



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

# **MODELADO Y SIMULACIÓN DINÁMICA DEL ROBOT INDUSTRIAL FANUC M-410IB/700**



***Trabajo Fin de Grado***

Autor: *José Manuel Campos García*

Tutor: *Josep Lluís Suñer Martínez*

## ÍNDICE

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.....	3
1. ¿Qué es un robot industrial? .....	3
2. Historia y evolución de la robótica industrial.....	3
3. Morfología del robot.....	4
3.1. Estructura mecánica .....	4
3.2. Sistema de accionamiento. Actuadores y transmisores.....	6
3.2.1. Actuadores.....	7
3.2.2. Sistemas de transmisión y reducción .....	7
3.3. Sensores de posición y velocidad.....	8
3.3.1. Sensores de posición .....	8
3.3.2. Sensores de velocidad.....	9
3.4. Elementos terminales .....	9
3.5. Percepción del entorno.....	10
4. Herramientas matemáticas.....	10
4.1. Representación de la posición .....	11
4.2. Representación de la orientación.....	11
4.2.1. Matrices de rotación .....	11
4.2.2. Ángulos de Euler.....	12
4.2.3. Par de rotación .....	12
4.2.4. Cuaternios.....	12
4.3. Matrices de rotación homogéneas.....	12
5. CINEMÁTICA DEL ROBOT .....	13
5.1. Problema cinemático directo.....	13
5.1.2. Algoritmo de Denavit-Hartenberg.....	13
5.2. Problema cinemático inverso.....	14
5.2.1. Desacoplo cinemático .....	15
5.3. Matriz Jacobiana.....	15
5.4. Configuraciones singulares.....	16
6. Dinámica del robot.....	17
7. Control cinemático .....	18
7.1. Funciones del control cinemático.....	18
7.2. Tipos de trayectorias.....	18
 CAPÍTULO II. DESARROLLO .....	 20
1. Robots de paletización.....	20
2. Robot industrial FANUC M-410iB/700 .....	20

3.	MSC Adams.....	21
2.1.	Modelo del Robot FANUC M-410iB/700.....	22
2.1.1.	Despiece del robot.....	22
2.1.2.	Modelado mediante el programa MSC Adams.....	23
4.	Cinemática del robot industrial FANUC M-410iB/700.....	28
3.1.	Parámetros de Denavit-Hartenberg.....	29
3.2.	Problema cinemático directo de posición (Mathcad).....	31
3.3.	Problema cinemático directo de velocidad.....	32
5.	Comprobación de resultados.....	33
5.1.	Comprobación de la posición.....	33
5.2.	Comprobación de la velocidad.....	41
6.	Simulación de una tarea.....	44
7.	Modelo dinámico del robot.....	49
7.1.	Modelo dinámico en Adams.....	50
7.2.	Comprobación mediante Mathcad del modelo dinámico.....	54
	CAPÍTULO III. CONCLUSIONES.....	67
	CAPÍTULO IV. PRESUPESTO.....	68
	CAPÍTULO V. BIBLIOGRAFÍA.....	70
	ANEXO I. Ficha técnica FANUC M-410iB/700.....	71
	ANEXO II. Cálculos cinemáticos en Mathcad.....	73
	ANEXO III. Comprobación de la cinemática en Mathcad.....	75
	ANEXO IV. Dinámica en Mathcad.....	79

## CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

### 1. ¿Qué es un robot industrial?

Responder a la pregunta de qué es un robot industrial no es algo sencillo. No existe una única definición formal que responda concretamente a esta pregunta.

Probablemente, la definición más comúnmente aceptada sea la de la *Asociación de Industrias Robóticas* (RIA), según la cual un robot industrial es:

*Un manipulador multifuncional reprogramable con varios grados de libertad, capaz de mover materias, piezas, herramientas o dispositivos especiales según trayectorias variables programadas para realizar tareas diversas.*

La norma ISO (*International Standards Organization*) adopta esta definición, pero modificándola levemente. Según esta norma, un robot industrial es:

*Un manipulador multifuncional reprogramable con varios grados de libertad, capaz de manipular cargas, piezas, herramientas o dispositivos especiales según trayectorias variables programadas para realizar tareas diversas.*

Nótese que esta definición sólo difiere de la anterior en que se especifica que un robot industrial tiene que tener varios grados de libertad.

### 2. Historia y evolución de la robótica industrial

A lo largo de la historia, el ser humano ha soñado con construir máquinas capaces de imitar sus propios movimientos o de otros seres vivos.

Las primeras máquinas de este tipo, llamadas autómatas por su capacidad de imitar la figura y movimiento de un ser animado, tenían fines meramente lúdicos y fueron construidos por varias culturas. Fueron construidas por griegos y árabes.

Más tarde, a partir del siglo XIV, se crearon otras máquinas de características parecidas, capaces de realizar ciertos movimientos, pero sin mayor finalidad que la de adornar o entretener. Se pueden citar algunos ejemplos, como los ingenios creados por Leonardo Da Vinci (1452-1519): uno de los más famosos, el *León mecánico*, era capaz de abrirse el pecho con su garra y mostrar el escudo de armas del rey Luis XII.

Las primeras máquinas capaces de realizar trabajos realmente útiles se construyeron durante la Revolución Industrial (finales del siglo XVIII) y se utilizaron fundamentalmente en la industria textil. Por ejemplo, se pueden citar la hiladora mecánica de Crompton (1779), el telar mecánico de Cartwright (1785) y el telar de Jacquard (1801). Es a partir de este momento cuando empieza la automatización industrial y comienzan a usarse dispositivos automáticos en la producción.

Sin embargo, estas primeras máquinas requerían una inversión inicial muy alta, y sólo eran capaces de realizar la tarea para la que estaban construidos. Su adaptación a pequeños cambios en el proceso de producción era muy compleja. Por este motivo, a

mediados del siglo XX surgió la automatización flexible, que tenía como finalidad la búsqueda de la “máquina universal”. Esta máquina sería capaz de adaptarse fácilmente a cualquier proceso de fabricación.

En 1920 surgió la palabra “robot”, gracias al estreno de la obra *Robots Universales Rossum*, del dramaturgo checo Karel Čapek. “Robot” deriva de la palabra checa “robota”, que significa “trabajo duro”.

Uno de los motivos decisivos que propició la expansión de la robótica fue la necesidad de utilizar manipuladores a distancia para trabajos peligrosos, como, por ejemplo, la manipulación de productos radiactivos. Estos sistemas de manipulación a distancia funcionaban con un brazo manipulador movido directamente por un operario unido mecánicamente a otro, que reproducía los movimientos de dicho operario en la zona radiactiva. Este sistema, llamado maestro-esclavo, fue desarrollado en 1948 por el ingeniero R. C. Goertz, en el Argonne National Laboratory. En 1954, Goertz sustituyó la transmisión mecánica por otra eléctrica, desarrollando así el primer telemanipulador con servocontrol lateral.

Más tarde, surgió la necesidad de dotar de autonomía a los brazos manipuladores, para que no tuvieran que ser movidos a distancia por un operario. De esta manera, desde 1954, el ingeniero norteamericano George C. Devol trabajó en un dispositivo capaz de reproducir una serie de pasos de movimientos previamente registrados en un programa. Esta patente fue registrada en Estados Unidos en 1961.

A partir de los años ochenta, los avances en la tecnología de los ordenadores y el desarrollo de la microelectrónica, la teoría de control y de las máquinas de control numérico fueron claves para la evolución de la robótica. Todos estos avances permitieron que poco a poco los robots, reservados al principio solamente a tareas demasiado peligrosas o pesadas para un humano, fueran usándose en amplios campos de la industria. Sus principales ventajas fueron la reducción de costes, el aumento de la productividad y la mejora en la calidad de la producción.

Actualmente, las mejoras en los robots se basan en aumentar su movilidad, destreza y autonomía. Son ampliamente usados en la industria manufacturera. Hoy en día resulta muy complicado encontrar una línea de producción donde no haya al menos un robot.

### **3. Morfología del robot**

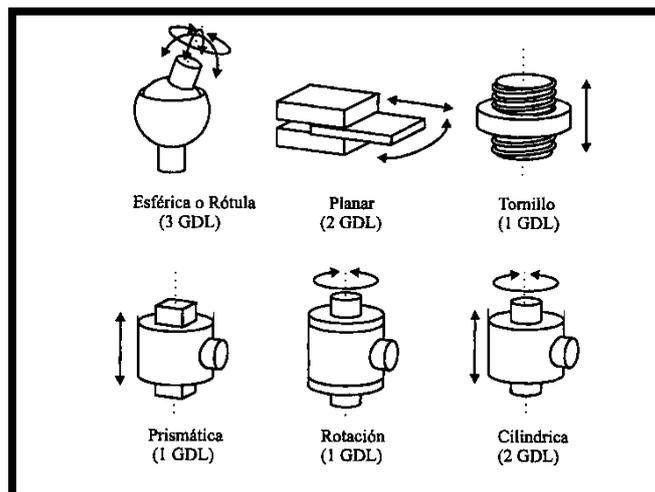
Por regla general, un robot está formado por los siguientes elementos: estructura mecánica, sistema de accionamiento, sistema sensorial, sistema de control y elementos terminales.

#### **3.1. Estructura mecánica**

Un robot está formado por una serie de elementos, llamados eslabones, unidos mediante articulaciones. Las articulaciones son los elementos que permiten un movimiento relativo entre dos eslabones. Estos movimientos pueden ser de desplazamiento, de giro o de una combinación de ambos tipos de movimiento.

Se pueden distinguir seis tipos distintos de articulaciones: prismática, de rotación, cilíndrica, esférica o rótula, planar y de tornillo. Las articulaciones prismáticas o de traslación y de rotación o revolución son las que se usan mayoritariamente en los robots industriales. Se denominan abreviadamente pares P y pares R, respectivamente.

A cada uno de los movimientos independientes que es capaz de realizar una articulación se le denomina grado de libertad (GDL). Como los pares P y pares R tienen un solo grado de libertad por par, y estos son los más utilizados, el número de GDL de un robot suele coincidir con su número de pares.



**Figura 1.** Diferentes tipos de articulaciones para robots.

Fuente: *Fundamentos de robótica*. McGraw Hill.

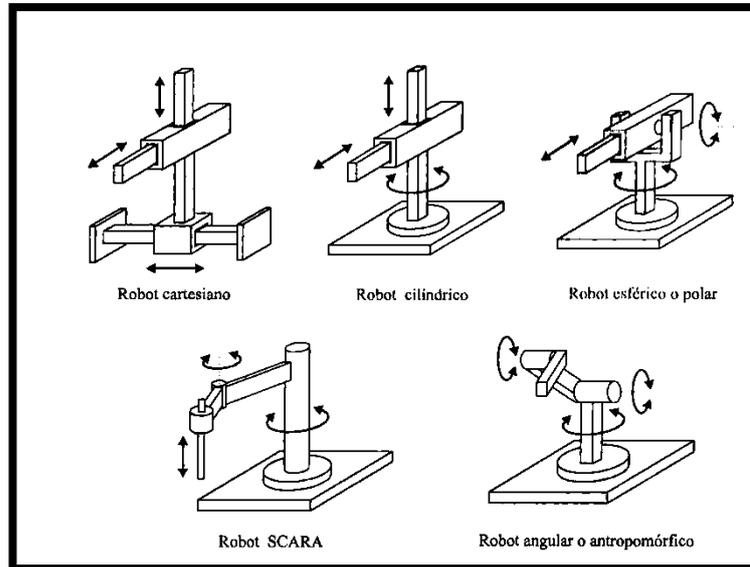
En el espacio tridimensional, son necesarios seis parámetros: tres para definir la orientación y otros tres para definir la posición. Por este motivo, por regla general, la mayor parte de los robots industriales poseen seis grados de libertad. Es decir, tienen seis articulaciones.

A pesar de que seis grados de libertad es suficiente y necesario para posicionar un robot en cualquier posición del espacio tridimensional, pueden existir robots con menos articulaciones porque les pueden ser suficientes para desarrollar la tarea para la que están diseñados. También pueden existir robots que necesiten más articulaciones porque unas condiciones de trabajo especiales o la existencia de obstáculos se lo exijan. En este último caso, se habla de robots redundantes.

Como la morfología de la mayoría de los robots industriales guarda un cierto parecido con la anatomía de un brazo humano, los distintos elementos que componen el robot se nombran usando términos como muñeca, codo, brazo o cuerpo.

Dependiendo de la combinación distintos tipos de pares empleada para construir los tres primeros ejes del robot (los responsables del posicionamiento), se pueden obtener diferentes configuraciones del robot. Estas configuraciones se nombran encadenando las iniciales de las tres articulaciones que forman la base de la muñeca (los tres ejes principales). De este modo, se pueden encontrar ejemplos como RPR (rotación, prismática, rotación), 3R (tres pares de rotación o 2RP (dos articulaciones de rotación y una prismática).

Existen una serie de configuraciones de ejes principales que, por ser más utilizadas en la industria poseen denominaciones universalmente aceptadas. Estas configuraciones básicas son el robot cartesiano, cilíndrico, esférico o polar, SCARA y angular o antropomórfico.



**Figura 2.** Configuraciones típicas para robots industriales.

Fuente: *Fundamentos de robótica*. McGraw Hill.

Por otro lado, además de las diferentes configuraciones de ejes principales, existen las configuraciones de la muñeca.

La muñeca está formada por las articulaciones del robot que tienen como objetivo orientar el objeto en el espacio tridimensional. La muñeca va unida al brazo, y en su extremo se encuentra la herramienta de trabajo del robot. Consta de hasta tres ejes provistos de articulaciones de rotación.

### 3.2. Sistema de accionamiento. Actuadores y transmisores

Los sistemas de accionamiento son el conjunto de elementos que posibilitan el movimiento de cada una de las articulaciones del robot. Los sistemas de accionamiento son:

- **Actuadores o accionamientos:** son los dispositivos motores que general el movimiento de las articulaciones, de acuerdo con las órdenes del sistema de control.
- **Sistemas de transmisión y reducción:** los actuadores son generalmente pesados y suelen colocarse en la base del robot. Por este motivo, es necesario un sistema que transmita el movimiento de los actuadores hasta cada una de las articulaciones.

- **Sensores de posición y velocidad:** son dispositivos que captan la información sobre posición y velocidad de cada eje o articulación y la transmiten al sistema de control.

### 3.2.1. Actuadores

Los actuadores utilizados en robótica pueden emplear energía neumática, hidráulica o eléctrica. Cada uno de estos tres tipos presentan distintas características que es preciso evaluar para seleccionar el más conveniente. Potencia, controlabilidad, peso, volumen, precisión, velocidad y coste son ejemplos de estas características.

- **Actuadores neumáticos:** utilizan el aire a presión para generar el movimiento. Se consigue el desplazamiento de un émbolo encerrado en un cilindro por efecto de la presión del aire. Para obtener movimientos de rotación se pueden emplear mecanismos de piñón-cremallera. Las ventajas de este sistema son la sencillez y robustez. Sin embargo, tienen el inconveniente de que no se puede controlar su velocidad y posición de forma precisa porque el aire es un fluido altamente compresible y esto dificulta su control. Por este motivo, son empleados en manipuladores sencillos con posicionamiento con topes mecánicos o apertura y cierre de pinzas.
- **Actuadores hidráulicos:** su principio de funcionamiento es básicamente el mismo que el de los actuadores neumáticos. La principal diferencia es que en lugar de utilizar como fluido de trabajo el aire, utilizan aceites minerales a alta presión (entre 50 y 100 bar, llegando en ocasiones a 300 bar). Al utilizar aceite, que es un fluido prácticamente incompresible, es mucho más sencillo controlar su posición y velocidad con precisión, pudiendo posicionar al eje entre un gran rango de valores. Además, el trabajar a elevadas presiones permite a los actuadores hidráulicos desarrollar mayor capacidad de carga que los neumáticos. A pesar de ello, tienen el inconveniente de que la instalación, mantenimiento y equipos necesarios tienen costes muy grandes. Se utilizan en robots que manejan cargas muy grandes o que trabajan en ambientes explosivos, donde el uso de actuadores eléctricos no está recomendado.
- **Actuadores eléctricos:** los motores eléctricos son los más usados en los robots industriales actuales debido a su gran sencillez, precisión y alta fiabilidad. Presentan la desventaja de que tienen una potencia limitada, por lo que deben usarse junto a reductores de velocidad. Existen tres tipos de motores eléctricos: los de corriente continua, corriente alterna y motores paso a paso. Los más utilizados son los de corriente continua debido a su facilidad de control

### 3.2.2. Sistemas de transmisión y reducción

El accionamiento directo es aquel en el que el eje del actuador se conecta directamente a la carga o al eje de la articulación. Generalmente, solo se usa este término para actuadores eléctricos. Este sistema permite la construcción de sistemas de accionamiento más simples y de fácil control. No necesita el uso de transmisiones ni reductores, por lo que se aumenta la precisión y rapidez de posicionamiento del robot.

Por el contrario, el uso del accionamiento directo requiere el uso de motores con un elevado par y unas bajas revoluciones. Este tipo especial de motores encarecen el coste del sistema. Además, la colocación de motores, que suelen ser pesados y voluminosos, en la propia articulación no siempre es factible para todas las configuraciones del robot debido a las inercias que se producen. Se requieren diseños especiales y la estructura del robot se ve seriamente condicionada para evitar estas altas inercias. El accionamiento directo suele usarse en robots de tipo SCARA.

Debido a esta serie de inconvenientes, los robots suelen estar provistos de un conjunto de sistemas de transmisión y reducción que permiten la utilización de motores de menor potencia y tamaño y alejados de las articulaciones.

Las funciones de un sistema de transmisión son la de transmitir el movimiento desde el motor hasta la articulación; transformar el movimiento de circular a lineal o viceversa; o reducir la velocidad, lo que permite aumentar el par motor.

Como punto negativo, se puede decir que los sistemas de transmisión provocan efectos indeseables, por motivo de fricciones entre componentes, deformaciones y juegos y holguras. Por lo tanto, las características que tienen que tener los sistemas de transmisión son: tamaño, momento de inercia y peso reducidos; juego angular pequeño; alta rigidez torsional; larga vida de funcionamiento; y transmisión a distancia.

Las transmisiones usadas en robótica se pueden clasificar en tres grandes grupos: tipo **circular-circular**, como la cadena o los engranajes; tipo **circular-lineal**, como el piñón-cremallera o el tornillo sin fin; y el tipo **lineal-circular**, como la cremallera. Los más utilizados son los de tipo circular-circular, que, como indica su denominación, son los que cuentan con movimiento circular tanto a la entrada como a la salida.

Por su parte, los reductores tienen como objetivo reducir la velocidad y así aumentar el par suministrado por el motor. A los reductores utilizados en robótica se les exige altas precisiones en cuanto a precisión y velocidad de posicionamiento. Se buscan reductores ligeros, de poco tamaño, bajo rozamiento y que sean capaces de realizar una reducción elevada de la velocidad en un único paso. También se tiende a utilizar reductores que tengan un bajo momento de inercia. Todas estas condiciones provocan que haya muy pocos tipos de sistemas de reducción usados en robótica. Los más utilizados son los reductores Harmonic Drive y los CYCLO Drive.

### 3.3. Sensores de posición y velocidad

El sistema de control de robot necesita conocer el estado tanto del propio robot como del entorno para realizar su tarea con precisión y velocidad adecuadas. Esta información se consigue mediante el uso de sensores.

#### 3.3.1. Sensores de posición

Para medir la posición angular se emplean fundamentalmente los llamados encoders y resolvers.

- **Encoders:** son codificadores angulares de posición que constan de un disco transparente con una serie de marcas opacas colocadas radialmente y equidistantes entre sí. El eje cuya posición se quiere medir va acoplado al disco

transparente y gira con él. Un emisor de luz proyecta un haz hacia un fotorreceptor a través del disco. Cuando este gira, las marcas opacas cortarían el haz de luz, haciendo que el fotorreceptor genere impulsos. Cuantificando estos impulsos se puede conocer la posición del robot.

- **Resolvers y sincroresolvers:** están formados por un rotor y un estator. El estator de un resolver consta de dos devanados a  $90^\circ$  uno respecto de otro, mientras que el estator de un sincroresolver tiene tres devanados desfasados  $120^\circ$ . Al excitar el rotor con una señal senoidal, en los devanados del estator se obtienen señales senoidales de la misma frecuencia y desfasadas entre sí. La medida de la amplitud de estas señales proporciona información acerca del desplazamiento.
- **LVDT e Inductosyn:** son sensores de posición lineales. Su funcionamiento se basa en la utilización de un núcleo de un material ferromagnético unido al eje cuyo movimiento se quiere medir. Este núcleo se mueve linealmente entre un devanado primario y dos secundarios, haciendo que la inductancia varíe con su movimiento. Esta variación de inductancia es directamente proporcional al desplazamiento del vástago solidario al eje.

### 3.3.2. Sensores de velocidad

La información de la velocidad de movimiento de cada actuador se realimenta normalmente a un bucle de control analógico implementado en el propio accionador del elemento motor. Como el control de velocidad es analógico, el captador usado es una tacogeneratriz que proporciona una tensión proporcional a la velocidad de giro del eje. También se puede conocer la velocidad derivando la información sobre la posición disponible.

## 3.4. Elementos terminales

Los elementos terminales o efectores finales son los elementos del robot que interactúan directamente con su entorno. Se suelen dividir en dos tipos: los elementos de sujeción, como por ejemplo las garras y las pinzas; y las herramientas, como por ejemplo pinzas de soldadura o pistolas de pintura. Normalmente, los elementos terminales son diseñados específicamente para la tarea para la que están pensados.

Gran parte de las tareas industriales conllevan la manipulación de piezas. Para estas tareas se debe dotar al robot de garras. Estas se pueden clasificar en función de la naturaleza de su fuerza de sujeción:

- **Garras mecánicas:** son los elementos más usuales. Constan de unos elementos, usualmente llamados “dedos”, que entran en contacto con la pieza y la sujetan bien por rozamiento o por enganche. Para su construcción se suelen utilizar materiales con un elevado coeficiente de rozamiento.
- **Garras de vacío:** son garras que constan de una o varias ventosas y sujetan la pieza mediante succión. Son de gran simplicidad y evitan la aplicación de grandes presiones sobre la pieza. Su principal inconveniente es que, para mantener la succión, las piezas deben ser lisas y sin perforaciones.
- **Garras magnéticas:** estas garras están formadas por uno o varios electroimanes, o bien por imanes permanentes con expulsos mecánicos.

Presentan las mismas ventajas que las garras de vacío, y además son más tolerantes con piezas con agujeros o con superficies irregulares. Como principal inconveniente se tiene que las piezas deben estar construidas por materiales ferromagnéticos.

Por su parte, las herramientas se utilizan cuando el robot realiza operaciones sobre las piezas, como pueden ser tareas de soldadura, corte o mecanizado. En este caso, las herramientas a utilizar suelen ir acopladas al extremo del robot, y son muy parecidas a las utilizadas en el trabajo manual. El principal inconveniente del uso de herramientas es la necesidad de conductos que transporten los fluidos o materiales necesario para realizar la tarea: por ejemplo, lubricantes o líquidos refrigerantes.

También existen dispositivos de cambio automático de garra, para que el mismo robot pueda realizar tareas distintas sin la necesidad de la intervención de un operario que cambie la herramienta para cada tarea.

### 3.5. Percepción del entorno

La mayoría de los robots solo cuentan con los sensores necesarios para controlar su posición y, por lo tanto, no son capaces de reconocer su entorno. Esto no suele ser un problema, puesto que la mayoría de los robots se encargan de tareas simples y repetitivas que se han programado previamente.

Cuando se quiere crear una máquina más versátil, por ejemplo, que trabaje con piezas diferentes, será necesario dotarlo de sistemas de reconocimiento de su entorno. Estos sistemas suelen ser sensores externos que se colocan en el efector final del robot y generan señales que son procesadas por la unidad de control del robot. Los sensores más frecuentes son los siguientes:

- **Sensores de contacto:** informan sobre la fuerza que se produce al entrar en contacto con la pieza. Lo hay binarios, que solo detectan la presencia o ausencia de la pieza; y también analógicos, que proporcionan una señal proporcional a la fuerza aplicada.
- **Sensores de proximidad:** al igual que los sensores de contacto, existen dos tipos principales: binarios, que detectan la presencia o ausencia de un objeto en el campo de trabajo; y analógicos, que son capaces de informar de la distancia a la que se encuentra ese objeto.
- **Sensores basados en la visión:** son sistemas de visión artificial que se basan en la obtención de imágenes y en el tratamiento de las mismas.

## 4. Herramientas matemáticas

Para que el robot pueda realizar su tarea es necesario contar con una serie de herramientas matemáticas que permitan conocer la posición y orientación del robot y de las piezas u objetos que este tenga que manipular.

Estas herramientas deben permitir obtener de formas sencilla las relaciones entre los distintos objetos y el manipulador.

#### 4.1. Representación de la posición

La forma más intuitiva de localizar espacialmente los puntos de un cuerpo es el sistema cartesiano, que se define mediante ejes perpendiculares entre sí con un origen definido. Para localizar un punto dentro de este sistema se emplean las coordenadas:

- **Coordenadas cartesianas:** un punto  $a$  vendrá expresado por las componentes  $(x,y)$  correspondientes al sistema OXY. El punto tiene asociado un vector  $\mathbf{p}(x,y)$  que va desde el origen O del sistema OXY hasta el punto  $a$ . Esto sería válido para el caso de dos dimensiones. Si se está trabajando con un sistema de tres dimensiones el vector  $\mathbf{p}$  estará definido por las componentes  $(x,y,z)$  con respecto al sistema OXYZ.
- **Coordenadas polares y cilíndricas:** se pueden emplear las coordenadas polares  $\mathbf{p}(r,\theta)$ , en las que  $r$  representa la distancia desde el origen O del sistema hasta el punto, y  $\theta$  representa el ángulo del vector  $\mathbf{p}$  con el eje OX. Mediante las coordenadas cilíndricas  $\mathbf{p}(r,\theta,z)$  se define un punto en tres dimensiones análogamente al caso de las coordenadas polares. La componente  $z$  representa la proyección sobre el eje OZ del vector  $\mathbf{p}$ .
- **Coordenadas esféricas:** se utilizan para localizar un vector en un espacio tridimensional. El vector  $\mathbf{p}$  tendrá como coordenadas esféricas  $(r,\theta,\phi)$ , donde la componente  $r$  es la distancia desde el origen hasta el punto,  $\theta$  es el ángulo formado por la proyección del vector  $\mathbf{p}$  sobre el plano OXY con el eje OX y la componente  $\phi$  es el ángulo formado por el vector  $\mathbf{p}$  con el eje OZ.

#### 4.2. Representación de la orientación

Para el caso de los cuerpos sólidos es necesario, aparte de definir la posición, definir su orientación con respecto a un sistema de referencia.

En el caso de los robots es similar. No es suficiente con especificar la posición de su extremo, sino que también, en general, es necesario conocer su orientación.

##### 4.2.1. Matrices de rotación

La comodidad que proporciona el uso del álgebra matricial, convierte a las matrices de rotación el método más extendido para la descripción de orientaciones.

Se supone que se tiene en el plano dos sistemas de referencia OXY y OUV con el mismo origen O, siendo el sistema OXY el de referencia fijo y el sistema OUV el móvil solidario al objeto. La matriz de rotación define la orientación del sistema OUV con respecto al sistema OXY.

En el caso de dos dimensiones, la orientación viene definida por un único parámetro independiente. La posición relativa del sistema OUV girado un ángulo  $\alpha$  sobre el OXY.

Para el caso tridimensional, la matriz de rotación define la orientación del sistema OUVW con respecto al sistema OXYZ.

En el caso de que se apliquen varias rotaciones consecutivas, la transformación total se calculará como el producto de cada una de las matrices de rotación en el orden que se producen, ya que el producto de matrices no posee la propiedad conmutativa.

#### 4.2.2. Ángulos de Euler

Existen otros métodos que se utilizan para definir la orientación, como, por ejemplo, los ángulos de Euler. Los ángulos de Euler tienen la ventaja de que sólo necesitan tres elementos para definir la orientación, en contra de los nueve elementos necesarios en el caso de las matrices de rotación.

Todo sistema OUVW solidario al cuerpo cuya orientación se quiere describir, puede definirse respecto al sistema OXYZ mediante tres ángulos ( $\phi, \theta, \psi$ ) denominados ángulos de Euler.

Por lo tanto, además de conocer los valores de los ángulos, es necesario saber cuáles son los ejes en los que se realizan los giros.

#### 4.2.3. Par de rotación

Para representar la orientación de un sistema móvil OUVW respecto al sistema de referencia fijo OXYZ, también se puede definir un vector  $\mathbf{k}$  ( $k_x, k_y, k_z$ ) y un ángulo de giro  $\theta$  que representa el ángulo girado por OUVW respecto al sistema OXYZ sobre el eje  $\mathbf{k}$ . Este eje pasa por el centro de ambos sistemas. Al par  $(\mathbf{k}, \theta)$  se le denomina de rotación.

#### 4.2.4. Cuaternios

Los cuaternios  $Q$  están compuestos por cuatro componentes ( $q_0, q_1, q_2, q_3$ ) que representan las coordenadas del cuaternio en una base  $\{\mathbf{e}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ . A la componente  $q_0$  del cuaternio se le suele denominar "parte escalar" y al resto, "parte vectorial".

Los cuaternios son herramientas matemáticas de gran versatilidad para trabajar con giros y cambios de orientaciones.

### 4.3. Matrices de rotación homogéneas

La representación del espacio n-dimensional en coordenadas homogéneas se realiza con (n+1) dimensiones. De esta forma, un vector  $\mathbf{p}(x, y, z)$  vendrá representado por  $\mathbf{p}(wx, wy, wz, w)$ , donde  $w$  representa un factor de escala.

