

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL
DISEÑO



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

**Implementación del Método de Elementos Móviles
(MEM) como herramienta de mejora del modelado
dinámico de alta frecuencia de una vía flexible en
recta**

Máster Ingeniería Aeronáutica

Trabajo Final de Máster

AUTOR: Sergio García Escudero

DIRECTOR: DR. D. José Martínez Casas

CODIRECTOR: DR. D. Francisco D. Denia Guzmán

Valencia, Junio de 2017



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE
MATERIALES**

**Implementación del Método de Elementos Móviles (MEM) como
herramienta de mejora del modelado dinámico de alta frecuencia de
una vía flexible en recta**

TRABAJO FINAL DE MASTER PRESENTADO POR

SERGIO GARCÍA ESCUDERO

DIRIGIDO POR

JOSÉ MARTÍNEZ CASAS

FRANCISCO D. DENIA GUZMÁN

2017

Resumen

Durante estos últimos años, el ferrocarril ha sufrido un desarrollo tecnológico que le ha situado en uno de los principales medios de transporte a nivel mundial.

Años atrás, la velocidad promedio de los ferrocarriles había sido de entre 160 y 200 km/h. Pero, para conseguir incrementar la velocidad sin reducir el confort de los pasajeros ha sido necesario fomentar la tecnología. De manera que, con avances en la suspensión y amortiguación, la mejora en vías continuas sin remaches, el aislamiento acústico, aire acondicionado, telefonía y servicios audiovisuales se ha conseguido alcanzar velocidades de aproximadamente 400 km/h.

Por todo ello, en este trabajo se aborda el estudio de la interacción dinámica de un vehículo ferroviario con la vía, mediante dos modelos de carril diferentes. El primero está basado en la Teoría de Vigas de Timoshenko, cuyo rango de validez se sitúa en 1,5 kHz para vibraciones laterales y 2kHz para vibraciones verticales. Mientras que el segundo modelo, es el basado en el 3D Moving Element Method, con el cual se pretende ampliar el rango de validez hasta el dominio de la alta frecuencia.

Finalmente, se realiza un estudio comparativo tanto para una rugosidad pseudoaleatoria como para un plano de rueda establecidos en la normativa ISO 3095 para un rango de velocidades que abarca desde los 25 km/h hasta los 350 km/h con el fin de comprobar que ambos métodos siguen la misma evolución dinámica, pero teniendo en cuenta que el 3D MEM reproduce con mayor precisión la dinámica de alta frecuencia.

Resum

Durant estos últims anys, el ferrocarril ha patit un desenrotllament tecnològic que li ha situat en un dels principals mitjans de transport a nivell mundial.

Anys arrere, la velocitat mitjana dels ferrocarrils és d'entre 160 i 200 km/h. Però, per a aconseguir incrementar la velocitat sense reduir el confort dels passatgers ha sigut necessari fomentar la tecnologia. De manera que, amb avanços en la suspensió i amortiguación, la millora en vies contínues sense reblades, l'aïllament acústic, aire condicionat, telefonia i servicis audiovisuals s'ha aconseguit aconseguir velocitats d'aproximadament 400 km/h.

Per tot això, en este treball s'aborda l'estudi de la interacció dinàmica d'un vehicle ferroviari amb la via, per mitjà de dos models de carril diferents. El primer està basat en la Teoria de Bigues de Timoixenko, el rang de validesa de la qual se situa en 1,5 kHz per a vibracions laterals i 2kHz per a vibracions verticals. Mentres que el segon model, és el basat en el 3D Moving Element Method, amb el qual es pretén ampliar el rang de validesa fins al domini de l'alta freqüència.

Finalment, es realitza un estudi comparatiu tant per a una rugositat pseudoaleatòria com per a un pla de roda establits en la normativa ISO 3095 per a un rang de velocitats que comprén des dels 25 km/h fins als 350 km/h a fi de comprovar que ambdós mètodes segueixen la mateixa evolució dinàmica, però tenint en compte que el 3D MEM reproduïx amb més precisió la dinàmica d'alta freqüència.

Abstract

For these last years, the railway has undergone a technological development that has placed it as one of the main means of transport worldwide.

Years ago, the railway average speed was between 160 and 200 km/h. But, in order to increase the speed without reducing the passenger comfort, it has been necessary to promote the technology. So, with advances in suspension and damping, the improvement in continuous tracks without rivets, acoustic insulation, air conditioning, telephony and audiovisual services have managed to reach speeds of approximately 400 km/h.

Therefore, this work is focused on the study of the dynamic interaction of a rail vehicle with the track, through two different lane models. The first, is based on the Timoshenko Beams Theory, whose validity range is 1.5 kHz for lateral vibrations and 2 kHz for vertical vibrations. While the second model is based on the 3D Moving Element Method, which aims to extend the range of validity up to the domain of high frequency.

Finally, a comparative study is performed for both a pseudorandom roughness and a wheel plane established in ISO 3095 for a range of speeds ranging from 25 km/h to 350 km/h in order to verify that both Methods follow the same dynamic evolution, but taking into account that the 3D MEM reproduces more accurately the high frequency dynamics.

Índice general

1. Introducción.....	15
1.1. Antecedentes	16
1.2. Motivación	19
1.3. Objetivo	21
1.4. Metodología	21
2. Teorías de modelado unidimensional – Teorías de vigas.....	23
2.1. Introducción	24
2.2. Euler-Bernoulli.....	24
2.2.1. Ecuación de movimiento.....	24
2.2.2. Vibraciones libres	26
2.2.3. Viga Libre: Modos de vibración y frecuencias naturales.....	29
2.2.4. Viga biarticulada: Modos de vibración y frecuencias naturales.....	32
2.2.5. Respuesta forzada de la viga de Euler-Bernoulli	34
2.3. Rayleigh.....	36
2.3.1. Ecuación de movimiento.....	36
2.3.2. Vibraciones libres	37
2.3.3. Viga biarticulada: Modos de vibración y frecuencias naturales.....	39
2.3.4. Respuesta forzada de la viga de Rayleigh	39
2.4. Timoshenko	41
2.4.1. Ecuación de movimiento.....	41
2.4.2. Vibraciones libres	43
2.4.3. Viga biarticulada: Modos de vibración y frecuencias naturales.....	44
2.4.4. Respuesta forzada de la viga de Rayleigh-Timoshenko	46
3. 3D Moving Element Method	49
3.1. Introducción	50
3.2. Formulación del 3D Moving Element Method	51
3.3. Planteamiento modal.....	57
4. Modelo de interacción dinámica vehículo-vía.....	59
4.1. Introducción	60
4.2. Carril	60
4.3. Traviesas	62
4.4. Vehículo	63
4.5. Modelo de interacción rueda-carril.....	65

5. Simulaciones y resultados.....	67
5.1. Introducción	68
5.2. Condiciones generales	68
5.3. Rugosidad pseudoaleatoria normativa ISO 3095	69
5.4. Plano de rueda.....	84
6. Conclusiones y Trabajos futuros.....	101
6.1. Conclusiones.....	102
6.2. Trabajos futuros	103

Índice de figuras

Figura 1.1 Evolución del ferrocarril en el siglo XIX (1855-1868)	16
Figura 1.2 Evolución del ferrocarril en el siglo XIX (1855-1868)	17
Figura 1.3 Evolución del ferrocarril en el siglo XIX (1868-1900)	17
Figura 2.1 Diagrama de sólido libre de un elemento diferencial de una viga sometida a flexión	25
Figura 2.2 Representación de los cinco primeros modos de vibración lateral de una viga de Euler-Bernoulli	32
Figura 2.3 Diagrama de sólido libre de un elemento diferencial de una viga sometida a flexión	42
Figura 2.4 Representación de los cinco primeros modos de vibración lateral de una viga de Rayleigh-Timoshenko	45
Figura 4.1 Técnica de subestructuración para la interacción dinámica vehículo-vía.....	60
Figura 4.2 Modelo de vía cíclica infinita.....	61
Figura 4.3 Tramo finito de vía cíclica analizada.....	61
Figura 4.4 Carril UIC 60 modelado mediante el MEM.....	62
Figura 5.1 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 25 km/h.....	70
Figura 5.2 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 50 km/h.....	71
Figura 5.3 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 100 km/h.....	72
Figura 5.4 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 200 km/h.....	73
Figura 5.5 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 350 km/h.....	74
Figura 5.6 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 25 km/h.....	75
Figura 5.7 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 50 km/h.....	76
Figura 5.8 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 100 km/h.....	77
Figura 5.9 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 200 km/h.....	78
Figura 5.10 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 350 km/h.....	79
Figura 5.11 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 50 km/h.....	80
Figura 5.12 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 100 km/h.....	81

Figura 5.13 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 200 km/h.....	82
Figura 5.14 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 350 km/h.....	83
Figura 5.15 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 25 km/h.....	84
Figura 5.16 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 50 km/h.....	85
Figura 5.17 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 100 km/h.....	86
Figura 5.18 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 200 km/h.....	87
Figura 5.19 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 350 km/h.....	88
Figura 5.20 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 25 km/h.....	89
Figura 5.21 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 50 km/h.....	90
Figura 5.22 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 100 km/h.....	91
Figura 5.23 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 200 km/h.....	92
Figura 5.24 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 350 km/h.....	93
Figura 5.25 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 50 km/h.....	94
Figura 5.26 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 100 km/h.....	95
Figura 5.27 Representación de la fuerza de contacto en tercios de octava bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 200 km/h.....	96
Figura 5.28 Representación de la fuerza de contacto en tercios de octava bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 350 km/h.....	97
Figura 5.29 Representación de la fuerza de contacto vertical tras el impacto de la rueda.....	98
Figura 5.30 Representación de la pérdida de contacto tras el impacto de la rueda.....	99

Índice de tablas

Tabla 2.1 Condiciones de contorno habituales en el modelado de carriles ferroviarios	29
Tabla 5.1 Parámetros del vehículo	69
Tabla 5.2 Parámetros de la vía	69

Capítulo 1

Introducción

Índice

1.1.	Antecedentes	16
1.2.	Motivación.....	19
1.3.	Objetivo.....	21
1.4.	Metodología	21

1.1. Antecedentes

El ferrocarril, cuyo origen proviene del latín ferrum y carril, es un sistema de transporte de personas y mercancías.

Su origen se remonta a la civilización egipcia, pero no fue hasta el siglo XVI donde se expandió su uso al ámbito industrial debido a las explotaciones mineras alemanas realizadas en el subsuelo mediante vagones que se apoyaban sobre series de maderas planas.

Ya adentrados en el siglo XVII, las maderas, sobre las que se apoyaban los vagones, son sustituidas por largos lingotes de hierro, al mismo tiempo que se introdujo la rueda con llanta metálica. Estos carriles presentaban una baja resistencia a compresión, por eso se empezaron a fabricar en hierro en su integridad, siendo en 1820 fabricados de hierro forjado, solucionando los problemas de fragilidad.

Fue entonces cuando se inaugura la primera línea de ferrocarril del mundo, el 15 de abril de 1830 en Inglaterra, uniendo las ciudades de Liverpool y Manchester. En dicha línea la locomotora era capaz de conseguir una velocidad de 16 km/h.

Rápidamente se comenzó a implantar líneas ferroviarias en otros países tales como Francia, Bélgica, Italia o Alemania.



Figura 1.1 Evolución del ferrocarril en el siglo XIX (1855-1868)

En España, el primer trayecto se retasa a 1848, siendo la línea Barcelona-Mataró la pionera. Posteriormente se inaugura la línea Madrid-Aranjuez en 1851. Con la

promulgación de la Ley de Ferrocarriles de 1855, se comenzó a desarrollar una extensa red a lo largo del país.



Figura 1.2 Evolución del ferrocarril en el siglo XIX (1855-1868)

Las construcciones se ralentizaron tras la crisis económica de 1866 y el inicio del Sexenio Democrático en 1868. Faltando ese año el enganche de Madrid con Barcelona, pero estaba ya unida la capital con las fronteras francesas.



Figura 1.3 Evolución del ferrocarril en el siglo XIX (1868-1900)

Ya adentrados en 1857 la mayoría de las vías se encontraban compuestas por los siguientes elementos:

- **Carriles** de acero fundido, cuyas funciones son:
 - Recibir las cargas que provienen de las ruedas y transmitir las hacia los apoyos; así como, ser lo suficientemente resistentes como para soportar las cargas debidas al movimiento de serpenteo de los equipos ferroviarios, sin sufrir grandes deformaciones tanto en el plano horizontal como en el vertical. Estos movimientos aplicados al carril le traen asentamiento en los apoyos, flexión en los planos, torsión, aplastamiento, desgaste y en ocasiones partidura del material, así como deformación de la vía en su conjunto que se representa por pandeos.
 - Guiar a los vehículos durante todo el trazado de la vía.
 - Servir de conductor de las corrientes de señalización.

- El **balasto**, es la capa de piedra partida que se tiende sobre la explanación o plataforma y sirve de asiento a los durmientes. Se encarga de:
 - Repartir uniformemente sobre la plataforma las cargas que recibe el durmiente de forma tal que su tensión admisible no sea superada.
 - Estabilizar vertical, longitudinal y lateralmente la vía.
 - Amortiguar mediante su estructura pseudo-elástica las acciones de los vehículos sobre la vía.
 - Proporcionar una rodadura suave a los vehículos y un notable confort a los viajeros.
 - Proteger la plataforma de las variaciones de humedad debidas al medio ambiente.
 - Facilitar la evacuación de las aguas de lluvia.
 - Permitir la recuperación de la calidad geométrica de la vía mediante operaciones de alineación y nivelación.

- Las **traviesas** son los elementos transversales al eje de la vía que sirven para mantener unidos y a la vez a una distancia fija a los dos carriles que conforman la vía. Sus funciones principales son:
 - Sujetar ambos raíles de la vía. Por ello se disponen de manera perpendicular a los raíles y se fijan a ellos mediante las juntas de sujeción.

- Repartir las tensiones ejercidas por los vehículos que circulan por la vía, a la par que repartir esas tensiones en la plataforma, distribuyéndolas por la base granular del balasto.
- Dotar a los carriles de la inclinación deseada.
- En vías que sean electrificadas se puede utilizar como aislante entre ambos carriles.

Todo esto justifica la importancia del carril, ya que es el elemento que se encuentra en contacto directo con el vehículo ferroviario, y que, soporta su peso y los esfuerzos de tracción.

Por tanto, debido al papel que ejercen, el tratamiento de los carriles ha sido complejo debido a diversos motivos, tales como la consideración de los carriles como una estructura infinita debido a su longitud, el posicionamiento sobre el balasto y materiales elastómeros cuyo comportamiento es no lineal. A raíz de dichas dificultades, los modelos desarrollados se engloban en: carriles infinitos lineales o carriles finitos no lineales.

- Los carriles considerados infinitos lineales, inicialmente, se desarrollaron mediante vigas de Winkler, siendo, posteriormente, sustituidos por las vigas de Euler, las cuales descansaban sobre las traviesas. Al mismo tiempo que se estaban desarrollando estos modelos, se realizaron investigaciones basadas en la teoría de Fourier sobre el comportamiento de la viga de Euler apoyada sobre apoyos discretos elásticos y sometida a condiciones de excitación.
- Los carriles como finitos no lineales presentaban una problemática, debido a que la interacción del vehículo con la vía genera unas ondas en el carril. Este efecto produce que las ondas incidan en la propia interacción del vehículo con la vía que las generó, afectando a su comportamiento. Para solucionar dicho problema, es necesario suponer una longitud de vía lo suficientemente elevada como para que las ondas reflejadas no afecten a la interacción vehículo-vía.

1.2. Motivación

La motivación que me ha llevado a realizar este trabajo se basa en una serie de diversas sucesiones.

Uno de los motivos por los que he estudiado el Grado y Master en Ingeniería Aeronáutica, fue porque me permitía implementar tres campos que siempre me han atraído a lo largo de mi vida académica; estos tres campos son las matemáticas, sobre todo aerodinámica numérica, física, en especial el campo de mecánica, y finalmente las estructuras, es decir, como están compuestos los diversos objetos a estudiar, en este caso la estructura es un avión, ya que siempre me ha fascinado su arquitectura.

También, hay que tener en cuenta que este trabajo es el último punto que realiza un estudiante antes de finalizar su vida académica y donde se debe demostrar la capacidad personal adquirida a lo largo de los diferentes años.

Por tanto, dentro de la UPV el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales (DIMM), me ha permitido asociar estos tres elementos, aunque modificando el tipo de estructura por un ferrocarril y también, facilitarme la integración dentro de un grupo de investigación de este terreno.

Por esto, he realizado el Trabajo Final de Máster (TFM) que lleva como título **Implementación del Método de Elementos Móviles (MEM) como herramienta de mejora del modelado dinámico de alta frecuencia de una vía flexible en recta**, ya que realizando un estudio acerca de la red ferroviaria en España ha determinado que España dispone de una red ferroviaria de más de 15500 km de longitud, de los cuales 3243 km son de vías de alta velocidad. Dados estos datos, España es el país europeo con más kilómetros de alta velocidad y el segundo del mundo, por detrás de China. Por tanto, la experiencia adquirida ha convertido a España en líder en integración de tecnologías y en interoperabilidad ferroviaria.

Las aplicaciones que se presentan en este proyecto, tienen como pilar primordial la investigación de la interacción del vehículo con la vía para una serie de aplicaciones.

- La primera aplicación está destinada a obtener un mejor **confort** de los pasajeros y una **optimización del diseño** al incrementar la velocidad. Por tanto, es necesario realizar un estudio acerca de las vibraciones y ruido generados durante el paso del vehículo por las vías.
- La segunda es obtener un mejor **mantenimiento** y mayor **durabilidad** de los vehículos. Para ello, se realizan diversos estudios en el diseño de componentes a fatiga y fractura con lo que se consigue un ahorro en los costes de mantenimiento del vehículo.

- La tercera aplicación consiste en una mejora en la **conservación de la vía**, con una reducción de las imperfecciones de los carriles lo cual mejoraría la estabilidad del vehículo.

1.3. Objetivo

El objetivo de este trabajo consiste en obtener un método de comportamiento dinámico, el cual contemple la deformación de la sección recta del carril, y que sea plenamente apto para la interacción vehículo-vía en rangos de alta frecuencia.

Este modelo del carril se basa en la teoría del 3D Moving Element Method (MEM), con la que se pretende superar el rango de validez de 1,5 kHz, pues el modelo de vigas de Timoshenko sitúa su rango de validez en 1,5 kHz para vibraciones laterales y 2 kHz para vibraciones verticales.

Finalmente, para validar la teoría empleada, se realizará un análisis de los resultados de las simulaciones dinámicas llevadas a cabo con ambos métodos.

1.4. Metodología

El proyecto se fundamenta en tres etapas principales.

- La primera se basa en una revisión bibliográfica de las teorías empleadas en el desarrollo de los modelos de comportamiento de los carriles y los fundamentos del 3D Moving Element Method.
- La segunda etapa se basa en realizar las simulaciones del modelado del carril tanto para el algoritmo del MEM como para la Teoría de Vigas de Timoshenko.
- Finalmente, la última etapa consiste en analizar las simulaciones efectuadas y comprobar su validez.

Capítulo 2

Teorías de modelado unidimensional – Teorías de vigas

Índice

2.1.	Introducción	24
2.2.	Euler-Bernoulli	24
2.2.1.	Ecuación de movimiento	24
2.2.2.	Vibraciones libres	26
2.2.3.	Viga Libre: Modos de vibración y frecuencias naturales.....	29
2.2.4.	Viga biarticulada: Modos de vibración y frecuencias naturales.....	32
2.2.5.	Respuesta forzada de la viga de Euler-Bernoulli	34
2.3.	Rayleigh.....	36
2.3.1.	Ecuación de movimiento	36
2.3.2.	Vibraciones libres	37
2.3.3.	Viga biarticulada: Modos de vibración y frecuencias naturales.....	39
2.3.4.	Respuesta forzada de la viga de Rayleigh	39
2.4.	Timoshenko	41
2.4.1.	Ecuación de movimiento	41
2.4.2.	Vibraciones libres	43
2.4.3.	Viga biarticulada: Modos de vibración y frecuencias naturales.....	44
2.4.4.	Respuesta forzada de la viga de Rayleigh-Timoshenko	46

2.1. Introducción

A lo largo de los años, se han desarrollado diversos métodos matemáticos para reproducir la interacción del vehículo-vía, los cuales se fundamentan en modelar los carriles mediante las diversas teorías de vigas existentes. Esto es debido a que, en ingeniería, si un cuerpo posee una esbeltez considerable es considerado como una viga a la hora de definir su comportamiento mecánico.

Los diferentes modelos desarrollados en el presente documento se basan principalmente en las ecuaciones de Euler-Bernoulli, Rayleigh y Timoshenko. Estas tres teorías tienen el mismo punto de partida, la sección transversal de la viga no se deforma, sino que solamente se desplaza, de manera que la viga es tratada como un elemento unidimensional el cual sólo sufre desplazamiento y deformación a lo largo del eje vertical.

2.2. Euler-Bernoulli

La teoría de vigas de Euler-Bernoulli es probablemente uno de los problemas modelo más simples de la formulación restringida de la elasticidad lineal. La restricción, en este caso, es la hipótesis cinemática estándar de Euler-Bernoulli, donde las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación. Esto quiere decir que no considera los efectos que el esfuerzo cortante y la inercia rotatoria ejercen sobre el giro de la sección de la viga. Esta teoría se limita al estudio de la dinámica del modelo cuando el contenido en frecuencia de las fuerzas de excitación no supera los 500 Hz.

A continuación, se detalla el desarrollo teórico para la obtención de la ecuación de movimiento del carril interpretado como una viga a flexión junto a su solución tanto en el caso de vibraciones libres como forzadas.

2.2.1. Ecuación de movimiento

Considerando un elemento diferencial como el mostrado en la Figura 2.1. Se aplica sobre él, una fuerza externa por unidad de longitud $p(x, t)$, donde $V(x, t)$ y $M(x, t)$ son la fuerza cortante y el momento flector, respectivamente.

La ecuación de equilibrio de fuerzas en dirección u y la ecuación de equilibrio de momentos en la dirección normal al plano de flexión $x-u$ respecto a o son:

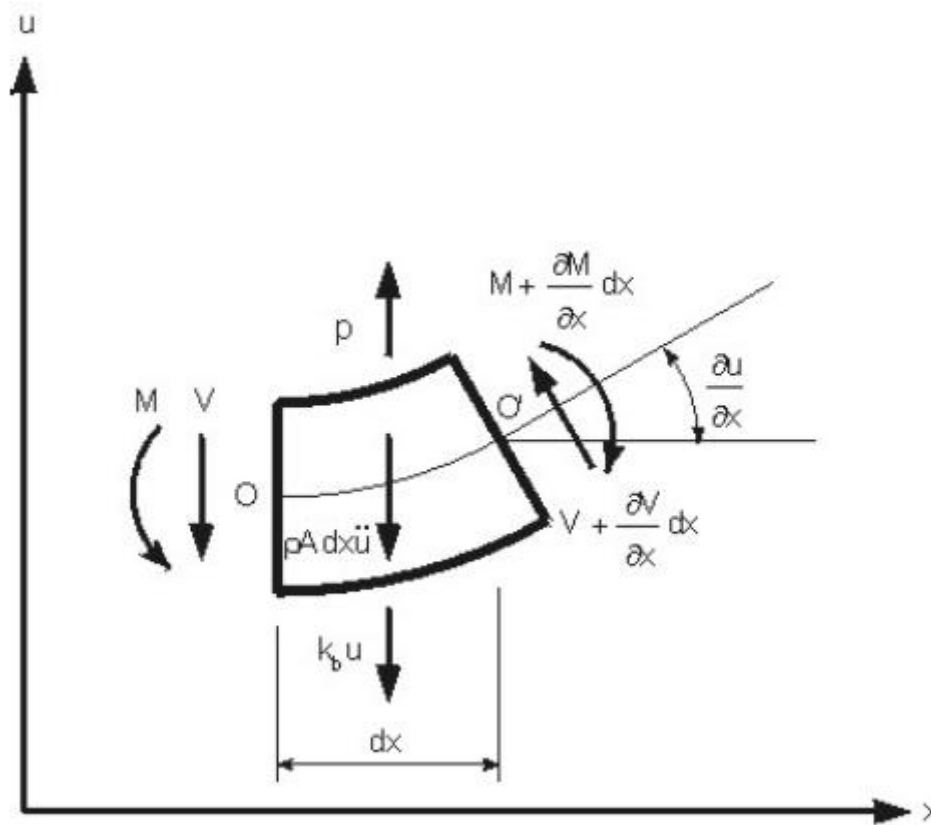


Figura 2.1 Diagrama de sólido libre de un elemento diferencial de una viga sometida a flexión

$$-V - \rho A(x) \ddot{u} \delta x + p(x, t) \delta x + V + \frac{\delta V}{\delta x} \delta x = 0 \quad (2.1)$$

Donde, aplicando las simplificaciones se desprecia el esfuerzo cortante y la inercia rotatoria.

$$p(x, t) + \frac{\delta V}{\delta x} = \rho A(x) \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\delta M(x, t)}{\delta x} - V(x, t) = 0 \Rightarrow V(x, t) = \frac{\delta M(x, t)}{\delta x} \quad (2.3)$$

Donde:

- ρ es la densidad del material.
- $\rho A(x) \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2}$ es la fuerza de inercia que actúa en el elemento diferencial.
- $A(x)$ es el área de la sección normal a x .

Sustituyendo 2.2 en 2.3:

$$p(x, t) + \frac{\delta^2 M(x, t)}{\delta x^2} = \rho A(x) \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} \quad (2.4)$$

La relación existente entre el momento flector aplicado en la viga y la deformación que este produce viene dado por la teoría elemental de flexión de vigas, conocida también como la teoría de Euler-Bernoulli y sustituyendo en 2.4 se tiene:

$$M(x, t) = -EI(x) \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} \quad (2.5)$$

$$p(x, t) - EI(x) \frac{\delta^4 u(x, t)}{\delta x^4} = \rho A(x) \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} \quad (2.6)$$

Asumiendo el caso de una viga de sección uniforme, el momento I y el área A son constantes, y se tendría la ecuación de movimiento de la viga de Euler para el de carril de vía.

La solución total de la ecuación 2.6 se obtiene mediante la combinación de la respuesta en vibraciones libres, es decir, $p(x, t) = 0$ y la respuesta en vibraciones forzadas, cuando $p(x, t)$ es aplicada.

