde la distancia entre dos usuarios vecinos es siempre η .

Definimos el estado de la población en cada s_i como la fracción de usuarios que se suscriben con el MSP y SSP en cada s_i y están dados como:

$$x_{m_i} = N_{m_i}/N_i, \quad (3.5)$$

$$x_{s_i} = N_{s_i}/N_i, \quad (3.6)$$

$$x_{o_i} = 1 - x_{m_i} - x_{s_i}, \quad (3.7)$$

donde N_{m_i} y N_{s_i} son los usuarios que se suscriben con el MSP y al SSP en cada s_i respectivamente y x_{o_i} es la fracción de usuarios que no logran suscribir el servicio. Se obtiene de forma directa que $x_{s_0} = 0$ porque $N_{s_0} = 0$.

Adicionalmente se define la fracción de la población en el área total x_m , x_s y x_o y está dado como:

$$x_m = N_m / N, \quad (3.8)$$

$$x_s = N_s / N, \quad (3.9)$$

$$x_o = 1 - x_m - x_s, \quad (3.10)$$

donde N_m y N_s son los usuarios que se suscriben con el MSP y al SSP en el área total.

Asumimos que no existe movilidad de los usuarios, por tanto, siempre existirán los mismos usuarios en una s_i en la cobertura de la BS.

3.2.1. Función de utilidad de los usuarios

Los usuarios deben tomar las siguientes decisiones:

- Qué cantidad de ancho de banda suscribir.
- A qué SP suscribir.

Para determinar cuáles son las decisiones de los usuarios se plantea una función de utilidad, la cual es una forma de cuantificar las elecciones que tienen cada uno de los usuarios, de tal forma que la elección que le genera una mayor utilidad instantánea es la que el usuarios preferirán elegir. Se propone una función de utilidad que integre los siguientes factores:

- La tasa instantánea que recibe un usuario es $\theta_m^n b_m^n$ o b_s^n si se suscribe con el MSP o al SSP, respectivamente.
- El pago que debe hacer un usuario $b_m^n p_m$ o $b_s^n p_s$ si se suscribe con el MSP o al SSP, respectivamente.
- Limitaciones de disponibilidad de recursos y/o cobertura de los SPs.

Dado estos factores, la función de utilidad percibida por un usuario suscrito con el MSP (u_m^n) y al SSP (u_s^n) si tiene disponibilidad de recursos y cobertura proponemos que sea

$$u_m^n(\theta_m^n, b_m^n, p_m, t) = \theta_m^n b_m^n(t) e^{-p_m b_m^n(t)}, \quad (3.11)$$

$$u_s^n(b_s^n, p_s, t) = b_s^n(t) e^{-p_s(t) b_s^n(t)}, \quad (3.12)$$

Teniendo en cuenta que en ambos casos la utilidad tiende a cero, ya sea porque el precio o el ancho de banda aumentan. Este es el mismo efecto que se logra mediante una utilidad cuasi-lineal y una restricción de presupuesto, que es un modelo más común en economía de las redes. En [19] muestran que la utilidad que perciben los usuarios es logarítmica con respecto a la velocidad de datos y al pago; nuestra función de utilidad propuesta cumple con dicho criterio ya que se puede reescribir como: $u_m^n(\theta_m^n, b_m^n, p_m, t) = \log(\theta_m^n b_m^n(t)) - p_m b_m^n(t)$ y $u_s^n(b_s^n, p_s, t) = \log(b_s^n(t)) - p_s b_s^n(t)$.

La utilidad percibida por los usuarios que no contratan el servicio ya sea por problemas de disponibilidad de recursos, de cobertura o porque no les es rentable dada las decisiones de los SPs es:

$$u_o^n = 0. \quad (3.13)$$

puesto que el usuario no suscribe ancho de banda ($b_o^n = 0$).

3.2.2. Ancho de banda óptimo suscrito por los usuarios

Es de esperar que los usuarios suscriban el ancho de banda que les genere una mayor utilidad, por lo tanto, el ancho de banda que debe suscribir un usuario es el que maximice (3.11) y (3.12), es decir:

$$b_m^{n*}(p_m, t) = \arg \max_{b_m^n(t) > 0} u_m^n(\theta_m^n, b_m^n, p_m, t),$$

$$b_s^{n*}(p_s, t) = \arg \max_{b_s^n(t) > 0} u_s^n(b_s^n, p_s, t),$$

donde b_m^{n*} y b_s^{n*} son la elección óptima de ancho de banda realizada por un usuario n :

$$b_m^{n*}(p_m, t) = \frac{1}{p_m(t)}, \quad (3.14)$$

$$b_s^{n*}(p_s, t) = \frac{1}{p_s(t)}. \quad (3.15)$$

Reemplazando (3.14) y (3.15) en (3.11) y (3.12), se obtienen las utilidades cuando los usuarios realizan una elección óptima de ancho de banda

$$u_m^{n*}(\theta_m^n, p_m, t) = \frac{\theta_m^n}{p_m(t)} e^{-1}, \quad (3.16)$$

$$u_s^{n*}(p_s, t) = \frac{1}{p_s(t)} e^{-1}. \quad (3.17)$$

La función de utilidad de los usuarios no suscritos al servicio es:

$$u_o^{n*} = 0,$$

ya que no se suscribe ancho de banda

$$b_o^{n*} = 0, \quad (3.18)$$

Se observa que $u_m^*, u_s^* > 0 = u_o^*$, por esta razón, todos los usuarios preferirían siempre suscribir el servicio a no suscribir. Sin embargo, cada SP puede alojar a un número máximo de usuarios, debido a sus recursos insuficientes. Por lo tanto, el SP que ofrece la mayor utilidad vende toda su capacidad, y algunos usuarios deberán suscribir con el otro SP o incluso dejar de suscribir.

Asumimos que todos los usuarios son racionales y realizan la misma elección óptima de ancho de banda [50], por tanto, $b_m^{n*}(t) = b_m^*(t)$, $b_s^{n*}(t) = b_s^*(t)$ y $b_o^{n*} = 0$, y $u_m^{n*}(t) = u_m^*(t)$, $u_s^{n*}(t) = u_s^*(t)$ y $u_o^{n*} = 0 \forall n \in \mathcal{N}$. Estas expresiones se utilizarán por simplicidad de ahora en adelante.

3.3. Los proveedores de servicios

En el escenario de estudio existen dos proveedores de servicio de comunicaciones móviles, el MSP y el SSP. Estos SPs tienen diversas limitaciones para poder atender a los usuarios

Limitaciones de Cobertura: Se dice que un SP tiene cobertura insuficiente con un usuario cuando la eficiencia espectral percibida con dicho SP es cero. En el área de estudio solo el SSP tiene este problema, ya que una s_i cubre un área muy inferior a la cobertura de una BS, y es muy posible que el conjunto de todas las $K s_i$ no alcance a cubrir el total del área de la Macrocell. Por lo tanto, el SSP tiene problemas de cobertura cuando la eficiencia espectral percibida por un usuario es cero, es decir, en la s_0 .

Limitaciones de Recursos: Se dice que un SP tiene recursos insuficientes cuando los recursos de cada SP son menores al ancho de banda demandado por los usuarios, es decir, en el caso del MSP si $B_m r_m(t) < N_m b_m^n(t)$ y en el caso del SSP $B_{s_i}(t) < N_{s_i} b_s^n(t)$.

Los SPs compiten entre sí para atender a todos los usuarios que se encuentran dentro del área de estudio mediante su factor de control, que en ambos casos es el precio que deben pagar los usuarios por suscribir el servicio.

El MSP tiene las siguientes características:

- Los recursos disponibles del MSP son B_m Hz, puesto que solo presta el servicio de comunicaciones móviles, por lo tanto, $r_m(t) = 1 \forall t \in [0, T]$, donde T es el tiempo durante el cual se evaluará el escenario.
- Los usuarios potenciales que pueden suscribir el servicio con él son N , porque el área de estudio es el área de cobertura de la BS del MSP.
- El factor de control es el precio ($p_m(t)$) que deben pagar todos los usuarios por cada unidad de ancho de banda y por cada unidad de tiempo que quieran suscribir con él.

El SSP tiene las siguientes características:

- Los recursos disponibles del SSP son los que tienen todas las s_i para prestar el servicio de comunicaciones móviles, es decir, $B_s(t) = \sum_{i \in \mathcal{K}} B_{s_i}(t)$.
- Los usuarios potenciales que pueden suscribir el servicio a través de cada s_i es N_i .
- El factor de control es el precio ($p_s(t)$) que deben pagar todos los usuarios por cada unidad de ancho de banda y por cada unidad de tiempo que quieran suscribir con él, este precio es el mismo en todas las s_i .

3.3.1. Oferta de los proveedores de servicios

La oferta de los SPs es la cantidad de espectro que tienen destinado para prestar el servicio de comunicaciones móviles, en el caso del MSP es B_m Hz y en el SSP es $\sum_{i \in \mathcal{K}} B_{s_i}$ Hz. Dado que la competencia entre MSP y el SSP se hace en cada una de las K s_i , es necesario conocer los recursos que tiene el MSP en dicha área, por ello se define B_{m_i} como el ancho de banda que dispone el MSP en el área de cobertura de la s_i para prestar el servicio de comunicaciones móviles y está dado por:

$$B_{m_i} = B_m \frac{N_i}{N} = B_m \frac{A_{s_i}}{A_m},$$

ya que si trabajamos bajo el supuesto de que los usuarios se encuentran distribuidos uniformemente en el área de cobertura, entonces los recursos del MSP se distribuirán de la misma forma.

3.3.2. Demanda de los proveedores de servicios

La demanda de un SP (Q) es el total del ancho de banda generado por el conjunto de usuarios que logran suscribirse, donde el ratio de usuarios que

se suscribe a un SP en cada si está dado en (3.5), (3.6) y (3.7), por lo tanto, la demanda de los SPs en cada s_i es:

$$Q_{m_i}(p_m, x_{m_i}, t) = N_i x_{m_i} b_{m_i}^*(t),$$

$$Q_{s_i}(p_s, x_{s_i}, t) = N_i x_{s_i} b_{s_i}^*(t),$$

donde $Q_{m_i}(p_m, x_{m_i}, t) \leq B_{m_i}$ y $Q_{s_i}(p_s, x_{s_i}, t) \leq B_{s_i}(t)$, puesto que la demanda no puede ser mayor a los recursos de un SP. La demanda total del MSP y del SSP es:

$$Q_m(p_m, x_m, t) = \sum_{i=0}^K Q_{m_i}(p_m, x_{m_i}),$$

$$Q_s(p_s, x_{s_i}, t) = \sum_{i=0}^K Q_{s_i}(p_s, x_{s_i}).$$

La fracción de usuarios máxima que puede suscribir con un SP es:

$$x_{m_i} \leq \text{mín} \left(\frac{p_m}{N_i/B_{m_i}}, 1 \right), \quad (3.19)$$

$$x_{s_i} \leq \text{mín} \left(\frac{p_s}{N_i/B_{s_i}}, 1 \right). \quad (3.20)$$

puesto que el ancho de banda que suscrito por todos los usuarios no puede ser mayor que el ancho de banda disponible de un SP, es decir, $B_{m_i} \geq N_i x_{m_i} b_{m_i}^*$ y $B_{s_i} \geq N_i x_{s_i} b_{s_i}^*$, donde obtenemos $x_{m_i} = \frac{p_m}{N_i/B_{m_i}}$ y $x_{s_i} = \frac{p_s}{N_i/B_{s_i}}$, además se limita la fracción de usuarios a que el 100% de los usuarios suscriban con un SP.

3.3.3. Beneficios de los proveedores de servicios

Los SPs deben decidir el precio que deben pagar los usuarios por suscribir el servicio, estos precios son por unidad de ancho de banda y por unidad de tiempo. Las decisiones son tomadas para obtener los máximos beneficios.

Los beneficios de los SPs en el instante de tiempo t están definidos como todos los ingresos recibidos menos los costes generados en el instante de

tiempo t , Los ingresos de los SPs (μ) están dados como los ingresos que recibe por parte de los usuarios que suscriben a ellos, es decir, el pago que deben realizar los usuarios por el ancho de banda al que se suscriben, en el caso del MSP son

$$\mu_m(p_m, x_m, t) = p_m(t)Q_m(p_m, x_m, t),$$

y en el SSP son

$$\mu_s(p_s, x_s, t) = p_s(t)Q_s(p_s, x_s, t),$$

los costes generados de los SPs para atender toda la demanda asumimos que son cero. Dado los ingresos definimos los beneficios de los SPs como:

$$\pi_m(p_m, x_m, t) = \mu_m(p_m, x_m, t) = p_m(t)Q_m(p_m, x_m, t), \quad (3.21)$$

$$\pi_s(p_s, x_s, t) = \mu_s(p_s, x_s, t) = p_s(t)Q_s(p_s, x_s, t). \quad (3.22)$$

Los beneficios de los SPs dependen de los recursos y del estado de la población, como se analizará posteriormente el estado de la población depende de la estrategia de precios escogida por el SSP.

Los beneficios de los SPs a lo largo del horizonte de tiempo finito de $[0, T]$, están dados como

$$\Pi_m(p_m, x_m, t) = \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_m(p_m, x_m, t)] dt \quad (3.23)$$

$$\Pi_s(p_s, x_s, t) = \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_s(p_s, x_s, t)] dt. \quad (3.24)$$

donde $e^{-\rho t}$ es la tasa de descuento decrecientes a través del tiempo que influyen en los pagos futuros [51], [52].

Cabe destacar que el análisis se centra en la competencia entre operadores en un corto espacio de tiempo, que es el marco temporal en el que sólo el precio puede ser utilizado como una estrategia. En este tiempo, sólo los gastos operacionales son relevantes. Los gastos de capital incurridos por el SSP, como los involucrados en el despliegue de la infraestructura de celdas pequeñas requerida (ver, por ejemplo, el análisis realizado en [53] y [54], son relevantes en un marco de tiempo más largo.

3.4. Bienestar de los usuarios y bienestar social

Para cuantificar la viabilidad de este tipo de modelos se utiliza la función de bienestar de los usuarios o Users Welfare (UW), en este modelo UW se expresa como:

$$UW = \int_0^T \left[\sum_{i=0}^K \left(N_i x_{m_i} u_{m_i}^* + N_i x_{s_i} u_{s_i}^* \right) \right] dt. \quad (3.25)$$

donde $N_i x_{m_i} u_{m_i}^*$ y $N_i x_{s_i} u_{s_i}^*$ son todas las utilidades que perciben los usuarios con el MSP y con el SSP cuando suscriben el ancho de banda óptimo .

Otra expresión para medir la mejora del bienestar es el bienestar social o Social Welfare (SW); SW suma las utilidades de todos los agentes del sistema, es decir, los usuarios y los SPs, en este modelo SW se expresa como:

$$SW = \int_0^T \left[\pi_m + \pi_s + \sum_{i=0}^K \left(N_i x_{m_i} u_{m_i}^* + N_i x_{s_i} u_{s_i}^* \right) \right] dt. \quad (3.26)$$

3.5. Teoría de juegos para la toma de decisiones

Para determinar las decisiones de los agentes del escenario utilizamos la teoría de juegos, ya que describe el comportamiento de individuos que eligen estrategias para maximizar el resultado obtenido del conflicto, teniendo en cuenta no sólo, lo que cada uno quiere lograr, sino también lo que puede lograr dada la acción de los otros.

En nuestro escenario existen dos conflictos los cuales los modelaremos como un juego de dos etapas mostrado en la Fig. 3.5, en la segunda etapa los usuarios se enfrentan al conflicto de cuánto ancho de banda suscribir y a qué SPs suscribir el, dicho conflicto se resolverá en un juego de suscripción de los usuarios y la solución obtenida son las estrategias que cada usuario decidirá tomar, y en la primera etapa los SPs se enfrentan al conflicto de la elección de precio y se resolverá la mediante un Juego de Stackelberg, en este tipo de juego hay un líder en la elección del precio y en base a esa decisión el otro

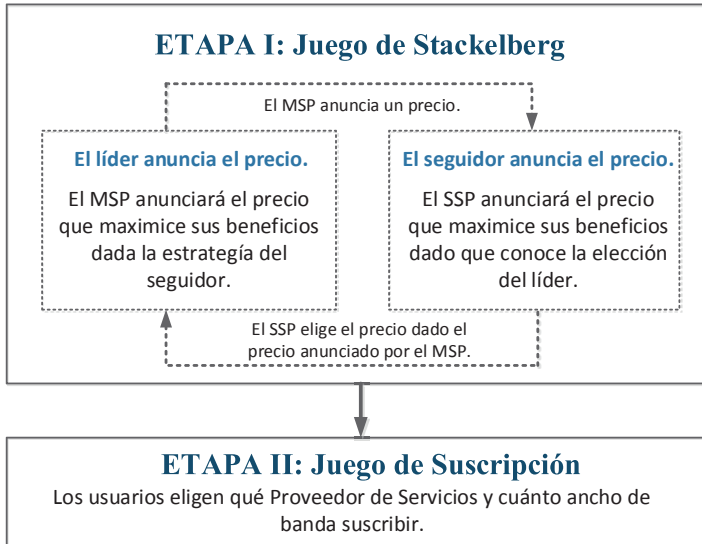


Figura 3.5: Estructura de los juegos

(seguidor) toma su decisión, es un juego consecutivo y la solución está dada por el Equilibrio de Stackelberg. En nuestro modelo el MSP anuncia primero el precio de la MSP, por lo tanto es el líder en la elección de precio porque es dueño de una licencia de espectro.

El juego por etapas mostrado en la Fig. 3.5 se resuelve por inducción hacia atrás para garantizar un equilibrio perfecto en subjuegos [48], lo que significa que en una determinada etapa los jugadores actúan estratégicamente anticipando la solución del juego en la etapa siguiente.

3.6. Conclusiones

En este Capítulo se obtuvo la descripción de un escenario de comunicaciones móviles que permite la entrada de la tecnología de Small cells a través de un nuevo proveedor de servicio (SSP), dando a conocer los

recursos y cobertura que tiene el SSP en el mercado existente, es decir, donde opera un proveedor de servicios de Macrocells (MSP).

Se planteó que la entrada del SSP sólo es posible si compite con el MSP por los usuarios de comunicaciones móviles, los cuales pueden elegir con qué SPs suscribir y cuánto ancho de banda suscribir, para ello propusimos una función de utilidad de los usuarios que íntegra la tasa instantánea que recibe un usuario, el pago que debe hacer un usuario y tiene en cuenta las limitaciones de disponibilidad de recursos y/o cobertura de los SPs.

Por otra parte, se obtuvo la función de pago de los SPs dada la oferta y la demanda que tienen cada uno, además de las funciones de bienestar social y bienestar de los usuarios.

Luego de describir las funciones de pago de los agentes del sistema se propuso un juego por etapas para determinar las estrategias que toman cada uno de los agentes. En la primera etapa los SPs compiten entre sí por los usuarios y deben determinar el precio que anuncian mediante un juego de Stackelberg y en la segunda etapa los usuarios juegan un juego de suscripción para determinar con qué SPs suscribir.

Capítulo 4

Proveedor de servicios monopolista

En este capítulo se analiza el comportamiento de un MSP cuando se encuentra en un escenario de comunicaciones donde es el único proveedor en el área de servicio, es decir, un modelo de monopolio. Las características del escenario son similares a las descritas en el Capítulo 3.

Dicho escenario permite conocer las estrategias de los usuarios y el MSP en un modelo de monopolio, además de conocer cuáles son los beneficios máximos que puede obtener el MSP lo cual nos permitirá comparar cómo se ven afectados el MSP y los usuarios con la entrada de un nuevo competidor en el mercado.

Este capítulo se divide de la siguiente manera: primero se describen las características del escenario, posteriormente se plantean las decisiones que deben tomar del MSP y los usuarios, y luego se evalúan las decisiones del MSP y de los usuarios en un modelo estático, en un modelo evolutivo de la población de usuarios y en un modelo dinámico, y así conocer los beneficios del MSP, el UW y el UW , y por último, se comparan todos los resultados obtenidos.

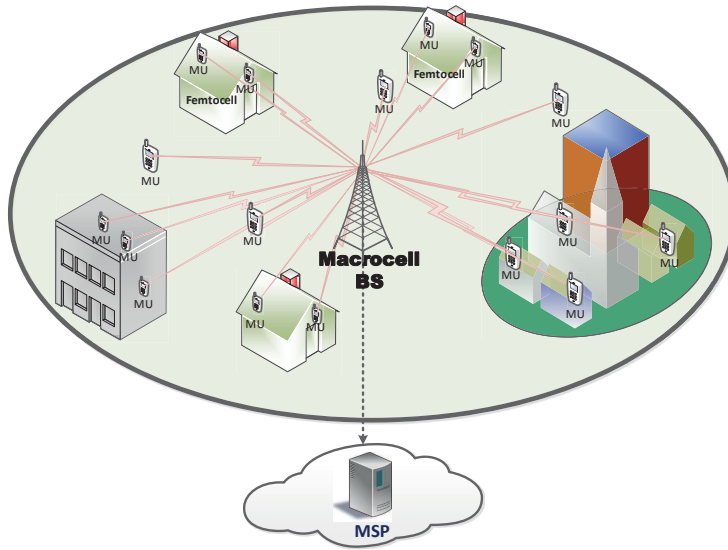


Figura 4.1: Modelo de monopolio en comunicaciones móvil

4.1. Características del Escenario

El escenario evaluado se muestra en la Fig. 4.1, donde el MSP se encarga de atender a todos los usuarios dentro del área de cobertura de la BS. La transmisión y el modelo del canal es el descrito en el Capítulo 3.

4.1.1. Los usuarios

Los usuarios se comportan de manera similar al Capítulo 3.2, es decir, deben elegir qué proveedor de servicio y cuánto ancho de banda suscribir, pero en este caso solo existe un proveedor de servicio, por lo tanto, la decisión de los usuarios se limita a suscribir o no el servicio.

Dado el ancho de banda óptimo al que se suscriben los usuarios ((3.14) y (3.18)) y la utilidad que percibe cada usuario ((3.16) y (3.13)), se determinarán las estrategias en equilibrio de los usuarios, es decir, x_m^* y x_0^* .

4.1.2. El MSP

El MSP se encuentra en un mercado monopolista y tomará su decisión en busca de sus propios beneficios sin importar ninguna otra decisión, ya que no tiene ningún competidor. Para obtener los beneficios máximos definidos en (3.21), el MSP tienen un factor de control, el cual es el precio por unidad de ancho de banda que debe anunciar.

Desde (3.21) se obtienen los beneficios del MSP a lo largo de un periodo de tiempo finito de T

$$\pi_m(x_m(p_m), t) = \int_0^T p_m(t) N x_m(t) b_m^*(t) dt = \int_0^T N x_m(t) dt, \quad (4.1)$$

conociendo las funciones de beneficios del MSP se determinarán las estrategias en equilibrio, es decir, p_m^* .

4.2. Decisiones en un modelo estático

Entendemos por modelo estático cuando el proveedor de servicios y los usuarios toman sus decisiones en un instante de tiempo, por lo tanto, las decisiones de los usuarios y el MSP solo se toman una sola vez y no dependerán de decisiones anteriores, de tal manera que no existe una dependencia del tiempo.

4.2.1. Suscripción de los usuarios:

Las decisiones de los usuarios se basan en obtener la mayor función de utilidad, dadas en (3.16) y (3.13), se demuestra que sí es posible, y que todos los usuarios siempre prefieren suscribir el servicio, ya que $u_m^* > 0 = u_0^*$. Sin embargo, la fracción de la población que se suscribe depende de los recursos disponibles, ya que $N x_m b_m^* \leq B_m$ y $0 \leq x_m \leq 1$, por lo tanto, la fracción de la población que suscribe el servicio es

$$x_m^*(p_m) = \min\left(1, \frac{p_m B_m}{N}\right)$$

4.2.2. Precio del MSP

El MSP puede asumir que los usuarios son racionales y tomarán las decisiones que les generen mayor utilidad, en base a eso anticipa las decisiones de los usuarios y determinarán el precio que deben anunciar, el cual está dado por

$$p_m^* = \arg \max_{p_m \geq 0} \pi_m(x_m^*) = \arg \max_{p_m \geq 0} Nx_m^* = \arg \max_{p_m \geq 0} N \min\left(1, \frac{p_m B_m}{N}\right),$$

se obtiene que

$$p_m^* = \frac{N}{B_m}, \quad (4.2)$$

Podemos ver claramente que si $p_m \geq p_m^*$ el MSP también obtendrá los beneficios máximos. A lo largo de este documento, cuando se presente este tipo de situación se elegirá la elección que maximice el UW, es decir, elegir el precio mínimo, es decir, $p_m^* = \frac{N}{B_m}$.

4.2.3. Decisiones de los agentes del escenario

El precio anunciado por el MSP fue hallado en (4.2), dado este precio el 100% de los usuarios decide suscribir el servicio

$$x_m^* = 1. \quad (4.3)$$

y los beneficios obtenidos por el MSP son

$$\pi_m^* = N, \quad (4.4)$$

Reemplazando (4.2), (4.3) y (4.4) en (3.25) y (3.26) se obtiene el bienestar social y de los usuarios en un modelo de monopolio.

$$UW = Nx_m^* \theta_m^n e^{-1} / p_m^* = B_m \theta_m^n e^{-1} \quad (4.5)$$

$$SW = N + B_m \theta_m^n e^{-1} \quad (4.6)$$

4.3. Decisiones en un modelo evolutivo de la población de usuarios

Entendemos por modelo evolutivo de la población de usuarios cuando los usuarios deben determinar sus decisiones en cada instante de tiempo y dichas decisiones dependen del estado de la población anterior y la decisión del MSP solo se realizará una vez a lo largo del tiempo.

4.3.1. Suscripción de los usuarios:

En el apartado 4.2.1 se demostró que si los usuarios tienen que elegir una sola vez siempre elegirá suscribir el servicio, pero en este capítulo se observará cual es el comportamiento de los usuarios a lo largo de un horizonte de tiempo. Para ello, formulamos el juego evolutivo de decisiones de los usuarios de la siguiente manera:

- *Tipo de Juego:* El comportamiento de todos los usuarios (a partir de ahora llamados población) se modela con un Juego Evolutivo.
- *Jugadores:* Todos los usuarios que quieren suscribir el servicio, es decir, N usuarios.
- *Estrategia:* Los usuarios deben elegir si suscribir o no el servicio, por lo tanto, el conjunto de estrategias es $S = \{m, o\}$.
- *Estado de la Población:* Es el conjunto de usuarios que eligen una estrategia dada, es decir, Nx_m es el conjunto de usuarios que eligen suscribir y Nx_o es el conjunto de usuarios que no se suscriben, donde: $Nx_m + Nx_o = N$.
- *Función Objetivo:* Es la utilidad que perciben los usuarios en un instante de tiempo y están definidas anteriormente en (3.16) y (3.13) .

- *Objetivo:* Conocer como es el comportamiento evolutivo de los usuarios a lo largo del horizonte de tiempo estudiado y determinar cuáles son las estrategias evolutivamente estables que toman la población.

Conociendo las decisiones de los usuarios y las funciones de utilidad se plantea el proceso de adaptación de la estrategia y la correspondiente evolución del estado de la población, para ello proponemos modelarlo y analizarlo mediante por la dinámica de réplica [47], definida de la siguiente manera:

$$\dot{x}_j(t) = \delta x_j(t)[u_j(\theta_m^n, p_m, t) - U(\theta_m^n, p_m, t)], \quad (4.7)$$

donde $j \in S$ son las posibles estrategias de los usuarios, es decir, suscribir o no el servicio y $\delta \in (0,1)$ es la tasa de aprendizaje de la población total que controla la frecuencia de adaptación de tal manera que si $\delta = 0$ ningún usuario aprende la estrategia a evolucionar y no realiza el cambio de estrategia si fuese necesario, por lo tanto, se debe cumplir que $\delta > 0$ para que exista un juego evolutivo. $U(\theta_m^n, p_m, t)$ es la función de utilidad esperada por un usuario en un instante de tiempo y está dada por

$$U(\theta_m^n, p_m, t) = x_m(p_m, t)u_m^*(\theta_m^n, p_m, t) + x_o(t)u_o = x_mu_m(p_m, t).$$

Desde (4.7), tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= \delta x_m(t)[u_m(\theta_m^n, p_m) - U(\theta_m^n, p_m, t)], \\ \dot{x}_o(t) &= \delta x_o(t)[u_o - U(\theta_m^n, p_m, t)]. \end{aligned}$$

este sistema de ecuaciones diferenciales indica cómo evoluciona la población a lo largo del horizonte de tiempo y dado el estado inicial de la población, permitiendo hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de la población.

En el Apéndices se demuestran los estados estacionarios y las estrategias evolutivamente estables (ESS) de la población. Se obtiene que las Ecs. 4.8 y 4.9 son los estados de la población donde existe un ESS y es un equilibrio de

Nash estable

$$x_m^*(T) = \text{mín}(1, p_m B_m / N), \quad (4.8)$$

$$x_o^*(T) = \text{máx}(0, 1 - p_m B_m / N), \quad (4.9)$$

4.3.2. Precio del MSP

El MSP puede asumir que los usuarios son racionales y tomarán las decisiones que les generen mayor utilidad, en base a eso anticipa las decisiones de los usuarios y determinarán el precio que deben anunciar, cabe recordar que en este modelo el MSP anuncia un precio para todo el horizonte de tiempo, es decir, $p_m(t) = p_m \forall t \in T$,

$$p_m^* = \arg \max_{p_m \geq 0} \int_0^T \pi_m(x_m^*, t) dt = \arg \max_{p_m \geq 0} \int_0^T N x_m^*(t) dt$$

$$\text{s. t. } \dot{x}_m(t) = \delta x_m(t)(1 - x_m(t))(\theta_m^n e^{-1} / p_m(t)), \quad (4.10)$$

$$x(0) = [x_m(0) \ x_o(0)]$$

$$p_m(t) = p_m \forall t \in T$$

para determinar el precio del MSP se resuelve el problema de programación no-lineal con restricciones dado en la expresión (4.10). La función *fmincon* de MATLAB [58] permite resolver el problema de programación no-lineal con restricciones, la función *fmincon* es parte del Optimization Toolbox [59] e implementa un algoritmo de programación cuadrática secuencial para resolver problemas de optimización no-lineal con restricciones [60].

Si el periodo de tiempo donde se evalúa el juego es lo suficientemente alto para que toda la población logre evolucionar a la estrategia en equilibrio, entonces se tiene que $x_m(T) = 1$ y $p_m^* = \frac{N}{B_m}$, era de esperar que el precio del MSP fuera el de la Ec. (4.2), porque es el precio mínimo con el que obtiene los beneficios máximo y al anunciar el precio mínimo hace que la utilidad que perciban los usuarios sea mayor, ya que cuanto menor sea p_m mayor es u_m , esto hace que la población evolucione más rápido porque la diferencia entre utilidades es mayor.

4.3.3. Decisiones de los agentes del escenario

La decisión de precio del MSP se obtiene resolviendo el problema de optimización no-lineal con restricciones dada en la expresión (4.10); con dicho precio la población evolucionará de manera que los usuarios se suscriban y si el tiempo del juego es lo suficientemente grande para llegar a la ESS, entonces el 100 % de los usuarios se suscribirán ($x_m^*(T) = 1$). El comportamiento de la población está dado por el sistema de ecuaciones diferenciales de (4.7).

4.4. Decisiones en un modelo dinámico

Entendemos por modelo dinámico cuando los agentes deben determinar sus decisiones a lo largo de un periodo de tiempo finito, por lo tanto, las decisiones de los agentes dependen de las decisiones tomadas con anterioridad.

4.4.1. Suscripción de los usuarios:

En el apartado 4.3.1 se propuso que el estado de la población evoluciona con el tiempo y que dicha evolución está dada por la dinámica del replicador definida en (4.7). Dado que en este modelo la población evoluciona de igual manera, se obtiene que la estrategia en equilibrio de los usuarios está dada de igual manera

$$\dot{x}_j(t) = \delta x_j(t) [u_j(\theta_m^n, p_m, t) - U(\theta_m^n, p_m, t)], \quad (4.11)$$

donde $p_m(t)$ dependen del tiempo.

Aplicando las mismas consideraciones que en el apartado 4.3.1 se obtienen los estados de la población donde existe un ESS y a su vez un equilibrio de Nash estricto es

$$x_m^* = \text{mín}(1, p_m(t)B_m/N), \quad (4.12)$$

$$x_o^* = \text{máx}(0, 1 - p_m(t)B_m/N) \quad (4.13)$$

La estrategia $\mathbf{x}^* = [x_m^* \ x_o^*]$ es una solución a la Ec. (4.11) y \mathbf{x}^* es un Equilibrio de Nash Estricto, entonces el equilibrio se ha demostrado ser asintóticamente estable [70].

4.4.2. Precio del MSP

El MSP asume que la evolución de la población está modelada por la dinámica del replicador, en base a eso anticipa las decisiones de los usuarios y determinará el precio que deben anunciar mediante el siguiente problema de control óptimo de fijación de precios

$$\begin{aligned}
 p_m^*(t) = \arg \max_{p_m(t) \geq 0} \Pi_m &= \arg \max_{p_m(t) \geq 0} \int_0^T e^{-\rho t} N x_m^*(t) dt \\
 \text{s. t. } \dot{x}_m(t) &= \delta x_m(t)(1 - x_m(t))(\theta_m^n e^{-1}/p_m(t)), \\
 \mathbf{x}(0) &= [x_m(0) \ x_o(0)] \\
 p_m(t) &= p_m \ \forall t \in T
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde ρ es la tasa de descuento del MSP que influyen en los futuros pagos.

Observamos que el problema de control óptimo dado en la Expresión (4.14) es de la forma de Lagrange, ya que tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \max_{p_m \geq 0} \Pi_m &= \int_{t_0}^{t_f} L(p_m(t), x(t)) dt, \\
 \dot{x}(t) &= f(p_m(t), x(t)), \quad x(t_0) \text{ es conocido,}
 \end{aligned}$$

y no depende del estado final de la población ($\mathbf{x}(T)$), por lo tanto, no son necesarias condiciones de terminación

La función homóloga al problema de Lagrange se conoce como la función Hamiltoniana, y se denota como

$$\mathcal{H}_m(p_m, x_m, \lambda_m, t) = \pi_m(p_m, x_m, t) + \lambda_{mm}(t)\dot{x}_m(t) + \lambda_{mo}(t)\dot{x}_o(t),$$

donde $\lambda_{mi}(t)$ mide el valor marginal del incremento del estado con el tiempo cuando se mueve a lo largo de la trayectoria óptima.

Para resolver el problema de control óptimo planteado en la expresión (4.14) se utiliza el Principio del máximo de Pontryagin [56], [57], el cual nos proporciona las condiciones de optimización necesaria para el problema de control óptimo ya que tiene en cuenta los efectos que tiene la elección del precio por parte del MSP y genera: un primero efecto inmediato a través del valor instantáneo de los beneficios y un segundo efecto al nivel de cambios de la variable de estado de la población. Intuitivamente se sabe que si el vector de control es escogido para maximizar sólo el valor instantáneo del objetivo, esta elección tiene poca probabilidad de ser óptima.

El Principio del máximo de Pontryagin relaciona el problema de encontrar un $p_m(t)$ que, satisfaciendo las restricciones impuestas, maximice Π_m con el problema de maximizar la función Hamiltoniana respecto a la variable de control, es decir, $p_m(t)$. Además, de determinar el comportamiento de la función adjunta $\lambda_{mi}(t) \forall i \in \mathcal{S}$.

Aplicando el Principio del máximo de Pontryagin en nuestro caso, se define $p_m^*(t)$ como las estrategias de control óptima del problema original que también debe maximizar la correspondiente función Hamiltoniana [56], es decir

$$p_m^*(t) = \arg \max \quad \mathcal{H}_m(p_m, x_m, \lambda_m, t), \quad (4.15)$$

desde la expresión (4.15) se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{H}_m(p_m, x_m, \lambda_m, t)}{\partial p_m(t)} = 0 \quad (4.16)$$

Sin embargo, la Ec. (4.16) sólo es óptima si el vector de multiplicador es definido de manera que refleje el impacto marginal del vector de estado sobre los beneficios del MSP, entonces el vector de multiplicadores cumple que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m, x_m, \lambda_m, t)}{\partial x_j} = -\dot{\lambda}_{mj}(t) + \rho \lambda_{mj}(t), \quad (4.17)$$

Las Ecs. (4.16) y (4.17) son las condiciones necesarias para encontrar las la estrategias de control óptima del problema original $p_m^*(t)$.

El problema de control óptimo de precios dado en la Expresión (4.14) se resuelve mediante la obtención de $p_m(t)$ de la Ec. (4.16) que depende de $x_m(t)$, $x_o(t)$, $\lambda_{mm}(t)$ y $\lambda_{mo}(t)$, y de las Ecs. (4.11) y (4.17) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) &= \delta x_m(t)(1 - x_m(t))(\theta_m^n e^{-1} / p_m^*), \\ \dot{x}_o(t) &= \delta x_o(t)x_m(t)(-\theta_m^n e^{-1} / p_m^*), \\ \dot{\lambda}_{mm}(t) &= \rho_{mm}\lambda_{mm}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m(p_m, x_m, x_o, \lambda_{mm}, \lambda_{mo}, t)}{\partial x_m(t)}, \\ \dot{\lambda}_{mo}(t) &= \rho_{mo}\lambda_{mo}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m(p_m, x_m, x_o, \lambda_{mm}, \lambda_{mo}, t)}{\partial x_o(t)}, \end{cases} \quad (4.18)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales 4.18 se obtiene $x_m^*(t)$, $x_o^*(t)$, $\lambda_{mm}^*(t)$ y $\lambda_{mo}^*(t)$ y reemplazándolos en la solución de la Ec. (4.16) se obtiene los precios que debe anunciar el MSP en cada instante de tiempo.

4.4.3. Decisiones de los agentes del escenario

La decisión del precio del MSP está dada en la Ec. (4.16), con dicho precio la población evolucionará siguiendo la Ec. (4.11) y el precio que anuncia el MSP es el que resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales dado en (4.18).

4.5. Resultados

En esta sección se presentan algunos resultados con el fin de proporcionar una visión del comportamiento de los usuarios y el MSP en un modelo de monopolio.

A menos que se mencione lo contrario, los parámetros del sistema con los que se evalúa el comportamiento del escenario son los que se muestran en la Tabla 4.1. Los parámetros utilizados son los de una Macrocell con una capacidad de hasta 60MHz para prestar el servicio de comunicaciones

Tabla 4.1: Parámetros

Parámetros	Valor
N	400 usuarios
A_m	100000 m ²
B_m	60 MHz
$\bar{\theta}_m$	0.7 bits/s/Hz
δ	{4,07, 6,8}
$x_m(0)$	{0,4, 0,6, 0,8}
M	10000 time slots

móviles a los 400 usuarios que quieren en un instante de tiempo, la relación recursos/usuarios de los parámetros utilizados es la evaluada en modelos similares como el presentado en [55].

4.5.1. Resolución numérica

Para obtener los resultados se discretizan las ecuaciones diferenciales de los problemas de control óptimo mediante el método de integración de Euler, usando un salto h , que es una buena aproximación si el salto h es muy pequeño, de tal manera que el horizonte de tiempo T es discretizado entre M puntos donde $M = T/h$, este proceso se explica en el apéndice D.

Luego de tener las funciones discretizadas tanto de los beneficios como de la dinámica del replicador, se procede a obtener los equilibrios de precios de los SPs y las decisiones de los usuarios, para ello se realiza una resolución numérica desde (4.2), (4.3), (4.7), (4.10), (4.11) y (4.16) variando el tiempo en el que se evalúa los modelos.

En el modelo estático la resolución numérica es simple ya que se obtuvo

todas las expresiones en función de los parámetros del escenario y están dadas en (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6).

La variación en las decisiones del modelo evolutivo de la población de usuarios repercute en la decisión de precio del MSP, por ello se resuelve el problema de optimización no-lineal con restricciones dada en la expresión (4.10) utilizando la caja de herramientas de optimización "Toolbox" de MATLAB, la cual incluye diversas rutinas de optimización, entre ellas la maximización con restricciones mediante la función "*fmincon*". Utilizando esta función de MATLAB se ha realizado la resolución numérica del escenario.