La matriz de transformación homogénea es una matriz de dimensión 4x4 que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro.

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & w_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

En robótica, la transformación de perspectiva es nula y el escalado global es unitario, con lo cual, la matriz de transformación queda de la forma:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3x3} & p_{3x1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para realizar composiciones de transformaciones consecutivas, simplemente se multiplicarán las distintas matrices de transformación en el orden que se realizan, puesto que las matrices no poseen la propiedad conmutativa.

## 5. CINEMÁTICA DEL ROBOT

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo respecto a un sistema de referencia, pero sin atender a las fuerzas que lo producen. El problema de la cinemática se puede abordar de dos formas: el problema cinemático directo, que consiste en determinar la posición y orientación del efector final del robot a partir de la posición y orientación del resto de articulaciones; y el problema cinemático inverso, que consiste en determinar la posición y orientación que deben adoptar las articulaciones para que el efector final adopte unos valores conocidos.

### 5.1. Problema cinemático directo

El problema cinemático, en el caso de los robots, consiste en encontrar una matriz homogénea de transformación  $\mathbf{T}$  que relacione la posición y orientación del extremo del robot respecto de un sistema de referencia fijo localizado en su base.

Para un robot de  $n$  grados de libertad, formado por  $n$  eslabones unidos por  $n$  articulaciones, se pueden obtener las  $n$  matrices de transformación homogéneas que representan la orientación y traslación relativas entre eslabones consecutivos el robot. La matriz  ${}^{i-1}A_i$  describe la posición y orientación del eslabón  $i$  respecto del eslabón  $i-1$ .

Para considerar todos los grados de libertad, se utiliza la matriz  $\mathbf{T}$ , que vendrá dada por el producto de cada una de las matrices de transformación homogéneas relativas a cada par de eslabones.

$$T = {}^0A_n = {}^0A_1 * {}^1A_2 * \dots * {}^{n-1}A_n$$

#### 5.1.2. Algoritmo de Denavit-Hartenberg

Se trata de un método sistemático, propuesto en 1955 por Denavit y Hartenberg, que permite establecer un sistema de coordenadas ligado a cada eslabón, para poder determinar después las ecuaciones cinemáticas de la cadena completa.

Este sistema se basa en la utilización de cuatro transformaciones básicas que consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permiten relaciones el sistema de referencia del elemento  $i$  con el sistema del elemento  $i-1$ . Estas son las cuatro transformaciones básicas:

- Ángulo  $\theta_i$ : Es el ángulo desde  $X_{i-1}$  hasta  $X_i$  girando alrededor de  $Z_{i-1}$ .
- Distancia  $d_i$ : Es la distancia desde el sistema  $O_{i-1}$  hasta la intersección de las normales común entre  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$ , a lo largo de  $Z_{i-1}$ .
- Distancia  $a_i$ : Es la longitud de la normal común, es decir, es la distancia de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$  medida a lo largo de  $X_i$ .
- Ángulo  $\alpha_i$ : Es el ángulo que hay que rotar  $Z_{i-1}$  para llegar a  $Z_i$ , rotando alrededor de  $X_i$ .

Los pasos del algoritmo son los siguientes:

1. Se numeran los eslabones, empezando desde la base fija, a la que se le asocia el valor 0, y terminando por el extremo.
2. Se numeran las articulaciones comenzando por el primer grado de libertad y terminando por el último.
3. Se localiza el eje de cada articulación. Para pares de revolución, es el eje de giro; y para pares prismáticos, el eje a lo largo se mueve el eslabón.
4. Se colocan los ejes Z: se sitúa el eje  $Z_{i-1}$  en los ejes de las articulaciones  $i$ .
5. El origen de coordenadas  $O_0$  se coloca en cualquier punto de  $Z_0$ .
6. El resto de orígenes  $O_i$  se colocan estudiando la relación entre dos ejes Z consecutivos, atendiendo a las siguientes consideraciones:
  - a. Ejes paralelos: el origen  $O_i$  se ubica en la intersección entre la normal común de los ejes  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$  y el eje  $Z_i$ .
  - b. Ejes secantes: el origen  $O_i$  se ubica en el punto de intersección.
  - c. Ejes cruzados: el origen  $O_i$  se encuentra en la intersección entre la normal común de los ejes  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$  y el eje  $Z_i$ .
  - d. Ejes coincidentes: se puede posicionar el origen  $O_i$  a lo largo del eje  $Z_i$ , escogiendo la normal común en la misma dirección que en el caso anterior  $N_{i-1}$ .
7. El sistema  $O_n$  se coloca en el extremo del robot, con su eje  $Z_n$  paralelo a  $Z_{n-1}$ .
8. La orientación de  $X_0$  e  $Y_0$  es arbitraria, siempre siguiendo un sistema dextrógiro.
9. Cada eje  $X_i$  va en dirección a la normal común a  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$ . Su sentido es indistinto.
10. Los ejes  $Y_i$  se colocan siguiendo un sistema dextrógiro.

Después de haber seguido todos estos pasos, ya se puede obtener la matriz A de transformación entre cada par de eslabones consecutivos.

$${}^{i-1}A_i = T(z, \theta_i) * T(0,0, d_i) * T(a_i, 0,0) * T(x, \alpha_i)$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5.2. Problema cinemático inverso

El objetivo del problema cinemático inverso es obtener los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot para que su extremo se posicione en una posición y con una orientación determinadas.

El problema cinemático inverso debe resolverse en tiempo real. También se presenta la problemática de que, al contrario de lo que ocurría con el problema cinemático directo, el problema cinemático inverso puede tener múltiples soluciones, una, infinitas o ninguna. En el caso de soluciones múltiples será necesario una solución cerrada que incluya

determinadas reglas o restricciones que aseguren que la solución obtenida sea la más adecuada entre las posibles.

### 5.2.1. Desacoplo cinemático

En general, los robots precisan de tres grados de libertad para poder posicionar su efector final en cualquier punto del espacio. Sin embargo, no es suficiente con posicionar el extremo, sino que en la mayoría de ocasiones es necesario también orientarlo de modo adecuado. Por eso, suelen ser necesarios otros tres grados de libertad adicionales, situados al final de la cadena cinemática y cuyos tres ejes, generalmente, se cortan en un mismo punto situado en la muñeca del robot.

El método del desacoplo cinemático se basa en esta circunstancia para separar ambos problemas (posición y orientación) y simplificar los cálculos.

## 5.3. Matriz Jacobiana

Además de conocer la relación de coordenadas articulares y del extremo, también es necesario conocer la relación de sus derivadas, es decir, de su velocidad.

La matriz Jacobiana es una herramienta que permite relacionar la velocidad de las coordenadas articulares y las de la posición y orientación del extremo del robot.

La matriz Jacobiana directa permite obtener la velocidad del extremo del robot a partir de las velocidades articulares. De manera contraria, la matriz Jacobiana inversa permite obtener la velocidad que tienen que adquirir cada una de las articulaciones para obtener una velocidad determinada en el extremo.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad \text{con } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_y}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

**Figura 3.** Matriz Jacobiana directa

Fuente: *Fundamentos de robótica*. McGraw Hill

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma} \end{bmatrix}$$

**Figura 4.** Matriz Jacobiana inversa

Fuente: *Fundamentos de robótica*. McGraw Hill

#### 5.4. Configuraciones singulares

Al resolver la cinemática del robot, puede ocurrir que el valor de la matriz Jacobiana se anule en ciertos puntos, por lo que no existe su inversa.

La anulación del Jacobiano provoca que un pequeño incremento en las coordenadas cartesianas, se convierta en un aumento infinito de las coordenadas articulares. Esto provocaría en la práctica la necesidad de llevar las articulaciones a velocidades imposibles, haciendo irrealizable el movimiento del extremo del robot a una posición determinada.

Para evitar las condiciones singulares, se deben tener en cuenta en todo el proceso de diseño, tanto del propio robot como del control del mismo, imponiendo las restricciones al movimiento que sean necesarias.

## 6. Dinámica del robot

Si la cinemática se ocupa del estudio del movimiento sin atender a las fuerzas que lo producen, la dinámica, por su parte, se encarga del estudiar la relación de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina.

La obtención del modelo dinámico de un mecanismo cualquiera (en este caso, un robot) se basa fundamentalmente en el equilibrio de fuerzas planteado en la segunda ley de Newton, además de su equivalente en rotación, llamada ley de Euler.

$$\sum F = m * \dot{v}$$

$$\sum T = I * \dot{\omega} + \omega \times (I * \omega)$$

De igual manera que para el caso de la cinemática, se pueden encontrar dos planteamientos para la dinámica del robot:

- **Modelo dinámico directo:** expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares del robot en función de las fuerzas y pares que intervienen.
- **Modelo dinámico inverso:** expresa las fuerzas y pares que intervienen en función de la evolución de las coordenadas articulares y sus derivadas.

El modelo de Newton se hace demasiado complicado para el caso de robots con varios grados de libertad, puesto que, además de las fuerzas de gravedad e inercia, aparecen fuerzas de Coriolis y fuerzas centrípetas.

Por este motivo, se suele utilizar la formulación Lagrangiana, basada en consideraciones energéticas. Este método es más sistemático que el de Newton y facilita la formulación de modelos complejos, como es el caso de un robot.

Formulación Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau$$

$$\mathcal{L} = \kappa - u$$

$\mathcal{L}$ : Función Lagrangiana

T: vector de fuerzas y pares

q: coordenadas generalizadas

k: energía cinética

u: energía potencial

Esta formulación es mucho más tediosa para el caso elementos de un solo grado de libertad, pero sus ventajas se acentúan al aumentar los grados de libertad.

## 7. Control cinemático

### 7.1. Funciones del control cinemático

El control cinemático establece las trayectorias que deben seguir las articulaciones de un robot a lo largo del tiempo para lograr los objetivos fijados por el usuario. Recibe como entradas los datos proporcionados por el usuario y, apoyándose en un modelo cinemático, establece las trayectorias para cada articulación como funciones de tiempo.

El control cinemático debe realizar estas funciones:

- Convertir el movimiento especificado por el usuario en una trayectoria analítica en el espacio cartesiano.
- Obtener un número finito de puntos de dicha trayectoria, cada uno de estos puntos vendrá dado por  $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ .
- Utilizando mecanismos de cinemática inversa, obtener las coordenadas articulares correspondientes a cada uno de esos puntos. Deben tenerse en cuenta soluciones múltiples, ausencia de solución y puntos singulares de manera que se asegure la continuidad de la trayectoria. También debe asegurarse que la trayectoria sea realizable por los actuadores del robot.
- Interpolan los puntos articulares obtenidos y generar para cada articulación una expresión que pase lo más cerca posible a la trayectoria especificada por el usuario.
- Muestrear la trayectoria articular para generar referencias al control dinámico.

### 7.2. Tipos de trayectorias

Para realizar el movimiento desde un punto inicial hasta otro final, el robot puede seguir infinitas trayectorias espaciales. Por este motivo, es necesario elegir de entre todas las trayectorias posibles, la más adecuada en cuanto a sencillez o utilidad. Los robots comerciales suelen disponer de trayectorias punto a punto, coordinadas y continuas.

- **Trayectorias punto a punto:** cada articulación evoluciona desde su posición inicial a su posición final sin realizar ninguna consideración sobre el estado o evolución de las demás articulaciones. Se pueden realizar movimientos eje a eje, en los cuales solo se mueve un eje cada vez; y también movimientos simultáneos de ejes, en los que los actuadores comienzan el movimiento a la vez. El primer tipo de movimiento tiene como ventaja que el consumo de potencia de los actuadores es menor, y tiene como inconveniente que es más lento. Por su parte, el segundo tipo de movimientos es más rápido, pero tiene como inconveniente la posibilidad de forzar los movimientos de algunas articulaciones a velocidades y aceleraciones elevadas, para luego tener que esperar el movimiento de las articulaciones más lentas.

La forma más sencilla de realizar este tipo de movimientos es utilizando polinomios de tercer grado, en los que la posición de cada articulación se

determina mediante:  $q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ , y los valores de velocidad y aceleración se obtienen derivando:

$$\dot{q}(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$\ddot{q}(t) = 6at + 2b$$

- **Trayectorias coordinadas:** se realiza un cálculo previo para saber cuál será la articulación más lenta y se ralentizan el resto de ejes para evitar forzar la velocidad de sus actuadores y que todas las articulaciones terminen su movimiento a la vez. El tiempo total invertido es el mínimo posible.
- **Trayectorias continuas:** se calculan de manera continua las trayectorias articulares para que la trayectoria que sigue el extremo del robot sea conocida por el usuario.

## CAPÍTULO II. DESARROLLO

### 1. Robots de paletización

La paletización es un proceso de manipulación que consiste en disponer piezas ordenadamente sobre una plataforma. Este proceso tiene como objetivo facilitar la circulación de la mercancía durante el proceso de producción.

Para permitir la sujeción de las piezas, normalmente se utilizan garras con dedos mecánicos servocontrolados. Además, se suelen utilizar garras que permitan manipular, si es posible, varias piezas simultáneamente. El diseño de estas garras no debe entorpecer las operaciones de apilado y desapilado.

Los robots utilizados en operaciones de paletizado suelen ser de tipo SCARA, pórtico o angular, de cuatro grados de libertad:

- **SCARA:** se trata de un robot que consta de dos ejes rotacionales paralelos y un eje lineal, paralelo a ambos, que se desplaza verticalmente. Se emplea en tareas que requieren movimientos simples y rápidos.
- **Tipo pórtico:** es un robot de coordenadas cartesianas cuyo eje horizontal se encuentra limitado y está apoyado en sus extremos. Este tipo de robots se mueven en línea recta y sus ejes de movimiento forman ángulos rectos.
- **Tipo angular:** está formado por tres ejes rotacionales, con el primer eje perpendicular al suelo y los otros dos perpendiculares a este y paralelos entre sí.

Normalmente, el cuarto grado de libertad de estos robots es la capacidad de rotación de su efector final.

### 2. Robot industrial FANUC M-410iB/700

Este robot es de la marca FANUC. Se trata de un robot paletizador de tipo angular de cuatro ejes que es capaz de levantar hasta 700 kilogramos y hasta un alcance de 3,1 metros. Se trata del robot más potente de su gama, la serie 410 de robots paletizadores del fabricante FANUC. Este fabricante fue uno de los primeros en incorporar una serie de robots específica para tareas de paletización.

FANUC es una compañía japonesa con gran experiencia dentro del desarrollo de equipos de control numérico. Es el fabricante líder mundial en automatización y fabrica gran cantidad de robots industriales. Las características técnicas de este robot se detallan en el Anexo I.

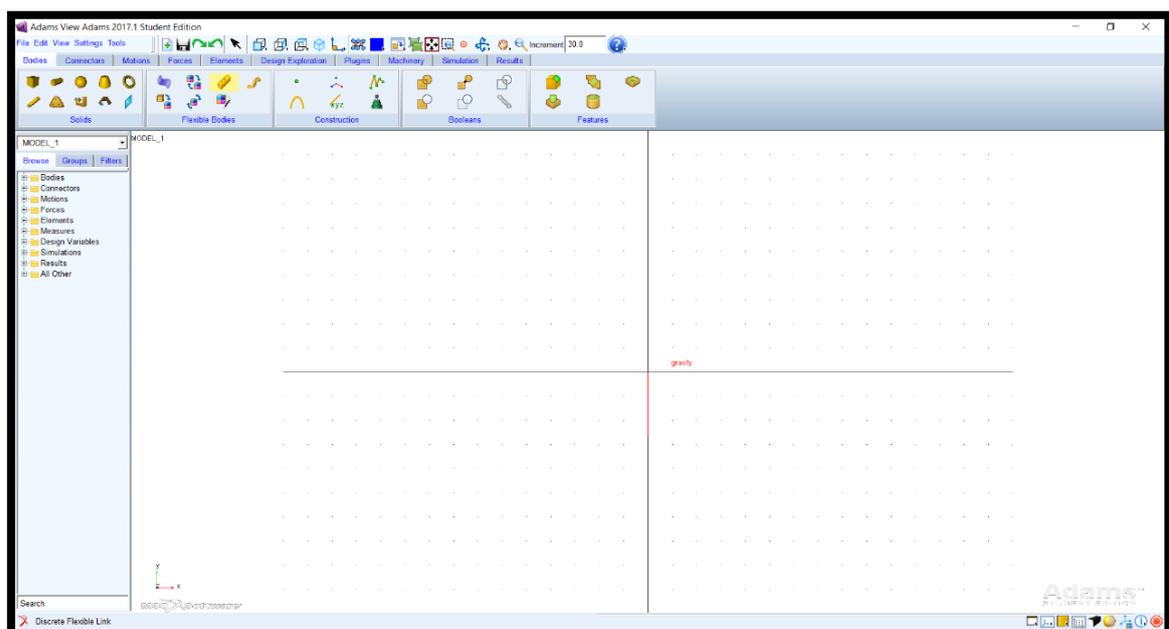


**Figura 5.** Fotografía del robot industrial FANUC M-410iB/700

Fuente: <http://www.fanuc.eu>

### 3. MSC Adams

MSC Adams es uno de los softwares informáticos de análisis de movimiento y dinámica más utilizados del mundo. El programa Adams es usado por ingenieros de todo el mundo para realizar simulaciones y estudiar la dinámica de piezas móviles, así como para analizar cómo las cargas y las fuerzas se distribuyen a lo largo de los sistemas mecánicos. El programa Adams es capaz de resolver simultáneamente las ecuaciones de la cinemática, la estática, la cuasistática y la dinámica.



**Figura 6.** Entorno del programa MSC Adams.

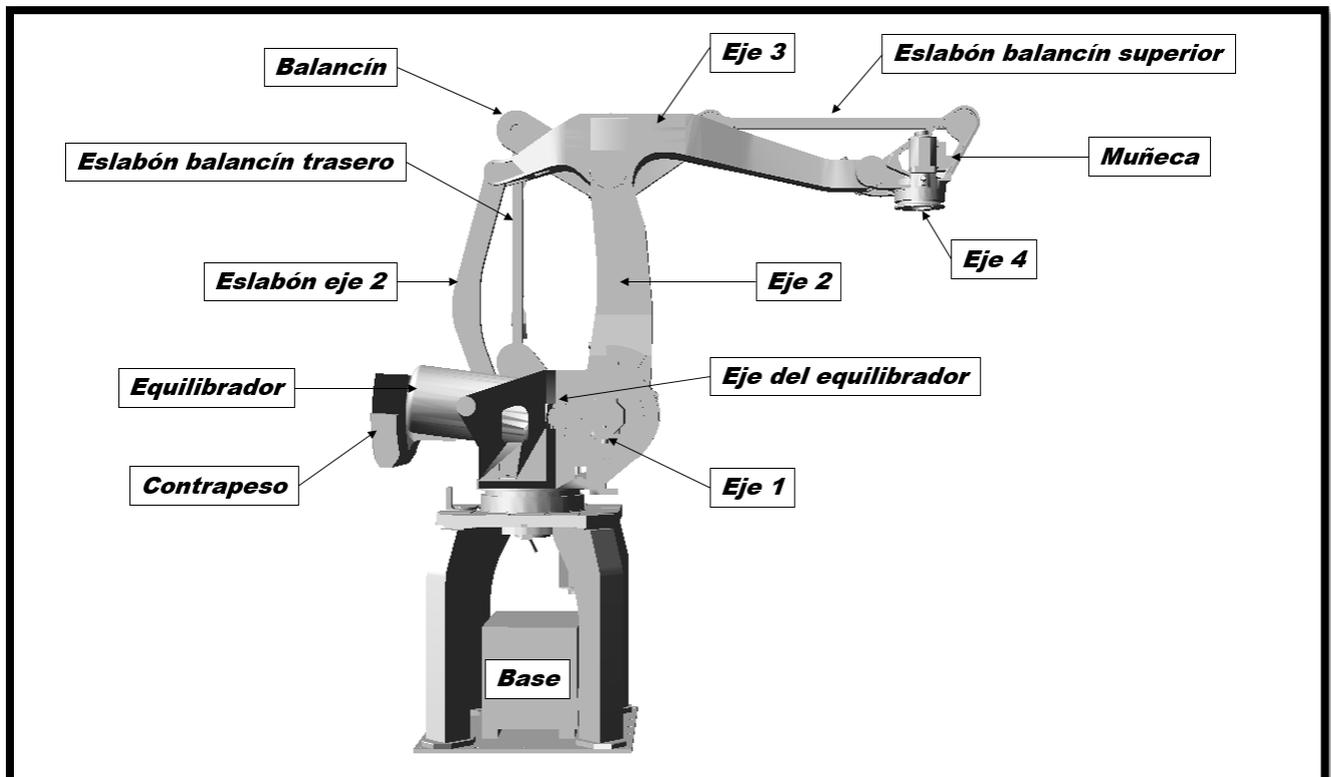
## 2.1. Modelo del Robot FANUC M-410iB/700

En primer lugar, se deben obtener los archivos CAD del modelado del robot. Estos se pueden encontrar generalmente en la página web del fabricante. Estos archivos CAD se pueden encontrar en multitud de formatos, pero es recomendable que el formato de los archivos sea *parasolid* para trabajar mejor con MSC Adams.

Por tanto, se deberán abrir los ficheros con un programa informático de CAD, por ejemplo, SOLIDWORKS, y exportar los archivos en formato *parasolid*, es decir, con extensión ".t\_x".

En segundo lugar, se deberá hallar la masa de cada una de las piezas que forman el robot para asignársela en el programa. Desgraciadamente, el fabricante no facilita la masa de cada pieza por separado, sino que solo indica la masa total del robot. Para poder conocer la masa de cada una de las partes que forman el robot, se deberá atender a la hipótesis de que la masa está distribuida homogéneamente. De esta forma, se podrá averiguar la masa calculando primero la densidad. Para ello, se necesita obtener el volumen del robot utilizando algún programa de CAD. Utilizando el programa SOLIDWORKS se ha obtenido un volumen total de  $0,83 \text{ m}^3$ . Como según la ficha técnica, la masa del robot es de 2700 kg, la densidad del robot es de  $3253 \text{ kg/m}^3$ . Esta hipótesis dista mucho de ser real, pero es un modelo suficientemente aproximado para los cálculos que se van a realizar.

### 2.1.1. Despiece del robot



**Figura 8.** Localización de las distintas piezas del robot

Fuente: elaboración propia. Nota: las siguientes figuras son de elaboración propia a menos que se indique lo contrario.

En este apartado se detallan las diferentes piezas que componen la estructura del robot. Se detalla su localización, así como su masa y volumen. Existe una pieza llamada "base\_2" que no aparece en el despiece proporcionado por el fabricante, pero sí aparece al importar el modelo total del robot en Adams. Debido a su pequeño tamaño y a que carece de movimiento, no será tomada en cuenta para los cálculos.

Pieza	Masa (kg)	Volumen (m <sup>3</sup> )
Eje 1	336,00	0,10329
Eslabón eje 2	28,82	0,00886
Eje 2	367,10	0,11285
Eje 3	275,92	0,08482
Eje 4	2,67	0,00082
Eje del equilibrador	6,12	0,00188
Equilibrador	208,26	0,06402
Base	1205,83	0,37068
Contrapeso	142,81	0,04390
Eslabón balancín trasero	12,23	0,00376
Eslabón balancín superior	11,94	0,00367
Balancín	49,22	0,01513
Muñeca	55,27	0,01699
<b>Total</b>	<b>2700</b>	<b>0,82989</b>
$DENSIDAD = \frac{MASA}{VOLUMEN} = \frac{2700}{0,82989} = 3253 \text{ kg/m}^3$		

**Tabla 2.** Lista de elementos constitutivos del robot, así como la masa y el volumen de cada uno de ellos, y masa y volumen totales del robot.

### 2.1.2. Modelado mediante el programa MSC Adams

En este apartado se explicará el uso básico del programa MSC Adams.

La primera tarea será la de importar el modelo del robot en formato *parasolid*, y asignarle a cada pieza la densidad calculada. Es interesante conocer el nombre en idioma inglés de cada pieza constituyente del robot, puesto que tanto el programa como los ficheros trabajan en ese idioma.

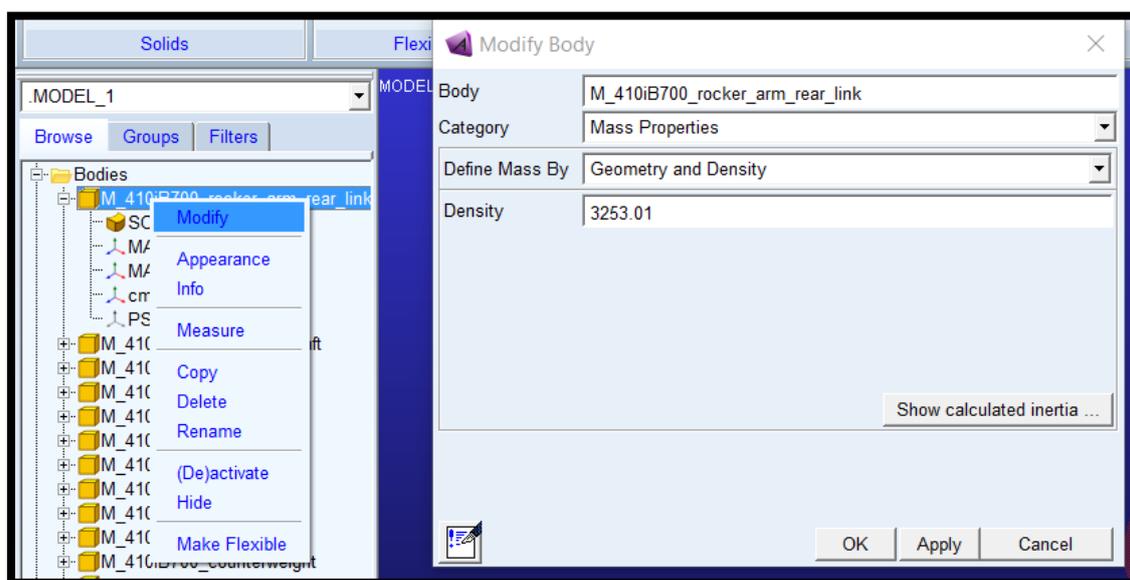
Pieza	Link
Eje 1	Axis 1
Eslabón eje 2	Axis 2 link
Eje 2	Axis 2
Eje 3	Axis 3
Eje 4	Axis 4
Eje del equilibrador	Balancer shaft
Equilibrador	Balancer
Base	Base
Contrapeso	Counterweight
Eslabón balancín trasero	Rocker arm rear link
Eslabón balancín superior	Rocker arm top link
Balancín	Rocker arm
Muñeca	Wrist

**Tabla 3.** Denominación, en castellano e inglés, de las piezas del robot

Para importar el modelo del robot hay que hacer clic en “FILE”, *import*. En *file type* se selecciona *Parasolid*, y en *File To Read* se selecciona la ruta del archivo en cuestión. Se asigna un nombre al modelo mediante la opción *model, guesses*. Se hace clic en OK.

Para asignar la densidad, se hace clic con el botón derecho a cada una de las piezas del desplegable “BODIES”. Se selecciona *Modify* y aparece una ventana donde se introduce la densidad.

Hay que fijarse en que la gravedad está correctamente indicada en el programa. Para ello habrá que abrir el menú “SETTINGS” e ir al apartado *Gravity*. En la ventana hay que seleccionar la opción *Gravity* y colocar el valor de  $9,81 \text{ m/s}^2$  en el campo que corresponda, dependiendo de cómo estén colocados los ejes del programa.



**Figura 9.** Introducción de la densidad.

El siguiente paso es el de unir todos los eslabones de robot mediante pares cinemáticos para dotarlo de movimiento. El robot FANUC M-410iB/700 consta de un gran número de pares de revolución, un par prismático y también algunos pares fijos que tendrán la función de “fijar” la base del robot al espacio de trabajo y soldar algunas piezas. El espacio de trabajo se denomina “Ground”. En la tabla 4 se muestran los distintos pares cinemáticos utilizados. P (prismático), R (revolución) y F (fijo).

Para colocar un par cinemático, hay que seleccionarlo en el menú “CONNECTORS”. Después aparece un menú donde se deberá indicar que el par se coloca en dos cuerpos y en una localización (“*2 bodies-1 location*”). Se hace clic en un cuerpo, después en otro y por último en la localización donde se quiere colocar el par, es decir, en el centro de la rotación entre dos cuerpos en el caso de pares R. En el caso de pares P, se colocará el par en un eje a lo largo de su movimiento, y también habrá que indicar la dirección del movimiento mediante un vector. Por su parte, la localización de las uniones fijas es totalmente indiferente. [Figura 10].