2.2.2. Vibraciones libres

En este caso se trata de resolver la ecuación 2.6, donde se considera que $p(x, t) = 0$:

$$\frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} = a^2 \frac{\delta^4 u(x, t)}{\delta x^4} \quad (2.7)$$

Donde:

$$a = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Para poder resolver la ecuación se aplica el método de separación de variables. Para ello se define el movimiento de la viga como:

$$u(x, t) = U(x)\phi(t) \quad (2.8)$$

En dicha expresión se puede ver que el parámetro $U(x)$ depende solo de la posición (x) y $\phi(t)$ solo depende del tiempo. Por tanto, aplicando la ecuación 2.8 a cada término de la ecuación 2.7 se obtiene:

$$\frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} = U(x) \frac{\phi^2(t)}{\delta t^2} = U(x) \ddot{\phi}(t) \quad (2.9)$$

$$\frac{\delta^4 u(x, t)}{\delta x^4} = \frac{d^4 U(x)}{dx^4} \phi(t) = U^{iv}(x) \phi(t) \quad (2.10)$$

Finalmente, sustituyendo 2.9 y 2.10 en la expresión 2.7:

$$U(x) \ddot{\phi}(t) = -a^2 U^{iv}(x) \phi(t) \Rightarrow \frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = -a^2 \frac{U^{iv}(x)}{U(x)} = -\omega^2 \quad (2.11)$$

Donde ω es una constante que se puede obtener:

$$\ddot{\phi}(t) + \omega^2 \phi(t) = 0 \quad (2.12)$$

$$U^{iv}(x) - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 U(x) = 0 \Rightarrow U^{iv}(x) - \lambda^4 U(x) = 0 \quad (2.13)$$

Donde el parámetro λ es:

$$\lambda^4 = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

La solución de la ecuación en el tiempo, 2.12, se encuentra dada por la expresión:

$$\phi(t) = \phi_1 \cos \omega t + \phi_2 \sin \omega t \quad (2.14)$$

Donde las constantes ϕ_1 y ϕ_2 se determinan mediante las condiciones iniciales del sistema, que son, en general, el valor del desplazamiento $u_0(x)$ y de la velocidad $\dot{u}_0(x)$ para un instante de tiempo $t=0$.

Mientras que la ecuación en el espacio, 2.13, se asume la forma:

$$U(x) = C e^{kx} \quad (2.15)$$

Donde C y k son constantes. Por tanto, sustituyendo en la ecuación 2.13, se obtiene:

$$k^4 - \lambda^4 = 0 \quad (2.16)$$

Donde los valores de k son raíces complejas de la forma:

$$k_{1,2,3,4} = \pm\lambda \pm i\lambda \quad (2.17)$$

Obteniendo así, la solución en el dominio del espacio:

$$U(x) = C_1' e^{\lambda x} + C_2' e^{-\lambda x} + C_3' e^{i\lambda x} + C_4' e^{-i\lambda x} \quad (2.18)$$

O, mediante transformaciones, como:

$$U(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x \quad (2.19)$$

Donde C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son constantes determinadas mediante las condiciones de contorno en los extremos de la viga.

Finalmente, la solución sería de la forma:

$$u(x, t) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x) (\phi_1 \cos \omega t + \phi_2 \sin \omega t) \quad (2.20)$$

Las condiciones de contorno más comunes para obtener las constantes en los carriles ferroviarias son las que se muestran a continuación:

Condiciones de Contorno		Expresión matemática	
Extremo	Desplazamiento	$u(x, t) _{x_{extremo}} = 0$	
Fijo	nulo		
	Giro nulo	$\theta(x, t) _{x_{extremo}} = 0$	$\left. \frac{\delta u(x, t)}{\delta x} \right _{x_{extremo}} = 0$
Extremo	Momento nulo	$M(x, t) _{x_{extremo}} = 0$	$\left. \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} \right _{x_{extremo}} = 0$
Libre			
	Cortante nulo	$M(x, t) _{x_{extremo}} = 0$	$\left. \frac{\delta^3 u(x, t)}{\delta x^3} \right _{x_{extremo}} = 0$

Tabla 2.1 Condiciones de contorno habituales en el modelado de carriles ferroviarios

A continuación, se aplican las diversas condiciones mostradas en la tabla 2.1 para los casos de viga libre y viga biarticulada.

2.2.3. Viga Libre: Modos de vibración y frecuencias naturales

Este apartado se caracteriza porque la viga en sus extremos no posee oposición alguna al movimiento, es decir, se encuentran libres. Estas condiciones imponen que en sus extremos tanto el cortante como el momento flector sean considerados nulos. Lo cual empleando las expresiones localizadas en la tabla 2.1 se expresa:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} \right|_{x=0} = 0 & \quad \left. \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} \right|_{x=L} = 0 \\ \left. \frac{\delta^3 u(x, t)}{\delta x^3} \right|_{x=0} = 0 & \quad \left. \frac{\delta^3 u(x, t)}{\delta x^3} \right|_{x=L} = 0 \end{aligned}$$

De las cuatro condiciones de contorno, considerando la separación de variables y 2.19, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\lambda L) & -\sin(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sinh(\lambda L) \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \sin(\lambda L) & -\cos(\lambda L) & \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

De este sistema se pueden extraer tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_3 \\
C_2 &= C_4 \\
C_2 &= \frac{\cosh(\lambda L) - \cos(\lambda L)}{\sin(\lambda L) - \sinh(\lambda L)} C_1
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Y, además, de este sistema se obtienen dos soluciones:

- La primera es la trivial, es decir, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ y se tendría que $U(x) = 0$, lo que indicaría que la viga no se mueve.
- La segunda se obtiene imponiendo la condición de que el determinante sea nulo. Con esta condición se obtiene la cuarta ecuación necesaria para resolver el sistema, esta ecuación es denominada como ecuación característica del sistema.

$$\cos(\lambda_n L) \cosh(\lambda_n L) = 1 \tag{2.23}$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones $n = 1, 2, \dots, \infty$ siendo λ_n la longitud de onda correspondiente a la n-ésima solución.

Entonces, para cada solución de la ecuación 2.23, se obtiene un modo natural de vibración $U_n(x)$ correspondiente a la longitud de onda, cuya expresión es:

$$U_n(x) = C_n(\cos(\lambda_n x) + \cosh(\lambda_n x) + C_n^*(\sin(\lambda_n x) + \sinh(\lambda_n x))) \tag{2.24}$$

Siendo $C_n = C_1$ en la ecuación 2.19 y C_n^* es el cociente C_2/C_1 de la tercera de las ecuaciones 2.22.

En la figura 2.2 se han representado los primeros modos naturales de vibración de la flexión lateral de una viga, y hay que tener en cuenta que los modos de vibración son ortogonales entre sí, lo cual se describe mediante las siguientes ecuaciones:

$$\int_0^L U_n(x)U_m(x)dx = C_n^2 L \text{ si } n = m \tag{2.25}$$

$$\int_0^L U_n(x)U_m(x)dx = 0 \text{ si } n \neq m \tag{2.26}$$

El valor C_n es arbitrario para cada modo natural de vibración. Este valor se define de tal manera que cada modo quede normalizado respecto a la masa por unidad de longitud de la viga. Esta condición se expresa:

$$\int_0^L U_n^2(x) dx = C_n^2 L = \frac{1}{\rho A} \quad (2.27)$$

Despejando C_n se obtiene:

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{\rho A L}} \quad (2.28)$$

Por tanto, los modos naturales de vibración normalizados, empleando 2.27 y 2.24, se estructuran de la siguiente manera:

$$U_n(x) = \frac{\cos(\lambda_n x) + \cosh(\lambda_n x) + C_n^*(\sin(\lambda_n x) + \sinh(\lambda_n x))}{\sqrt{\rho A L}} \quad (2.29)$$

Asociado a cada modo de vibración existe una frecuencia natural de vibración ω_n , la cual se determina a partir de la longitud de onda λ_n asociada.

$$\lambda_n^4 = \frac{\omega_n^2}{a^2} = \frac{\rho A \omega_n^2}{EI} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \lambda_n^2 \quad (2.30)$$

El valor de la longitud de onda λ_n asociado al modo n-ésimo de vibración lateral de vigas depende exclusivamente de la longitud de la viga y de las condiciones de contorno de los extremos de la misma. Mientras que, el valor de la frecuencia natural ω_n asociada a cada longitud de onda también depende de las propiedades mecánicas de la viga.

Los cinco primeros modos de vibración lateral de una viga de Euler-Bernoulli pueden observarse en la Figura 2.2. Los dos primeros modos corresponden a los movimientos de cuerpo rígido y el resto a las vibraciones laterales debidas a la flexión. En la representación se han considerado unitarias tanto la longitud como la masa por unidad de longitud.

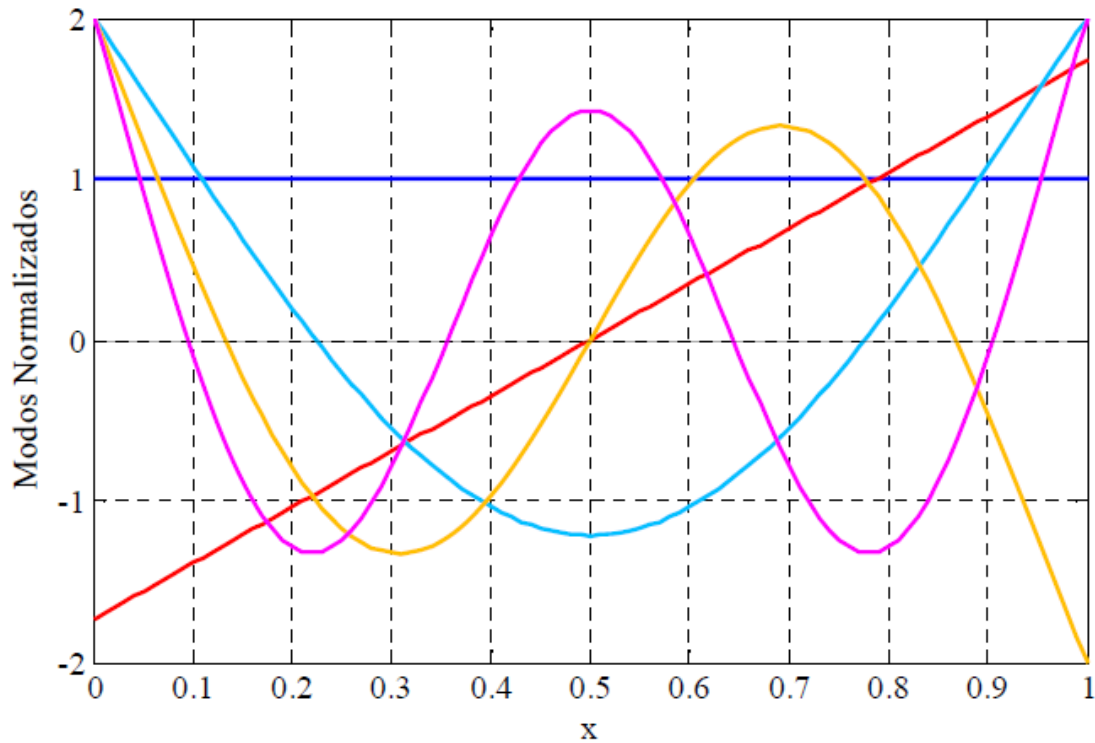


Figura 2.2 Representación de los cinco primeros modos de vibración lateral de una viga de Euler-Bernoulli

2.2.4. Viga biarticulada: Modos de vibración y frecuencias naturales

Esta disposición de vigas se particulariza por disponer de sus dos extremos apoyados en articulaciones. Esto implica que en los extremos de la viga el desplazamiento es nulo, al igual que los momentos flectores, como se expresó en la tabla 2.1.

$$\begin{aligned}
 u(x, t)|_{x=0} &= 0 & u(x, t)|_{x=L} &= 0 \\
 \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} \Big|_{x=0} &= 0 & \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} \Big|_{x=L} &= 0
 \end{aligned}$$

Realizándose la derivada la ecuación característica y sustituyendo en ella las condiciones de contorno se tiene:

$$U(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = 0$$

$$U(L) = 0 \Rightarrow C_1 \cos(\lambda L) + C_2 \sin(\lambda L) + C_3 \cosh(\lambda L) + C_4 \sinh(\lambda L) = 0$$

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow -C_1 \cos(\lambda L) - C_2 \sin(\lambda L) + C_3 \cosh(\lambda L) + C_4 \sinh(\lambda L) = 0$$

$$\left. \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow -C_1 + C_3 = 0$$

Lo cual expresado de manera matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sinh(\lambda L) \\ -\cos(\lambda L) & -\sin(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sinh(\lambda L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

De dicho sistema se extrae que:

$$C_1 = C_3 = C_4 = 0 \quad (2.32)$$

$$C_2 \sin(\lambda L) = 0 \quad (2.33)$$

Donde las raíces son:

$$\lambda_n L = n\pi \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.34)$$

Entonces, se pueden obtener los modos de vibración de la viga Euler-Bernoulli biarticulada, los cuales son:

$$U_n(x) = C_2 \sin(\lambda_n x) \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.35)$$

Una vez obtenidos los modos de vibración se pueden determinar las frecuencias naturales:

$$\begin{aligned} \lambda_n^4 &= \frac{n^4 \pi^4}{L^4} = \frac{\omega^2}{a^2} = \frac{\rho A \omega_j^2}{EI} \\ &\Downarrow \\ \omega_n &= n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.2.5. Respuesta forzada de la viga de Euler-Bernoulli

La segunda parte de la solución de la ecuación diferencial de movimiento es la respuesta particular. Esta se obtiene considerando las vibraciones forzadas, es decir, $P(x, t) \neq 0$. Retomando la ecuación 2.6:

$$p(x, t) - EI(x) \frac{\delta^4 u(x, t)}{\delta x^4} = \rho A(x) \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} \Rightarrow EI \frac{\delta^4 u(x, t)}{\delta x^4} + \rho A \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} = p(x, t)$$

Esta solución se obtiene empleando el principio de superposición modal, donde se asume que la deformada de la viga es conocida. Por tanto, empleando el método de separación de variables se obtiene:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \phi_n(t) \quad (2.37)$$

Se multiplica a ambos miembros de la ecuación 2.6 por el desplazamiento virtual δu y se integra a lo largo de toda la longitud de la viga se tiene:

$$\int_0^L \left(\rho A \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \delta u + \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(EI \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right) \delta u \right) dx \quad (2.38)$$

Teniendo en cuenta que $\delta u(x, t) = U_n \delta \phi_n$ y empleando el método de separación de variables 2.30 se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(\rho A \left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k \ddot{\phi}_k \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n \delta \phi_n \right) + \left(EI \left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k'' \phi_k \right) \right)'' \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n \delta \phi_n \right) \right) dx \\ &= \int_0^L p(x, t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n \delta \phi_n \right) dx \\ & \int_0^L \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \rho A U_k U_n \ddot{\phi}_k \delta \phi_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (EI U_k'' \phi_k)'' U_n \delta \phi_n \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L p(x, t) U_n \delta \phi_n dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\int_0^L \rho A U_k U_n \right) \ddot{\phi}_k \delta \phi_n + \left(\int_0^L (EI U_k'')'' U_n dx \right) \phi_k \delta \phi_n \right) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L p(x, t) U_n dx \right) \delta \phi_n \end{aligned}$$

Aplicando la ortogonalidad a los modos de vibración:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\int_0^L \rho A U_n^2 dx \right) \ddot{\phi}_n \delta \phi_n + \left(\int_0^L EI U_n'' \right) \phi_n \delta \phi_n \right) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L p(x, t) U_n dx \right) \delta \phi_n \end{aligned} \quad (2.39)$$

Y tomando como la masa modal $m_n = \int_0^L \rho A U_n^2 dx$, la rigidez modal $K_n = \int_0^L EI U_n'' dx$ y la fuerza modal $Q_n = \int_0^L p(x, t) U_n dx$ se llega a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (m_n \ddot{\phi}_n + K_n \phi_n - Q_n) \delta \phi_n = 0 \quad (2.40)$$

Por tanto, como las coordenadas δU_n son independientes se obtiene:

$$m_n \ddot{\phi}_n + K_n \phi_n = Q_n \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.41)$$

Es decir, se ha llegado a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden desacoplado. Dicho sistema se resolverá para cada modo de vibración, y la solución completa al sistema será la suma de la homogénea y la particular.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \phi_n(t) \quad (2.42)$$

Donde, $U_n(x)$ es conocida a partir de las condiciones de contorno, y $\phi_n(t)$ se determina a partir de la suma de la solución homogénea y particular $\phi = \phi_h + \phi_p$.

2.3. Rayleigh

Esta segunda teoría de vigas es una clara evolución respecto al análisis del comportamiento de las vigas de la teoría de Euler-Bernoulli. El motivo de esta evolución es que Rayleigh sí que considera la inercia rotatoria de la sección transversal. Esta teoría se fundamenta en tres hipótesis:

- Deformaciones pequeñas.
- Las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje neutro durante el movimiento.
- Las fibras longitudinales no se comprimen mutuamente.

2.3.1. Ecuación de movimiento

La hipótesis inicial para realizar el desarrollo de la ecuación de movimiento parte de una pequeña deformación en la viga, lo que implica que la rotación de la sección en relación al eje transversal se pueda definir como:

$$\alpha = \frac{\delta u}{\delta x} \quad (2.43)$$

lo que determina que el momento de inercia rotatorio definido por Rayleigh es igual a $\rho I_z \ddot{\alpha}$, donde I_z es el momento de inercia del área de la sección transversal.

Teniendo en cuenta la ecuación 2.3 e introduciendo el término de la inercia rotatoria se tiene que:

$$\frac{\delta M}{\delta x} - V = \rho I_z \frac{\delta^2 \alpha}{\delta t^2} = \rho I_z \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta t^2} \quad (2.44)$$

Sustituyendo en la expresión 2.2 se obtiene:

$$\rho A \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = -\frac{\delta^2 M}{\delta x^2} + \rho I_z \frac{\delta^4 u}{\delta x^2 \delta t^2} + p(x, t) \quad (2.45)$$

Y teniendo en cuenta la ecuación 2.5 se tiene:

$$\rho A \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = -\frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(EI_z \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right) + \rho I_z \frac{\delta^4 u}{\delta x^2 \delta t^2} + p(x, t) \quad (2.46)$$

Siendo esta ecuación conocida como la ecuación de Rayleigh, en la que el segundo término del lado derecho represente el efecto de la inercia rotatoria de la sección transversal.

2.3.2. Vibraciones libres

Al igual que sucedía con la ecuación de Euler-Bernoulli, la solución total para esta ecuación se compone de la respuesta a vibraciones libres, es decir, cuando $p(x, t) = 0$, y la respuesta en vibraciones forzadas cuando $p(x, t) \neq 0$. La ecuación homogénea de Rayleigh es de la forma:

$$\rho A \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = -\frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(EI_z \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right) + \rho I_z \frac{\delta^4 u}{\delta x^2 \delta t^2} \quad (2.47)$$

El siguiente paso consiste en aplicar la separación de variables, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \rho A U(x) \ddot{\phi}(t) &= -U^{iv}(x) \phi(t) EI + \rho I_z \ddot{\phi}(t) \ddot{U}(x) \\ \ddot{\phi}(t) \left(U(x) - \frac{I_z}{A} \ddot{U}(x) \right) + a^2 U^{iv}(x) \phi(t) &= 0 \quad \text{siendo } a^2 = \frac{EI}{\rho A} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\ddot{\phi}(t) \frac{1}{\phi(t)} = -a^2 \frac{\delta^2 U(x)}{\delta x^2} \left(\frac{1}{U(x) - \frac{I_z}{A}} \frac{\delta^2 U(x)}{\delta x^2} \right) = -\omega^2 \quad (2.49)$$

De esta forma se tiene:

$$\ddot{\phi}(t) + \omega^2 \phi(t) = 0 \quad (2.50)$$

Cuya solución es igual a la Teoría de vigas de Euler-Bernoulli:

$$\phi(t) = \phi_1 \sin(\omega t) + \phi_2 \cos(\omega t) \quad (2.51)$$

Donde ϕ_1 y ϕ_2 son constantes a determinar mediante las condiciones iniciales del sistema. Mientras que la respuesta espacial es de la siguiente manera:

$$U^{iv}(x) + \lambda^4 \frac{I_z}{A} \ddot{U}(x) - \lambda^4 U(x) = 0 \quad \text{siendo} \quad \lambda^4 = \frac{\omega^2}{a^2} \quad (2.52)$$

La solución para este caso es de la forma $U(x) = Ce^{kx}$; por tanto, derivando dicha expresión y sustituyendo en 2.52 se obtiene:

$$Ck^4 e^{kx} + \lambda^4 k^2 e^{kx} C \frac{I_z}{A} - \lambda^4 C e^{kx} = 0 \quad (2.53)$$

$$\left(k^4 + \lambda^4 k^2 \frac{I_z}{A} - \lambda^4 \right) C e^{kx} = 0 \quad (2.54)$$

Efectuando un cambio de variable $k^2 = z$, para obtener una ecuación de segundo orden, se tiene:

$$z^2 + \lambda^4 \frac{I_z}{A} z - \lambda^4 = 0 \quad (2.55)$$

Cuya solución es de la forma:

$$z = \frac{-\lambda^4 \frac{I_z}{A} \pm \sqrt{\left(\lambda^4 \frac{I_z}{A}\right)^2 + 4\lambda^4}}{2} \quad (2.56)$$

Teniendo en cuenta el cambio de variable se obtiene que $k = \pm\beta, \pm i\beta$, con una solución de la forma:

$$U(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x) \quad (2.57)$$

Con lo que la solución final para la ecuación de Rayleigh, es la siguiente:

$$u(x, t) = (C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x))(\phi_1 \sin(\omega t) + \phi_2 \cos(\omega t)) \quad (2.58)$$

2.3.3. Viga biarticulada: Modos de vibración y frecuencias naturales

Como sucedió con la teoría de viga de Euler-Bernoulli, se va a realizar el estudio de la viga de Rayleigh bajo las condiciones de contorno de biarticulación. Estas condiciones son, como se podía apreciar en la tabla 2.1:

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= 0 & u(x, t)|_{x=L} &= 0 \\ \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} \Big|_{x=0} &= 0 & \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned}$$

Realizando el mismo procedimiento que en los apartados 2.2.3 y 2.2.4 que implica derivar la ecuación 2.57 y sustituir las condiciones de contorno de biarticulación, se llega a un sistema de ecuaciones del cual se extrae que los modos de vibración para este tipo de viga son de la forma:

$$U_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.59)$$

Una vez obtenidos los modos de vibración se pueden obtener las frecuencias naturales asociadas:

$$\omega_n^2 = \frac{EI_z \frac{(n\pi)^4}{2L^3}}{\rho A \frac{L}{2} + \rho I_z \frac{(n\pi)^2}{2L}} \quad (2.60)$$

2.3.4. Respuesta forzada de la viga de Rayleigh

Para obtener la solución particular de la ecuación, es decir, $p(x, t) \neq 0$, se emplea el principio de superposición modal, en el que se asume que la curva deformada es conocida, siendo la suma de los distintos modos de vibración.

$$u(x, t) = \sum_{n=-1}^{\infty} U_n(x)\phi_n(t) \quad (2.61)$$

Donde $U_n(x)$ es el modo natural n-ésimo de vibración y $\phi_n(t)$ la coordenada modal del modo natural n-ésimo de vibración. Introduciendo la expresión 2.46 en la ecuación de Rayleigh se llega a:

$$\rho A \sum_{n=-1}^{\infty} U_n(x) \frac{d^2 \phi_n(t)}{dt^2} + EI_z \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{d^4 U_n(x)}{dx^4} \phi(t) + \rho I_z \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{d^4 U_n(x)}{dx^4} \frac{d^2 \phi_n(t)}{dt^2} = p(x, t) \quad (2.62)$$

Esta ecuación se transforma en un sistema de ecuaciones desacoplado. Para ello se multiplican ambos miembros de la ecuación 2.62 por $U_m(x)$, se integran ambos miembros a lo largo de la longitud de la viga y se aplican las condiciones de ortogonalidad de los modos de vibración. Tras realizar estos pasos se obtiene:

$$\frac{d^2 \phi_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 \phi_n(t) = P_n(t) \quad n = -1, 0, 1, \dots, \infty \quad (2.63)$$

Donde $P_n(t)$ es la fuerza correspondiente a la coordenada modal $\phi_n(t)$ y se define como:

$$P_n(t) = \int_0^L p(x, t) U_n(x) dx \quad (2.64)$$

Debido al caso particular de este trabajo, las fuerzas transmitidas entre los componentes modelados como vigas se pueden considerar, sin sufrir una pérdida notable de precisión, como fuerzas puntuales aplicadas en puntos discretos. De manera que la fuerza modal se puede definir como:

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{N_f} p_i(t) U_n(x_i) \quad (2.65)$$

Siendo N_f el número de fuerzas puntuales que actúan sobre la viga y $p_i(t)$ la fuerza puntual aplicada sobre el punto x_i .

Resolviendo cada una de las ecuaciones 2.63 se obtiene la solución total en base a las soluciones dadas por la ecuación 2.61.

El objetivo que se persigue es poder simplificar el modelado de la vía y aplicar técnicas de subestructuración, por ello se emplea la técnica de truncamiento modal. En esta técnica se consideran un número determinado de modos de vibración para la representación de la respuesta de la viga.

$$u(x, t) = \sum_{n=-1}^{N_m} U_n(x) \phi_n(t) \quad (2.66)$$

2.4. Timoshenko

Esta teoría considera tanto los efectos del esfuerzo cortante como la inercia rotatoria que se dan debido al giro de la sección recta de una viga. Con esto Timoshenko mostro que la corrección frente a cortante es cuatro veces más importante debido a la inercia de rotación en comparación con la teoría de Euler-Bernoulli. Esta teoría se puede aplicar en análisis de comportamiento de vigas en los que las fuerzas de excitación estén en el rango de 1,5 kHz y 2 kHz, el cual es un rango considerablemente superior al resto de vigas.