En el modelo dinámico las decisiones de los usuarios y de los SPs varían con el tiempo, para resolver el problema dinámico de toma de decisiones se utilizó la función "*BVP4C*" de MATLAB que resuelve problemas de valor límite para ecuaciones diferenciales ordinarias [63] [62], este es el problema que se planteó en el sistema de ecuaciones diferenciales de (4.18) dado que conocemos el estado inicial de la población y el estado final de los coestados. Utilizando esta función de MATLAB se ha realizado la resolución numérica del escenario.

4.5.2. Modelo estático

En el apartado 4.2 se obtuvieron las respuestas de los agentes, además de los beneficios del MSP, el UW y el SW. Desde (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6) se obtiene los valores de la Tabla 4.2.

De los resultados mostrados en la Tabla 4.2 podemos concluir que en un mercado de monopolio el MSP anunciará el precio que le permita atender al 100% de los usuarios con el que obtiene unos beneficios máximos de $\pi_m^* = 400m.u$, además se puede ver la dependencia directa que tiene los recursos del MSP (B_m) en el escenario, puesto que cuanto mayor sea B_m menor será el precio del MSP y mayor será las utilidades de los usuarios, el UW y el SW, pero aumentar o disminuir los B_m no genera mayores o menores beneficios al MSP en un mercado de monopolio.

Tabla 4.2: Resultados del modelo estático

p_m^*	6,66m.u./MHz
x_m^*	1
π_m^*	400m.u
UW	38,6273
SW	1038,6273

4.5.3. Modelo evolutivo de la población de usuarios

En el apartado 4.3.1 se obtuvo el comportamiento evolutivo de los usuarios y resolviendo el problema de optimización no-lineal con restricciones dada en la expresión (4.10) se obtiene que las decisiones de los agentes del escenario.

En las figuras 4.2 y 4.3 se muestra la evolución de la población para tres posibles poblaciones iniciales, las cuales son $x_m(0) = \{0,4, 0,6, 0,8\}$, cuando se soluciona el sistema de ecuaciones planteado en (4.11).

Después de plantear diversos escenarios donde se soluciona al problema de programación no-lineal con restricciones dado en la expresión (4.10), se puede concluir que el precio que anuncia el MSP es

$$p_m^* = \frac{Nx_m(T)}{B_m}, \quad (4.19)$$

En la figura 4.2 la tasa de aprendizaje de la población es baja, $\delta = 4,07$, se observa que en el periodo de tiempo las poblaciones no alcanzan a llegar a la ESS ($x_m(T) = 1$) y se obtiene el estado final de la población para los escenarios evaluados, $x_m^*(T)$. De la figura 4.2 y de las Ecs. (3.23), (3.25) y (3.26) se obtiene los resultados de la Tabla 4.3 con $\rho = 0$.

En la figura 4.3, donde la tasa de aprendizaje de la población es alta, $\delta = 6,8$, se observa que en el periodo de tiempo que se evalúa el escenario las

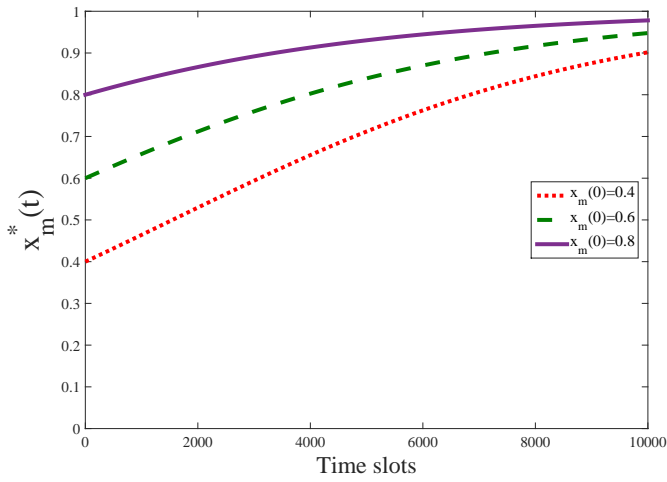


Figura 4.2: Evolución de la población con δ bajo

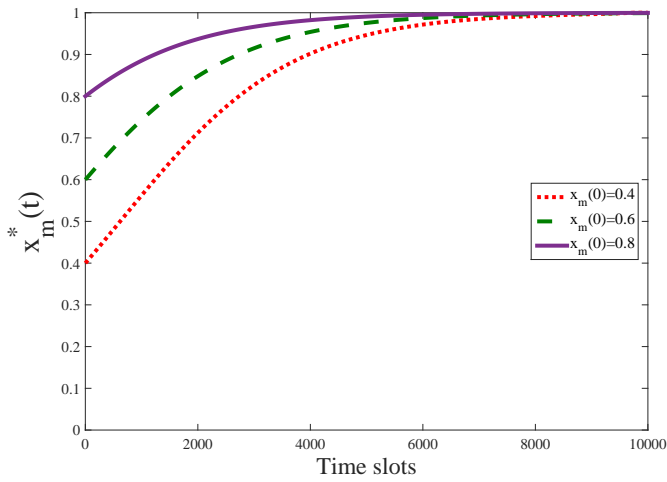


Figura 4.3: Evolución de la población con δ alto

Tabla 4.3: Resultados cuando la población evoluciona con δ bajo

	$x_m(0) = 0,4$	$x_m(0) = 0,6$	$x_m(0) = 0,8$
p_m^*	6,01m.u./MHz	6,32m.u./MHz	6,52m.u./MHz
$x_m^*(T)$	0.902	0.948	0.978
π_m	$275,94 \cdot 10^4 m.u$	$295,56 \cdot 10^4 m.u$	$331,8 \cdot 10^4 m.u$
UW	$29,55 \cdot 10^4$	$33,28 \cdot 10^4$	$36,2 \cdot 10^4$
SW	$305,49 \cdot 10^4$	$328,84 \cdot 10^4$	$368 \cdot 10^4$

Tabla 4.4: Resultados cuando la población evoluciona con δ alta

	$x_m(0) = 0,4$	$x_m(0) = 0,6$	$x_m(0) = 0,8$
p_m^*	6,664m.u./MHz	6,665m.u./MHz	6,666m.u./MHz
$x_m^*(T)$	1	1	1
π_m	$344,35 \cdot 10^4 m.u$	$368,93 \cdot 10^4 m.u$	$386,42 \cdot 10^4 m.u$
UW	$33,2 \cdot 10^4 n$	$35,66 \cdot 10^4$	$37,33 \cdot 10^4$
SW	$377,55 \cdot 10^4$	$404,59 \cdot 10^4$	$423,75 \cdot 10^4$

poblaciones alcanzan a llegar a la ESS ($x_m(T) \approx 1$). De la figura 4.3 y de las Ecs (3.23), (3.25) y (3.26) se obtiene los resultados de la tabla 4.4 con $\rho = 0$.

4.5.4. Modelo Dinámico

A continuación se evalúa el modelo dinámico y se obtiene cuáles son las decisiones de los agentes del escenario en cada instante de tiempo, para ello, se resuelve el problema de control óptimo de precio en el horizonte finito $[0, T]$ planteado en el sistema de ecuaciones diferenciales (4.18).

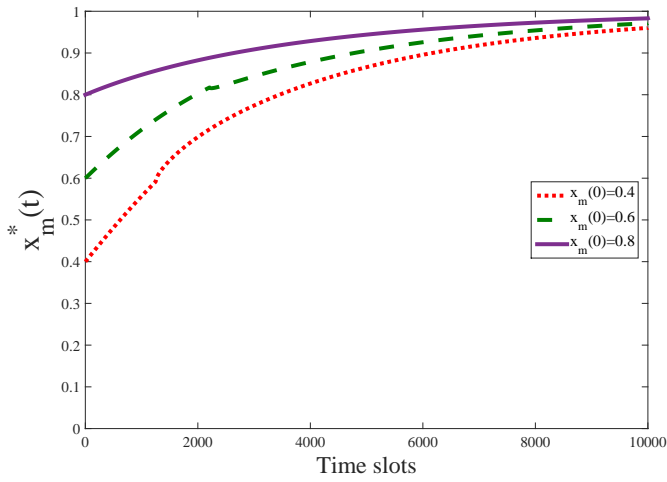


Figura 4.4: Evolución del estado de la población con δ bajo

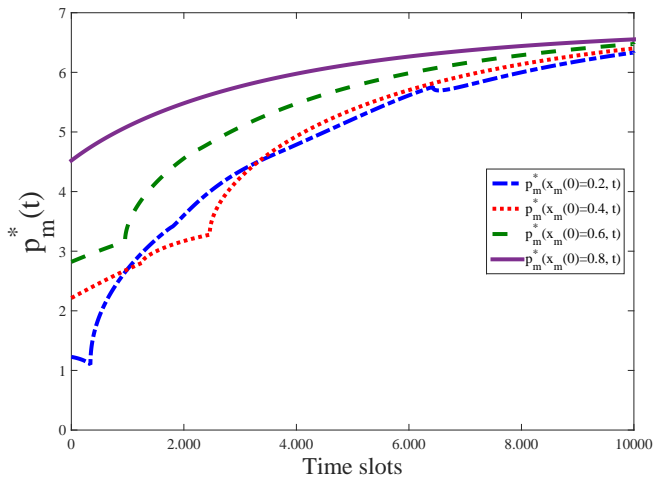


Figura 4.5: Precio del MSP con δ bajo

En las Figuras 4.4 y 4.5 se muestran la evolución de la población y el precio del MSP a lo largo del tiempo dadas las poblaciones iniciales ($x_m(0) = [0,4, 0,6, 0,8]$) cuando la tasa de aprendizaje de los usuarios es baja, $\delta = 4,07$ y el $\rho = 0$ de manera que se puedan comparar los resultados con los escenarios anteriores.

En las Figura 4.4 se observa que la población evolucionan a la estrategia de suscribir el servicio y las poblaciones se acercan a la solución estacionaria, pero dado que la tasa de aprendizaje es baja, la población no alcanza a llegar a dicha solución.

En la figura 4.5 se muestran los precios que anuncia el MSP en cada instante de tiempo, y se observa que el comportamiento del MSP tiene en dos casos en función del estado de la población y se explica a continuación:

I **Población alta:** en este caso el MSP anuncia el precio mínimo que le permita atender a todos los usuarios, por lo tanto, maximizará sus beneficios en cada instante de tiempo con $p_m^*(t) = Nx_m^*(t)/B_m$. En los escenarios evaluados cuando la población inicial es de $x_m(0) = 0,8$ siempre utiliza esta estrategia, cuando la población inicial es de $x_m(0) = 0,6$ a partir del time slots 1000 utiliza esta estrategia y cuando la población inicial es de $x_m(0) = 0,4$ a partir del time slots 2459 utiliza esta estrategia.

II **Población baja:** en este caso el MSP anuncia un precio inferior a $p_m^*(t) < Nx_m^*(t)/B_m$, por lo tanto no alcanzará atender a todos los usuarios, pero los usuarios aprenderán dicha estrategia con mayor rapidez porque perciben una mayor utilidad, esto permite que en el siguiente time slots mayor sea el número de usuarios que quieren suscribir con el MSP.

Dados las decisiones de los agentes del sistema mostrada en las Figuras 4.4 y 4.5 se obtienen los siguientes resultados mostrados en la tabla 4.5.

En las Figuras 4.6 y 4.7 se muestran la evolución de la población y el precio del MSP a lo largo del tiempo dadas diferentes poblaciones iniciales

Tabla 4.5: Resultados del modelo dinámico con δ bajo

	$x_m(0) = 0,4$	$x_m(0) = 0,6$	$x_m(0) = 0,8$
$x_m^*(T)$	0.96	0.972	0.983
π_m	$292,72 \cdot 10^4 m.u$	$322,67 \cdot 10^4 m.u$	$357,58 \cdot 10^4 m.u$
UW	$38,46 \cdot 10^4$	$38,59 \cdot 10^4$	$38,61 \cdot 10^4$
SW	$331,18 \cdot 10^4$	$361,26 \cdot 10^4$	$396,19 \cdot 10^4$

($x_m(0) = \{0,4, 0,6, 0,8\}$) cuando la tasa de aprendizaje de los usuarios es alta, $\delta = 6,8$ y el $\rho = 0$ de manera que se puedan comparar los resultados con los escenarios anteriores.

En las Figura 4.4 se observa que los usuarios evolucionan a la estrategia de suscribir el servicio y las poblaciones llega a la solución estacionaria.

En la figura 4.5 se muestran los precios que anuncian el MSP y se comportan de manera similar que en el escenario donde la tasa de aprendizaje es baja, la diferencia radica en el tiempo donde se cambia de estrategia el cual es más corto en el caso de las poblaciones estudiada, cuando la población inicial es de $x_m(0) = 0,8$ siempre utiliza esta estrategia, cuando la población inicial es de $x_m(0) = 0,6$ a partir del time slots 730 utiliza esta estrategia y cuando la población inicial es de $x_m(0) = 0,4$ a partir del time slots 885 utiliza esta estrategia.

Dados las decisiones de los agentes del sistema mostrada en las Figuras 4.6 y 4.7 se obtiene los siguientes resultados mostrados en la tabla 4.6.

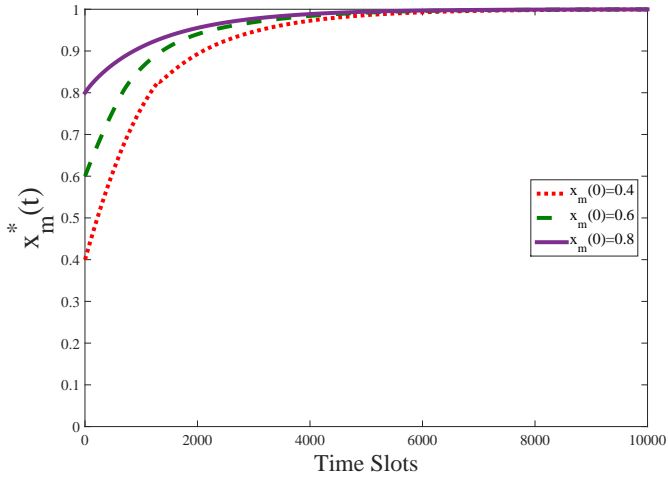


Figura 4.6: Evolución del estado de la población con δ alto

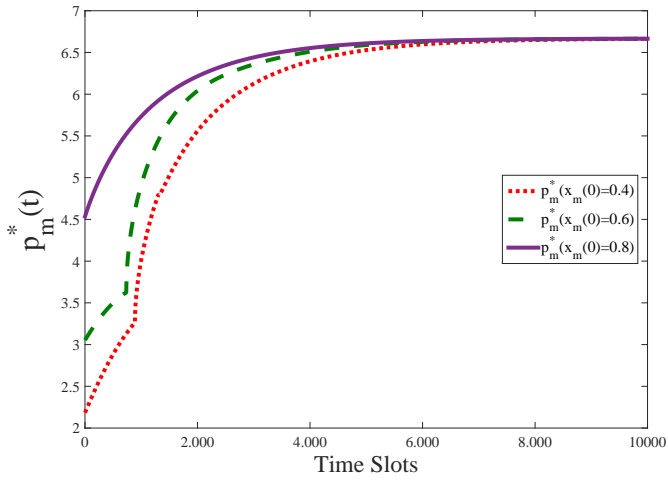


Figura 4.7: Precio del MSP con δ alto

Tabla 4.6: Resultados cuando la población evoluciona con δ alta

	$x_m(0) = 0,4$	$x_m(0) = 0,6$	$x_m(0) = 0,8$
$x_m^*(T)$	1	1	1
π_m	$357,59 \cdot 10^4 m.u$	$370,15 \cdot 10^4 m.u$	$386,4 \cdot 10^4 m.u$
UW	$38,57 \cdot 10^4$	$38,6 \cdot 10^4$	$38,62 \cdot 10^4$
SW	$396,16 \cdot 10^4$	$408,75 \cdot 10^4$	$425,02 \cdot 10^4$

4.5.5. Comparación de resultados

En esta sección se van a comparar los resultados del modelo estático, del modelo evolutivo de la población de usuarios y del modelo dinámico obtenido en un mercado de monopolio, teniendo en cuenta los parámetros dados en la Tabla 4.1.

En la Figura 4.8 se muestra el estado final de la población ($x_m(T)$) para los tres modelos dado el estado de la población inicial y la tasa de aprendizaje. Se observa que en el modelo estático el 100% de los usuarios se suscribe con el MSP, esto se debe a que los usuarios toman una única decisión y dicha decisión no cambia en el tiempo, por el contrario en los otros modelos (evolutivo de la población de usuarios y dinámico) los usuarios evolucionan desde una población inicial. Se observa que si la tasa de aprendizaje es baja, $\delta = 4,07$, la población no llega a la ESS en ninguno de los tres estados iniciales de la población. Además se observa que cuanto menor sea el estado inicial de la población mayor es la diferencia del estado final de la población en los tres modelos, por ejemplo cuando $x_m(0) = 0,4$ se obtiene que en el modelo evolutivo de la población de usuarios $x_m(T) = 0,902$ y en el modelo dinámico es $x_m(T) = 0,96$, mientras que en $x_m(0) = 0,8$ se obtiene que en el modelo evolutivo de la población de usuarios $x_m(T) = 0,978$ y en el modelo dinámico es $x_m(T) = 0,983$. Cuando la tasa de aprendizaje es alta, $\delta = 6,8$, en todos los modelos y poblaciones iniciales el estado de la población final es la ESS.

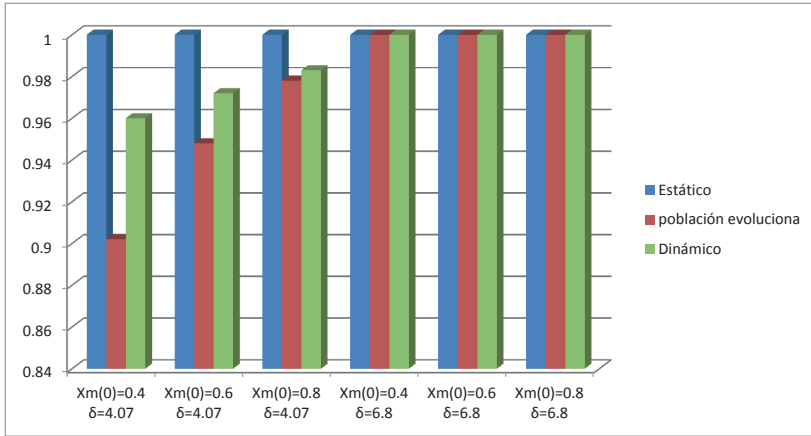


Figura 4.8: Estado final de la población ($x_m(T)$) en los modelos

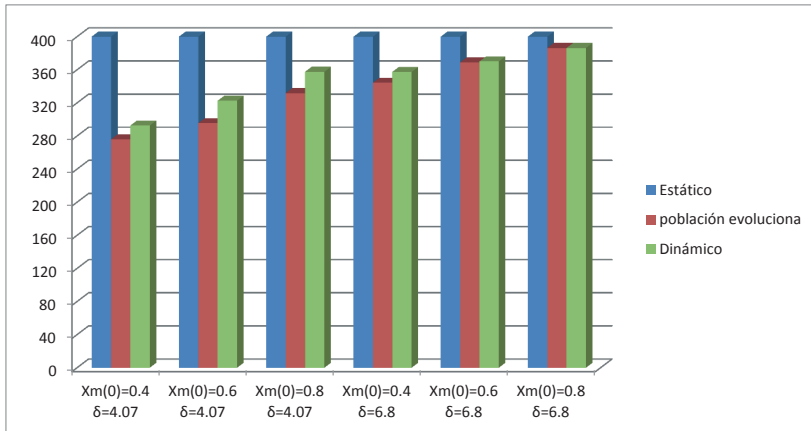


Figura 4.9: Beneficios medios del MSP en los modelos

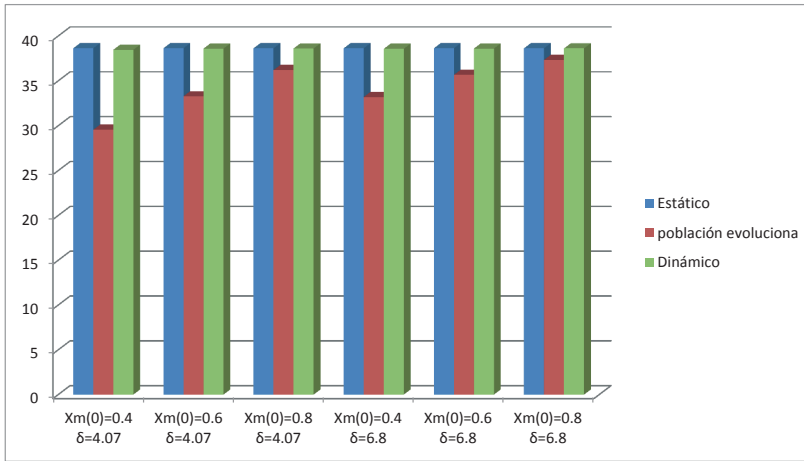


Figura 4.10: UW Medios en los modelos

En las Figuras 4.9 se muestra los beneficios medios del MSP para los tres modelos dado el estado de la población inicial y la tasa de aprendizaje. Los beneficios en el modelo estático son 400 como se demostró en la Ec. (4.4), mientras que en los otros modelos dependen del estado de la población inicial y la tasa de aprendizaje. Se observa que los beneficios del MSP en el modelo dinámico siempre son mayores o iguales al modelo evolutivo de la población de usuarios y esto se debe a que puede ajustar el precio en cada instante de tiempo, además se observa que cuanto mayor sea la población inicial y la tasa de aprendizaje los beneficios del MSP se acercarán a los beneficios del modelo estático.

En las Figuras 4.10 y 4.11 se muestran el UW y el SW para los tres modelos dado el estado de la población inicial y la tasa de aprendizaje. Se observa en la Figura 4.10 que el UW es similar en los modelos estáticos y dinámicos, por lo tanto, en el modelo dinámico los usuarios perciben un bienestar muy parecido al modelo estático el cual es el óptimo. Por otra parte, el modelo evolutivo de la población de usuarios muestra que cuanto mayor sea el estado de la población inicial y la tasa de aprendizaje mayor será el UW. Pero el

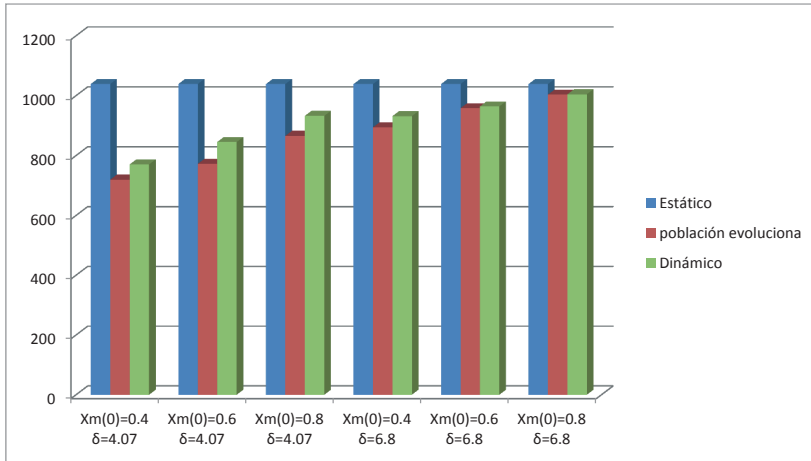


Figura 4.11: SW Medios en los modelos

SW es diferente en el modelo estático y dinámico ya que los beneficios del MSP se ven afectados por el estado de la población inicial y por la tasa de aprendizaje, ya que cuanto menor sean estos factores mayor es el tiempo que tarda la población en llegar a la ESS y cuanto mayor sea ese tiempo más se verán afectados los beneficios.

4.6. Conclusiones

En este Capítulo se analizó y se modeló el comportamiento del MSP cuando se encuentra en un mercado de monopolio desde tres distintos modelos y dado los resultados obtenidos en todos los escenarios se puede concluir que:

- En el modelo estático los resultados obtenidos muestran que el MSP anunciará el precio mínimo que le permita atender al 100% de los usuarios y con ello obtiene el máximo de los beneficios, los cuales están limitados al número de usuarios que quieren contratar el servicio de

comunicaciones móviles, es decir, los beneficios máximos del MSP en un instante de tiempo son N , porque la decisión óptima de ancho de bando suscrito por un usuario es el inverso al precio anunciado por el operador.

Además se obtuvo que el bienestar de los usuarios (UW) es directamente proporcional a los recursos y a la eficiencia espectral que perciben los usuarios y el bienestar social (SW) adicionalmente es directamente proporcional al número de usuarios.

- En el modelo evolutivo de la población de usuarios los resultados obtenidos son muy similares a los obtenidos en el modelo estático pero la diferencia radica en que la población evoluciona a las estrategias en equilibrio que son las mismas que en el modelo estático, y en el tiempo que tardan los usuarios en evolucionar a la estrategia evolutivamente estable no todos los usuarios suscriben el servicio porque están aprendiendo la mejor estrategia y esto genera que los beneficios del MSP no sean máximos y que la utilidad de esos usuarios sean cero en ese tiempo, lo que se refleja un menor UW y un menor SW .

Es de esperar que si el estado de la población inicial es que todos los usuarios tienen suscrito el servicio entonces las respuestas del modelo estático sea igual al que la población evoluciona, además si el tiempo durante el cual se evalúa el escenario es muy grande y/o la tasa de aprendizaje de los usuarios es alta la población llega hasta la estrategia evolutivamente estable.

- En el modelo dinámico se obtuvieron resultados obtenidos dos tipos de resultados y es que si la población actual durante el cual se evalúa el escenario es alta la estrategia del MSP es anunciar el mismo precio que en el modelo evolutivo de la población de usuarios pero si la población actual es baja la estrategia del MSP es anunciar un precio menor que en el modelo evolutivo de la población de usuarios y de esa manera hacer que los usuarios evolucionen de manera más rápida.

Permitir que el MSP tome una decisión en cada instante de tiempo hace que la población evolucione en un menor tiempo hacia la estrategia evolutivamente estable, lo que genera que los beneficios del MSP, el UW y el SW sean mayores que en el modelo evolutivo de la población de usuarios pero siempre menor que en el modelo estático.

- El modelo evolutivo de la población de usuarios y el modelo dinámico si se evalúan durante tiempos muy altos y con tasas de aprendizajes altas se comportan como el modelo estático.

Capítulo 5

Competition between service providers. Static model.

This chapter investigates a business model in which a new Small-cell Service Provider (SSP) enters a market and competes against an existing Macrocell Service Provider (MSP). The competition between the MSP and the SSP is an asymmetric one where each of them has a competitive advantage over the other. The access network of the SSP is based on small cells and is deployed in such a way that the SSP is prepared to offer a better quality of service at strategic indoor locations. On the other hand, the access network of the MSP, based on macrocells, can cover all the service area and reach some customers that cannot be serviced by shorter range small cells, as he described in the chapter 3. It is called a static model because the decisions of users and service providers are taken only once.

The chapter is structured as follows. We describe the network model in Section 5.1. In Section 5.2, we analyze the stage game through backward induction. We show the results obtained by using the numerical results of several scenarios in Section 5.3. Finally, conclusions are drawn in Section 5.4.

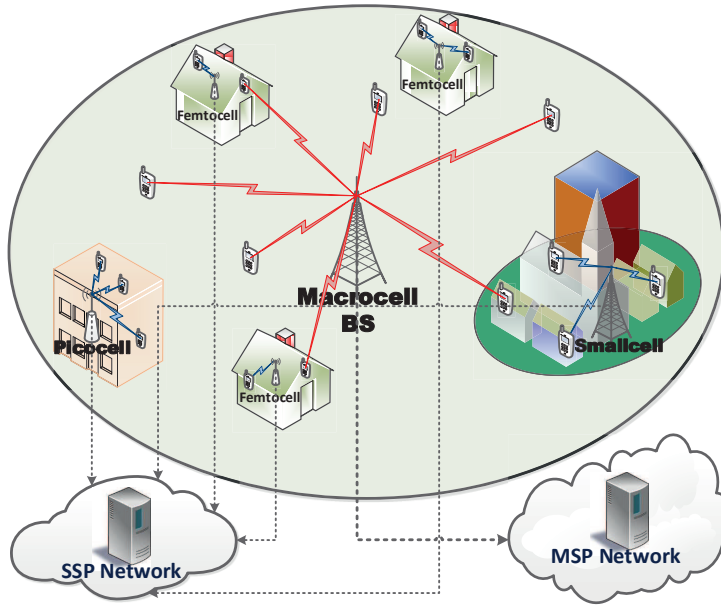


Figura 5.1: Scenario.

5.1. Model description

We consider a scenario in which there are two operators, as he described in the chapter 3. One operator, MSP, is a conventional one and owns a set of BS, each servicing a macrocell, that provides full coverage on the service area. The second operator, SSP, deployed a radio access network (RAN) consisting only of small cells. The coverage areas of the small cells are disjoint, included in the service area of the MSP and covering only a fraction of the latter.

In the sequel, to simplify notation, we will consider without any loss of generality that the RAN of the MSP is composed of a single macrocell

(see Fig. 5.1). Note that all our analysis and results could be generalized to any number of macrocells simply by multiplying, where appropriate, by the number of macrocells.

5.1.1. Users

Users that are inside s_i ($i = 1, \dots, K$) can subscribe to either the MSP, the SSP; or not to subscribe. Users make their subscription decision according to the expected utility and independently from one another. The users utility was obtained in Chapter 3 and is given by (3.16), (3.17) y (3.13).

5.1.2. Service providers

The decisions of the providers are made based on the profits obtained, which are defined as revenues minus costs. Revenues are given by the payment received from the subscribers; costs are assumed to be of an operational nature. Without any loss of generality, we assume that they are zero. In Chapter 3 the profit functions of the SPs were defined in (3.21) y (3.22), we obtain

$$\pi_m(x_m(p_m, p_s)) = p_m \sum_{i=0}^K N_i x_{m_i} b_m^* = \sum_{i=0}^K N_i x_{m_i}, \quad (5.1)$$

$$\pi_s(x_s(p_m, p_s)) = p_s \sum_{i=0}^K N_i x_{s_i} b_s^* = \sum_{i=0}^K N_i x_{s_i}. \quad (5.2)$$

5.2. Analysis

We analyze the competition between the MSP and the SSP based on the models developed in the previous section. We assume that at a first stage they compete according to a leader-follower model, which can be modeled as a Stackelberg's game. The MSP is the leader because it is the incumbent

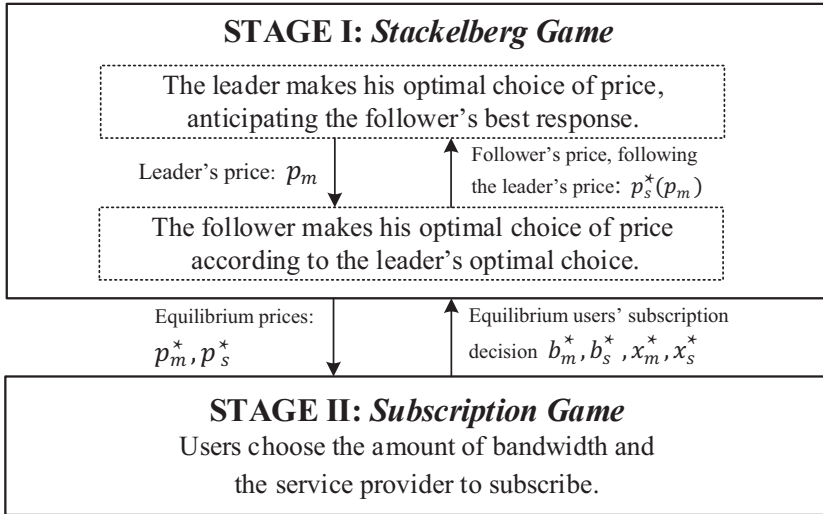


Figura 5.2: Game structure

company owning a spectrum license and the SSP is the follower. At a second stage, each user will subscribe to the service providing the highest utility [32].

The strategic interaction between the SPs and the users is shown in Fig. 5.2. The game is solved by backward induction [33], which means that at Stage I players proceed strategically anticipating the solution of Stage II.

5.2.1. Stage II: subscription game

At Stage II, the users know the prices announced by the MSP and the SSP at Stage I. Given this, they decide which SP to subscribe to and how much bandwidth to subscribe. User population strategies are $\mathcal{S} = \{m, s, o\}$ which correspond to: subscribing to the MSP, subscribing to the SSP and not subscribing to the service, respectively.

We adopt the Wardrop equilibrium [40] as the solution concept for this

stage. In this equilibrium, no user can increase their utility function either by varying the amount of bandwidth to subscribe or by changing SP.

It can be easily inferred that the decisions made by the population at small cell s_i do not depend on decisions made by the population at the other small cells, because each small cell has independent resources. In addition, if users only have MSP coverage, they will subscribe to it, so that the following analysis applies only to the areas covered by both SPs.

Clearly, all users in small cell s_i subscribe to one of the two SPs if

$$N_i \leq B_{m_i}/b_m^* + B_{s_i}/b_s^* = B_{m_i}p_m + B_{s_i}p_s.$$

Now, for a given p_s , the minimum price p_m , that will allow all users in s_i to subscribe the service is given by

$$p_{m_i}(p_s) = \frac{N_i - p_s B_{s_i}}{B_{m_i}}. \quad (5.3)$$

Likewise, for a given p_m , the minimum price p_s , that will allow all users in s_i to subscribe the service is given by

$$p_{s_i}(p_m) = \frac{N_i - p_m B_{m_i}}{B_{s_i}}. \quad (5.4)$$

Let $(x_{m_i}^*, x_{s_i}^*, x_{o_i}^*)$ represent the fraction of users in s_i following each strategy in equilibrium.

The following three cases are possible:

1. If $p_s > p_m/\theta_{m_i}$, then $u_{m_i} > u_{s_i}$, which means that all users tend to subscribe to the MSP. We have the following alternatives
 - a) If $p_m \geq N_i/B_{m_i}$, the MSP has enough bandwidth to serve all users, so that all users can subscribe to it: $x_{m_i}^* = 1$, $x_{s_i}^* = 0$ and $x_{o_i}^* = 0$.
 - b) If $p_m < N_i/B_{m_i}$, the MSP does not have enough bandwidth to serve all users. We have the following possibilities:

Tabla 5.1: Population ratio when $p_s > p_m/\theta_{m_i}$, the users prefer to subscribe to the MSP

High supply ($x_{m_i}^* + x_{s_i}^* = 1$)		Low supply ($x_{m_i}^* + x_{s_i}^* < 1$)
$p_m \geq \frac{N_i}{B_{m_i}}$	$p_{m_i}(p_s) < p_m < \frac{N_i}{B_{m_i}}$	$p_m \leq p_{m_i}(p_s)$
$x_{m_i}^* = 1$	$x_{m_i}^* = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$	$x_{m_i}^* = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$
$x_{s_i}^* = 0$	$x_{s_i}^* = 1 - \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$	$x_{s_i}^* = \frac{p_s B_{s_i}}{N_i}$
$x_{o_i}^* = 0$	$x_{o_i}^* = 0$	$x_{o_i}^* = 1 - x_{m_i}^* - x_{s_i}^*$

- 1) If $p_m > p_{m_i}(p_s)$, then the SSP has enough bandwidth to serve the users not served by the MSP, obtaining $x_{m_i}^* = p_m B_{m_i}/N_i$, $x_{s_i}^* = 1 - p_m B_{m_i}/N_i$ and $x_{o_i}^* = 0$.
- 2) If $p_m \leq p_{m_i}(p_s)$, then the SPs does not have enough bandwidth to serve all users, obtaining $x_{m_i}^* = p_m B_{m_i}/N_i$, $x_{s_i}^* = p_s B_{s_i}/N_i$ and $x_{o_i}^* = 1 - x_{m_i}^* - x_{s_i}^*$.

All these possibilities are summarized in Table 5.1.

2. If $p_s < p_m/\theta_{m_i}$, then $u_{m_i} < u_{s_i}$, which means that all users tend to subscribe to the SSP. Applying similar considerations as in $u_{m_i} > u_{s_i}$, we obtain the results in Table 5.2.
3. If $p_s = p_m/\theta_{m_i}$, then $u_{m_i} = u_{s_i}$, which means that users are indifferent between subscribing to the MSP or to the SSP. Therefore, users choose randomly (with equal probability) between the MSP and the SSP [24].

We have the following possibilities:

- a) If $p_m > \frac{N_i}{2B_{m_i}}$, the MSP has enough bandwidth to serve more than $N_i/2$ users. We have the following possibilities:
 - 1) If $p_s > \frac{N_i}{2B_{s_i}}$, the SSP has enough bandwidth to serve more than $N_i/2$ users, so that all users can subscribe to it: $x_{m_i}^* = 1/2$, $x_{s_i}^* = 1/2$ and $x_{o_i}^* = 0$.

Tabla 5.2: Population ratio when $p_s < p_m/\theta_{m_i}$, the users prefer to subscribe to the SSP

High supply ($x_{m_i}^* + x_{s_i}^* = 1$)		Low supply ($x_{m_i}^* + x_{s_i}^* < 1$)
$p_s \geq \frac{N_i}{B_{s_i}}$	$p_{s_i}(p_m) < p_s < \frac{N_i}{B_{s_i}}$	$p_s \leq p_{s_i}(p_m)$
$x_{m_i}^* = 0$	$x_{m_i}^* = 1 - \frac{p_s B_{s_i}}{N_i}$	$x_{m_i}^* = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$
$x_{s_i}^* = 1$	$x_{s_i}^* = \frac{p_s B_{s_i}}{N_i}$	$x_{s_i}^* = \frac{p_s B_{s_i}}{N_i}$
$x_{o_i}^* = 0$	$x_{o_i}^* = 0$	$x_{o_i}^* = 1 - x_{m_i}^* - x_{s_i}^*$

Tabla 5.3: Population ratio when $p_s = p_m/\theta_{m_i}$

	$p_s > \frac{N_i}{2B_{s_i}}$	$p_{s_i}(p_m) \leq p_s \leq \frac{N_i}{2B_{s_i}}$	$p_s < p_{s_i}(p_m)$
$p_m > \frac{N_i}{2B_{m_i}}$	$x_{m_i}^* = 1/2$ $x_{s_i}^* = 1/2$ $x_{o_i}^* = 0$	$x_{m_i}^* = 1 - \frac{p_s B_{s_i}}{N_i}$ $x_{s_i}^* = \frac{p_s B_{s_i}}{N_i}$ $x_{o_i}^* = 0$	$x_{m_i}^* = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$ $x_{s_i}^* = \frac{p_s B_{s_i}}{N_i}$ $x_{o_i}^* = 1 - x_{m_i}^* - x_{s_i}^*$
$p_{m_i}(p_s) \leq p_m \leq \frac{N_i}{2B_{m_i}}$	$x_{m_i}^* = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$ $x_{s_i}^* = 1 - \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$ $x_{o_i}^* = 0$	$x_{m_i}^* = 1/2$ $x_{s_i}^* = 1/2$ $x_{o_i}^* = 0$	N/A
$p_m < p_{m_i}(p_s)$	$x_{m_i}^* = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$ $x_{s_i}^* = \frac{p_s B_{s_i}}{N_i}$ $x_{o_i}^* = 1 - x_{m_i}^* - x_{s_i}^*$	N/A	$x_{m_i}^* = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$ $x_{s_i}^* = \frac{p_s B_{s_i}}{N_i}$ $x_{o_i}^* = 1 - x_{m_i}^* - x_{s_i}^*$

- 2) If $p_{s_i}(p_m) \leq p_s \leq \frac{N_i}{2B_{s_i}}$, the SSP does not have bandwidth to serve more than $N_i/2$ users. Still, all users subscribe to the service: $x_{m_i}^* = 1 - p_s B_{s_i}/N_i$, $x_{s_i}^* = p_s B_{s_i}/N_i$ and $x_{o_i}^* = 0$.
 - 3) If $p_s < p_{s_i}(p_m)$, the SSP does not have enough bandwidth to serve all users, obtaining $x_{m_i}^* = p_m B_{m_i}/N_i$, $x_{s_i}^* = p_s B_{s_i}/N_i$ and $x_{o_i}^* = 1 - x_{m_i}^* - x_{s_i}^*$.
- b) If $p_{m_i}(p_s) \leq p_m \leq \frac{N_i}{2B_{m_i}}$, the MSP does not have bandwidth to serve more than $N_i/2$ users. Still, all users subscribe to the service. We have the following possibilities:
- 1) If $p_s > \frac{N_i}{2B_{s_i}}$, the SSP has enough bandwidth to serve more than $N_i/2$ users: $x_{m_i}^* = p_m B_{m_i}/N_i$, $x_{s_i}^* = 1 - p_m B_{m_i}/N_i$ and $x_{o_i}^* = 0$.
 - 2) If $p_{s_i}(p_m) \leq p_s \leq \frac{N_i}{2B_{s_i}}$, all users subscribe to the service, so the only possible population ratio is $x_{m_i}^* = 1/2$, $x_{s_i}^* = 1/2$ and $x_{o_i}^* = 0$.
 - 3) The case $p_s < p_{s_i}(p_m)$ does not exist, because if $p_m \geq p_{m_i}(p_s)$ then $p_s \geq p_{s_i}(p_m)$.
- c) If $p_m < p_{m_i}(p_s)$, the SPs does not have bandwidth to serve all users. We have the following possibilities:
- 1) If $p_s > \frac{N_i}{2B_{s_i}}$, the population ratio is: $x_{m_i}^* = p_m B_{m_i}/N_i$, $x_{s_i}^* = p_s B_{s_i}/N_i$ and $x_{o_i}^* = 1 - x_{m_i}^* - x_{s_i}^*$.
 - 2) The case $p_{s_i}(p_m) \leq p_s \leq \frac{N_i}{2B_{s_i}}$ does not exist, because if $p_m < p_{m_i}(p_s)$ then $p_s < p_{s_i}(p_m)$.
 - 3) If $p_s < p_{s_i}(p_m)$, the population ratio is: $x_{m_i}^* = p_m B_{m_i}/N_i$, $x_{s_i}^* = p_s B_{s_i}/N_i$ and $x_{o_i}^* = 1 - x_{m_i}^* - x_{s_i}^*$.