Pares de revolución (R)	
Axis 2 link	Axis 3
Wrist	Axis 4
Base	Axis 1
Counterweight	Axis 2
Rocker arm rear link	Axis 1
Balancer	Axis 1
Counterweight	Axis 1
Balancer	Axis 2
Axis 2	Axis 1
Rocker arm	Rocker arm rear link
Rocker arm	Axis 3
Axis 2	Axis 3
Rocker arm	Rocker arm top link
Wrist	Rocker arm top link
Wrist	Axis 3
Pares prismáticos (P)	
Balancer	Balancer shaft
Uniones fijas	
Base	Ground
Base	Base 2

Tabla 4. Pares cinemáticos utilizados en el modelo del robot

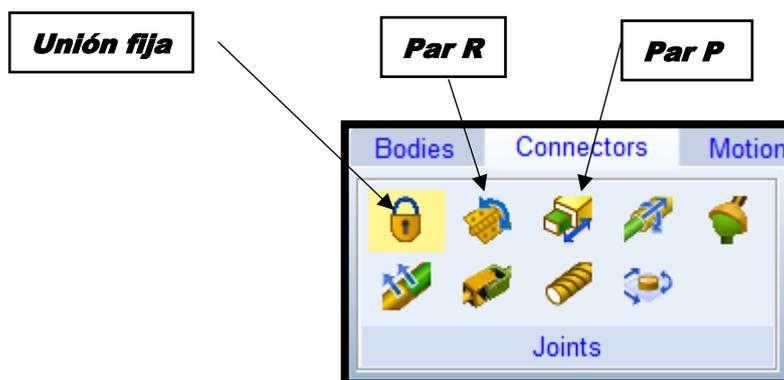


Figura 10. Localización de los distintos tipos de pares en el menú “CONNECTORS”

Una vez colocados los pares, se procederá a dotar de movimiento al robot. Para ello, se colocarán cuatro motores, correspondientes a los cuatro grados de libertad del robot. Para ello, se selecciona en el menú “MOTIONS” la opción “rotational joint motion”. De momento, la velocidad de ellos es indiferente, pero se puede cambiar en la ventana “Rot. Speed”. Los cuatro motores se colocan en las siguientes articulaciones:

Pares de revolución (R)		
<b>Motor 1</b>	Base	Axis 1
<b>Motor 2</b>	Axis 2	Axis 1
<b>Motor 3</b>	Axis 1	Counterweight
<b>Motor 4</b>	Wrist	Axis 4

Tabla 5. Colocación de los motores

Por último, se crea un entorno de trabajo y unas pinzas para el robot para crear la simulación del funcionamiento de la máquina. Para modelar el entorno, se crean dos sólidos a modo de mesa y otro sólido a modo de objeto que deberá agarrar el robot. Para

crear un sólido, hay que acudir al menú "BODIES" y seleccionar la opción *box*. Aparece una ventana donde se deberán indicar las dimensiones del objeto en cuestión. Haciendo clic sobre la rejilla, el objeto se coloca. Se le asigna al objeto una masa de 100 kg, de forma análoga a como se ha asignado la densidad, pero en este caso se seleccionará *Define mass by user input* y se asignará el valor de 100 en el campo *mass*.

Las pinzas que se crearán constarán de una superficie rectangular y de dos superficies perpendiculares a la primera que se encargarán de agarrar el objeto. El movimiento de estas garras será lineal.

Para mover un cuerpo, se puede usar la opción del menú superior *reposition objects relative to view coordinates*. Para realizar operaciones booleanas con diferentes sólidos, se utiliza el grupo de opciones *booleans* del menú "BODIES". Se le asigna a cada una de las piezas de la garra una masa de 1 kg.

Estas pinzas constarán de un par P que unirá cada garra a la base y una unión fija que unirá la base al eje 4 del robot.

Para que las garras se abran y cierren de forma coordinada, se utiliza la opción *couplers* del menú CONNECTORS. Después, se seleccionan los dos pares prismáticos de las garras. El *coupler* se deberá modificar, y se asignará el valor -1 en el apartado *scale*.

Para abrir y cerrar las pinzas se crearán dos componentes: una fuerza que se encargará de abrir y cerrar las pinzas, y un resorte entre ambas pinzas que servirá como tope de apertura y cierre. Ambos elementos se encuentran en el menú "FORCES". Para crear la fuerza puntual se selecciona *Create a force (single-component) applied force* en el apartado "*Applied Forces*". Después, se debe seleccionar el cuerpo donde se aplica, el punto de aplicación y la dirección del sentido positivo de la fuerza. En el apartado *Runtime Direction* se selecciona *Body Moving* y en *Construction, Pick Feature*. Se selecciona una de las garras, como punto de aplicación el centro de gravedad, y como sentido positivo, hacia la derecha. Para colocar el resorte lineal, se elige la opción *Create a Translational Spring-Damper* del apartado *Flexible Connections*, y después se hace clic en los centros de gravedad de las garras. Mediante la opción *Modify*, se le aplica un *Stiffness Coefficient* de 1000, y un *Damping Coefficient* de 100 (unidades del SI).

Por último, solo falta aplicar el contacto entre superficies para que el cubo no se caiga en el espacio al situarlo en la mesa, y para que las pinzas puedan agarrar el objeto. Para ello, se selecciona en el apartado *Special Forces* del menú "FORCES" la opción *Create a contact*. Se deben indicar los dos cuerpos que están en contacto en los campos *I Solid* y *J Solid*. La opción *Solid to Solid* debe estar seleccionada. En los campos *Stiffness*, *Force Exponent*, *Damping Stiffness* y *Penetration Depth* se introducen los valores 1.0E+8, 2.2, 1.0E+05 y 1.0E-04, respectivamente. Se activa la opción de fricción y se indica el tipo *Coulomb*. En los campos *Static Coefficient* y *Dynamic Coefficient* se asigna el valor 0.9.

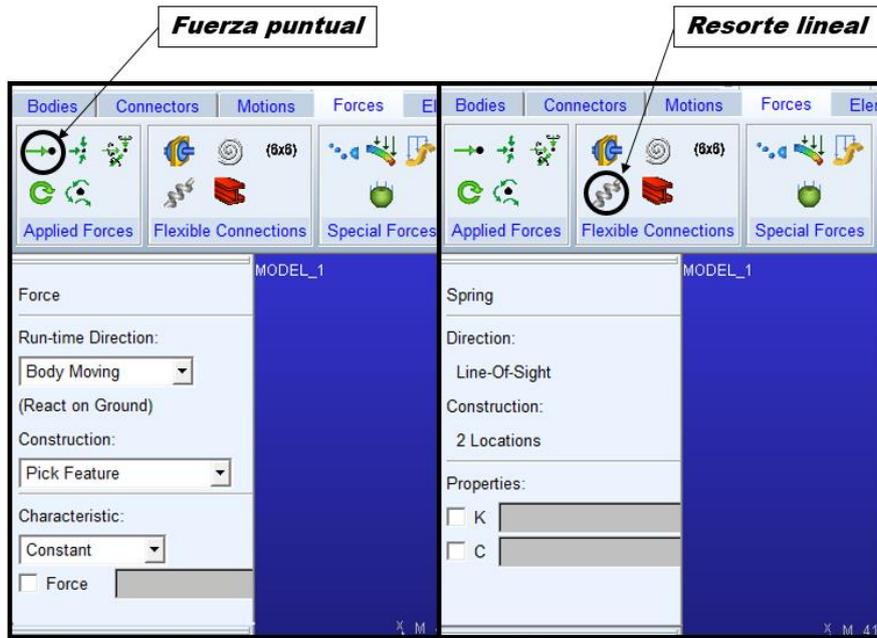


Figura 11. Localización de la fuerza puntual y resorte en el programa Adams.

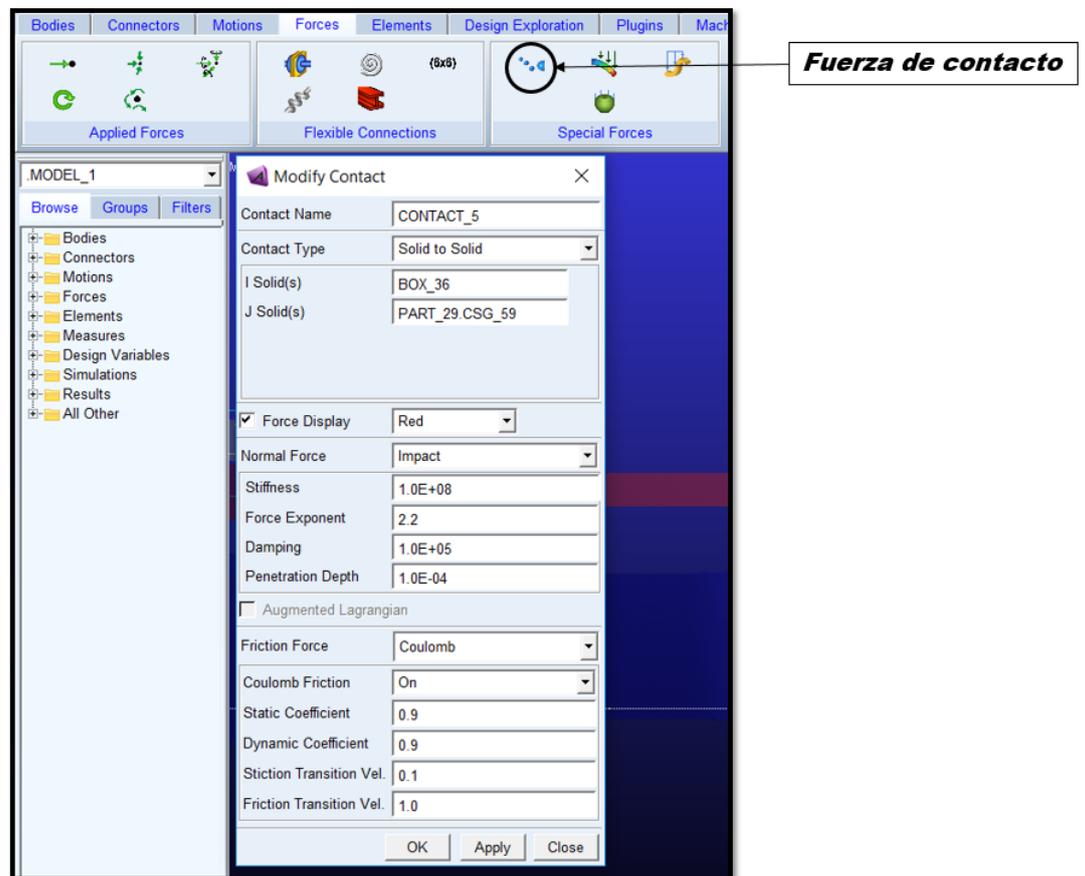
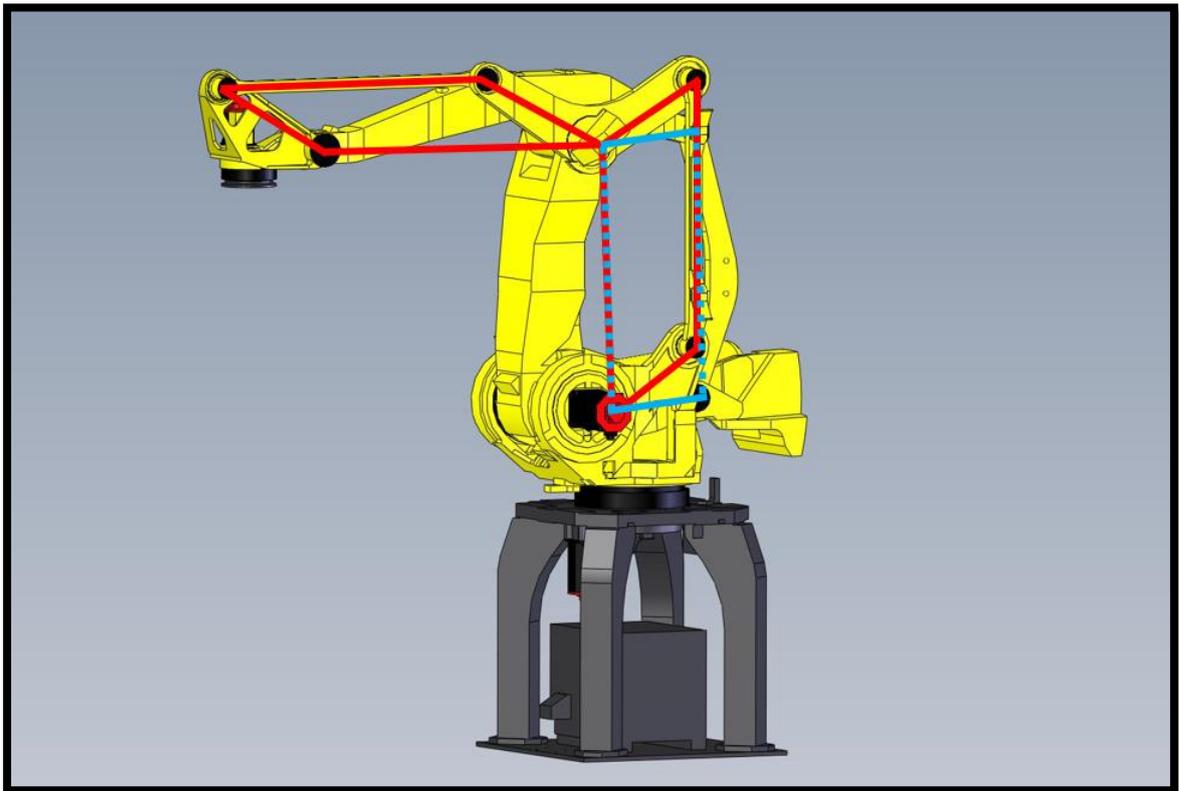


Figura 12. Localización de la fuerza de contacto en el programa Adams.

#### 4. Cinemática del robot industrial FANUC M-410iB/700

Se trata de un robot cuya estructura consta de tres paralelogramos articulados cuyo objetivo es el de mantener el efector final siempre paralelo al suelo. Los paralelogramos articulados son usados en los mecanismos para mantener el paralelismo de varias partes del sistema. El primer paralelogramo mueve el eje 2 del robot. A su vez, el eje 3 del robot se traslada, pero sin rotar. El segundo paralelogramo, se encarga del movimiento angular del eje 3. Por último, el tercer paralelogramo se encarga de mantener la muñeca con una orientación fija. Es interesante comprobar cómo el balancín tampoco varía nunca su orientación debido al efecto del primer paralelogramo que va unido al eje 1.

Todos estos factores simplificarán los cálculos cinemáticos, puesto que la orientación del efector final será un valor constante.



**Figura 13.** Robot M-410iB/700 mostrando su estructura formada por tres paralelogramos.

Las barras que forman esta estructura no tendrán que tenerse en cuenta como eslabones a la hora de aplicar el algoritmo de Denavit-Hartenberg. Si se eliminan las barras sobrantes, el robot queda de la siguiente manera:



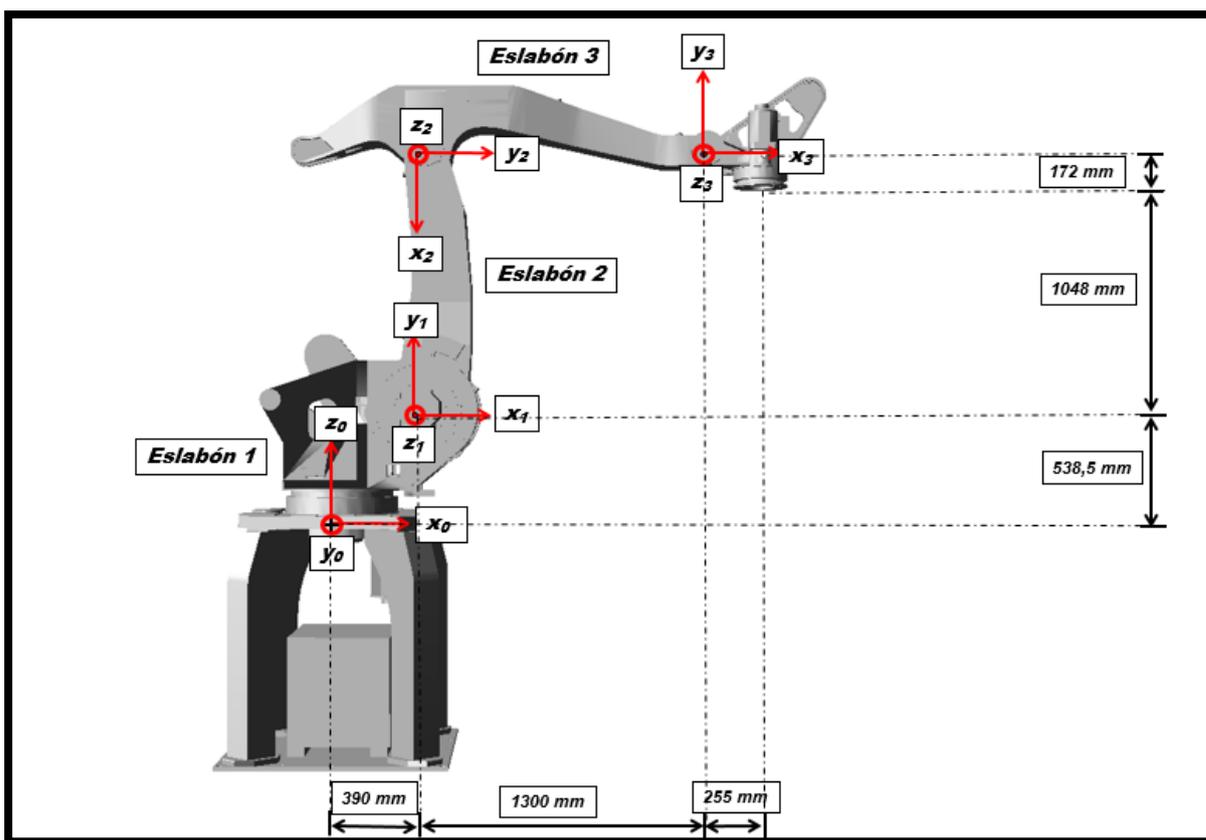
**Figura 14.** Eslabones que se tendrán en cuenta para la aplicación del algoritmo de Denavit-Hartenberg.

### 3.1. Parámetros de Denavit-Hartenberg

En este apartado, se deberá aplicar la secuencia de pasos del método de Denavit-Hartenberg, descritos en apartados anteriores.

Debido a la simplificación que se ha realizado, el modelo del robot queda reducido a cinco eslabones con cinco articulaciones. Es preciso indicar que, debido a la estructura del robot, los últimos dos eslabones no deben ser tenidos en cuenta para el cálculo de los parámetros de Denavit-Hartenberg. Esto es debido a que los eslabones 4 y 5 (muñeca y cuarto eje del robot) siempre tienen la misma orientación respecto al eje principal de referencia (el efector final siempre será paralelo al suelo). Esto reduce la dificultad de los cálculos, pues permite el desacoplo cinemático de estos eslabones. Aunque el robot FANUC M-410iB/700 tenga cuatro grados de libertad, únicamente se considerarán en los cálculos los tres primeros, pues el último solo representa una rotación en un plano paralelo al suelo. Además, como la base del robot permanece fija, no deberá ser tenida en cuenta en ningún cálculo.

El método comienza con la colocación de los ejes Z, cuya dirección es indiferente. Seguidamente, se colocan los orígenes de cada uno de los sistemas de referencia correspondientes a cada articulación. En siguiente lugar, se sitúan los ejes X en el mismo sentido que las perpendiculares comunes a dos ejes Z consecutivos. Por último, se definen los ejes Y siguiendo el sistema dextrógiro.



**Figura 15.** Ejes de Denavit-Hartenberg y cotas del robot.  
Fuente: elaboración propia.

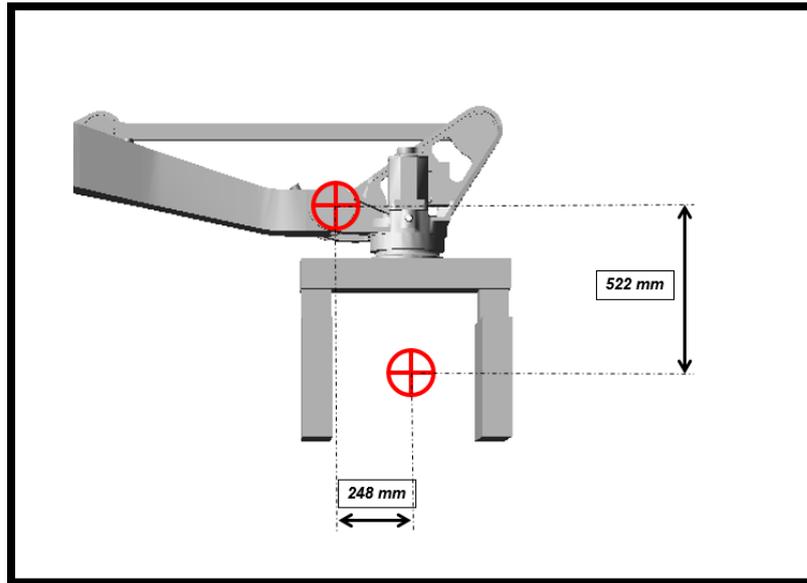
Por otro lado, también es necesario señalar que se ha simplificado el modelo, de manera que se ha supuesto que los centros de todos los ejes del robot se encuentran contenidos en un plano paralelo a XZ, que lo corta longitudinalmente por su plano medio. Esto no es así exactamente, pero debido a que el efector final y el punto de referencia de la base están así situados, y los demás puntos apenas se alejan unos milímetros de la verticalidad, se da esta hipótesis por válida. (La geometría del robot se detalla en el Anexo 1).

Una vez colocados los ejes se deben obtener los cuatro parámetros de Denavit-Hartenberg ( $d, a, \theta, \alpha$ ) que ya fueron definidos en apartados anteriores:

Articulación	$\theta_i$ (rad)	$d_i$ (mm)	$a_i$ (mm)	$\alpha_i$ (rad)
1	$q_1$	538,5	390	$\pi/2$
2	$q_2 - \pi/2$	0	-1220	0
3	$q_3 + \pi/2$	0	1300	0

**Tabla 6.** Parámetros de Denavit-Hartenberg

Se debe tener en cuenta que, siguiendo los parámetros de Denavit-Hartenberg se resolverá el problema solo para el extremo del eje 3. Después, se añadirán a los cálculos las coordenadas del punto final (Tool Attachment Point), puesto que su orientación respecto del sistema de coordenadas fijo es siempre la misma.



**Figura 16.** Localización del punto central de la garra

### 3.2. Problema cinemático directo de posición (Mathcad)

Primero, se realizará el problema cinemático directo de la posición del robot. Para realizar las operaciones matemáticas se hará uso del programa PTC Mathcad.

PTC Mathcad es un software matemático capaz de resolver y analizar cálculos de gran complejidad. Presenta una interfaz muy fácil de usar, de lenguaje matemático natural.

(Todos los cálculos se detallan en el Anexo II).

Matriz de transformación entre el eslabón 0 y el eslabón 1:

$$A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 390 \cdot \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 390 \cdot \sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & 538.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de transformación entre el eslabón 1 y el eslabón 2:

$$A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(q_2 - \frac{1}{2} \cdot \pi\right) & 0 & -1220 \cdot \cos\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & -1220 \cdot \sin\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de transformación entre el eslabón 2 y el eslabón 3:

$$A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) & -\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi + q_3\right) & 0 & 1300 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) & 0 & 1300 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de transformación entre el eslabón 3 y el sistema de coordenadas origen:

$$T := A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) \cdot A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) \cdot A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3)$$

Ahora, se le suma la matriz de posición del Tool Attachment Point respecto del extremo del eje 3:

$$T_{TAP} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 248 \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 248 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 0 & -522 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{final} := T + T_{TAP}$$

Se extraen los vectores de posición de X, Y, Z (px, py, pz).

$$px := T_{final_{0,3}}$$

$$py := T_{final_{1,3}}$$

$$pz := T_{final_{2,3}}$$

$$px \rightarrow 638 \cdot \cos(q_1) - 1220 \cdot \cos\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(q_1) + 1300 \cdot \cos\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) \cdot \cos(q_1) - 1300 \cdot \sin\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) \cdot \cos(q_1)$$

$$py \rightarrow 638 \cdot \sin(q_1) - 1220 \cdot \cos\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(q_1) + 1300 \cdot \cos\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) \cdot \sin(q_1) - 1300 \cdot \sin\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) \cdot \sin(q_1)$$

$$pz \rightarrow 1.3 \times 10^3 \cdot \cos(q_2 - 1.571) \cdot \sin(q_3 + 1.571) - 1.22 \times 10^3 \cdot \sin(q_2 - 1.571) + 1.3 \times 10^3 \cdot \cos(q_3 + 1.571) \cdot \sin(q_2 - 1.571) + 16.5$$

### 3.3. Problema cinemático directo de velocidad

Se parte de las ecuaciones de la posición. Es decir, de los vectores de posición extraídos de la matriz de transformación. A partir de ellos, se calcula la matriz Jacobiana. La matriz Jacobiana tiene una dimensión de 3X3 y está formada por las derivadas parciales de las tres componentes del vector de posición respecto a cada uno de los tres grados de libertad del robot.

$$J(q_1, q_2, q_3) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dq_1} p_x & \frac{d}{dq_2} p_x & \frac{d}{dq_3} p_x \\ \frac{d}{dq_1} p_y & \frac{d}{dq_2} p_y & \frac{d}{dq_3} p_y \\ \frac{d}{dq_1} p_z & \frac{d}{dq_2} p_z & \frac{d}{dq_3} p_z \end{pmatrix}$$

Donde  $p_x$ ,  $p_y$  y  $p_z$  son cada una de las componentes del vector de posición y  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  corresponden a cada uno de los grados de libertad.

Como se ha explicado en la parte de teoría, la matriz Jacobiana sirve para obtener la velocidad del efector final a partir de la velocidad de cada una de las articulaciones en un instante de terminado. Por tanto, para calcular la velocidad del efector final se necesita conocer la velocidad y posición de cada uno de las articulaciones que forman los grados de libertad del robot.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

También se debe tener en cuenta que, debido a la forma del robot, la velocidad del TAP es exactamente la misma que la del extremo del eslabón 3 (axis 3).

Nota: debido a la extensión de las expresiones del resultado, los cálculos se detallan en el Anexo II.

## 5. Comprobación de resultados

En este apartado se comprobará que tanto los parámetros de Denavit-Hartenberg como los cálculos cinemáticos realizados mediante el programa Mathcad son correctos utilizando para ello una simulación mediante MSC Adams. Se comprobarán los parámetros correspondientes a posición, velocidad y aceleración.

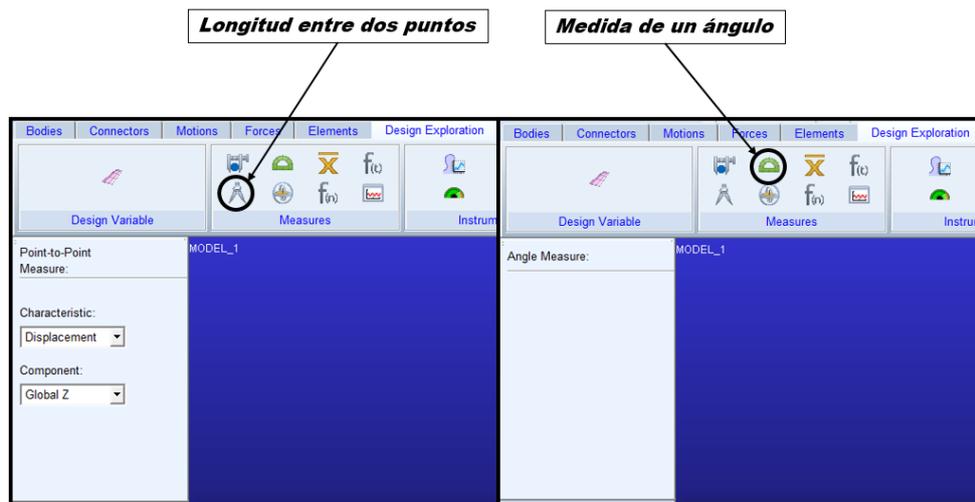
### 5.1. Comprobación de la posición

Para realizar la comprobación, se realizarán los siguientes pasos:

1. Se crearán en el programa Adams dos tipos de medidas distintas: tres medidas correspondientes a las coordenadas x, y, z del punto extremo del Eje 3 (axis 3), correspondiente al tercer origen del sistema de coordenadas de Denavit-Hartenberg y otras tres medidas que corresponden a los ángulos de los tres primeros grados de libertad del robot. Para ello, lo primero que hay que hacer es añadir cuatro nuevos *Markers* cuya posición y orientación coincida exactamente con la posición de los cuatro orígenes de coordenadas de Denavit-Hartenberg. Para añadir un *marker* hay que ir al apartado "BODIES" y en "Construction" hacer clic en "Marker". Hay que asegurarse de que está marcada la opción "Add to part". Se hace clic en el cuerpo deseado y seguidamente en la localización. Utilizando la opción

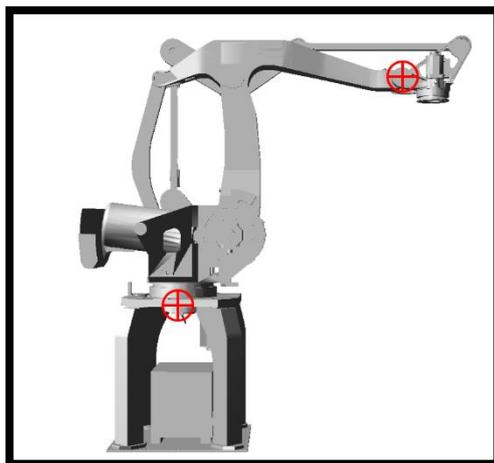
“*reposition objets relative to view coordinates*” se puede situar el punto con precisión y también orientarlo correctamente.

- Para crear las medidas, hay que ir al menú “DESIGN EXPLORATION”. En él, hay que elegir una opción para cada tipo de medida: *Create a new Point-to-Point measure*, para medir la distancia ente dos puntos; y *Create a new angle measure*, que utiliza tres puntos distintos para medir un ángulo. Es importante que las unidades del programa estén configuradas como el Sistema Internacional. Para ello, hay que ir a *SETTINGS, units*, y en la ventana que se abre se seleccionan las unidades correspondientes al SI: metros, kilogramos, radianes y segundos.



**Figura 17.** Localización de las opciones de medida de longitud y de medida de ángulos

- Para determinar la posición del punto que se desea conocer, hay que generar una nueva medida por cada coordenada cartesiana. Para realizar una medida, se selecciona la opción *Create a new point-to-point measure*. Se elige la opción *Displacement* y en el campo *Component*, hay que escoger *Global X*, *Global Y* o *Global Z* según corresponda en cada caso. Después, hay que clicar en los dos puntos deseados. Estos puntos se especifican en la siguiente figura. Ambos están contenidos en un plano, paralelo a XZ, que corta longitudinalmente el centro del robot. Aparece una gráfica por cada componente.