Las principales hipótesis realizadas son:

- El material es homogéneo, isotrópico y lineal elástico.
- El desplazamiento vertical w de los puntos que se localizan sobre la sección transversal del elemento en una posición x , son pequeños e iguales a los desplazamientos del eje de la viga.
- La sección transversal del elemento en una posición x normal al eje de la viga antes de la deformación, permanece plana pero no necesariamente ortogonal al eje del elemento después de la deformación.

2.4.1. Ecuación de movimiento

Como se puede visualizar en la figura 2.3, el elemento diferencial se encuentra sometido a flexión en el plano $x - u$, se le aplica a la vez una fuerza por unidad de longitud $p(x, t)$. Siendo $M(x, t)$ el momento flector y $V(x, t)$ la fuerza cortante.

Timoshenko interpreta que la deflexión lateral de la viga $u(x, t)$ se encuentra compuesta por una componente asociada a flexión $u_m(x, t)$ y por otra componente causada por la fuerza cortante $u_s(x, t)$, de manera que se tiene:

$$u(x, t) = u_m(x, t) + u_s(x, t) \quad (2.67)$$

Se va a denotar por ψ al giro producido por el momento flector y β al giro producido por el cortante.

$$\psi(x, t) = \frac{\delta u_m(x, t)}{\delta x} \quad (2.68)$$

$$\beta(x, t) = \frac{\delta u_s(x, t)}{\delta x} \quad (2.69)$$

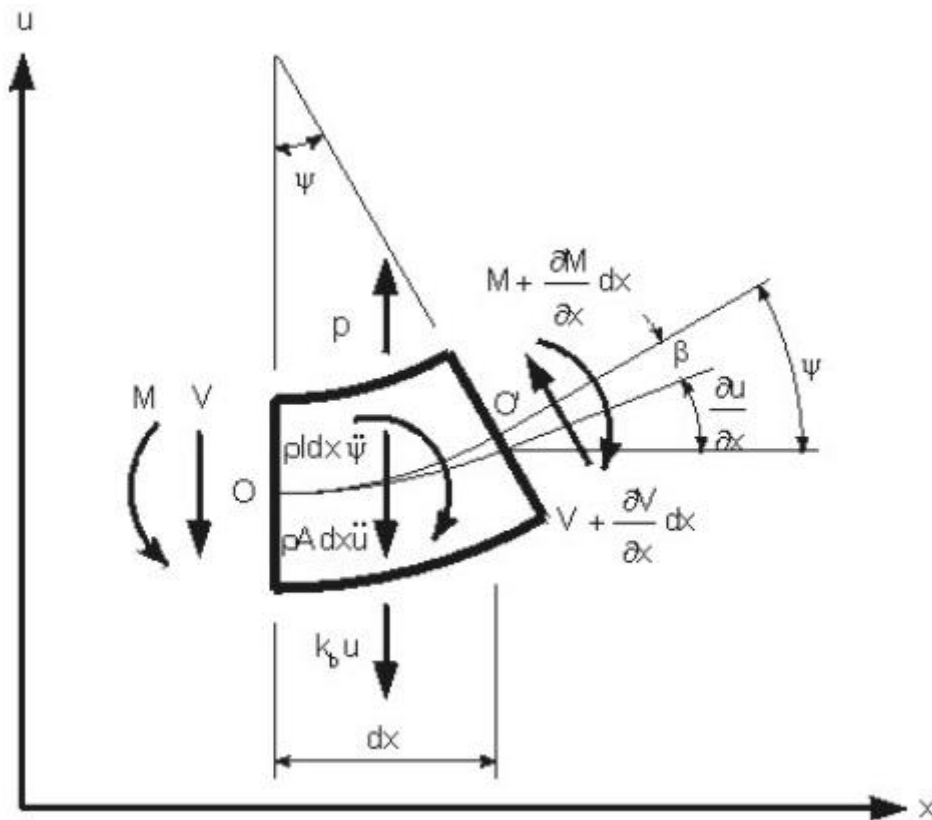


Figura 2.3 Diagrama de sólido libre de un elemento diferencial de una viga sometida a flexión

Partiendo de la teoría elemental de flexión, se tiene un momento flector y una fuerza cortante los cuales se relacionan con la deflexión lateral de la viga y el giro debido al flector según las siguientes expresiones:

$$M(x, t) = -EI \frac{\delta^2 u_m(x, t)}{\delta x^2} = -EI \frac{\delta \psi(x, t)}{\delta x} \quad (2.70)$$

$$V(x, t) = k'GA \frac{u_s(x, t)}{\delta x} = K'GA \left(\frac{\delta u(x, t)}{\delta x} - \psi(x, t) \right) \quad (2.71)$$

En las cuales, k' es un factor numérico que depende de la forma de la sección lateral de la viga, A es el área de la sección, G es el módulo de rigidez transversal, E es el módulo de Young e I es la inercia de la sección respecto del eje normal del plano a flexión.

Por tanto, la ecuación diferencial para la rotación de un elemento será ahora:

$$\rho A \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} dx - \frac{\delta V(x, t)}{\delta x} dx = p(x, t) dx \quad (2.72)$$

$$-V(x, t)dx + \frac{\delta M(x, t)}{\delta x} dx - \rho I \frac{\delta^2 \psi(x, t)}{\delta t^2} dx = 0 \quad (2.73)$$

Donde ρ es la densidad del material. La fuerza de inercia de traslación que actúa en el elemento diferencia es $\rho A dx \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2}$ y $\rho I \frac{\delta^2 \psi(x, t)}{\delta t^2} dx$ es el par de inercia de rotación en el plano $x - u$.

Sustituyendo las ecuaciones 2.71 en 2.72 y 2.70 junto a 2.71 en 2.73 se obtiene respectivamente:

$$\rho A \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} - k' GA \left(\frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 \psi(x, t)}{\delta x} \right) = p(x, t) \quad (2.74)$$

$$EI \frac{\delta^2 \psi(x, t)}{\delta x^2} - k' GA \left(\frac{\delta u(x, t)}{\delta x} - \psi(x, t) \right) - \rho I \frac{\delta^2 \psi(x, t)}{\delta t^2} = 0 \quad (2.75)$$

Este sistema de ecuaciones, en el cual mediante las condiciones iniciales y las de contorno, se puede obtener la solución de la vibración de flexión lateral de la viga. Si se considera $p(x, t) = 0$ y se combinan las dos ecuaciones, eliminando $\psi(x, t)$, se obtiene una ecuación diferencial completa para vibraciones transversales con una sola incógnita, $u(x, t)$:

$$EI \frac{\delta^4 u(x, t)}{\delta x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{K'G} \right) \frac{\delta^4 u(x, t)}{\delta x^2 \delta t^2} + \frac{\rho^2 I}{K'G} \frac{\delta^4 u(x, t)}{\delta t^4} + \rho A \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} = 0 \quad (2.76)$$

Siendo esta la ecuación de la viga de Rayleigh-Timoshenko.

2.4.2. Vibraciones libres

Aplicando el método de separación de variables, la solución a la ecuación de Timoshenko es:

$$u(x, t) = U(x, t)(\phi_1 \cos(\omega t) + \phi_2 \sin(\omega t)) \quad (2.77)$$

Sustituyendo esta expresión en 2.76 se tiene:

$$EIU^{iv}(x) - \rho I \left(1 + \frac{E}{K'G}\right) \dot{U}(x)\ddot{\phi}(t) + \frac{\rho^2 I}{K'G} \phi^{iv}(t)U(x) + \rho A \ddot{\phi}(t)U(x) = 0 \quad (2.78)$$

La aplicación de esta ecuación permitirá determinar las frecuencias naturales en el siguiente apartado.

2.4.3. Viga biarticulada: Modos de vibración y frecuencias naturales

Al igual que con las dos vigas anteriores, se va a analizar la viga de Rayleigh-Timoshenko bajo las condiciones de contorno de biarticulación. En función de la tabla 2.1, las condiciones son:

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= 0 & u(x, t)|_{x=L} &= 0 \\ \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} \Big|_{x=0} &= 0 & \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el mismo procedimiento que en los apartados 2.2.3 y 2.2.4, en los cuales se deriva la ecuación que describe el movimiento de la viga y se sustituyen las condiciones de contorno de biarticulación, se obtienen los modos de vibración para una viga de Rayleigh-Timoshenko biarticulada:

$$u_n(x, t) = \left(\sin \frac{n\pi x}{L}\right) (\phi_1 \cos(\omega t) + \phi_2 \sin(\omega t)) \quad (2.79)$$

Sustituyendo la ecuación 2.79 en la ecuación 2.76, se puede obtener la siguiente ecuación para determinar las frecuencias naturales:

$$a^2 \frac{n^4 \pi^4}{L^4} - \omega_n^2 - \omega_n^2 \frac{n^2 \pi^2 r_g^2}{L^2} - \omega_n^2 \frac{n^2 \pi^2 r_g^2}{L^2} \frac{E}{k'G} + \frac{r_g \rho}{k'G} \omega_n^4 = 0 \quad (2.80)$$

Donde el término $r_g^2 = \frac{I}{A}$.

Considerando solo los dos primeros términos de esta ecuación se tiene:

$$\omega_n = a \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \frac{a \pi^2}{\lambda_n^2} \quad (2.81)$$

En la cual $\lambda_n = \frac{L}{n}$ es la longitud de onda para cada modo de vibración. Este resultado coincide con el de la ecuación de las frecuencias naturales de la viga de Euler-Bernoulli.

Para poder obtener las frecuencias naturales teniendo en cuenta el efecto de las deformaciones, se deberá tener en cuenta todos los términos de la ecuación 2.80. Pero sustituyendo la expresión 2.81 por ω_n en el último término de esta ecuación, se muestra que este término es pequeño en comparación con $\pi^2 r_g^2 / \lambda_n^2$. Eliminando el último término, se tiene:

$$\omega_n = \frac{a\pi^2}{\lambda_n^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 r_g^2}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \right] \quad (2.82)$$

Los cinco primeros modos de vibración de una viga de Rayleigh-Timoshenko pueden ser apreciados en la figura 2.4. Los dos primeros modos corresponden a los movimientos de cuerpo rígido, los cuales coinciden con los de la viga de Euler-Bernoulli. Los modos expuestos han sido normalizados respecto a las características inerciales de la viga.

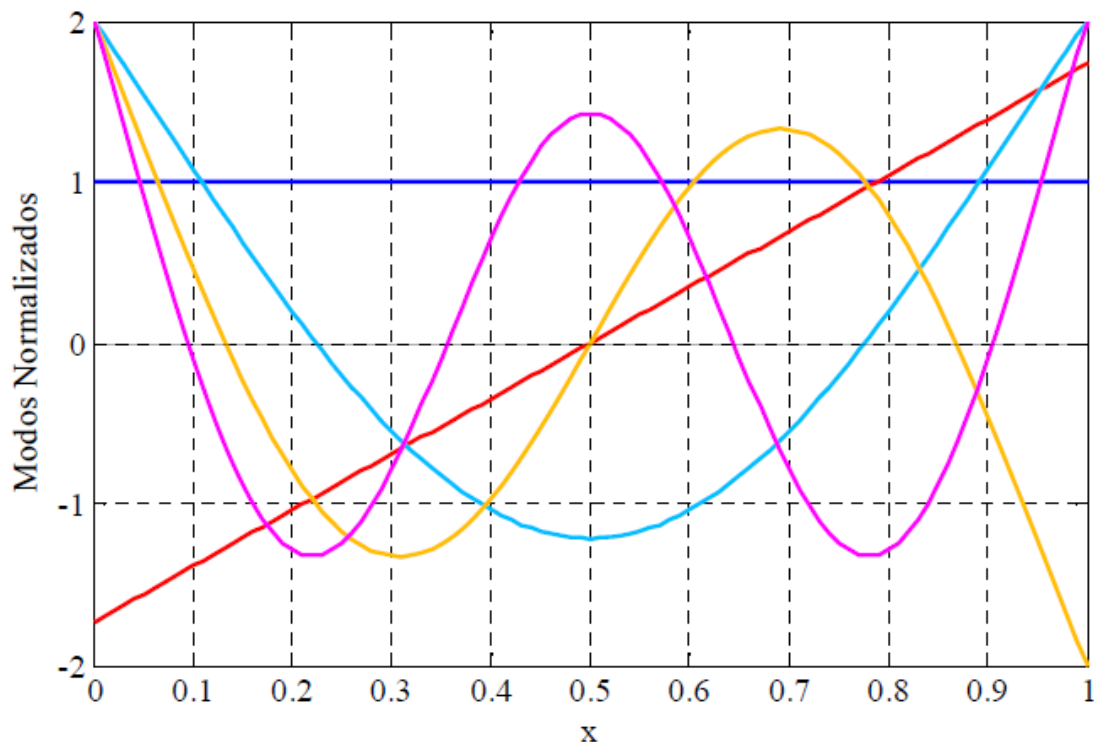


Figura 2.4 Representación de los cinco primeros modos de vibración lateral de una viga de Rayleigh-Timoshenko

2.4.4. Respuesta forzada de la viga de Rayleigh-Timoshenko

La respuesta a vibraciones forzadas, $p(x, t) \neq 0$, se determina mediante el uso del principio de superposición modal. De esta forma, tanto la curva de la deformada de la viga $u(x, t)$ como el giro de la sección recta $\psi(x, t)$, se expanden en un sumatorio de sus correspondientes modos naturales de vibración determinados con la solución a respuesta libre, obteniéndose las siguientes expresiones:

$$u(x, t) = \sum_{n=-1}^{\infty} U_n(x)\phi_n(t) \quad (2.83)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{n=-1}^{\infty} \psi_n(x)\phi_n(t) \quad (2.84)$$

Siendo $\phi_n(t)$ la n -ésima coordenada modal. Sustituyendo las ecuaciones 2.83 y 2.84 en las ecuaciones 2.74 y 2.75 se tiene:

$$\rho A \sum_{n=-1}^{\infty} U_n(x) \frac{d^2 \phi_n(t)}{dt^2} = p(x, t) + \sum_{n=-1}^{\infty} \phi_n(t) k' GA \left(\frac{d^2 U_n(x)}{dx^2} - \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right) \quad (2.85)$$

$$\rho I \sum_{n=-1}^{\infty} \psi_n(x) \frac{d^2 \phi_n(t)}{dt^2} = \sum_{n=-1}^{\infty} \phi_n(t) \left(EI \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + k' GA \left(\frac{dU_n(x)}{dx} - \psi_n(x) \right) \right) \quad (2.86)$$

Por otro lado, el empleo de los modos naturales de vibración conlleva las siguientes igualdades:

$$-\omega_n^2 \rho A U_n(x) = k' GA \left(\frac{d^2 U_n(x)}{dx^2} - \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right) \quad (2.87)$$

$$-\omega_n^2 \rho I \psi_n(x) = EI \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + k' GA \left(\frac{dU_n(x)}{dx} - \psi_n(x) \right) \quad (2.88)$$

Para $n = -1, 0, 1, \dots, \infty$ combinando las ecuaciones 2.87, 2.88, 2.89 y 2.90 y reordenándolas se llega a:

$$\rho A \sum_{n=-1}^{\infty} U_n(x) \frac{d^2 \phi_n(x)}{dt^2} + \rho A \sum_{n=-1}^{\infty} U_n(x) \omega_n^2 \phi_n(t) = p(x, t) \quad (2.89)$$

$$\rho I \sum_{n=-1}^{\infty} \psi_n(x) \frac{d^2 \phi_n(x)}{dt^2} + \rho I \sum_{n=-1}^{\infty} \psi_n(x) \omega_n^2 \phi_n(t) = 0 \quad (2.90)$$

Se multiplica 2.89 y 2.90 por $U_m(x)$ y $\psi_m(x)$ respectivamente, sumando ambas expresiones e integrando a lo largo de toda la longitud de la viga, se llega a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_n(t)}{dt^2} \int_0^L (\rho A U_n(x) U_m(x) + \rho I \psi_n(x) \psi_m(x)) dx \\ + \sum_{n=-1}^{\infty} \omega_n^2 \phi_n(t) \int_0^L (\rho A U_n(x) U_m(x) + \rho I \psi_n(x) \psi_m(x)) dx \\ = \int_0^L p(x, t) U_m(x) dx \end{aligned} \quad (2.91)$$

Las propiedades de ortonormalidad de los modos naturales de vibración de una viga de Timoshenko vienen definidas por:

$$\begin{aligned} \int_0^L (\rho A U_n(x) U_m(x) + \rho I \psi_n(x) \psi_m(x)) dx &= 0 \quad \text{si } n \neq m \\ \int_0^L (\rho A U_n(x) U_m(x) + \rho I \psi_n(x) \psi_m(x)) dx &= 1 \quad \text{si } n = m \end{aligned} \quad (2.92)$$

Donde se han considerado $C_n = \frac{1}{\sqrt{\rho A L I c_n}}$.

En consecuencia, se obtiene un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\frac{d^2 \phi_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 \phi_n(t) = P_n(t) \quad n = -1, 0, 1, \dots, \infty \quad (2.93)$$

Donde $P_n(t)$ es la fuerza modal correspondiente a la coordenada modal $\phi_n(t)$, viniendo definida por la siguiente expresión de fuerzas puntuales que se aplican en puntos discretos:

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{N_f} p_i(t)U_n(x_i) \quad (2.94)$$

Siendo N_f el número de fuerzas puntuales que actúan sobre la viga y $p_i(t)$ la fuerza puntual aplicada sobre el punto x_i . Resolviendo por separado cada una de las ecuaciones del sistema 2.93, la solución completa se obtiene a partir de las soluciones dadas por las ecuaciones 2.83 y 2.84.

Para poder simplificar el modelado del carril dentro de la técnica de subestructuración modal, se aplica la técnica de truncamiento modal. Esta técnica considera solamente un número finito de modos de vibración para la representación de la respuesta de la viga.

$$u(x, t) = \sum_{n=-1}^{N_m} U_n(x)\phi_n(t) \quad (2.95)$$

Capítulo 3

3D Moving Element Method

Índice

3.1.	Introducción	50
3.2.	Formulación del 3D Moving Element Method	51
3.3.	Planteamiento modal.....	57

3.1. Introducción

El objetivo fundamental de este proyecto consiste en la aplicación del modelo 3D Moving Element Method al análisis de la interacción vehículo – vía, con el cual se pueda extender el rango de validez por encima de 1,5 kHz. Este modelo establece una clara diferencia y pretende reemplazar a los modelos de teoría de vigas presentados en el apartado 2 del proyecto. Y es que, el MEM considera la deformación de las secciones transversales de la viga, lo que provoca un mayor realismo al modelo.

Este método considera una malla móvil de Elementos Finitos que se mueve con el vehículo, de modo que la masa del carril fluye con la velocidad del vehículo, pero en dirección opuesta a través de la malla. Por tanto, el MEM permite fijar el área de contacto en medio de una vía finitamente larga y refinar la malla solamente alrededor del área de contacto, donde las fuerzas y desplazamientos serán más significativos. Además, se adopta un enfoque modal para reducir el número de grados de libertad del sistema ferroviario, lo cual permite reducir sustancialmente el costo computacional.

Por tanto, el 3D Moving Element Method tiene dos factores principales:

- Finite Element Method (FEM).
- Sistemas de referencia eulerianos.

El FEM es una metodología que consiste en discretizar los elementos empleados en otros mucho más pequeños. Para ello, se emplean unas funciones de aproximación de interpolación polinómica que describen el comportamiento en diferentes tramos de los elementos

Estas funciones, más conocidas como funciones de forma, se seleccionan en función de los criterios que se necesiten, por ejemplo, para el caso de problemas elásticos se requiere que cumplan con continuidad C^0 entre las fronteras de los elementos, es decir, que las funciones sean continuas, lo cual facilita los cálculos y aumenta la precisión del método a medida que se incrementa el orden del polinomio empleado.

Mientras que, los sistemas de referencia eulerianos, se emplean para analizar el comportamiento dinámico de fluidos o elementos plásticos. Con ellos, se pretende visualizar un punto fijo en el espacio a través del cual fluye un fluido o un material y lo que se obtiene es la variación temporal de la característica física en el punto

fijo del espacio en base a los elementos que se suceden en cada instante de tiempo por dicho punto fijo de estudio.

Una de las características del empleo de este sistema es la aplicación de la derivada material.

$$\frac{D(*)}{Dt} = \frac{\delta(*)}{\delta t} + v\nabla(*) \quad (3.1)$$

Donde v es la velocidad del fluido, el primer término, denominado derivada local, se refiere a la variación de la propiedad en un punto fijo en el espacio y el segundo término, llamado derivada convectiva, es la variación de la propiedad asociada al cambio de posición de la partícula fluida.

3.2. Formulación del 3D Moving Element Method

Existen múltiples condiciones aplicadas en la implementación del MEM, como las que se aplicaron en el artículo [3], para el análisis del carril. Inicialmente, tanto para la aplicación del MEM como del FEM, se requiere cumplir:

$$\int_{Vol\ solido} f = \sum_{Element} \int_{Vol\ element} f \quad (3.2)$$

Es decir, la integral de la función f aplicada a todo el sólido debe ser igual a la suma de las integrales sobre los elementos finitos. Para que esto se cumpla se tienen que cumplir una serie de condiciones de continuidad. Una condición es que este método necesita, para satisfacer la ecuación 3.2, que f sea la segunda derivada de las funciones de forma. Por tanto, en el MEM se emplean funciones de forma cuadrática con continuidad C^0 entre elementos; y entonces, la ecuación 3.2 solo puede ser aplicada si el máximo orden de derivación es uno, lo cual implica que sea necesario realizar una integración por partes para obtener ordenes de derivación más bajos.

Para considerar en el modelo un carril infinito, sobre el cual se aplica una carga, se ha generado el carril a partir de la extrusión de una malla 2D aplicada sobre un perfil UIC60. Para simular el carril se imponen condiciones cíclicas de contorno sobre un tramo de carril finito. Sobre el carril se aplica un conjunto de fuerzas idénticas. Esas fuerzas se encuentran separadas a una distancia L , la cual es lo suficientemente grande para que los efectos que producen las cargas no

interaccionen entre sí y para que las velocidades en los extremos de vía con longitud L sean próximas a cero.

Este método emplea un sistema de coordenadas x_1, x_2 y x_3 que se mueve a una velocidad V . Se considera un vector de posición euleriano u definido a través del sistema de coordenadas x_1, x_2 y x_3 . El vector u define la posición de un punto espacial y no depende del tiempo.

El vector $w = w(u, t)$ corresponde con el vector desplazamiento de un punto material que ocupa la posición u en el instante t con respecto a la configuración no deformada. El vector posición del punto material es:

$$r = u + w(u, t) \quad (3.3)$$

La condición de límite cíclico se cumple si los desplazamientos en el borde izquierdo del modelo son iguales a los del borde derecho, es decir:

$$w((0, u_2, u_3)^T, t) = w((L, u_2, u_3)^T, t) \quad (3.4)$$

La velocidad y la aceleración del punto material son calculadas a través de la derivada material:

$$v = \frac{Dr}{Dt} = \frac{\partial r}{\partial t} - V \frac{\partial r}{\partial x_1} = (-V, 0, 0)^T + \dot{w} - V \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad (3.5)$$

$$a = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial T} - V \frac{\partial V}{\partial x_1} = \ddot{w} - 2V \frac{\partial \dot{w}}{\partial x_1} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \quad (3.6)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones anteriores, existen dos procedimientos para obtener la ecuación de movimiento del carril: mediante la aplicación de Trabajos virtuales o a través de la Ecuación de Lagrange.

Método 1: Trabajos Virtuales

El trabajo virtual asociado a las fuerzas de inercia es:

$$\delta W = \int_{Vol} \rho \delta w^T a dv = \int_{Vol} \rho \delta w^T \ddot{w} dv - 2V \int_{Vol} \rho \delta w^T \frac{\delta \dot{w}}{\delta x_1} dv + V^2 \int_{Vol} \rho \delta w^T \frac{\delta^2 w}{\delta x_1^2} dv \quad (3.7)$$

Como se mencionó anteriormente, la convergencia de la última integral no puede ser garantizada debido al tercer término, el cual contiene una segunda derivada del vector de desplazamiento, y se utilizan funciones de forma cuadrática con continuidad C^0 entre elementos. Por tanto, este término debe ser integrado por partes:

$$\int_{Vol} \rho \delta w^T \frac{\delta^2 w}{\delta x_1^2} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{Superf} \rho \delta w^T \frac{dw}{dx_1} dx_2 dx_3 - \int_{Vol} \rho \frac{\delta(\delta w^T)}{\delta x_1} \frac{\delta w}{\delta x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.8)$$

La integral de superficie solo se calcula sobre las superficies laterales correspondientes a los bordes del carril. Como se ha especificado, la longitud L es lo suficientemente larga para tener desplazamientos insignificantes en los bordes del modelo. Por tanto, el integrando es próximo a cero y la influencia de la integral superficial puede ser despreciada desde el punto de vista matemático. Con todo esto, se garantiza la convergencia de la ecuación, resultando:

$$\delta W = \int_{Vol} \rho \delta w^T \ddot{w} dv - 2V \int_{Vol} \rho \delta w^T \frac{\delta \dot{w}}{\delta x_1} dv + V^2 \int_{Vol} \rho \delta w^T \frac{\delta w}{\delta x_1} dv \quad (3.9)$$

Ahora se aplica la interpolación del método FEM. Considerando que la malla se desplaza con el sistema de referencia x_1, x_2 y x_3 y, consecuentemente, el carril fluye a través de ella se obtienen los desplazamientos en los volúmenes de cada e -th elemento Vol^e en los que se ha discretizado el carril, determinados a través de las funciones de forma:

$$w(u, t) = N^e(u) w^e(t) \quad si \quad U \in Vol^e \quad (3.10)$$

Siendo W^e los desplazamientos modales. Sustituyendo 3.10 en 3.9 se obtiene:

$$\delta W = \sum_e \delta w^{eT} \left(\int_{Vol^e} \rho N^{eT} N^e dv \ddot{w} - 2V \int_{Vol^e} \rho N^{eT} \frac{\delta N^e}{\delta x_1} dv \dot{w} + V^2 \int_{Vol^e} \rho \frac{\delta^2 N^{eT}}{\delta x_1} \frac{\delta N^e}{\delta x_1} dv w^e \right) \quad (3.11)$$

La matriz de rigidez K es la estándar, ya que la energía potencial asociada con la deformación elástica no distingue entre las coordenadas Eulerianas y Lagrangianas. En consecuencia, la ecuación de movimiento es:

$$M^e \ddot{w}^e - 2VC^e \dot{w}^e + (K^e - V^2 A^e) w^e = F^e \quad (3.12)$$

Donde las matrices de elementos corresponden a:

$$M^e = \int_{vol^e} \rho N^{eT} N^e dv \quad (3.13)$$

$$C^e = \int_{vol^e} \rho N^{eT} \frac{N^e}{\delta x_1} dv \quad (3.14)$$

$$A^e = \int_{vol^e} \rho \frac{N^{eT}}{\delta x_1} \frac{N^e}{\delta x_1} dv \quad (3.15)$$

La matriz C^e está asociada con la fuerza inercial debido a la velocidad convectiva, A^e está relacionada con la aceleración convectiva y F^e es el vector de fuerza que contiene las fuerzas de las placas de asiento y las fuerzas tangenciales procedentes de la interacción rueda-carril y que se encuentran aplicadas sobre la parte superior del carril, en la mitad de su superficie. Las coordenadas nodales se implementan en un vector de desplazamiento global w , obteniendo las matrices globales M, C, A, K y el vector global F.