All these possibilities are summarized in Table 5.3.

5.2.2. Stage I: Stackelberg game

At Stage I, the SPs assume that users will behave as derived above, and each SP chooses its price, as shown in Fig. 5.2, according to a Stackelberg

game. The SSP sets its price in response to MSP's price, in order to maximize its profits given MSP's choice, while the objective of the leader is to maximize its profits anticipating SSP's choice

$$p_m^* = \arg \max_{p_m \geq 0} \pi_m(p_m, x_m(p_m, p_s^*)),$$

$$\text{s. t. } p_s^* = \arg \max_{p_s \geq 0} \pi_s(p_s, x_s(p_m, p_s)).$$

For the sake of clarity, we first describe the analysis with just two small cells that cover the entire service area. Then, at the end of the analysis, the solution is extended to a general number, K , of small cells. Without loss of generality we assume that $\theta_{m_1} > \theta_{m_2}$. We also assume that $N_1/B_{s_1} \leq N_2/B_{s_2}$; although the analysis is not included here, it can be shown that the case $N_1/B_{s_1} > N_2/B_{s_2}$ would lead to the same equilibrium.

We divide the strategy space into the following regions (Fig. 5.3):

- Regions of user preferences:
 - **Region A** is defined by $p_s \geq p_m/\theta_{m_1}$ and it corresponds to the region where, in both small cells, all users prefer to subscribe to the MSP. Consequently, this region is also called MSP preference region. The population ratios in this region are as shown in Table 5.1.
 - **Region B** is defined by $p_m/\theta_{m_2} < p_s \leq p_m/\theta_{m_1}$ and it corresponds to the region where users in s_2 will prefer to subscribe to the MSP, and user in s_1 will prefer to subscribe to the SSP. Consequently, this region is also called user's indecision region. The population ratios in this region are as shown in Table 5.1 for s_2 , and in Table 5.2 for s_1 .
 - **Region C** is defined by $p_s < p_m/\theta_{m_2}$ and it corresponds to the region where, in both small cells, all users prefer to subscribe to the SSP. Consequently, this region is also called SSP preference region. The population ratios in this region are as shown in Table 5.2.

- Regions of SPs supply
 - **Region I** is defined by $p_s \leq p_{s_1}(p_m)$ and it corresponds to the case in which the SPs do not have enough bandwidth to serve all users in s_1 or s_2 . Consequently, this region is also called low supply region.
 - **Region II** is defined by $p_{s_1}(p_m) \leq p_s \leq p_{s_2}(p_m)$ and it corresponds to the case in which the SPs do not have enough bandwidth to serve all users in s_2 , but they can serve all users in s_1 .
 - **Region III** is defined by $p_s \geq p_{s_2}(p_m)$ and it corresponds to the case in which the SPs have enough bandwidth to serve all users in both s_1 and s_2 . Consequently, this region is also called high supply region.

Let $p^{ij} = (p_m^{ij}, p_s^{ij})$, with $i, j \in \{1, 2\}$, denote the points defined by the intersection of the borders between the different regions as shown in Fig. 5.3.

The intersection of the regions defined by users preferences (A, B, C) and those defined by SPs supply (I, II, III) defines nine new regions that we denote as AI, AII, AIII, ..., CIII.

SSP's best response

Here we analyze the SSP's Best Response

$$\text{BR}(p_m) = \arg \max_{p_s} \pi_s.$$

From (5.2) the SSP profit function is

$$\pi_s = N_1 x_{s_1}^* + N_2 x_{s_2}^*, \quad (5.5)$$

where $x_{s_1}^*$ and $x_{s_2}^*$ are as shown in Tables 5.1 and 5.2.

Since $0 \leq x_{s_i} \leq 1$, it is clear that $0 \leq N_i x_{s_i}^* \leq N_i$. However, in the following analysis, when $N_i x_{s_i}^*$ is substituted in (5.5) by the corresponding expression,

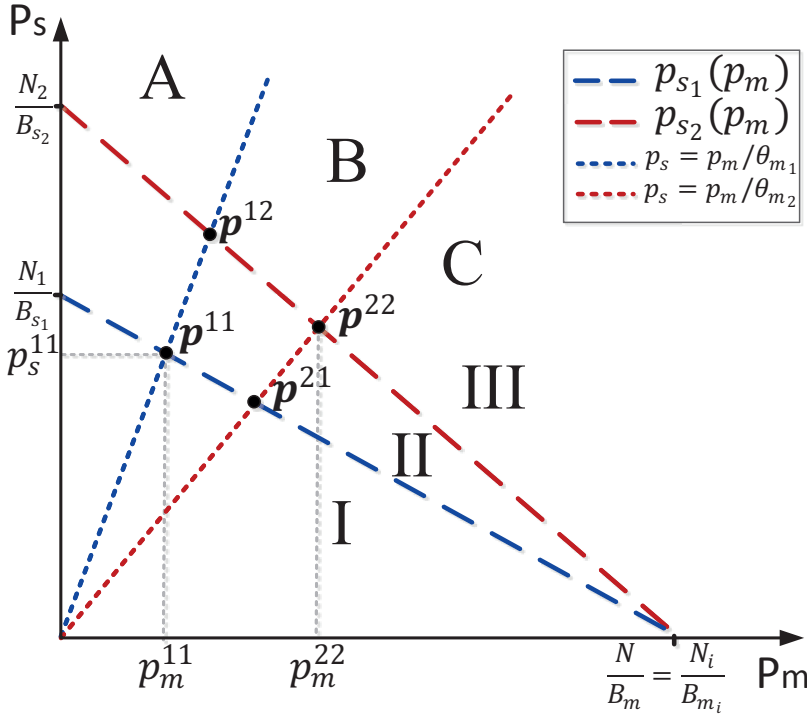


Figura 5.3: Different regions.

its lower and upper limits are considered to be implicit for simplicity of notation; otherwise our notation would be cluttered with the use of $\max(0, \cdot)$ and $\min(N_i, \cdot)$, or with the introduction of more regions in the strategy space.

First we study the best response in each of the nine regions (AI, AII, ..., CIII). For a given region R we denote by $BR_R(p_m)$ the best response of the SSP in the region R , i.e., such that the strategy $(p_m, BR_R(p_m)) \in R$. Similarly, we define $\pi_s^R(p_m) = \pi_s(p_m, BR_R(p_m))$. Then, $BR(x)$ will be easily obtained by comparing the values $\pi_s^R(x)$ for all the regions crossed by the line $p_m = x$.

$$BR_{AI}(p_m) = \arg \max_{p_s} p_s(B_{s_1} + B_{s_2}) = p_{s_1}(p_m) \quad (5.6)$$

$$\pi_s^{\text{AI}}(p_m) = (N_1 - p_m B_{m_1}) \frac{B_{s_1} + B_{s_2}}{B_{s_1}} \quad (5.7)$$

$$\text{BR}_{\text{AII}}(p_m) = \arg \max_{p_s} N_1 - p_m B_{m_1} + p_s B_{s_2} = p_{s_2}(p_m) \quad (5.8)$$

$$\pi_s^{\text{AII}}(p_m) = N_1 + N_2 - p_m (B_{m_1} + B_{m_2}) \quad (5.9)$$

$$\text{BR}_{\text{AIII}}(p_m) = \arg \max_{p_s} N_1 + N_2 - p_m (B_{m_1} + B_{m_2}) = p_{s_2}(p_m) \quad (5.10)$$

$$\pi_s^{\text{AIII}}(p_m) = N_1 + N_2 - p_m (B_{m_1} + B_{m_2}) \quad (5.11)$$

$$\text{BR}_{\text{BI}}(p_m) = \arg \max_{p_s} p_s (B_{s_1} + B_{s_2}) = \begin{cases} p_m / \theta_{m_1} & \text{if } p_m < p_m^{11} \\ p_{s_1}(p_m) & \text{if } p_m \geq p_m^{11} \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\pi_s^{\text{BI}}(p_m) = \begin{cases} p_m / \theta_{m_1} (B_{s_1} + B_{s_2}) & \text{if } p_m < p_m^{11} \\ p_{s_1}(p_m) (B_{s_1} + B_{s_2}) & \text{if } p_m \geq p_m^{11} \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\text{BR}_{\text{BII}}(p_m) = \arg \max_{p_s} p_s (B_{s_1} + B_{s_2}) = \begin{cases} p_m / \theta_{m_1} - \epsilon & \text{if } p_m < p_m^{12} \\ p_{s_2}(p_m) & \text{if } p_m \geq p_m^{12} \end{cases} \quad (5.14)$$

where ϵ is an arbitrarily small positive number.

$$\pi_s^{\text{BII}}(p_m) = \begin{cases} p_m / \theta_{m_1} (B_{s_1} + B_{s_2}) - \epsilon & \text{if } p_m < p_m^{12} \\ p_{s_2}(p_m) (B_{s_1} + B_{s_2}) & \text{if } p_m \geq p_m^{12} \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \text{BR}_{\text{BIII}}(p_m) &= \arg \max_{p_s} p_s B_{s_1} + N_2 - p_m B_{m_2} \\ &= \begin{cases} p_m / \theta_{m_1} - \epsilon & \text{if } p_m < \frac{N_1 \theta_{m_1}}{B_{s_1}} \\ N_1 / B_{s_1} & \text{if } p_m \geq \frac{N_1 \theta_{m_1}}{B_{s_1}} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\pi_s^{\text{BIII}}(p_m) = \begin{cases} p_m \left(\frac{B_{s_1}}{\theta_{m_1}} - B_{m_2} \right) + N_2 - \epsilon & \text{if } p_m < \frac{N_1 \theta_{m_1}}{B_{s_1}}, \\ N_1 + N_2 - p_m B_{m_2} & \text{if } p_m \geq \frac{N_1 \theta_{m_1}}{B_{s_1}} \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\text{BR}_{\text{CI}}(p_m) = \arg \max_{p_s} p_s (B_{s_1} + B_{s_2}) = \begin{cases} p_m / \theta_{m_2} & \text{if } p_m < p_m^{21} \\ p_{s_1}(p_m) & \text{if } p_m \geq p_m^{21} \end{cases} \quad (5.18)$$

$$\pi_s^{\text{CI}}(p_m) = \begin{cases} p_m / \theta_{m_2} (B_{s_1} + B_{s_2}) & \text{if } p_m < p_m^{21}, \\ p_{s_1}(p_m) (B_{s_1} + B_{s_2}) & \text{if } p_m \geq p_m^{21}, \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\text{BR}_{\text{CII}}(p_m) = \arg \max_{p_s} p_s (B_{s_1} + B_{s_2}) = \begin{cases} p_m / \theta_{m_2} & \text{if } p_m < p_m^{22} \\ p_{s_2}(p_m) & \text{if } p_m \geq p_m^{22} \end{cases} \quad (5.20)$$

$$\pi_s^{\text{CII}}(p_m) = \begin{cases} p_m / \theta_{m_2} (B_{s_1} + B_{s_2}) & \text{if } p_m < p_m^{22} \\ p_{s_2}(p_m) (B_{s_1} + B_{s_2}) & \text{if } p_m \geq p_m^{22} \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \text{BR}_{\text{CIII}}(p_m) &= \arg \max_{p_s} p_s (B_{s_1} + B_{s_2}) \\ &= \begin{cases} p_m / \theta_{m_2} - \epsilon & \text{if } p_m < \frac{N_2 \theta_{m_2}}{B_{s_2}} \\ N_2 / B_{s_2} & \text{if } p_m \geq \frac{N_2 \theta_{m_2}}{B_{s_2}} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\pi_s^{\text{CIII}}(p_m) = \begin{cases} p_m/\theta_{m_2}(B_{s_1} + B_{s_2}) - \epsilon & \text{if } p_m < \frac{N_2\theta_{m_2}}{B_{s_2}} \\ N_1 + N_2 & \text{if } p_m \geq \frac{N_2\theta_{m_2}}{B_{s_2}} \end{cases} \quad (5.23)$$

Comparing (5.7), (5.9), (5.11), (5.13), (5.15), (5.17), (5.19), (5.21) and (5.23), we obtain the $\text{BR}(p_m)$

$$\text{BR}(p_m) = \begin{cases} p_{s_2} & \text{if } p_m \leq p_m^{AB} \\ \frac{p_m}{\theta_{m_1}} - \epsilon & \text{if } p_m^{AB} < p_m \leq \frac{N_1\theta_{m_1}}{B_{s_1}} \\ \frac{N_1}{B_{s_1}} & \text{if } \frac{N_1\theta_{m_1}}{B_{s_1}} < p_m \leq p_m^{BC} \\ \frac{p_m}{\theta_{m_2}} - \epsilon & \text{if } p_m^{BC} < p_m < \frac{N_2\theta_{m_2}}{B_{s_2}} \\ \frac{N_2}{B_{s_2}} & \text{if } p_m \geq \frac{N_2\theta_{m_2}}{B_{s_2}} \end{cases} \quad (5.24)$$

where p_m^{AB} is the MSP price where the SSP changes its strategy, since when the MSP price is greater than p_m^{AB} the SSP profit in Region (A) are lower than in Region (B) and p_m^{BC} is the MSP price where the SSP changes its strategy, since when the MSP price is greater than p_m^{BC} the SSP profit in Region (B) are lower than in Region (C), in this case p_m^{AB} and p_m^{BC} are given as

$$p_m^{AB} = \frac{\theta_{m_1}(N_1 + N_2)}{\theta_{m_1}(B_{m_1} + B_{m_2}) + B_{s_1} + B_{s_2}}$$

$$p_m^{BC} = \begin{cases} \frac{N_2\theta_{m_2}}{B_{s_2} + \theta_{m_2}B_{m_2} + B_{s_1}(1 - \frac{\theta_{m_2}}{\theta_{m_1}})} & \text{if } \text{BR}(p_m) = \frac{p_m}{\theta_{m_1}} - \epsilon, \\ \frac{(N_1 + N_2)\theta_{m_2}}{B_{s_2} + \theta_{m_2}B_{m_2} + B_{s_1}} & \text{if } \text{BR}(p_m) = \frac{N_1}{B_{s_1}}. \end{cases}$$

MSP's optimal decision

Given SSP's $BR(p_m)$ derived in (5.24), the expressions for π_m are the following ones:

$$\pi_m = \begin{cases} \pi_m^i & \text{if } p_m \leq p_m^{AB} \\ \pi_m^{ii} & \text{if } p_m^{AB} < p_m \leq \frac{N_1\theta_{m_1}}{B_{s_1}} \\ \pi_m^{iii} & \text{if } \frac{N_1\theta_{m_1}}{B_{s_1}} < p_m \leq p_m^{BC} \\ \pi_m^{iv} & \text{if } p_m^{BC} < p_m < \frac{N_2\theta_{m_2}}{B_{s_2}} \\ \pi_m^v & \text{if } p_m \geq \frac{N_2\theta_{m_2}}{B_{s_2}} \end{cases} \quad (5.25)$$

where $\pi_m^i, \pi_m^{ii}, \pi_m^{iii}, \pi_m^{iv}, \pi_m^v$ are

$$\begin{aligned} \pi_m^i &= p_m(B_{m_1} + B_{m_2}) \\ \pi_m^{ii} &= p_m(B_{m_2} - \frac{B_{s_1}}{\theta_{m_1}}) + N_1 - \epsilon \\ \pi_m^{iii} &= p_m B_{m_2} \\ \pi_m^{iv} &= N_1 + N_2 - \frac{p_m}{\theta_{m_2}}(B_{s_1} + B_{s_2}) - \epsilon \\ \pi_m^v &= 0 \end{aligned}$$

We analyze the MSP's best price for each possibility

$$p_m^{i*} = \arg \max_{p_s} \pi_m^i = p_m^{AB} \quad (5.26)$$

$$p_m^{ii*} = \arg \max_{p_s} \pi_m^{ii} = \frac{N_1\theta_{m_1}}{B_{s_1}} \quad (5.27)$$

$$p_m^{iii*} = \arg \max_{p_s} \pi_m^{iii} = p_m^{BC} \quad (5.28)$$

$$p_m^{iv*} = \arg \max_{p_s} \pi_m^{iv} = p_m^{BC} \quad (5.29)$$

$$p_m^{v*} = \arg \max_{p_s} \pi_m^v = \frac{N_2\theta_{m_2}}{B_{s_2}} \quad (5.30)$$

There is a Stackelberg equilibrium when the price announced by the MSP generates the highest MSP's profits, given SSP's BR(p_m). Since $\pi_m^{iii}(p_m^{iii*}) \geq \pi_m^{ii}(p_m^{ii*}) \geq \pi_m^{iv}(p_m^{iv*}) \geq \pi_m^v(p_m^v)$, then there are two alternatives:

- If $\pi_m^i(p_m^i) > \pi_m^{iii}(p_m^{iii*})$ the Stackelberg equilibrium is

$$\begin{aligned} p_m^* &= p_m^i = p_m^{AB}, \\ p_s^* &= \frac{N_2 - p_m^* B_{m2}}{B_{s2}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

- If $\pi_m^{iii}(p_m^{iii*}) \geq \pi_m^i(p_m^i)$ the Stackelberg equilibrium is

$$\begin{aligned} p_m^* &= p_m^{iii*} = p_m^{BC}, \\ p_s^* &= p_m^* / \theta_{m2} - \epsilon \end{aligned} \quad (5.32)$$

Since this equilibrium anticipates the equilibrium in Stage II as derived in the previous section, the Stackelberg equilibrium is a Subgame Perfect Nash Equilibrium for the whole game.

5.2.3. Analysis summary

$K = 1$ The results of the analysis for the case with 1 small cell are:

$$p_m^* = \frac{N\theta_m}{B_m\theta_m + B_s}, \quad (5.33)$$

$$p_s^* = \frac{N}{B_m\theta_m + B_s}, \quad (5.34)$$

$$x_m^* = \frac{B_m\theta_m}{B_m\theta_m + B_s}, \quad (5.35)$$

$$x_s^* = \frac{B_s}{B_m\theta_m + B_s}, \quad (5.36)$$

$$x_s^* = 0, \quad (5.37)$$

The results of the analysis for the general case with K small cells there are three possible cases:

- If $\pi_m^i(p_m^{i*}) > \max(\pi_m^{iii}(p_m^{iii*}), N_m)$ the Stackelberg equilibrium is

$$p_m^* = \frac{\min_i(\theta_{m_i}) \sum_{i=1}^K N_i}{\min_i(\theta_{m_i}) \sum_{i=1}^K B_{m_i} + \sum_{i=1}^K B_{s_i}}, \quad (5.38)$$

$$p_s^* = \frac{N_K - p_m^* B_{m_K}}{B_{s_K}}$$

- If $\pi_m^{iii}(p_m^{iii*}) > \max(\pi_m^i(p_m^{i*}), N_m)$, let p_m^{BCij} is the MSP price where SSP changes its strategy of $p_s = p_m/\theta_{m_i} - \epsilon$ to $p_s = p_m/\theta_{m_j} - \epsilon$ where $\theta_{m_j} < \theta_{m_i}$. p_m^{BCij} is given as

$$p_m^{BCij} = \begin{cases} \frac{N_j \theta_{m_j}}{B_{s_j} + \theta_{m_j} B_{m_j} + B_{s_i} (1 - \frac{\theta_{m_j}}{\theta_{m_i}})} & \text{if } BR(p_m) = \frac{p_m}{\theta_{m_i}} - \epsilon, \\ \frac{(N_i + N_j) \theta_{m_j}}{B_{s_j} + \theta_{m_j} B_{m_j} + B_{s_i}} & \text{if } BR(p_m) = \frac{N_i}{B_{s_i}}. \end{cases}$$

The Stackelberg equilibrium is

$$p_m^* = p_m^{BCij}, \quad (5.39)$$

$$p_s^* = p_m^* / \theta_{m_j} - \epsilon$$

- If $N_m \geq \max(\pi_m^i(p_m^{i*}), \pi_m^{iii}(p_m^{iii*}))$, where N_m are the users covered only by the MSP. The Stackelberg equilibrium is

$$p_m^* = \frac{N}{B_m}, \quad (5.40)$$

$$p_s^* = \max_i \left(\frac{N_i}{B_{s_i}} \right) = \frac{N_K}{B_{s_K}}$$

5.3. Results

In this section some results are presented in order to illustrate the capabilities of our model and analysis and to provide an insight into the system behavior. The effect of SSP coverage ratio, MSP spectral efficiency and SSP available bandwidth on the system key indicators are analyzed. The indicators calculated are: population ratios, prices, users profit and profits of both SPs. The system parameters values are those shown in Table 5.4.

Tabla 5.4: Parameter setting

Parameter	Value
N	400 users
A_m	10000 m ²
B_m	60 MHz
K	5

5.3.1. Effect of SSP coverage ratio

Figures 5.4 and 5.5 show the effect of the SSP coverage ratio (A_s/A_m) on equilibrium population ratios (x_m^* , x_s^* and x_o^*), equilibrium prices, (p_m^* and p_s^*) and UW. These results have been obtained for the case where at each small cell there are $N_i = 4$ users, the available bandwidth for the SSP is $B_{s_i} = B_s = 0,52$ MHz at all the small cells, and the MSP spectral efficiency is $\theta_{m_i} = \theta_m = 0,8$ bits/s/Hz at all small cells.

These figures clearly show that the range of A_s/A_m can be divided into two regions. When A_s/A_m is below a certain threshold, the system displays a completely different behavior than it has when A_s/A_m is above that threshold. For the current values of the configuration parameters, the threshold that separates the two regions is $A_s/A_m \approx 0,5$.

When the coverage ratio is low (under the mentioned threshold), both SPs maintain a constant price. Moreover, the price set by the MSP is the same as in the case of the monopolistic scenario, namely the MSP equilibrium price coincides with that of equation (4.2) in Chapter 4. This can be interpreted as that, when the SSP coverage is low, MSP strategy is not to compete, that is, it behaves as if the SSP did not exist. In this situation, all users subscribe with one of the two SPs, and the population ratios of both SPs vary linearly with the coverage ratio, with a gradual transfer of users from the MSP to the SSP as the coverage ratio increases. As a result of this transfer of users, the MSP

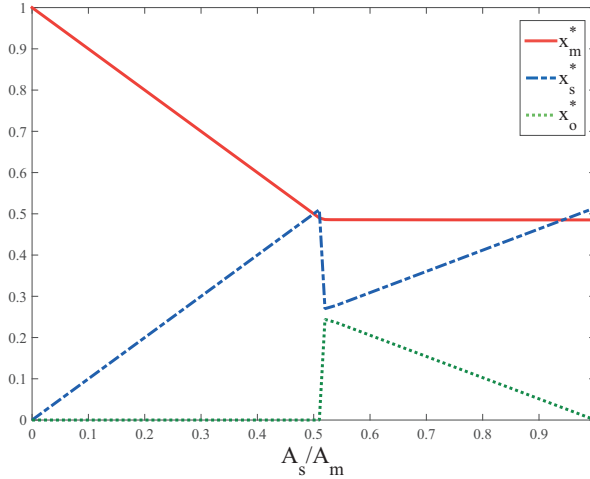


Figura 5.4: Population ratios as a function of A_s/A_m .

profit is gradually transferred to the SSP, while the UW is held constant.

When the coverage ratio exceeds the above threshold, SPs behavior changes abruptly. Now the competition between SPs results in prices given by (5.38), which are lower than previously. The drop in prices increases the demand for bandwidth, which causes that some users can not be served because the demand exceeds the available bandwidth. In this situation, the MSP retains the users it had at the point where A_s/A_m crossed the threshold, and these are maintained irrespective of the value of A_s/A_m . Consequently, the MSP profit remains constant. However, the SSP loses some users when A_s/A_m crosses the threshold (those who remain unserved), and therefore its benefit is dropped, but it gradually recovers users and profit as the coverage ratio increases. In this situation, competition favors users: the UW profit increases suddenly when the A_s/A_m threshold is exceeded, and then keeps increasing gradually as the coverage ratio increases.

The above results correspond to a homogeneous scenario in which the MSP gets the same spectral efficiency (0,8 bits/s/Hz) at all the small cells.

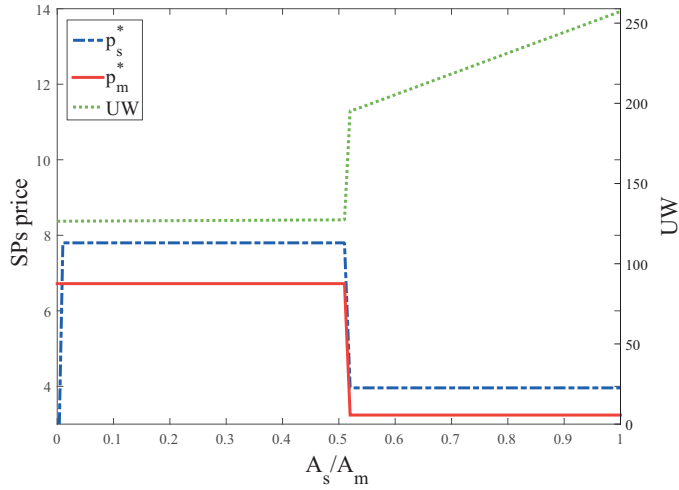


Figura 5.5: Prices and UW as a function of A_s/A_m .

We now examine the effect of a heterogeneous distribution of spectral efficiency. Figures 5.6 and 5.7 show the results obtained by repeating the above calculations, but this time being the spectral efficiencies obtained by the MSP at the small cells heterogeneous. Let $\{\theta_{m_i}\} = \{0,9, 0,8, 0,7, 0,6, 0,5\}$.

In this case, several A_s/A_m thresholds can be observed. The lowest of them, which in this case is $A_s/A_m \approx 0,6$, plays a role equivalent to that of the single threshold of the homogeneous scenario. For $A_s/A_m < 0,6$, the system behaves analogously to the homogeneous case; the MSP plays a monopolistic strategy and the users are gradually transferred from the MSN to the SSP as the coverage ratio increases.

For $A_s/A_m > 0,6$ the situation is more complex, and the range of A_s/A_m should be further divided into subregions to fully understand the system behavior at each of them. Nevertheless, regardless of the sharpness of the plots at certain points, the heterogeneous system behavior for $A_s/A_m > 0,6$ is roughly analogous to that of the homogeneous scenario for $A_s/A_m > 0,5$: prices fall, MSP profit remains approximately the same, SSP profit drops and

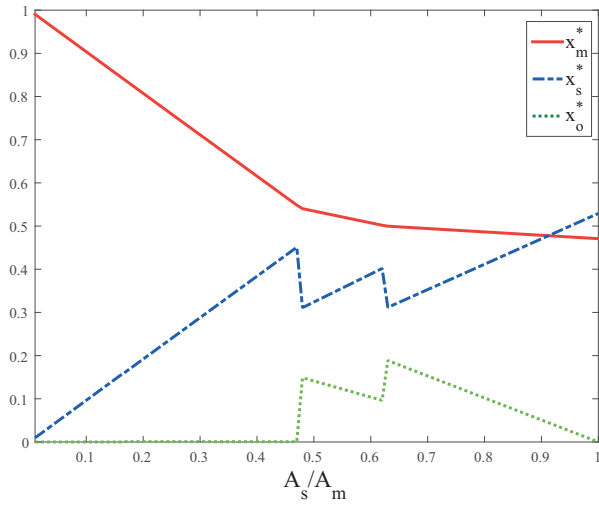


Figure 5.6: Population ratios as a function of A_s / A_m with heterogeneous θ_i s.

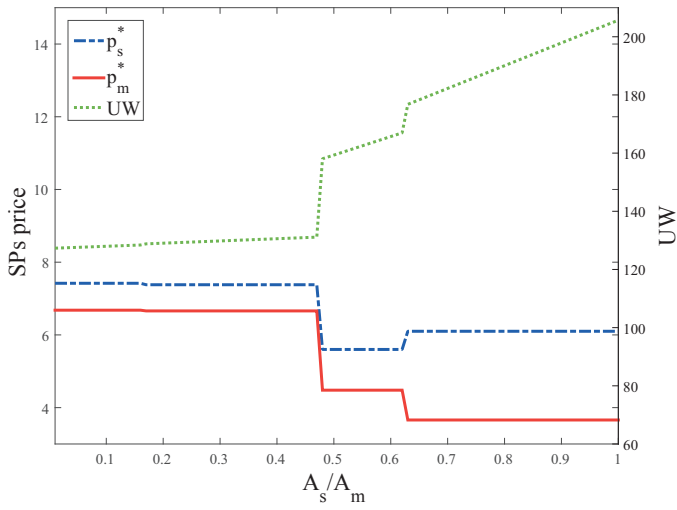


Figure 5.7: Prices and UW as a function of A_s / A_m with heterogeneous θ_i s.

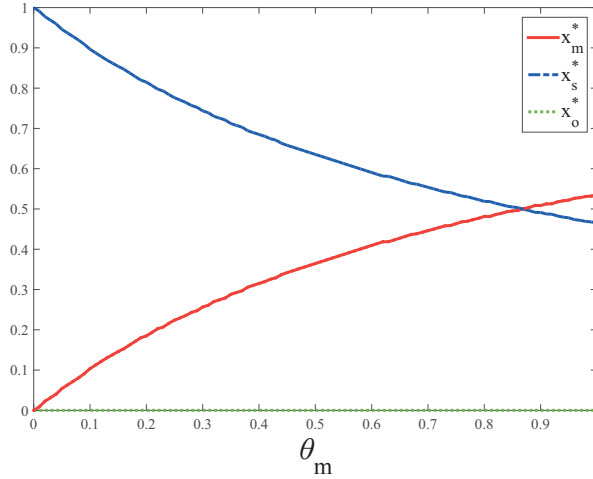


Figura 5.8: Fracciones de la población en función de θ_m .

then recovers gradually as A_s/A_m increases, and UW profit increases as the coverage ratio increases.

5.3.2. Effect of spectral efficiency

Figures 5.8 and 5.9 show the effect of the spectral efficiency obtained by the MSP at the small cells (θ_m) on equilibrium population ratios (x_m^* , x_s^* and x_o^*), equilibrium prices (p_m^* and p_s^*) and equilibrium users welfare (UW). It is assumed that the MSP obtains the same spectral efficiency at all the small cells ($\theta_{m_i} = \theta_m$). These results have been obtained for the case where at each cell there are $N_i = 80$ users, the available bandwidth for the SSP is $B_{s_i} = B_s = 0,52$ MHz at all the small cells and the coverage ratio is $A_s/A_m = 1$.

It can be seen that, the higher θ_m , the harder is for the SSP to compete. When θ_m is low, SSP's price is high and MSP's price must be low, because the MSP has to compensate for its low service quality. As θ_m increases, the

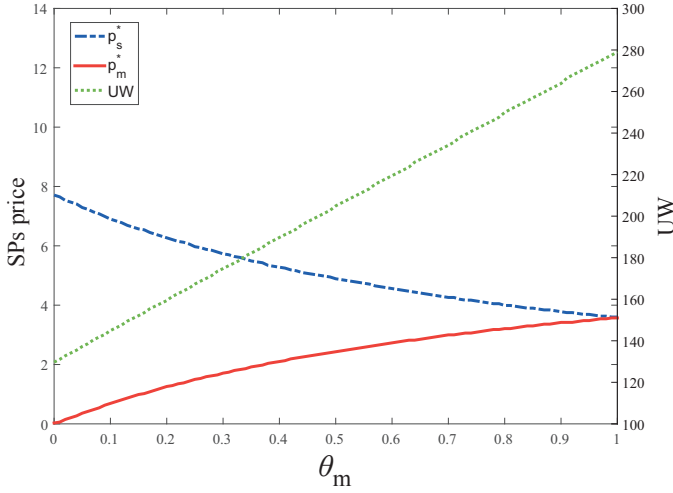


Figure 5.9: Prices and UW as a function of θ_m .

MSP increases its price, and the SSP is forced to compete and lower its price. Accordingly, users and profit are transferred from SSP to MSP as θ_m increases. Moreover, the competition favors the users, and UW increases as θ_m increases.

5.3.3. Effect of SSP's available bandwidth

Figures 5.10 and 5.11 show the effect of the SSP's available bandwidth at the small cells (B_s) on equilibrium population ratios (x_m^* , x_s^* and x_o^*), equilibrium prices (p_m^* and p_s^*), users welfare (UW). It is assumed that SSP's available bandwidth is the same at all the small cells ($B_{s_i} = B_s$). These results have been obtained for the case where at each cell there are $N_i = 80$ users, the MSP spectral efficiency is $\theta_{m_i} = \theta_m = 0,8$ bits/s/Hz at all the small cells, and coverage ratio is $A_s/A_m = 1$.

In this case the results obtained for population ratios mirrors that of section 5.3.2; the higher B_s , the SSP has more opportunity to compete. The figures show that, as B_s increases, the SSP cuts down the price and users

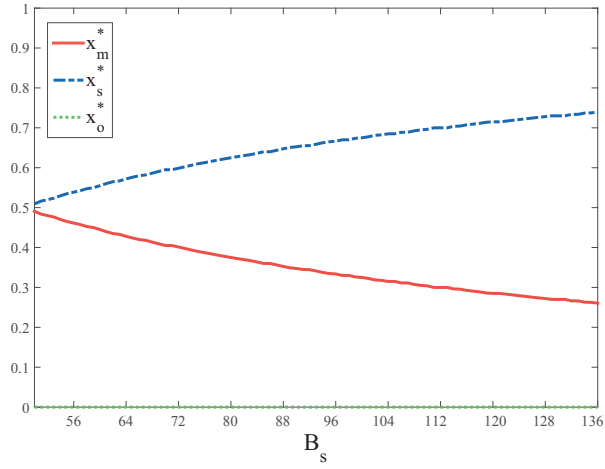


Figura 5.10: Population ratios as a function of B_s .

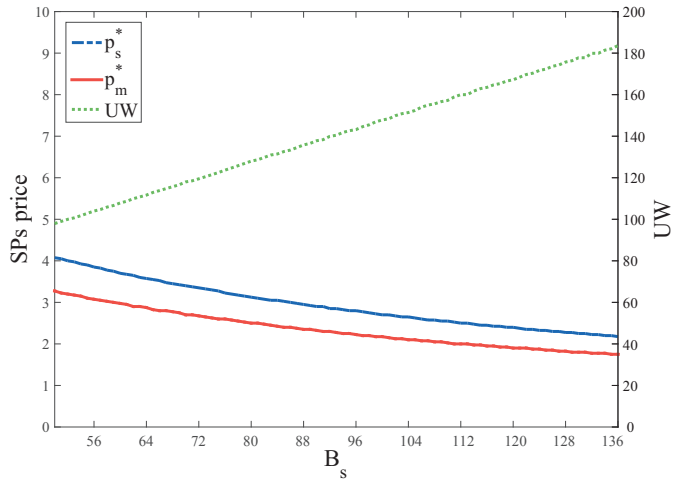


Figura 5.11: Prices and UW as a function of B_s .

ares gradually transferred from the MSP to the SSP. Although not shown in the figures, the SSP profit, which is the product of x_s^* by p_s^* , increases as B_s increases, which means that the gain in users overcomes the price reduction. However, the MSP profit clearly decreases as B_s increases, since both x_m^* and p_m^* decrease. As before, competition favors the users, and UW increases as B_s increases.

5.4. Conclusions

We have proposed a business model for a small-cell service provider consisting on, first, deploying a network of small cells, and second, competing in prices against the macro cell service provider.

Analyzing the previous results it can be concluded that:

- The SSP has an incentive to enter the market. Actually, the greater the SSP's resources are, and the lower the MSP's spectral efficiency is, the higher the SSP's profit is.
- Users benefit from SSP's entry and the greater the bandwidth, the spectral efficiency and the coverage area, the greater the user welfare is.
- The MSP will obtain lower profits when the SSP enters. A regulatory authority may grant the MSP access, however, based on the user welfare improvement.
- If the SSP has a low coverage compared to the MSP coverage, competition does not change the behavior of the MSP, which behaves the same way as it would in a monopoly, while SSP takes part of the subscribers, and the profit, from the MSP. In this scenario the user welfare rises slightly.

- If the SSP has a high coverage ratio, different system dynamics appear and both SPs are forced to compete by lowering prices. In this scenario, the profits of both SPs fall while the user welfare increases considerably.
- From the above it follows that the SSP finds more favorable a scenario with low coverage ratio, as it gets higher profits while requiring less investment.

Capítulo 6

Competencia entre proveedores de servicio. Modelo evolutivo de la población de usuario.

En este capítulo se evalúa un modelo de comunicaciones móviles que tiene las mismas características que el escenario del Capítulo 3, pero con la particularidad de que es un modelo evolutivo de la población de usuarios con el tiempo, es decir, las decisiones de los usuarios dependen de las decisiones tomadas con anterioridad. Por otra parte, los proveedores de servicios compiten entre sí por todos los usuarios de comunicaciones móviles y deben decidir un precio fijo para el horizonte de tiempo durante el cual se evalúa el escenario.

Dicho modelo permitirá conocer el comportamiento evolutivo de los usuarios y determinar cómo influye ese comportamiento en las estrategias de equilibrio de los proveedores de servicios, además de conocer los beneficios de los proveedores de servicios, el SW y el UW, lo que nos permitirá compararlos con escenarios evaluados en otros capítulos.

Este capítulo se divide de la siguiente manera, primero se describen las características del escenario, luego se definen los tipos de juegos que

se desarrollan en cada una de las etapas, posteriormente se solucionan cada una de las etapas, y por último se resuelve numéricamente varios escenarios extrayendo los resultados de la primera y la segunda etapa, además de modelarlos variando los diversos parámetros para conocer cuál es el comportamiento de los agentes y como afectan al escenario.

6.1. Características del Escenario

El escenario evaluado es el que mismo que en el Capítulo 3, pero en este caso se estudia durante un horizonte de tiempo finito durante el cual los usuarios pueden cambiar de estrategia en cada instante de tiempo y los SPs deben tomar sus decisiones una sola vez y dicha decisión no puede cambiar durante el horizonte de tiempo en el cual es estudiado el escenario.

6.1.1. Los usuarios

Los usuarios interaccionan entre las diferentes estrategias durante el periodo de tiempo de estudio $[0, T]$, dadas las siguientes utilidades percibidas

$$u_m^{n*}(\theta_m^n, p_m, t) = \frac{\theta_m^n}{p_m} e^{-1}, \quad (6.1)$$

$$u_s^{n*}(p_s, t) = \frac{1}{p_s} e^{-1}, \quad (6.2)$$

$$u_o^{n*} = 0, \quad (6.3)$$

dado que suscriben el ancho de banda óptimo

$$b_m^{n*}(p_m, t) = \frac{1}{p_m}, \quad (6.4)$$

$$b_s^{n*}(p_s, t) = \frac{1}{p_s}, \quad (6.5)$$

$$b_o^{n*} = 0. \quad (6.6)$$

Las decisiones de los usuarios en este capítulo están dadas por el comportamiento evolutivo de sus estrategias, es decir, $x_m^*(t)$, $x_s^*(t)$ y $x_o^*(t)$.