**Figura 18.** Localización de los puntos entre los cuales se realiza la medida de posición.

4. Se realiza la medida de los ángulos. Para ello se emplean tres puntos: uno situado en la articulación  $n-1$ , otro situado en la articulación  $n$  y el último situado en el centro de giro de ambas. Es importante que la posición de reposo sea la posición cuya medida sea 0, puesto que así se ha supuesto en el método de Denavit-Hartenberg. Hay que seleccionar la opción *Create a New Angle Measure* y clicar en los tres puntos citados. Aparece una gráfica por cada uno de los tres ángulos medidos.
5. Hay que ejecutar una simulación para que las gráficas muestren los resultados. Primero se simulará el robot con sus condiciones iniciales de reposo, es decir, con los ángulos de todas las articulaciones a 0. Para ello, hay que introducir el valor 0 en la función de movimiento de cada uno de los cuatro *Motions* que se han asignado a sus articulaciones. Para ello, hay que ir al apartado *Simulation* y hacer clic en la opción *Run an Interactive Simulation*. Se abre una ventana llamada *Simulation Control* donde hay varios parámetros para controlar la simulación. En el apartado *End Time*, se introduce 1 (simulación de un segundo de duración). El número de *Steps* es indiferente para este apartado. Se establecen las condiciones iniciales del robot pulsando *Perform initial conditions solutions*. Se hace clic en *Start simulation* y comienzan a dibujarse las gráficas. Se anotan los resultados y se comparan con los obtenidos en Mathcad. La posición del punto viene dada por las tres filas superiores de la última columna de la matriz de transformación, tal y como se ha explicado en la introducción teórica (SIMULACIÓN 1).

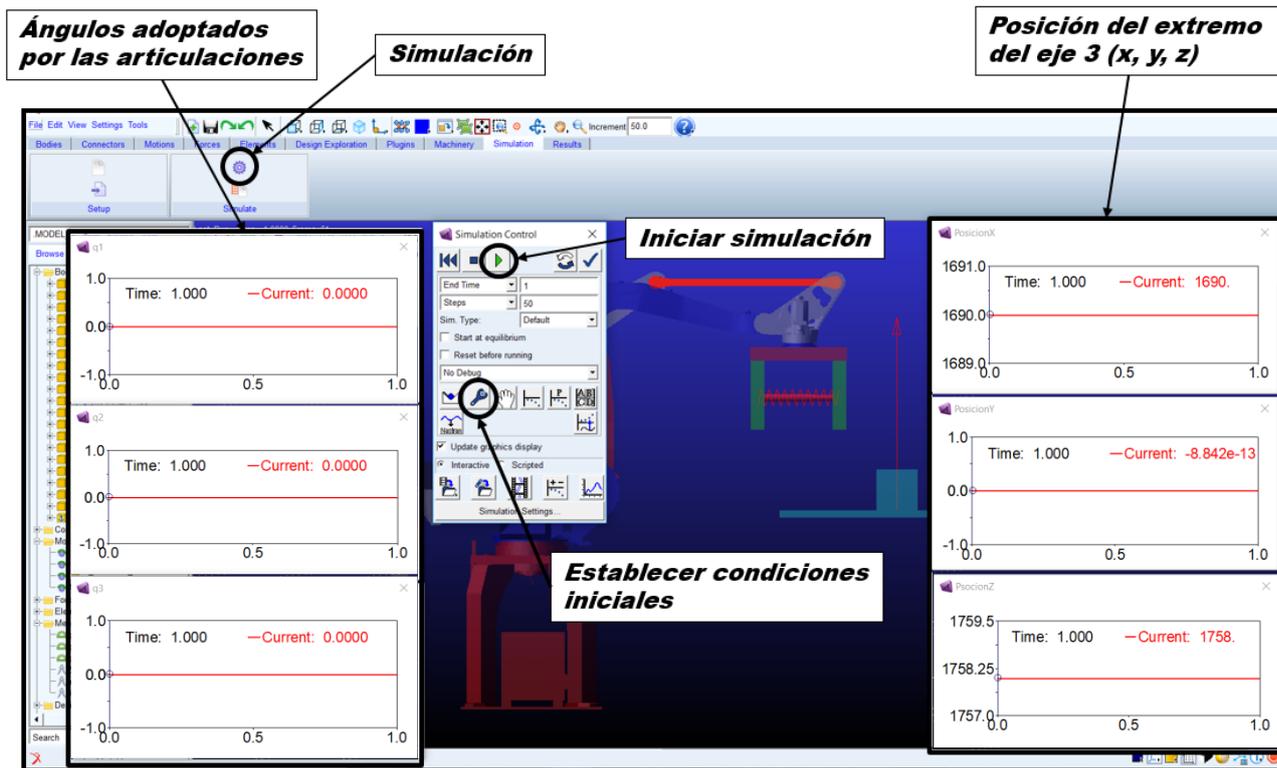


Figura 19. Simulación y resultados obtenidos

Medida	Adams	Mathcad	Matriz de transformación homogénea
<i>SIMULACIÓN 1</i>			
q1	0 rad		$T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1690 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1758.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
q2	0 rad		
q3	0 rad		
x	1690 mm	1690 mm	
y	0 mm	0 mm	
z	1758 mm	1758 mm	

Tabla 6. Resultados obtenidos en la primera simulación

- En este paso, se va a realizar otra simulación. Esta vez, se variará la configuración del robot para asegurar definitivamente la corrección del cálculo. Se asigna a cada uno de los tres primeros motores una velocidad distinta. Por ejemplo, se asignarán las siguientes velocidades:

Motor	Velocidad	Función
1	$\pi$ rad/s	$\text{Pi} \cdot \text{time}$
2	$\pi/6$ rad/s	$\text{Pi}/6 \cdot \text{time}$
3	$-\pi/6$ rad/s	$-\text{Pi}/6 \cdot \text{time}$

**Tabla 7.** Valores de la velocidad de los motores para la segunda simulación

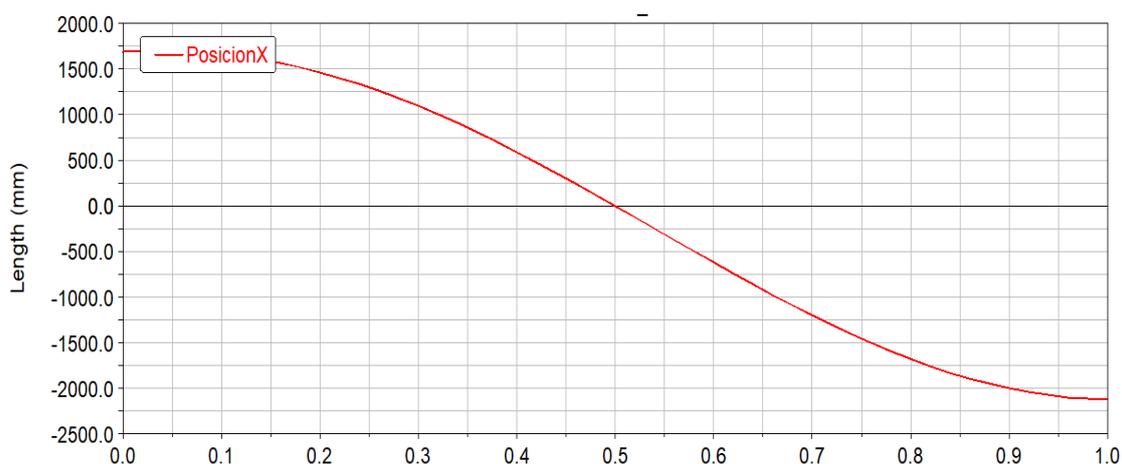
Se introducen los valores y se simula. En este apartado hay que prestar atención a los signos de los ángulos. La función de medir ángulos del Adams no tiene en cuenta el signo de estos, y siempre proporciona un valor positivo, independientemente del sentido de giro. Por este motivo, hay que seguir las reglas establecidas mediante el algoritmo de Denavit-Hartenberg para introducir correctamente el signo de los ángulos en el Mathcad. Los valores  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  representan el ángulo que debe girar el eje  $X_{i-1}$  hasta llegar al  $X_i$  alrededor del eje  $Z_{i-1}$ . Por tanto, se tomarán como positivos los giros antihorarios de un eslabón respecto a su anterior.

En este apartado, para comprobar los resultados se observará la evolución de la localización a lo largo del tiempo. La simulación durará un segundo. El programa Adams proporciona directamente las gráficas. El programa Mathcad también sirve para generar gráficos, pero se ha utilizado Microsoft Excel por mayor comodidad. Se ha calculado la posición del punto de estudio para 20 instantes de tiempo (saltos de 0,5 segundos). Los valores obtenidos se han llevado a Excel para generar una gráfica para poder compararlos con los resultados de Adams.

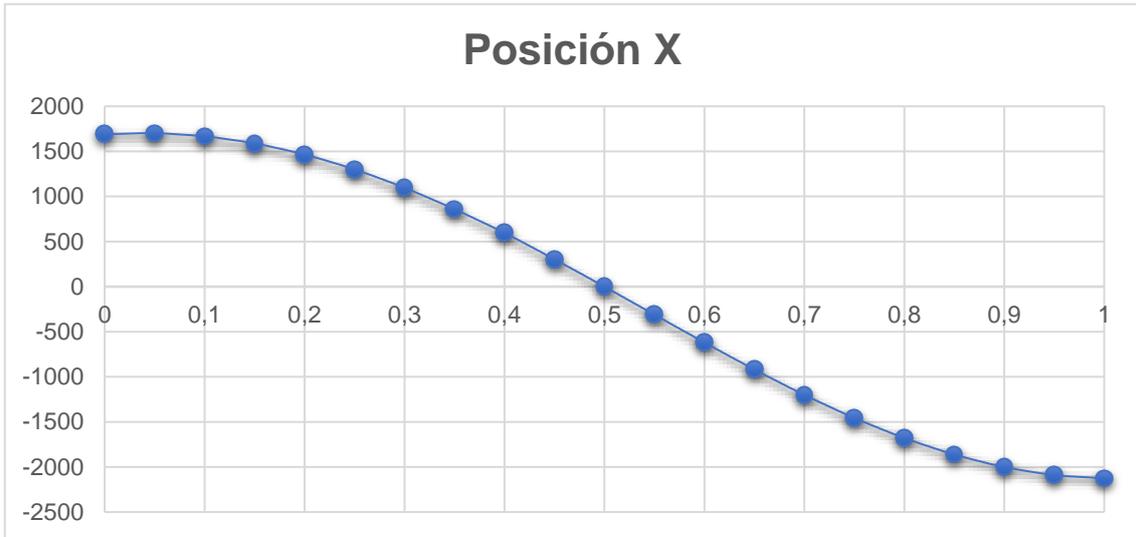
Se anotan los resultados y se compara con los obtenidos con el Mathcad (SIMULACIÓN 2).

- **Posición X**

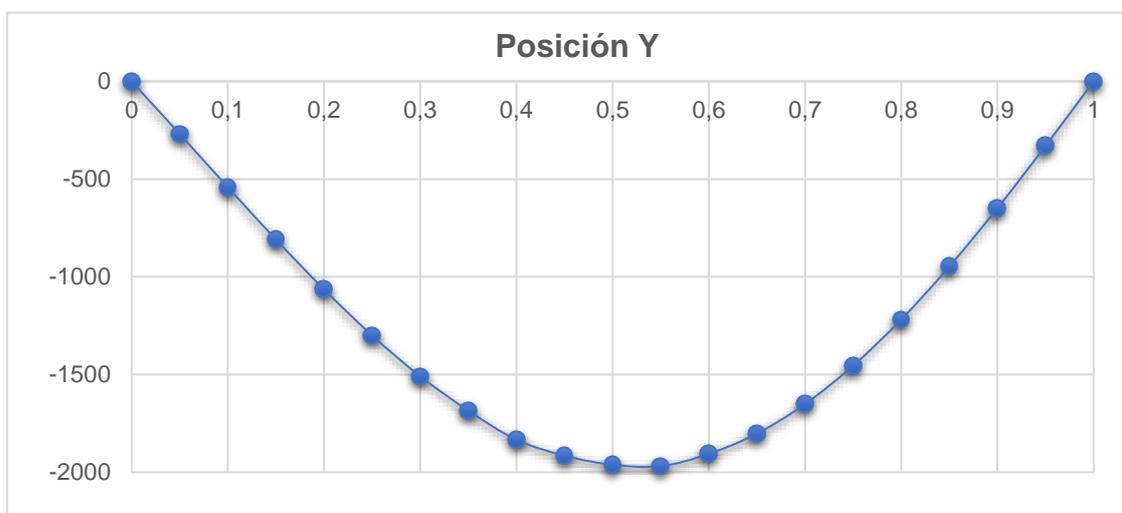
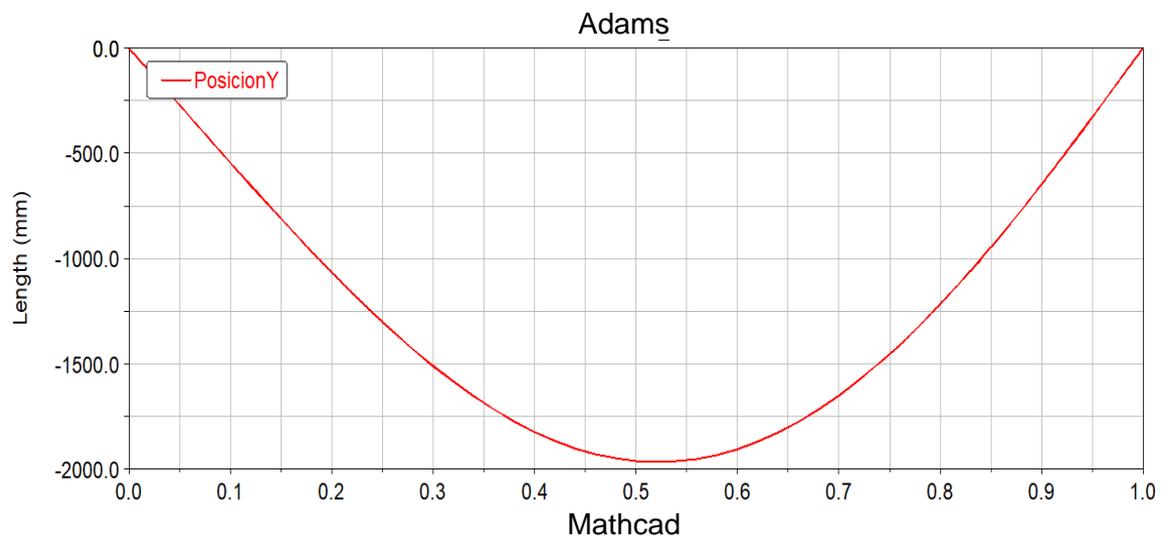
Adams:



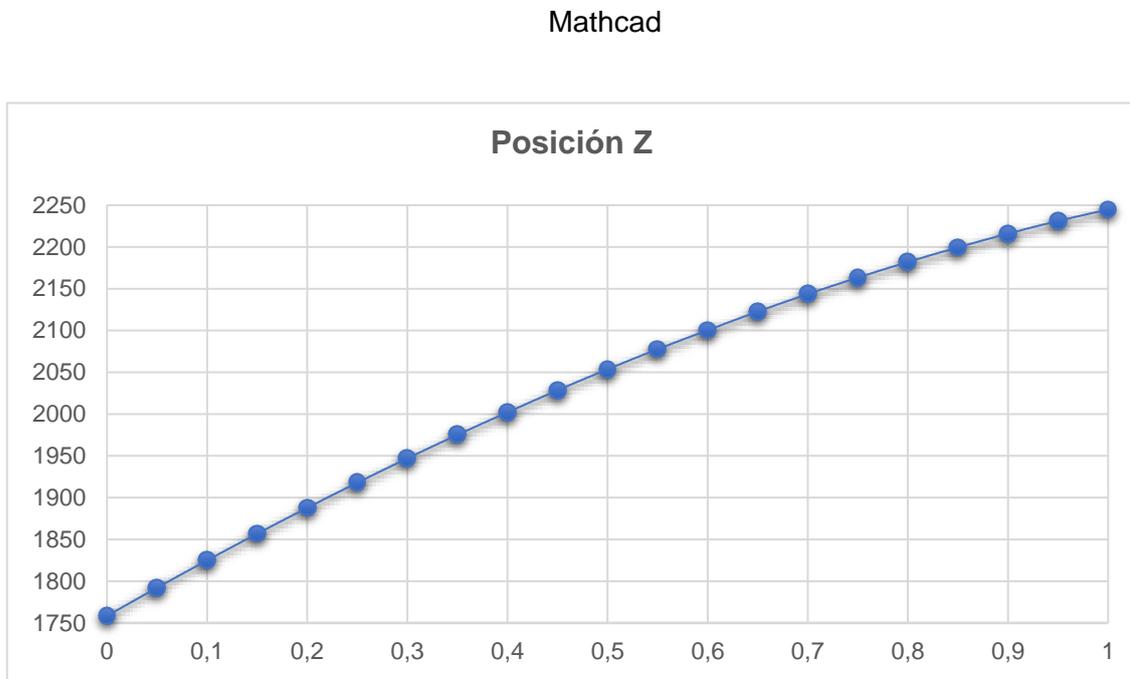
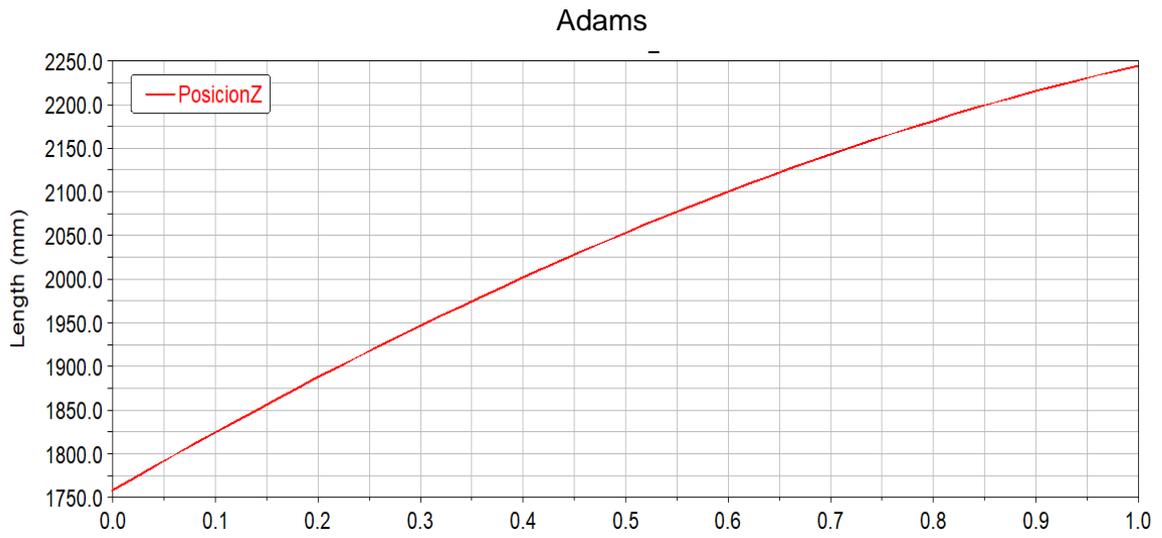
Mathcad:



- **Posición Y**



• Posición Z



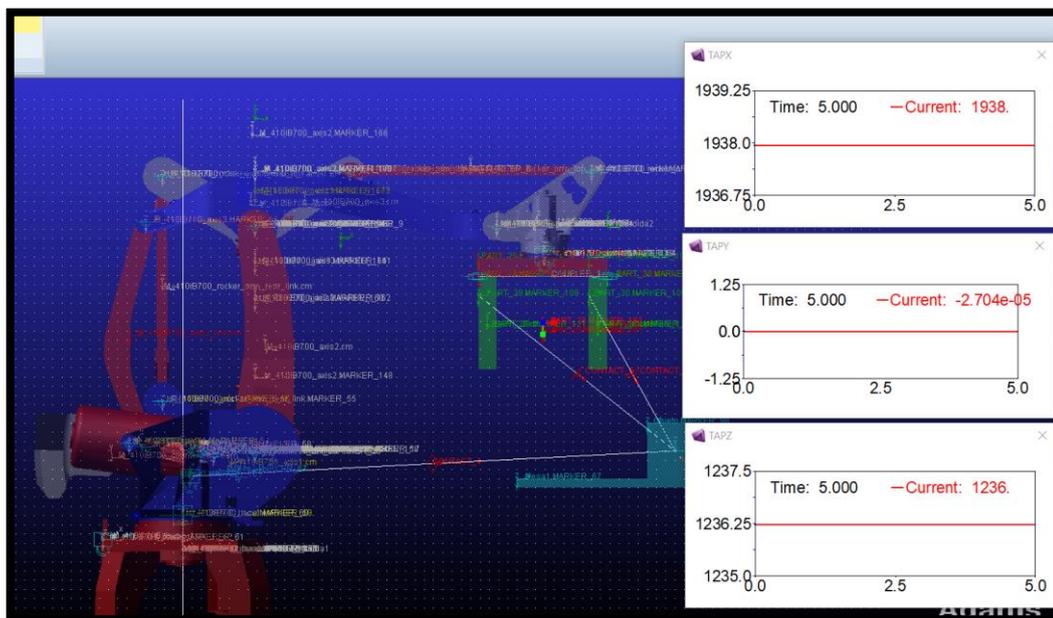
**Figuras 20, 21, 22, 23, 24 y 25.** Evolución de la posición respecto al tiempo, en las tres componentes del espacio y utilizando Adams y Mathcad.

Medida	Adams	Mathcad	Adams	Mathcad
<i>SIMULACIÓN 2</i>	<b>Punto inicial</b>		<b>Punto final</b>	
q1	0 rad		$-\pi$ rad	
q2	0 rad		-0,5236 rad	
q3	0 rad		1,047 rad	
x	1690 mm	1690 mm	-2126 mm	-2126 mm
y	0 mm	0 mm	0 mm	0 mm
z	1758 mm	1758 mm	2245 mm	2245 mm

**Tabla 8.** Resultados obtenidos en la segunda simulación.

Se observa que los datos coinciden, por lo que el problema cinemático de posición se da por válido.

También se puede comprobar que la posición del Tool Attachment Point es correcta. Simplemente se realizarán los mismos pasos que para el primer caso de la comprobación de posición, pero midiendo el punto intermedio de la garra. En Adams se obtienen los resultados de la figura X.



**Figura 26.** Comprobación de la posición de la garra (TAP).

Estos resultados se comparan con los obtenidos mediante cálculo en el programa Mathcad:

Medida	Adams	Mathcad	Matriz de transformación homogénea
<b>SIMULACIÓN 1</b>			
q1	0 rad		$T_{\text{final}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.938 \times 10^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.236 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
q2	0 rad		
q3	0 rad		
x	1938 mm	1938 mm	
y	0 mm	0 mm	
z	1236 mm	1236 mm	

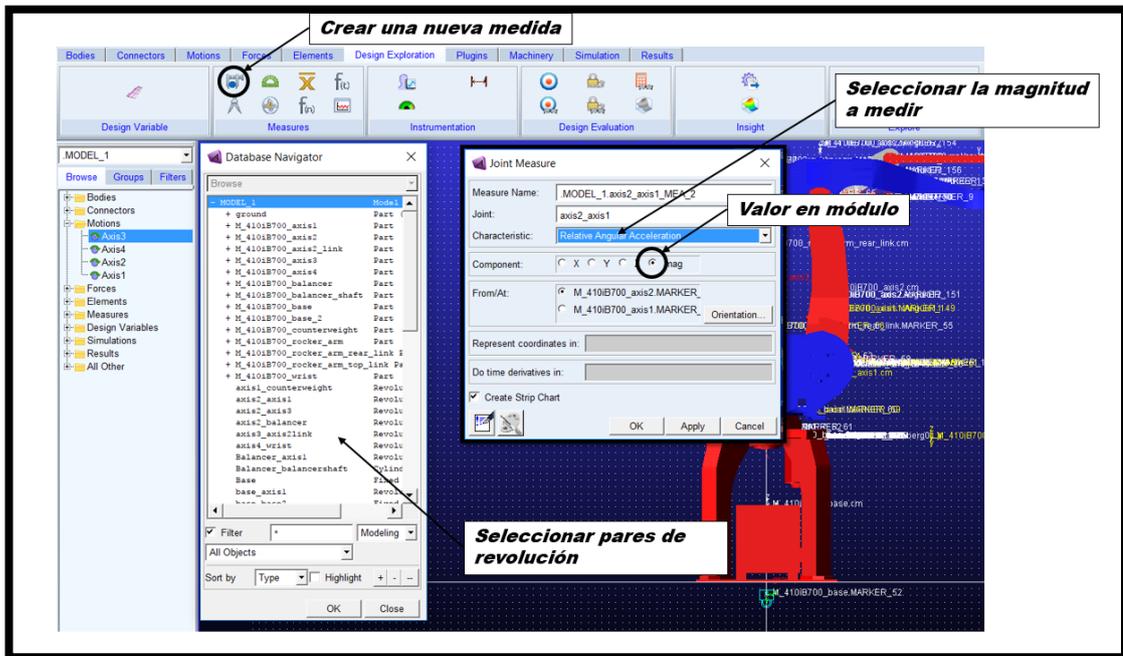
**Tabla 9.** Comprobación de la posición de la garra.

Los resultados son correctos.

Nota: los cálculos se detallan en el Anexo III.

### 5.2. Comprobación de la velocidad

Para la comprobación de la velocidad se seguirá un proceso análogo al de la comprobación de la posición. Hay que ir al menú “DESIGN EXPLORATION” para seleccionar la opción *Create a new Point-to-Point measure*. Esta vez, en lugar de “Displacement” se seleccionará “Velocity” y se hará clic en los mismos dos puntos que se han usado como referencia para la posición. Se crean tres gráficas, una por cada coordenada cartesiana de la velocidad. También es necesario conocer el ángulo y velocidad de las articulaciones. Para los ángulos se recurre a la opción *Create a new Angle Measure*, tal y como se ha hecho para el caso de la posición.



**Figura 27.** Localización de la función “Crear una nueva medida”.

Para medir la velocidad angular de las articulaciones se selecciona la opción *Create a new measure*. En la ventana que parece hay que indicar lo que se quiere medir. En este caso, se quiere conocer la velocidad angular de estas tres articulaciones: *base\_axis1*, *axis1\_axis2* y *axis2\_axis3*. En la siguiente ventana, se indica que la característica a medir es *Relative Angular Velocity*. Se clics en la opción *Mag* para conocer su valor en módulo.

A continuación, se introduce una velocidad en los motores y se realiza una simulación.

Motor	Velocidad	Función
1	$\pi/2$ rad/s	Pi/2*time
2	$\pi/6$ rad/s	Pi/6*time
3	$\pi/8$ rad/s	Pi/8*time

**Tabla 10.** Velocidades de los motores para esta simulación

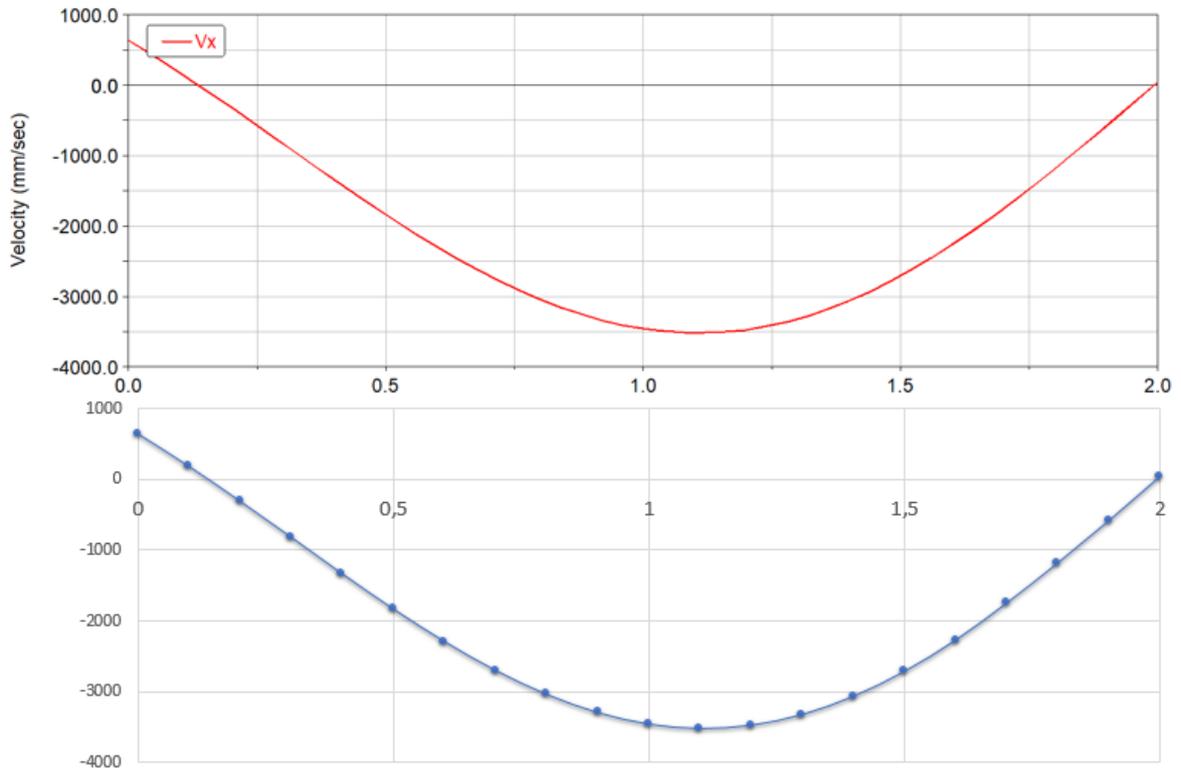
En este caso, la simulación será de dos segundos. Se realiza una representación gráfica de la velocidad mediante Excel utilizando los cálculos proporcionados por Mathcad en 20 pasos (intervalos de 0,1 segundos) y se comparará con los resultados proporcionados por Adams. En este caso, al multiplicar el Jacobiano por el vector de velocidad angular de las articulaciones en cada instante queda directamente el vector de la velocidad lineal del punto final. Hay que notar que la velocidad angular articular permanece constante, solo varía el ángulo girado en cada instante. También hay que tener en cuenta el signo de las posiciones y velocidades angulares, siguiendo el mismo criterio que el caso de la posición.