Método 2: Ecuación de Lagrange

El segundo método para obtener la ecuación de movimiento del carril se basa en la aplicación de la Ecuación de Lagrange, considerando las funciones de forma que aparecen en la expresión 3.10. De forma que se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{w}^e} \right) - \frac{\delta L}{\delta w^e} = Q_c^e + Q^e \quad (3.16)$$

Como se puede apreciar, aparece la derivada material, la cual corresponde a: $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\delta}{\delta t} - V \frac{\delta}{\delta x_1}$. Por otro lado se tiene que $L = T - V$, siendo T la energía cinética y V la energía potencial. La expresión matemática de ambos términos para el caso que nos corresponde es:

$$\begin{aligned}
T^e &= \frac{1}{2} \int_{Vol} \rho \left(\frac{Dw(u, t)}{Dt} \right)^2 dv \\
&= \frac{1}{2} \rho \left(\dot{w}^{eT} \int_{Vol^e} N^{eT} N^e dv w^e - 2V \dot{w}^{eT} \int_{Vol^e} N^{eT} \frac{N^e}{\delta x_1} dv w^e \right. \\
&\quad \left. + V^2 \int_{Vol^e} \frac{N^{eT} N^e}{\delta x_1 \delta x_1} dv w^e \right) \quad (3.17)
\end{aligned}$$

$$V^e = \frac{1}{2} \int_{Vol} k w^2(u, t) dv = \frac{1}{2} \bar{k} w^{eT} \int_{Vol} N^{eT} N^e dv w^e \quad (3.18)$$

Sustituyendo las expresiones en los términos de la ecuación de Lagrange se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{w}^e} \right) &= \rho \left(\int_{Vol^e} N^{eT} N^e dv \dot{w} \hat{e} - 2V \int_{Vol^e} N^{eT} \frac{\delta N^e}{\delta x_1} dv \dot{w}^e \right) \\
&\quad + V^2 \left(\int_{Vol^e} \frac{\delta N^{eT}}{\delta x_1} \frac{\delta N^e}{\delta x_1} dv + \int_{Vol^e} N^{eT} \frac{\delta^2 N^e}{\delta x_1^2} dv \right) w^e \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Por otro lado, para el segundo término se tiene:

$$\frac{\delta L^e}{\delta w^e} = V^2 \rho \int_{Vol^e} \frac{\delta N^{eT}}{\delta x_1} \delta N^e \delta x_1 dv w^e \quad (3.20)$$

Teniendo además que:

$$\int_{Vol^e} N^{eT} \frac{\delta^2 N^e}{\delta x_1^2} dv = - \int_{Vol^e} \frac{\delta N^{eT}}{\delta x_1} \frac{\delta N^e}{\delta x_1} dv \quad (3.21)$$

Empleando desplazamientos virtuales para obtener Q_c^e se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta W_c^e &= - \int_{vol^e} \delta w^T c \frac{Dw}{Dt} dv \\
&= \bar{c} \left(\int_{vol^e} \delta w^{eT} N^{eT} N^e dv \dot{w}^e - V \int_{vol^e} \delta w^{eT} N^{eT} \frac{\delta N^e}{\delta x_1} dv w^e \right) \\
&= \delta w^{eT} Q_c^e
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$Q_c^e = -\bar{c} \left(\int_{vol^e} \delta w^{eT} N^{eT} N^e dv \dot{w}^e - V \int_{vol^e} \delta w^{eT} N^{eT} \frac{\delta N^e}{\delta x_1} dv w^e \right) \tag{3.23}$$

Llegando finalmente a:

$$M^e \ddot{w} - 2VC^e \dot{w} + (K^e - V^2 A^e) w_G = F^e \tag{3.24}$$

Los términos de la ecuación corresponden a:

$$M^e = \int_{vol^e} \rho N^{eT} N^e dv \tag{3.25}$$

$$C^e = \int_{vol^e} \rho N^{eT} \frac{N^e}{\delta x_1} dv \tag{3.26}$$

$$A^e = \int_{vol^e} \rho \frac{N^{eT}}{\delta x_1} \frac{N^e}{\delta x_1} dv \tag{3.27}$$

Donde de nuevo la matriz K es la matriz estándar de rigidez. Por lo que se puede apreciar que la ecuación 3.24 y la 3.12 son la misma, demostrando que la ecuación de movimiento se puede obtener mediante Trabajos Virtuales y la ecuación de Lagrange.

3.3. Planteamiento modal

Una vez obtenida la ecuación de movimiento se adopta un enfoque modal, de modo que el vector de desplazamientos global w se puede expresar como superposición de funciones de forma.

$$w(u, t) = \phi(u)q(t) \quad (3.28)$$

Donde $\phi(u)$ es la función de forma de las condiciones cíclicas del carril y $q(t)$ es el vector de coordenadas modales. La matriz ϕ se construye resolviendo el problema de autovectores de las matrices estándar globales M y K . Dado que estas matrices son simétricas, ϕ es ortogonal ($\phi^{-1} = \phi^T$). Los pequeños desplazamientos de sólido rígido son considerados a través de los modos de cuerpo rígido del carril. Se debe señalar que las funciones de forma modales no dependen del tiempo dado que el flujo de la malla a través de coordenadas materiales no cambia las funciones de forma modales en coordenadas espaciales, porque el área de la sección transversal permanece invariable después de la extrusión del perfil.

Una vez realizada la transformación modal de la ecuación 3.28, se aplica a la expresión 3.24, y la ecuación resultante es premultiplicada por ϕ^T . La ecuación de movimiento modal resulta:

$$\tilde{M}\ddot{q} - 2V\tilde{C}\dot{q} + (\tilde{K} - V^2A)q = \phi^T F \quad (3.29)$$

Donde las matrices modales son calculadas a partir de matrices globales como sigue:

$$\tilde{M} = \phi^T M \phi = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & m_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$\tilde{K} = \phi^T K \phi = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & k_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_r^2 m_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$$\tilde{C} = \phi^T C \phi \quad (3.32)$$

$$\tilde{A} = \phi^T A \phi \quad (3.33)$$

Siendo ω_r la frecuencia natural no amortiguada, ya que la matriz ϕ es ortogonal respecto a las matrices de masa y rigidez, \tilde{M} y \tilde{K} son diagonales, mientras que \tilde{C} y \tilde{A} no son diagonales y la ecuación de movimiento no está desacoplada.

El factor de pérdida de amortiguación es de $\xi = 0,01$ en el carril. Por tanto, una nueva matriz de amortiguamiento modal se incluye en la ecuación modal de movimiento como una matriz diagonal.

$$\tilde{C}_\xi = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & c_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} = 2\xi \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{rr} m_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

De esta manera se llega a la ecuación de movimiento modal:

$$\tilde{M}\ddot{q} + (\tilde{C}_\xi - 2V\tilde{C}\dot{q}) + (\tilde{K} - V^2A)q = \phi^T F \quad (3.35)$$

Siendo una ecuación diferencial de segundo orden lineal y las matrices son calculadas al principio de las simulaciones.

Capítulo 4

Modelo de interacción dinámica vehículo-vía

Índice

4.1.	Introducción	60
4.2.	Carril.....	60
4.3.	Traviesas.....	62
4.4.	Vehículo	63
4.5.	Modelo de interacción rueda-carril.....	65

4.1. Introducción

El modelo de interacción dinámica vehículo-vía adoptado en este trabajo se basa en la técnica de subestructuración modal, siguiendo el modelo empleado en [9]. En concreto, el sistema completo se divide en tres subestructuras: el vehículo, los carriles y los elementos de soporte de los carriles, tales como traviesas y balasto. Cada una de las subestructuras posee su propia ecuación de movimiento totalmente independiente, y los efectos de interacción entre ellas se consideran mediante las fuerzas de contacto rueda-carril y las fuerzas transmitidas por la placa de asiento.

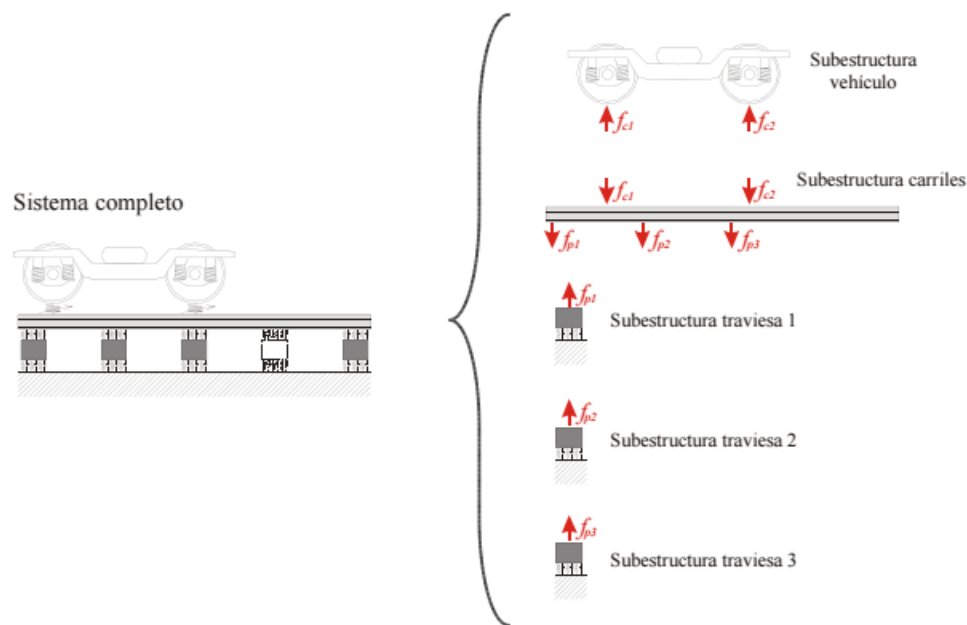


Figura 4.1 Técnica de subestructuración para la interacción dinámica vehículo-vía

En los siguientes apartados se describirán las subestructuras empleadas en mayor detalle.

4.2. Carril

Para la subestructura de la pista se han empleado dos modelos flexibles diferentes. El primero de ellos se basa en la teoría de vigas de Timoshenko, el cual se desarrolló en el punto 2.4, el cual presenta una gama de validez de frecuencia limitada. Esta gama de frecuencias es válida hasta 1.5 kHz para las vibraciones laterales y de hasta 2 kHz para las verticales. Mientras, que el segundo de ellos 3D Moving Element Method, explicado en el punto 3, permite ampliar el rango en el dominio de la alta frecuencia.

El método para modelar la pista, tanto para Timoshenko como para el 3D MEM, consiste en un enfoque cíclico ya que proporciona ciertos beneficios con respecto a la teoría clásica, teniendo en cuenta el artículo [8]. Mediante este enfoque cíclico se impone que los desplazamientos y velocidades de dos puntos análogos de la vía separados a una distancia L sean iguales.

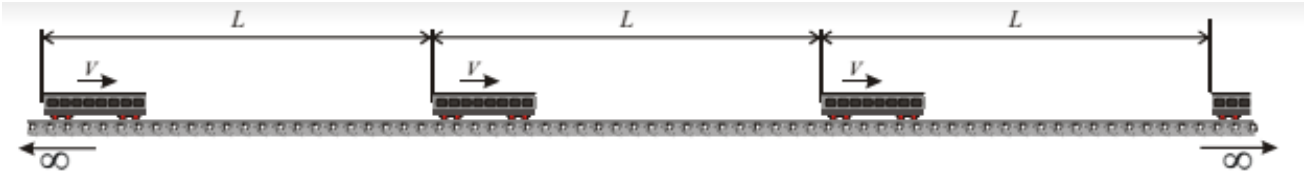


Figura 4.2 Modelo de vía cíclica infinita

Por tanto, en este modelo circulan infinitos vehículos separados a una distancia equidistante L y todos a la misma velocidad V . El valor de L se fija para que sea lo suficientemente grande para evitar la interacción dinámica entre vehículos y, debido a la periodicidad, centrarse en una única sección de longitud finita L , evitando los problemas que existen con los modelos que interpretan los carriles como finitos.

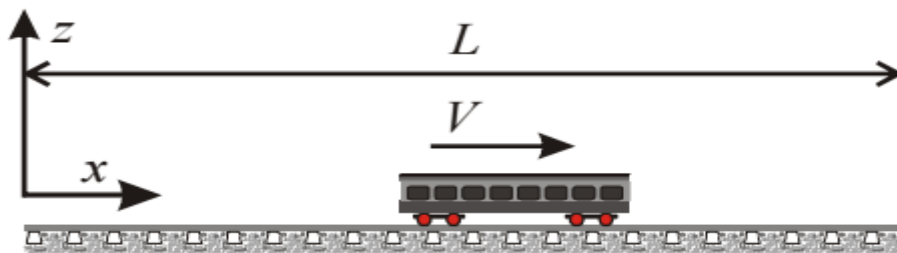


Figura 4.3 Tramo finito de vía cíclica analizada

En el caso del método MEM, el contacto rueda-carril ha sido situado en el centro de la longitud de carril analizada. Debido a esto, se realiza un mallado de elementos finitos aplicado a la pista (figura 4.4), el cual se ha refinado de manera que en el punto de contacto se sitúan los elementos más pequeños de la malla. Sucesivamente, a ambos lados del punto de contacto los elementos de la malla crecen en ambas direcciones hasta los extremos.

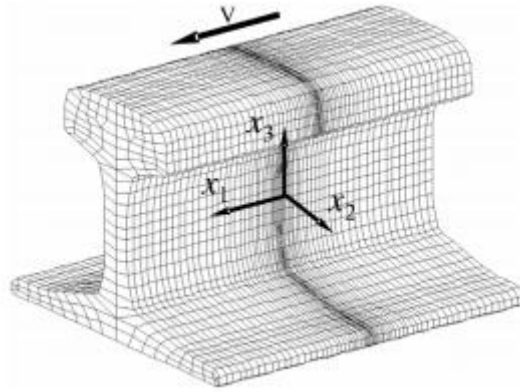


Figura 4.4 Carril UIC 60 modelado mediante el MEM

Con este método se pretende conseguir una malla que analiza en detalle el punto de contacto y conseguir reducir el coste computacional debido al mayor tamaño de los elementos en los extremos del carril.

Además, otra gran ventaja es que la malla de elementos finitos empleada es móvil. El punto de contacto entre la rueda y el carril se localiza en el centro del sistema de coordenadas euleriano; esto es debido a que tanto la malla como el vehículo se mueven a la misma velocidad, de tal manera que el material del carril fluye a lo largo de la malla en sentido contrario a la dirección del vehículo.

4.3. Traviesas

Las traviesas se introducen como soportes de carril discretos. Las placas de asiento se modelan como elementos viscoelásticos concentrados que transmiten la interacción de las fuerzas, y, por tanto, acoplan los carriles y las traviesas representadas como masas concentradas. La dinámica del balasto no es relevante para el comportamiento dinámico del conjunto de ruedas, y por tanto han sido reemplazadas por una rigidez de balasto equivalente y amortiguamiento por debajo de las masas agrupadas.

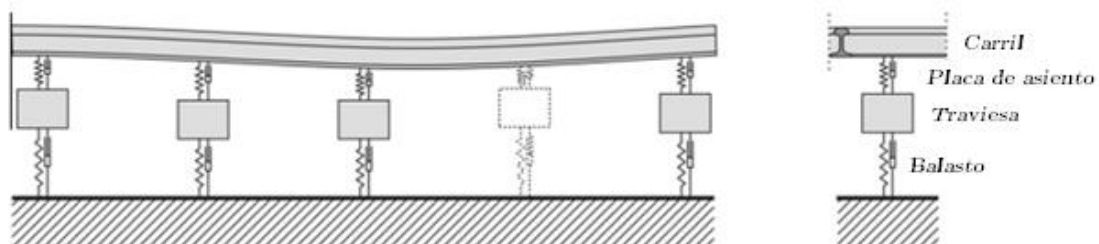


Figura 4.4 Detalle de la estructura de soporte implementada

4.4. Vehículo

La estructura del vehículo se encuentra fundamentada en las características físicas de un tren de alta velocidad de pasajeros, capaz de superar los 300 km/h.

El conjunto de ruedas se encuentra sometido en su mayor parte a fuerzas dinámicas provocadas por la interacción vía-vehículo en un rango superior a 20 Hz, en el que las imperfecciones geométricas, debidas a la corta longitud de onda en las ruedas y el perfil del rail excitan al vehículo.

El vehículo es modelado a través de un eje montado, el cual consta de dos ruedas caladas junto con una suspensión primaria, representada empleando elementos viscoelásticos concentrados, en la que se incluyen dos fuerzas estáticas verticales para representar el peso del bogie y de la carrocería.

El eje empleado ha sido modelado como un eje flexible, como en [2] y [4], en el cual se tienen en cuenta los efectos de inercia rotatoria y giroscópicos que sufre el eje, junto a los esfuerzos cortantes que sufre cada una de sus secciones transversales del eje.

Además, en este modelo de eje, se implementan las coordenadas eulerianas debido a la simetría axial que posee el eje. Estas coordenadas eulerianas no siguen los puntos materiales del sólido, pero sí se asocian con puntos espaciales del eje. De forma que cualquier propiedad del sólido $\varphi(\mathbf{u}, t)$ corresponde al punto material que en el instante t se sitúa en la posición descrita por el vector de posición \mathbf{u} .

También, se adopta un enfoque modal, en el que $\phi(\mathbf{u})$ es la matriz de las funciones de forma del eje montado. Esta matriz no depende del tiempo puesto que la rotación del sólido no cambia las funciones de forma en el modo de coordenadas fijas debido a la simetría axial del eje montado. Este uso solo se puede emplear cuando el sólido en movimiento utiliza la aproximación de las coordenadas eulerianas.

Las propiedades modales se calculan a partir del modelo de elementos finitos, resultando la siguiente ecuación modal de movimiento:

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\Omega\phi_{FE}^T \mathbf{v}\phi_{FE}\dot{\mathbf{q}} + (D + \Omega^2\phi_{FE}^T(A - C)\phi_{FE})\mathbf{q} = \Omega^2\phi_{FE}^T\mathbf{c} + \mathbf{Q} \quad (4.1)$$

Donde:

- \mathbf{Q} son las fuerzas generalizadas.

- D es una matriz diagonal que contiene el cuadrado de las frecuencias no amortiguadas del sólido libre.
- $q(t)$ son las coordenadas modales.
- Ω es la velocidad angular del eje montado.
- ϕ_{FE} son las funciones de forma ensambladas mediante el modelo de elementos finitos.
- V es el término identificado como la fuerza inercial debido a la aceleración de Coriolis asociada a la velocidad convectiva.
- A es la aceleración.
- C corresponde con las fuerzas centrífugas que aparecen tras las deformaciones del sólido.
- c es la constante de las fuerzas centrífugas.

Siendo cada una de estas matrices obtenidas para cada elemento de la forma:

$$V^e = \int_{Vol e} \rho N^{eT} \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\delta N^e}{\delta u_i} \right) dv \quad (4.2)$$

$$A^e = \int_{Vol e} \rho N^{eT} \left(\sum_j \sum_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\delta^2 N^e}{\delta u_i \delta u_j} \right) dv \quad (4.3)$$

$$C^e = \int_{Vol e} \rho N^{eT} \left(\sum_{i=1,3} \tilde{u}_i \frac{\delta N^e}{\delta u_i} \right) dv \quad (4.4)$$

$$c^e = \int_{Vol e} \rho N^{eT} E u dv \quad (4.5)$$

Siendo $N^e(u)$ la matriz de las funciones de forma del elemento e ésimo y E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Este enfoque modal permite conseguir una reducción considerable del coste computacional de la simulación. La figura 4.2 muestra el eje modelo en elementos finitos mediante una malla axisimétrica.

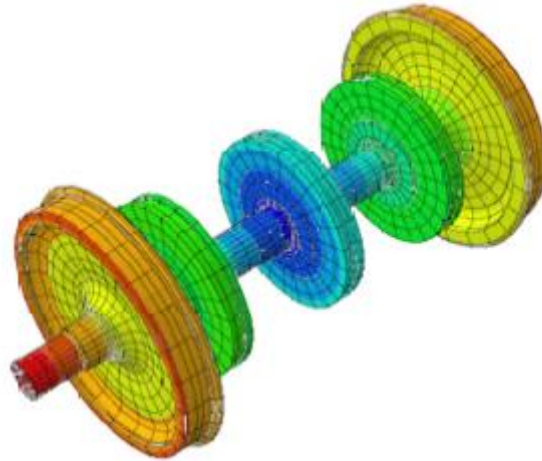


Figura 4.5 Eje ferroviario modelado mediante elementos finitos

4.5. Modelo de interacción rueda-carril

El modelo de interacción rueda – carril se encarga de establecer las relaciones entre las fuerzas aplicadas, la cinemática del eje del vehículo, la deformación en la zona de contacto y el campo de tensiones en el área de contacto.

La dificultad en el modelado reside en que se produce una transmisión de fuerzas a través del contacto entre dos cuerpos con condiciones de rodadura y existencia de rozamiento, lo cual desemboca en la existencia de condiciones mixtas de adhesión y deslizamiento, debidos a la deformación elástica de los perfiles y al fenómeno de pseudodeslizamiento.

Las fuerzas de contacto entre la rueda y el carril son las responsables del acoplamiento entre el eje y la vía. Estas fuerzas dependen del desplazamiento relativo de la rueda y de la velocidad del área de contacto. Teniendo en cuenta los mismos materiales para ambos cuerpos, el contacto tangencial se acopla con el contacto normal, pero no viceversa. El modelo hertziano que se adopta para el contacto normal y FASTSIM es el software utilizado para el contacto tangencial que depende de la fuerza de contacto normal y creepages. Los desplazamientos y velocidades del carril se actualizan en cada paso de tiempo para evaluar las fuerzas de contacto en línea.

Finalmente, las expresiones que empleadas por J. Kalker, diseñador del software FASTSIM, que se emplean en este modelo de interacción dinámica son:

$$F_x = \frac{-8a^2b}{3L_1} \xi_x \quad (4.7)$$

$$F_y = \frac{-8a^2b}{3L_2} \xi_y - \frac{\pi a^3b}{4L_3} \psi \quad (4.8)$$

Siendo:

- a : semieje mayor de la elipse.
- b : semieje menor de la elipse.
- ξ_x : pseudodeslizamiento longitudinal.
- ξ_y : pseudodeslizamiento lateral.
- ψ : pseudodeslizamiento de giro.

Capítulo 5

Simulaciones y resultados

Índice

5.1.	Introducción	68
5.2.	Condiciones generales.....	68
5.3.	Rugosidad pseudoaleatoria normativa ISO 3095	69
5.4.	Plano de rueda.....	84

5.1. Introducción

En este apartado se analizarán los diferentes casos de estudio realizados. En concreto serán dos situaciones:

- La primera, es debida al efecto producido cuando el vehículo, con un perfil de rueda óptimo circula por un carril con una rugosidad pseudoaleatoria. Esta rugosidad presupuesta viene determinada por la normativa ISO 3095.
- La segunda, abarca el comportamiento del vehículo cuando la rueda presenta un plano de rueda de 5 cm.

Los resultados obtenidos con ambos modelos de comportamiento del carril (Timoshenko y MEM) son analizados y comparados entre sí.

Se evalúa la evolución de las fuerzas de contacto, tanto verticales como laterales, que se producen en el punto de contacto entre la rueda y el carril según el vehículo avanza a lo largo del carril durante la simulación, as

5.2. Condiciones generales

Se han aplicado una serie de condiciones comunes a los diversos casos estudiados. Las cuales son:

- Vehículo: se ha empleado un eje montado desarrollado en [2].
- Vía: en ambos casos se emplea el carril UIC 60. Se considerará que el vehículo circula por un tramo recto. Sus características y las de las traviesas se muestran en la tabla 5.2.
- Velocidad: se ha realizado el estudio para diferentes velocidades. El barrido de velocidades va desde 25 km/h hasta los 350 km/h con un incremento de 25 km/h .

Parámetros del vehículo	
Masa del eje montado	1375 kg
Carga por eje	120 kN
Radio de la rueda	0,445 m
Rigidez longitudinal de la suspensión primaria	7,5 MN/m
Rigidez lateral de la suspensión primaria	7,1 MN/m
Rigidez vertical de la suspensión primaria	0,81 MN/m
Amort. longitudinal de la suspensión primaria	100 kNs/m
Amort. lateral de la suspensión primaria	100kNs/m
Amort. vertical de la suspensión primaria	30 kNs/m

Tabla 5.1 Parámetros del vehículo

Parámetros de la vía	
Distancia entre traviesas	0,6 m
Número de traviesas	70
Masa de la traviesa	324 kg
Rigidez del balasto	200 MN/m
Amortiguamiento del balasto	150 kNs/m
Rigidez de las placas de asiento	1 GN/m
Amortiguamiento de la placa de asiento	50 kNs/m
Sección del carril	UIC 60

Tabla 5.2 Parámetros de la vía

5.3. Rugosidad pseudoaleatoria normativa ISO 3095

En este apartado se van a exponer los casos de estudio de la rugosidad pseudoaleatoria empleando la normativa ISO 3095. En esta normativa se establecen los métodos y condiciones para obtener los niveles de emisión de ruido exterior reproducibles y comparables, y espectros para todo tipo de vehículos ferroviarios. En dicha normativa se especifica una rugosidad limite pseudoaleatoria del carril, la cual será la fuente de excitación del sistema en los casos expuestos.