6.1.2. Los Proveedores de Servicios

Los SPs compiten entre sí por los usuarios de comunicaciones móviles buscando obtener el máximo de sus beneficios a lo largo del tiempo $[0, T]$. Para lograrlo los SPs solo pueden anunciar un precio por unidad de ancho de banda, es decir, el precio anunciado por los SPs no puede variar en dicho horizonte de tiempo, $p_m(t) = p_m$, $p_s(t) = p_s$, $\forall t \in T$. Anteriormente se definieron los beneficios de los SPs en (3.21) y (3.22) y en este capítulo los reescribimos como

$$\Pi_m(p_m, x_m, t) = \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_m(p_m, x_m, t)] dt \quad (6.7)$$

$$\Pi_s(p_s, x_s, t) = \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_s(p_s, x_s, t)] dt. \quad (6.8)$$

Los SPs compiten entre sí para determinar las estrategias en equilibrio de precios, es decir, p_m^* y p_s^* , dados los beneficios obtenidos en (6.7) y (6.8).

6.2. Teoría de Juegos para la toma de decisiones

En este escenario se desarrolla un juego de dos etapas mostrado en la Fig. 6.1. En la primera etapa los SPs juegan un juego de Stackelberg de un solo tiro con horizonte finito $[0, T]$ [46], donde el MSP es el líder en la elección de precio y el SSP es el seguidor. En la segunda etapa los usuarios deben elegir qué proveedor de servicio y cuánto ancho de banda suscribir en cada instante de tiempo, para realizar estas elecciones los usuarios adaptaran su conducta en busca de la mejor estrategia, para resolver este juego de suscripción de los usuarios se utiliza en juego evolutivo [47] puesto que nos permite estudiar e integrar las variaciones que tiene los recursos del escenario con respecto al tiempo ($B_{s_i}(t)$), dado que los recursos del SSP varían con el tiempo y esto

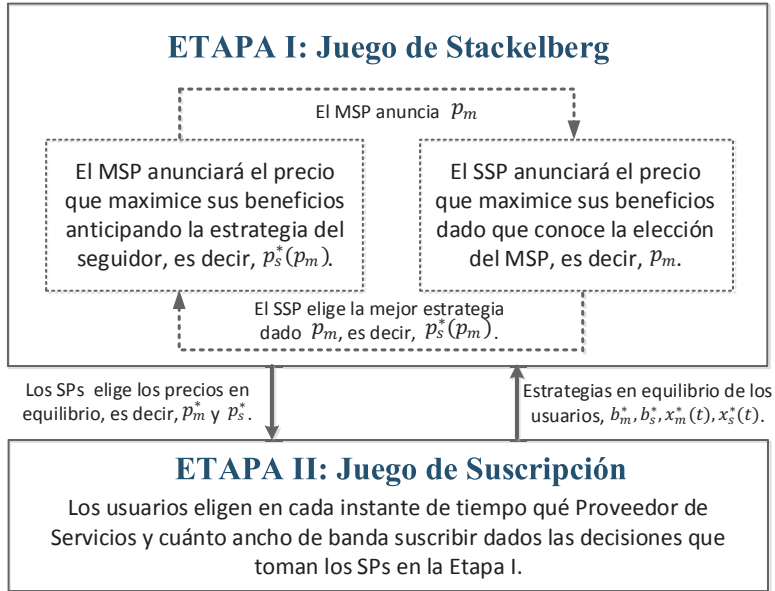


Figura 6.1: Estructura del juego

hace que las utilidad que perciben los usuarios también varíen y por ende las estrategias en equilibrio que deben tomar. El juego por etapas se resuelve por inducción hacia atrás para garantizar el equilibrio perfecto en subjuegos.

6.2.1. Etapa II: Juego de Suscripción

En la segunda Etapa los usuarios conocen con anterioridad los precios anunciados por los SPs, además de la decisión de ancho de banda óptimo suscrito por los usuarios obtenido en (6.4), (6.5) y (6.6), por ello la única decisión que debe tomar los usuarios es a qué SP suscribir. Se plantea un juego evolutivo de suscripción que permite llegar a soluciones en equilibrio ya que los jugadores juegan repetidamente y pueden ajustar su conducta a lo largo del tiempo a través del saber aprendiendo sobre la marcha.

Se formula el siguiente juego evolutivo para conocer las estrategias en equilibrio de la población en cada s_i :

- *Tipo de Juego*: Juego evolutivo de suscripción.
- *Jugadores*: Los N usuarios de comunicaciones móviles.
- *Estrategias*: Todas las posibles elecciones que tienen los jugadores, es decir, $\mathcal{S} = \{m, s, o\}$ que corresponden a suscribir con el MSP, con el SSP o a no suscribir.
- *Función Objetivo*: Es la utilidad que perciben los usuarios dado que suscriben el ancho de banda óptimo en un instante de tiempo y están definidas anteriormente en (6.1), (6.2) y (6.3).
- *Objetivo*: Conocer como es el comportamiento evolutivo de los usuarios a lo largo del horizonte de tiempo estudiado y determinar cuáles son las ESS.

Al igual que en el apartado 4.3.1 proponemos modelar y analizar la evolución de la población mediante la dinámica de réplica [47], teniendo en cuenta las limitaciones de cobertura y de recursos de los SPs, de tal manera que si los SPs no tienen limitaciones se utilizan las ecuaciones diferenciales de $\dot{x}_{m_i}(t)$ y $\dot{x}_{s_i}(t)$ y cuando se resuelve la evolución de la población de estas dos estrategias, se obtiene $x_{o_i}^*(t) = 1 - x_{m_i}^*(t) - x_{s_i}^*(t)$, pero cuando un SP no puede atender a más usuarios por problemas de recursos insuficientes y/o cobertura limitada, entonces los usuarios deben elegir si suscribir o no al servicio y se comportarán como en el apéndice B donde se describió el comportamiento de los usuarios en el mercado de monopolio.

A continuación se muestra la dinámica del replicar para este escenario

$$\begin{aligned}
 &\text{If } \left(x_{m_i} < \frac{B_{m_i} p_m}{N_i} \quad \& \quad x_{s_i} < \frac{B_{s_i}(t) p_s}{N_i} \right) \\
 &\quad \dot{x}_{m_i}(t) = \delta x_{m_i}(t) [u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)], \\
 &\quad \dot{x}_{s_i}(t) = \delta x_{s_i}(t) [u_{s_i}(p_s, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)], \\
 &\quad \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t) [-U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)]. \\
 &\text{Elseif } \left(x_{m_i} < \frac{B_{m_i} p_m}{N_i} \right) \\
 &\quad \dot{x}_{m_i}(t) = \delta x_{m_i}(t) [u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, t)], \\
 &\quad \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t) [-U_i(\theta_m^n, p_m, t)]. \tag{6.9} \\
 &\text{Elseif } \left(x_{s_i} < \frac{B_{s_i}(t) p_s}{N_i} \right) \\
 &\quad \dot{x}_{s_i}(t) = \delta x_{s_i}(t) [u_{s_i}(p_s, t) - U_i(p_s, r_i, t)], \\
 &\quad \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t) [-U_i(p_s, r_i, t)]. \\
 &\text{Else} \\
 &\quad \dot{x}_{m_i}(t) = 0, \\
 &\quad \dot{x}_{s_i}(t) = 0, \\
 &\quad \dot{x}_{o_i}(t) = 0. \\
 &\text{End}
 \end{aligned}$$

donde U_i es la utilidad media por un usuario en un instante de tiempo $U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t) = x_{m_i} u_{m_i}^*(\theta_m^n, p_m, t) + x_{s_i} u_{s_i}^*(p_s, r_i, t) + x_{o_i}(t) u_{o_i}^*$

El sistema de ecuaciones diferenciales dado en (6.9) indica cómo evoluciona la población y permite hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de la población partiendo de un estado inicial. En el Apéndice C se demuestran los estados estacionarios y las ESS de la población.

6.2.2. Etapa I: Juego de Elección de Precios

En la primera etapa las decisiones que tomadas en la segunda etapa son de dominio público, es decir, los SPs anticipan las decisiones de los usuarios y su evolución en el tiempo, lo cual fue estudiado en la segunda etapa como se muestra en la Fig. 6.1; en base a ello los SPs determinarán el precio que deben anunciar a lo largo del horizonte de tiempo fijo planteado.

Para analizar la toma de decisión formulamos un juego de Stackelberg donde el MSP es el líder y el seguidor (SSP) determina su mejor respuesta p_s^* en respuesta a la acción del líder (p_m^*). Los jugadores conocen el vector de estados iniciales de la población. Se formula el siguiente juego para conocer las estrategias de equilibrio de los SPs:

- *Tipo de Juego:* Juego de Stackelberg con restricciones.
- *Jugadores:* El MSP y el SSP.
- *Estrategias:* Todos los posibles precios, es decir, $p_m \geq 0$ y $p_s \geq 0$.
- *Objetivo del SSP:* Maximizar los beneficios dada la estrategia de precio del MSP y el comportamiento evolutivo de la población, es decir

$$\begin{aligned}
 p_s^* &= \arg \max_{p_s \geq 0} \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_s(p_s, x_s(p_m, p_s), t)] dt, \\
 \text{s. t. } \dot{x}_{s_i}(t) &= \delta x_{s_i}(t) [u_{s_i}(p_s, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)], \\
 x_{m_i}(0) &= x_{m_i0}, \\
 x_{s_i}(0) &= x_{s_i0},
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

donde x_{m_i0} y x_{s_i0} son los estados iniciales de la población los cuales son conocidos por los SPs.

- *Objetivo del MSP:* Maximizar los beneficios dada la estrategia en equilibrio que tomará el SSP y el comportamiento evolutivo de la

población, es decir

$$\begin{aligned}
 p_m^* &= \arg \max_{p_m \geq 0} \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_m(p_m, x_m(p_m, p_s^*), t)] dt, \\
 \text{s. t. } p_s^* &= \arg \max_{p_s \geq 0} \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_s(p_s, x_s(p_m, p_s), t)] dt, \quad (6.11) \\
 \dot{x}_{m_i}(t) &= \delta x_{m_i}(t) [u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s^*, r_i, t)], \\
 x_{m_i}(0) &= x_{m_i0}, \\
 x_{s_i}(0) &= x_{s_i0},
 \end{aligned}$$

El juego de Stackelberg se plantea como dos problemas de programación no-lineal con restricciones dados en las expresiones (6.11) y (6.10), la obtención de los precios en equilibrio de los SPs se realiza de la siguiente manera:

1. Primero el SSP decide su mejor respuesta dada la elección del MSP para las posibles estrategias del MSP ($BR(p_m)$), para ello se resuelve el problema de programación no-lineal con restricciones dados en las expresiones (6.10) utilizando la función *fmincon* de MATLAB [58] de la misma manera que en el apartado 4.3.2. La obtención de la $BR(p_m)$ se muestra en el algoritmo 1 basandose en las funciones discretizadas. La discretización de las funciones se muestran en el Apéndice D.
2. Posteriormente el MSP conociendo la mejor respuesta del SSP ($BR(p_m)$) determina sus beneficios sobre la curva de mejor respuesta del SSP, en este capítulo la obtención de los beneficios del MSP se realiza mediante las líneas isobeneficios del MSP que representan la combinación de p_m y p_s que generan un nivel constante de beneficios del MSP.
3. El equilibrio de Stackelberg se obtiene en el punto sobre la curva de mejor respuesta del SSP donde los beneficios del MSP son máximos, es decir, el MSP conociendo $BR(p_m)$ elige el precio que maximiza Π_m , en el equilibrio la $BR(p_m)$.

Algorithm 1 Obtención de la mejor respuesta del SSP ($BR(p_m)$)

for ($p_m = 0 : N/B_m ; ;$)% N/B_m es el precio máximo que anuncia el MSP.

- Se establecen las restricciones en la función *@confunSSP*

- $x_{m_i}(0) = x_{m_i0}$
- $x_{s_i}(0) = x_{s_i0}$
- $p_s(t) = p_s \forall t \in \mathcal{T}$

- Se crea la función a maximizar (F) en la función *@objfunSSP*.

$$f = \int_0^l e^{-\rho t} \pi_s(p_s, x_s(p_m, p_s), t) dt$$

$$\text{s. t. } \dot{x}_{s_i}(t) = \delta x_{s_i}(t) [u_{s_i}(p_s, t) - U_i(\theta_{m_i}^n, p_m, p_s, r_i, t)],$$

$$x_{m_i}(0) = x_{m_i0},$$

$$x_{s_i}(0) = x_{s_i0},$$

- Donde $F = -f$, porque la función *fmincon* determina el mínimo de la función objetivo.
- Se crea una función principal donde se llama a las funciones:

- $[Ps, fval] = fmincon(@objfunSSP, x0, [], [], [], [], Psmín, Psmáx, @confunSSP, opt, h, Tfinal, Bm, PM, THETA, K);$, donde $Psmín$ y $Psmáx$ son los valores máximos y mínimos que puede tomar p_s , h es el paso, $T = Tfinal$, $THETA = [\theta_{m_1}, \dots, \theta_{m_K}]$ y *opt* define las opciones de optimización, incluyendo la tolerancia en el vector y la tolerancia en los valores de la función, estas tolerancias se utilizan para determinar la convergencia del algoritmo..

end

- En cada siglo del *For* la función principal devuelve: $BR(p_m)$ y los beneficios del SSP dada la mejor respuesta $fval(p_m)$

Tabla 6.1: Parámetros del escenario

Parámetros	Valores
N	400 usuarios
A_m	10000 m ²
B_m	60 MHz
δ	6,8
h	0.01

6.3. Resultados

En esta sección se presentan algunos resultados con el fin de ilustrar cómo evoluciona la población, como se obtuvieron un par de precios en equilibrio y las capacidades del modelo. Se analiza el comportamiento evolutivo de los usuarios, el efecto de la tasa de cobertura del SSP, la eficiencia espectral MSP y el ancho de banda disponible en el sistema del SSP, mediante los indicadores de las tasas de población final, los precios, los beneficios de los usuarios y los beneficios de los SPs.

Los valores de los parámetros del sistema son los que se muestran en la Tabla 6.1.

6.3.1. Resolución numérica

La variación en las decisiones del modelo evolutivo de la población de usuarios repercute en la decisión de precio del MSP, por ello se resuelve los problemas de optimización no-lineal con restricciones dados en las expresiones (6.11) y (6.10) utilizando la función "fminconz con estos precios se obtienen los resultados del escenario. Para observar el efecto que tiene los parámetros sobre las decisiones de los agentes del sistema se han variado

la eficiencia espectral, los recursos del SSP y la cobertura del SSP y se ha realizado la resolución numérica del escenario, los resultados se muestran a continuación.

6.3.2. Comportamiento evolutivo de la población

En este apartado se evalúa el comportamiento evolutivo de la población que se propuso en el apartado 6.2.1 en una s_i donde se percibe una eficiencia espectral de $\theta_{m_i} = 0,7 \text{bits/s/Hz}$, el ancho de banda disponible para el SSP es de $B_{s_i} = 0,52 \text{MHz}$ y el área de cobertura de la s_i es de $A_{s_i} = 100 \text{m}^2$, por lo tanto se encuentran 10 usuarios en el área de cobertura y los precios de los SPs son $p_m = 4,15 \text{ m.u.}$ y $p_s = 6 \text{ m.u.}$, estos precios no son los del equilibrio, se utilizan de parámetro para evaluar el comportamiento evolutivo de la población dados estos parámetros.

En la Figura 6.2 se muestran los vectores de velocidad de los estados de la población a medida que avanza el tiempo dados los estado inicial de la población, se puede ver en la figura que no importa cuáles sean los estado inicial de la población ya que la trayectorias serán absorbidas por la ESS, además se puede observar que cuanto más lejos se encuentre la población de la ESS mayor es el vector de velocidad hacia la ESS.

En las Figuras 6.3 y 6.4 se muestran cómo evoluciona la población cuando avanza el tiempo. En la Figura 6.3 la población parte de un estado inicial de $x_m(0) = 0,1$, $x_s(0) = 0,1$ y $x_o(0) = 0,8$, se observa que la población evoluciona rápidamente a la estrategia de suscribir el servicio ($x_o(13) = 0$) posteriormente los usuarios que suscribieron con el SSP ven que obtienen mayor utilidad cambiando de estrategia al MSP y evolucionan hasta que el MSP se quede sin recursos para atender a los usuarios, el estado final de la población obtiene en la Tabla C.1 puesto que $p_s > p_m/\theta_{m_i}$ y los SPs se encuentran en alta oferta las ESS son:

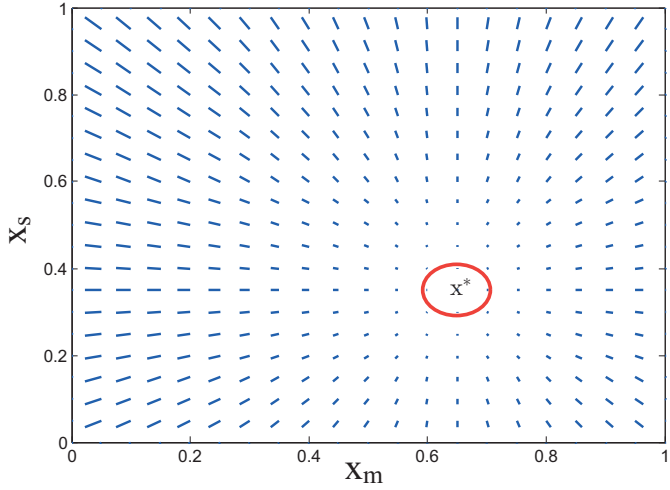


Figura 6.2: Solución estacionaria

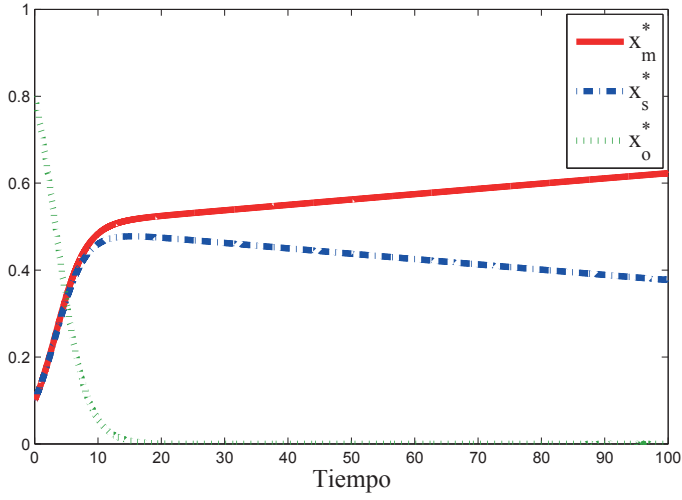


Figura 6.3: Evolución de la población con el tiempo

$$x_{m_i}^* = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i} = 0,6225$$

$$x_{s_i}^* = 1 - \frac{p_m B_{m_i}}{N_i} = 0,3775$$

$$x_{o_i}^* = 0$$

En la Figura 6.4 la población parte de un estado inicial de $x_m(0) = 0,4$, $x_s(0) = 0,6$ y $x_o(0) = 0$, como la estrategia inicial de todos los usuarios es suscribir ($x_o(0) = 0$) la población evoluciona más despacio y debido a que el escenario se evalúa en un tiempo relativamente corto la población no alcanza a llegar a la ESS.

En la Figura 6.5 la población parte de un estado inicial de $x_m(0) = 0,1$, $x_s(0) = 0,1$ y $x_o(0) = 0,8$ pero los SPs anuncian unos precios menores, en este caso $p_m = 2$ y $p_s = 3$, se observa que la población evoluciona rápidamente a la estrategia de suscribir el servicio pero los SPs tienen limitaciones de recursos. El estado final de la población se obtiene en la Tabla C.1 puesto que $p_s > p_m/\theta_{m_i}$ y los SPs se encuentran en baja oferta las ESS son:

$$x_{m_i}^* = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i} = 0,3$$

$$x_{s_i}^* = 1 - \frac{p_s B_{s_i}}{N_i} = 0,39$$

$$x_{o_i}^* = 1 - x_{m_i}^* - x_{s_i}^* = 0,31$$

6.3.3. Estrategias en equilibrio de los proveedores de servicios

A continuación se evalúa un escenario y en dicho escenario se obtienen los precios en equilibrio que anuncian los SPs, tal como se propuso en el apartado 6.2.2. Los parámetros del escenario están dados en la Tabla 6.1, además la cobertura del SSP es del 100%, es decir $A_s/A_m = 1$, los recursos

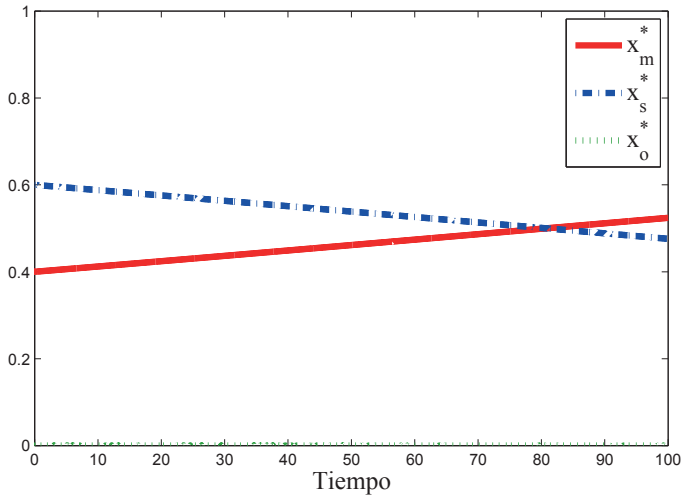


Figura 6.4: Evolución de la población con el tiempo

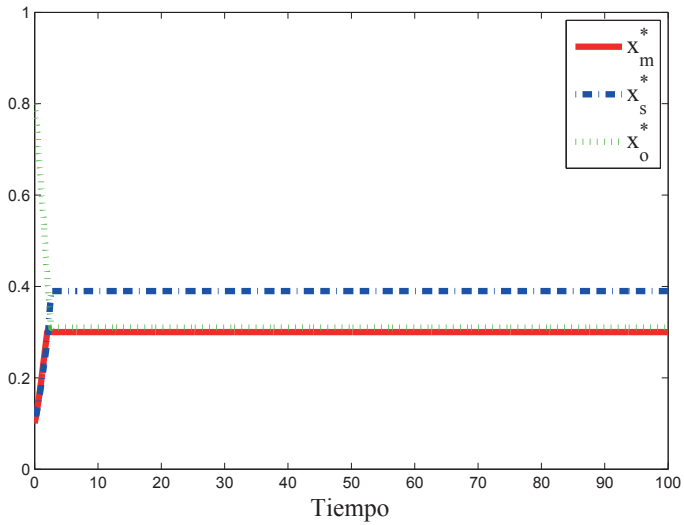


Figura 6.5: Evolución de la población con el tiempo

total del SSP son $B_s = 52\text{MHz}$ y en media los usuarios perciben una eficiencia espectral de $\bar{\theta}_m = 0,8\text{bits/s/Hz}$.

En la figura 6.6 y 6.7 se muestra la curva de mejor respuesta del SSP y las líneas isobeneficios del MSP para un rango de precios dados. En la figura 6.6 se evaluó un escenario hasta $T = 10$ y en figura 6.7 se evaluó un escenario hasta $T = 100$ comparando el comportamiento de los SPs en estos dos casos se observa que:

- Cuando el tiempo durante el cual se avalúa el escenario es alto ($T = 100$) la $BR(p_m)$ es:
 - Si $p_m < 3,2$ la $BR(p_m)$ es anunciar un precio tal que cubra a toda la demanda, es decir, $p_s(p_m) = (N - p_m B_m) / B_s$.
 - Si $p_m > 3,2$ la $BR(p_m)$ es anunciar un precio tal que los usuarios prefieran suscribir con él, es decir, $p_s < p_m / \bar{\theta}_m$, hasta converger al precio de monopolio, es decir, $p_s = N / B_s = 7,7\text{m.u.}$

Este comportamiento es similar al modelo estático.

- Cuando el tiempo durante el cual se avalúa el escenario es bajo ($T = 10$) la mejor respuesta del SSP ($BR(p_m)$) es anunciar un precio un poco más bajo que en el modelo estático y de esta manera los usuarios aprenderán más rápido las estrategias.
- Se observa que los precios de equilibrio si el tiempo durante el cual se evalúa el escenario es bajo ($T = 10$) o alto $T = 100$ los precios de equilibrio son muy similares y tiende a los equilibrio del modelo estáticos.

6.3.4. Efecto de la tasa de cobertura del SSP

Se evalúa el efecto de la tasa de cobertura del SSP (A_s / A_m) en un escenario con los parámetros dados en la Tabla 6.1, el ancho de banda disponible para

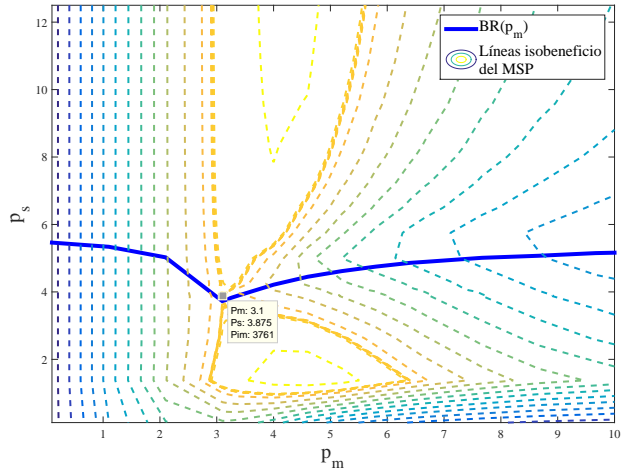


Figura 6.6: Equilibrio de precios para $T = 10$

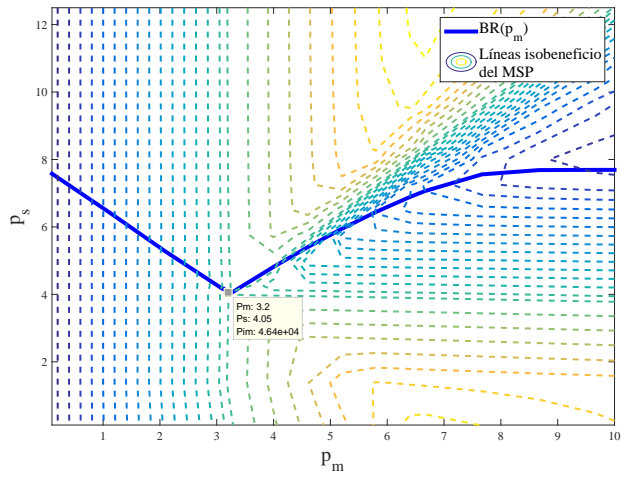


Figura 6.7: Equilibrio de precios para $T = 100$

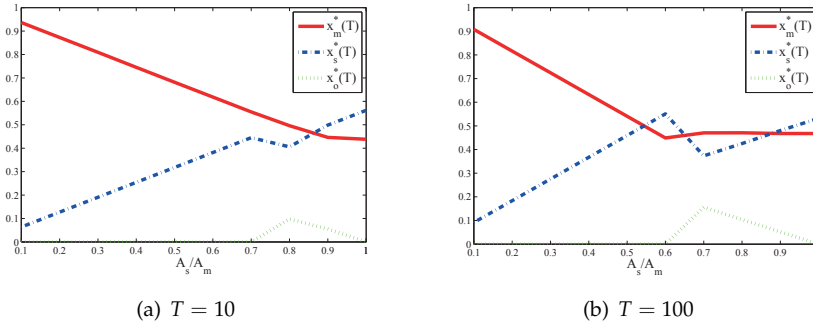
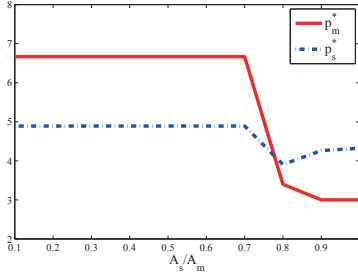


Figura 6.8: Fracciones de la población en función de A_s/A_m .

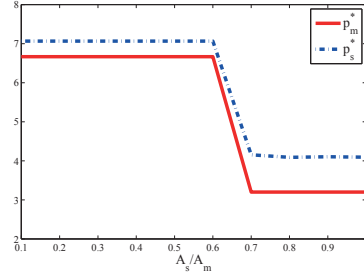
el SSP es $B_{s_i} = B_s = 0,52$ MHz en cada Small cells de tamaño $A_{s_i} = 100m^2$ y la eficiencia espectral MSP es $\theta_{m_i} = \theta_m = 0,8$ bits/s/Hz en todas las Small cells.

Las figuras 6.8, 6.9 y 6.10 muestran el efecto de la tasa de cobertura del SSP (A_s/A_m) cuando se evalúa el escenario con $T = \{10, 100\}$ sobre las estado final de la población, ($x_m^*(T)$, $x_s^*(T)$ y $x_o^*(T)$), el equilibrio de precios, (p_m^* y p_s^*) y el UW. En las figuras se ve claramente que existen dos regiones según la tasa de cobertura A_s/A_m . Cuando A_s/A_m está por debajo de cierto umbral, el sistema muestra un comportamiento diferente a cuando A_s/A_m está por encima de ese umbral. Para los valores actuales de los parámetros de configuración, el umbral que separa las dos regiones es de $A_s/A_m \approx 0,7$ cuando se evalúa en $T = 10$ y $A_s/A_m \approx 0,6$ cuando se evalúa en $T = 100$.

El comportamiento de los SSP y de los usuarios es similar al evaluado en el modelo estático, de tal manera que cuando la relación de cobertura es baja (por debajo del umbral mencionado), los SPs anuncian un precio constante y son los mismos que en el modelo de monopolio. De tal manera que si la cobertura de SSP es baja, la estrategia del MSP es no competir, es decir, se comporta como si no existiera el SSP. En esta situación, todos los usuarios que se suscriban a uno de los dos SP y las proporciones de población de ambos SP varían linealmente con la tasa de cobertura y con la transferencia gradual

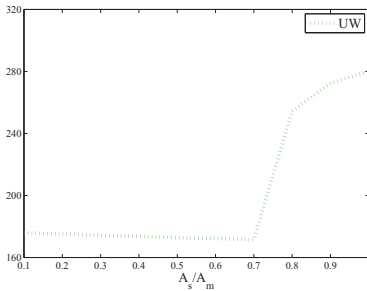


(a) $T = 10$

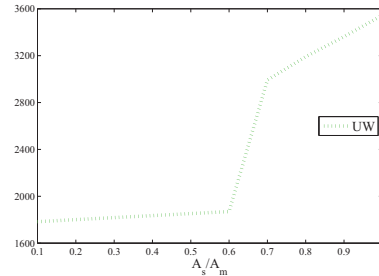


(b) $T = 100$

Figura 6.9: Precios en función de A_s / A_m .



(a) $T = 10$



(b) $T = 100$

Figura 6.10: UW en función de A_s / A_m .

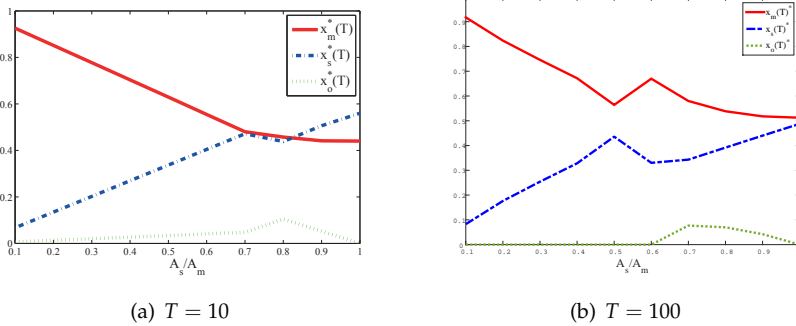
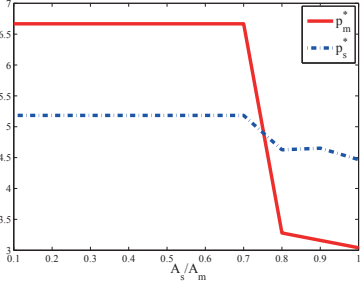


Figura 6.11: Frac. de población en función de $\frac{A_s}{A_m}$ con θ_i s heterogéneos.

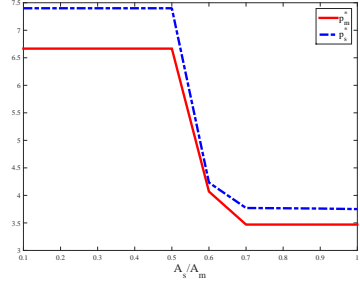
de los usuarios de la MSP al SSP cuando la fracción de cobertura aumenta. Como resultado de esta transferencia de usuarios, el beneficio del MSP se transfiere gradualmente al SSP, mientras que la UW se mantiene constante. Cuando el índice de cobertura supera el umbral, el comportamiento de los SPs cambia abruptamente, puesto los SPs deciden competir. Los precios de competencia son más bajos que los precios de monopolio, esto hace que aumente la demanda de ancho de banda, lo que hace que algunos usuarios no puedan suscribir porque la demanda supera el ancho de banda disponible, y por lo tanto los beneficios bajan. La competencia favorece a los usuarios ya que aumenta el UW y luego sigue aumentando gradualmente a medida que aumenta el índice de cobertura.

La gran diferencia con el modelo estático es que la población evoluciona de un estado inicial y los usuarios van cambiando de estrategia hasta llegar a la ESS, como vemos en el caso de $T = 10$ dicha estrategia no es alcanzada para todas las coberturas estudiadas y esto hace que los resultados obtenidos sean diferentes al modelo estático, ya que el umbral en dicho escenario se encuentra en $A_s/A_m = 0,49$, en media los beneficios de los SPs y el UW es menor porque la población parte de usuarios del 80% de los usuarios que no suscriben el servicio.

Los resultados anteriores corresponden a un escenario homogéneo en

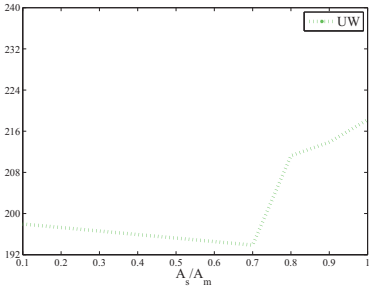


(a) $T = 10$

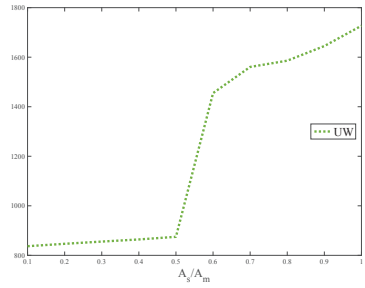


(b) $T = 100$

Figura 6.12: Precios en función de A_s/A_m con θ_i s heterogéneos.



(a) $T = 10$



(b) $T = 100$

Figura 6.13: UW en función de A_s/A_m con θ_i s heterogéneos.

el que se obtiene la misma eficacia espectral (0,8 bits/s/Hz) en todas las Small cells. A continuación, en las Figuras 6.11, 6.12 y 6.13 se examina el efecto de una distribución heterogénea de la eficiencia espectral, para ello, las eficiencias espectrales obtenidas por el MSP en las Small cells heterogéneas son $\{\theta_{m_i}\} = \{0,9, 0,8, 0,7, 0,6, 0,49\}$.

En este caso, se pueden observar varios umbrales para A_s/A_m . El más bajo de ellos, que en este caso es de $A_s/A_m \approx 0,6$, juega un papel equivalente al del umbral único del escenario homogénea, porque el MSP juega una estrategia monopolista y los usuarios se transfieren gradualmente desde el MSP al SSP cuando la fracción de cobertura aumenta. Al igual que en el caso del escenario homogéneo los resultados obtenidos se comportan de manera similar al modelo estático (apartado 5.3.1) y en media los beneficios de los SPs y el UW es menor porque la población parte de usuarios del 80 % de los usuarios que no suscriben el servicio.

6.3.5. Efecto de la eficiencia espectral

Las Figuras 6.14, 6.15 y 6.16 muestran el efecto que tiene la eficiencia espectral obtenida con el MSP en cada una de las Small cells (θ_m) sobre el escenario evaluando las fracciones de las poblaciones en equilibrio ($x_m^*(T)$, $x_s^*(T)$ y $x_o^*(T)$), el equilibrio de precios (p_m^* y p_s^*) y el UW para dos tiempos durante el cual se evalúo el escenario, $T = \{10, 100\}$. Los resultados se obtuvieron para los siguientes parámetros en cada una de las Small cells: hay $N_i = 80$ usuarios, todas las Small cells perciben la misma eficiencia espectral, el ancho de banda disponible para el SSP es $B_{s_i} = 0,52$ MHz en todas las Small cells, y el radio de cobertura del SSP es $A_s/A_m = 1$.

Se puede observar que, cuando θ_m es bajo, el precio del SSP es alto y el precio del MSP es bajo, y cuando θ_m aumenta, el MSP aumenta su precio, y la SSP baja el precio, además cuando θ_m aumenta los usuarios y los beneficios son transferidos del SSP al MSP y la UW aumenta a medida que θ_m aumenta. Este comportamiento es similar al modelo estático (apartado 5.3.2), y cuanto

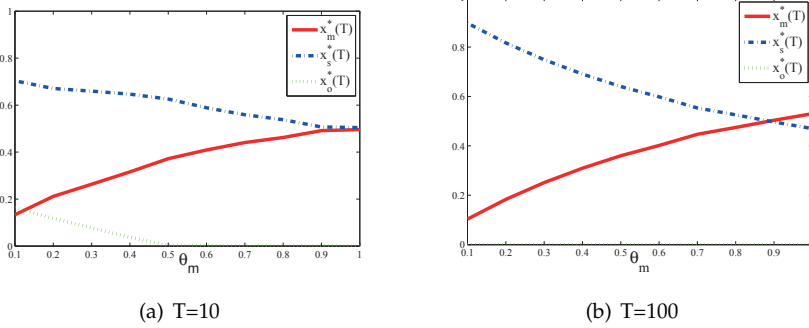


Figura 6.14: Fracciones de la población en función de θ_m .

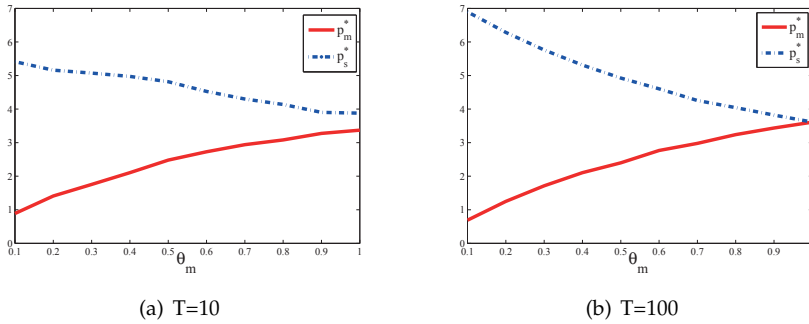


Figura 6.15: Precios en función de θ_m .

mayor sea el tiempo durante el cual se evalúa el escenario más similares son los resultados ya que las estrategias de los usuarios son estables.

6.3.6. Efecto de ancho de banda disponible del SSP

En las Figuras 6.17, 6.18 y 6.19 se muestra el efecto que tiene el ancho de banda disponible del SSP (B_s) sobre el escenario evaluando las fracciones de las poblaciones en equilibrio ($x_m^*(T)$, $x_s^*(T)$ y $x_o^*(T)$), el equilibrio de precios (p_m^* y p_s^*) y el UW para dos tiempos durante el cual se evalúo el escenario,

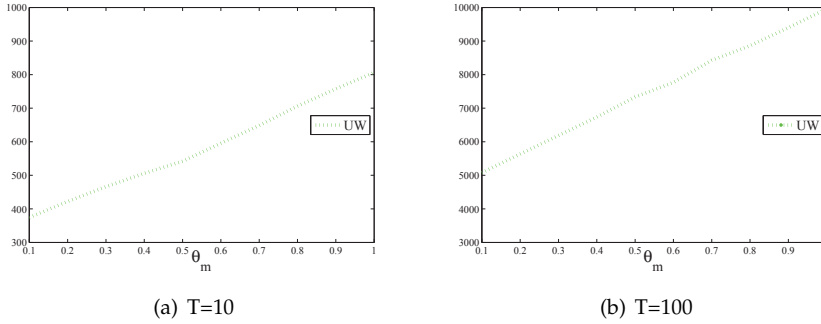


Figura 6.16: UW en función de θ_m .