Medida	Adams	Mathcad	Adams	Mathcad
<i>SIMULACIÓN</i>	<b>Punto inicial</b>		<b>Punto final</b>	
$\dot{q}_1$	-1,571 rad/s			
$\dot{q}_2$	-0,5236 rad/s			
$\dot{q}_3$	0,1309 rad/s			
$q_1$	0 rad		- $\pi$ rad	
$q_2$	0 rad		-1,047 rad	
$q_3$	0 rad		0,2618 rad	
$V_x$	639 mm/s	639 mm/s	41 mm/s	41 mm/s
$V_y$	-2655 mm/s	-2655 mm/s	3716 mm/s	3716 mm/s
$V_z$	-511 mm/s	-511 mm/s	-914 mm/s	-914 mm/s

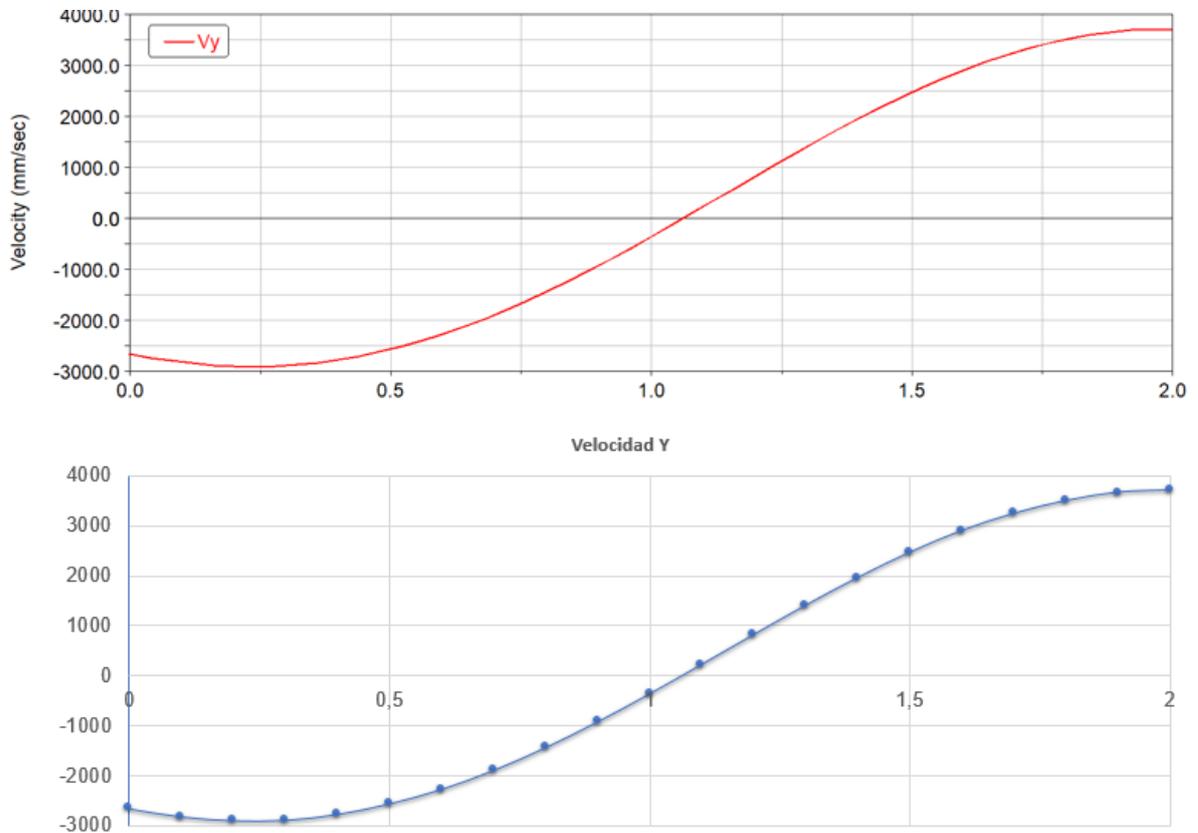
**Tabla 11.** Resultados obtenidos en la simulación de la velocidad

Evolución a lo largo del tiempo. Adams: línea roja. Mathcad: línea azul. El eje de abcisas es el tiempo medido en segundos. El eje de ordenadas es la velocidad lineal medida en mm/s. Los cálculos se detallan en el Anexo III.

**Velocidad X**



**Velocidad Y**



### Velocidad Z

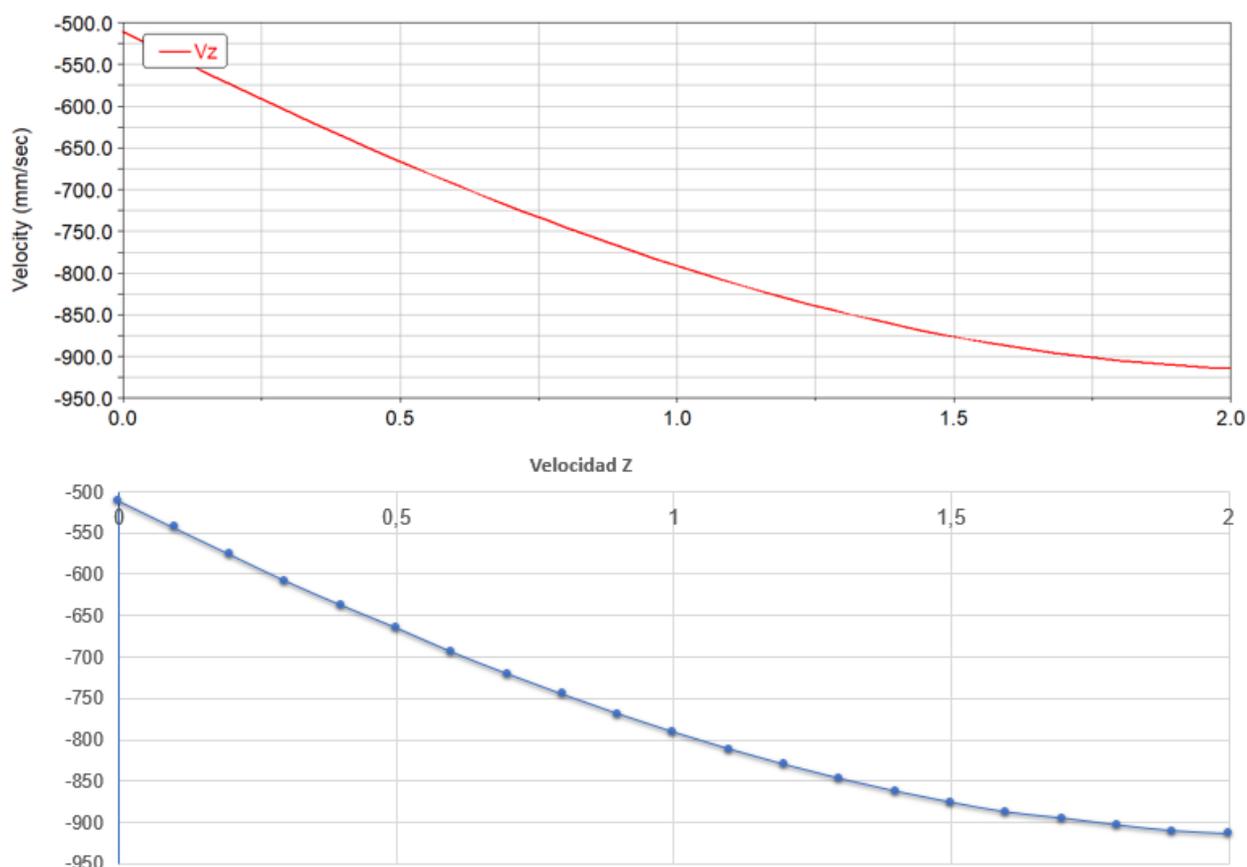


Figura 28, 29 y 30. Comparación entre los datos obtenidos en Adams y en Mathcad

Como se puede observar, el modelo es correcto.

## 6. Simulación de una tarea

En este apartado, se utilizará el programa Adams para simular una tarea de “pick and place” con el robot FANUC M-410iB/700. Las tareas de pick and place consisten en trasladar piezas de un punto a otro.

En esta simulación el robot partirá de una posición de reposo, cogerá un objeto de 100 kg con las pinzas y lo soltará en otro lugar, para después volver a la posición de reposo.

Para lograr estos pasos, se utilizarán funciones definidas por pasos. Estas funciones le indicarán a cada motor cuándo y cómo tiene que realizar el movimiento. También se incluirá una función que controle el cierre y apertura de las pinzas. Las funciones en Adams tienen la siguiente estructura: **STEP(x, x<sub>0</sub>, h<sub>0</sub>, x<sub>1</sub>, h<sub>1</sub>)**. En esta función, el argumento x representa la variable independiente. En este caso, será el tiempo, por lo que habrá que escribir “TIME”.

Por otro lado, x<sub>0</sub> y x<sub>1</sub> representan el punto inicial y final en función de la variable x. En este caso, representa el instante de tiempo en el que empieza y acaba la función.

Por último,  $h_0$  y  $h_1$  representan el valor inicial y final de la función. En este caso, se trata de ángulo en el caso de los motores y fuerza en el caso de las pinzas.

Se realizará el ensayo utilizando dos tipos de funciones distintas: STEP y STEP5. Estas funciones servirán para generar una trayectoria punto a punto. La primera función es una función polinómica de grado 3 y la segunda, de grado 5. Se compararán ambas funciones.

La secuencia de pasos que se tiene que realizar es la siguiente:

1. Partiendo de la posición de reposo, situar las pinzas encima del objeto.
2. Bajar las pinzas.
3. Cerrar las pinzas y agarrar el objeto.
4. Levantar el objeto y llevarlo a la otra mesa.
5. Girar el objeto.
6. Bajar el objeto hasta que toque la mesa.
7. Abrir las pinzas.
8. Elevar las pinzas y alejarse del objeto.
9. Volver a una posición de reposo.

Para asignar una función, hay que seleccionar con el botón derecho los motores o la fuerza en el menú “BROWSE”. Se hace clic en *Modify*. La función se escribe en el apartado *Function (time)*.

Las funciones utilizadas para el primer caso (función de tercer orden) son las siguientes:

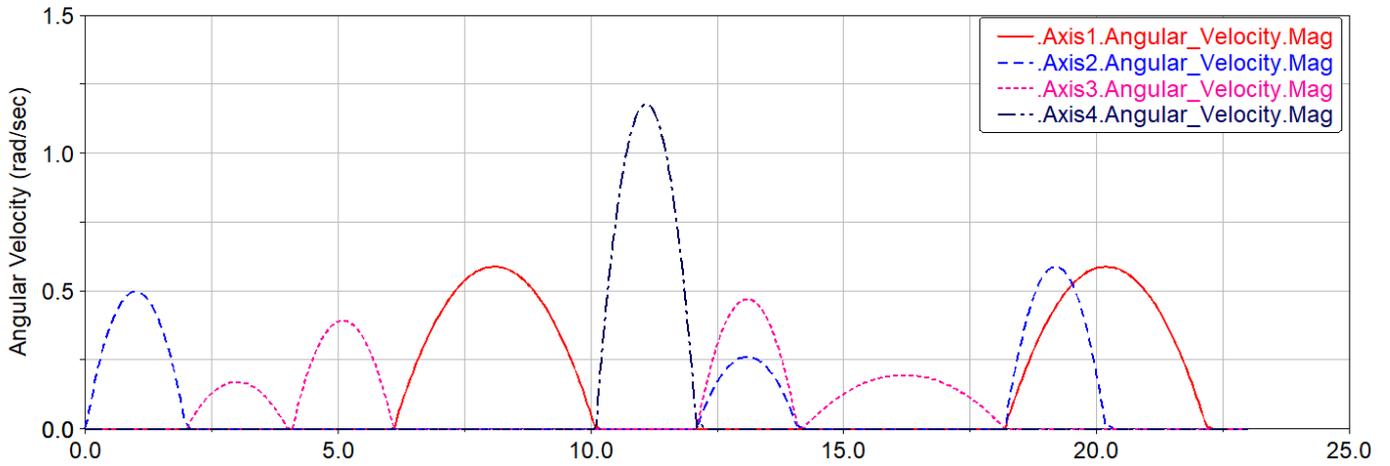
<b>Motion 1</b>	step(time,6.1,0,10.1,-90d)+step(time,18.2,0,22.2,90d)
<b>Motion 2</b>	step(time,0,0,2,38d)+step(time,12.1,0,14.1,-20d)+step(time,18.2,0,20.2,-45d)
<b>Motion 3</b>	step(time,2,0,4,13d)+step(time,4.1,0,6.1,-30d)+step(time,12.1,0,14.1,36d)+step(time,14.2,0,18.2,-30d)
<b>Motion 4</b>	step(time,10.1,0,12.1,90d)
<b>Force</b>	step(time,4,0,4.1,-500000)+step(time,14.1,0,14.2,500000)

**Tabla 12.** Funciones utilizadas en la primera simulación.

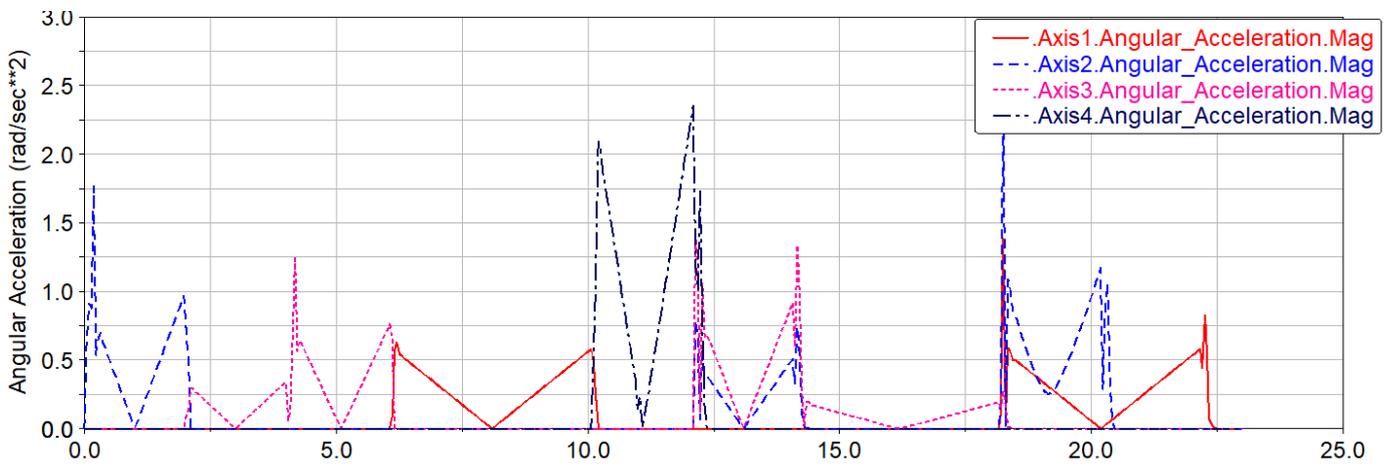
Los ángulos se han introducido en grados, por eso hay que escribir la letra *d* después del valor (degree). Hay que tener en cuenta que, para este caso, las unidades están configuradas como milímetro, kilogramo, segundo y radián.

Para visualizar la simulación, hay que ir al menú “SIMULATION”, seleccionar “*Run an Interactive Simulation*”. Se simula y después se va al posprocesador (*Results, Postprocessor*) para observar las velocidades y aceleraciones angulares y los pares que desarrollan los motores.

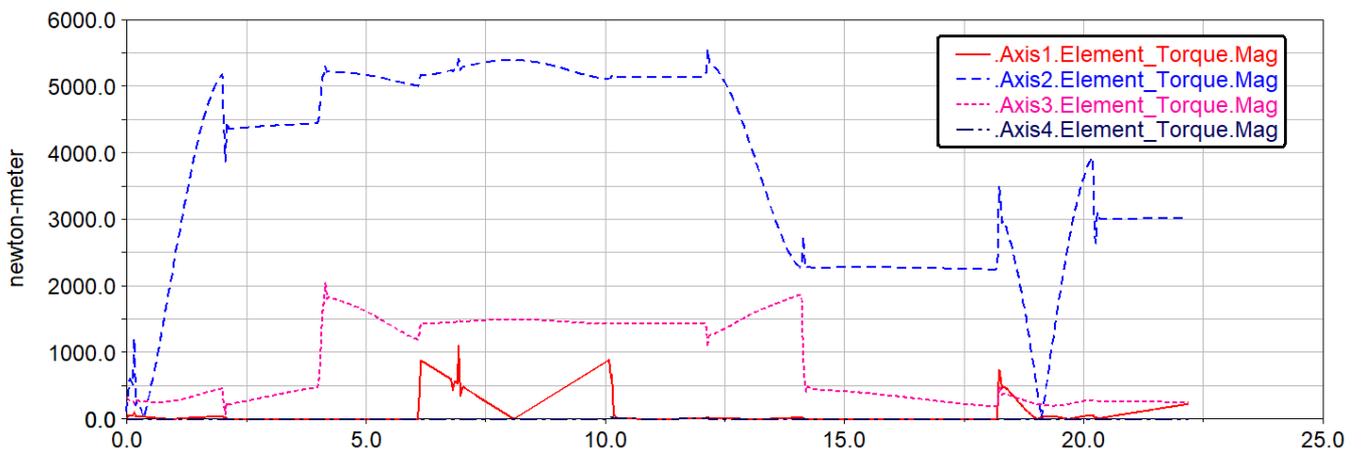
• Velocidad angular



• Aceleración angular



• Par



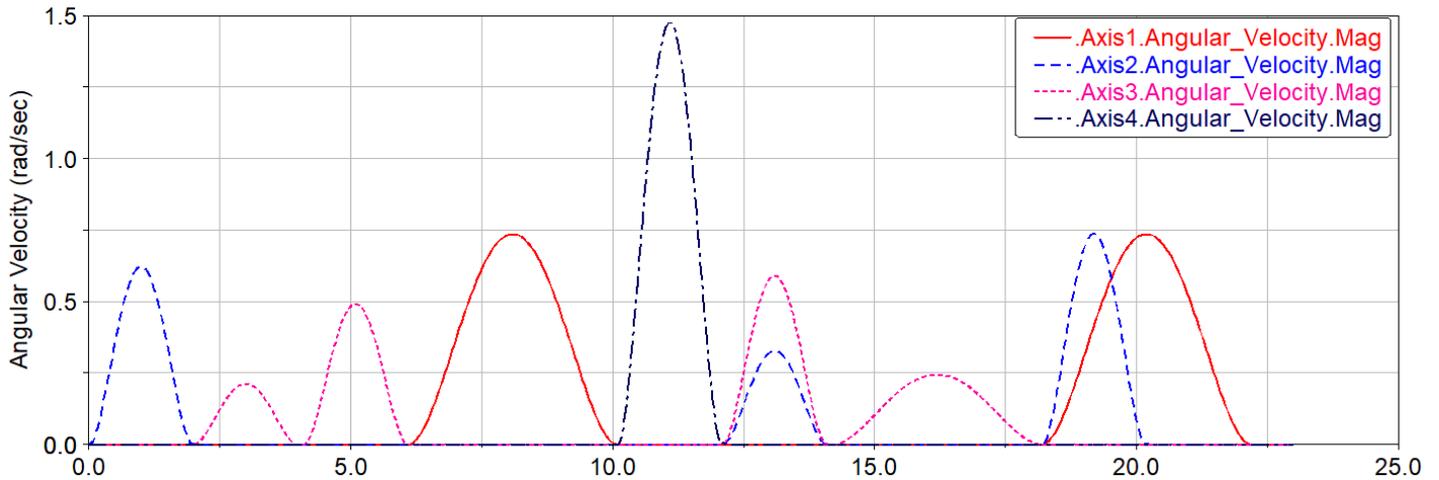
Figuras 31, 32 y 33. Evolución de la velocidad angular, aceleración angular y par a lo largo de la simulación.

Ahora, se repite el proceso cambiando la función STEP por STEP5

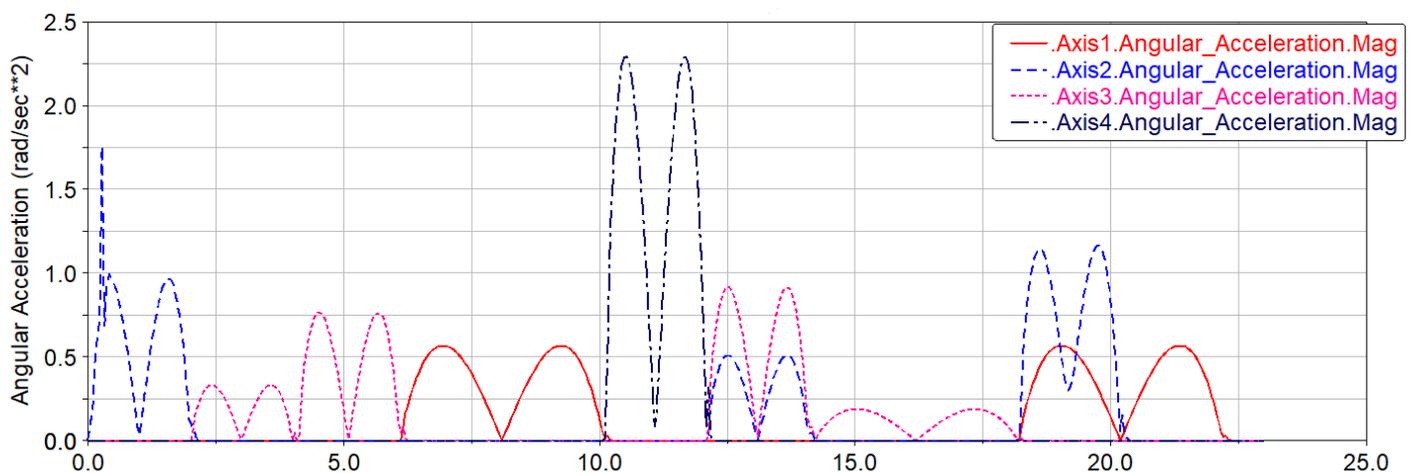
<b>Motion 1</b>	step5(time,6.1,0,10.1,-90d)+step5(time,18.2,0,22.2,90d)
<b>Motion 2</b>	step5(time,0,0,2,38d)+step5(time,12.1,0,14.1,-20d)+step5(time,18.2,0,20.2,-45d)
<b>Motion 3</b>	step5(time,2,0,4,13d)+step5(time,4.1,0,6.1,-30d)+step5(time,12.1,0,14.1,36d)+step5(time,14.2,0,18.2,-30d)
<b>Motion 4</b>	step5(time,10.1,0,12.1,90d)
<b>Force</b>	step5(time,4,0,4.1,-500000)+step5(time,14.1,0,14.2,500000)

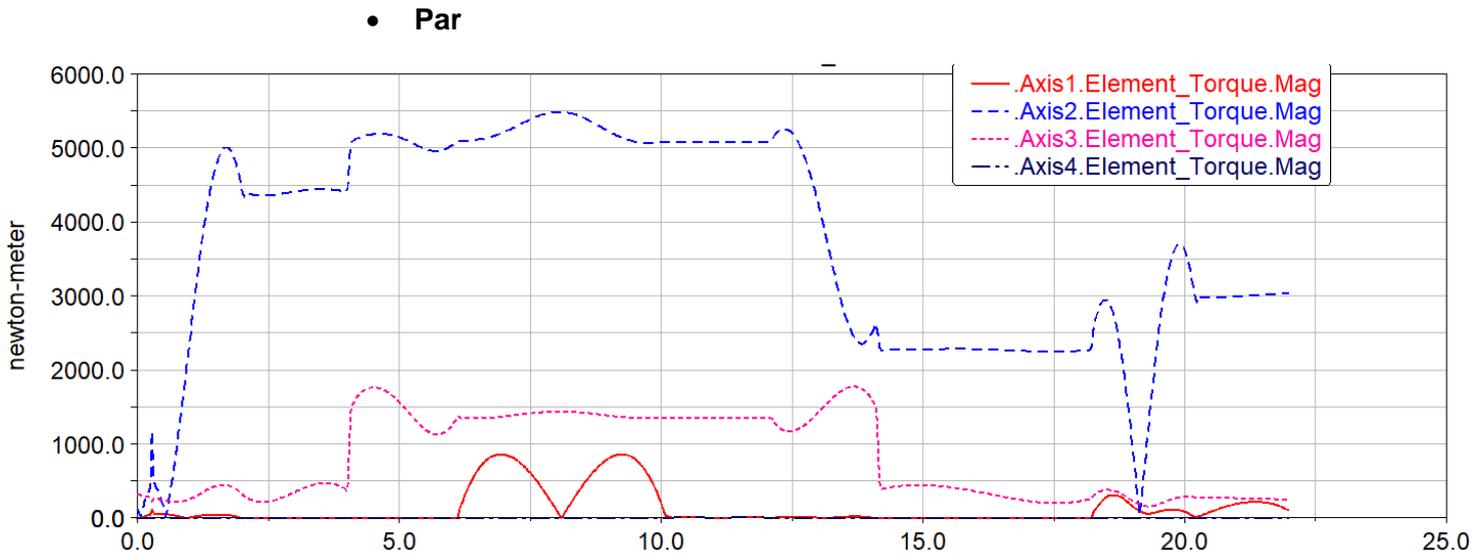
**Tabla 13.** Funciones utilizadas en la segunda simulación.

• **Velocidad angular**



• **Aceleración angular**





**Figuras 34, 35 y 36.** Evolución de la velocidad angular, aceleración angular y par a lo largo de la simulación.

Como puede observarse, para el caso de la velocidad es indiferente el tipo de función utilizado. Los cambios más acusados se observan para el caso de la aceleración y el par.

Utilizando la función STEP, la gráfica de la aceleración está formada por rectas ascendentes y descendentes de forma abrupta. Esto es debido a que STEP utiliza polinomios de tercer grado. Como la aceleración se calcula con la segunda derivada del polinomio, da lugar a líneas rectas porque la segunda derivada de un polinomio de tercer grado es uno de primer grado.

En cambio, utilizando la función STEP5, la aceleración es un polinomio de grado 3, por lo que se generan curvas suaves.

El par, al estar estrechamente relacionado con la aceleración angular, va en consecuencia.

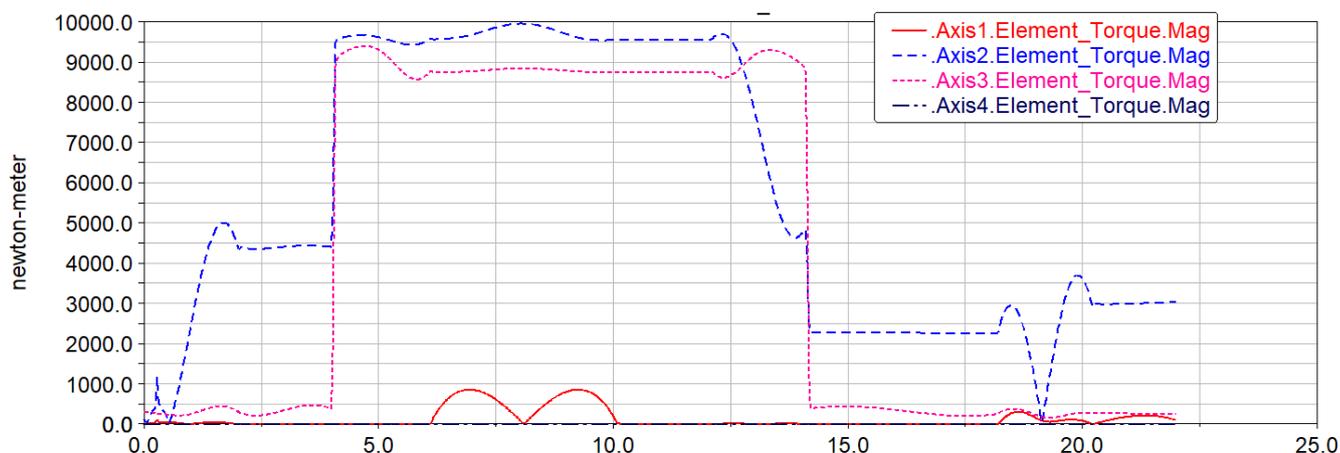
En definitiva, se ha comprobado que los polinomios de mayor grado son más apropiados para la generación de trayectorias.

También se observa que la velocidad del robot no excede en ningún caso los límites establecidos por el fabricante.

Motor	Velocidad máxima según fabricante (rad/s)	Velocidad máxima según simulación (rad/s)
1	1,05	0,59
2	1,05	0,58
3	1,05	0,47
4	2,09	1,17

**Tabla 14.** Comparación entre la velocidad máxima capaz de alcanzar cada articulación según el fabricante, y la velocidad máxima alcanzada en la simulación.

Por último, es interesante comprobar cuál sería el par máximo necesario para levantar una carga de 700 kg, que es la carga máxima que según el fabricante es capaz de levantar el robot (detalles técnicos en Anexo I).