A continuación, en las figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5 se muestra la evolución de la fuerza de contacto lateral para las velocidades 25 km/h, 50 km/h, 100 km/h, 200 km/h y 350 km/h obtenida por los métodos de Timoshenko y 3D MEM.

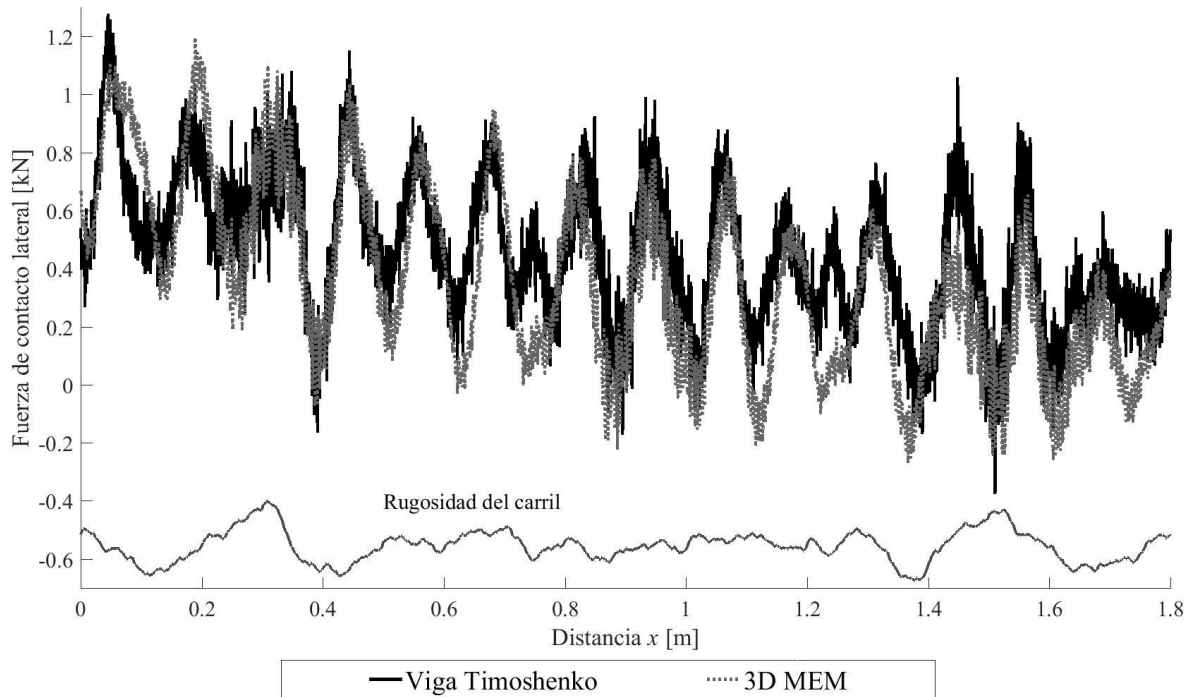


Figura 5.1 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 25 km/h

En la figura 5.1 con una velocidad de circulación de 25 km/h se puede observar que tanto el MEM como Timoshenko presentan una evolución dinámica y valor medio similar. Cabe destacar una constancia del armónico de paso por traviesa 0,6 m, es decir, hay una periodicidad. Sin embargo, se observa como el MEM no responde con tanta brusquedad a las irregularidades como lo hace Timoshenko. Esto quiere decir que los máximos picos se encuentran localizados en el modelo de Timoshenko con un valor de 1,3 kN, mientras que los del MEM son ligeramente inferiores. Este comportamiento se justifica en parte a que el modelo de Timoshenko modela el carril de manera más rígida, lo que conlleva que responda de una manera ligeramente más brusca.

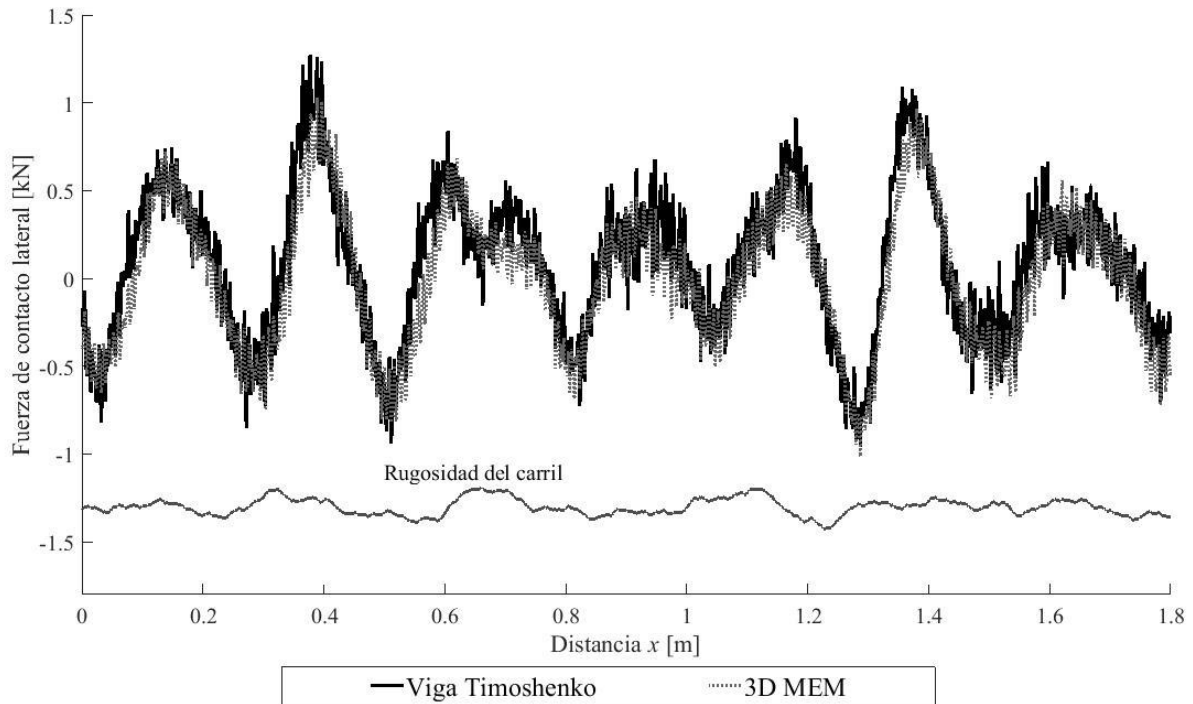


Figura 5.2 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 50 km/h

En la figura 5.2, se muestra la simulación realizada para una velocidad de 50 km/h, como se puede apreciar la magnitud que alcanza la fuerza lateral ha disminuido con respecto a la de la figura 5.1, pues en dicha figura la fuerza de contacto lateral oscila aproximadamente de manera sinusoidal entre -0,2 kN y 1,3 kN y ahora se observa que la fuerza lateral se encuentra comprendida en el rango -1 kN y 1 kN. No obstante, cabe destacar que ambos modelos siguen la misma tendencia y valor medio, y, además como se expresó también en la figura 5.1 el MEM reacciona con mayor suavidad ante los cambios de perfil de la superficie de rodadura, por tanto, sus picos son inferiores (0,9 kN), mientras que en Timoshenko alcanzan valores de 1 kN.

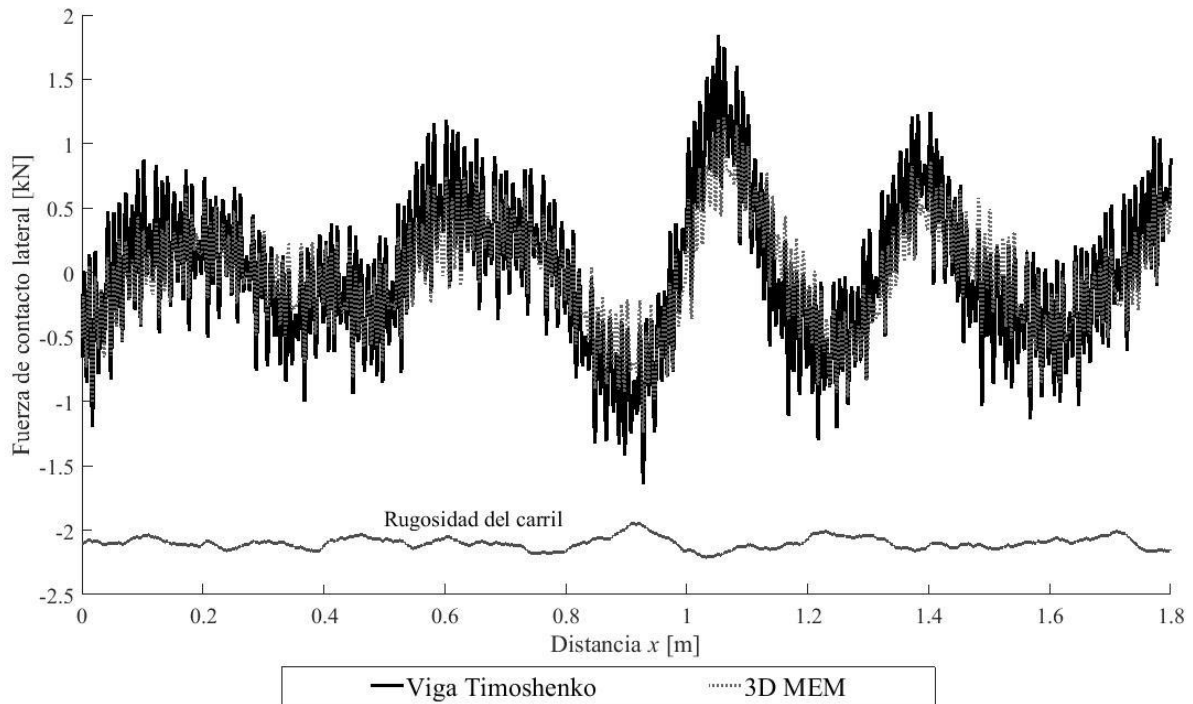


Figura 5.3 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 100 km/h

En la figura 5.3, para la velocidad de 100 km/h se puede apreciar que los valores de amplitud entre los que se encuentra la fuerza de contacto lateral han aumentado con respecto a los de la simulación a 50 km/h, pasando a ser aproximadamente entre -1,5 kN y 1,5 kN. Esto es debido a que las frecuencias de la vía o del carril debido a la rugosidad pseudoaleatoria han entrado en resonancia y provocando que la fuerza lateral no disminuya de manera constante a medida que se incrementa la velocidad. Por otro lado, se sigue observando que tanto el modelo de Timoshenko como el del 3D MEM presentan un valor medio y una evolución similar. La principal diferencia, como anteriormente, reside en que entre ambos métodos el modelo de Timoshenko presenta picos mayores al tratarse de un modelo más rígido.

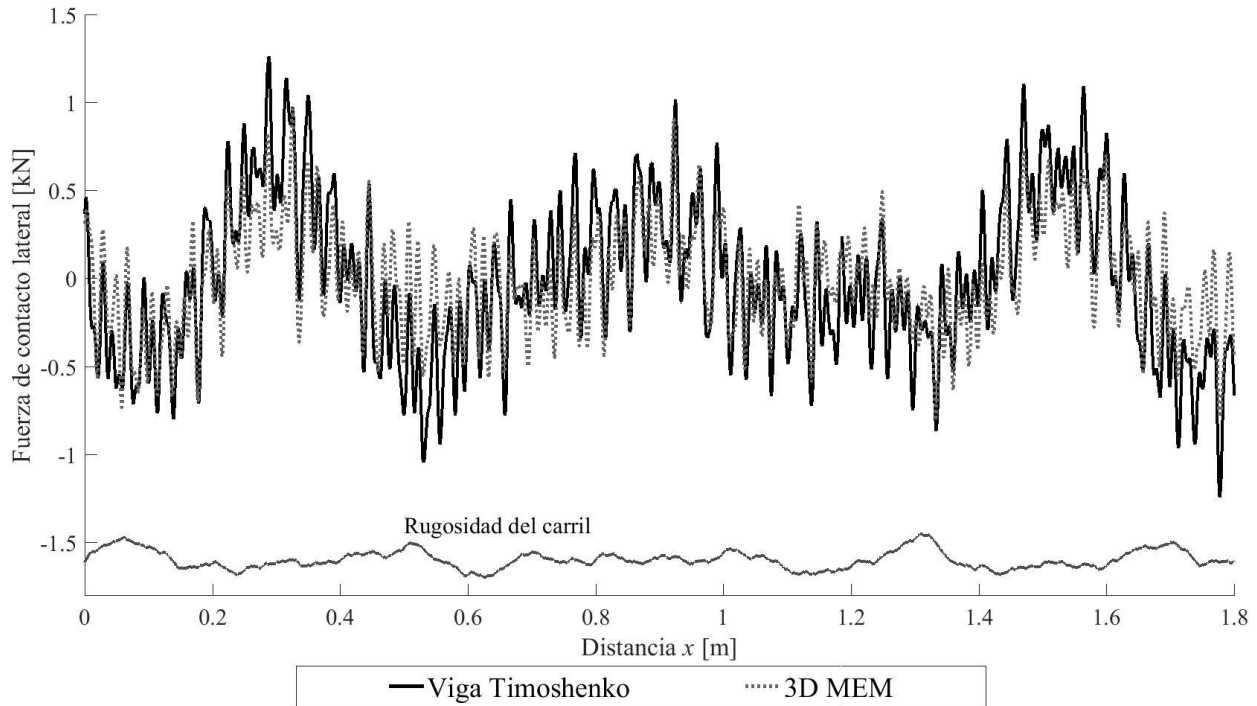


Figura 5.4 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 200 km/h

En la figura 5.4, se puede observar como varían los valores de amplitud de la fuerza de contacto lateral para una velocidad de 200 km/h, en este caso los valores máximos han disminuido con respecto a los obtenidos para la simulación de 100 km/h, siendo los valores obtenidos de aproximadamente -1 kN y 1 kN. También, se puede apreciar como ambos modelos presentan una periodicidad en el paso por travesía (0,6 m). Además, en esta velocidad, ya se puede apreciar como el MEM se empieza a adaptar más al modelado del carril (ya no oscila tan bruscamente), mientras que Timoshenko todavía presenta algunos comportamientos algo bruscos. Finalmente decir que el valor medio y la evolución de ambos métodos prácticamente es igual.

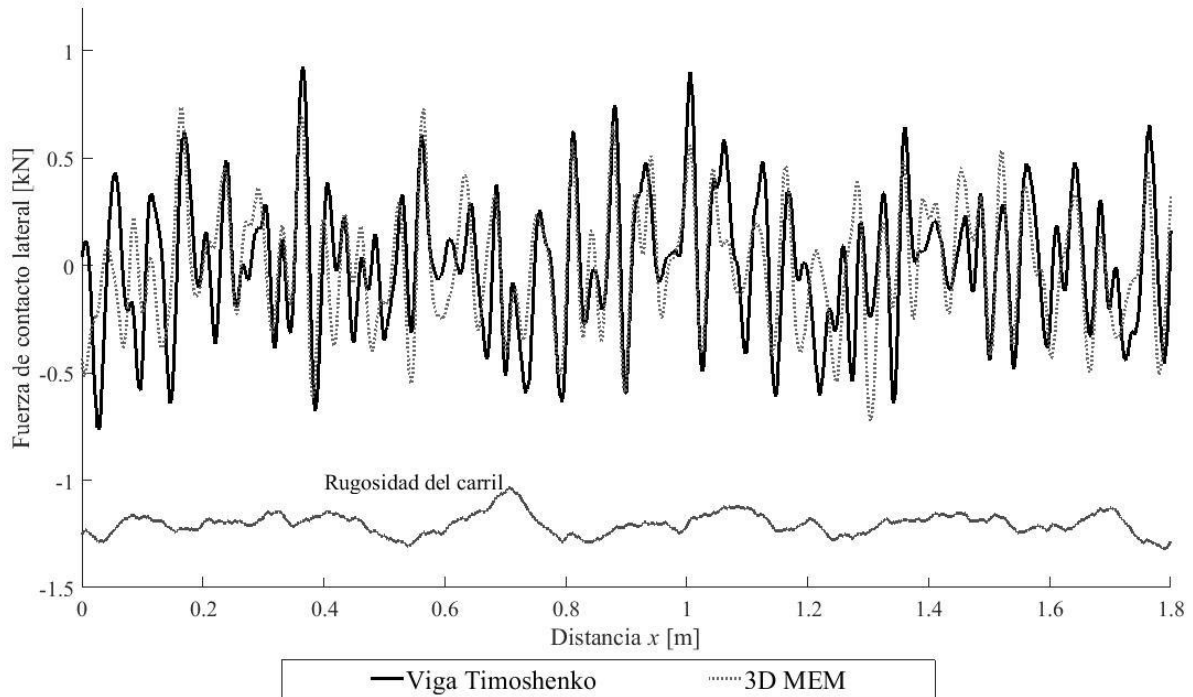


Figura 5.5 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 350 km/h

En la figura 5.5, para la máxima velocidad simulada, 350 km/h, se puede apreciar lo mismo que sucedía para el caso anterior los máximos valores de amplitud han vuelto a disminuir en este caso a valores aproximados de -0,7 kN y 0,7 kN, debido a la rugosidad del carril. Además, a esta velocidad se aprecia como ambos modelos se encuentran más adaptados, ya no se produce el mismo efecto oscilatorio que para las velocidades anteriores. Finalmente, expresar que el valor medio y la evolución dinámica es similar, aunque empieza a diferir en algunas zonas en concreto.

Visualizando ahora las figuras 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 y 5.10 se observa la evolución de la fuerza de contacto vertical en las simulaciones de 25 km/h, 50 km/h, 100 km/h, 200 km/h y 350 km/h respectivamente.

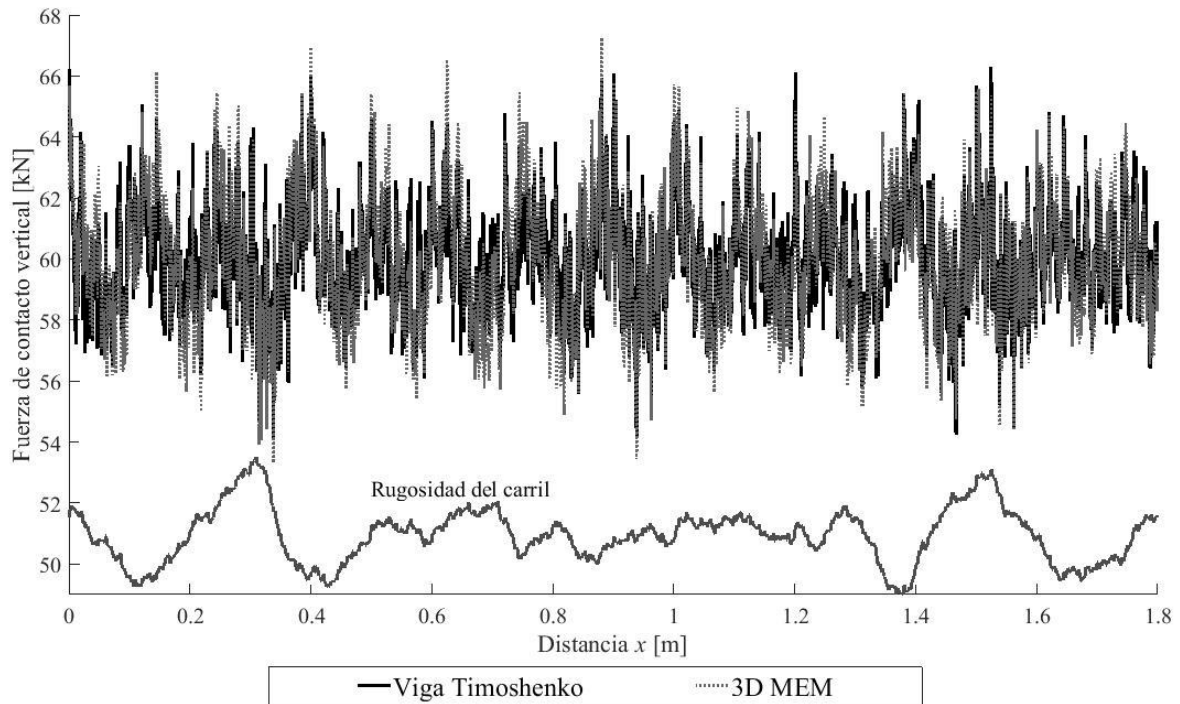


Figura 5.6 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 25 km/h

Para el caso de la fuerza vertical para la simulación de 25 km/h se puede apreciar cómo tanto el modelo de Timoshenko como el MEM presenta la misma evolución dinámica y el mismo valor medio, los valores máximos que se alcanzan oscilan entre 55 kN y 65 kN para el modelo de Timoshenko, mientras que para el modelo de MEM, al igual que sucedía para la fuerza de contacto lateral, sus valores son inferiores, ya que Timoshenko no considera la deformación de la sección del carril. Al igual que para el otro tipo de fuerza, se deja constancia del armónico de paso por traviesa cada 0,6 m.

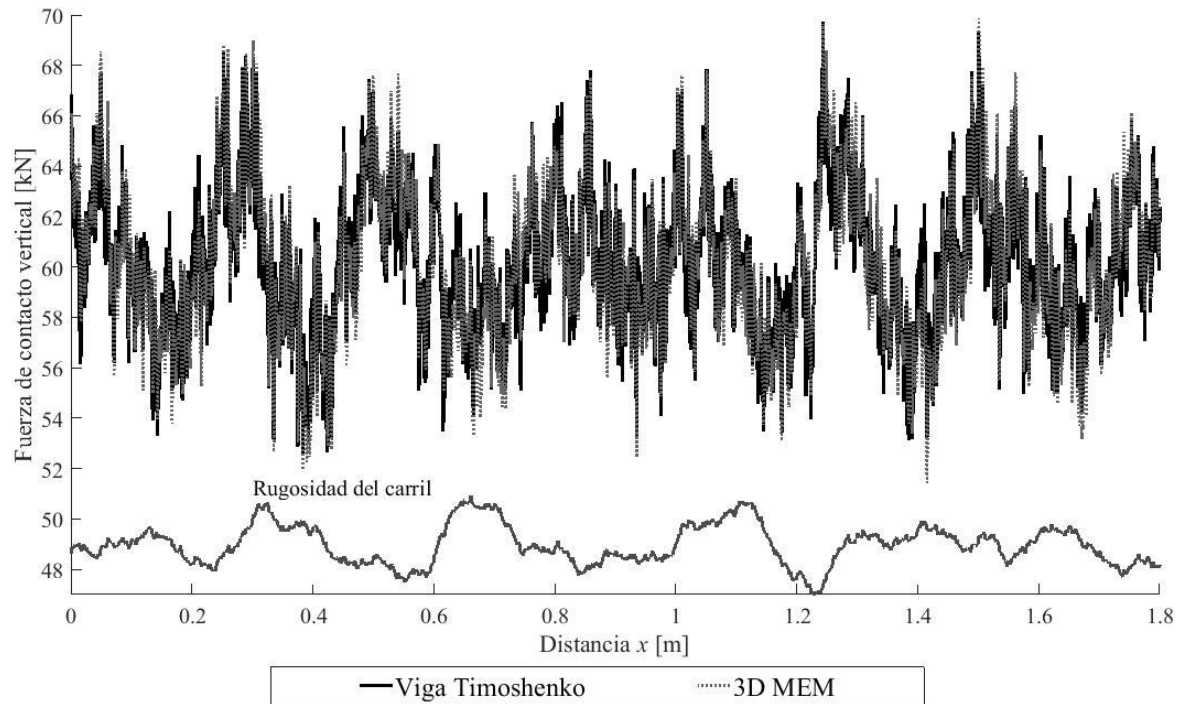


Figura 5.7 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 50 km/h

En la figura 5.7, se puede apreciar los resultados de la simulación a una velocidad de 50 km/h, al igual que se ha expresado para las figuras anteriores, como ambos modelos lo que presentan es realizar un modelado del carril es evidente que presentan la misma tendencia y valor medio; aunque el método de Timoshenko presenta unos picos más elevados debido a que modela al carril de manera más rígida, por tanto, reacciona de una manera más brusca.

Finalmente indicar que el valor de 60 kN del cual parte la gráfica es debido a que, como se indicó en la tabla 5.1, la carga del eje es de 120 kN, y en esta figura solo se está representando para una de las dos ruedas, por tanto, su valor es de 60 kN.

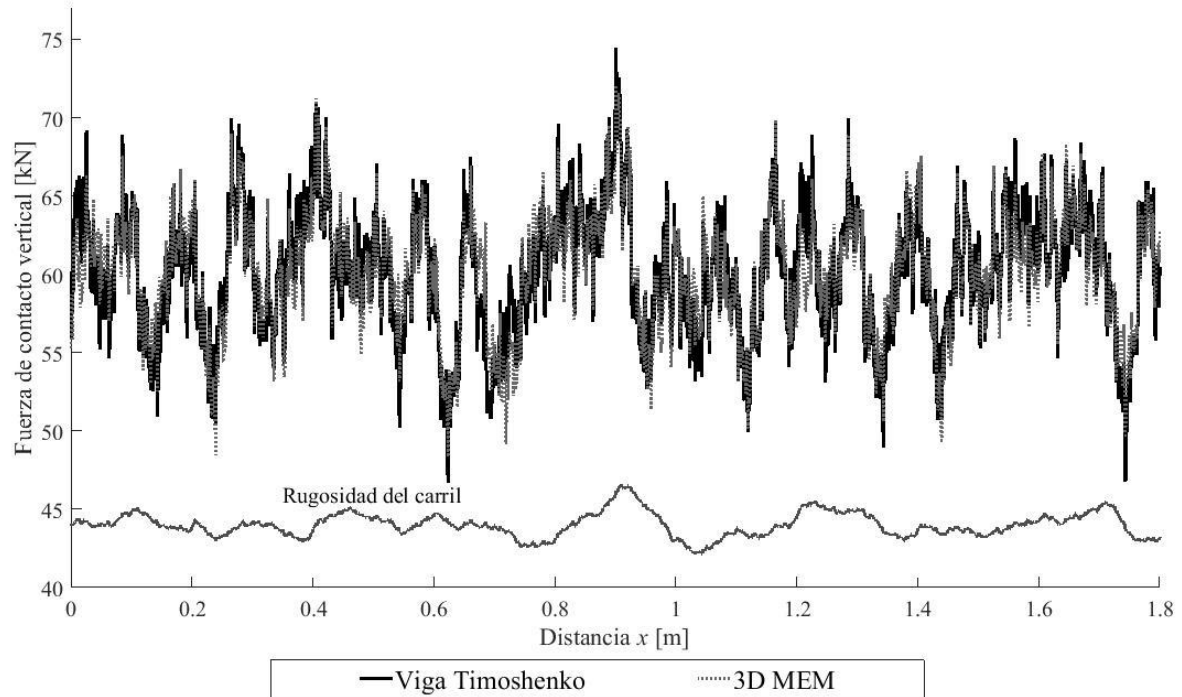


Figura 5.8 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 100 km/h

Para la simulación realizada a 100 km/h, como se puede apreciar en la figura 5.8, se puede apreciar como el pico máximo se encuentra localizado para ambos modelos, aunque el de MEM ligeramente inferior en, aproximadamente, 70 kN, mientras que el valor mínimo se encuentra en 50 kN. Además, como en el caso de las anteriores simulaciones la función presenta una cierta periodicidad cada 0,6 m, que coincide con el salto de traviesa.