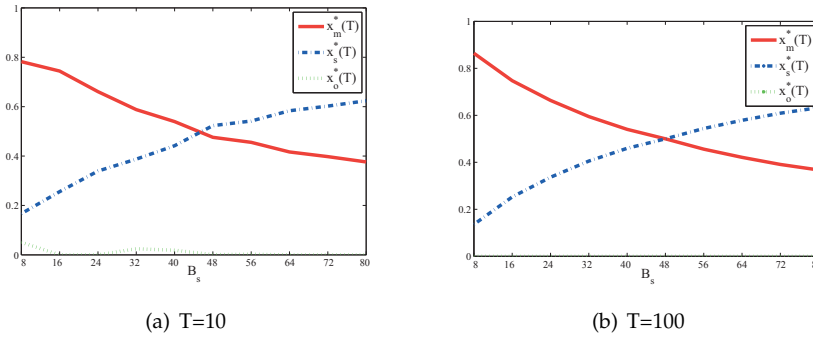


Figura 6.17: Fracciones de la población en función de B_s .

$T = \{10, 100\}$. Se supone que el ancho de banda disponible del SSP es el mismo en todas las Small cells ($B_{s_i} = B_s$). Los resultados se obtuvieron para los siguientes parámetros en cada una de las Small cells: hay $N_i = 80$ usuarios, la eficiencia espectral es $\theta_{m_i} = \theta_m = 0,8$ bits/s/Hz y la relación de cobertura es $A_s/A_m = 1$.

En este caso, los resultados obtenidos muestran que cuanto mayor es B_s más oportunidades tiene el SSP de competir, por lo tanto, cuando B_s aumenta, el SSP reduce el precio y los usuarios se transfieren gradualmente desde el MSP al SSP. Los beneficios MSP disminuye claramente cuando

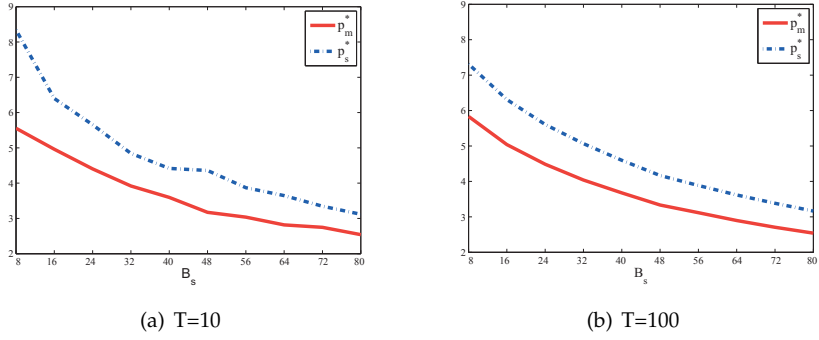


Figura 6.18: Precios en función de B_s .

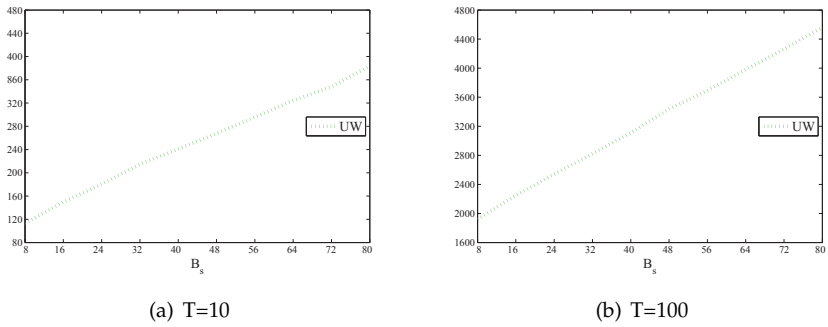


Figura 6.19: UW en función de B_s .

B_s aumenta, ya que $x_m^*(T)$ disminuye. Al igual que antes, la competencia favorece a los usuarios, y al UW que aumenta a medida que B_s aumenta. El comportamiento de los SPs es similar al apartado 5.3.3 y cuando más tiempo estén los usuarios en la ESS más similar se comportan los escenarios.

6.4. Conclusiones

Nosotros proponemos un modelo evolutivo de la población de usuarios con el tiempo en un mercado de comunicaciones móviles donde se implementa la tecnología de Small cells y lo hace mediante la creación de una red de Small cells que le permita tener mayores recursos y mejor eficiencia espectral en el área estudiada. Los resultados obtenidos muestran que:

- Sin importar el estado inicial de la población el SSP siempre tiene un incentivo económico para entrar en el mercado desde que tenga recursos y cuanto mayor sean los recursos del SSP y cuanto menor sea la eficiencia espectral que perciben los usuarios en las s_i , mayores es el beneficio del SSP.
- Los usuarios adaptan su estrategia en cada instante de tiempo hasta llegar a la estrategia evolutivamente estable, en dicha estrategia los usuarios obtienen el máximo de utilidad y se observa que la entrada del SSP beneficia a los usuarios ya que los UW es mayor al obtenido en el mercado de monopolio.
- En comparación con el modelo estático se puede concluir que si el estado de la población es la estrategia evolutivamente estable no importa el tiempo ni la tasa de aprendizaje de los usuarios ya que los resultados obtenidos serán los mismo, porque el escenario puede ser visto como un escenario estacionario donde los usuarios no tienen incentivo para cambiar de estrategias.
- En comparación con el modelo estático se puede concluir que si el tiempo durante el cual se evalúa el escenario es grande y la tasa de

aprendizaje es grande, los resultados obtenidos son muy similares con el modelo estático ya que la población alcanza la estrategia evolutivamente estable en una fracción corta de tiempo con relación al tiempo total durante el que se evalúa el escenario y esto hace que los resultados que son diferentes (donde la población aún no llega a la estrategia evolutivamente estable) se desprecien con los demás resultados.

Capítulo 7

Competencia entre proveedores de servicio. Modelo dinámico.

En este capítulo se analiza el modelo de comunicaciones móviles dinámico descrito en el capítulo 3, donde los usuarios y los proveedores de servicios toman sus decisiones en base a las decisiones tomadas con anterioridad y a las características del escenario las cuales pueden variar en cada instante del tiempo.

Dicho modelo permitirá conocer el comportamiento evolutivo de los usuarios y los precios dinámicos que anuncian los proveedores de servicios, además de conocer el comportamiento de ellos cuando los recursos del SSP varían y determinar la influencia que tiene la variación de los recursos en cada instante de tiempo en las decisiones en equilibrio de los agentes del escenario.

Este capítulo se divide de la siguiente manera, primero se describen las características del escenario, luego se definen los tipos de juegos que se desarrollan en cada una de las etapa para luego solucionar las etapas, y por último se resuelve numéricamente unos escenarios para conocer cuál es el comportamiento de los agentes y cómo afecta cada parámetro al escenario.

7.1. Características del Escenario

El escenario evaluado es el que mismo que en el Capítulo 3, pero en este caso se estudia durante un horizonte de tiempo finito durante el cual los usuarios y los SPs pueden tomar sus decisiones de manera dinámica en cada instante de tiempo, es decir, los usuarios y los SPs pueden cambiar de decisión durante el horizonte de tiempo que es estudiado el escenario.

7.1.1. Los usuarios

Los usuarios interactúan entre las diferentes estrategias durante el periodo de tiempo de estudio $[0, T]$, teniendo en cuenta que los precios que anuncian los SPs varían con el tiempo. Las utilidades percibidas en este escenario están dadas como

$$u_m^{n*}(\theta_m^n, p_m, t) = \frac{\theta_m^n}{p_m(t)} e^{-1}, \quad (7.1)$$

$$u_s^{n*}(p_s, t) = \frac{1}{p_s(t)} e^{-1}, \quad (7.2)$$

$$u_o^{n*} = 0, \quad (7.3)$$

dado que suscriben el ancho de banda óptimo

$$b_m^{n*}(p_m, t) = \frac{1}{p_m(t)}, \quad (7.4)$$

$$b_s^{n*}(p_s, t) = \frac{1}{p_s(t)}, \quad (7.5)$$

$$b_o^{n*} = 0. \quad (7.6)$$

Las decisiones óptimas de los usuarios en este capítulo están dadas por el comportamiento evolutivo de sus estrategias, es decir, $x_m^*(t)$, $x_s^*(t)$ y $x_o^*(t)$.

7.1.2. Los Proveedores de Servicios

Los SPs compiten entre sí por los usuarios de comunicaciones móviles y el factor de control que tienen es el precio el cual puede variar en cada instante de tiempo, por lo tanto, los SPs deben elegir el camino de acción durante el tiempo de estudio $[0, T]$, es decir los SPs deben elegir un precio en cada instante de tiempo.

Anteriormente se definieron los beneficios de los SPs en (3.21) y (3.22) y en este capítulo reescribimos los beneficios como

$$\Pi_m(p_m, x_m, t) = \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_m(p_m, x_m, t)] dt \quad (7.7)$$

$$\Pi_s(p_s, x_s, t) = \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_s(p_s, x_s, t)] dt. \quad (7.8)$$

La competencia determina el mejor camino de acción, es decir, $p_m^*(t)$ y $p_s^*(t)$, teniendo en cuenta los beneficios obtenidos en (7.7) y (7.8).

7.2. Teoría de Juegos para la toma de decisiones óptimas

En este escenario se desarrolla el juego de dos etapas mostrado en la Fig. 7.1. En la primera etapa los SPs juegan un juego diferencial de Stackelberg utilizando un enlace abierto (Open-loop) con horizonte finito $[0, T]$ [46], donde el MSP es el líder en la elección de precio y el SSP es el seguidor. En la segunda etapa al igual que en el apartado 6.2.1 los usuarios juegan un juego evolutivo de suscripción [47] para elegir qué SPs y cuánto ancho de banda suscribir.

El juego por etapas se resuelve por inducción hacia atrás para garantizar el equilibrio perfecto en subjuegos.

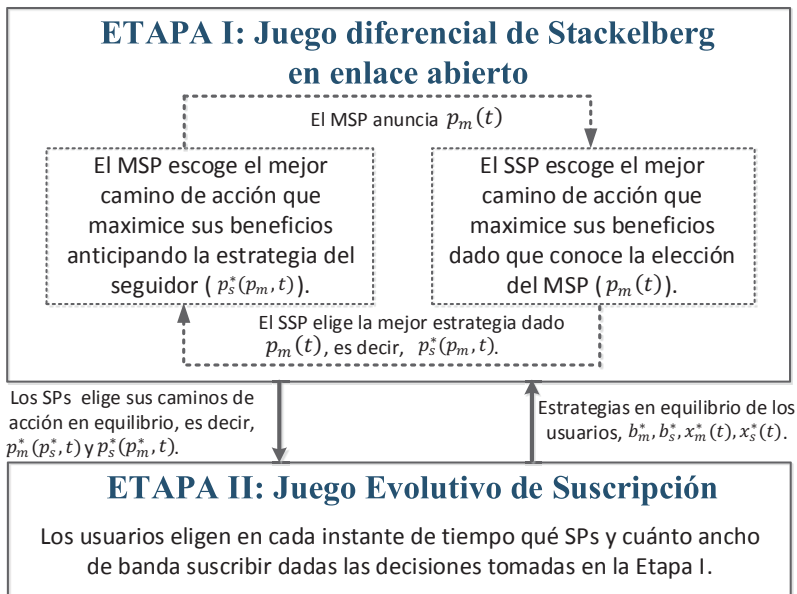


Figura 7.1: Estructura del juego

7.2.1. Etapa II: Juego Evolutivo de Suscripción

La Etapa II fue resuelta en el apartado 6.2.1, donde se obtuvo la evolución de la población. En este escenario se tiene en cuenta que los precios varían con el tiempo, aplicando las mismas consideraciones se obtiene que la población evoluciona según el sistema de ecuaciones diferenciales descrito a continuación

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{If} \left(x_{m_i} < \frac{B_{m_i} p_m(t)}{N_i} \quad \& \quad x_{s_i} < \frac{B_{s_i}(t) p_s(t)}{N_i} \right) \\
 & \quad \dot{x}_{m_i}(t) = \delta x_{m_i}(t) [u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)], \\
 & \quad \dot{x}_{s_i}(t) = \delta x_{s_i}(t) [u_{s_i}(p_s, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)], \\
 & \quad \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t) [-U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)]. \\
 & \mathbf{Elseif} \left(x_{m_i} < \frac{B_{m_i} p_m(t)}{N_i} \right) \\
 & \quad \dot{x}_{m_i}(t) = \delta x_{m_i}(t) [u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, t)], \\
 & \quad \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t) [-U_i(\theta_m^n, p_m, t)]. \tag{7.9} \\
 & \mathbf{Elseif} \left(x_{s_i} < \frac{B_{s_i}(t) p_s(t)}{N_i} \right) \\
 & \quad \dot{x}_{s_i}(t) = \delta x_{s_i}(t) [u_{s_i}(p_s, t) - U_i(p_s, r_i, t)], \\
 & \quad \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t) [-U_i(p_s, r_i, t)]. \\
 & \mathbf{Else} \\
 & \quad \dot{x}_{m_i}(t) = 0, \\
 & \quad \dot{x}_{s_i}(t) = 0, \\
 & \quad \dot{x}_{o_i}(t) = 0. \\
 & \mathbf{End}
 \end{aligned}$$

donde $u_{m_i}^*$ y $u_{s_i}^*$ están dadas en (7.1) y (7.2) y U_i es la utilidad media por un usuario en un instante de tiempo

$$U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t) = x_{m_i}(t) u_{m_i}^*(\theta_m^n, p_m, t) + x_{s_i}(t) u_{s_i}^*(p_s, r_i, t) + x_{o_i}(t) u_{o_i}^*.$$

En el Apéndice C se demuestran los estados estacionarios y las ESS de la

población en un modelo evolutivo de la población de usuarios, en el modelo dinámico es similar pero teniendo en cuenta que los precios dependen del tiempo.

7.2.2. Etapa I: Juego de Elección de Precios

En la primera etapa es de dominio público el comportamiento evolutivo de la población dado en la segunda etapa como se muestra en la Fig. 7.1; en base a ello los SPs determinarán sus caminos de acción a través de sus factores de control, es decir, $p_m^*(t)$ y $p_s^*(t)$.

Para analizar la toma de decisión formulamos un juego diferencial de Stackelberg con una estrategia de control en enlace abierto, por lo tanto el juego diferencial que determina las estrategias de precios de los proveedores de servicios no tiene una retroalimentación del estado actual de la población, ni ajusta la evolución en las decisiones a unos parámetros que se quieran conseguir ya que los proveedores son egoístas en sus decisiones, por lo tanto, la salida del sistema solo dependen del estado inicial de la población el cual es conocido por los SPs.

Se formula el siguiente juego para conocer el camino de acción de los SPs

- *Tipo de Juego:* Juego diferencial de Stackelberg en enlace abierto.
- *Jugadores:* MSP es el líder y el SSP el seguidor.
- *Estrategias:* Todas las posibles elecciones de precios, es decir, $p_m(t) \geq 0$ y $p_s(t) \geq 0$.
- *Objetivo del SSP:* Maximizar los beneficios dado el camino de acción del

MSP y el comportamiento evolutivo de la población, es decir

$$\begin{aligned}
 p_s^*(t) &= \arg \max_{p_s(t) \geq 0} \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_s(p_s, x_s(p_m, p_s), t)] dt, \\
 \text{s. t. } \dot{x}_{s_i}(t) &= \delta x_{s_i}(t) [u_{s_i}(p_s, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)], \\
 x_{m_i}(0) &= x_{m_i,0}, \\
 x_{s_i}(0) &= x_{s_i,0}.
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

- *Objetivo del MSP:* Maximizar los beneficios dado el camino de acción en equilibrio que tomará el SSP y el comportamiento evolutivo de la población, es decir

$$\begin{aligned}
 p_m^*(t) &= \arg \max_{p_m(t) \geq 0} \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_m(p_m, x_m(p_m, p_s^*), t)] dt, \\
 \text{s. t. } p_s^* &= \arg \max_{p_s \geq 0} \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_s(p_s, x_s(p_m, p_s), t)] dt, \\
 \dot{x}_{m_i}(t) &= \delta x_{m_i}(t) [u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s^*, r_i, t)], \\
 x_{m_i}(0) &= x_{m_i,0}, \\
 x_{s_i}(0) &= x_{s_i,0}.
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

El juego diferencial de Stackelberg en enlace abierto se plantea como dos problemas de control óptimo con restricciones, los cuales se describieron en las expresiones (7.11) y (7.10), las cuales tienen la forma de Lagrange. Para resolver los problemas de control óptimo de precios con restricciones se utiliza el Principio del máximo de Pontryagin [56] [57], el cual nos proporciona las condiciones de optimización necesaria para el problema de control óptimo ya que tiene en cuenta los efectos que tiene la elección del precio por parte de los SPs y genera: un primero efecto inmediato a través del valor instantáneo de los beneficios de los SPs y un segundo efecto al nivel de cambios de la variable de estado de la población.

Para resolver los problema de control óptimo dado en las Expresiones (7.11) y (7.10) se plantean las función homóloga al problema de Lagrange, las cuales se conoce como la función Hamiltoniana, y como es un juego de

Stackelberg, se utiliza la inducción hacia atrás, por ello primero se describe la función Hamiltoniana del seguidor y se denota como

$$\mathcal{H}_s(p_m, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{s_j}, t) = \Pi_s(p_m, x_m, t) + \sum_{i=0}^K [\lambda_{s_{s_i}}(t) \dot{x}_{s_i}(t) + \lambda_{s_{m_i}}(t) \dot{x}_{m_i}(t) + \lambda_{s_{o_i}}(t) \dot{x}_{o_i}(t)],$$

donde $\lambda_{s_j}(t)$ es la variable de coestado asociado con el estado en el estado j en el tiempo cuando se mueve a lo largo de la trayectoria óptima, donde j son todas las estrategias que tienen los usuarios.

Aplicando el Principio del máximo de Pontryagin en nuestro caso, se define $p_s^*(t)$ como las estrategias de control óptima del problema original (Expresión (7.10)) que también debe maximizar la correspondiente función Hamiltoniana [56], es decir

$$p_s^*(t) = \arg \max \quad \mathcal{H}_s(p_m, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{s_j}, t) \quad (7.12)$$

desde la expresión (7.12) se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{H}_s(p_m, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{s_j}, t)}{\partial p_s(t)} = 0 \quad (7.13)$$

Sin embargo, (7.13) sólo es óptimo si el vector de multiplicador es definido de manera que refleje el impacto marginal del vector de estado sobre los beneficios del SSP, entonces el vector de multiplicadores debe cumplir que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_s^*(p_m, p_s^*, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{s_j}, t)}{\partial x_j(t)} = -\dot{\lambda}_{s_j}(t) + \rho \lambda_{s_j}(t) \quad (7.14)$$

donde H_s^* es la función hamiltoniana del SSP dado la elección óptima de precio obtenida en (7.13), es decir, $p_s^*(t)$.

Las condiciones necesarias para encontrar las estrategias de control óptima del problema original $p_s^*(t)$ dado en la Expresión (7.10) son (7.13) y (7.16).

En comparación con el SSP, la función de Hamiltoniana del MSP en el juego diferencial de Stackelberg es más compleja ya que tiene en cuenta

la maximización de los beneficios de él, la dinámica de las variables de coestados del MSP y la variación de los coestados para los coestados del SSP. La función de Hamilton para la MSP se define a continuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m(p_m, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{mj}, \lambda_{sj}, \alpha_{sj}, t) = \\ \Pi_m(p_m, x_m, t) + \sum_{i=0}^K [\lambda_{mm_i}(t)\dot{x}_{m_i}(t) + \lambda_{ms_i}(t)\dot{x}_{s_i} + \lambda_{mo_i}(t)\dot{x}_{o_i}(t) + \\ \alpha_{ss_i}(t)\dot{\lambda}_{ss_i}(t) + \alpha_{sm_i}(t)\dot{\lambda}_{sm_i}(t) + \alpha_{so_i}(t)\dot{\lambda}_{so_i}(t)] \end{aligned}$$

donde $\lambda_{mj}(t)$ es la variable de coestato asociado con el estado en el estado j cuando se mueve a lo largo de la trayectoria óptima y α_{sj} es la variable de coestado asociado al efecto de la variación de la población del SSP sobre el MSP.

Aplicando el Principio del máximo de Pontryagin de igual forma que con el SSP se obtienen las siguientes condiciones de optimización necesarias para encontrar las estrategias de control óptima del problema original $p_m^*(t)$

$$\frac{\partial H_m(p_m, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{mj}, \lambda_{sj}, \alpha_{sj}, t)}{\partial p_m(t)} = 0 \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{mj}, \lambda_{sj}, \alpha_{sj}, t)}{\partial x_j(t)} = -\dot{\lambda}_{sj}(t) + \rho\lambda_{sj}(t) \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{mj}, \lambda_{sj}, \alpha_{sj}, t)}{\partial \lambda_{sj}(t)} = -\dot{\alpha}_{sj}(t) + \rho\alpha_{sj}(t) \quad (7.17)$$

El problema de control óptimo de precios dado en las Expresiones (7.11) y (7.10) se resuelve mediante la obtención de $p_m^*(t)$ de (7.15) que depende todos los estados y coestados de las poblaciones.

Este problema presenta la forma de un *two point boundary value problem* (TPBVP) donde se conocen las variables iniciales del estado de la población (\mathbf{x}_0) y las variables finales de los coestados de las población $\lambda_{jj}(T) = 0 \forall j \in i = \{1, 2, \dots, K, m, o\}$ y $\alpha_{sj}(T) = 0 \forall j \in i = \{1, 2, \dots, K, m, o\}$.

El primer paso para resolver este problema es despejar de (7.15) y (7.13) los precios óptimos que deben anunciar los proveedores de servicios,

dichos precios quedan en función del estado de la población (x_m y x_{s_i}) y de los coestados (λ_{mj} , λ_{ij} y α_{sj}) y dichos precios se deben reemplazar en las condiciones de optimización del Principio del máximo de Pontryagin, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{m_i}(t) = \delta x_{m_i}(t)(u_{m_i}(t) - U_i(t)), \\ \dot{x}_{s_i}(t) = \delta x_{s_i}(t)(u_{s_i}(t) - U_i(t)), \\ \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t)(u_{o_i}(t) - U_i(t)), \\ \dot{\lambda}_{ss_i}(t) = \rho \lambda_{ss_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_s^*(p_m, p_s^*, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{sj}, t)}{\partial x_{s_i}(t)}, \\ \dot{\lambda}_{sm_i}(t) = \rho \lambda_{sm_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_s^*(p_m, p_s^*, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{sj}, t)}{\partial x_{m_i}(t)}, \\ \dot{\lambda}_{so_i}(t) = \rho \lambda_{so_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_s^*(p_m, p_s^*, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{sj}, t)}{\partial x_{o_i}(t)}, \\ \dot{\lambda}_{ms_i}(t) = \rho \lambda_{ms_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{mj}, \lambda_{sj}, \alpha_{sj}, t)}{\partial x_{s_i}(t)}, \\ \dot{\lambda}_{mm_i}(t) = \rho \lambda_{mm_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{mj}, \lambda_{sj}, \alpha_{sj}, t)}{\partial x_{m_i}(t)}, \\ \dot{\lambda}_{mo_i}(t) = \rho \lambda_{mo_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{mj}, \lambda_{sj}, \alpha_{sj}, t)}{\partial x_{o_i}(t)}, \\ \dot{\alpha}_{ss_i}(t) = \rho \alpha_{ss_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{mj}, \lambda_{sj}, \alpha_{sj}, t)}{\partial \lambda_{ss_i}(t)}, \\ \dot{\alpha}_{sm_i}(t) = \rho \alpha_{sm_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{mj}, \lambda_{sj}, \alpha_{sj}, t)}{\partial \lambda_{sm_i}(t)}, \\ \dot{\alpha}_{so_i}(t) = \rho \alpha_{so_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{mj}, \lambda_{sj}, \alpha_{sj}, t)}{\partial \lambda_{so_i}(t)}, \end{array} \right. \quad (7.18)$$

Dado que se conocen los estados iniciales de la población ($x_j(0) = x_j0$) y el estado final de los coestados ($\lambda_{sj}(T) = 0$, $\lambda_{mj}(T) = 0$ y $\alpha_{sj}(T) = 0$) se procede a resolver el TPBVP, con el cual se obtienen los vectores óptimos de los estados y coestados a lo largo del horizonte de tiempo, es decir $x_j^*(t)$, $\lambda_{mj}^*(t)$, $\lambda_{sj}^*(t)$ y $\alpha_{sj}^*(t)$ y reemplazando estos vectores óptimos en los precios que se obtuvieron de despejar (7.15) y (7.13) se obtiene los precios en equilibrio que anunciarán los SPs a lo largo del tiempo.

Tabla 7.1: Parámetros del escenario

Parámetros	Valores
N	400 usuarios
A_m	10000 m ²
B_m	60 MHz
K	5
A_{s_i}	2000 m ²
B_s	52 MHz
δ	6,8
T	10
h	0.01

7.3. Resultados

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales dado en (7.18) y los precios de los SPs dados en (7.15) y (7.13) se resuelve en este apartado dos escenarios con el fin de ilustrar el comportamiento evolutivo de la población, la dinámica de los precios, los beneficios totales de los SPs, el SW y UW. Los valores de los parámetros del sistema son los que se muestran en la Tabla 7.1.

7.3.1. Resolución numérica

En el modelo dinámico las decisiones de los usuarios y de los SPs varían con el tiempo, para resolver el problema dinámico de toma de decisiones se utilizó la función "BVP4C" de MATLAB [63] [62] para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de (7.18) donde se conoce el estado inicial de

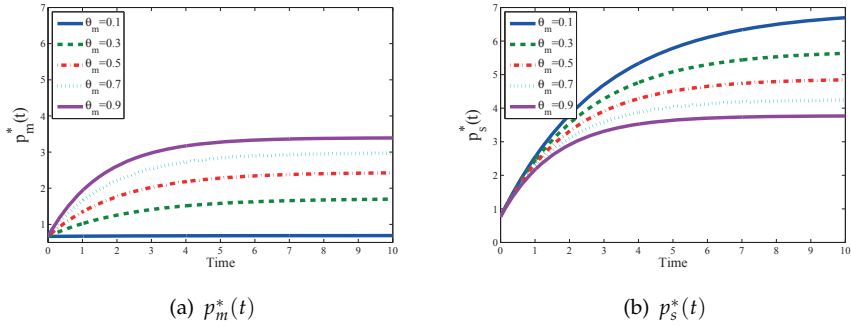


Figura 7.2: Precios de los SPs a lo largo del tiempo en función de θ_m .

la población y el estado final de los coestados. Utilizando esta función de MATLAB se ha realizado la resolución numérica del escenario variando los parámetros para conocer el efecto que tienen sobre las decisiones de los agentes del sistema.

7.3.2. Efecto de la eficiencia espectral

Las Figuras 7.2, 7.3 y 7.4 se muestran el efecto que tiene la eficiencia espectral obtenida con el MSP por todos los usuarios (θ_m) sobre el escenario, evaluando el comportamiento evolutivo de los usuarios ($x_m^*(t)$, $x_s^*(t)$ y $x_o^*(t)$), la dinámica de precios en equilibrio ($p_m^*(t)$ y $p_s^*(t)$), los beneficios totales de los SPs, el SW y UW. Los resultados se obtuvieron para los siguientes parámetros en cada una de las Small cells: hay $N_i = 80$ usuarios, todos los usuarios dentro de las Small cells perciben en media la misma eficiencia espectral con la BS del MSP, el ancho de banda disponible para el SSP es $B_{s_i} = B_s = 10,4$ MHz en todas las Small cells y el estado inicial de la población es $x_{m_i}^*(0) = 0,1$, $x_{s_i}^*(0) = 0,1$ y $x_{o_i}^*(0) = 0,8 \forall i$.

En 7.2 (a) y (b) se muestra la evolución de los precios del MSP y SSP a lo largo del horizonte de tiempo evaluado ($T = 10$) para distintos valores de θ_m y se observa que:

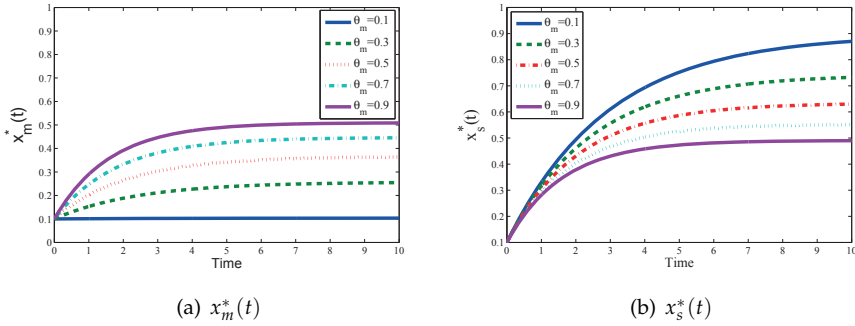


Figura 7.3: Comportamiento evolutivo de la población en función de θ_m .

- Cuanto menor sea θ_m menor es el precio que anuncia el MSP debido a que tiene que compensar la baja eficiencia espectral que perciben los usuarios, por el contrario el SSP cuanto menor es la eficiencia espectral mayor es el precio que puede anunciar porque los usuarios perciben una mejor utilidad con él.
- Los precios aumentan a medida que aumenta el tiempo, esto se debe porque los usuarios que no suscribían el servicio ($x_{0_i}^*(0) = 0,8$) va eligiendo suscribir y a medida que aumenta los usuarios mayores son los precios que anuncian los SPs debido a que son los mismos recursos para una mayor demanda de ancho de banda.
- En $T = 10$ la población llega o esté cerca de llegar a la ESS, por lo tanto, los precios anunciados son los del modelo estático, por ejemplo para $\theta_m = 0,7$ los precios en equilibrio en el modelo estático $p_m^* = 2,97m.u.$ y $p_s^* = 4,25m.u$ y son los que se obtiene en la Figura 7.2.

En 7.3 (a) y (b) se muestra el comportamiento evolutivo de la población que suscribe con el MSP y SSP respectivamente, se observa que los usuarios siempre prefieren suscribir el servicio y por ello a lo largo del tiempo van evolucionando hasta que suscriben con un SP, además que dependiendo la eficiencia espectral percibida prefieren suscribir con uno u otro SP, de tal

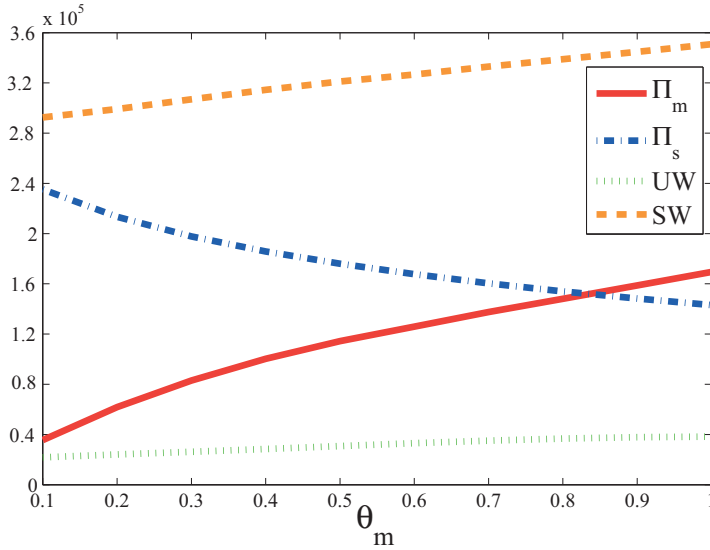


Figura 7.4: Π_m , Π_s , SW y UW en función de θ_m .

manera que cuanto mayor sea θ_m más usuarios prefieren suscribir con el MSP. En $T = 10$ la población llega o esté cerca de llegar a la ESS, por lo tanto, $x_{m_i}^*(T)$, $x_{s_i}^*(T)$ y $x_{o_i}^*(T)$ están dados en las tablas 5.1, 5.2 y 5.3.

En 7.4 se muestra los beneficios del modelo desde la perspectiva de los SPs, usuarios y bienestar social medidos en el total del tiempo evaluado, se observa que los beneficios del MSP aumentan a medida que aumenta θ_m y ese aumento es lo que disminuyen los beneficios del SSP. Los usuarios se ven beneficiados si existe una mejor θ_m en el escenario y por ellos aumenta el SW y UW, adicionalmente es de esperar que el SW, UW y los beneficios de los SPs aumente si el estado inicial de la población de usuarios que no suscriben el servicio es menor, dado que el 80% de usuarios empiezan en no suscribir.

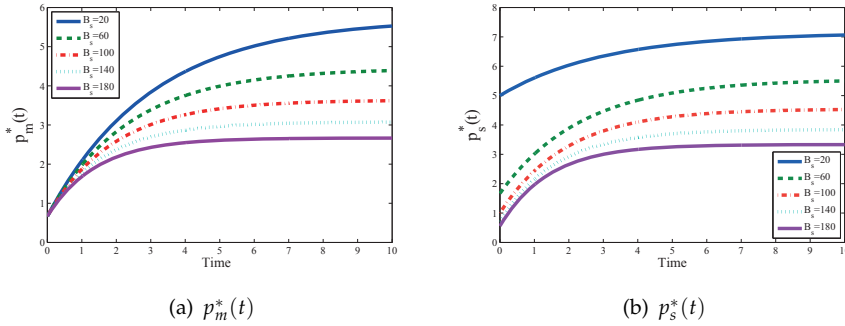


Figura 7.5: Precios de los SPs a lo largo del tiempo en función de B_s .

7.3.3. Efecto del ancho de banda disponible del SSP

Las Figuras 7.5, 7.6 y 7.7 se muestran el efecto que tiene los recursos disponibles del SSP sobre el escenario, evaluando el comportamiento evolutivo de los usuarios, la dinámica de precios en equilibrio, los beneficios totales de los SPs, el SW y UW. Los resultados se obtuvieron para los siguientes parámetros en cada una de las Small cells: hay $N_i = 80$ usuarios, todas las Small cells perciben en media la misma eficiencia espectral $\theta_{m_i} = \theta_m = 0,8$ y el estado inicial de la población es $x_{m_i}^*(0) = 0,1$, $x_{s_i}^*(0) = 0,1$ y $x_{o_i}^*(0) = 0,8 \forall i$.

En 7.5 (a) y (b) se muestra el comportamiento de los precios del MSP y SSP a lo largo del horizonte de tiempo evaluado ($T = 10$) en función de B_s y se observa que:

- Cuanto mayor sea B_s menor es el precio que anuncian los SPs debido a que el SSP tiene más recursos para competir y esto hace que ambos SP tengan que bajar los precios.
- Los precios aumentan a medida que aumenta el tiempo, esto se debe a que los usuarios que no suscribían el servicio ($x_{o_i}^*(0) = 0,8$) va eligiendo suscribir y a medida que aumenta los usuarios mayores son los precios

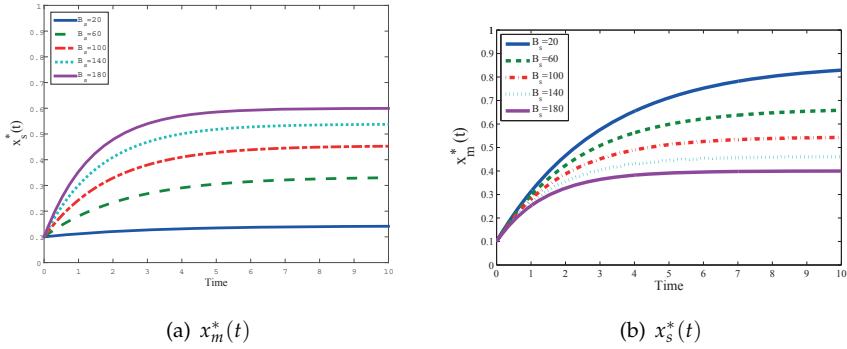


Figura 7.6: Comportamiento evolutivo de la población en función de B_s .

que anuncian los SPs debido a que son los mismos recursos para una mayor demanda de ancho de banda.

- En $T = 10$ la población llega o esté cerca de llegar a la ESS, por lo tanto, los precios anunciados son los del modelo estático, por ejemplo para $B_s = 56\text{MHz}$ los precios en equilibrio en el modelo estático $p_m^* = 3,07m.u.$ y $p_s^* = 3,84m.u$ y son los que se obtiene en la Figura 7.5.

En 7.6 (a) y (b) se muestra el comportamiento evolutivo de la población que suscribe con el MSP y SSP respectivamente, se observa que los usuarios siempre prefieren suscribir el servicio y por ello a lo largo del tiempo van evolucionando hasta que suscriben con un SP, además cuanto mayor sean los recursos disponibles del SSP mayores serán los usuarios que quieren suscribir con él. En $T = 10$ la población llega o esté cerca de llegar a la ESS, por lo tanto, $x_{m_i}^*(T)$, $x_{s_i}^*(T)$ y $x_{0_i}^*(T)$ están dados en las tablas 5.1, 5.2 y 5.3.

En 7.7 se muestra los beneficios del modelo desde la perspectiva de los SPs, usuarios y bienestar social medidos en el total del tiempo evaluado, se observa que los beneficios del SSP aumentan a medida que aumenta B_s , y ese aumento es lo que disminuyen los beneficios del MSP. Los usuarios se ven beneficiados si existe una mayores recursos en el escenario y por ellos

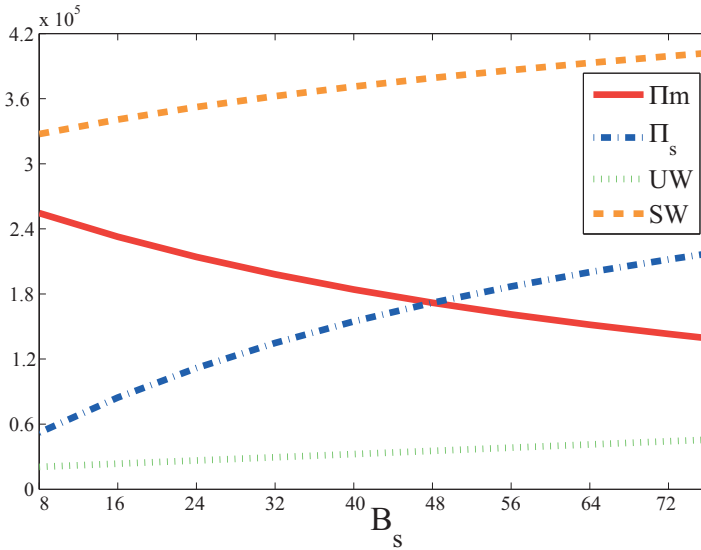


Figura 7.7: Π_m , Π_s , SW y UW en función de m .

aumenta el SW y UW, adicionalmente es de esperar que el SW, UW y los beneficios de los SPs aumente si el estado inicial de la población de usuarios que no suscriben el servicio es menor, dado que el 80 % de usuarios empiezan en no suscribir.

7.4. Conclusiones

En este capítulo se resolvió un modelo dinámico y se obtuvo el camino de acción de precios de los SPs y como este camino de acción influye en el comportamiento evolutivo de los usuarios. Los resultados obtenidos muestran que:

- Los precios anunciados por los SPs son los precios mínimo que les permite atender a todos los usuarios, de tal manera que no se queden

usuarios sin ser atendidos y al ser los precios mínimos la población evolucionará con mayor rapidez.

- Comparando los resultados con el modelo evolutivo de la población de usuarios (Capítulo 6) se observa que evaluando el escenario $T = 10$ la población siempre llega a la ESS, esto se debe a que los SPs pueden anunciar un precio en cada instante de tiempo y el factor de control al ser más ajustable hace que se obtengan mejores resultados en la evolución de la población lo cual se ve reflejado directamente en los beneficios de los SPs.
- Los usuarios adaptan su estrategia en cada instante de tiempo hasta llegar a la estrategia evolutivamente estable, en dicha estrategia los usuarios obtienen el máximo de utilidad y se observa que la entrada del SSP beneficia a los usuarios ya que los UW es mayor al obtenido en el mercado de monopolio.
- En comparación con el modelo estático y el modelo evolutivo de la población de usuarios se puede concluir que si el estado de la población es la estrategia evolutivamente estable no importa el tiempo ni la tasa de aprendizaje de los usuarios ya que las decisiones de los agentes serán las mismas, porque el escenario puede ser visto como un escenario estacionario donde los usuarios no tienen incentivo para cambiar de estrategias.
- En comparación con el modelo estático los SPs en media obtienen menores beneficios porque la población que no suscribe tarda un tiempo en llegar a la estrategia de suscribir, pero en comparación el modelo evolutivo de la población de usuarios los beneficios son mayores porque dicha población tarda menos tiempo en aprender la estrategia de suscribir; lo mismo sucede con el SW y UW.