**Figura 37.** Evolución del par a lo largo de la simulación para la carga máxima.

Se observa que el par máximo roza los 10000 Newtons por metro para el segundo motor, justo en el momento que eleva la carga. Hay que señalar que los robots disponen de mecanismos de reducción que hacen que el par real que tiene que vencer el robot sea mucho menor.

## 7. Modelo dinámico del robot

En este apartado se hará un análisis de todas las reacciones y pares que se producen en el robot. Se utilizará para ello las herramientas que proporciona el programa Adams, y, además, se hará una comprobación de los resultados utilizando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos en el programa Mathcad.

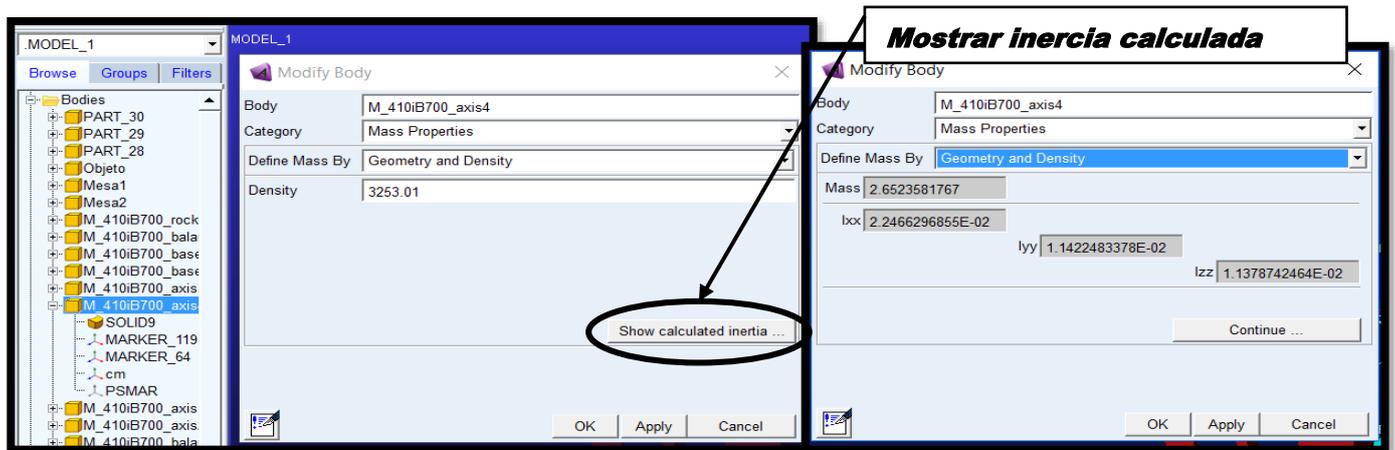
En primer lugar, se va a establecer un sistema local de coordenadas para cada barra, con la finalidad de que todas las fuerzas y momentos se encuentren expresados respecto a ese sistema local. Se elegirá un punto cualquiera de cada barra como referencia, y la orientación de los ejes de ese sistema será paralela a los ejes globales del robot en estado de reposo.

En segundo lugar, se deberá hacer un diagrama del sólido libre para cada uno de los cuerpos, establecer el punto de referencia y comprobar todas las fuerzas y momentos que aparecen en cada cuerpo. También se deberá hallar la distancia del centro de gravedad hasta el punto de aplicación de las fuerzas, porque el centro de momentos se establecerá en el centro de gravedad.

Por último, se escribirán todas las ecuaciones y, utilizando como apoyo los resultados de Adams, se comprobará su validez mediante Mathcad.

En este apartado se utilizarán multitud de funciones de Adams, que serán debidamente comentadas.

## 7.1. Modelo dinámico en Adams



**Figura 38.** Localización de la función que calcula la inercia respecto a los ejes principales de inercia

Para expresar matriz de inercia en ejes locales de la barra se hará uso de las funciones *PSI*, *THETA* y *PHI*. Estas funciones devuelven el valor del primer, segundo y tercer ángulo de Euler del sistema ZXZ, es decir, primer ángulo rotado alrededor del eje Z; segundo ángulo alrededor de X; y tercer ángulo, alrededor de Z.

Para crear una función hay que acceder al menú “DESIGN EXPLORATION”, y en el apartado “Measures” hacer clic en “Create a new function measure”. Se abre una ventana llamada “Function builder”. En el espacio superior se puede escribir la función deseada. En el apartado “Getting object data” se pueden introducir distintos elementos en las funciones, por ejemplo, markers.

Las funciones utilizadas tienen la siguiente estructura:

**PSI (marker\_O, marker\_R)**

**THETA (marker\_O, marker\_R)**

**PHI (marker\_O, marker\_R)**

El *marker\_O* es aquel cuya orientación se quiere medir, y el Marker R, es el de referencia respecto al cual se va a medir la orientación del primero. En ese caso, se quiere medir la orientación del centro de masas respecto a un Marker de referencia colocado en uno de los extremos de la barra cuya orientación coincide con el sistema de coordenadas global. Previamente habrá que colocar ese Marker y asegurarse de que tiene la misma orientación que los ejes globales, pues así se ha acordado en este caso. Para introducir un marker en la función, hay que seleccionarlo en “Getting Object Data” y pulsar sobre “Insert Object Name”.

Una vez obtenidas las rotaciones de los centros de masa de todas las barras respecto a sus markers de referencia, habrá que calcular la Inercia respecto a esa referencia. Esto se hace premultiplicando la matriz de inercia diagonalizada por las matrices de rotación y postmultiplicando por sus inversas (o traspuestas, debido a que las matrices de rotación son ortogonales).

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = R \cdot I_G \cdot R^T$$

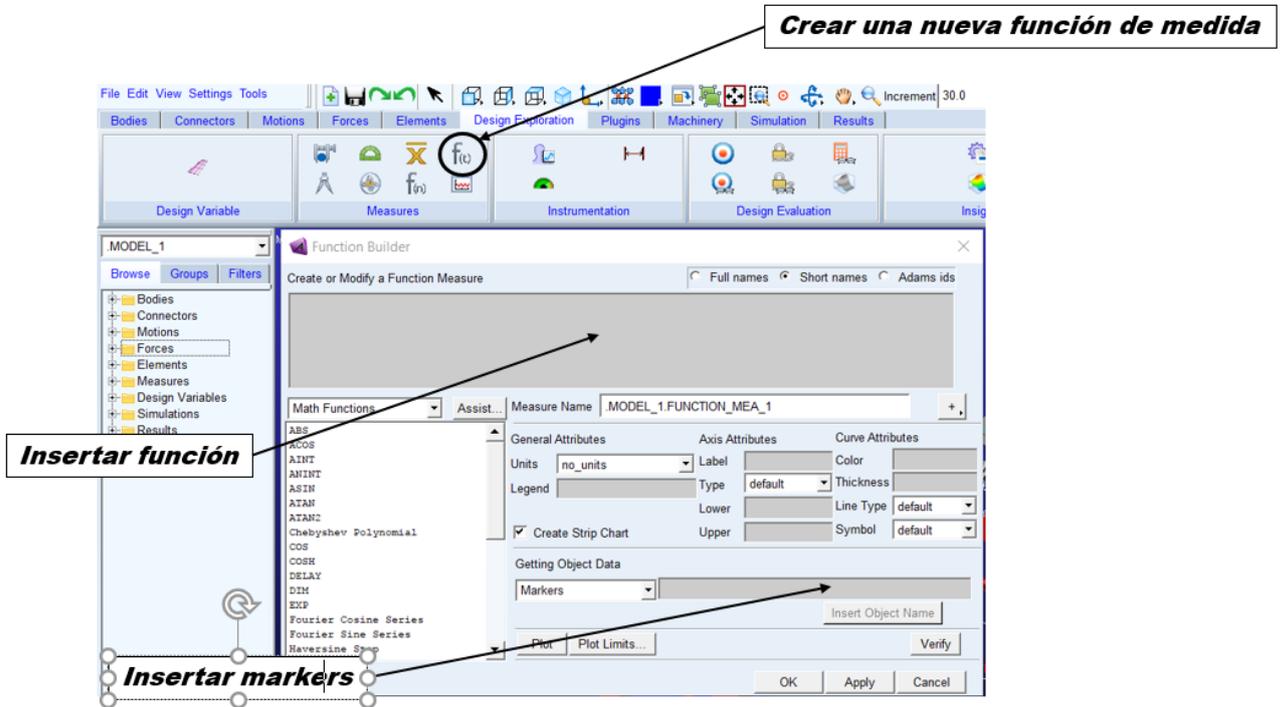
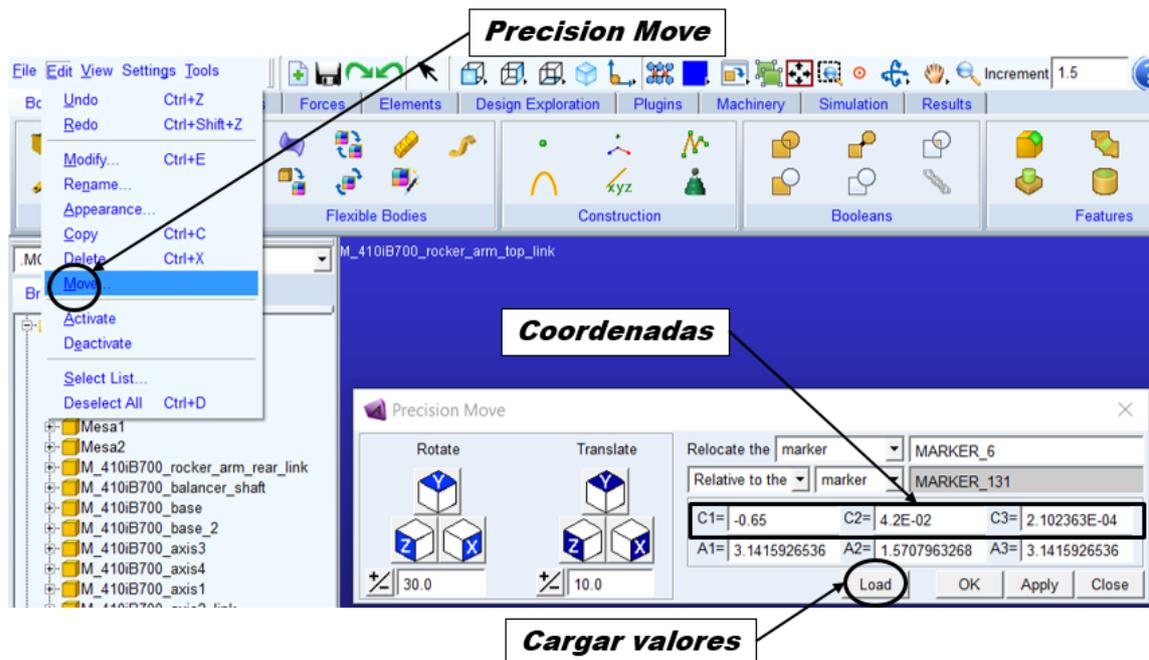


Figura 39. Inserción de una función.

	PSI $\psi$	THETA $\theta$	PHI $\phi$
Axis 1	-3,086	1,580	1,199
Axis2_link	-1,570	3,125	3,134
Axis 2	-3,110	0,150	2,977
Axis 3	1,556	1,623	0,124
Axis 4	-1,571	1,571	1,571
Balancer shaft	1,571	1,701	0
Balancer	-1,571	1,441	1,566
Counterweight	1,698	1,507	-0,354
Rocker arm top link	1,573	1,571	0
Rocker arm rear link	-3,138	0	-3,139
Rocker arm	1,560	1,580	0,157
Wrist	-1,185	2,046	1,44

Tabla 15. Rotaciones de los centros de gravedad respecto al sistema de coordenadas local (Ángulos de Euler del sistema ZXZ)

Ahora, se debe calcular la distancia los puntos de aplicación de la fuerza al centro de gravedad de cada cuerpo. Esto es necesario para el cálculo de momentos. Para ello, es necesario colocar un Marker en el centro de gravedad cuyos ejes tengan la misma orientación que el criterio que se está siguiendo durante todo el problema, y medir la distancia de cada punto de aplicación respecto a ese marker. Esto se puede hacer utilizando funciones, o bien mediante la opción “*Precision Move*”, que se encuentra en el menú “*EDIT*”. En la ventana hay que seleccionar el Marker el cual se quiere medir la distancia en el apartado “*Relocate the marker...*”. En el apartado “*Relative to*” se selecciona el marker que se ha colocado en el centro de gravedad. Se hace clic en “*Load*” y se cargan los valores. Las coordenadas son C1, C2 y C3. (Los valores de todas estas distancias se encuentran en el Anexo III).



**Figura 40.** Obtención de las coordenadas de un punto respecto al sistema de referencia de otro punto.

En siguiente lugar, se van a calcular las fuerzas de cada barra, en las tres componentes del espacio. Es preciso indicar que en el programa Adams, el Postprocesador mide las fuerzas en coordenadas globales, por lo que es preciso expresarlas en las coordenadas locales que se han establecido previamente. Para ello se utilizarán una serie de funciones de Adams: FX, FY y FZ. Estas funciones, que sirven para calcular el sumatorio de fuerzas aplicadas en un punto (en x, y y z, respectivamente) tienen la siguiente estructura:

**FX (Aplicado en Marker; aplicado desde Marker; a lo largo de Marker)**

**FY (Aplicado en Marker; aplicado desde Marker; a lo largo de Marker)**

**FZ (Aplicado en Marker; aplicado desde Marker; a lo largo de Marker)**

En el primer argumento se coloca el Marker en el cual se quieren medir las fuerzas. En este caso, se indicarán los Markers en los cuales están situados los pares cinemáticos del robot. En el segundo campo se introducirá el valor 0, para que solo se cuenten las fuerzas aplicadas directamente sobre el primer Marker. En el tercer argumento se introduce el Marker que se está usando como referencia de coordenadas locales de barra,

para que la suma de fuerzas se realice a lo largo del eje X, Y y Z (según corresponda) de ese Marker.

A continuación, se obtendrá la aceleración lineal del centro de masas de cada barra. El método utilizado será parecido al de la obtención de las fuerzas. Como el postprocesador da los resultados de la aceleración en coordenadas globales, se hará uso de unas funciones específicas para obtener los resultados en coordenadas locales de cada barra. Las funciones para el cálculo de la aceleración son: ACCX, ACCY y ACCZ, según se desee obtener la aceleración a lo largo del eje X, Y o Z respectivamente. La estructura es la siguiente:

**ACCX (Marker, respecto a Marker, a lo largo de Marker; referencia de derivadas)**

**ACCY (Marker, respecto a Marker, a lo largo de Marker; referencia de derivadas)**

**ACCZ (Marker, respecto a Marker, a lo largo de Marker; referencia de derivadas)**

El primer argumento es el Marker del cual se quiere obtener la aceleración lineal. En este caso será el centro de gravedad de cada barra.

En el segundo campo se indica el Marker respecto al cual se produce el movimiento. En este caso se indicará el valor 0, porque se quiere obtener la aceleración absoluta del centro de la barra.

El tercer argumento indica el Marker a lo largo de cuyos ejes se va a medir la aceleración. Aquí se indica el Marker de referencia.

En el último campo se introduce el valor 0.

Acto seguido, se va a obtener la aceleración angular de cada barra. Se usarán las funciones WDTX, WDTY y WDTZ:

**WDTX (Marker, respecto a Marker, a lo largo de Marker; referencia de derivadas)**

**WDTY (Marker, respecto a Marker, a lo largo de Marker; referencia de derivadas)**

**WDTZ (Marker, respecto a Marker, a lo largo de Marker; referencia de derivadas)**

Los argumentos son los mismos que para el caso de la aceleración angular.

Por último, se obtienen los pares de cada articulación utilizando las funciones TX, TY y TZ.

**TX (Aplicado en Marker; aplicado desde Marker; a lo largo de Marker)**

**TY (Aplicado en Marker; aplicado desde Marker; a lo largo de Marker)**

**TZ (Aplicado en Marker; aplicado desde Marker; a lo largo de Marker)**

Los argumentos son los mismos que para el caso de las fuerzas.

Hay que tener cuidado con el vector peso. El peso siempre es un vector negativo en Z en coordenadas globales. Para pasarlo a coordenadas locales de cada barra, hay que multiplicar sistema de coordenadas global por la matriz de rotación para pasarlo al sistema local. Como Adams mediante las funciones PSI, THETA y PHI da la matriz de rotación del sistema local respecto al global, habrá que premultiplicar el vector peso por la traspuesta de las matrices de rotación para obtener la rotación de las coordenadas globales respecto a las locales.

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_L = R^T \cdot P_G$$

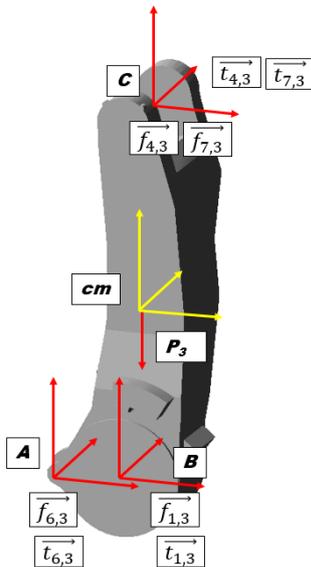
### 7.2. Comprobación mediante Mathcad del modelo dinámico

Una vez se han obtenido todos los datos necesarios utilizando Adams, se procederá a la comprobación de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas cuerpo por cuerpo. Se escribirán dos ecuaciones para cada cuerpo, después se comprobará que tanto el lado izquierdo de la ecuación como el lado derecho dan el mismo resultado. Para cada eslabón del robot, se han obtenido los valores de reacciones y aceleraciones para un instante distinto de la simulación, así como las distancias desde el centro de masas a los puntos de aplicación de las fuerzas. También se ha obtenido mediante Mathcad el vector peso en coordenadas locales.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i = I_G \cdot \vec{\alpha}$$

- **EJE 2 (Barra 3).** Instante de la simulación t=20 segundos.



	a [m/s <sup>2</sup> ]	α [rad/s]
x	0,3094	-0,1265
y	0,0462	0,7028
z	-0,0046	-0,0994

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

55,838	-0,159	0,258
-0,159	53,349	-7,021
0,258	-7,021	7,872

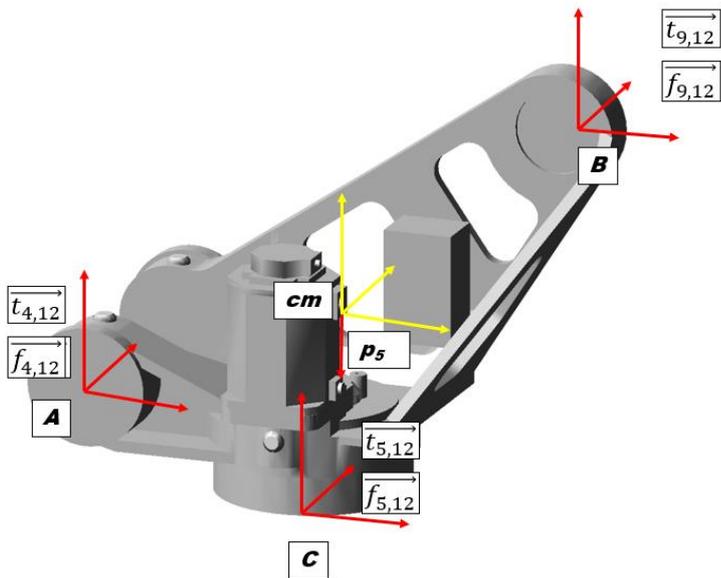
Masa: m=367,09 kg

	f <sub>6,3</sub> [N]	f <sub>1,3</sub> [N]	f <sub>4,3</sub> [N]	f <sub>7,3</sub> [N]	t <sub>6,3</sub> [N·m]	t <sub>1,3</sub> [N·m]	t <sub>4,3</sub> [N·m]	t <sub>7,3</sub> [N·m]	Peso [N]
x	-130,5	55,096	-2814,5	526,97	55,1	0	526,97	-1581,8	-1613
y	-135,03	0	0,1544	-204,58	0	-3639,2	-204,58	0	0
z	-147,53	35,94	-5435,6	-1256,8	35,94	-5435,6	-1256,8	0	-3220

Resultados (unidades del SI):

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	111,2	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	-7,112	x
	16,955		35,702	y
	-2,1		-10,04	z
$m \cdot \vec{a}_G$	113,579	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	-7,206	x
	16,96		38,356	y
	-1,689		-5,912	z

- **Muñeca (Barra 12).** Instante de la simulación t=7 segundos.



	a [m/s <sup>2</sup> ]	α [rad/s]
x	-0,284	0
y	1,4736	0
z	0	0

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

1,461	-0,096	-0,305
-0,096	1,719	-0,169
-0,305	-0,169	1,925

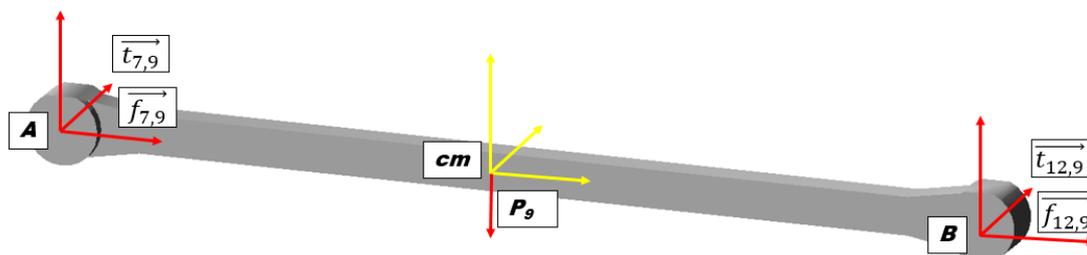
Masa: m=55,27 kg

	$f_{4,12}$ [N]	$f_{5,12}$ [N]	$f_{9,12}$ [N]	$t_{4,12}$ [N·m]	$t_{5,12}$ [N·m]	$t_{9,12}$ [N·m]	Peso [N]
x	2836,8	5,736	-2858,34	-1657,22	-96,9	1078,04	0
y	1634,8	-8,44	-1544,94	0	-8,44	0	0
z	2512,36	-1036,45	-933,7	2512,36	-1036,45	0	-542,2

Resultados (unidades del SI):

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	-15,804	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	1,453	x
	81,42		-0,753	y
	0,011		1,543	z
$m \cdot \vec{a}_G$	-15,7	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	0	x
	81,46		0	y
	0		0	z

- **Eslabón balancín superior (Barra 9).** Instante de la simulación t=10 segundos.



Matriz de inercia respecto a coordenadas locales:  
[kg·m<sup>2</sup>]

0,0067	-0,00547	-0,0005
-0,00547	2,487	0
-0,0005	0	2,485

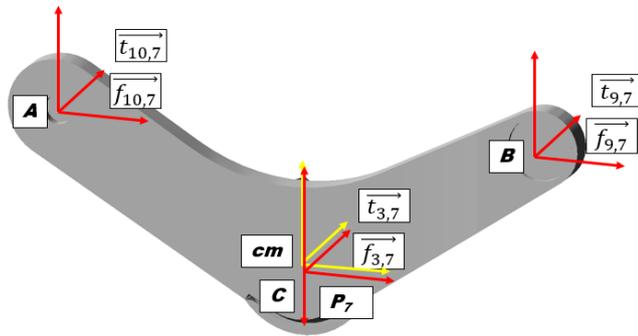
Masa: m=11,948 kg

	<b>a [m/s<sup>2</sup>]</b>	<b>α [rad/s]</b>	<b>f<sub>7,9</sub> [N]</b>	<b>f<sub>12,9</sub> [N]</b>	<b>t<sub>7,9</sub> [N·m]</b>	<b>t<sub>12,9</sub> [N·m]</b>	<b>Peso [N]</b>
<b>x</b>	0,0318	-0,0318	-2965,7	3000	1722,98	-1723	-34,279
<b>y</b>	-0,2906	0	-1445,30	1441,8	0	0	0
<b>z</b>	-0,01	0,04	55,98	56	-2620	528,18	-112,085

Resultados:

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	0,021	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	0,6	x
	-3,5		-0,013	y
	-0,11		-0,646	z
$m \cdot \vec{a}_G$	0,38	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	0	x
	-3,47		0	y
	-0,12		0,1	z

- **Balancín (Barra 7).** Instante de la simulación t=0,5 segundos.



	a [m/s <sup>2</sup> ]	α [rad/s]
x	1,13	0
y	0	0
z	0,216	0

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

0,682	0,039	0,029
0,039	4,221	0,082
0,029	0,082	3,715

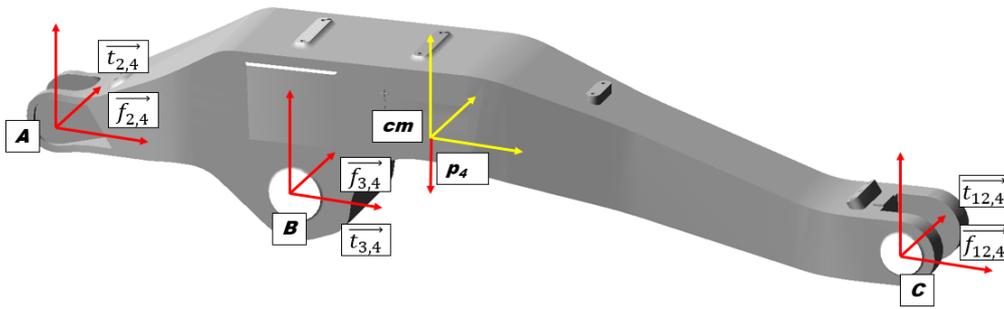
Masa: m=49,232 kg

	f <sub>10,7</sub> [N]	f <sub>3,7</sub> [N]	f <sub>9,7</sub> [N]	t <sub>10,7</sub> [N·m]	t <sub>3,7</sub> [N·m]	t <sub>9,7</sub> [N·m]	Peso [N]
x	-24,12	-462,4	-542,31	0	1465,6	-1090,4	0
y	20,14	-149,74	129,6	0	0	0	0
z	-335,24	864,9	-57,31	-0,88	-100,76	166,18	-482,966

Resultados:

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	55,79	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	0,026	x
	0		0	y
	-10,616		-0,086	z
$m \cdot \vec{a}_G$	55,79	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	0	x
	0		0	y
	-10,619		0	z

- Eje 3 (Barra 4). Instante de la simulación t=3 segundos.



	a [m/s <sup>2</sup> ]	α [rad/s]
x	-0.012	0
y	0	0
z	0	0

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

3,762	0,836	2,88
0,836	59,79	0,082
2,88	0,082	3,715

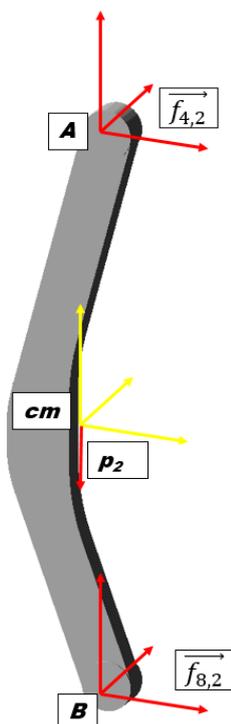
Masa: m=271,92 kg

	f <sub>2,4</sub> [N]	f <sub>3,4</sub> [N]	f <sub>12,4</sub> [N]	t <sub>2,4</sub> [N·m]	t <sub>3,4</sub> [N·m]	t <sub>12,4</sub> [N·m]	Peso [N]
x	-1540,4	1651,6	410,8	-68,11	0	1303,09	298,286
y	-333,37	1005,83	-672,46	0	0	0	0
z	-2638,02	5977,9	-652,04	-111,13	482	-172,93	-2689

Resultados (unidades del SI):

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	-1,314	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	0,0076	x
	0		-1,207	y
	-1,158		0,046	z
$m \cdot \vec{a}_G$	-3,263	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	0	x
	0		0	y
	0		0	z

- **Eslabón eje 2 (Barra 2).** Instante de la simulación t=5 segundos.



	a [m/s <sup>2</sup> ]	α [rad/s]
x	0,1892	0
y	0	0
z	0,02	0

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

4,174	0,00093	-0,067
0,00093	4,285	0
-0,067	0	0,127

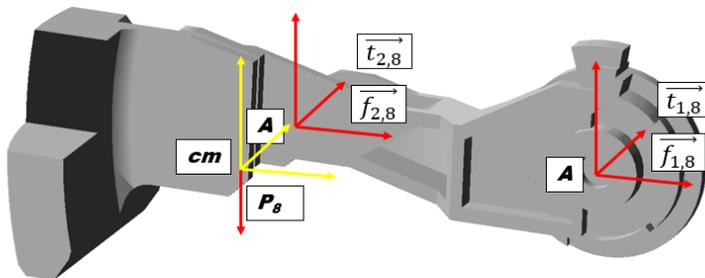
Masa: m=28,82 kg

	f <sub>4,2</sub> [N]	f <sub>8,2</sub> [N]	t <sub>4,2</sub> [N·m]	t <sub>8,2</sub> [N·m]	Peso [N]
x	-67,97	-101,06	0	816,03	174,057
y	627,38	-627,4	0	0	0
z	5886,3	-5664,57	267	-272,6	-222,79

Resultados (Unidades del SI):

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	5,03	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	0,007	x
	0		0,441	y
	-1,07		-0,014	z
$m \cdot \vec{a}_G$	5,453	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	0	x
	0		0	y
	0,576		0	z

- **Contrapeso (Barra 8).** Instante de la simulación t=3 segundos.



	a [m/s <sup>2</sup> ]	α [rad/s]
x	0,035	0
y	0	0
z	0,0011	0

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

3,663	-3,175	-1,578
-3,175	28,121	-0,285
-1,578	-0,285	28,231

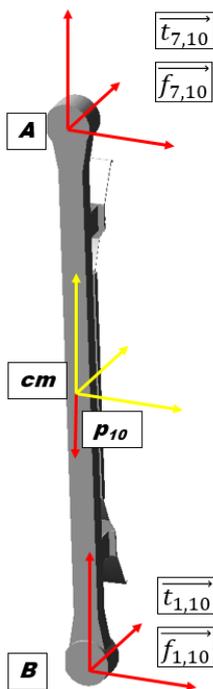
Masa: m=142,82 kg

	f <sub>2,8</sub> [N]	f <sub>1,8</sub> [N]	t <sub>2,8</sub> [N·m]	t <sub>1,8</sub> [N·m]	Peso [N]
x	1565,64	-1719,25	-294,64	0	158,54
y	333,39	-333,39	0	-350,09	0
z	2357,4	-965,19	340,18	0	-1392

Resultados (unidades del SI):

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	4,93	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	0	x
	0		-0,042	y
	0,21		0,164	z
$m \cdot \vec{a}_G$	5	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	0	x
	0		0	y
	0,159		0	z

- **Eslabón balancín trasero (Barra 10).** Instante de la simulación t=3 segundos.



	a [m/s <sup>2</sup> ]	α [rad/s]
x	0	0
y	0	0
z	0	0

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

2,21	0	0
0	2,21	0
0	0	3,715

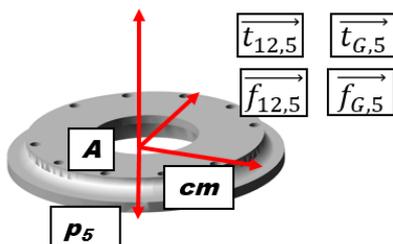
Masa: m=12,22 kg

	f <sub>7,10</sub> [N]	f <sub>1,10</sub> [N]	t <sub>7,10</sub> [N·m]	t <sub>1,10</sub> [N·m]	Peso [N]
x	-18,54	-18,54	0	0	37,049
y	-3	1,5	0	0	0
z	346,18	-965,19	0	0	-114

Resultados (unidades del SI):

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	-0,031	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	2,752	x
	-1,5		-0,04	y
	-0,442		0	z
$m \cdot \vec{a}_G$	0	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	0	x
	0		0	y
	0		0	z

- **Eje 4 (barra 5)** Instante de la simulación t=4,5 segundos.



	a [m/s <sup>2</sup> ]	α [rad/s]
x	0,1432	0
y	0	0
z	0,984	0

Masa: m=2,65 kg

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

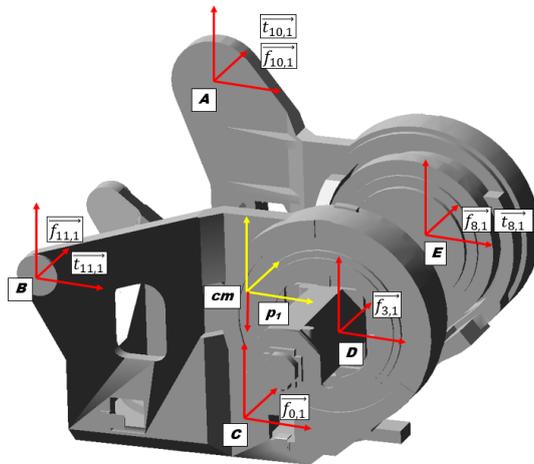
0,00114	0	0
0	0,0114	0
0	0	0,0225

	<b>f<sub>12,5</sub> [N]</b>	<b>f<sub>G,5</sub> [N]</b>	<b>t<sub>12,5</sub> [N·m]</b>	<b>t<sub>G,5</sub> [N·m]</b>	<b>Peso [N]</b>
<b>x</b>	0,81	-0,43	95,68	-95,66	0
<b>y</b>	0	0	8,034	-8,034	0
<b>z</b>	1042,01	-1013,38	8,034	-8,034	-26

Resultados (unidades del SI):

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	0,38	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	0	x
	0		0	y
	2,633		0	z
$m \cdot \vec{a}_G$	0,379	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	0	x
	0		0	y
	2,608		0	z

- **Eje 1 (Barra 1).** Instante de la simulación t=7 segundos.