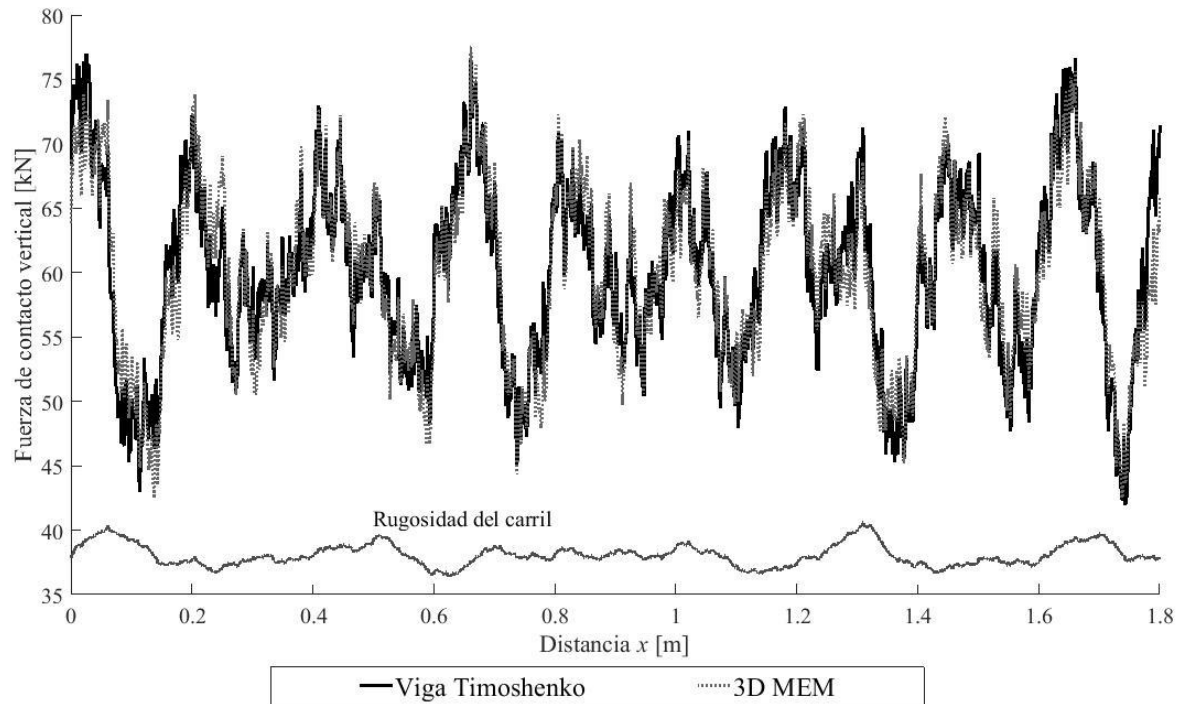


Figura 5.9 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 200 km/h

Para la velocidad de 200 km/h, como se puede observar en la figura 5.9, se determina como a medida que se incrementa la velocidad el valor de los picos máximos se encuentra en constante ascenso, en este caso el valor para el método de Timoshenko se localiza en 77 kN, mientras que el de MEM está en 75 kN. También, se aprecia el armónico de paso por traviesa cada 0,6 m, es decir, la función es periódica y que ambos modelos presentan la misma evolución dinámica.

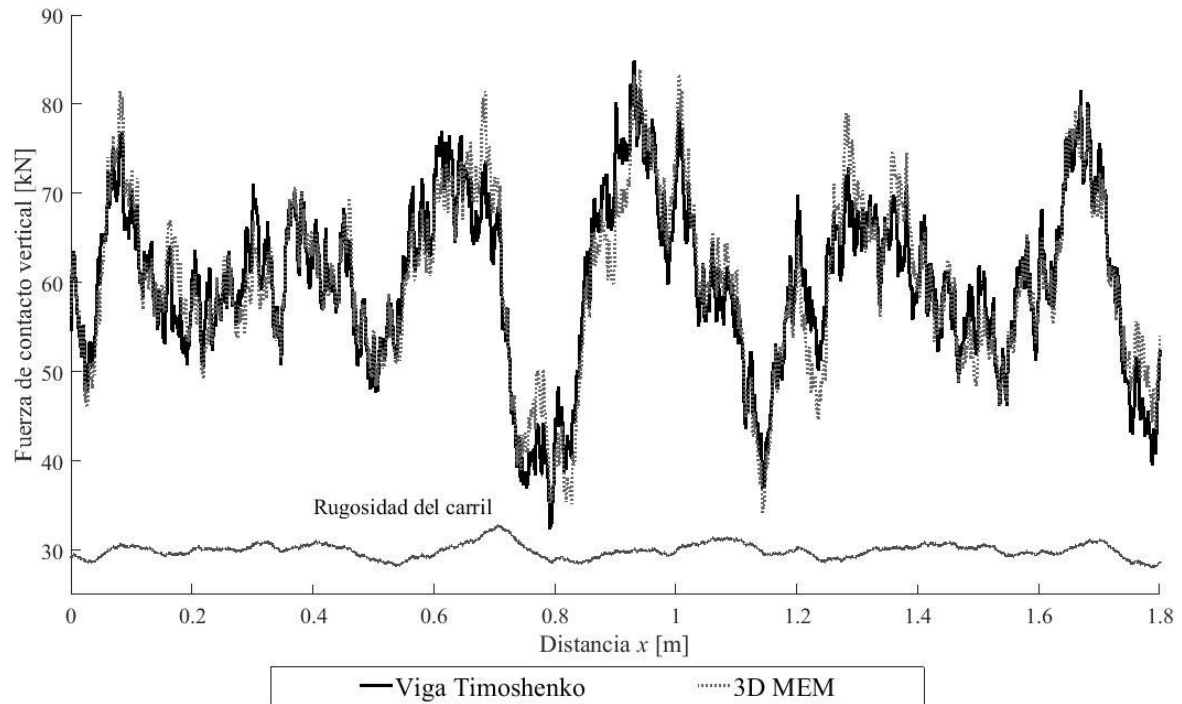


Figura 5.10 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 350 km/h

Finalmente, para una velocidad de 350 km/h, se observa como los mayores picos se encuentran localizados a 80 kN, es decir, a medida que se ha incrementado la velocidad, la fuerza de contacto vertical ha ido incrementando sus valores. Además, como ha sucedido en anteriores casos, ambos modelos presentan una evolución dinámica y valor medio parecido.

Finalmente, si se analizan todas las simulaciones de manera conjunta se aprecia una progresión indirecta entre la velocidad y la longitud de onda (aumento de frecuencia) de los armónicos que conforman la fuerza de contacto.

Lo expresado anteriormente provoca que sea necesario realizar un análisis de la fuerza vertical en tercios de octava, las Figuras 5.11, 5.12, 5.13 y 5.14 representan la fuerza de contacto vertical en tercios de octava para las simulaciones de 50 km/h, 100 km/h, 200 km/h y 350 km/h respectivamente.

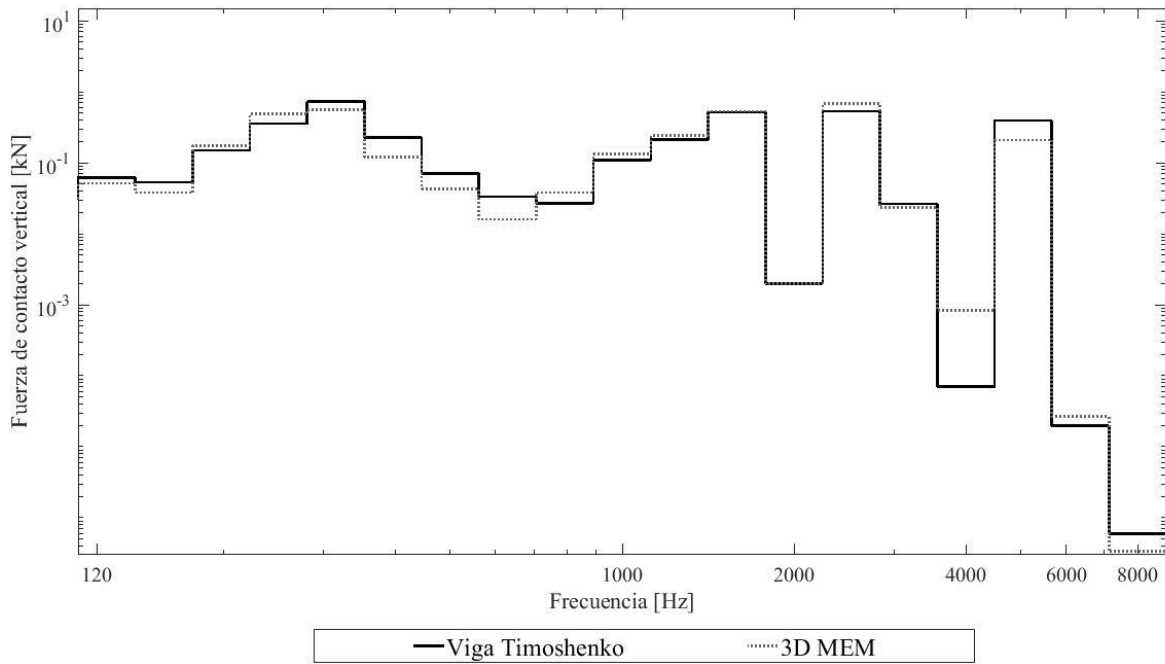


Figura 5.11 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 50 km/h

Para la simulación a 50 km/h (figura 5.11), se puede apreciar como el contenido en frecuencia se distribuye a lo largo de todo el espectro de frecuencias, aunque la aportación a partir de frecuencias superiores a 6 kHz es prácticamente mínima. Se observa como el modelo de Timoshenko domina los anchos de baja frecuencia y aproximadamente alrededor de los 700 Hz el MEM pasa a dominar, obteniendo en la mayoría de los casos unas amplitudes ligeramente superiores a Timoshenko.

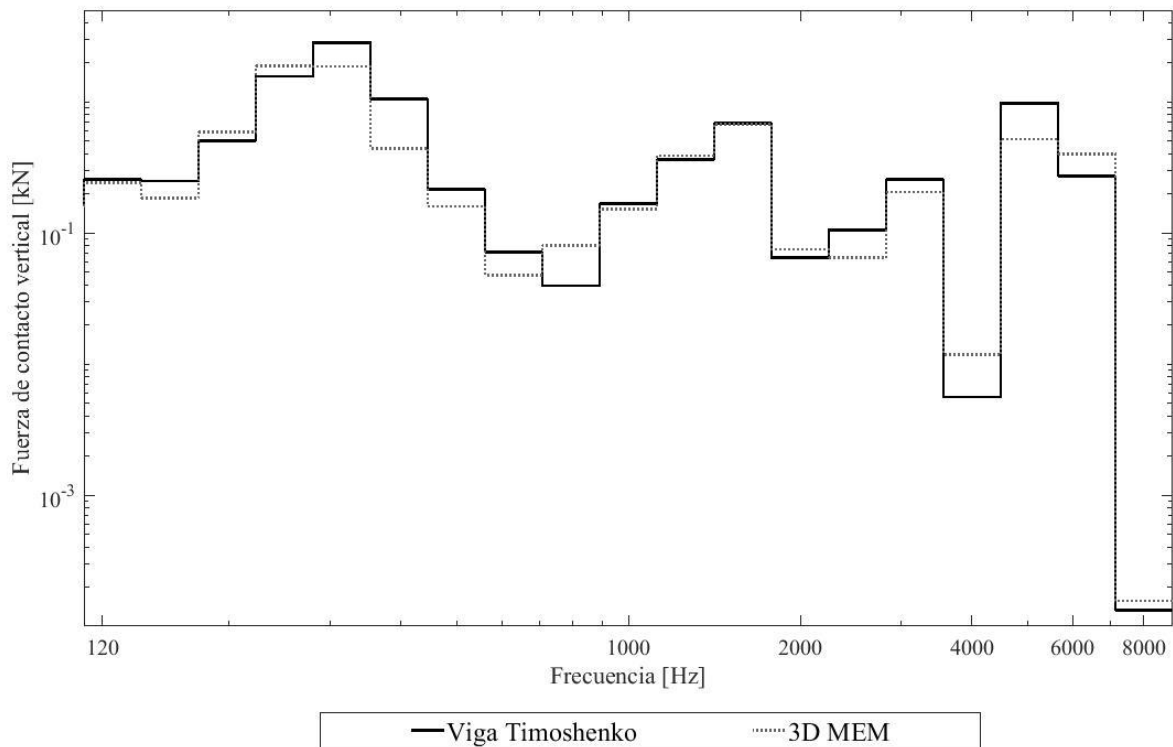


Figura 5.12 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 100 km/h

Para la simulación a 100 km/h (figura 5.12) cabe destacar que han aparecido armónicos de mayor frecuencia a 50 km/h, ya que en este caso se tiene en cuenta hasta los 7 kHz, mientras que para la simulación anterior era hasta los 6 kHz.

Al igual que en la figura 5.11, Timoshenko presenta un contenido en frecuencia ligeramente mayor que el MEM, pero por su parte el MEM sigue una tendencia distributiva similar a la de Timoshenko, pero sin llegar la misma magnitud.

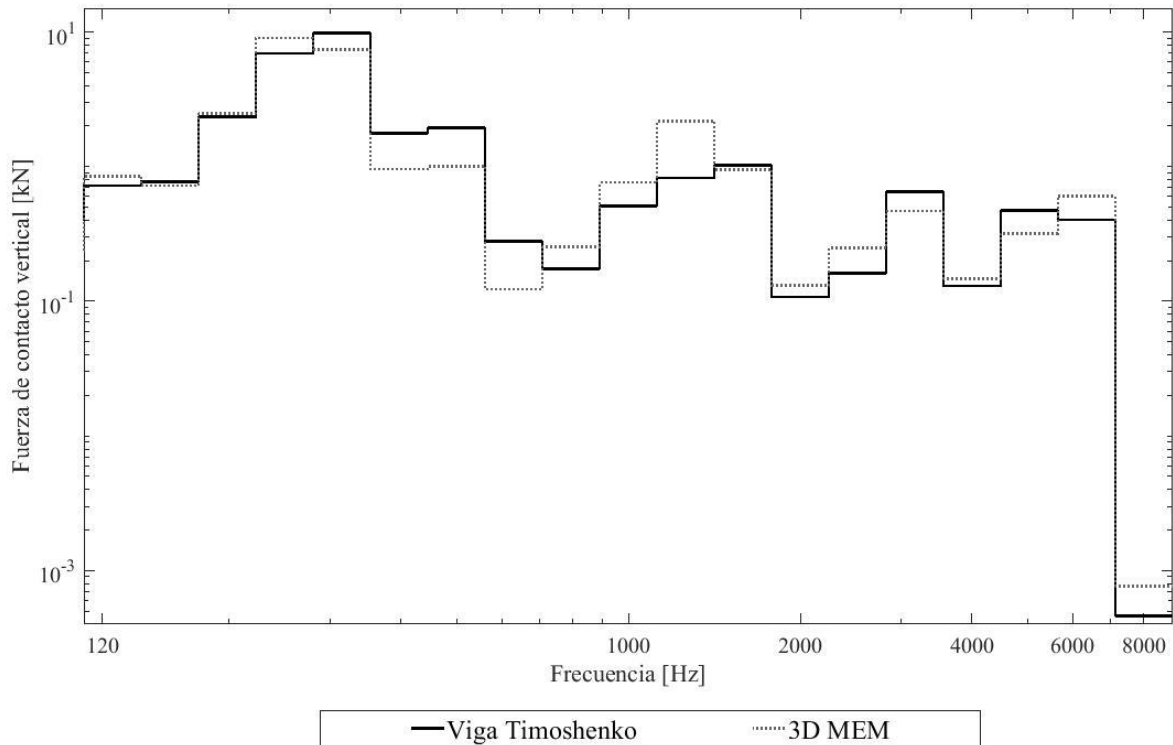


Figura 5.13 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 200 km/h

Para la simulación a 200 km/h (figura 5.13) se puede apreciar como la tendencia con respecto a las velocidades anteriores ha variado. Cabe destacar que el método de Timoshenko domina los anchos de baja y media frecuencia (hasta 1 kHz), mientras que el método MEM posee unos armónicos con unas amplitudes superiores para las altas frecuencias. Finalmente tener en cuenta que la aportación de frecuencias superiores a 7 kHz apenas tiene importancia.

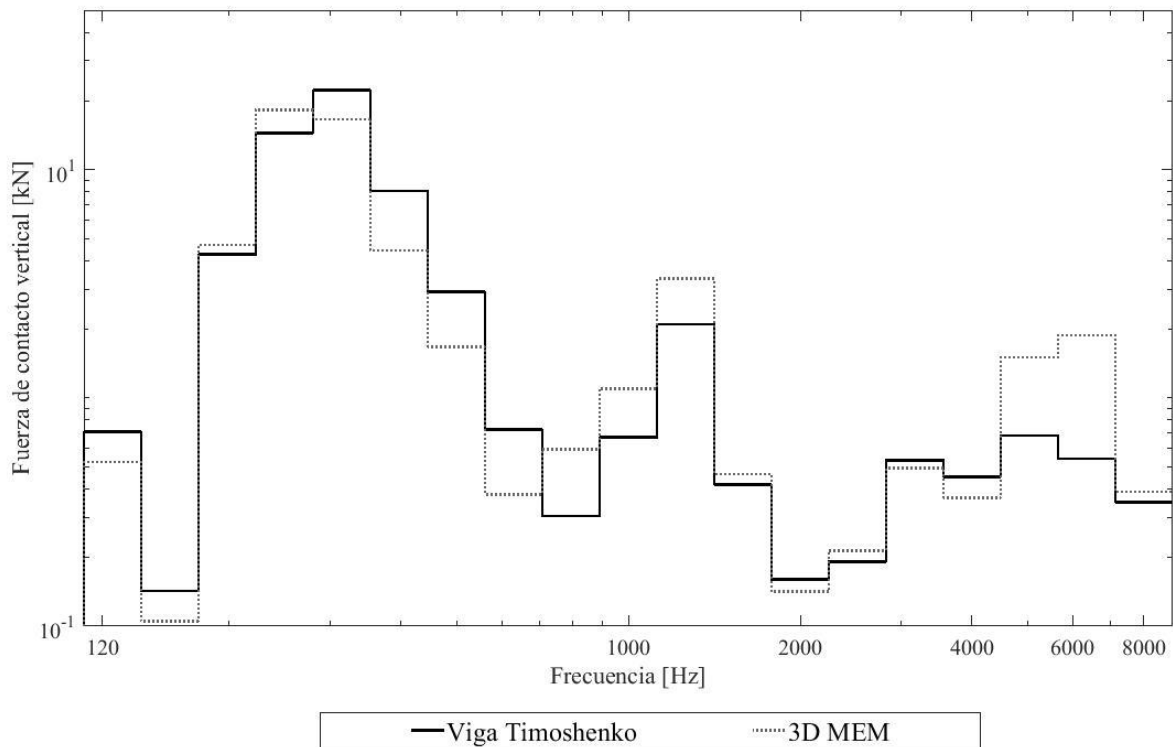


Figura 5.14 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de la corrugación pseudoaleatoria de la ISO 3095 a 350 km/h

En la figura 5.14, con la simulación a 350 km/h se empiezan a apreciar unas diferencias algo significativas entre el MEM y Timoshenko. Se puede visualizar que el método de Timoshenko presenta un mayor contenido en frecuencia para los armónicos de bajas y medias frecuencias debido a ser un modelo más rígido, mientras que a partir de 1 kHz el MEM empieza a dominar, es decir, para los armónicos de altas frecuencias. Estos armónicos son fundamentales para describir el ruido de rodadura.

5.4. Plano de rueda

En este apartado se exponen los resultados para un plano de rueda como excitación del sistema. Un plano de rueda es el aplanamiento de una pequeña zona de rodadura de la rueda, producido a causa de un bloqueo de las ruedas durante una longitud de frenada determinada. En este caso el plano de rueda simulado tiene una longitud de 5 cm. Cuando el plano de rueda alcanza la superficie de rodadura, el vehículo queda en suspensión, perdiendo todo el contacto con el carril y posteriormente cayendo de golpe sobre él. Esto se puede apreciar en las figuras 5.15, 5.16, 5.17, 5.18 y 5.19 para las velocidades 25 km/h, 50 km/h, 100 km/h, 200 km/h y 350 km/h.

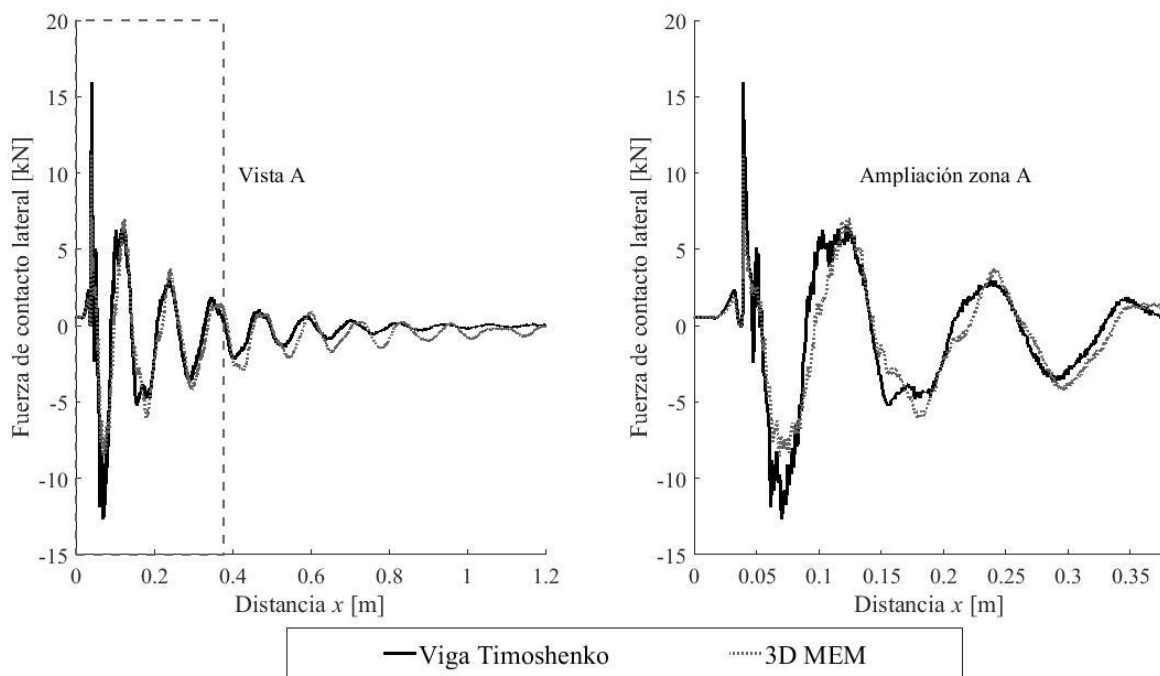


Figura 5.15 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 25 km/h

Para la simulación de 25 km/h, representada en la figura 5.15, se puede apreciar que se produce un impacto, con un valor pico mayor mediante el método de Timoshenko (15 kN) que con el MEM (11 kN). Una vez producido ese pico se produce una etapa transitoria donde en el vehículo se producen variaciones dinámicas fuertes, las cuales se producen hasta que el sistema finalmente se estabiliza.

Como se puede apreciar este fenómeno se ha producido para ambos métodos, aunque con valores mayores para Timoshenko, lo cual indica que las variaciones

son mucho mayores que en MEM. Este comportamiento es debido al efecto de la mayor rigidez de Timoshenko respecto al MEM.

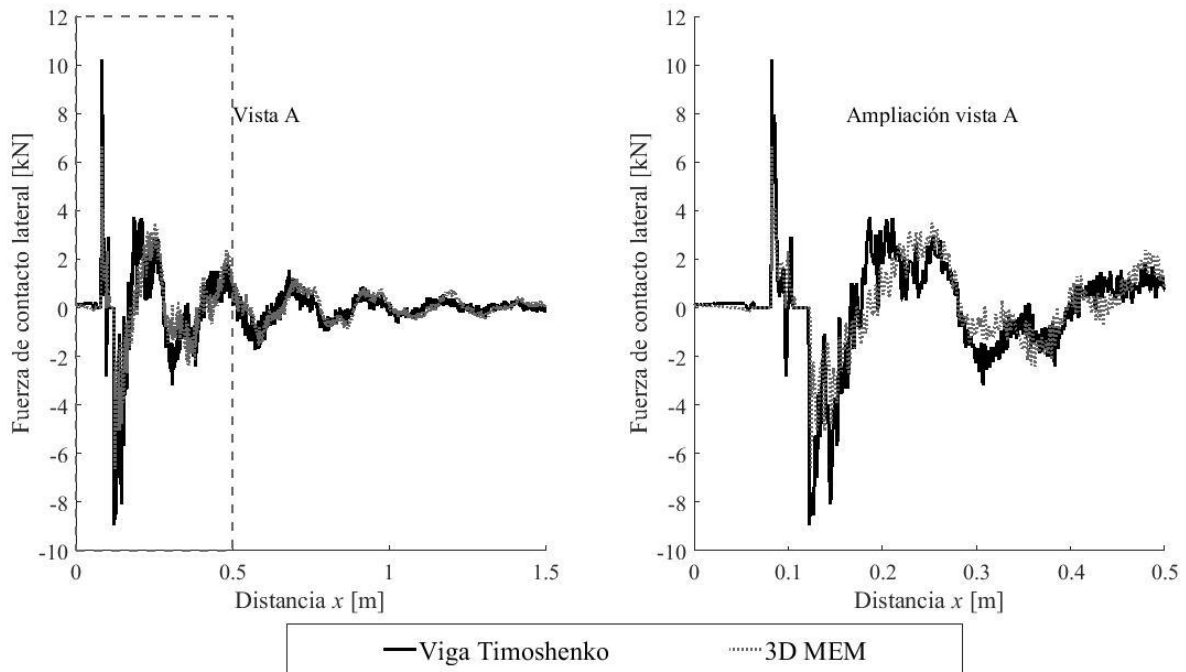


Figura 5.16 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 50 km/h

Como se puede apreciar en la figura 5.16, para una velocidad de 50 km/h, en comparativa con la figura anterior, se aprecia que los valores pico que se alcanzan mediante ambos métodos son inferiores que para una velocidad inferior. En este caso, el valor pico para Timoshenko es de 10 kN, mientras que para el MEM es de 6.5 kN. Además de ser valores inferiores, son más similares que los de la simulación anterior. Cabe destacar que para una velocidad de 50 km/h, ambos modelos muestran la pérdida de contacto entre la rueda y carril en más de un instante.