Capítulo 8

Competencia entre proveedores de servicio. Aceptación de nuevos usuarios.

Con la entrada de un nuevo proveedor de servicios se demostró que aumenta el bienestar de los usuarios en todos los modelos de estudio debido a que la utilidad media por usuario aumenta, y esto sucede porque los SPs bajan los precios, aumentan los recursos del escenario y mejora la eficiencia espectral media percibida por la población.

En este capítulo se analiza el efecto que tiene la entrada del nuevo proveedor de servicios bajo la hipótesis de que existen más usuarios que quieren suscribir, es decir se le dará cabida a nuevos usuarios y para ello se les debe ofrecer por lo menos el mismo nivel de satisfacción que tenían en el mercado de monopolio. El modelo es diferente a los capítulos anteriores ya que en ellos el número de usuarios es fijo a pesar de que compite un nuevo SP.

Para el estudio de este modelo se utiliza el escenario descrito en el capítulo 3, pero la utilidad que perciben los usuarios con un proveedor de servicio está dada por el nuevo número de usuarios. La obtención del número de usuarios se aborda desde los diferentes modelos estudiados a lo largo de la tesis, por simplicidad los estudios analíticos de los resultados se obtienen

para una small cell, de tal manera que se obtengan el número de usuarios que pueden suscribir y cómo afecta esto a los beneficios de los proveedores, al UW y al SW.

El capítulo se divide de la siguiente manera: primero se obtiene la utilidad que percibida por los usuarios con los SPs en este modelo, posteriormente se analiza cuantos usuarios suscriben en cada modelo empezando por el modelo estático, luego el modelo evolutivo de la población de usuarios y por último el modelo dinámico, posteriormente se comparan los resultados obtenidos y se extraen las conclusiones.

8.1. Utilidad percibida por los usuarios con los SPs

La función de utilidad propuesta en este modelo para los usuarios está dada en el capítulo 3

$$\begin{aligned} u_m^*(p_m^*, t) &= \theta_m^n e^{-1} / p_m^*, \\ u_s^*(p_s^*, t) &= e^{-1} / p_s^*, \\ u_o^* &= 0, \end{aligned} \tag{8.1}$$

teniendo en cuenta que el número de usuarios a los que se les da el servicio es N_n , es decir a donde N_n usuarios se les podrá atender con por lo menos el mismo nivel de satisfacción que en el mercado de monopolio, por ello recordamos la expresion de dicha utilidad:

$$u_M^n = \theta_m^n e^{-1} / p_m^* = \theta_m^n e^{-1} \frac{B_m}{N}, \tag{8.2}$$

El estudio realizado a continuación se realiza para una red de small cell que cubren el 100 % del área de cobertura de la BS del MSP, por ello los resultados son tratados como una solo small cell.

8.2. Modelo Estático

El modelo estático fue estudiado en el capítulo 5 y se obtuvo en la segunda etapa las decisiones de los usuarios en las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3 las cuales depende de los precios que anuncien los SPs en la primera etapa, en la primera etapa se obtuvo que el equilibrio de precios de los SPs para una small cell está dado en (5.33) y (5.34), el cual recordamos a continuación:

$$\begin{aligned} p_m^* &= \frac{N\theta_m^n}{B_m\theta_m^n + B_s}, \\ p_s^* &= \frac{N}{B_m\theta_m^n + B_s}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

dada estas decisiones de los SPs las decisiones de los usuarios son las de la Tabla 5.3, las recordamos a continuación:

$$\begin{aligned} x_m^* &= \frac{p_m B_m}{N} = \frac{B_m \theta_m^n}{B_m \theta_m^n + B_s}, \\ x_s^* &= \frac{p_s B_s}{N} = \frac{B_s}{B_m \theta_m^n + B_s}, \\ x_o^* &= 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$(8.5)$$

En este nuevo modelo las utilidades de los usuarios están dadas por los usuarios existentes (N) más los nuevos usuarios que son aceptación, es decir (N_n)

$$\begin{aligned} u_m^*(p_m^*, t) &= \theta_m^n e^{-1} \frac{B_m \theta_m^n + B_s}{N_n \theta_m^n}, \\ u_s^*(p_s^*, t) &= \theta_m^n e^{-1} \frac{B_m \theta_m^n + B_s}{N_n \theta_m^n}, \\ u_o^* &= 0, \end{aligned} \quad (8.6)$$

Conociendo las utilidades de los usuarios dada en la expresión (8.6) y (8.2) se obtiene N_n

$$N_n = N \frac{B_m \theta_m^n + B_s}{B_m \theta_m^n}, \quad (8.7)$$

de (8.7) se observa que cuanto mayor sea los recursos del SSP mayor son los usuarios que pueden suscribir y si el SSP no compite entonces suscriben los usuarios del escenario original.

8.3. Modelo evolutivo de la población de usuarios

El modelo evolutivo de la población de usuarios fue estudiado en el capítulo 6 y se obtuvo que la utilidad media que perciben los usuarios está dada por

$$U(t) = x_m(t)\theta_m^n e^{-1}/p_m^* + x_s(t)e^{-1}/p_s^*$$

donde $x_m(t)$ y $x_s(t)$ están dadas por la dinámica del replicador definidas en (6.9). La utilidad media que perciben los usuarios dependen de los precios anunciados por los SPs, los cuales depende a su vez del comportamiento evolutivo de los usuarios y del número de usuarios, como se mostró en la expresión (6.11).

Para obtener el número de usuarios totales a los que se les garantiza el nivel de satisfacción del mercado de monopolio (N_n) se realiza una búsqueda aumentando el número de usuarios hasta que se supere la utilidad mínima exigida por los usuarios, la búsqueda de N_n se muestra en el Algoritmo 2.

8.4. modelo dinámico

El modelo dinámico fue estudiado en el capítulo 7 y se obtuvo que la utilidad media que perciben los usuarios está dada por

$$U(t) = x_m(t)\theta_m^n e^{-1}/p_m^*(t) + x_s(t)e^{-1}/p_s^*(t)$$

donde $x_m(t)$ y $x_s(t)$ están dadas por la dinámica del replicador definidas en (7.9). La utilidad media que perciben los usuarios dependen del camino de acción de los SPs, los cuales depende a su vez del comportamiento evolutivo de los usuarios, del número de usuarios, de los estados iniciales

Algorithm 2 Usuarios con el nivel de satisfacción del mercado de monopolio

• Se define el número de usuarios que alcanzan la utilidad mínima en el monopolio, N .

• Se define la utilidad mínima $u_M^n = \theta_m^n e^{-1} \frac{B_m}{N}$

• Se defina la utilidad media que perciben los usuarios con el ingreso del SSP
 $U(t) = x_m(t)\theta_m^n e^{-1}/p_m * + x_s(t)e^{-1}/p_s*$

• $N_n = N$

While $U(t) > u_M^n$

▪ $N_c = N_c + 1;$

▪ Se obtienen los precios mediante los problemas de programación no-lineal con restricciones:

$$p_s^* = \arg \max_{p_s \geq 0} \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_s(p_s, x_s(p_m, p_s), t)] dt,$$

$$\text{s. t. } \dot{x}_{s_i}(t) = \delta x_{s_i}(t) [u_{s_i}(p_s, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)],$$

$$x_{m_i}(0) = x_{m_i}0,$$

$$x_{s_i}(0) = x_{s_i}0,$$

$$p_m^* = \arg \max_{p_m \geq 0} \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_m(p_m, x_m(p_m, p_s^*), t)] dt,$$

$$\text{s. t. } p_s^* = \arg \max_{p_s \geq 0} \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_s(p_s, x_s(p_m, p_s), t)] dt,$$

$$\dot{x}_{m_i}(t) = \delta x_{m_i}(t) [u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s^*, r_i, t)],$$

$$x_{m_i}(0) = x_{m_i}0,$$

$$x_{s_i}(0) = x_{s_i}0,$$

▪ $U = x_m(t)\theta_m^n e^{-1}/p_m * + x_s(t)e^{-1}/p_s*$

end

• $N_n = N_n$

Algorithm 3 Usuarios con el nivel de satisfacción del mercado de monopolio

• Se define el número de usuarios que alcanzan la utilidad mínima en el monopolio, N .

• Se define la utilidad mínima $u_M^n = \theta_m^n e^{-1} \frac{B_m}{N}$

• Se defina la utilidad media que perciben los usuarios con le ingreso del SSP
 $U(t) = x_m(t)\theta_m^n e^{-1} / p_m * (t) + x_s(t)e^{-1} / p_s * (t)$

• $N_n = N$

While $U(t) > u_M^n$

▪ $N_c = N_c + 1;$

▪ Se obtienen los precios y el comportamiento evolutivo de los usuarios resolviendo el TPBVP:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{m_i}(t) = \delta x_{m_i}(t)(u_{m_i}(t) - U_i(t)), \\ \dot{x}_{s_i}(t) = \delta x_{s_i}(t)(u_{s_i}(t) - U_i(t)), \\ \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t)(u_{o_i}(t) - U_i(t)), \\ \dot{\lambda}_{ss_i}(t) = \rho \lambda_{ss_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_s^*(p_m, p_s^*, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{s_j}, t)}{\partial x_{s_i}(t)}, \\ \dot{\lambda}_{sm_i}(t) = \rho \lambda_{sm_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_s^*(p_m, p_s^*, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{s_j}, t)}{\partial x_{m_i}(t)}, \\ \dot{\lambda}_{so_i}(t) = \rho \lambda_{so_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_s^*(p_m, p_s^*, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{s_j}, t)}{\partial x_{o_i}(t)}, \\ \dot{\lambda}_{ms_i}(t) = \rho \lambda_{ms_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{m_j}, \lambda_{s_j}, \alpha_{s_j}, t)}{\partial x_{s_i}(t)}, \\ \dot{\lambda}_{mm_i}(t) = \rho \lambda_{mm_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{m_j}, \lambda_{s_j}, \alpha_{s_j}, t)}{\partial x_{m_i}(t)}, \\ \dot{\lambda}_{mo_i}(t) = \rho \lambda_{mo_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{m_j}, \lambda_{s_j}, \alpha_{s_j}, t)}{\partial x_{o_i}(t)}, \\ \dot{\alpha}_{ss_i}(t) = \rho \alpha_{ss_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{m_j}, \lambda_{s_j}, \alpha_{s_j}, t)}{\partial \lambda_{ss_i}(t)}, \\ \dot{\alpha}_{sm_i}(t) = \rho \alpha_{sm_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{m_j}, \lambda_{s_j}, \alpha_{s_j}, t)}{\partial \lambda_{sm_i}(t)}, \\ \dot{\alpha}_{so_i}(t) = \rho \alpha_{so_i}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_m^*(p_m^*, p_s, x_{m_i}, x_{s_i}, \lambda_{m_j}, \lambda_{s_j}, \alpha_{s_j}, t)}{\partial \lambda_{so_i}(t)}, \end{array} \right.$$

▪ $U = x_m(t)\theta_m^n e^{-1} / p_m * + x_s(t)e^{-1} / p_s *$

end

• $N_n = N_n$

Tabla 8.1: Parámetros del escenario

Parámetros	Valores	Parámetros	Valores
N	400 usuarios	A_s	2000 m ²
A_m	10000 m ²	B_s	52 MHz
B_m	60 MHz	δ	6,8
$\bar{\theta}_m^n$	0,8bits/s/Hz	T	10
K	1	h	0.01

de la población ($x_j(0) = x_j0$) y el estado final de los coestados ($\lambda_{sj}(T) = 0$, $\lambda_{mj}(T) = 0$ y $\alpha_{sj}(T) = 0$). El camino de acción de los SPs y el comportamiento evolutivo de los usuarios se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales dado en (7.18) y los precios de los SPs dados en (7.15) y (7.13).

Para obtener el número de usuarios totales a los que se les garantiza el nivel de satisfacción del mercado de monopolio (N_n) se realiza una búsqueda aumentando el número de usuarios hasta que se supere la utilidad mínima exigida por los usuarios, la búsqueda de N_n se muestra en el Algoritmo 3.

8.5. Resultados

En este apartado se muestran las decisiones de los usuarios y los SPs cuando el número de usuarios van aumentando hasta que se permita la aceptación máxima de usuarios, estos resultados muestran una visión del comportamiento de los agentes del sistema y como mejoran sus beneficios cuando más usuarios desean suscribir.

A menos que se mencione lo contrario, los parámetros del sistema con los que se evalúa el comportamiento del escenario son los que se muestran en la

Tabla 9.1.

8.5.1. Resolución numérica

Para obtener los resultados se obtiene la utilidad en el mercado de monopolio desde (8.2)

$$u_M^n = 0,0441,$$

por lo tanto, los usuarios suscriben al servicio si se les garantiza esta utilidad. Para modelar el escenario se suponen que existen 900 usuarios de los cuales en el monopolio a 400 usuarios se les da el servicio.

En el modelo estático la resolución numérica es simple ya que se obtuvo el número de usuarios que podrían suscribir en función de los parámetros del escenario (8.7), conociendo esto se obtiene las decisiones de los agentes del escenario y sus beneficios de igual forma que en el capítulo 5.

La variación en las decisiones del modelo evolutivo de la población de usuarios repercute en la decisión de precio del MSP, por ello se hace la búsqueda de los usuarios que podrían suscribir mostrada en el algoritmo 2 resolviendo los problemas de optimización no-lineal con restricciones dados en las expresiones (6.11) y (6.10) utilizando la función "fmincon".

En el modelo dinámico las decisiones de los usuarios y de los SPs varían con el tiempo, por ello se hace la búsqueda de los usuarios que podrían suscribir mostrada en el algoritmo 3 resolviendo el problema dinámico de toma de decisiones definido en el de ecuaciones diferenciales de (7.18) mediante la función "BVP4C" de MATLAB [63] [62].

La resolución numérica de los resultados y su respectiva comparación se muestran a continuación.

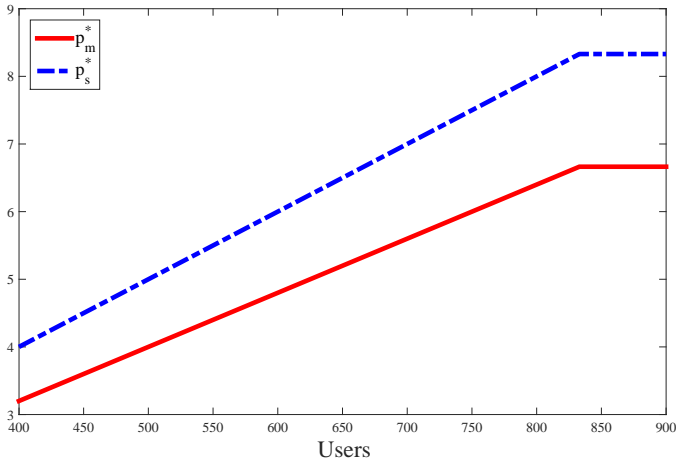


Figura 8.1: Efecto de los usuarios sobre los precios

8.5.2. Modelo estático

En el apartado 8.2 se obtuvo el número de usuarios a los que se les garantiza el nivel de satisfacción, está dado en (8.7)

$$N_n = 833 \text{ usuarios,}$$

los usuarios se aproximan al entero inferior.

La Figura 8.1 muestra los precios en equilibrio de los SPs cuando aumentan el número de usuarios potenciales que pueden suscribir el servicio, se observa que los precios de los SPs aumentan a medida que aumentan los usuarios, hasta llegar a $p_m^* = 6,664m.u.$ en este momento el precio de los SPs se mantiene constante, esto sucede porque solo se suscriben 833 usuarios y a los demás usuarios no se les puede garantizar el nivel de satisfacción. La Figura 8.2 muestra la distribución de la población cuando aumentan el número de usuarios potenciales que pueden suscribir el servicio, se observa que la distribución de la población es contante, ya que en proporción los usuarios se dividen en un 48% para el MSP y un 52% para el SSP, esto

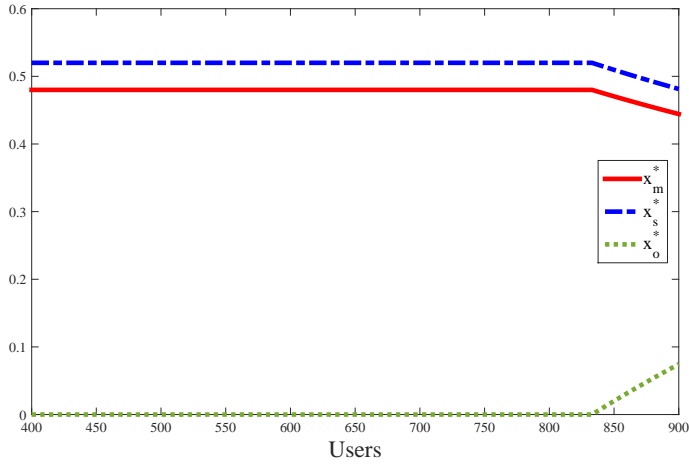


Figura 8.2: Efecto de los usuarios sobre la población

sucede hasta los 833 usuarios que pueden suscribir, en ese momento el resto de usuarios no pueden suscribir el servicio y por eso la distribución de la población con ambos SP se ve afectada y aumenta el número de usuarios que no suscriben el servicio, $x_o^* > 0 \forall N > 833$.

La Figura 8.3 muestra los beneficios que obtienen los SPs, el UW y el SW, a diferencia de los modelos estudiados anteriormente donde la suma de los beneficios siempre se mantenía constante, en este modelo los beneficios de los SPs son creciente a medida que más usuarios suscriben, de tal manera que los beneficios del MSP crecen hasta $400m.u.$, es decir, los beneficio que obtenía en el monopolio. Para el SSP la entrada en el mercado le garantiza obtener beneficios y cuanto mayor sea el número de usuarios mayor serán los beneficios obtenidos y cuanto mayor sean los recursos de los SPs a más usuarios se les podrá atender garantizándoles el nivel de satisfacción.

El UW se mantiene constante de $N \leq 833$ porque a medida que aumenta los usuarios menor es la utilidad percibida por cada usuarios, pero el SW aumenta debido a que los beneficios de los SPs aumentan.

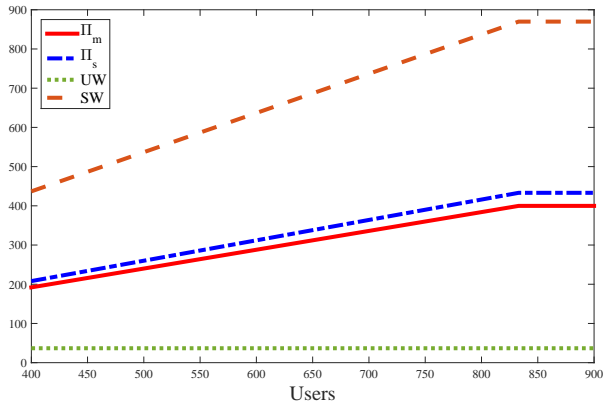


Figura 8.3: Efecto de los usuarios sobre los beneficios, UW y SW

8.5.3. Modelo evolutivo de la población de usuarios

En el apartado 8.3 se obtuvo el número de usuarios a los que se les garantiza el nivel de satisfacción mediante la búsqueda realizada en el Algoritmo 2 y se obtuvo que se le pueden garantizar el nivel de satisfacción a por lo menos

$$N_n = 702 \text{ usuarios},$$

con los resultados obtenidos en el Algoritmo 2 se extrajeron los datos para la obtención de las Figuras 8.4, 8.5 y 8.6.

La Figura 8.4 muestra los precios en equilibrio de los SPs cuando aumentan el número de usuarios potenciales que pueden suscribir el servicio, se observa que los precios de los SPs aumentan a medida que aumentan los usuarios, hasta llegar a $p_m^* = 5,546m.u.$ en este momento el precio de los SPs se mantiene constante, esto sucede porque solo se suscriben 702 usuarios y a los demás usuarios no se les puede garantizar el nivel de satisfacción.

La Figura 8.5 muestra la distribución de la población al final del tiempo, es decir, en $t = T$ cuando aumentan el número de usuarios potenciales que pueden suscribir el servicio, se observa que en dicho tiempo la población

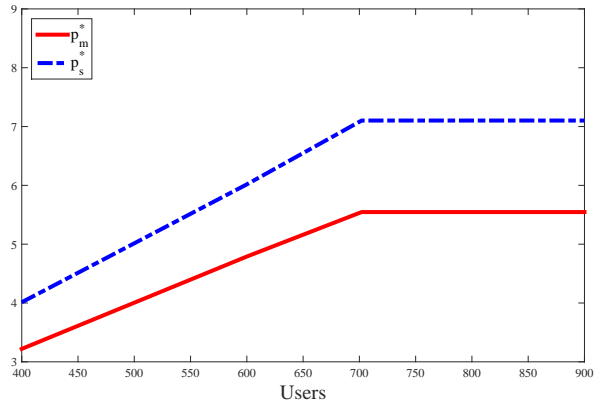


Figura 8.4: Efecto de los usuarios sobre los precios

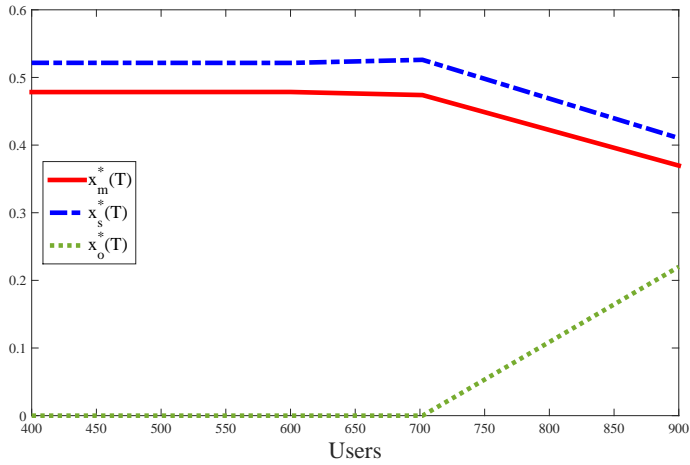


Figura 8.5: Efecto de los usuarios sobre la población

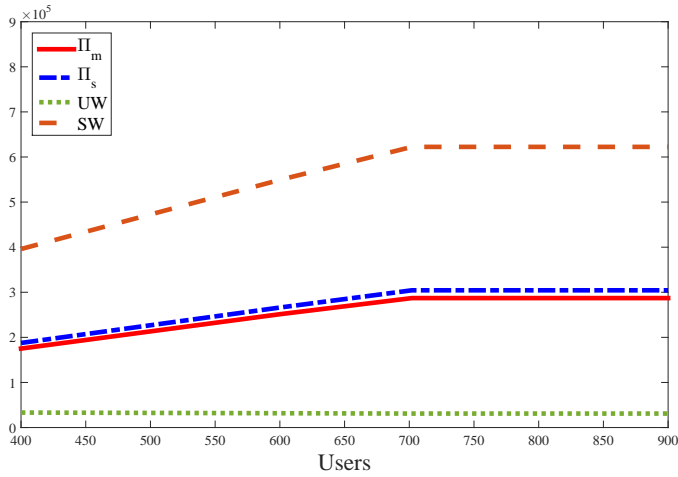


Figura 8.6: Efecto de los usuarios sobre los beneficios, UW y SW

llega o está muy cerca de llegar a la ESS, por ello en proporción los usuarios se dividen aproximadamente en un 48 % para el MSP y un 52 % para el SSP, esto sucede hasta los 702 usuarios que pueden suscribir, en ese momento el resto de usuarios no pueden suscribir el servicio y por eso la distribución de la población con ambos SP se ve afectada.

La Figura 8.6 muestra los beneficios que obtienen los SPs, el UW y el SW. Los beneficios de los SPs son creciente a medida que más usuarios suscriben, de tal manera que los beneficios del MSP crecen hasta $287,1 \cdot 10^3 m.u.$. Para el SSP la entrada en el mercado le garantiza obtener beneficios y cuanto mayor sea el número de usuarios mayor serán los beneficios obtenidos y cuanto mayor sean los recursos de los SPs a más usuarios se les podrá atender garantizándoles el nivel de satisfacción. El UW se mantiene constante porque a medida que aumenta los usuarios menor es la utilidad percibida por cada usuario, pero el SW aumenta debido a que los beneficios de los SPs aumentan.

8.5.4. Modelo dinámico

En el apartado 8.4 se muestra el número de usuarios a los que se les garantiza el nivel de satisfacción; estos usuarios son obtenidos mediante la búsqueda realizada en el Algoritmo 3, aplicando dicho algoritmo se obtiene que se le pueden garantizar el nivel de satisfacción a por lo menos

$$N_n = 835 \text{ usuarios},$$

con los resultados obtenidos en el Algoritmo 3 se extrajeron los datos para la obtención de las Figuras 8.7, 8.8 y 8.9.

La Figura 8.7 muestra los precios en equilibrio de los SPs para tres poblaciones ($N = \{500, 700, 900\}$) a lo largo de $T = [0, 1]$ (aunque el cálculo numérico se realizó $T = [0, 10]$, pero cuando la población llega al ESS no cambian los precios) y se observa que cuanto mayor es el número de usuarios mayores son los precios que anuncian los SPs, y debido a que la distribución de los usuarios empieza lejos de la ESS los precios de los SPs van aumentando a medida que los usuarios suscriben el servicio hasta llegar a la ESS ($x_m^* = 0,48$ y $x_s^* = 0,52$) en la cual los precios no varían, también se observa que cuanto menor es el número de usuarios más rápido se estabilizan los precios de los SPs, debido a que son menos usuarios los que tienen que aprender la estrategia óptima.

La Figura 8.8 muestra el estado final de la población cuando aumentan el número de usuarios potenciales que pueden suscribir el servicio, se observa que la distribución de la población es similar a la Figura 8.2, es decir, el modelo estático, esto se debe porque la tasa de aprendizaje de la población es alta ($\delta = 6,8$) y esto hace que los usuarios lleguen a la ESS, la diferencia radica en la cantidad de usuarios a los que se les puede garantizar el nivel de satisfacción, que en este caso es $N_n = 837 \text{ usuarios}$, es decir, 2 usuarios más. Se le pueden garantizar el nivel de satisfacción a más usuarios porque el estado de la población inicial se encuentra lejos de la ESS.

La Figura 8.9 muestra los beneficios que obtienen los SPs, el UW y el SW. Los beneficios de los SPs son creciente a medida que más usuarios suscriben,

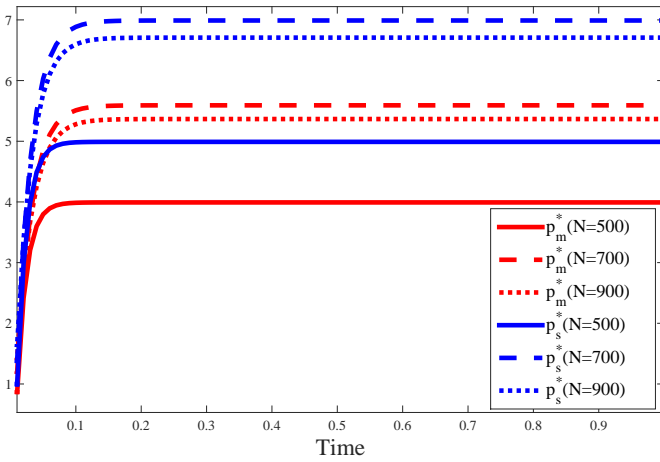


Figura 8.7: Efecto de los usuarios sobre los precios

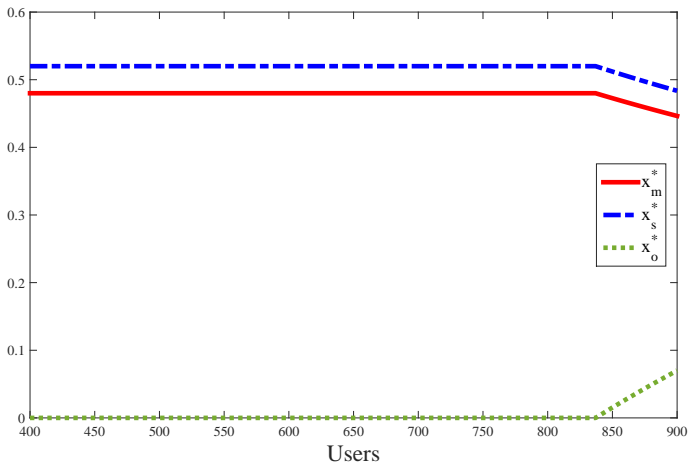


Figura 8.8: Efecto de los usuarios sobre la población

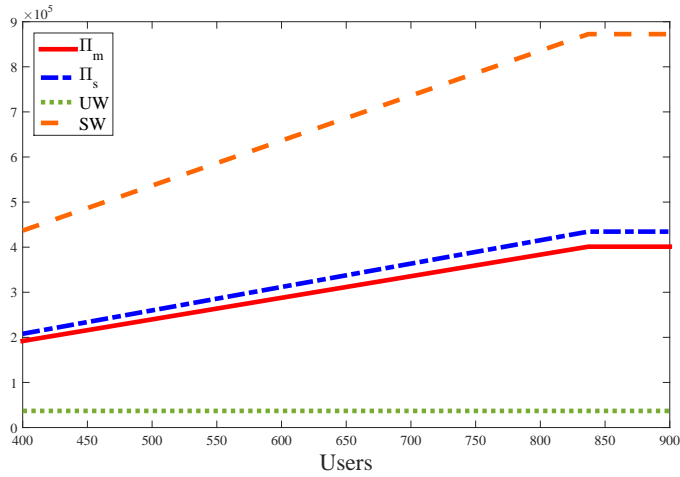


Figura 8.9: Efecto de los usuarios sobre los beneficios, UW y SW

de tal manera que los beneficios del MSP crecen hasta $397,1 \cdot 10^3 m.u.$. Para el SSP la entrada en el mercado le garantiza obtener beneficios. El UW se mantiene constante porque a medida que aumenta los usuarios menor es la utilidad percibida por cada usuarios, pero el SW aumenta debido a que los beneficios de los SPs aumentan.

8.6. Conclusiones

En este Capítulo se modelo el comportamiento de la población y de los SPs cuando existen más usuarios que quieren suscribir si se les garantiza el nivel de satisfacción, el estudio se realizó en todos los modelos estudiados a lo largo de la tesis. Dado los resultados obtenidos se puede concluir que:

- Si existen usuarios que no suscriben el servicio porque no se les garantiza el nivel de satisfacción o si más usuarios quisieran entrar en

el escenario, ello son los mayores beneficiados con la entrada del nuevo SP ya que podrán suscribir el servicio y con mejor utilidad.

- En el modelo estático se observa una relación directa con el número de usuarios que se pueden atender y los recursos del SSP, y que cuanto mayor sea el número de usuarios que quieren suscribir en menor proporción se ve afectado el MSP con la competencia del SSP, ya que sus beneficios son los mismos que en el caso del monopolio.
- En el modelo evolutivo de la población de usuarios se observa que se pueden atender muchos menos usuarios que en el caso del modelo estático, debido a que los SPs anuncian un par de precios que generan una utilidad baja a los usuarios antes de que lleguen a la ESS.
- En el modelo dinámico se observa un comportamiento muy similar al modelo estático, debido a la alta tasa de aprendizaje de los usuarios, se observa que en un tiempo muy bajo la población llega a la ESS y se comporta como un modelo estático.
- En todos los escenarios estudiados los precios de los SPs aumentan a medida que suscriben más usuarios, esto se debe a que los SPs deben anunciar un precio mayor para hacer que los usuarios suscriban un menor ancho de banda y de esta manera tener los recursos para atender a más usuarios, adicionalmente los precios en equilibrio anunciado por los SPs se encuentran desplazados por la eficiencia espectral debido a que el MSP debe anunciar un precio menor que el SSP para compensar su menor eficiencia espectral.
- En todos los escenarios estudiados la distribución de la población es la misma cuando suscriben el 100 % de los usuarios, debido a que los recursos y la eficiencia espectral de los SPs se mantiene constantes y estos factores son los que hacen variar la distribución de la población.
- Los beneficios de los SPs presentan una mejoría considerable y en el mejor de los modelos estudiados (modelo estático) los beneficios

se duplican con respecto a los beneficios obtenido en el modelo de monopolio, además el MSP no se ve perjudicado con la entrada de un nuevo SP si los usuarios que desean suscribir el servicio son N_n . En el caso que los usuarios que quiera suscribir sean menores a N_n el MSP percibe unos beneficios menores que en el monopolio. El SSP le interesa ingresar en el mercado de comunicaciones móviles porque siempre obtiene beneficios y cuanto mayor sea el número de usuarios y recursos que tienen mayores son sus beneficios.

- El UW no se ve afectado cuando entran más usuarios en el escenario porque disminuye en la misma proporción la utilidad de los usuarios.
- El SW aumenta debido a que los beneficios de los SPs aumentan cuanto mayor son los usuarios que suscriben.

Capítulo 9

Competencia entre proveedores de servicio. Modelo con variación de recursos

En este capítulo se analiza los modelos resueltos en los capítulos anteriores cuando los recursos del SSP varían con el tiempo, de tal manera, que se estudie el efecto que tiene la reutilización dinámica de los recursos del ISP para prestar el servicio de comunicaciones móviles por parte del SSP.

El objetivo es conocer las ventajas que tiene implementar la reutilización dinámica de los recursos del ISP y conocer cómo influye en todos los escenarios desde el punto de vista de las decisiones en equilibrio de los agentes del sistema, los beneficios de los SPs, el UW y el SW, y por último, se comparan todos los resultados obtenidos.

El capítulo se divide de la siguiente manera: primero se plantea un caso de estudio en el que se describen las características del escenario, posteriormente se evalúan las decisiones de los agentes del sistema en el mercado de monopolio y en el mercado de duopolio desde todos los modelos posibles, es decir, en el modelo estático, en el modelo evolutivo de la población de usuarios y en el modelo dinámico. Adicionalmente se resuelven las decisiones en todos los modelos bajo la hipótesis que los usuarios exigen una utilidad mínima para suscribir y que por dicha razón una cantidad de

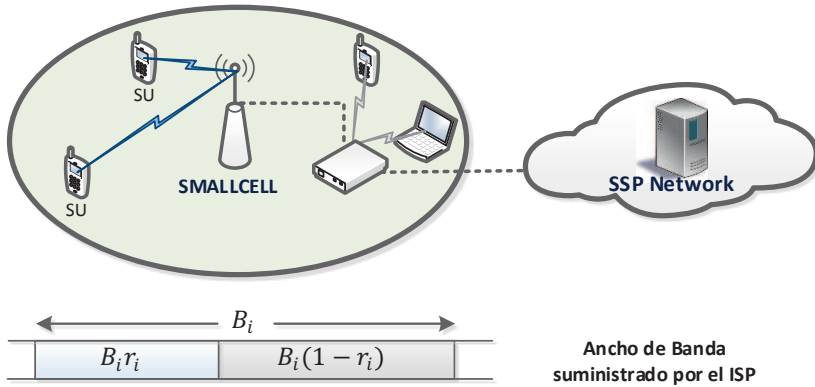


Figura 9.1: small cell i

usuarios se queda sin suscribir. Por último, se comparan los resultados y se extraen las conclusiones.

9.1. Escenarios de Estudio

En el capítulo 3 se planteó que los recursos que tiene el SSP para prestar el servicio de comunicaciones móviles en cada Small cell están dados por $B_{s_i}(t) = B_i r_i(t)$, $r_i(t)$ es la fracción de ancho de banda disponible para cada s_i en un instante de tiempo, como se muestra en la Fig. 9.1, por ello se trabaja en un escenario de estudio donde se evalúa las decisiones de los agentes del escenario y su repercusión en los beneficios de los SPs, el SW y el UW cuando los recursos del SSP varían en el tiempo.

Utilizamos el estudio de tráfico en la universidad de Washington [72] realizado en el 2002, una universidad con más 60.000 estudiantes y un campus de $14km^2$ de extensión [73]. El modelo lo simplificaremos al mostrado en la Figura 9.2 donde supondremos que tiene 2000 usuarios activos de comunicaciones móviles y tres macrocells las cuales tienen las mismas características y los parámetros se muestran en la Tabla 9.1.

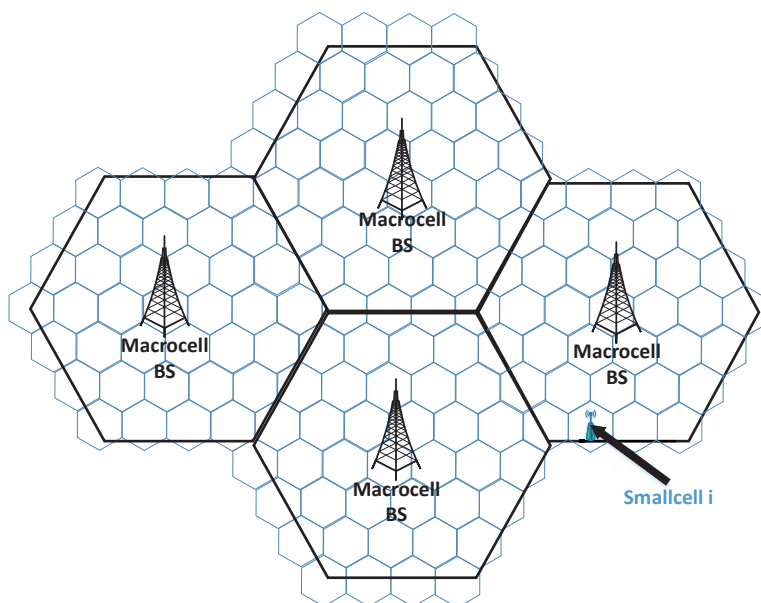


Figura 9.2: Escenario de estudio.

Tabla 9.1: Parámetros del MSP

Parámetros	Valores
N	2000 usuarios activos
A_m	2.8 km ²
B_m	180 MHz
$\bar{\theta}_m$	0,8bits/s/Hz
δ	{0,1,0,5}
$x_m(0)$	0,1
M	10080 time slots

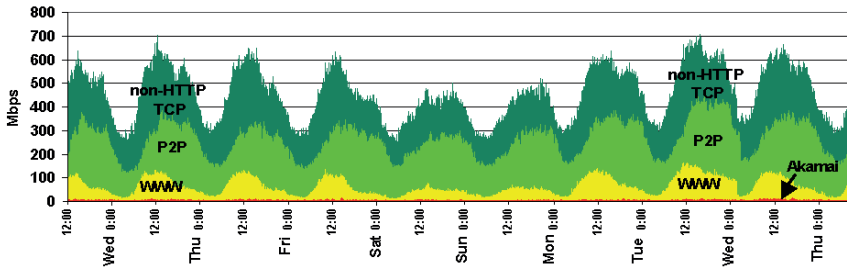


Figura 9.3: Estudio del tráfico TCP en la Universidad de Washington.

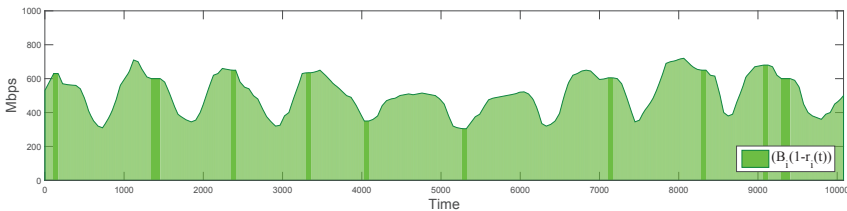


Figura 9.4: Ancho de banda utilizado para el Servicio de Internet.

Para obtener los parámetros del SSP se muestra el estudio de tráfico realizado a lo largo de una semana por la Universidad de Washington en la figura 9.3, donde podemos observar que el pico máximo de tráfico se encuentra aproximadamente cerca de los $720Mbps$ los martes a $15 : 00$ y el mínimo se encuentra aproximadamente cerca de los $270Mbps$ los domingo a las $07 : 00$. En la figura 9.4 se muestra la aproximación realizada para el estudio de tráfico mostrado en la figura 9.3.