	<b>a [m/s<sup>2</sup>]</b>	<b>α [rad/s]</b>
<b>x</b>	-0.0281	0
<b>y</b>	0.1458	0
<b>z</b>	0	0.5647

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

37,935	0,597	-3,864
0,597	26,592	-0,033
-3,864	-0,033	46,359

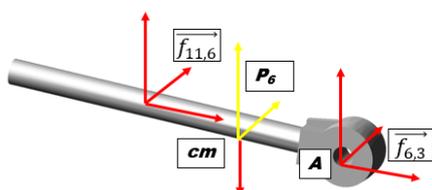
Masa: m=336,007 kg

	$f_{10,1}$ [N]	$f_{11,1}$ [N]	$f_{0,1}$ [N]	$f_{8,1}$ [N]	$f_{3,1}$ [m]	Peso [N]
x	443,37	-48,7	-131,98	4426,45	-4698,57	0
y	-123,07	-759,51	501,3	300,69	129,577	0
z	505,8	-1876,79	15664,17	4094,42	-15091,37	-3296
	$t_{10,1}$ [N·m]	$t_{11,1}$ [N·m]	$t_{0,1}$ [N·m]	$t_{8,1}$ [N·m]	$t_{3,1}$ [N·m]	
x	165,71	-351,62	-293,03	0	0	
y	0	0	-11546,4	1464,95	5270,33	
z	0	0	857,38	-821,55	0	

Resultados (unidades del SI):

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	-9,43	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	-1,746	x
	48,987		0,513	y
	0,23		25,588	z
$m \cdot \vec{a}_G$	-9,442	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	-2,182	x
	48,99		-0,019	y
	0		26,179	z

- Eje equilibrador (barra 6) Instante de la simulación t=7 segundos.



	a [m/s <sup>2</sup> ]	α [rad/s]
x	0,0638	0,1634
y	0,0337	0
z	-0,0193	0,5406

Masa: m=3,5117 kg

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

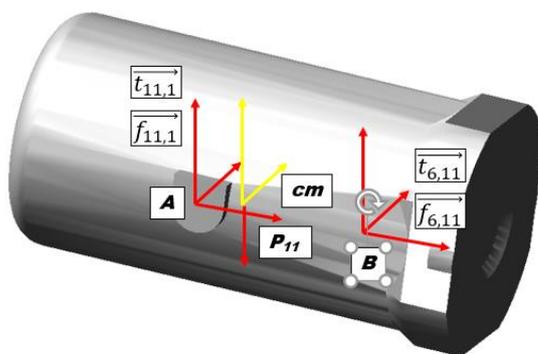
0,00368	0	0,015
0	0,116	0
0,015	0	0,114

	$f_{11,6}$ [N]	$f_{3,6}$ [N]	$t_{11,6}$ [N·m]	$t_{3,6}$ [N·m]	Peso [N]
x	-21,805	32	-41,39	36,24	-9,964
y	784,85	-784,76	20,66	0	0
z	-167,06	199,97	-315,15	387,14	-32,97

Resultados (unidades del SI):

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	0,231	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	-0,003	x
	0,09		-0,0056	y
	-0,06		2,034	z
$m \cdot \vec{a}_G$	0,224	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	0,0087	x
	0,12		0	y
	-0,068		0,064	z

- **Eje equilibrador (barra 6)** Instante de la simulación t=0 segundos.



	a [m/s <sup>2</sup> ]	α [rad/s]
x	0	0
y	0	0
z	0	0

	f <sub>6,11</sub> [N]	f <sub>1,11</sub> [N]	t <sub>6,11</sub> [N·m]	t <sub>1,11</sub> [N·m]	Peso [N]
x	24	-23,94	-0,253	348,95	0
y	17,5	-17,56	-22,19	0	0
z	183,8	1859,2	-1,943	0	-2043

Masa: m=208,26 kg

Matriz de inercia respecto a coordenadas locales: [kg·m<sup>2</sup>]

3,212	0,00133	0,864
0,00133	9,809	0
0,864	0	0,114

Resultados (unidades del SI):

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$	0,06	$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i$	0,0068	x
	-0,06		0,041	y
	-0,011		-0,011	z
$m \cdot \vec{a}_G$	0	$I_G \cdot \vec{\alpha}$	0	x
	0		0	y
	0		0	z

Como se puede observar, los resultados obtenidos mediante sumatorios de fuerzas y momentos son muy similares a los obtenidos por multiplicación de masas por aceleraciones, por lo que se puede considerar que el modelo es correcto. Las pequeñas diferencias se explican por el número de decimales tomados en los cálculos, y en la propia precisión del programa Adams, cuyos resultados varían sensiblemente dependiendo del número de etapas en que se haga la simulación.

## 8. Problemas encontrados

La primera dificultad encontrada es que las mediciones de ángulos mediante Adams no nos dan información acerca del sentido del giro. Es necesario comprobar el sentido de giro que realiza el robot para poder colocar correctamente los signos a la hora de realizar los cálculos.

Otra gran dificultad se ha encontrado cuando se ha querido calcular las fuerzas y pares que actúan sobre las articulaciones. Se intentado calcular las fuerzas y pares actuantes mediante las leyes de Newton, principalmente la Segunda Ley y la Tercera Ley.

Aplicando la Segunda Ley, da lugar a que para cada sólido existan dos ecuaciones, una de ellas es el sumatorio de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, igualada a la masa del cuerpo por la aceleración lineal del centro de gravedad; y otra ecuación, el sumatorio de los momentos igualada al momento de inercia del cuerpo medido en su centro de gravedad por su aceleración angular.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{Gi} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{T}_i = I_G \cdot \vec{\alpha}$$

Las incógnitas son las reacciones que se producen en cada una de las articulaciones a consecuencia de la restricción de movimiento. Cuando la articulación es de rotación (par R), existen reacciones de fuerzas en las tres componentes del espacio, así como pares en las dos rotaciones del espacio que están impedidas. Cuando la articulación es de traslación (par P), existen reacciones de fuerzas en las tres componentes del espacio a excepción de aquella componente paralela al movimiento, y reacciones de pares en todos los giros. Como el robot posee 15 pares de revolución y uno prismático, se da lugar a la existencia de 80 incógnitas, más cuatro incógnitas correspondientes a los pares externos que deben proporcionar los motores. En realidad, existen 168 incógnitas porque cada articulación genera reacciones en dos barras distintas. Sin embargo, por la Tercera Ley de Newton, el principio de acción y reacción, se simplifica fácilmente a la mitad, porque esas dos reacciones tienen valores opuestos. En definitiva, se tienen en total 84 incógnitas.

El robot consta de doce eslabones, y se tienen tres ecuaciones de equilibrio de fuerzas (x, y, z) y tres ecuaciones de equilibrio de momentos (también en x, y, z) para cada barra. Por este motivo, el problema consta de 72 ecuaciones con 84 incógnitas. Como el número de ecuaciones es insuficiente para determinar todas las incógnitas, se

dice que este robot posee una estructura hiperestática, y no se puede resolver mediante métodos de equilibrio de fuerzas y momentos.

También se ha planteado la posibilidad de separar las distintas componentes, pero esto es imposible debido a que los momentos en tres dimensiones están compuestos por un par de fuerzas, en distinta componente del espacio, por lo que en la ecuación de momentos aparecen fuerzas de varias componentes y el número de incógnitas seguiría siendo muy elevado.

Por este motivo, se ha decido hacer un análisis de fuerzas empleando las herramientas proporcionadas por el programa Adams.

## **CAPÍTULO III. CONCLUSIONES**

Este trabajo se ha centrado en el uso del software MSC Adams como herramienta para la simulación de mecanismos.

Se ha realizado una introducción teórica en la que se han explicado todos los conceptos básicos sobre robótica que han sido empleados en la realización del trabajo y que ha servido para profundizar en los conocimientos sobre robótica.

Después, se ha realizado una presentación del robot el cual se va a realizar todo el estudio, el FANUC M-410iB/700, y se ha hecho un modelado completo en el programa Adams.

Seguidamente, se ha comprobado que el cálculo de la posición y velocidad da el mismo resultado, tanto utilizando herramientas matemáticas como usando el programa Adams.

Por último, se ha hecho una simulación de “pick and place” mediante el programa Adams y se han obtenido los datos dinámicos de todas las barras del robot para diferentes instantes de tiempo utilizando una metodología basada en las funciones que implementa Adams, con la finalidad de obtener los valores en coordenadas locales. Mediante las ecuaciones de equilibrio se ha comprobado que los resultados obtenidos son coherentes.

## CAPÍTULO IV. PRESUPESTO

- Mano de obra:

Se estima que la realización total de todo el trabajo ha costado unas 100 horas. Se ha buscado en el BOE el salario de un ingeniero técnico industrial, y es de 13,37 euros por hora trabajada.

Concepto	Cantidad	Precio (sin IVA)	Total
Mano de obra	300 (h)	13,37 €	4011,00 €
			<b>4011,00 €</b>

- Software:

Precio de las licencias según las páginas oficiales.

Concepto	Cantidad	Precio (sin IVA)	Total
MathWorks PTC MathCAD 14	1 (u)	123,93€	123,93 €
MSC Adams	1 (u)	1301,83€	1301,83 €
			<b>1425,76 €</b>

- Amortización.

Se establece un periodo de 1 año para la amortización del software. Se ha trabajado 4 horas al día durante 75 días, lo que da un periodo total de tres meses.

Amortización:  $(1425,76/12) \cdot 3 = 356,44 \text{ €}$

- Hardware:

Se incluye el precio del ordenador utilizado, con el sistema operativo y paquete Office incluido.

Concepto	Cantidad	Precio (sin IVA)	Total
Lenovo Z50-70 20354	1 (u)	578,51€	578,51 €
			<b>578,51 €</b>

- Amortización

Se ha establecido un periodo de 5 años para la amortización del hardware.

Amortización:  $578,51 / (12 \cdot 5) \cdot 4 = 38,57 \text{ €}$

- Consumibles:

Gasto de papel y demás consumibles.

Concepto	Cantidad	Precio (sin IVA)	Total
Consumibles varios	-	15 €	15 €
			<b>15 €</b>

<b>Concepto</b>	
Mano de obra	4011,00 €
Software	1425,76 €
Hardware	1301,83 €
Amortizaciones	395,01 €
Consumibles	15€
Subtotal	7148,60 €
Impuestos (IVA) (21%)	1501,21 €
<b>Total</b>	<b>8649,81€</b>

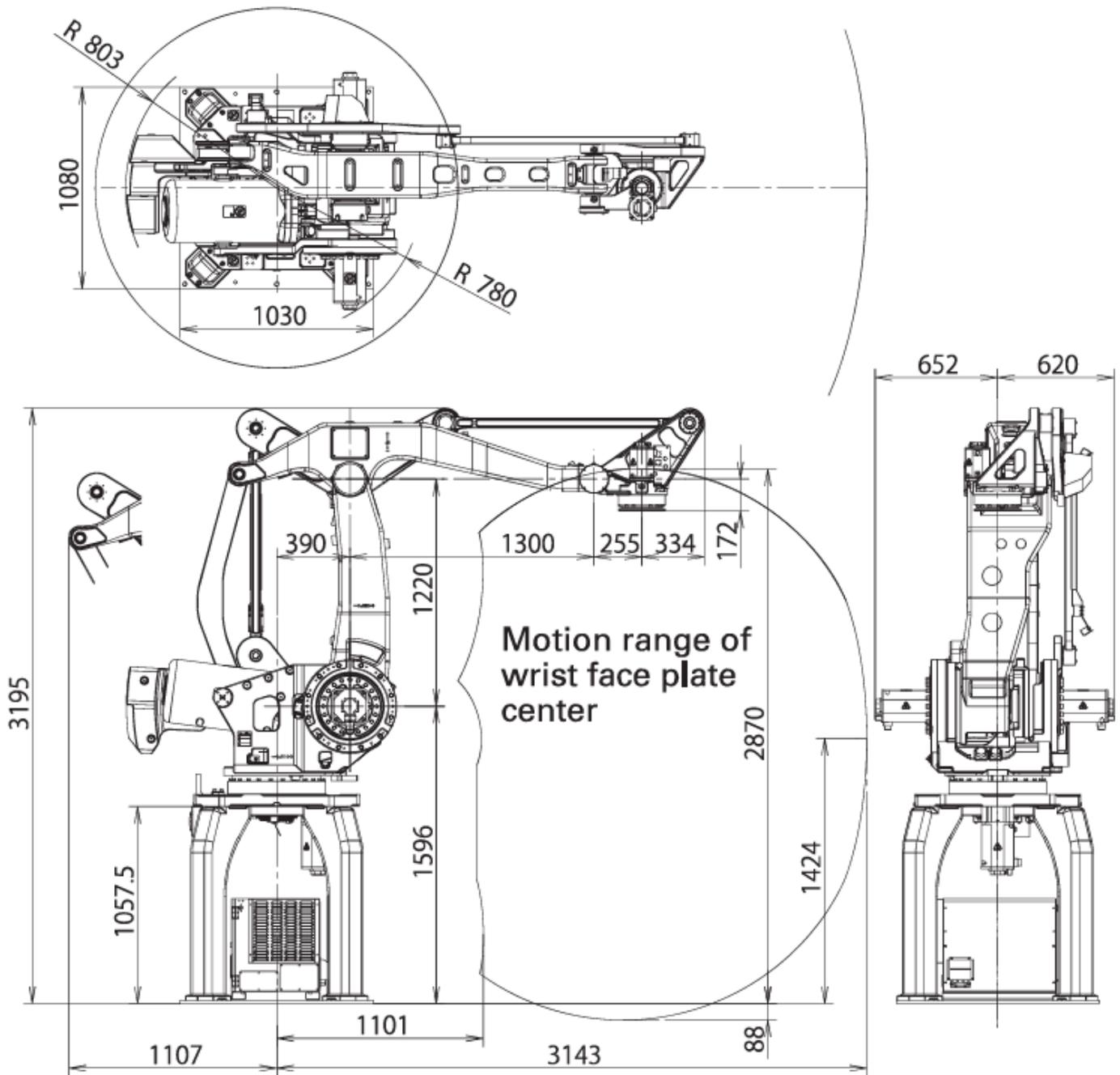
*Ocho mil seiscientos cuarenta y nueve euros con ochenta y un céntimos.*

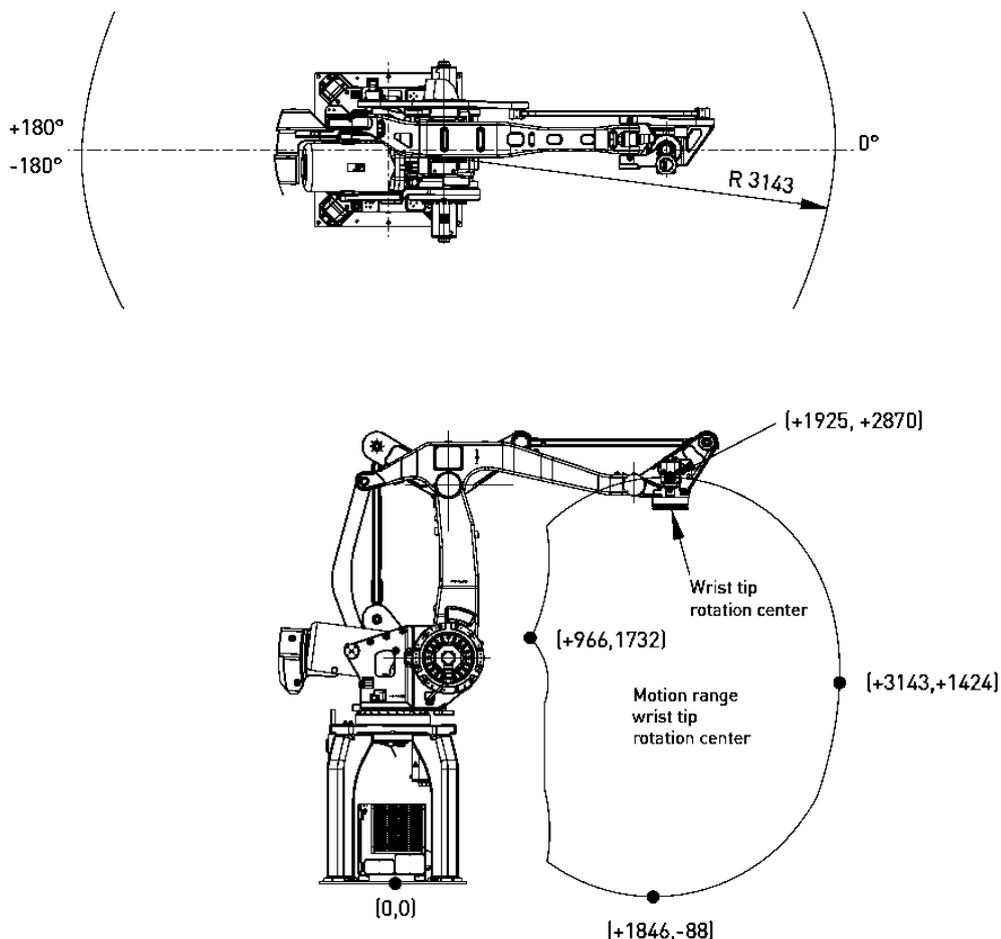
## CAPÍTULO V. BIBLIOGRAFÍA

- Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer, C., Aracil, R. (1998), *Fundamentos de robótica*, Madrid, McGraw-Hill.
- Roda Buch, A., Mata Amela, V., Albelda Vitoria, J. (2016), *Máquinas y mecanismos*, Valencia: Universitat Politècnica de València.
- Rentería, A., Rivas M., (2000), *Robótica Industrial. Fundamentos y aplicaciones*, Madrid, McGraw-Hill.
- <http://wiki.robotica.webs.upv.es/>
- <http://www.fanuc.eu>
- Ayuda de Adams:  
<https://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10021&actp=LIST>

**ANEXO I. Ficha técnica FANUC M-410iB/700**

- *Espacio de operación.*





Item		Specifications	
		M-410iB/700	
Type		Articulated Type	
Controlled axes		4 axes (J1,J2,J3,J4)	
Reach		3.14m	
Installation		Floor	
Motion range (Maximum speed) (Note1)	J1 axis rotation	360° ( 60°/s) 6.28 rad (1.05 rad/s)	
	J2 axis rotation	144° ( 60°/s) 2.51 rad (1.05 rad/s)	
	J3 axis rotation	136° ( 60°/s) 2.37 rad (1.05 rad/s)	
	J4 axis rotation	540° (120°/s) 9.42 rad (2.09 rad/s)	
Max. load capacity at wrist		Max.700 kg	
Allowable load inertia at wrist		490 kg · m <sup>2</sup> 5000 kgf · cm · s <sup>2</sup>	
Throughput (Note2)		700 cycles/hour	
Drive method		Electric servo drive by AC servo motor	
Repeatability		± 0.5 mm	
Mass (Note3)		2700 kg	
Installation environment		Ambient temperature : 0~45°C Ambient humidity : Normally 75%RH or less (No dew, nor frost allowed) Short term Max. 95%RH or less (within one month) Vibration : 0.5G or less	

## PROBLEMA DE POSICIÓN

$$\theta_1 := q_1 \quad d_1 := 538.5 \quad a_1 := 390 \quad \alpha_1 := \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 := \frac{-\pi}{2} + q_2 \quad d_2 := 0 \quad a_2 := -1220 \quad \alpha_2 := 0$$

$$\theta_3 := \frac{\pi}{2} + q_3 \quad d_3 := 0 \quad a_3 := 1300 \quad \alpha_3 := 0$$

$$A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\cos(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_1) & \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_1) & a_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_1) & -\sin(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_1) & a_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\cos(\alpha_2) \cdot \sin(\theta_2) & \sin(\alpha_2) \cdot \sin(\theta_2) & a_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_2) & -\sin(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_2) & a_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\cos(\alpha_3) \cdot \sin(\theta_3) & \sin(\alpha_3) \cdot \sin(\theta_3) & a_3 \cdot \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\alpha_3) \cdot \cos(\theta_3) & -\sin(\alpha_3) \cdot \cos(\theta_3) & a_3 \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 & \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 390 \cdot \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 390 \cdot \sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & 538.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(q_2 - \frac{1}{2} \cdot \pi\right) & 0 & -1.22 \times 10^3 \cdot \cos\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & -1.22 \times 10^3 \cdot \sin\left(q_2 - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) & -\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi + q_3\right) & 0 & 1.3 \times 10^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) & 0 & 1.3 \times 10^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + q_3\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T := A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) \cdot A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) \cdot A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3)$$

$$T_{TAP} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 248 \cdot \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 248 \cdot \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 0 & -522 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{final} := T + T_{TAP}$$

$$p_x := T_{final}{}_{0,3}$$

$$p_x := T_{0,3}$$

$$p_y := T_{final}{}_{1,3}$$

$$p_y := T_{1,3}$$

$$p_z := T_{final}{}_{2,3}$$

$$p_z := T_{2,3}$$

#### PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO DE VELOCIDAD

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2, q_3) &:= p_x \\ f_2(q_1, q_2, q_3) &:= p_y \\ f_3(q_1, q_2, q_3) &:= p_z \end{aligned} \quad J(q_1, q_2, q_3) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dq_1} p_x & \frac{d}{dq_2} p_x & \frac{d}{dq_3} p_x \\ \frac{d}{dq_1} p_y & \frac{d}{dq_2} p_y & \frac{d}{dq_3} p_y \\ \frac{d}{dq_1} p_z & \frac{d}{dq_2} p_z & \frac{d}{dq_3} p_z \end{pmatrix}$$

$$v := J(q_1, q_2, q_3) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

## COMPROBACIÓN DE LA POSICIÓN

### Simulación 1

$$\begin{array}{lclclcl}
 \theta_1 := q_1 & d_1 := 538.5 & a_1 := 390 & \alpha_1 := \frac{\pi}{2} & q_1 := 0 \\
 \theta_2 := \frac{-\pi}{2} + q_2 & d_2 := 0 & a_2 := -1220 & \alpha_2 := 0 & q_2 := 0 \\
 \theta_3 := \frac{\pi}{2} + q_3 & d_3 := 0 & a_3 := 1300 & \alpha_3 := 0 & q_3 := 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\cos(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_1) & \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_1) & a_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_1) & -\sin(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_1) & a_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\cos(\alpha_2) \cdot \sin(\theta_2) & \sin(\alpha_2) \cdot \sin(\theta_2) & a_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_2) & -\sin(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_2) & a_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\cos(\alpha_3) \cdot \sin(\theta_3) & \sin(\alpha_3) \cdot \sin(\theta_3) & a_3 \cdot \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\alpha_3) \cdot \cos(\theta_3) & -\sin(\alpha_3) \cdot \cos(\theta_3) & a_3 \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 & \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\underline{\underline{T}} := A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) \cdot A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) \cdot A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3)$$

$$T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.69 \times 10^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.758 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## COMPROBACIÓN DE LA POSICIÓN

### Simulación 2

$$\begin{array}{lclclcl}
 \theta_1 := q_1 & d_1 := 538.5 & a_1 := 390 & \alpha_1 := \frac{\pi}{2} & q_1 := -\pi \\
 \theta_2 := \frac{-\pi}{2} + q_2 & d_2 := 0 & a_2 := -1220 & \alpha_2 := 0 & q_2 := -0.5236 \\
 \theta_3 := \frac{\pi}{2} + q_3 & d_3 := 0 & a_3 := 1300 & \alpha_3 := 0 & q_3 := 1.047
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\cos(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_1) & \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_1) & a_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_1) & -\sin(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_1) & a_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\cos(\alpha_2) \cdot \sin(\theta_2) & \sin(\alpha_2) \cdot \sin(\theta_2) & a_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_2) & -\sin(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_2) & a_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\cos(\alpha_3) \cdot \sin(\theta_3) & \sin(\alpha_3) \cdot \sin(\theta_3) & a_3 \cdot \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\alpha_3) \cdot \cos(\theta_3) & -\sin(\alpha_3) \cdot \cos(\theta_3) & a_3 \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 & \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\underline{\underline{T}} := A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) \cdot A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) \cdot A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3)$$

$$T \rightarrow \begin{pmatrix} -0.866 & 0.5 & 0 & -2.126 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 2.245 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## COMPROBACIÓN DE LA POSICIÓN DEL TAP

$$\begin{array}{llllll}
 \theta_1 := q_1 & d_1 := 538.5 & a_1 := 390 & \alpha_1 := \frac{\pi}{2} & q_1 := 0 \\
 \theta_2 := \frac{-\pi}{2} + q_2 & d_2 := 0 & a_2 := -1220 & \alpha_2 := 0 & q_2 := 0 \\
 \theta_3 := \frac{\pi}{2} + q_3 & d_3 := 0 & a_3 := 1300 & \alpha_3 := 0 & q_3 := 0
 \end{array}$$

$$A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\cos(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_1) & \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_1) & a_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_1) & -\sin(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_1) & a_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\cos(\alpha_2) \cdot \sin(\theta_2) & \sin(\alpha_2) \cdot \sin(\theta_2) & a_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_2) & -\sin(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_2) & a_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\cos(\alpha_3) \cdot \sin(\theta_3) & \sin(\alpha_3) \cdot \sin(\theta_3) & a_3 \cdot \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\alpha_3) \cdot \cos(\theta_3) & -\sin(\alpha_3) \cdot \cos(\theta_3) & a_3 \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 & \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T} := A_{01}(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) \cdot A_{12}(\theta_2, d_2, a_2, \alpha_2) \cdot A_{23}(\theta_3, d_3, a_3, \alpha_3)$$

$$T_{TAP} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 248 \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 248 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 0 & -522 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{final} := T + T_{TAP}$$

$$T_{final} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.938 \times 10^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.236 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO DE VELOCIDAD  
VELOCIDAD (Continuación del anexo II)

$$f_1(q_1, q_2, q_3) := \mathbf{p}_x$$

$$q_1 := -\pi \quad v_1 := -1.571$$

$$f_2(q_1, q_2, q_3) := \mathbf{p}_y$$

$$q_2 := -1.047 \quad v_2 := -0.5236$$

$$f_3(q_1, q_2, q_3) := \mathbf{p}_z$$

$$q_3 := 0.2618 \quad v_3 := 0.1309$$

$$J(q_1, q_2, q_3) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dq_1} \mathbf{p}_x & \frac{d}{dq_2} \mathbf{p}_x & \frac{d}{dq_3} \mathbf{p}_x \\ \frac{d}{dq_1} \mathbf{p}_y & \frac{d}{dq_2} \mathbf{p}_y & \frac{d}{dq_3} \mathbf{p}_y \\ \frac{d}{dq_1} \mathbf{p}_z & \frac{d}{dq_2} \mathbf{p}_z & \frac{d}{dq_3} \mathbf{p}_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} := J(q_1, q_2, q_3) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 41.408 \\ 3.717 \times 10^3 \\ -914.269 \end{pmatrix}$$