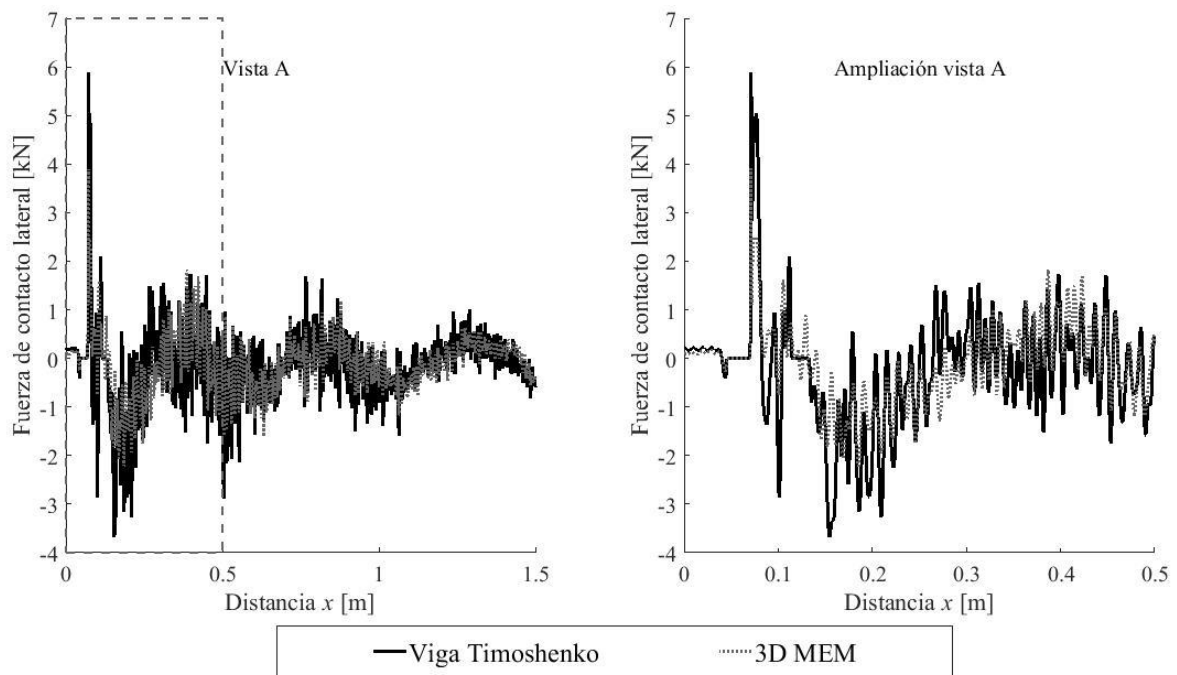


Figura 5.17 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 100 km/h

En esta figura 5.17, se ha representado la simulación para una velocidad de 100 km/h, donde como para el caso anterior se puede ver una reducción considerable de los valores pico, es decir una reducción de la fuerza de contacto, ya que en este caso el valor de Timoshenko es de 6 kN mientras que el del MEM es de 4 kN. Como se puede apreciar ambos métodos siguen la misma evolución dinámica, primero se presenta el impacto, y a continuación se produce una parte transitoria la cual culminará con la estabilización.

Para esta simulación, se debe resaltar que la pérdida de contacto entre la rueda y carril se pierde en dos ocasiones.

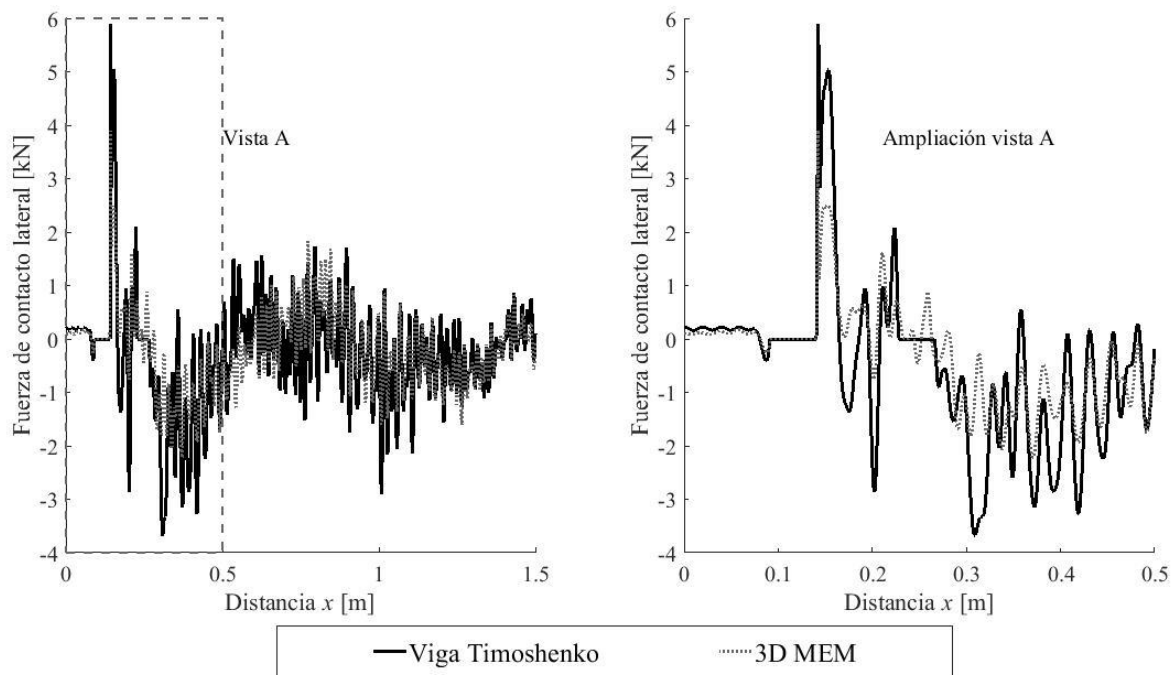


Figura 5.18 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 200 km/h

Para la simulación de 200 km/h, como se puede apreciar en la figura 5.18, se observa como la fuerza de contacto lateral para ambos modelos ha disminuido considerablemente, situándose para Timoshenko en 3,5 kN y para el MEM en 2 kN; por tanto, estos valores son todavía más similares que los que se obtenían para las más bajas velocidad, ya que en este caso el modelo de Timoshenko es 1,5 veces superior al del MEM. Además, la magnitud del impacto, produce que la parte transitoria del sistema oscile con fuertes variaciones dinámicas más frecuentes que para los casos anteriores.

Finalmente, a diferencia de velocidades más bajas, solo se pierde el contacto de la rueda y el carril en una ocasión.

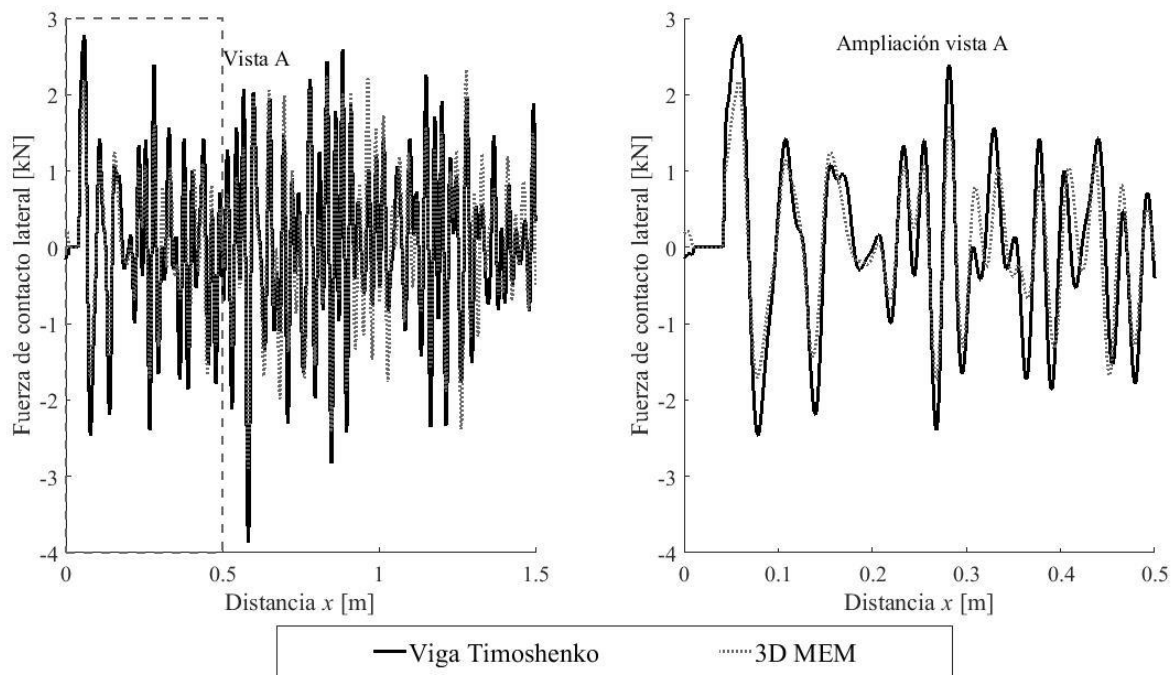


Figura 5.19 Evolución temporal de la fuerza de contacto lateral bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 350 km/h

Si se observa la figura 5.19 se ve como en la simulación de 350 km/h, los valores máximos de la fuerza de contacto obtenida son para el Timoshenko de 2,8 kN mientras que para MEM es de 2 kN, estos valores a pesar de ser los máximos para esta simulación, son los mínimos con respecto al resto de simulaciones a tener en cuenta; ya que, al aumentar la velocidad, la etapa en la cual se produce el impacto no llega a producirse con la misma fuerza que para etapas anteriores. Lo que si sucede al igual que en el caso anterior es que el sistema oscila provocando fuertes variaciones dinámicas, lo cual produce un transitorio.

Para el análisis de las fuerzas de contacto verticales se deben visualizar las figuras 5.20, 5.21, 5.22, 5.23 y 5.24 que se corresponden a las simulaciones de 25 km/h, 50 km/h, 100 km/h, 200 km/h y 350 km/h.

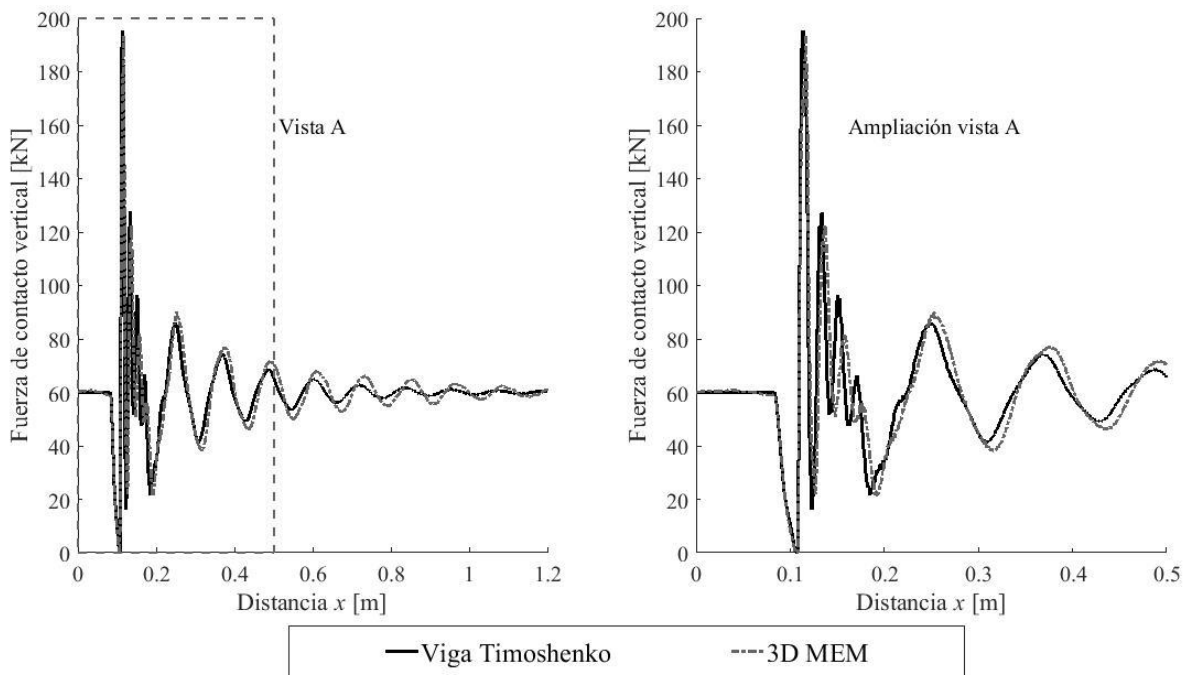


Figura 5.20 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 25 km/h

Como se puede apreciar en la figura 5.20, para la simulación de 25 km/h, se observa que durante el impacto de la rueda la magnitud de la fuerza de contacto vertical para ambos modelos aproximadamente es de 195 kN. Tras el impacto, ambos métodos descienden hasta alcanzar los 20 kN, pero sin llegar a perder el contacto con el carril. Seguidamente, los modelos oscilan en un transitorio hasta que finalmente alcanzan el régimen permanente.

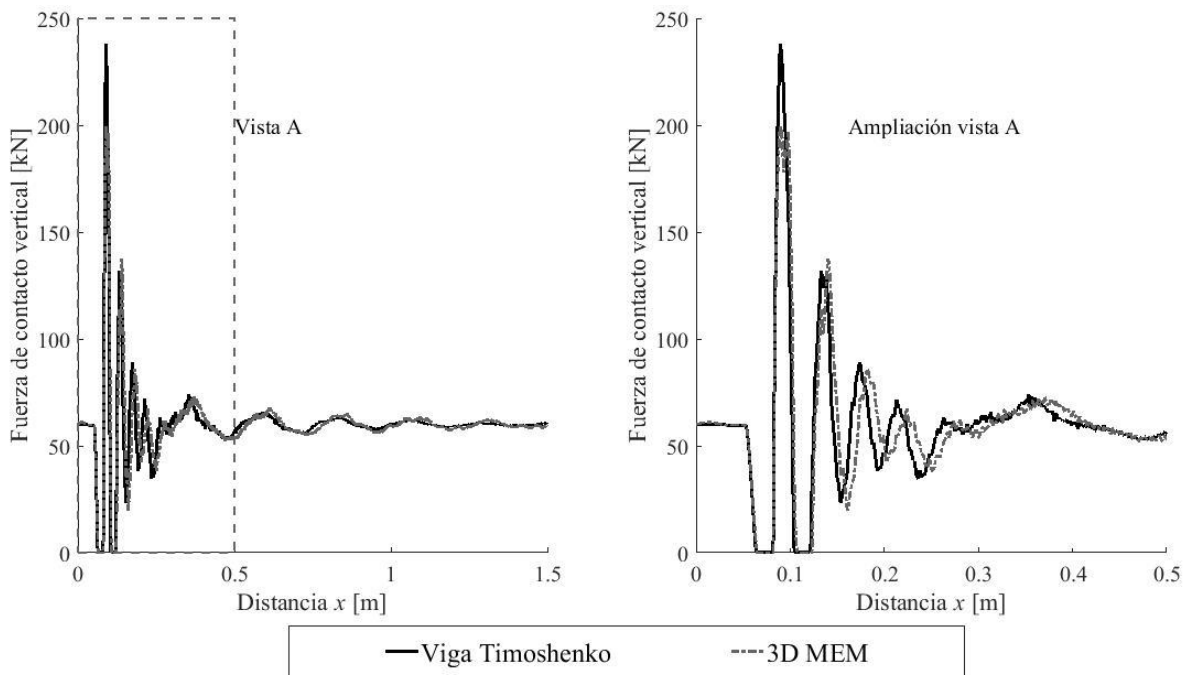


Figura 5.21 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 50 km/h

Para la simulación de 50 km/h se puede observar como el valor de la fuerza de contacto vertical es diferente para ambos modelos, siendo superior Timoshenko en un valor de 40 kN. Tras el impacto se observa como el modelo de Timoshenko desciende de manera continua hasta un valor de 0 kN, es decir, pierde el contacto con el carril, se produce un salto. Mientras que el MEM, no desciende de manera continua, si no que sobre 170 kN sufre un ascenso y luego desciende definitivamente hasta perder el contacto. Posteriormente, ambos métodos pasan a una etapa transitoria la cual disminuye hasta que el sistema se estabiliza.

El valor de 60 kN inicial se corresponde a que el eje soporta una carga de 120 kN y aquí solo estamos tratando con la rueda izquierda del eje, por tanto, la fuerza es de 60 kN.

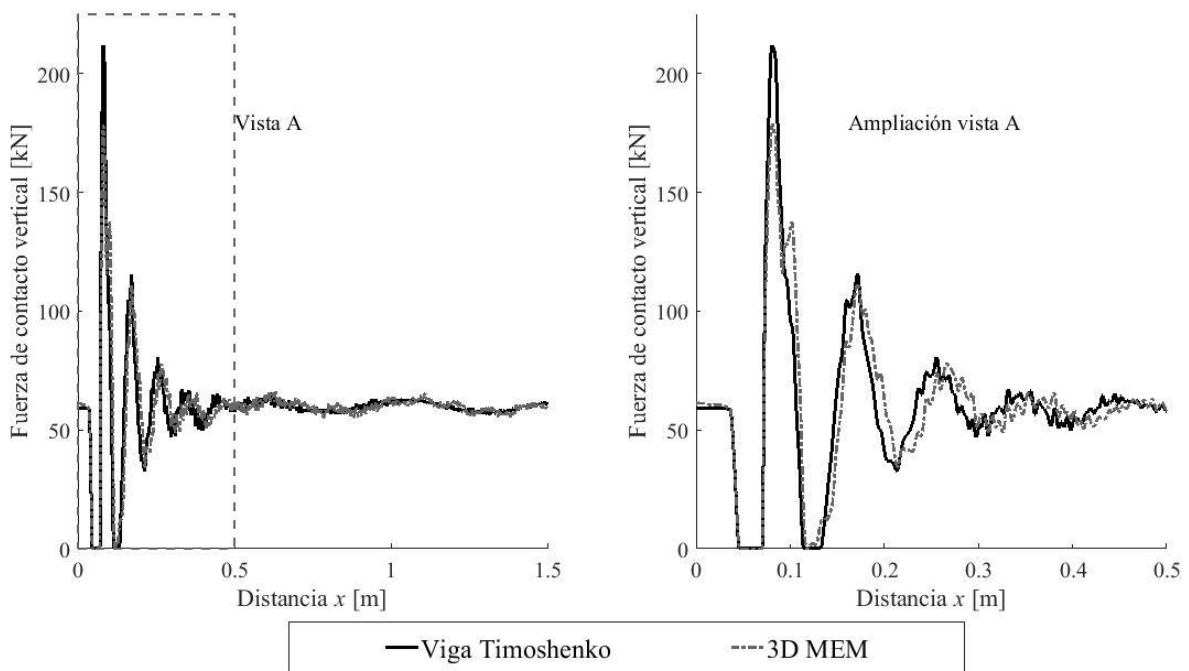


Figura 5.22 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 100 km/h

Para la simulación de 100 km/h (figura 5.22), se observa que el método de Timoshenko presenta un valor aproximadamente de la fuerza de contacto vertical 30 kN superior al del MEM. Una vez se produce el impacto ambos modelos vuelven a perder el contacto de la rueda con el carril, aunque el MEM no lo realiza de manera tan directa como Timoshenko, ya que sobre 130 kN la fuerza vuelve a ascender ligeramente para, finalmente, descender al mismo valor que el de Timoshenko. Este repunte es debido a la flexibilidad de la vía al ser modelada mediante este método.

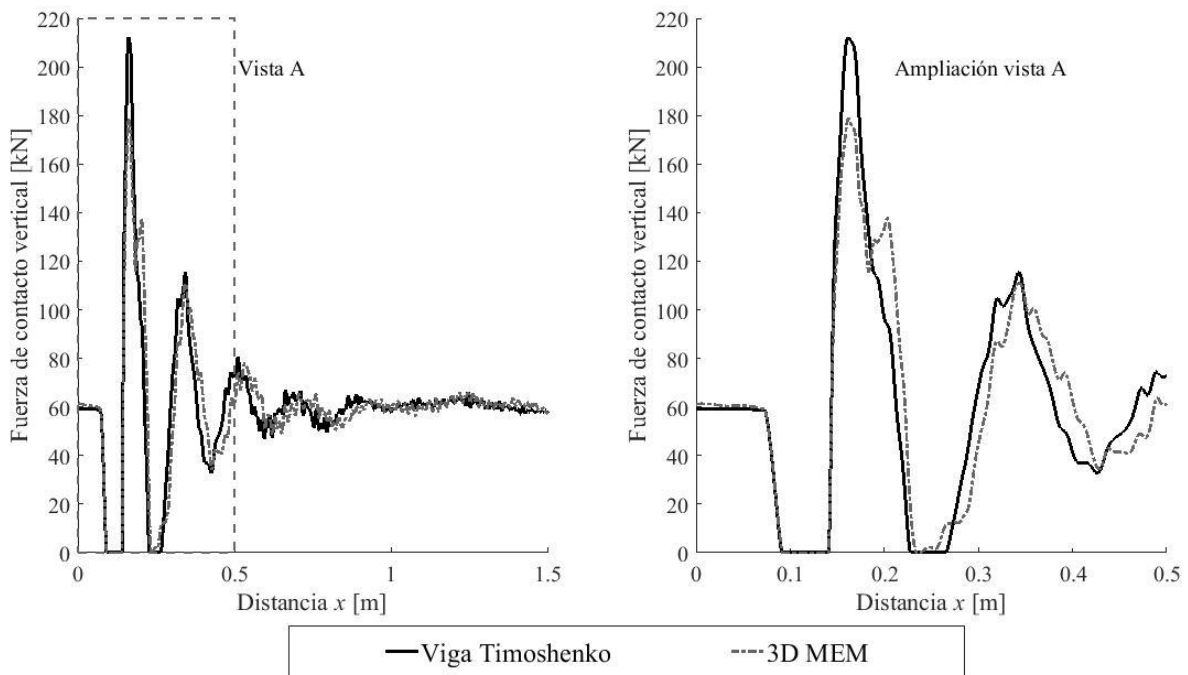


Figura 5.23 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 200 km/h

Si se observa la figura 5.23 se ve como en la simulación a 200 km/h difiere en su comportamiento de las anteriores. A esta velocidad se puede apreciar como en ambos modelos después de producirse el impacto ninguno llega a perder el contacto de la rueda con el carril. Además, cabe destacar que el valor de la fuerza vertical obtenida para ambos modelos es la misma (160 kN) y que a medida que se ha incrementado la velocidad dicho valor ha ido decreciendo. Finalmente, se observa durante el transitorio como la rueda no se aproxima a la situación de pérdida de contacto.

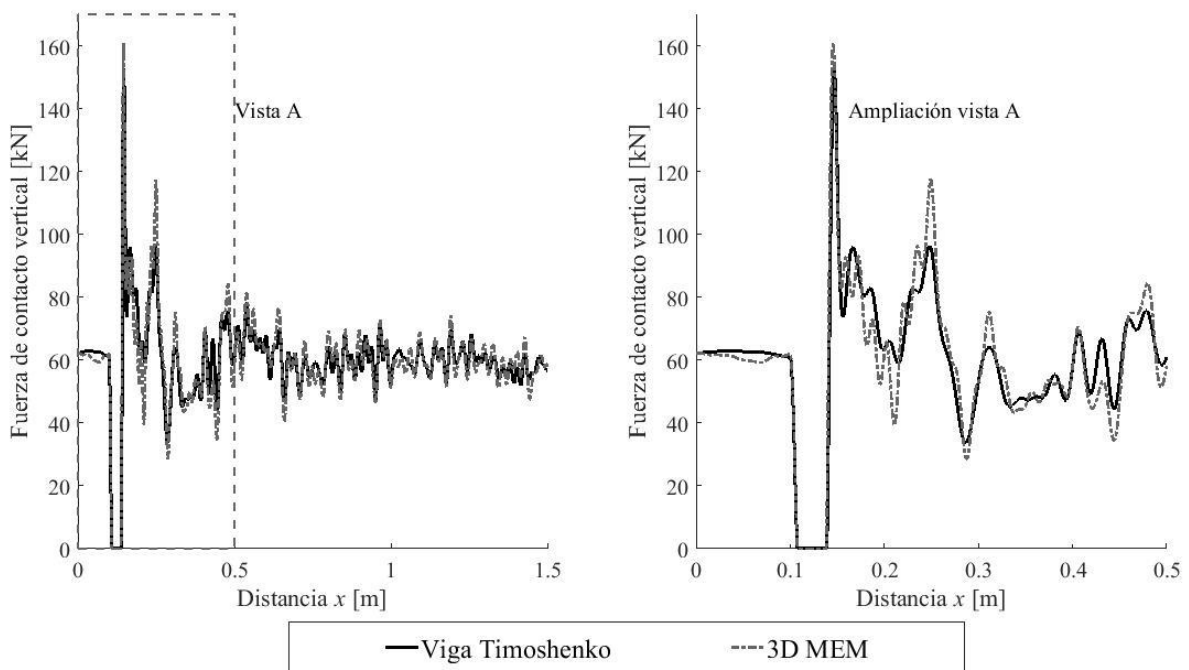


Figura 5.24 Evolución temporal de la fuerza de contacto vertical bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 350 km/h

La simulación realizada para una velocidad de 350 km/h (figura 5.24) difiere de las anteriores. En este caso la magnitud de la fuerza de contacto vertical es ligeramente superior para el MEM que para Timoshenko. También como sucedía para la velocidad de 200 km/h ninguno de los métodos llega a perder el contacto de la rueda con el carril, y en su parte transitoria los valores se encuentran alejados de dicha posibilidad.