Asumiremos que se despliega una red de smallcell que cubre el 100 % del área de las BS del MSP en la cual se percibe una eficiencia espectral media de $\bar{\theta}_{m_i} = 0,8bits/s/Hz$ y los recursos disponibles de la red se obtiene mediante una aproximación del estudio de tráfico mostrado en la figura 9.3; del cual decimos que el ancho de banda utilizado durante una semana para el servicio de Internet es $B_i(1 - r_i(t))$ y se muestra en la figura 9.4, si suponemos que la red tiene una capacidad máxima de $1000Mbps$, y una modulación elegida por el estándar 3GPP la cual es 16QAM y realizando la conversión [74], se

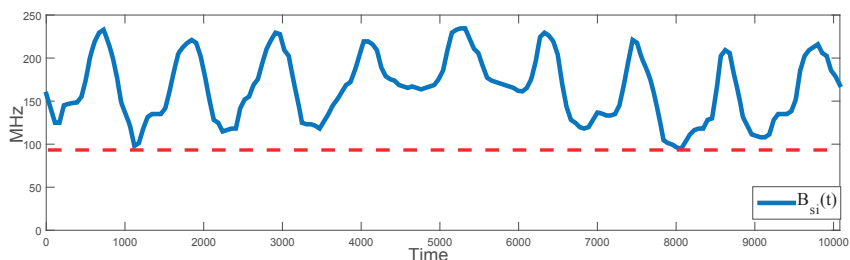


Figura 9.5: Ancho de banda disponible para el SSP

obtiene que el ancho de banda disponible para el servicio de comunicaciones móviles se muestra en la Figura 9.5 y los usuarios potenciales son 20000. Ya que el área de cobertura de la red del SSP cubre el 100% el modelo se comporta como una smallcell.

A continuación se resuelven todos los modelos estudiados a lo largo de la tesis y se concluirá cuáles son las ventajas que tienen cada uno de los modelos, para ello se utilizan todas las resoluciones numéricas descritas a lo largo de la tesis en los apartados 4.5.1, 6.3.1 y 7.3.1.

9.2. Monopolio

Se analiza el mercado de monopolio para conocer cómo afecta al MSP y a los usuarios cuando entra un nuevo proveedor de servicio en el mercado que realiza reutilización dinámica de recursos. En el Capítulo 4 se obtuvieron las decisiones óptimas que toman los usuarios y el MSP en monopolio, en base a ello se va evalúa el caso de estudio en un modelo estático, en un modelo evolutivo de la población de usuarios y en un modelo dinámico.

9.2.1. Modelo estático

Los resultados del modelo estático en un mercado de monopolio se muestran en la Tabla 9.2 y se obtienen desde (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6)

teniendo en cuenta que el escenario se evalúa en M pasos

Tabla 9.2: Resultados del modelo estático en un mercado monopolista

Parámetros	Ecuación	Resultado
b_m^{n*}	$\frac{B_m}{N}$	0.09MHz
x_m^*	1	1
p_m^*	$\frac{N}{B_m}$	11,11m.u./MHz
Π_m^*	$T/h \cdot N$	$2016 \cdot 10^4 m.u$
UW	$T/h \cdot B_m \theta_m^n e^{-1}$	$53,4 \cdot 10^4$
SW	$T/h(N + B_m \theta_m^n e^{-1})$	$2069,4 \cdot 10^4$

De los resultados mostrados en la Tabla 9.2 podemos concluir que el MSP anunciará el precio que le permita atender al 100 % de los usuarios con el que obtiene unos beneficios máximos de $\Pi_m^* = 2016 \cdot 10^4 m.u.$

9.2.2. Modelo evolutivo de la población de usuarios

En el apartado 4.3.1 se obtuvo el comportamiento evolutivo de los usuarios dada la decisión óptima del MSP la cual se obtiene mediante la solución del problema de optimización no-lineal con restricciones dada en la expresión (4.10). Los resultados del modelo evolutivo de la población de usuarios en un mercado de monopolio se muestran en la Tabla 9.3 dada la evolución de la población mostrada en la figura 9.6.

Los resultados muestran que la población evoluciona rápidamente a la estrategia de suscribir el servicio y cuanto mayor sea la tasa de aprendizaje más rápido aprenderá dicha estrategia. El precio anunciado es el mismo que en el modelo estático, pero los beneficios obtenidos son menores debido a que la población inicial se encuentra lejos de la ESS. Cuando la población

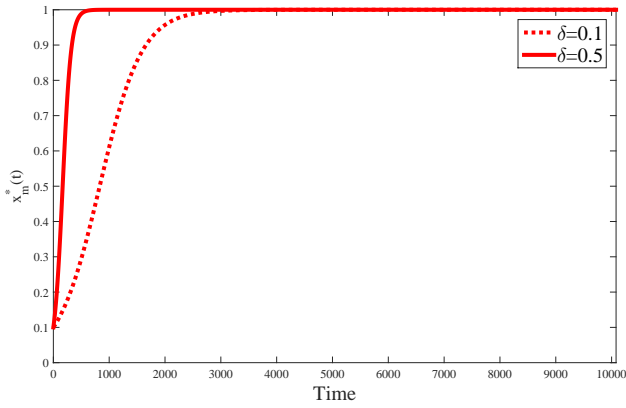


Figura 9.6: Evolución de la población

Tabla 9.3: Resultados del modelo evolutivo de la población de usuarios en monopolio

	$\delta = 0,1$	$\delta = 0,5$
b_m^{H*}	0.09MHz	0.09MHz
$x_m^*(T)$	1	1
p_m^*	11,11m.u./MHz	11,11m.u./MHz
Π_m^*	$1842,2 \cdot 10^4 m.u$	$1981,3 \cdot 10^4 m.u$
UW	$48,8 \cdot 10^4$	$52,48 \cdot 10^4$
SW	$1891 \cdot 10^4$	$2033,8 \cdot 10^4$

llega a la ESS ($x_m^*(t) = 1$) se comporta como el modelo estático, es de esperar que si el estado inicial de la población es la ESS, entonces los resultados los mismos que el modelo estático.

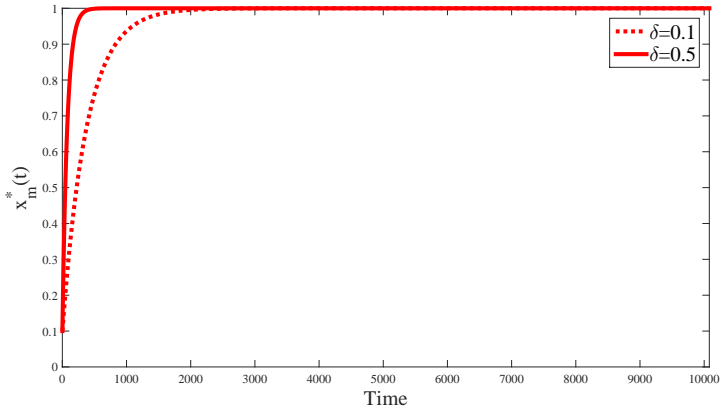


Figura 9.7: Evolución de la población

9.2.3. Modelo dinámico

En el apartado 4.4 se obtuvo las ecuaciones diferenciales que determinan el comportamiento evolutivo de los usuarios y el camino de acción óptimo del MSP. Los resultados del modelo dinámico en un mercado de monopolio se muestran en la Tabla 9.8 dado la evolución de la población mostrada en la figura 9.7 y el camino de acción óptimo del MSP es el mostrado en la figura 9.8.

Tabla 9.4: Resultados del modelo dinámico en un mercado monopolista

	$\delta = 0,1$	$\delta = 0,5$
Π_m^*	$1948,2 \cdot 10^4 m.u$	$2002,5 \cdot 10^4 m.u$
UW	$53,4 \cdot 10^4$	$53,4 \cdot 10^4$
SW	$2001,6 \cdot 10^4$	$2055,9 \cdot 10^4$

Los resultados muestran que la población evoluciona rápidamente a la

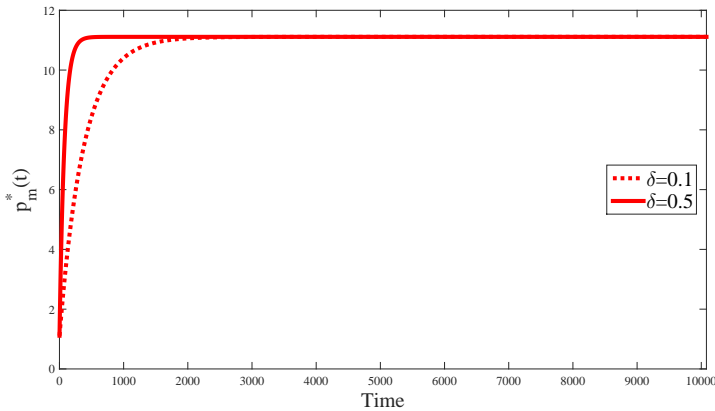


Figura 9.8: Camino de acción óptimo del MSP

estrategia de suscribir y cuanto mayor sea la tasa de aprendizaje más rápido aprenderá dicha estrategia. El precio anunciado es $p_m^*(t) = Nx_m^*(t)/B_m$ con el cual se obtiene el máximo del UW. Se observa que los beneficios del MSP en el modelo dinámico son mayores que en el modelo evolutivo de la población de usuarios pero menores que en el modelo estático.

9.3. Duopolio

A continuación se analizan las decisiones de los agentes del sistema cuando entra un nuevo SP en: un modelo estático cuando se toma una decisión a lo largo del tiempo y una decisión en cada instante del tiempo, un modelo evolutivo de la población de usuarios y un modelo dinámico.

9.3.1. Modelo Estático: Una decisión a lo largo del tiempo

En este modelo la decisión de los usuarios y los SPs solo se toma una vez y dichas decisiones no pueden variar en el tiempo, por ello el ancho de

Tabla 9.5: Resultados del modelo estático con una única decisión

	Ecuación	Resultado
x_m^*	$p_m^* B_m / N$	0.604
x_s^*	$p_s^* B_s / N$	0.396
x_o^*	$1 - x_m^* - x_s^*$	0
p_m^*	$\frac{N\bar{\theta}_m}{B_m\bar{\theta}_m + B_s}$	6,7m.u./MHz
p_s^*	$\frac{N}{B_m\bar{\theta}_m + B_s}$	8,35m.u./MHz
Π_m	$Nx_m T/h$	$1217,66 \cdot 10^4$
Π_s	$Nx_s T/h$	$798,33 \cdot 10^4$
UW	$(Nx_m u_m^* + Nx_s u_s^*) T/h$	$89 \cdot 10^4$
SW	$(\Pi_m + \Pi_s + UW)T/h$	$2105 \cdot 10^4$

banda disponible del SSP es aquel que permita que todos los usuarios de Internet tengan acceso al servicio en cualquier instante de tiempo, es decir, $B_s = \min(B_s(t)) = 94,5\text{MHz}$ mostrado se muestra en la Figura 9.5.

Los resultados de este modelo se resumen en la tabla 9.5 y fueron obtenidos desde (5.38), (3.14), (3.15), (5.1), (5.2), (3.25) y (3.26) y las Tablas 5.1, 5.2, 5.3.

Se puede observar que dado estas decisiones de los usuarios les es indiferente con que SPs suscribir ya que $u_m^* = u_s^*$ y los SPs anuncian unos precios que les permite atender al 100% de los usuarios. Los resultados muestran que la entrada de un nuevo SP en el mercado aumenta el UW y el SW.

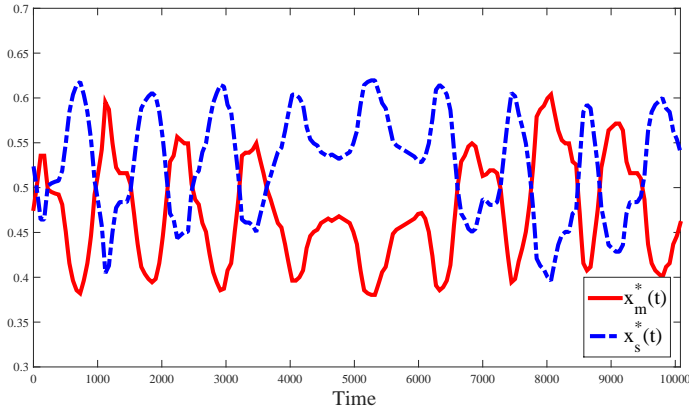


Figura 9.9: Distribución de la población

9.3.2. Modelo Estático: Una decisión en cada instante de tiempo

Se analiza un modelo estático en cada instante de tiempo, es decir, las decisiones de los agentes se realizan una sola vez en cada instante de tiempo y dichas decisiones no dependen de lo sucedido anteriormente. El ancho de banda disponible del SSP es aquel que permita que todos los usuarios de Internet tengan acceso al servicio, es decir, $B_s(t)$ mostrado en la Figura 9.5.

Los resultados de este modelo se obtienen desde (5.38), (3.14), (3.15), (5.1), (5.2), (3.25) y (3.26) y las Tablas 5.1, 5.2, 5.3. En la Figura 9.9 se muestra la distribución de la población en cada instante de tiempo y se observa que cuanto mayor es el ancho de banda disponible del SSP más usuarios puede atender. En la Figura 9.10 se muestran los precios en equilibrio que anuncian los SPs se observan que los precios se encuentran desplazados en 0,8 y es debido a la eficiencia espectral que perciben los usuarios y su comportamiento es inversamente proporcional al ancho de banda disponible del SSP.

Los resultados del modelo estático cuando se toman las decisiones en cada

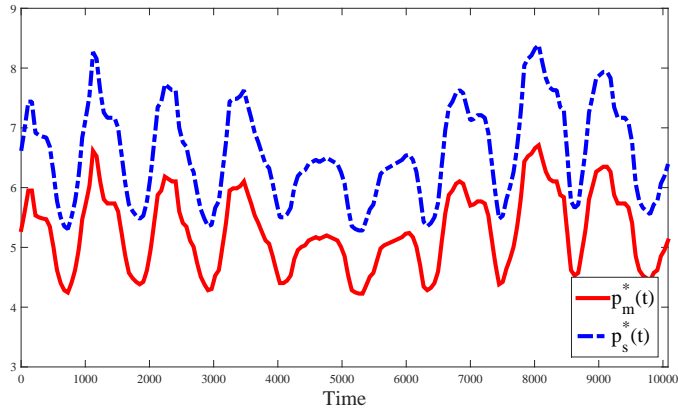


Figura 9.10: Precios en equilibrio de los SPs

instante de tiempo se muestran en la Tabla 9.6.

El modelo estático muestra que los usuarios siempre prefieren suscribir y la distribución de la población depende de los recursos que tienen el SSP en cada instante del tiempo, lo cual también influye en los precios anunciados por los SPs, pero se muestra que las decisiones no dependen de lo sucedido con anterioridad ya que cada instante de tiempo es independiente a lo sucedido anteriormente.

Tabla 9.6: Resultados del modelo estático con múltiples decisiones

Parámetros	Ecuación	Resultado
Π_m	$Nx_m T/h$	$954,3 \cdot 10^4 m.u.$
Π_s	$Nx_s T/h$	$1061,7 \cdot 10^4 m.u.$
UW	$(Nx_m u_m^* + Nx_s u_s^*) T/h$	$114,53 \cdot 10^4$
SW	$(\Pi_m + \Pi_s + UW) T/h$	$2130,5 \cdot 10^4$

Tabla 9.7: Resultados del modelo evolutivo de la población de usuarios

Parámetros	Resultado	
	$\delta = 0,1$	$\delta = 0,5$
p_m^*	6,17m.u	6,17m.u./MHz
p_s^*	8,80m.u	8,80m.u./MHz
Π_m^*	$1104 \cdot 10^4 m.u$	$1105 \cdot 10^4 m.u$
Π_s^*	$886,3 \cdot 10^4 m.u$	$905,2 \cdot 10^4 m.u$
UW	$89,7 \cdot 10^4$	$90,54 \cdot 10^4$
SW	$2080 \cdot 10^4$	$2100,7 \cdot 10^4$

9.3.3. Modelo evolutivo de la población de usuarios

En el Capítulo 6 se estudió el modelo evolutivo de la población de usuarios y se propuso la dinámica del replicador para determinar la evolución de los usuarios con el tiempo, dicha dinámica tiene en cuenta el ancho de banda disponible del SSP en cada instante del tiempo ($B_s(t)$ mostrado se muestra en la Figura 9.5). Dado los parámetros del escenario se obtienen los resultados resolviendo la dinámica del replicar dada en (6.9) y los problemas de programación no-lineal con restricciones dados en (6.11) y (6.10).

En la Figura 9.11 se muestra la distribución de la población en cada instante de tiempo teniendo en cuenta que el ancho de banda disponible del SSP varía, se observa que no importa el ancho de banda disponible la población se mantiene relativamente estable $x_m^* \approx 0,55$ y $x_s^* \approx 0,45$ debido a que solo se anuncia un precio y esté precio no es el óptimo en cada instante de tiempo y por ello la población tarda más en evolucionar, se observa que en la Figura 9.11 (b) que es menos estable debido a que la tasa de aprendizaje

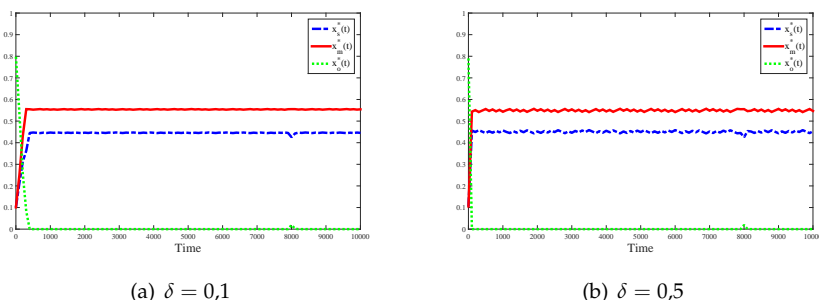


Figura 9.11: Evolución de la población

de los usuarios es más alta. Además se observa que cuanto mayor es la tasa de aprendizaje mejor es el SW y el UW.

9.3.4. Modelo Dinámico

En el Capítulo 7 se estudió el modelo dinámico y en este capítulo se estudia un escenario con los parámetros del apartado 9.1, los resultados se obtienen resolviendo la dinámica del replicar dada en (7.9) y resolviendo el juego diferencial de Stackelberg en enlace abierto a través de sistemas de ecuaciones diferenciales dado en (7.18) y los precios de los SPs dados en (7.15) y (7.13).

En las Figuras 9.12 y 9.13 se muestra la distribución de la población en cada instante de tiempo para el MSP y SSP respectivamente teniendo en cuenta que el ancho de banda disponible del SSP varía, se observa que la población del SSP tiene una relación directa con los recursos, es decir, cuanto mayor son los recursos del SSP mayor es la población que suscribe con él, por el contrario cuanto mayor son los recursos del SSP menor es la población que suscribe con el MSP. Además se observa que cuando la tasa de aprendizaje es baja ($\delta = 0,1$) la distribución de la población varía de manera más suave, y esto refleja en la población que no aprenden tan rápido como varían los recursos.

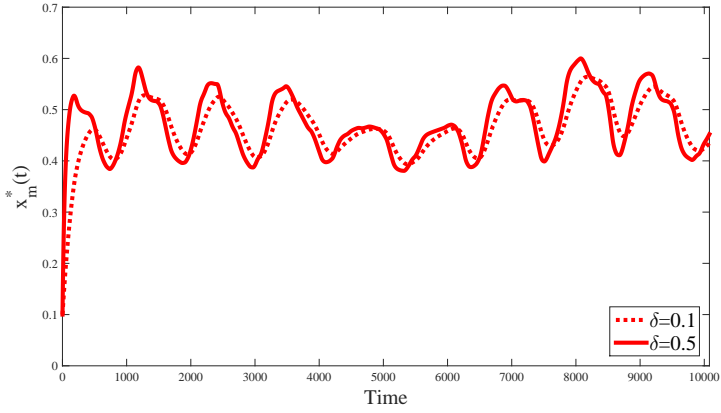


Figura 9.12: Evolución de la población de los usuarios del MSP

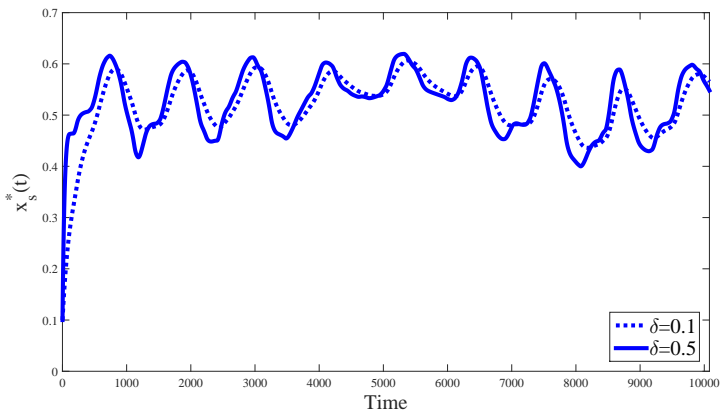


Figura 9.13: Evolución de la población de los usuarios del SSP

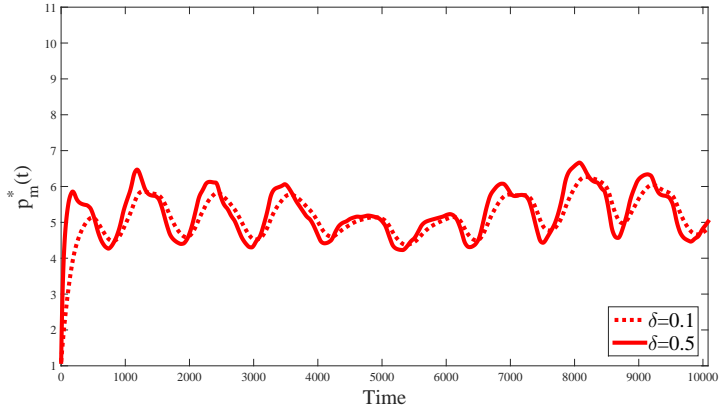


Figura 9.14: Precios en equilibrio del MSP

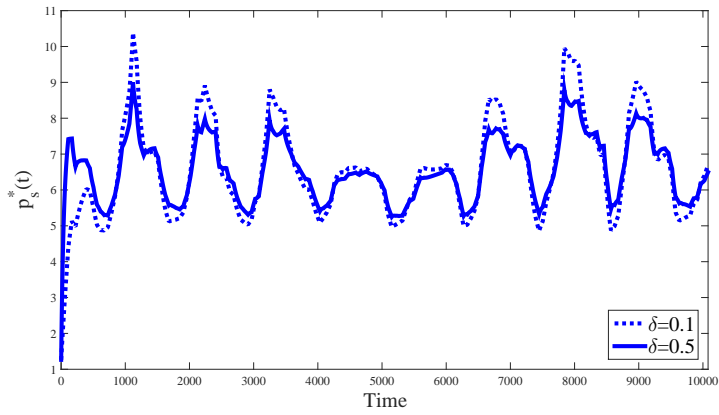


Figura 9.15: Precios en equilibrio del MSP

Tabla 9.8: Resultados del modelo dinámico

	$\delta = 0,1$	$\delta = 0,5$
Π_m^*	$929,22 \cdot 10^4 m.u$	$935,32 \cdot 10^4 m.u$
Π_s^*	$1053,3 \cdot 10^4 m.u$	$1077 \cdot 10^4 m.u$
UW	$101,4 \cdot 10^4$	$105,5 \cdot 10^4$
SW	$2083,92 \cdot 10^4$	$2117,8 \cdot 10^4$

En las Figuras 9.14 y 9.15 se muestra los caminos de acción en equilibrio del MSP y SSP respectivamente teniendo en cuenta que el ancho de banda disponible del SSP varía, se observa que los precios de los SPs se encuentran desplazados 0,8 debido a la eficiencia espectral que perciben los usuarios y que los precios son inversamente proporcionales a los recursos. Además se observa que cuando la tasa de aprendizaje es baja ($\delta = 0,1$) los precios varía de manera más suave, es decir, los usuarios no aprenden tan rápido como varían los recursos.

Los otros resultados del modelo dinámico se muestran en la Tabla 9.8.

9.4. Usuarios que podrían suscribir el servicio

En el capítulo 8 se realizó el estudio de las decisiones que toman los agentes del sistema cuando existen un usuarios que no suscriben el servicio porque no se les garantiza una utilidad mínima. En este apartado se analiza cuántos usuarios suscriben en cada instante de tiempo con la entrada del nuevo SPs dada la utilidad mínima $u_{min}^n = 0,0265$ obtenida desde (8.2) y suponemos que existen en el escenario 3000 usuarios que no desean suscribir el servicio porque no se les garantiza dicha utilidad.

Tabla 9.9: Resultados del modelo estático con una única decisión

b_m^{n*}	0.09	b_s^{n*}	0.072
x_m^*	0.604	x_s^*	0.396
p_m^*	11,11m.u./MHz	p_s^*	13,88m.u./MHz
Π_m	$2015,59 \cdot 10^4$	Π_s	$1322,8 \cdot 10^4$
UW	$89 \cdot 10^4$	SW	$3427,4 \cdot 10^4$

9.4.1. Modelo Estático: Una decisión a lo largo tiempo

En el apartado 9.3.1 se obtuvo el ancho de banda disponible del SSP en cualquier instante de tiempo, $B_s = 94,5MHz$, dado este parámetro y los de la Tabla 9.1 se obtiene el número de usuarios a los que se les garantiza una utilidad mínima desde (8.7)

$$N_n = 3312 \text{ usuarios,}$$

los usuarios se aproximan al entero inferior.

Dado que los usuarios a los que se les puede garantizar la utilidad mínima es N_n se obtienen los resultados de este escenario desde (5.38), (3.14), (3.15), (5.1), (5.2), (3.25) y (3.26) y las Tablas 5.1, 5.2, 5.3 y se muestran en la Tabla 9.9.

Comparando los resultados obtenidos en el modelo estático cuando el número de usuarios es fijo (apartado 9.3.1) se observa que los usuarios suscriben una menor cantidad de ancho de banda debido a que existe mayor demanda por parte de nuevos usuarios y esto genera que los SPs anuncien unos precios más altos, pero estos nuevos usuarios hacen que los SPs obtengan unos mayores beneficios al punto que la entrada del nuevo SP afecta muy poco los beneficios del MSP.

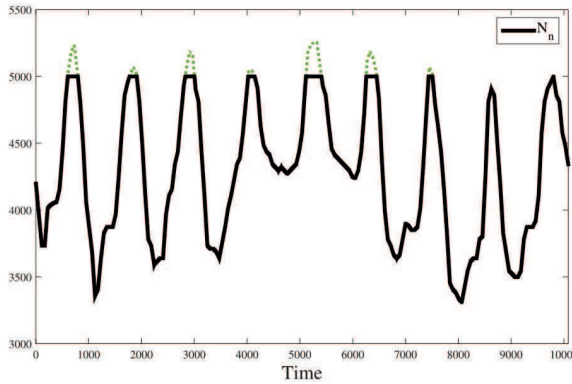


Figura 9.16: Usuarios que podrían suscribir el servicio

9.4.2. Modelo Estático: Una decisión en cada instante del tiempo

En el apartado 9.3.2 se planteó que el ancho de banda disponible del SSP es aquel que permita que todos los usuarios de Internet tengan acceso al servicio, es decir, $B_s(t)$ mostrado en la Figura 9.5, dado $B_s(t)$ se obtiene los usuarios que podrían suscribir el servicio en cada instante de tiempo $N_n(t)$,

$$N_n(t) = N \frac{B_m \theta_m^n + B_s(t)}{B_m \theta_m^n}, \quad (9.1)$$

Dado los parámetros de este escenario se obtienen el número de usuarios que podría suscribir el servicio en la Figura 9.16, podemos observar que los usuarios se encuentra acotados a 5000 porque el número de usuarios que no suscriben el servicio son 3000 usuarios.

Dado los usuarios que podrían suscribir el servicio en cada instante de tiempo, $N_n(t)$, se obtienen las decisiones de los agentes del sistema desde (5.38), y las Tablas 5.1, 5.2, 5.3 y se muestran en las Figuras 9.17 y 9.18.

Comparando los resultados obtenidos en el modelo estático cuando el número de usuarios es fijo (apartado 9.3.1) y los obtenidos en la Tabla 9.10

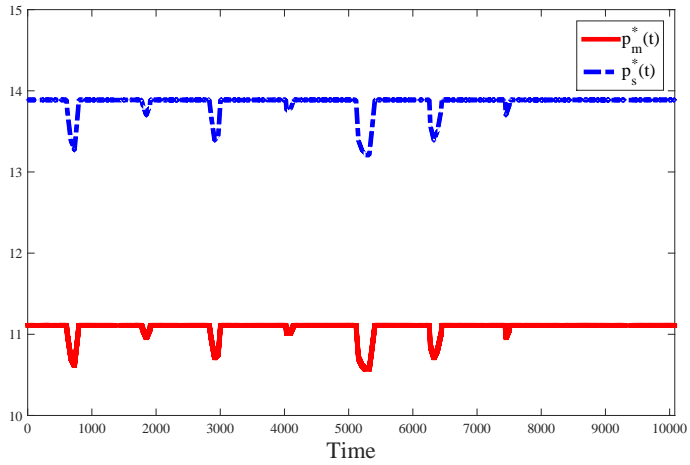


Figura 9.17: Precios en equilibrio de los SPs en cada instante de tiempo

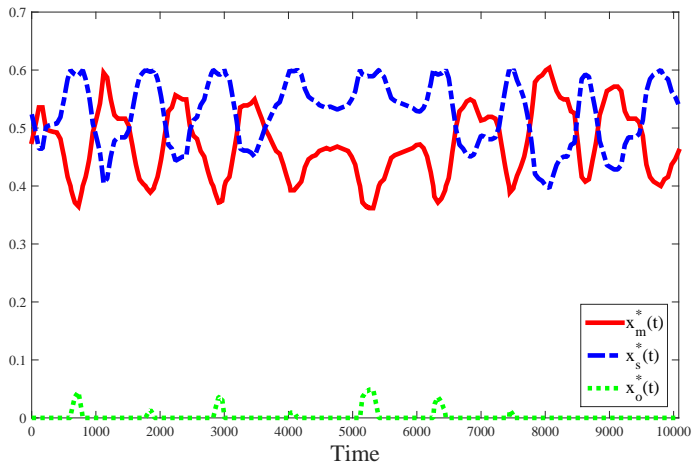


Figura 9.18: Distribución de los usuarios en cada instante de tiempo

Tabla 9.10: Resultados del modelo estático con múltiples decisiones

Π_m	$2010,4 \cdot 10^4$	Π_s	$2299 \cdot 10^4$
UW	$114,16 \cdot 10^4$	SW	$4423,6 \cdot 10^4$

se observa que los usuarios suscriben una menor cantidad de ancho de banda debido a que existe mayor demanda por parte de nuevos usuarios y esto genera que los SPs anuncien unos precios más altos, pero estos nuevos usuarios hacen que los SPs obtengan unos mayores beneficios al punto que la entrada del nuevo SP afecta muy poco los beneficios del MSP.

9.4.3. Modelo evolutivo de la población de usuarios

En el apartado 8.3 se obtuvo el número de usuarios a los que se les garantiza una utilidad mínima mediante la búsqueda realizada en el Algoritmo 2, aplicando dicho algoritmo a este escenario se obtiene que:

$$N_n = 3610 \text{ usuarios,}$$

Con los resultados obtenidos en el Algoritmo 2 se extrajeron los datos para la obtención de la Figura 9.19 y los resultados de la Tabla 9.11. La Figura 9.19 muestra la distribución de los usuarios con el tiempo se observa que la población no se ajusta tan rápido como los recursos debido a que solo se anuncia un precio a lo largo del tiempo y hace que cuando bajen los recursos muchos usuarios se queden sin suscribir el servicio. Además los precios anunciados por los SPs son más altos hasta el punto que el precio anunciado por el MSP es el del monopolio. En este modelo se atiende más usuarios que en el modelo de estático con una sola decisión debido a que en media el SSP tiene más recursos.

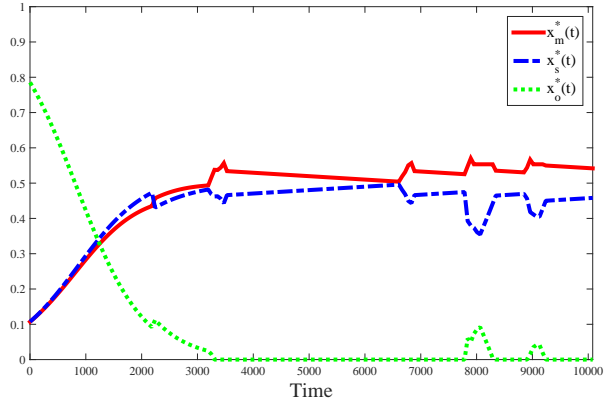


Figura 9.19: Distribución de los usuarios con el tiempo

Tabla 9.11: Resultados del modelo evolutivo de la población de usuarios

b_m^{n*}	0.09	b_s^{n*}	0.072
p_m^*	11,11m.u./MHz	p_s^*	13,88m.u./MHz
Π_m	$1723,6 \cdot 10^4$	Π_s	$1561,9 \cdot 10^4$
UW	$87,87 \cdot 10^4$	SW	$3373,4 \cdot 10^4$

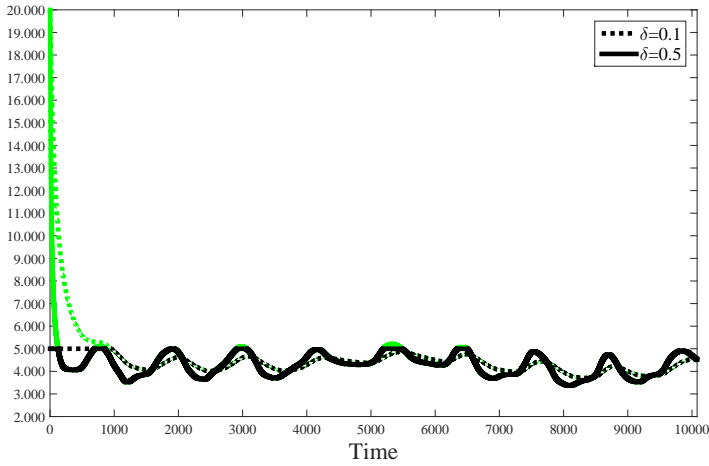


Figura 9.20: Usuarios que podrían suscribir el servicio

9.4.4. Modelo dinámico

En el apartado 8.4 se muestra que el número de usuarios a los que se les garantiza una utilidad mínima se obtiene mediante la búsqueda realizada en el Algoritmo 3, aplicando dicho algoritmo se extrajeron los datos para la obtención de las Figuras 9.20 y 9.21.

En la Figura 9.20 se muestra la cantidad de usuarios que pueden suscribir el servicio en cada instante de tiempo, se observa que al principio ($t = [0 - 1000]$) para una tasa de aprendizaje baja ($\delta = 0,1$) podrían suscribir de 20000 a 5000 usuarios debido a que el estado de la población inicial es muy bajo y podrían haber más usuarios en el escenario, pero no todos ellos suscribirían dado el estado inicial de la población.

Dado los usuarios que podrían suscribir el servicio en cada instante de tiempo, $N_n(t)$, se obtienen las decisiones de los agentes del sistema desde (5.38), y las Tablas 5.1, 5.2, 5.3 y se muestran en la Figuras 9.21 y en la Tabla 9.12. En la figura 9.21 se observa que cuando la distribución de la población

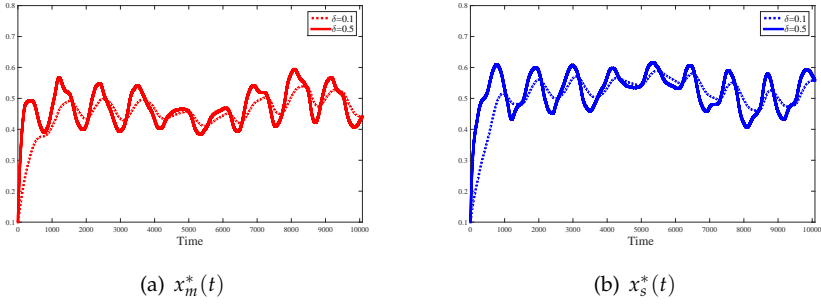


Figura 9.21: Distribución de los usuarios en cada instante de tiempo

Tabla 9.12: Resultados del modelo dinámico

Π_m	$1973,7 \cdot 10^4$	Π_s	$2246,9 \cdot 10^4$
UW	$239 \cdot 10^4$	SW	$4465,6 \cdot 10^4$

se acerca a la ESS la cantidad de usuarios a los que se les puede garantizar el servicio en el modelo dinámico se comporta de manera similar que en el modelo estático, y cuanto mayor sea la tasa de aprendizaje la distribución de la población llega más rápido a la ESS, y por tanto se asemeja más al modelo estático con múltiples decisiones. Los precios en equilibrio de los SPs en cada instante de tiempo evolucionan hasta que el MSP anuncia el precio de monopolio cuando la población evoluciona a suscribir, y el SSP anuncia $p_s^*(t) = 13,89$ cuando la población evoluciona a la estrategia de suscribir el servicio.

9.5. Comparación de resultados

En esta sección se van a comparar los resultados del modelo de monopolio, del modelo estático con una sola decisión, del modelo estático con múltiples decisiones, del modelo evolutivo de la población de

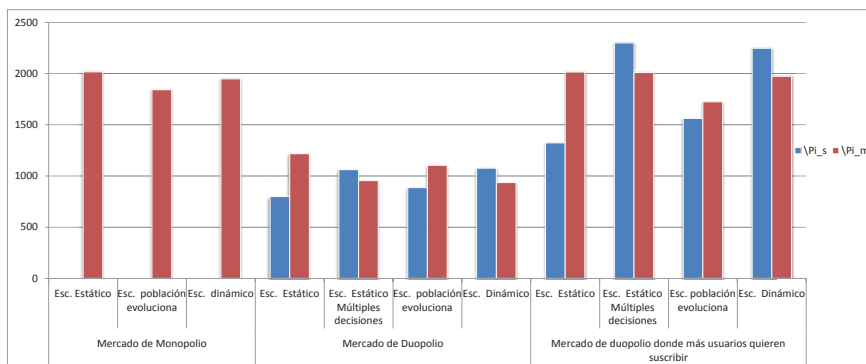


Figura 9.22: Beneficios de los SPs en todos los modelos

usuarios, del modelo dinámico y además todos los modelos cuando más usuarios podrían suscribir el servicio, todos estos resultados se obtuvieron anteriormente, teniendo en cuenta los parámetros de la Tabla 9.1 y la variación de los recursos del SSP mostrados en la Figura 9.5.

9.5.1. Beneficios de los SPs

Los beneficios de los SPs (Π_m y Π_s) a lo largo del tiempo de estudio se muestran en la Figura 9.22 de la cual se puede concluir que:

- El MSP se ve afectado con la entrada de un nuevo competidor en el mercado, pero si existen más usuarios que quieran suscribir el servicio sus beneficios se ven afectados en menor manera cuanto mayor sean dichos usuarios. Se observa que en el Monopolio al MSP le conviene más un modelo estático, puesto que obtiene unos mayores beneficios, pero en el mercado de competencia sus beneficios son mayores en el modelo evolutivo de la población de usuarios debido a que la población aprende de manera más lenta que en los otros modelos y eso le beneficia más al MSP.

- El SSP tiene el incentivo de entrar en el mercado ya que obtiene beneficios garantizados y cuanto mayor sean sus recursos mayor son los beneficios obtenidos, y cuanto mayor sea su cobertura a más usuarios le puede prestar el servicio con lo cual obtendría mayores beneficios. Al SSP siempre le conviene un modelo dinámico, porque realiza reutilización dinámica de los recursos.
- En el mercado de competencia a los SPs les conviene que sean más los usuarios que quieran suscribir el servicio ya que esto aumenta la demanda del mercado y se les refleja en mejores beneficios para ambos SPs.