**AXIS 2 (BARRA 3)** Simulación  
 $t=20s$   
 $m_3 := 367.094$

$$p_3 := \begin{pmatrix} -1.613 \times 10^3 \\ 5.926 \times 10^{-3} \\ -3.22 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao3x} \\ r_{ao3y} \\ r_{ao3z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.2782 \\ -0.044927 \\ -0.56604 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{co3x} \\ r_{co3y} \\ r_{co3z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.05347 \\ -0.04993 \\ 0.6657 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{bo3x} \\ r_{bo3y} \\ r_{bo3z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.05346 \\ 0.08107 \\ -0.55426 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{63x} \\ f_{63y} \\ f_{63z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -130.5 \\ -135.03 \\ -147.53 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{13x} \\ f_{13y} \\ f_{13z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4140.19 \\ 356.405 \\ 10057.75 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{43x} \\ f_{43y} \\ f_{43z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -2812.46 \\ 0.1544 \\ -5435.56 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{73x} \\ f_{73y} \\ f_{73z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 526.97 \\ -204.58 \\ -1256.76 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{63x} \\ f_{63y} \\ f_{63z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{13x} \\ f_{13y} \\ f_{13z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{43x} \\ f_{43y} \\ f_{43z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{73x} \\ f_{73y} \\ f_{73z} \end{pmatrix} + p_3 = \begin{pmatrix} 111.2 \\ 16.955 \\ -2.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{63x} \\ t_{63y} \\ t_{63z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 55.096 \\ 0 \\ 35.94 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{13x} \\ t_{13y} \\ t_{13z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 3639.22 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{43x} \\ t_{43y} \\ t_{43z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 106.27 \\ 0 \\ 380.2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{73x} \\ t_{73y} \\ t_{73z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1581.83 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 := \begin{pmatrix} r_{ao3x} \\ r_{ao3y} \\ r_{ao3z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{63x} \\ f_{63y} \\ f_{63z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{bo3x} \\ r_{bo3y} \\ r_{bo3z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{13x} \\ f_{13y} \\ f_{13z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{co3x} \\ r_{co3y} \\ r_{co3z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{43x} \\ f_{43y} \\ f_{43z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{co3x} \\ r_{co3y} \\ r_{co3z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{73x} \\ f_{73y} \\ f_{73z} \end{pmatrix}$$

$$B_1 := \begin{pmatrix} t_{63x} \\ t_{63y} \\ t_{63z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{13x} \\ t_{13y} \\ t_{13z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{43x} \\ t_{43y} \\ t_{43z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{73x} \\ t_{73y} \\ t_{73z} \end{pmatrix}$$

$$C_1 := A_1 + B_1 = \begin{pmatrix} -7.112 \\ 35.702 \\ -10.04 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{3x} \\ a_{3y} \\ a_{3z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.3094 \\ 0.0462 \\ -0.0046 \end{pmatrix} \quad I_3 := \begin{pmatrix} 55.838 & -0.159 & 0.258 \\ -0.159 & 53.349 & -7.021 \\ 0.258 & -7.021 & 7.872 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{3x} \\ \alpha_{3y} \\ \alpha_{3z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.1265 \\ 0.7028 \\ -0.12 \end{pmatrix}$$

$$I_3 \begin{pmatrix} \alpha_{3x} \\ \alpha_{3y} \\ \alpha_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.206 \\ 38.356 \\ -5.912 \end{pmatrix} \quad m_3 \begin{pmatrix} a_{3x} \\ a_{3y} \\ a_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 113.579 \\ 16.96 \\ -1.689 \end{pmatrix}$$

**WRIST (BARRA 12)** Simulación  $t=7 s$

$$m_{12} := 55.27$$

$$p_{12} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -542.1987 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{ao12x} \\ r_{ao12y} \\ r_{ao12z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.2313 \\ 0.14355 \\ -0.011087 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{bo12x} \\ r_{bo12y} \\ r_{bo12z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.2787 \\ 0.19255 \\ 0.28891 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{co12x} \\ r_{co12y} \\ r_{co12z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.023714 \\ -0.03245 \\ -0.17045 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{412x} \\ f_{412y} \\ f_{412z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2836.8 \\ 1634.8 \\ 2512.36 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{512x} \\ f_{512y} \\ f_{512z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5.7357 \\ -8.44 \\ -1036.45 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{912x} \\ f_{912y} \\ f_{912z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -2858.34 \\ -1544.94 \\ -933.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{412x} \\ t_{412y} \\ t_{412z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1657.22 \\ 0 \\ 671.61 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{512x} \\ t_{512y} \\ t_{512z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -96.9 \\ -8.43 \\ -4.5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{912x} \\ t_{912y} \\ t_{912z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1078.04 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{412x} \\ f_{412y} \\ f_{412z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{512x} \\ f_{512y} \\ f_{512z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{912x} \\ f_{912y} \\ f_{912z} \end{pmatrix} + p_{12} = \begin{pmatrix} -15.804 \\ 81.42 \\ 0.011 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao12x} \\ r_{ao12y} \\ r_{ao12z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{412x} \\ f_{412y} \\ f_{412z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{co12x} \\ r_{co12y} \\ r_{co12z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{512x} \\ f_{512y} \\ f_{512z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{bo12x} \\ r_{bo12y} \\ r_{bo12z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{912x} \\ f_{912y} \\ f_{912z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{412x} \\ t_{412y} \\ t_{412z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{512x} \\ t_{512y} \\ t_{512z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{912x} \\ t_{912y} \\ t_{912z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.453 \\ -0.753 \\ 1.543 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{12x} \\ a_{12y} \\ a_{12z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.284 \\ 1.4736 \\ 0 \end{pmatrix} \quad m_{12} \cdot \begin{pmatrix} a_{12x} \\ a_{12y} \\ a_{12z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.697 \\ 81.446 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### **ROCKER ARM TOP LINK (BARRA 9)**

Simulacion t=10 s

$$m_9 := 11.948 \quad p_9 := \begin{pmatrix} -34.279 \\ 1.259 \times 10^{-4} \\ -112.085 \end{pmatrix} \quad I_9 := \begin{pmatrix} 0.00657 & -0.00547 & -0.0005 \\ -0.00547 & 2.487 & 0 \\ -0.0005 & 0 & 2.485 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao9x} \\ r_{ao9y} \\ r_{ao9z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.65 \\ 0.042 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{bo9x} \\ r_{bo9y} \\ r_{bo9z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.65 \\ -0.03 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{9x} \\ \alpha_{9y} \\ \alpha_{9z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.037 \\ 0 \\ 0.04 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{9x} \\ a_{9y} \\ a_{9z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.0318 \\ -0.2906 \\ -0.01 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{79x} \\ f_{79y} \\ f_{79z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -2965.7 \\ -1445.30 \\ 55.98 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{129x} \\ f_{129y} \\ f_{129z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3000 \\ 1441.8 \\ 56 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{79x} \\ t_{79y} \\ t_{79z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1722.975 \\ 0 \\ -2620 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{129x} \\ t_{129y} \\ t_{129z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1723 \\ 0 \\ 528.18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{79x} \\ f_{79y} \\ f_{79z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{129x} \\ f_{129y} \\ f_{129z} \end{pmatrix} + p_9 \rightarrow \begin{pmatrix} 0.021 \\ -3.4998741 \\ -0.105 \end{pmatrix} \quad m_9 \cdot \begin{pmatrix} a_{9x} \\ a_{9y} \\ a_{9z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.3799464 \\ -3.4720888 \\ -0.11948 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao9x} \\ r_{ao9y} \\ r_{ao9z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{79x} \\ f_{79y} \\ f_{79z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{bo9x} \\ r_{bo9y} \\ r_{bo9z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{129x} \\ f_{129y} \\ f_{129z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{79x} \\ t_{79y} \\ t_{79z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{129x} \\ t_{129y} \\ t_{129z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.646 \\ -0.013 \\ -0.646 \end{pmatrix} \quad I_9 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{9x} \\ \alpha_{9y} \\ \alpha_{9z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.00026309 \\ 0.00020239 \\ 0.0994185 \end{pmatrix}$$

**ROCKER ARM (BARRA 7)**

Simulacion t=0.5 s

$$\begin{pmatrix} r_{ao7x} \\ r_{ao7y} \\ r_{ao7z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.47768 \\ -0.02117 \\ 0.1574 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{co7x} \\ r_{co7y} \\ r_{co7z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.023319 \\ -0.39817 \\ -0.1146 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{bo7x} \\ r_{bo7y} \\ r_{bo7z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.533319 \\ -0.118 \\ 0.18539 \end{pmatrix} \quad m_7 := 49.232$$

$$p_7 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49.232 \cdot 9.81 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{107x} \\ f_{107y} \\ f_{107z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -24.12 \\ 20.14 \\ -335.24 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{37x} \\ f_{37y} \\ f_{37z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -462.4 \\ -149.74 \\ 864.9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{97x} \\ f_{97y} \\ f_{97z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 542.31 \\ 129.6 \\ -57.31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{107x} \\ f_{107y} \\ f_{107z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{37x} \\ f_{37y} \\ f_{37z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{97x} \\ f_{97y} \\ f_{97z} \end{pmatrix} + p_7 = \begin{pmatrix} 55.79 \\ -2.842 \times 10^{-14} \\ -10.616 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{7x} \\ a_{7y} \\ a_{7z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1.1332 \\ 0 \\ -0.2157 \end{pmatrix} \quad m_7 \cdot \begin{pmatrix} a_{7x} \\ a_{7y} \\ a_{7z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55.79 \\ 0 \\ -10.619 \end{pmatrix}$$

$$I_7 := \begin{pmatrix} 0.682 & 0.039 & 0.082 \\ 0.039 & 2.20954 & 0.082 \\ 0.029 & 0.082 & 0.00963393 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{107x} \\ t_{107y} \\ t_{107z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.88 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{37x} \\ t_{37y} \\ t_{37z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1465.3 \\ 0 \\ -100.76 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{97x} \\ t_{97y} \\ t_{97z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1090.4 \\ 0 \\ 166.18 \end{pmatrix} \quad p_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -482.966 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao7x} \\ r_{ao7y} \\ r_{ao7z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{107x} \\ f_{107y} \\ f_{107z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{co7x} \\ r_{co7y} \\ r_{co7z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{37x} \\ f_{37y} \\ f_{37z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{bo7x} \\ r_{bo7y} \\ r_{bo7z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{97x} \\ f_{97y} \\ f_{97z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{107x} \\ t_{107y} \\ t_{107z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{37x} \\ t_{37y} \\ t_{37z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{97x} \\ t_{97y} \\ t_{97z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.026 \\ -8.132 \times 10^{-3} \\ -0.086 \end{pmatrix}$$

Para todos los casos:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{7x} \\ \alpha_{7y} \\ \alpha_{7z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_7 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{7x} \\ \alpha_{7y} \\ \alpha_{7z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**AXIS 3 (BARRA 4)** Simulación para t=3 s

$$m_4 := 271.916$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao4x} \\ r_{ao4y} \\ r_{ao4z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.8523 \\ 0.13952 \\ -0.09547 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{bo4x} \\ r_{bo4y} \\ r_{bo4z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.26335 \\ -0.135478 \\ -0.12097 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{co4x} \\ r_{co4y} \\ r_{co4z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1.03665 \\ 0.10052 \\ -0.12097 \end{pmatrix}$$

$$p_4 := \begin{pmatrix} 298.286 \\ 1.125 \times 10^{-3} \\ -2.689 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{24x} \\ t_{24y} \\ t_{24z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -68.11 \\ 0 \\ -111.13 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{34x} \\ t_{34y} \\ t_{34z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 482 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{124x} \\ t_{124y} \\ t_{124z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1303.09 \\ 0 \\ -172.93 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{24x} \\ f_{24y} \\ f_{24z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1540.4 \\ -333.37 \\ -2638.02 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{34x} \\ f_{34y} \\ f_{34z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1651.6 \\ 1005.83 \\ 5977.9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{124x} \\ f_{124y} \\ f_{124z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -410.8 \\ -672.46 \\ -652.038 \end{pmatrix} \quad I_4 := \begin{pmatrix} 3.762 & 0.836 & 2.88 \\ 0.836 & 59.789 & 0.08 \\ 2.88 & 0.08 & 58.686 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao4x} \\ r_{ao4y} \\ r_{ao4z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{24x} \\ f_{24y} \\ f_{24z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{bo4x} \\ r_{bo4y} \\ r_{bo4z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{34x} \\ f_{34y} \\ f_{34z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{co4x} \\ r_{co4y} \\ r_{co4z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{124x} \\ f_{124y} \\ f_{124z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{34x} \\ t_{34y} \\ t_{34z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{24x} \\ t_{24y} \\ t_{24z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{124x} \\ t_{124y} \\ t_{124z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.589 \times 10^{-3} \\ -1.207 \\ 0.046 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{24x} \\ f_{24y} \\ f_{24z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{34x} \\ f_{34y} \\ f_{34z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{124x} \\ f_{124y} \\ f_{124z} \end{pmatrix} + p_4 = \begin{pmatrix} -1.314 \\ 1.125 \times 10^{-3} \\ -1.158 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{4x} \\ a_{4y} \\ a_{4z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.012 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{4x} \\ \alpha_{4y} \\ \alpha_{4z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m_4 \begin{pmatrix} a_{4x} \\ a_{4y} \\ a_{4z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.263 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_4 \begin{pmatrix} \alpha_{4x} \\ \alpha_{4y} \\ \alpha_{4z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**AXIS 2 LINK (BARRA 2)**Simulación t=5  
s

$$m_2 := 28.82$$

$$I_2 := \begin{pmatrix} 4.174 & 0.00093 & -0.067 \\ 0.00093 & 4.285 & 0 \\ -0.067 & 0 & 0.127 \end{pmatrix}$$

$$p_2 := \begin{pmatrix} 174.057 \\ 6.393 \times 10^{-4} \\ -222.794 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao2x} \\ r_{ao2y} \\ r_{ao2z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.08445 \\ 0.0271 \\ 0.6163 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{bo2x} \\ r_{bo2y} \\ r_{bo2z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.08446 \\ 0.037108 \\ -0.6036 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{42x} \\ f_{42y} \\ f_{42z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -67.97 \\ 627.38 \\ 5886.3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{82x} \\ f_{82y} \\ f_{82z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -101.06 \\ -627.38 \\ -5664.57 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{42x} \\ t_{42y} \\ t_{42z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 267 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{82x} \\ t_{82y} \\ t_{82z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 816.03 \\ 0 \\ -272.6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao2x} \\ r_{ao2y} \\ r_{ao2z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{42x} \\ f_{42y} \\ f_{42z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{bo2x} \\ r_{bo2y} \\ r_{bo2z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{82x} \\ f_{82y} \\ f_{82z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{82x} \\ t_{82y} \\ t_{82z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{42x} \\ t_{42y} \\ t_{42z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.004 \times 10^{-3} \\ 0.441 \\ -0.014 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{42x} \\ f_{42y} \\ f_{42z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{82x} \\ f_{82y} \\ f_{82z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 174.06 \\ 0 \\ -222.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.03 \\ 0 \\ -1.07 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.1892 \\ 0 \\ 0.02 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \alpha_{2z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m_2 \cdot \begin{pmatrix} 0.1892 \\ 0 \\ 0.02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.453 \\ 0 \\ 0.576 \end{pmatrix} \quad I_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \alpha_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**COUNTERWEIGHT (BARRA 8)**Simulación  
t=3s

$$m_8 := 142.82$$

$$p_8 := \begin{pmatrix} 158.54 \\ 5.824 \times 10^{-4} \\ -1.392 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao8x} \\ r_{ao8y} \\ r_{ao8z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.1819 \\ 0.1505 \\ 0.05934 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{bo8x} \\ r_{bo8y} \\ r_{bo8z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.7709 \\ 0.0535 \\ 0.0338 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{28x} \\ f_{28y} \\ f_{28z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1565.64 \\ 333.39 \\ 2357.4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{18x} \\ f_{18y} \\ f_{18z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1719.25 \\ -333.39 \\ -965.19 \end{pmatrix} \quad I_8 := \begin{pmatrix} 3.663 & -0.00147 & -0.00547 \\ -0.00547 & 2.487 & 0 \\ -0.0005 & 0 & 28.231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{28x} \\ f_{28y} \\ f_{28z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{18x} \\ f_{18y} \\ f_{18z} \end{pmatrix} + p_8 = \begin{pmatrix} 4.93 \\ 5.824 \times 10^{-4} \\ 0.21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{8x} \\ a_{8y} \\ a_{8z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.035 \\ 0 \\ 0.00111 \end{pmatrix} \quad m_8 \cdot \begin{pmatrix} a_{8x} \\ a_{8y} \\ a_{8z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.999 \\ 0 \\ 0.159 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{18x} \\ t_{18y} \\ t_{18z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ -350.09 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{28x} \\ t_{28y} \\ t_{28z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -294.64 \\ 0 \\ 340.18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao8x} \\ r_{ao8y} \\ r_{ao8z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{28x} \\ f_{28y} \\ f_{28z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{bo8x} \\ r_{bo8y} \\ r_{bo8z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{18x} \\ f_{18y} \\ f_{18z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{18x} \\ t_{18y} \\ t_{18z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{28x} \\ t_{28y} \\ t_{28z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.746 \times 10^{-3} \\ -0.042 \\ 0.164 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{8x} \\ \alpha_{8y} \\ \alpha_{8z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I_8 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{8x} \\ \alpha_{8y} \\ \alpha_{8z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### **ROCKER ARM REAR (BARRA 10)**

Simulación  
t=15s

$$m_{10} := 12.22 \text{kg} \quad p_{10} := \begin{pmatrix} 37.049 \\ 1.361 \times 10^{-4} \\ -114.009 \end{pmatrix} \quad I_{10} := \begin{pmatrix} 2.21018 & 0 & 0 \\ 0 & 2.20954 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00963393 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao10x} \\ r_{ao10y} \\ r_{ao10z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6122 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{bo10x} \\ r_{bo10y} \\ r_{bo10z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.61005 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{710x} \\ t_{710y} \\ t_{710z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{110x} \\ t_{110y} \\ t_{110z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{710x} \\ f_{710y} \\ f_{710z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -18.54 \\ -3 \\ 346.177 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{110x} \\ f_{110y} \\ f_{110z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -18.54 \\ 1.5 \\ -232.61 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao10x} \\ r_{ao10y} \\ r_{ao10z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{710x} \\ f_{710y} \\ f_{710z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{bo10x} \\ r_{bo10y} \\ r_{bo10z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{110x} \\ f_{110y} \\ f_{110z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{710x} \\ t_{710y} \\ t_{710z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{110x} \\ t_{110y} \\ t_{110z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.752 \\ -0.04 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{710x} \\ f_{710y} \\ f_{710z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{110x} \\ f_{110y} \\ f_{110z} \end{pmatrix} + p_{10} = \begin{pmatrix} -0.031 \\ -1.5 \\ -0.442 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad m_{10} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I_{10} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### **AXIS 4 (BARRA 5)**

Simulacion t=4.5 s

$$m_5 := 2.65 \quad p_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_5 \cdot 9.81 \end{pmatrix} \quad p_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25.997 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{125x} \\ f_{125y} \\ f_{125z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.8097 \\ 0 \\ 1042.01 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{G5x} \\ f_{G5y} \\ f_{G5z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.4297 \\ 0 \\ -1013.38 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{Gx} \\ t_{Gy} \\ t_{Gz} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -95.6766 \\ -8.034 \\ -8.034 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{125x} \\ t_{125y} \\ t_{125z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 95.6766 \\ 8.034 \\ 8.034 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{125x} \\ a_{125y} \\ a_{125z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.1432 \\ 0 \\ 0.984 \end{pmatrix} \quad I_5 := \begin{pmatrix} 0.01138 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01142 & 0 \\ 0 & 0 & 0.114 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{125x} \\ \alpha_{125y} \\ \alpha_{125z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{125x} \\ f_{125y} \\ f_{125z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{G5x} \\ f_{G5y} \\ f_{G5z} \end{pmatrix} + p_5 = \begin{pmatrix} 0.38 \\ 0 \\ 2.633 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{Gx} \\ t_{Gy} \\ t_{Gz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{125x} \\ t_{125y} \\ t_{125z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m_5 \cdot \begin{pmatrix} a_{125x} \\ a_{125y} \\ a_{125z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.379 \\ 0 \\ 2.608 \end{pmatrix}$$

$$I_5 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{125x} \\ \alpha_{125y} \\ \alpha_{125z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**AXIS 1 (BARRA 1)**Simulacion t=  
7s

$$m_1 := 336.007$$

$$p_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.296 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$I_1 := \begin{pmatrix} 37.935 & 0.597 & -3.864 \\ 0.597 & 26.592 & -0.033 \\ -3.864 & -0.033 & 46.359 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao1x} \\ r_{ao1y} \\ r_{ao1z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.367 \\ 0.3455 \\ 0.34302 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{bo1x} \\ r_{bo1y} \\ r_{bo1z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.5438 \\ -0.3044 \\ 0.118455 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{co1x} \\ r_{co1y} \\ r_{co1z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.25604 \\ 0.008588 \\ -0.27198 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{do1x} \\ r_{do1y} \\ r_{do1z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.13396 \\ 0.0795588 \\ 0.07102 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{eo1x} \\ r_{eo1y} \\ r_{eo1z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.13396 \\ 0.1366 \\ 0.071 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{101x} \\ f_{101y} \\ f_{101z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 443.37 \\ -123.07 \\ 505.8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{111x} \\ f_{111y} \\ f_{111z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -48.7 \\ -759.51 \\ -1876.79 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{01x} \\ f_{01y} \\ f_{01z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -131.98 \\ 501.3 \\ 15664.17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{81x} \\ f_{81y} \\ f_{81z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4426.45 \\ 300.69 \\ 4094.42 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{31x} \\ f_{31y} \\ f_{31z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -4698.57 \\ 129.577 \\ -15091.37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{101x} \\ t_{101y} \\ t_{101z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 165.71 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{111x} \\ t_{111y} \\ t_{111z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -351.62 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{01x} \\ t_{01y} \\ t_{01z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -293.03 \\ -11546.4 \\ 857.38 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{81x} \\ t_{81y} \\ t_{81z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1464.95 \\ -821.55 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{31x} \\ t_{31y} \\ t_{31z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5270.33 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{101x} \\ f_{101y} \\ f_{101z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{111x} \\ f_{111y} \\ f_{111z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{01x} \\ f_{01y} \\ f_{01z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{81x} \\ f_{81y} \\ f_{81z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{31x} \\ f_{31y} \\ f_{31z} \end{pmatrix} + p_1 = \begin{pmatrix} -9.43 \\ 48.987 \\ 0.23 \end{pmatrix}$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} r_{ao1x} \\ r_{ao1y} \\ r_{ao1z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{101x} \\ f_{101y} \\ f_{101z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{bo1x} \\ r_{bo1y} \\ r_{bo1z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{111x} \\ f_{111y} \\ f_{111z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{co1x} \\ r_{co1y} \\ r_{co1z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{01x} \\ f_{01y} \\ f_{01z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{do1x} \\ r_{do1y} \\ r_{do1z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{31x} \\ f_{31y} \\ f_{31z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{eo1x} \\ r_{eo1y} \\ r_{eo1z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{81x} \\ f_{81y} \\ f_{81z} \end{pmatrix}$$

$$B_3 := \begin{pmatrix} t_{111x} \\ t_{111y} \\ t_{111z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{81x} \\ t_{81y} \\ t_{81z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{01x} \\ t_{01y} \\ t_{01z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{31x} \\ t_{31y} \\ t_{31z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{101x} \\ t_{101y} \\ t_{101z} \end{pmatrix}$$

$$C_3 := A_3 + B_3 = \begin{pmatrix} -1.746 \\ 0.513 \\ 25.588 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.0281 \\ 0.1458 \\ 0 \end{pmatrix} \quad m_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.442 \\ 48.99 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \alpha_{1z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5647 \end{pmatrix} \quad I_1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \alpha_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.182 \\ -0.019 \\ 26.179 \end{pmatrix}$$

**BALANCER SHAFT (BARRA 6)**

Simulacion t=7 s

$$\begin{pmatrix} r_{ao6x} \\ r_{ao6y} \\ r_{ao6z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.089 \\ 0 \\ -0.0116 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{bo6x} \\ r_{bo6y} \\ r_{bo6z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.1753 \\ 0.07 \\ -0.02288 \end{pmatrix}$$

$$m_6 := 3.5117 \quad I_6 := \begin{pmatrix} 0.00368 & 0 & 0.015 \\ 0 & 0.116 & 0 \\ 0.015 & 0 & 0.114 \end{pmatrix}$$

$$P_6 := \begin{pmatrix} -9.964 \\ 3.66 \times 10^{-5} \\ -32.97 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{116x} \\ f_{116y} \\ f_{116z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -21.805 \\ 784.85 \\ -167.06 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{116x} \\ t_{116y} \\ t_{116z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -41.39 \\ 20.66 \\ -315.15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{36x} \\ f_{36y} \\ f_{36z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 32 \\ -784.76 \\ 199.97 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{36x} \\ t_{36y} \\ t_{36z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 36.24 \\ 0 \\ 387.1407 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{116x} \\ f_{116y} \\ f_{116z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{36x} \\ f_{36y} \\ f_{36z} \end{pmatrix} + P_6 = \begin{pmatrix} 0.231 \\ 0.09 \\ -0.06 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{6x} \\ a_{6y} \\ a_{6z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.0638 \\ 0.0337 \\ -0.0193 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{6x} \\ \alpha_{6y} \\ \alpha_{6z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.1634 \\ 0 \\ 0.5406 \end{pmatrix}$$

$$m_6 \begin{pmatrix} a_{6x} \\ a_{6y} \\ a_{6z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.224 \\ 0.118 \\ -0.068 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao6x} \\ r_{ao6y} \\ r_{ao6z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{116x} \\ f_{116y} \\ f_{116z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{bo6x} \\ r_{bo6y} \\ r_{bo6z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{36x} \\ f_{36y} \\ f_{36z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{116x} \\ t_{116y} \\ t_{116z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{36x} \\ t_{36y} \\ t_{36z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.149 \times 10^{-3} \\ -5.623 \times 10^{-3} \\ 2.034 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.00368 & 0 & 0.015 \\ 0 & 0.116 & 0 \\ 0.015 & 0 & 0.114 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1634 \\ 0 \\ 0.5406 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.71 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0.064 \end{pmatrix}$$

**BALANCER (BARRA 11)**

Simulaci3n: t=0 s

$$P_{11} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{11} \cdot 9.81 \end{pmatrix}$$

$$m_{11} := 208.258$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.043 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{ao11x} \\ r_{ao11y} \\ r_{ao11z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.32292 \\ 0 \\ -0.04216 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{bo11x} \\ r_{bo11y} \\ r_{bo11z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.0445 \\ -0.188 \\ 0.005787 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{611x} \\ f_{611y} \\ f_{611z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 24 \\ 17.5 \\ 183.8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{611x} \\ t_{611y} \\ t_{611z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.253 \\ -22.19 \\ -1.943 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{1a11x} \\ f_{1a11y} \\ f_{1a11z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -23.94 \\ -17.56 \\ 1859.2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{1a11x} \\ t_{1a11y} \\ t_{1a11z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 348.95 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11x} \\ a_{11y} \\ a_{11z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ -0 \\ -0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11x} \\ \alpha_{11y} \\ \alpha_{11z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{1a11x} \\ f_{1a11y} \\ f_{1a11z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{611x} \\ f_{611y} \\ f_{611z} \end{pmatrix} + p_{11} = \begin{pmatrix} 0.06 \\ -0.06 \\ -0.011 \end{pmatrix} \quad m_{11} \cdot \begin{pmatrix} a_{11x} \\ a_{11y} \\ a_{11z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{bo11x} \\ r_{bo11y} \\ r_{bo11z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{1a11x} \\ f_{1a11y} \\ f_{1a11z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{ao11x} \\ r_{ao11y} \\ r_{ao11z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{611x} \\ f_{611y} \\ f_{611z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{1a11x} \\ t_{1a11y} \\ t_{1a11z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{611x} \\ t_{611y} \\ t_{611z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.82 \times 10^{-3} \\ 0.041 \\ -0.011 \end{pmatrix}$$

$$I_{11} := \begin{pmatrix} 3.212 & 0.00133 & 0.864 \\ 0.00133 & 9.809 & -0.0000281 \\ 0.864 & -0.00002819 & 9.718 \end{pmatrix}$$

$$I_{11} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11x} \\ \alpha_{11y} \\ \alpha_{11z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$