9.5.2. Bienestar social y bienestar de los usuarios

El bienestar de social (SW) y el bienestar de los usuarios (UW) fue evaluado a lo largo del tiempo de estudio y los resultados para cada uno de los modelos se muestran en la Figura 9.23 de la cual se puede concluir que:

- El UW aumenta con la entrada de más competencia en el mercado debido a que los SPs anuncian un menor precio, los usuarios en media perciben mejor eficiencia espectral y aumentan los recursos del escenario, todo ello aumenta la utilidad de los usuarios y por ende el UW. Se observa en la Figura 9.23 que cuanto más veces se tomen las decisiones en el escenario mejor es el UW.
- El SW aumenta con la entrada de más competencia pero debido a que aumenta el UW, ya que la suma de los beneficios de los SPs no se ve afectada en el mercado de competencia, pero si existieran más usuarios que quieran suscribir el servicio entonces aumenta el UW y la suma de los beneficios de los SPs, por lo tanto aumentaría en mayor proporción el SW que en los otros modelos.

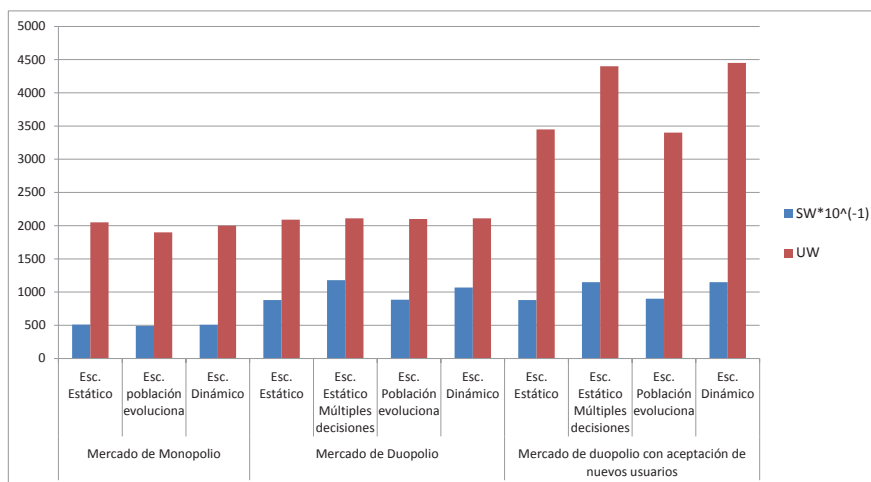


Figura 9.23: Bienestar social y bienestar de los usuarios

9.6. Conclusiones

En este Capítulo se analizó y se modeló el comportamiento de la población y de los SPs en un caso de estudio. Dado los resultados obtenidos se puede concluir que:

- En el modelo estático se analizaron dos posibles casos, el primero donde los agentes del sistema toma una sola decisión a lo largo del tiempo y se observa que los beneficios del SSP son los más bajos de todos los modelos de duopolio debido a que no realiza una reutilización dinámica del ancho de banda y por ello los recursos que tiene son menores. El otro modelo estático que se analizó es donde los agentes del sistema toman una decisión en cada instante del tiempo, por el contrario que en el caso anterior aquí el SSP obtiene los beneficios máximos ya que utiliza todos los recursos disponibles. En ambos modelos suscriben el 100 %, pero cuando los agentes del sistema toman una decisión en cada instante del tiempo los usuarios perciben una

utilidad más alta.

- En el modelo evolutivo de la población de usuarios se muestra un escenario que tiene un comportamiento diferentes a los estudiados debido a que la decisión de los SPs no se toma en el mismo intervalo de tiempo que la de los usuarios y se muestra que los usuarios no pueden ajustar su comportamiento tan rápido a la variación de recursos del escenario lo que genera que cuando los recursos del SSP bajen entonces existan usuarios que no puedan suscribir, por ello en este modelo se tiene un UW más bajo que en los demás modelo , a pesar que se hace una reutilización dinámica de los recursos.
- En el modelo dinámico muestra que si la tasa de aprendizaje de la población es alta y la población se encuentra cerca de la ESS su comportamiento es similar al modelo estático cuando los agentes del sistema toman una decisión en cada instante del tiempo, pero nos permite ver como es la evolución de los usuarios y como ajustan sus conductas a la variación dinámica de los recursos, en este modelo se observa que los usuarios siempre suscriben el servicio y solo varían de un SPs al otro según la variación dinámica de los recursos los cuales influyen en los precios.
- Si existen usuarios que no suscriben el servicio porque no se les garantiza una utilidad mínima ello son los mayores beneficiados con la entrada del nuevo SP ya que podrá suscribir el servicio, pero en media los usuarios perciben la misma utilidad ya que los precios de los SPs aumentan a medida que suscriben más usuarios. En este tipo de modelos los beneficios del MSP no se ven tan afectado con la entrada de un nuevo SP y el SSP tiene unos beneficios garantizados.

Capítulo 10

Conclusions

Mobile communications have experienced an enormous growth and this tendency still continues as the number of connected users is higher every day. This growth has made mobile communications a very attractive market for providers who wish to make their way in this market and satisfy the great demand required by users. Due to the limitations of the radio spectrum and the unavailability of licenses for new bands, new service providers should seek to implement new technologies which allow them a greater market impact. The feasibility of the business model should also be taken into account towards ensuring financial viability.

This thesis approaches a business model where a service provider implements Small Cells technology (SSP) and competing with the existing macrocell provider or MSP. The limitations of this technology were taken into account such as limited availability and coverage, dynamic re-utilization of resources and the decisions of users and service providers, while taking into consideration the influence of each provider over the decisions of their competitor.

The Theory of Games enabled us to predict the behaviour of users and providers on the basis that users and providers take the decisions that suit them best. By knowing the decisions in balance of users and providers,

several models were assessed where the decisions of both users and providers were taken only once along the time course or at every instant along time.

The models assessed were: the static model, a model with an evolving population and the dynamic model. The results obtained brought us to conclude that a dynamic re-utilization of resources enables SSP to offer a higher bandwidth for all users and higher profits and higher user satisfaction.

All the assessed models allowed us to know the effects of a new provider in the market of mobile communications, which are as follows:

- Users get a better service due to the fact the SSP forces the MSP to lower prices as the SSP increases the spectrum efficiency of users and the resources available in the scenario.
 - The SSP goes into the communication market well aware that their profits are guaranteed. This is because he is offering better spectrum efficiency and has competitive prices in relation to the MSP, as far as users want to subscribe to the new service. In chapter 5 it was demonstrated that if the SSP has low coverage the MSP would rather step out and not compete whereas they will only compete if competitors go over a certain threshold. The profits of the SSP are guaranteed in both cases and their profits would be highest if they achieved to cover 100% of the MSP area. All models analyzed proved that the bigger the resources of the SSP the higher their profits.
 - The MSP becomes aggrieved by the new SSP in the market because profits are lower and the lower the spectrum efficiency offered to the users the lower their profits. This suggests that the MSP should improve the value of their services as perceived by the users so their profits do not become affected by competence.
 - The entrance of the SSP improves the user comfort and social welfare.
-

Apéndices

Apéndice A

Abreviaturas y acrónimos

BR	Best Response
BS	Base Station
CR	Cognitive Radio
DAS	Distributed Antenna System
ESS	Evolutionarily Stable Strategy
FCC	Federal Communication Commission
FSP	Femtocell Service Provider
HetNets	Heterogeneous Network
ISP	Internet Service Provider
LTE	Long Term Evolution
MSP	Macrocell Service Provider
MBS	Macrocell Base Station
MU	Macrocell User
multi-RAT	Multi-Radio Access Technology
NE	Nash Equilibrium
OFDMA	Orthogonal Frequency-Division Multiple Access
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QoS	Quality of Service
RAN	Radio Access Network

SE	Stackelberg Equilibrium
SNR	Signal to Noise Ratio
SP	Service Provider
SU	Small cell User
SW	Social Welfare
UW	Users Welfare

Apéndice B

Análisis de la dinámica del replicador en Monopolio

El comportamiento evolutivo de la población en el mercado monopolista se modeló utilizando la dinámica de réplica dada en 4.7, la cual recordamos a continuación

$$\dot{x}_j(t) = \delta x_j(t) [u_j(\theta_m^n, p_m, t) - U(\theta_m^n, p_m, t)],$$

donde $j \in S$ son las posibles estrategias de los usuarios y $\delta \in (0, 1)$ es la tasa de aprendizaje de la población total que controla la frecuencia de adaptación.

La dinámica del replicador obtiene unas soluciones donde el estado de la población no se modifica cuando el diferencial del estado de la población es cero, es decir,

$$\begin{aligned} \delta x_m(t) [u_m(\theta_m^n, p_m) - U(\theta_m^n, p_m, t)] &= 0, \\ \delta x_o(t) [u_o - U(\theta_m^n, p_m, t)] &= 0. \end{aligned}$$

se analizan todas las posibles soluciones del sistema de ecuaciones planteado anteriormente

I $\delta x_m(t) = 0$, obteniendo que: $x_m^* = 0$ y $x_o^* = 1$, tenemos:

- Si $B_m = 0$ o $\theta_m = 0$, significa que, bien el MSP no tiene recursos disponibles para atender a los usuarios o que la eficiencia espectral que perciben los usuarios es nula y por lo tanto, el MSP no podría prestar el servicio de comunicaciones móviles, entonces no existiría un escenario que analizar y la población no puede suscribir. $\mathbf{x}^* = \{x_m^*, x_o^*\} = \{0, 1\}$ es la única estrategia posible y es un Equilibrio de Nash [70] porque los usuarios no pueden cambiar de estrategia para aumentar su utilidad, pero no es una estrategia evolutivamente estable (ESS) porque cualquier perturbación en el escenario hace que la población prefiera suscribir el servicio ya que

$$u_m^* > z_m u_m^* + z_o u_o^*.$$

donde $\mathbf{z}^* = \{z_{m_i}^*, z_{s_i}^*, z_{o_i}^*\}$ es el nuevo estado de la población. La estrategia \mathbf{x}^* es un estado estacionario y es un Equilibrio de Nash el cual no es estable.

- Si $B_m > 0$ y $\theta_m > 0$, significa que el MSP puede atender a los usuarios y $\mathbf{x}^* = \{x_m^*, x_o^*\} = \{0, 1\}$ es la única estrategia posible y no es un Equilibrio de Nash [70] porque los usuarios prefieren suscribir el servicio, ya que

$$u_m^* > u_o^*,$$

además, no es una ESS porque cualquier perturbación en el escenario hace que la población prefiera suscribir el servicio ya que

$$u_m^* > z_m u_m^* + z_o u_o^*.$$

Por lo tanto, la estrategia \mathbf{x}^* es un estado estacionario pero no es un Equilibrio de Nash.

II $\delta x_o(t) = 0$, obteniendo que: $x_o^* = 0$ y $x_m^* = 1$, tenemos:

- Si $p_m \geq N/B_m(t)$, es decir el MSP puede atender a todos los usuarios, entonces la estrategia $\mathbf{x}^* = \{x_m^*, x_o^*\} = \{1, 0\}$ es un

Equilibrio de Nash [70] porque

$$u_m^* > u_o^*,$$

adicionalmente es una ESS porque cualquier perturbación en las estrategias en el estado de equilibrio hace que la población vuelva hacia la ESS ya que:

$$u_m^* > z_m u_m^* + z_o u_o^*.$$

- Si $p_m < N/B_m(t)$, es decir el MSP no puede atender a todos los usuarios, entonces la estrategia $\mathbf{x}^* = \{x_m^*, x_o^*\} = \{1, 0\}$ no es posible por las limitaciones de recursos del MSP, en este caso dicha estrategia no es posible y la población evolucionará a $x_m = \min(1, \frac{p_m B_m}{N})$ y $x_o = 1 - x_m$, por lo tanto la estrategia \mathbf{x}^* no es posible en este caso.

III Si $x_m^* \geq 0$ y $x_s(t) \geq 0$, esto sucede cuando la estrategia de la población es $\mathbf{x}^* = \{x_m^*, x_o^*\} = \{\frac{p_m B_m}{N}, 1 - \frac{p_m B_m}{N}\}$, \mathbf{x}^* es un Equilibrio de Nash [70] porque el cambio de estrategia de los usuarios no les generara una mayor utilidad, ya que el MSP atiende a todos los usuarios que puede y adicionalmente es una ESS porque cualquier perturbación en las estrategias en el equilibrio hace que la población vuelva hacia la ESS ya que:

$$u_m^* > z_m u_m^* + z_o u_o^*.$$

Por lo tanto \mathbf{x}^* es una ESS y es un Equilibrio de Nash estable.

Del análisis anterior se obtiene que 4.8 y 4.9 son los estados de la población donde existe un ESS y a su vez un equilibrio de Nash estable,

$$\begin{aligned} x_m^* &= \min(1, p_m B_m / N), \\ x_o^* &= \max(0, 1 - p_m B_m / N), \end{aligned}$$

la estrategia $\mathbf{x}^* = \{x_m^*, x_o^*\}$ es una solución a la (4.7) y \mathbf{x}^* es un Equilibrio de Nash Estricto, porque se ha demostrado ser asintóticamente estable [70].

La obtención de la ESS se muestra en el algoritmo 4.

Algorithm 4 Estrategia de Evolución Estable (ESS)

- Dada el estado de la población actual: $\mathbf{x} = \{x_m, x_o\}$.
 - Una pequeña subpoblación $\mathbf{y} = \{y_m, y_o\}$ juega una estrategia «mutante», donde $y_m + y_o = 1$.
 - Dado el estado de la población «mutante» se obtiene la funciones de utilidad esperadas, U_y .
 - La fracción de la población que sigue una estrategia «mutante» es $0 < \eta < 1$.
 - El nuevo estado de la población es $\mathbf{z} = \{z_m, z_o\}$, donde:
 $z_m = (1 - \eta)x_m + \eta y_m$ y $z_o = (1 - \eta)x_o + \eta y_o$.
 - Dado el nuevo estado de la población se obtiene la funciones de utilidad esperadas, U_z .
- if ($U_y > U_z$)
- La población «mutante» invade la población «no-mutante».
 - El estado de la población «no-mutante» pasa a ser el estado de población «mutante».
 - $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$
- else
- La población «mutante» evolucionara a la población «no-mutante»,
 - $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$
- end
- if ($U > U_y \forall \mathbf{y}$)
- El estado de población \mathbf{x}^* es una ESS porque no puede ser invadida por ningún otro tipo de estrategia «mutante».
- end
-

Apéndice C

Análisis de la dinámica del replicador

El comportamiento evolutivo de la población en el mercado de competencia entre SP se modeló utilizando la dinámica de réplica dada en 6.9

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{If} \left(x_{m_i} < \frac{B_{m_i} p_m}{N_i} \quad \& \quad x_{s_i} < \frac{B_{s_i}(t) p_s}{N_i} \right) \\
 &\quad \dot{x}_{m_i}(t) = \delta x_{m_i}(t) [u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)], \\
 &\quad \dot{x}_{s_i}(t) = \delta x_{s_i}(t) [u_{s_i}(p_s, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)], \\
 &\quad \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t) [-U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)]. \\
 &\mathbf{Elseif} \left(x_{m_i} < \frac{B_{m_i} p_m}{N_i} \right) \\
 &\quad \dot{x}_{m_i}(t) = \delta x_{m_i}(t) [u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, t)], \\
 &\quad \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t) [-U_i(\theta_m^n, p_m, t)]. \\
 &\mathbf{Elseif} \left(x_{s_i} < \frac{B_{s_i}(t) p_s}{N_i} \right) \\
 &\quad \dot{x}_{s_i}(t) = \delta x_{s_i}(t) [u_{s_i}(p_s, t) - U_i(p_s, r_i, t)], \\
 &\quad \dot{x}_{o_i}(t) = \delta x_{o_i}(t) [-U_i(p_s, r_i, t)]. \\
 &\mathbf{Else} \\
 &\quad \dot{x}_{m_i}(t) = 0, \\
 &\quad \dot{x}_{s_i}(t) = 0, \\
 &\quad \dot{x}_{o_i}(t) = 0. \\
 &\mathbf{End}
 \end{aligned}$$

La dinámica del replicador llega a soluciones donde el estado de la población no se modifica, es decir, un estado tal que no admite evolución cuando

$$\begin{aligned}\delta x_{m_i}(t)[u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)] &= 0, \\ \delta x_{s_i}(t)[u_{s_i}(p_s, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)] &= 0, \\ \delta x_{o_i}(t)[-U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t)] &= 0.\end{aligned}\tag{C.1}$$

A continuación se analizan todas las posibles soluciones al sistema de ecuaciones planteado en (C.1)

I $\delta x_{m_i}(t) = 0$, obteniendo que: $x_{m_i}^* = 0$ y $x_{s_i}^* + x_{o_i}^* = 1$. Tenemos dos posibles casos:

- Si $p_s \geq N_i/B_{s_i}(t)$ y $p_s < p_m\theta_{m_i}$, es decir el SSP puede atender a todos los usuarios y estos prefieren suscribir con él, entonces la estrategia $\mathbf{x}^* = \{x_{m_i}^*, x_{s_i}^*, x_{o_i}^*\} = \{0, 1, 0\}$ es un Equilibrio de Nash [70] porque

$$u_{s_i}^* > u_{m_i}^* > u_{o_i}^*,$$

adicionalmente es una ESS porque cualquier perturbación en las estrategias en equilibrio hace que la población vuelva hacia la ESS, es decir, que si una parte de la población cambia a una estrategia mutante, dicha población volverá a evolucionar hacia la ESS ya que:

$$u_{s_i}^* > z_{m_i}u_{m_i}^* + z_{s_i}u_{s_i}^* + z_{o_i}u_{o_i}^*$$

donde $\mathbf{z}^* = \{z_{m_i}^*, z_{s_i}^*, z_{o_i}^*\}$ es el nuevo estado de la población.

- Si $p_s < N_i/B_{s_i}(t)$ o $p_s \geq p_m\theta_{m_i}$, es decir el SSP no puede atender a todos los usuarios o los usuarios prefieren no suscribir con él, entonces la estrategia $\mathbf{x}^* = \{x_{m_i}^*, x_{s_i}^*, x_{o_i}^*\} = \{0, 1, 0\}$ es un estado estacionario porque el estado de la población no varía, pero no es un Equilibrio de Nash [70] porque

$$u_{m_i}^* > u_{s_i}^* > u_{o_i}^*,$$

no es estable porque cualquier perturbación en las estrategias hace que la población no vuelva hacia el estado estacionario ya que:

$$u_{s_i}^* < z_{m_i}u_{m_i}^* + z_{s_i}u_{s_i}^* + z_{o_i}u_{o_i}^*.$$

II $\delta x_{s_i}(t) = 0$, obteniendo que: $x_{s_i}^* = 0$ y $x_{m_i}^* + x_{o_i}^* = 1$. Tenemos dos posibles casos:

- Si $p_m \geq N_i/B_{m_i}(t)$ y $p_s > p_m\theta_{m_i}$, es decir el MSP puede atender a todos los usuarios y los usuarios prefieren suscribir con él, entonces la estrategia $\mathbf{x}^* = \{x_{m_i}^*, x_{s_i}^*, x_{o_i}^*\} = \{1, 0, 0\}$ es un Equilibrio de Nash [70] porque

$$u_{m_i}^* > u_{s_i}^* > u_{o_i}^*,$$

adicionalmente es una ESS porque cualquier perturbación en las estrategias en el equilibrio hace que la población vuelva hacia la ESS ya que:

$$u_{m_i}^* > z_{m_i}u_{m_i}^* + z_{s_i}u_{s_i}^* + z_{o_i}u_{o_i}^*.$$

- Si $p_m < N_i/B_{m_i}(t)$ o $p_s \leq p_m\theta_{m_i}$, es decir el MSP no puede atender a todos los usuarios o todos los usuarios prefieren no suscribir con él, entonces la estrategia $\mathbf{x}^* = \{x_{m_i}^*, x_{s_i}^*, x_{o_i}^*\} = \{1, 0, 0\}$ es un estado estacionario porque el estado de la población no varia, pero no es un Equilibrio de nash [70] porque

$$u_{m_i}^* > u_{s_i}^* > u_{o_i}^*,$$

no es estable porque cualquier perturbación en las estrategias hace que la población no vuelva hacia el estado estacionario ya que:

$$u_{s_i}^* < z_{m_i}u_{m_i}^* + z_{s_i}u_{s_i}^* + z_{o_i}u_{o_i}^*.$$

III Si $x_{m_i}^* \geq 0$ y $x_{s_i}(t) \geq 0$, entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_{m_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t) &= 0 \\ u_{s_i}(\theta_m^n, p_m, t) - U_i(\theta_m^n, p_m, p_s, r_i, t) &= 0 \end{aligned}$$

el comportamiento de la población no depende de los precios ya que son conocidos en esta etapa, por esta razón se varían todos los precios de los SPs, para conocer hacia donde evoluciona la población. Aplicando las mismas consideraciones que en el apartado 5.2.1, se obtiene que la población evolucionará hasta la estrategia $\mathbf{x}^* = \{x_{m_i}^*, x_{s_i}^*, x_{o_i}^*\}$ dadas en las Tablas C.1, C.2 y C.3, donde $x_{o_i}^*(t) = 1 - x_{m_i}^*(t) - x_{s_i}^*(t)$. Donde \mathbf{x}^* es un Equilibrio de Nash [70] porque es la mejor respuesta de los usuarios dada las estrategias elegidas por otros usuarios, por lo tanto, si un usuario cambia de dicha estrategia su utilidad será menor, por esta razón \mathbf{x}^* es una ESS ya que cualquier perturbación en las estrategias en equilibrio hace que la población vuelva hacia la ESS.

Tabla C.1: La fracción de la población cuando $p_s > p_m/\theta_{m_i}$

$p_m \geq \frac{N_i}{B_{m_i}}$	$p_{m_i}(p_s) < p_m < \frac{N_i}{B_{m_i}}$	$p_m \leq p_{m_i}(p_s)$
$x_{m_i}^*(t) = 1$	$x_{m_i}^*(t) = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$	$x_{m_i}^*(t) = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$
$x_{s_i}^*(t) = 0$	$x_{s_i}^*(t) = 1 - \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$	$x_{s_i}^*(t) = \frac{p_s B_{s_i}(t)}{N_i}$

Tabla C.2: La fracción de la población cuando $p_s < p_m/\theta_{m_i}$

$p_s \geq \frac{N_i}{B_{s_i}(t)}$	$p_{s_i}(p_m) < p_s < \frac{N_i}{B_{s_i}(t)}$	$p_s \leq p_{s_i}(p_m)$
$x_{m_i}^*(t) = 0$	$x_{m_i}^*(t) = 1 - \frac{p_s B_{s_i}(t)}{N_i}$	$x_{m_i}^*(t) = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$
$x_{s_i}^*(t) = 1$	$x_{s_i}^*(t) = \frac{p_s B_{s_i}(t)}{N_i}$	$x_{s_i}^*(t) = \frac{p_s B_{s_i}(t)}{N_i}$

La obtención de la ESS se muestra en el algoritmo 5, teniendo en cuenta las restricciones que tienen los SPs en el número de usuarios máximos que pueden atender, dadas anteriormente en (3.19) y (3.20).

Algorithm 5 Estrategia de Evolución Estable (ESS)

Dada el estado de la población actual: $\mathbf{x}_i = \{x_{m_i}, x_{s_i}, x_{o_i}\}$.

- Una pequeña subpoblación $\mathbf{y}_i = \{y_{m_i}, y_{s_i}, y_{o_i}\}$ juega una estrategia «mutante», donde $y_{m_i} + y_{s_i} + y_{o_i} = 1$.
- La utilidad esperada de la población «mutante» es U_{y_i} , y la fracción de la población con una estrategia «mutante» es $0 < \eta < 1$.
- El nuevo estado de la población es $\mathbf{z}^* = \{z_{m_i}^*, z_{s_i}^*, z_{o_i}^*\}$, donde:

$$z_{m_i} = (1 - \eta)x_{m_i} + \eta y_{m_i}, z_{s_i} = (1 - \eta)x_{s_i} + \eta y_{s_i} \text{ y } z_{o_i} = (1 - \eta)x_{o_i} + \eta y_{o_i}.$$
- La nueva utilidad esperadas de la población es U_{z_i} .

if ($U_y > U_z$)

- La población «mutante» invade la población «no-mutante», de tal manera que el estado de la población «no-mutante» pasa al estado de «mutante».
- $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$

else

- La población «mutante» evolucionara a la población «no-mutante»,
- $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$

if ($U_i > U_{y_i} \forall \mathbf{y}$)

- El estado de población \mathbf{x}^* es una ESS porque no puede ser invadida por ningún otro tipo de población «mutante».
-

Tabla C.3: La fracción de la población cuando $p_s = p_m/\theta_{m_i}$

	$p_s > \frac{N_i}{2B_{s_i}(t)}$	$p_{s_i}(p_m) \leq p_s \leq \frac{N_i}{2B_{s_i}(t)}$	$p_s < p_{s_i}(p_m)$
$p_m > \frac{N_i}{2B_{m_i}}$	$x_{m_i}^*(t) = 1/2$ $x_{s_i}^*(t) = 1/2$	$x_{m_i}^*(t) = 1 - \frac{p_s B_{s_i}(t)}{N_i}$ $x_{s_i}^*(t) = \frac{p_s B_{s_i}(t)}{N_i}$	$x_{m_i}^*(t) = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$ $x_{s_i}^*(t) = \frac{p_s B_{s_i}(t)}{N_i}$
$p_{m_i}(p_s) \leq p_m \leq \frac{N_i}{2B_{m_i}}$	$x_{m_i}^*(t) = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$ $x_{s_i}^*(t) = 1 - \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$	$x_{m_i}^*(t) = 1/2$ $x_{s_i}^*(t) = 1/2$	N/A
$p_m < p_{m_i}(p_s)$	$x_{m_i}^*(t) = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$ $x_{s_i}^*(t) = \frac{p_s B_{s_i}(t)}{N_i}$	N/A	$x_{m_i}^*(t) = \frac{p_m B_{m_i}}{N_i}$ $x_{s_i}^*(t) = \frac{p_s B_{s_i}(t)}{N_i}$

Apéndice D

Discretización de las funciones

La discretización es un proceso matemático mediante el cual se obtienen resultados aproximados de una ecuación diferencial, como en nuestro escenario lo son el modelado de la dinámica del replicador. Utilizamos el método de discretización de Euler [69] porque conocemos el valor inicial de la población.

La discretización que se va a realizar en el horizonte de tiempo T mediante L puntos, donde $L = T/h$ y h es el salto. Es una buena aproximación si h es muy pequeño.

D.1. Discretización de la dinámica del replicador

La dinámica del replicador se definió en los Capítulos 4, 6 y 7 para modelar el comportamiento evolutivo de los usuario a través de una ecuación diferencial y esta dada por:

$$\dot{x}_j(t) = \delta x_j(t)[u_j(t) - U(t)],$$

donde $j \in \{m, s, o\}$ son las posibles estrategias de los usuarios. Reemplazamos $t = Mh$ para $M = 0, 1, \dots, L$, obteniendo:

$$\dot{x}_j(Mh) = \delta x_j(Mh)[u_j(Mh) - U(Mh)],$$

y aproximamos la derivada por el método de euler para una función x_j continua de la siguiente manera:

$$\dot{x}_j(Mh) = \frac{x_j((M+1)h) - x_j(Mh)}{h},$$

con esta aproximación se obtiene el comportamiento de la población en los L puntos en los que se discretiza el tiempo

$$\frac{x_j((M+1)h) - x_j(Mh)}{h} = \delta x_j(Mh)[u_j(Mh) - U(Mh)].$$

dato que se conoce el estado inicial de la población se modela el comportamiento de la población se obtiene resolviendo las siguientes ecuaciones

$$x_j((M+1)h) = x_j(Mh) + h\delta x_j(Mh)[u_j(Mh) - U(Mh)].$$

D.2. Discretización de la función objetivo

La función objetivo de los SPs fue definida en los Capítulos 4, 6 y 7 para conocer los beneficios de los SPs a lo largo del horizonte

$$\Pi_j = \int_0^T [e^{-\rho t} \pi_j(t)] dt,$$

donde $j \in \{MSP, SSP\}$ son las posibles estrategias de los usuarios. Reemplazamos $t = Mh$ para $M = 0, 1, \dots, L$, obteniendo:

$$\Pi_j(L) = \sum_{M=0}^L [e^{-\rho Mh} \pi_j(Mh)],$$

con esta aproximación se obtiene los beneficios de los SPs a lo largo del horizonte de tiempo.

Bibliografía

- [1] Cisco Visual Networking Index (VNI) Global Mobile Data Traffic Forecast (2015 to 2020).
- [2] Huai-Lei Fu, Phone Lin and Yi-Bing Lin, "Reducing Signaling Overhead for Femtocell/Macrocell Networks," *IEEE Transactions on Mobile Computing*, vol. 12, No. 8, pp. 1587-1597, Aug, 2013.
- [3] FCC, "Notice of Proposed Rulemaking (NPRM 03 322): Facilitating Opportunities for Flexible, Efficient and Reliable Spectrum agile Radio Technologie", *ET Docket*, No. 03 108, Dec, 2003.
- [4] Sara Landström, Anders Furuskär, Klas Johansson, Laetitia Falconetti and Fredric Kronestedt: "Heterogeneous networks increasing cellular capacity", *Ericsson Review*, Vol. 89, pp 4- 9, 2011.
- [5] Lingjie Duan, Jianwei Huang and Biying Shou: " Economics of Femtocell Service Provision", *IEEE Trans. Mob. Comput.* 12(11): pp. 2261-2273, 2013.
- [6] Li, M., Xiong, N., Yang, B. et al. "Posted price model based on GRS and its optimization for improving grid resource sharing efficiency", *Telecommunication Systems*, pp 71-79, vol. 55, 2014.

- [7] Duan L., Huang, J. and Shou, B. " Investment and Pricing with Spectrum Uncertainty: A Cognitive Operator's Perspective", IEEE Transactions on mobile computing, Vol. 10, No. 11, 2011.
- [8] Duan L., Gao L. and Huang, J. " Contract-Based Cooperative Spectrum Sharing", IEEE Symposium on DySPAN, 2011.
- [9] L. Guijarro , V. Pla, B. Tuffin, P. Maillé and Jose R. Vidal, "Competition and bargaining in wireless networks with spectrum leasing", IEEE Globecom, 2011.
- [10] L. Guijarro , V. Pla, Jose R. Vidal and J. Martinez-Bauset, " Entry, Competition, and Regulation in Cognitive Radio Scenarios: A Simple Game Theory Model", Mathematical Problems in Engineering, 2012.
- [11] D. Niyato and E. Hossain, "A Game-Theoretic Approach to Competitive Spectrum Sharing in Cognitive Radio Networks", IEEE WCNC, 2007.
- [12] D. Niyato and E. Hossain, "Competitive Pricing for Spectrum Sharing in Cognitive Radio Networks: Dynamic Game, Inefficiency of Nash Equilibrium, and Collusion", IEEE Journal on selected areas in communications, Vol. 26, No. 1, 2008.
- [13] Duan L. and Huang, J. "Economic Viability of Femtocell Service Provision" International Conference on Game Theory for Networks, pp. 413-428, 2011.
- [14] O.A. Akinlabi, B.S. Paul, M. Joseph and H.C. Ferreira, "A Review of Femtocell" Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2014 Vol. 2, March, 2014.
- [15] L. Guijarro , V. Pla, J. Vidal, and J. Martinez-Bauset, "Femtocell Operator Entry Decision with Spectrum Bargaining and

- Service Competition”, IEEE Communications Letters, Vol. 16, No. 12, Dec, 2012.
- [16] A. Ghosh et al., “Heterogeneous cellular networks: from theory to practice,” IEEE Communications Magazine, Vol. 50, No. 6, pp. 54–64, Jun, 2012.
- [17] J. G. Andrews, H. Claussen, M. Dohler, S. Rangan and M. C. Reed, “Femtocells: Past, present, and future”, IEEE J. Sel. Areas Commun., Vol. 30, pp. 497-508, 2012.
- [18] E. Pateromichelakis, M. Shariat, A. Ul Quddus and R. Tafazolli, “Graph-Based Multicell Scheduling in OFDMA-Based Small Cell Networks ”, IEEE Access , Vol. 2, pp. 897 - 908, 2014.
- [19] Peter Reichl, Bruno Tuffin and Raimund Schatz: “Logarithmic laws in service quality perception: where microeconomics meets psychophysics and quality of experience”, Telecommunication Systems, Vo. 52, Issue 2, pp 587–600, Feb, 2013.
- [20] A. Gupta and R. K. Jha, “A survey of 5G network: Architecture and emerging technologies,” IEEE Access, vol. 3, pp. 1206-1232, Jul, 2015.
- [21] LaVallee, A. AT&T to New York and San Francisco: we are working on it. The Wall Street Journal. 2009.
- [22] Shetty, N., S. Parekh and J. Walrand, “ Economics of Femtocells”, IEEE Globecom. 2009.
- [23] Sandler, Kathy. House calls: “ Femtocells promise to boost the cellphone signals inside your home”, The Wall Street Journal 2009.
- [24] Duan L, Huang, J and Shou, “Competition with dynamic spectrum leasing”, Proc. of Dyspan, 2010.

- [25] Duan L., Shou, B. and Huang, J. "Capacity Allocation and Pricing Strategies for Wireless Femtocell Services", CoRR, abs/1205.1196. 2012.
- [26] X. Kang, R. Zhang, and M. Motani, "Price-based resource allocation for spectrum-sharing femtocell networks: a stackelberg game approach," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 30, No. 3, pp. 538–549, April 2012.
- [27] Zhang, H., Huang, L., Xu H. and Sun Q. "Cooperative optimal pricing for stochastic access control in overlaid radio access networks", *Telecommunication Systems*, Vol. 60, pp 3-16, 2015.
- [28] S. Yun, Y. Yi, D. Cho, and J. Mo, " Open or close: on the sharing of femtocells," in *Proc. of IEEE INFOCOM*, 2011.
- [29] Y. Yi, J. Zhang, Q. Zhang, and T. Jiang, "Spectrum leasing to femto service provider with hybrid access," in *Proc. of IEEE INFOCOM*, 2012.
- [30] S. Sengupta and M. Chatterjee, "An economic framework for dynamic spectrum access and service pricing," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, Vol. 17, No. 4, pp. 1200–1213, 2009.
- [31] A. Goldsmith, *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2005.
- [32] L. Xu, C. Jiang, J. Wang, J. Yuan, and Y. Ren, "Information security in big data: Privacy and data mining," *IEEE Access*, Vol. 2, pp. 1149-1176, Oct. 2014.
- [33] E. N. Barron, "Game Theory: An Introduction," John Wiley & Sons, 2nd Edition, pp. 395- 423, 2013.
- [34] Varian, H.: "Intermediate Microeconomics, A Modern Approach", Norton New York, ed. 8, 2010.

-
- [35] Cournot, A. "Researches into the mathematical principles of the theory of wealth", New York the Macmillan Company, 1838.
- [36] Bertrand, J. "Théorie Mathématique de la Richesse Social", Journal des Savants 68, pp. 499-508, 1883.
- [37] Nash, J. "Equilibrium Points in n-Person Games." Proceedings of the National Academy of Science, 36: pp. 48–49. 1950.
- [38] Von Neumann, J., and Morgenstern, O., "The Theory of Games and Economic Behavior", Princeton: Princeton University Press, 1944.
- [39] Von Stackelberg, Heinrich, "Market Structure and Equilibrium", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [40] J. Wardrop, "Some theoretical aspects of road traffic research," Proc. of the Institute of Civil Engineers, Vol. 1, pp. 325–378, 1952.
- [41] Ross, Don, "Game Theory", In Edward N. Zalta, ed., The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2014 Edition), "plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/game-theory".
- [42] H. Gintis, Game Theory Evolving: "A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction", Second Edition, Published by Princeton University Press, 2009.
- [43] Lingjie Duan, Jianwei Huang, Biying Shou: "Economics of Femtocell Service Provision", IEEE Trans. Mob. Comput. 12(11): pp. 2261-2273, 2013.
- [44] Sandler, Kathy. House calls: 'femtocells' promise to boost the cellphone signals inside your home. The Wall Street Journal 2009.
- [45] Femto Forum. Femtocells, "<http://www.femtoforum.org>".

- [46] Ngo Van Long, *A Survey of Dynamic Games in Economics*. World Scientific, 2010.
- [47] Herbert Gintis, "Game Theory Evolving: A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction", Second Edition, p.p 282-284, 2009.
- [48] Kandethody M. Ramachandran, Chris P. Tsokos, "Stochastic Differential Games: Theory and Applications", Kandethody M. Ramachandran, Chris P. Tsokos. Vol. 2, 2012.
- [49] Y. Yi, J. Zhang, Q. Zhang, and T. Jiang, "Spectrum leasing to femto service provider with hybrid access", in Proc. of IEEE INFOCOM, 2012.
- [50] Julian Romero, Luis Guijarro, "Competition between primary and secondary operators with spectrum leasing and optimal spectrum subscription by Users", IEEE PIMRC, 2013.
- [51] Weitzman, M., "Gamma Discounting", *The American Economic Review*, Vol. 91, No. 1 , pp. 260-271, 2001.
- [52] Philip A. Viton. "Continuous Compounding and Annualization", Jan, 2006.
- [53] Ogawa, K., Hattori, T., Yoshida, H.: Optimum multi-layered cell architecture for personal communication systems with high degree of mobility. In: *Vehicular Technology Conference, 1994 IEEE 44th*, pp. 644–648.
- [54] Chandrasekhar, V., Andrews, J.G., Gatherer, A.: Femtocell networks: a survey. *IEEE Communications magazine* **46**(9) (2008)
- [55] Kun Zhu, Ekram Hossain, Dusit Niyato, "Pricing, Spectrum Sharing, and Service Selection in Two-Tier Small Cell

-
- Networks: A Hierarchical Dynamic Game Approach," IEEE Transactions on Mobile Computing, 26 July 2013.
- [56] Thomas A. Weber, "Optimal Control Theory with Applications in Economics", 2011
- [57] Pontryagin L.S, Boltyanskii V.G, Gamkrelidze R. V, Mishchenko E. F, "The Mathematical Theory of Optimal Processes (Russian)", English translation: Interscience 1962. ISBN 2-88124-077-1 and ISBN 978-2-88124-077-5.
- [58] Victor M. Becerra, "Solving Optimal Control Problems With State Constraints Using Nonlinear Programming and Simulation Tools", IEEE Transactions on education, Vol. 47, No. 3, 2004.
- [59] User's Guide Mathworks: " Optimization Toolbox for use with MATLAB".
- [60] fmincon: "<http://es.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>".
- [61] SIMULINK: Dynamic System Simulation for MATLAB, The Mathworks, Inc., Natick, MA, 2000.
- [62] MATLAB function "bvp4c": Solve boundary value problems for ordinary differential equations, "<https://es.mathworks.com/help/matlab/ref/bvp4c.html>".
- [63] L.F. Shampine, M.W. Reichelt, and J. Kierzenka, "Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in Matlab with bvp4c", The tutorial and programs are available at "<http://www.mathworks.com/bvptutorial>".
- [64] A. Goldsmith, Wireless Communications. Cambridge University Press, 2005.

- [65] H. Shen and T. Basar, "Optimal Nonlinear Pricing for a Monopolistic Network Service Provider with Complete and Incomplete Information", *IEEE J. Selected áreas in Comm.*, vol. 25, no. 6, pp. 1216-1223, 2007.
- [66] Duan L., Shou, B. Huang, J. Capacity Allocation and Pricing Strategies for Wireless Femtocell Services. *CoRR*, abs/1205.1196. 2012.
- [67] P. Taylor and L. Jonker, "Evolutionary stable strategies and game dynamics", 1768.
- [68] Conversion: "<http://jaunty-electronics.com/blog/2012/05/bpsk-qpsk-8psk-and-qam-calculator/>".
- [69] Leonhard Euler, "Enstitutionum calculi integralis" *Math. Biosci*, vol. 40, no. 1, pp. 145–156, 1978.
- [70] E. N. Barron, "Game Theory: An Introduction", John Wiley Sons, 2nd Edition, pp. 395- 423
- [71] V. Chandrasekhar and J. G. Andrew, "Spectrum allocation in tiered cellular networks", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 57, no. 10, pp. 3059–3068, 2009.
- [72] Saroiu S., Gummadi, K.P, et al . "An Analysis of Internet Content Delivery Systems", *Proceedings of the 5th Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI)*, Boston, 2002.
- [73] As of Fall "Fast Facts: 2015", University of Washington, 2014.
- [74] BPSK, QPSK, 8PSK and QAM Calculator, "<http://jaunty-electronics.com/blog/2012/05/bpsk-qpsk-8psk-and-qam-calculator/comments/>".