Para efectuar el análisis del contenido en frecuencia de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava, se deben visualizar las imágenes 5.25, 5.26, 5.27 y 5.28 para las simulaciones de 50 km/h, 100 km/h, 200 km/h y 350 km/h.

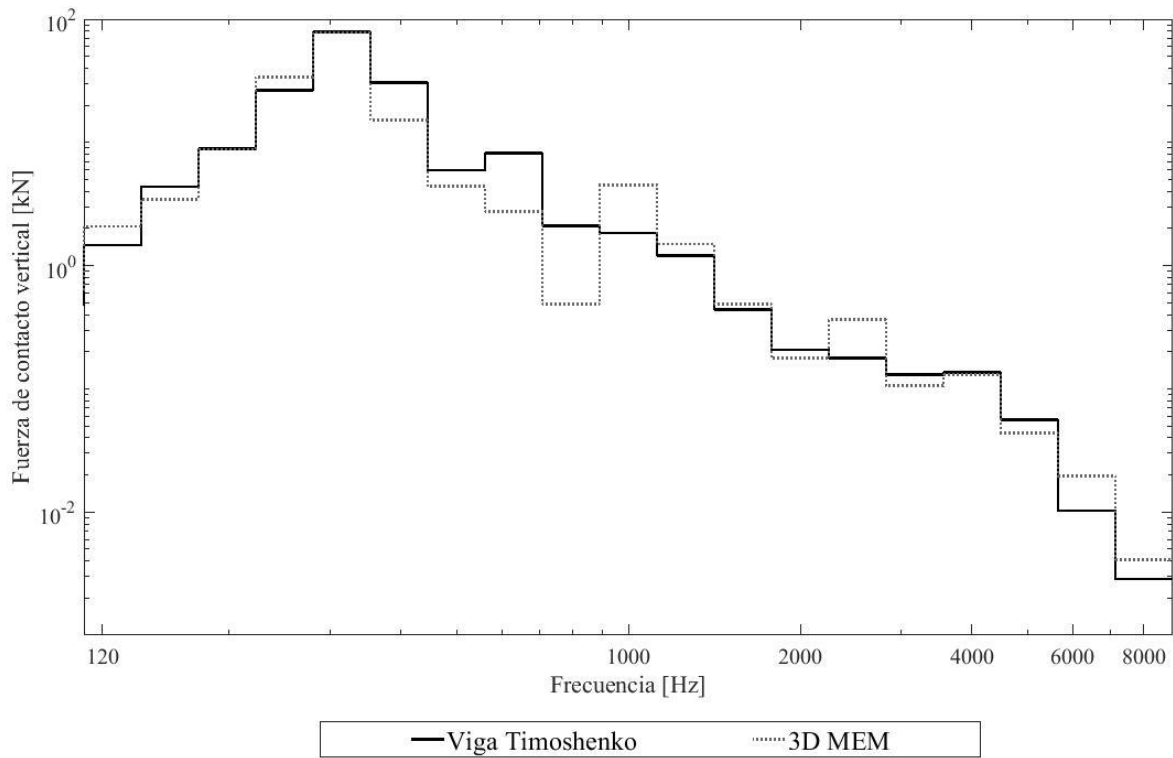


Figura 5.25 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 50 km/h

En la figura 5.25, se puede ver que en la simulación para 50 km/h, debido a que la velocidad todavía es relativamente baja, se puede apreciar cómo tanto el método de Timoshenko como el del MEM presentan un contenido en frecuencia prácticamente similar. Aunque cabe esperar que el método de Timoshenko domine los anchos de baja frecuencia y MEM se focalice en las medias y altas frecuencias.

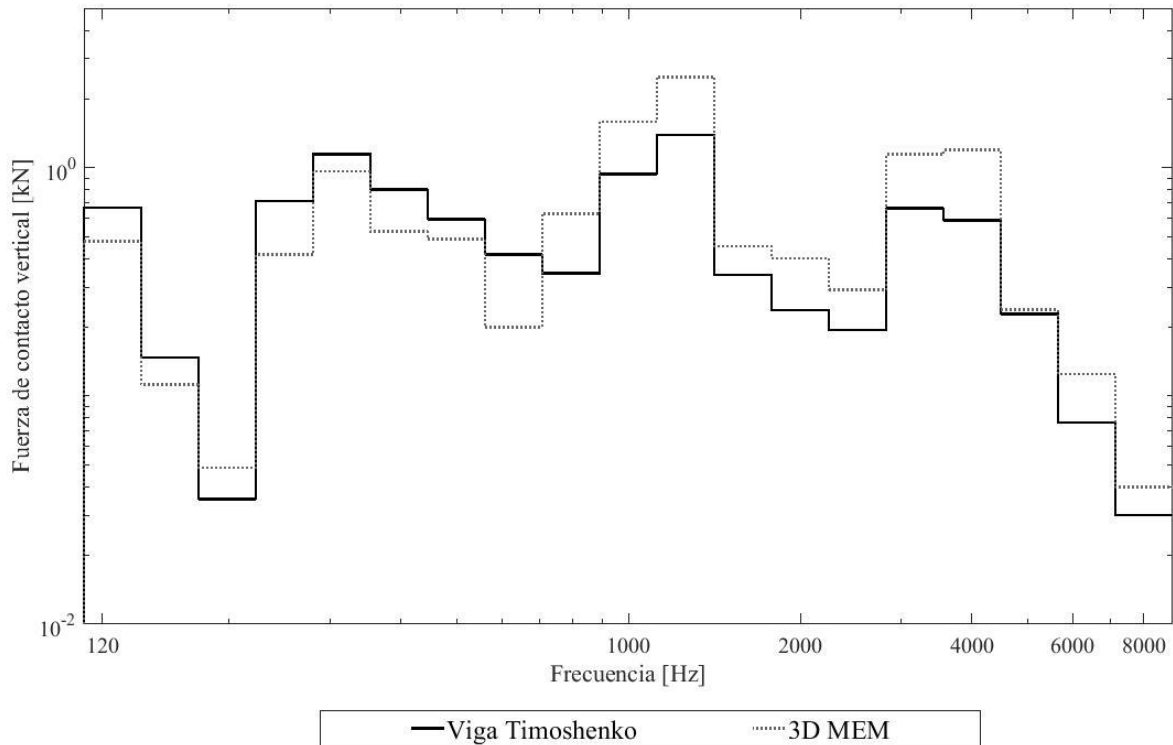


Figura 5.26 Representación de la fuerza de contacto vertical en tercios de octava bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 100 km/h

Para la simulación de 100 km/h (figura 5.26) se puede apreciar como ambos métodos siguen la misma tendencia que para el caso anterior. Se puede empezar a apreciar como para las bajas y medias frecuencias (300 – 900 Hz) el MEM es ligeramente inferior al método de Timoshenko, mientras que a medida que nos aproximamos a las altas frecuencias ambos métodos se vuelven a equilibrar. Esto empezará a divergir a partir de ahora ya que la velocidad empieza a ser considerablemente superior.

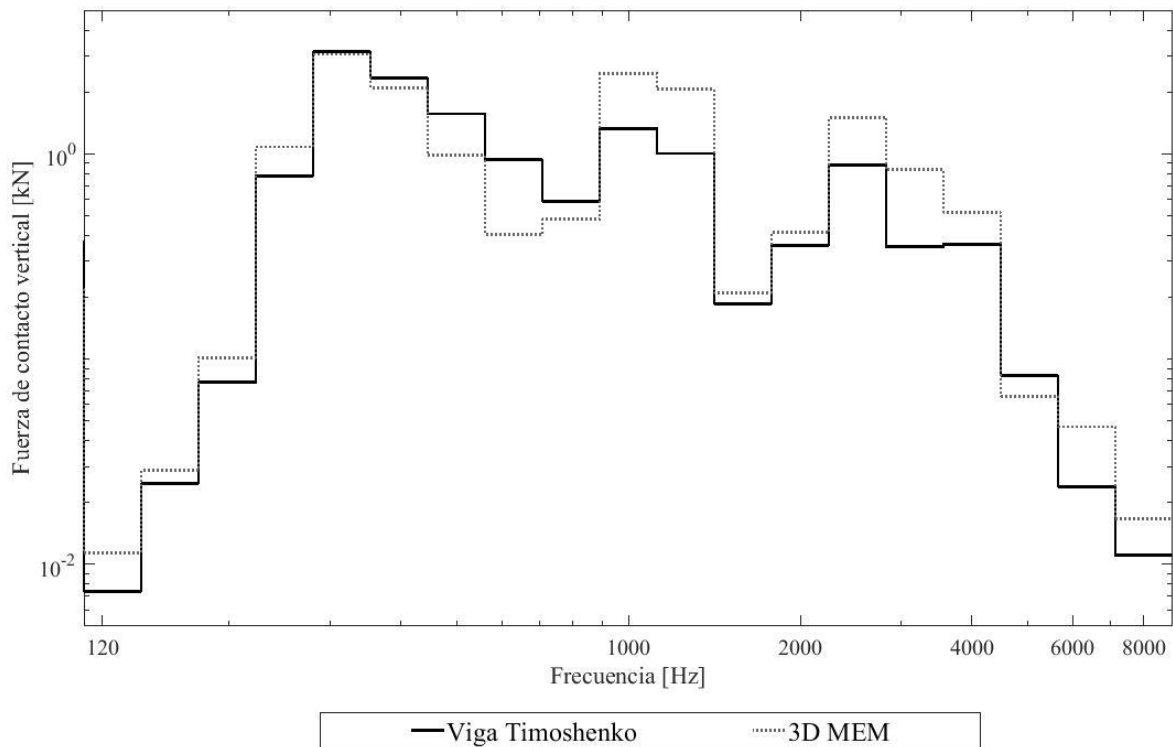


Figura 5.27 Representación de la fuerza de contacto en tercios de octava bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 200 km/h

Para la simulación de 200 km/h (figura 5.27) se puede apreciar como los resultados empiezan a divergir con respecto a las velocidades anteriores, para este caso el Moving Element Method presenta un mayor contenido en frecuencia para medias y altas frecuencias, ya que el MEM responde a unas variaciones dinámicas mayores que Timoshenko. Por otro lado, Timoshenko sigue predominando para las bajas frecuencias, salvo casos puntuales donde el MEM puede ser ligeramente superior.

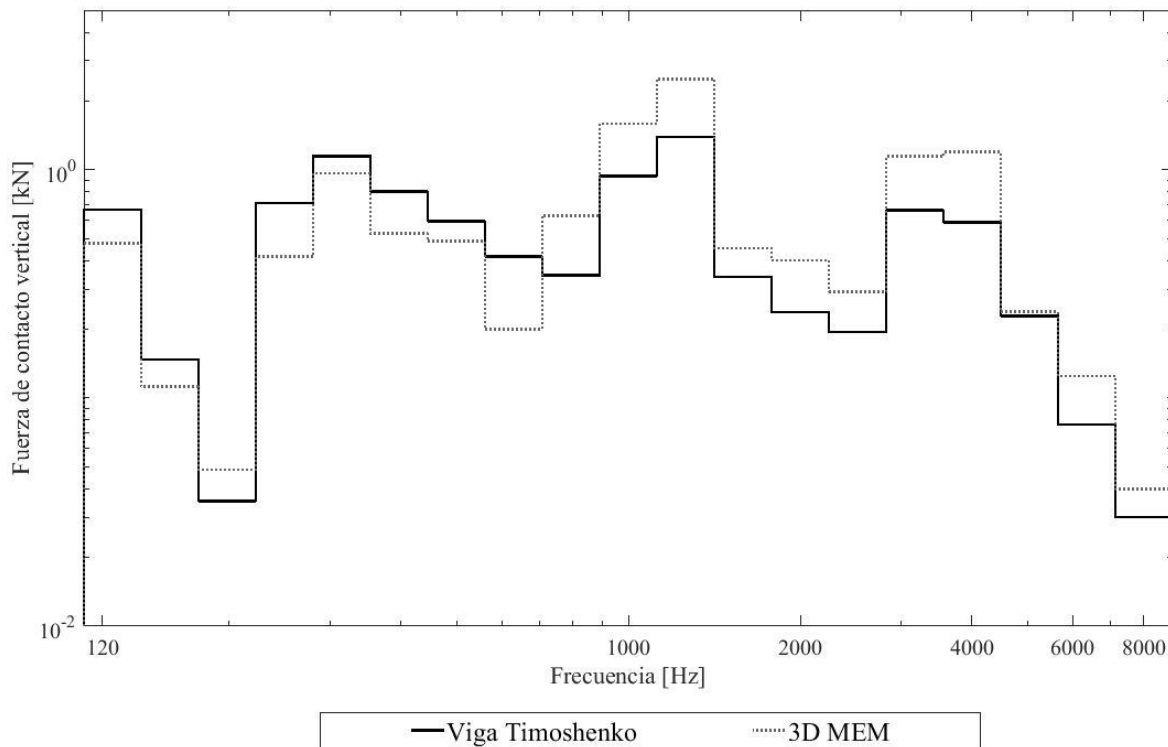


Figura 5.28 Representación de la fuerza de contacto en tercios de octava bajo la excitación de un plano de rueda de 5 cm a 350 km/h

Para la simulación de 350 km/h (figura 5.28) se puede apreciar como el modelo de Timoshenko domina para los anchos de la banda de baja frecuencia salvo en casos puntuales (intervalo de 200 Hz), mientras que cuando se sobrepasan los 700 Hz predomina el MEM (media y alta frecuencia) aunque con escasa diferencia en algunas frecuencias, estableciéndose la máxima diferencia para los valores de alta frecuencia, en concreto a partir de 3000 Hz. Estos armónicos son importantes para el análisis de fenómenos como el ruido de rodadura.

Una vez obtenidos todos los resultados se realiza un análisis del comportamiento de ambos métodos en todas las simulaciones (figura 5.29). En ella se pueden visualizar los valores máximos de las fuerzas de contacto verticales en el momento de impacto de la rueda.

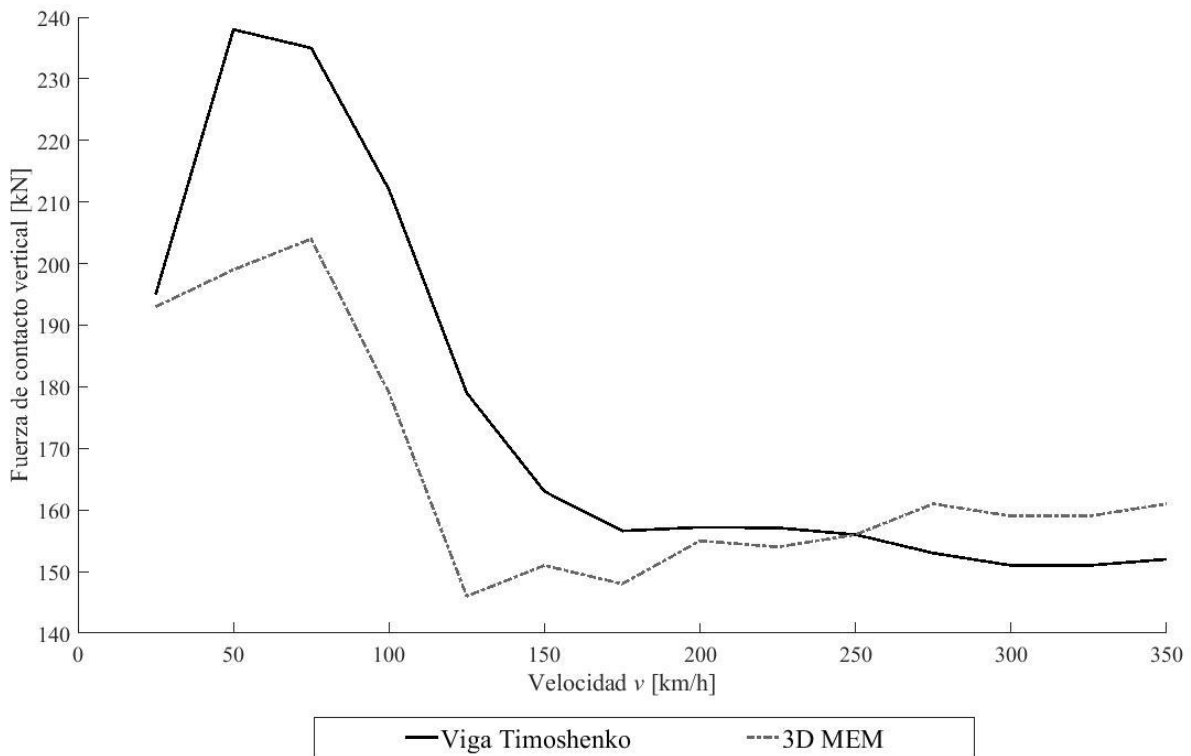


Figura 5.29 Representación de la fuerza de contacto vertical tras el impacto de la rueda

Como se puede visualizar en la figura 5.29, inicialmente, ambos métodos obtienen un valor máximo, en el caso de Timoshenko ocurre a 50 km/h (240 kN), mientras que para el MEM sucede a 75 km/h (210 kN). A partir de ese valor la fuerza de impacto decrece para ambos métodos a medida que se incrementa la velocidad, hasta la velocidad de 125 km/h donde el MEM presenta un valor mínimo de 145 kN y vuelve a crecer, aunque con ligeros valles, hasta los 350 km/h; mientras que para Timoshenko el valor de fuerza mínimo se alcanza para la velocidad de 350 km/h con un valor de 150 kN.

Si se compara la evolución de ambos métodos se puede apreciar cómo hasta 250 km/h Timoshenko presenta mayores valores de fuerza que el MEM, pero a partir de esta velocidad se invierte este hecho, pasando el MEM a mostrar mayores magnitudes a altas velocidades de circulación.

Finalmente, se ha realizado otro estudio en profundidad, como se puede apreciar en la figura 5.30, en el cual se tiene en cuenta el tiempo en que la rueda y el carril han estado sin contacto en función de las diferentes velocidades.

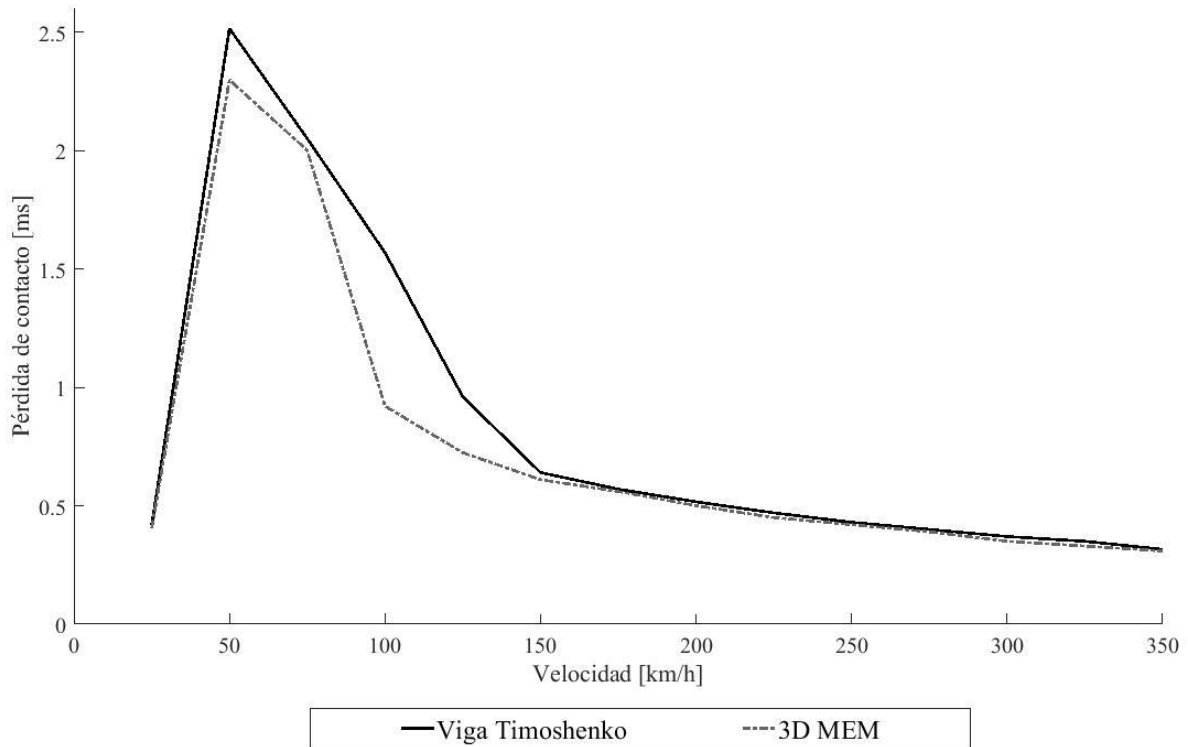


Figura 5.30 Representación de la pérdida de contacto tras el impacto de la rueda

Como se puede apreciar, el modelo de Timoshenko presenta siempre una pérdida de contacto superior a la del MEM, aunque la diferencia disminuye a medida que se va incrementando la velocidad.

Cabe la pena destacar los casos para la velocidad de 100 km/h y 125 km/h en los cuales el método de Timoshenko pierde el contacto rueda-carril en dos ocasiones mientras que en el MEM tan solo se produce en una ocasión, de ahí la clara diferencia de valores.

Otro dato característico es que para la velocidad de 25 km/h, prácticamente la pérdida de contacto es insignificante, ya que el vehículo circula demasiado lento, mientras que incrementando la velocidad otros 25 km/h, es decir, 50 km/h se pierde el contacto en dos ocasiones. Esto quiere decir que para velocidades inferiores a 25 km/h y superiores a 150 km/h el vehículo apenas nota la pérdida de contacto; mientras que para velocidades intermedias si se nota la pérdida ya que en ocasiones se produce hasta 2 veces.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos futuros

Índice

6.1.	Conclusiones.....	102
6.2.	Trabajos futuros.....	103

6.1. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha desarrollado un nuevo modelo 3D para una vía de ferrocarril. Este modelo se denomina 3D Moving Element Method (MEM) y se ha desarrollado como un enfoque de Elementos Finitos para mejorar el modelado de la dinámica de alta frecuencia, ya que el modelo de viga de Timoshenko era bueno solamente en bajas y medias frecuencias.

Este modelo emplea un sistema de coordenadas euleriano unido al vehículo en movimiento en lugar de un sistema de coordenadas fijo y adopta condiciones de límite cíclico. Este enfoque permite disminuir el costo computacional en comparación con los modelos de Elementos Finitos empleados comúnmente.

Centrándose en las simulaciones realizadas se ha podido observar que para el caso de una excitación mediante una rugosidad pseudoaleatoria, ambos métodos siguen la misma evolución dinámica y valor medio, aunque el método de Timoshenko responde de manera más brusca debido a que no considera la deformación de la sección recta del carril, mientras que el método de MEM responde de una manera más suave. Este comportamiento se va acrecentando a medida que se incrementa la velocidad, lo cual provoca que las fuerzas de contacto se incrementen conforme se aumente la velocidad.

En lo que respecta a las figuras de los espectros de frecuencia de tercios de octava, se puede observar como el método de Timoshenko presenta un mayor contenido de frecuencia para las bajas y medias frecuencias, mientras que el MEM se encuentra distribuido a lo largo del espectro de frecuencias, provocando que los máximos valores se encuentren localizados para las altas frecuencias.

Por otro lado, en las simulaciones efectuadas bajo el plano de rueda, se observa una mayor divergencia que para el caso de las simulaciones de rugosidad pseudoaleatoria. A velocidades comprendidas entre 50 km/h y 125 km/h, tanto para el caso de la fuerza de contacto vertical como lateral se observa que se produce una pérdida de contacto en más de una ocasión entre la superficie de rodadura y el carril. Mientras que para muy bajas y altas velocidades la pérdida de contacto se produce en una sola ocasión. También merece la pena destacar como se detalló en la figura 5.30, para las velocidades de 100km/h y 125 km/h, mediante el método de Timoshenko se pierde el contacto en dos ocasiones mientras que con el MEM solo en una ocasión. Esto es debido a que el método de Timoshenko es más rígido (no considera la flexión en la sección recta). Mientras

que a altas velocidades sucede lo contrario es el método del MEM el que presenta unas fuerzas de contacto mayores.

Finalmente teniendo en cuenta el espectro de frecuencias, sucede lo mismo que para el caso de la rugosidad pseudoaleatoria, Timoshenko domina las bajas y medias frecuencias y el MEM es capaz de reproducir las altas frecuencias.

Tras este detallado análisis se puede afirmar que se ha validado un método de modelado de carril apto para la interacción vehículo-vía en rangos de alta frecuencia, ya que este método contempla la deformación de la sección recta del carril, al contrario que sucedía con el modelo de Timoshenko.

6.2. Trabajos futuros

Una vez finalizado el estudio de este trabajo, se pueden establecer ciertas vías de estudio, a través de las cuales se puede profundizar más el conocimiento de la interacción vehículo-vía. Estas vías pueden ser:

- Realizar el estudio de la interacción vehículo-vía en vía curva, sería emplear los mismos métodos, pero introduciendo en el código la dinámica de la curva.
- Otro enfoque que se podría realizar sería realizar la trayectoria completa, es decir, primero un tramo recto, a continuación, un segmento de transición y finalmente una curva.
- Otra futura línea podría ser, que el vehículo no circulara a velocidad constante, sino que hubiera aceleraciones y deceleraciones y ver su influencia tanto para una rugosidad pseudoaleatoria como para el plano de rueda.

Con todo esto lo que se pretende es mejorar el mantenimiento y alargar la durabilidad de los componentes del vehículo y vías, mejorar el confort de los pasajeros e incrementar la velocidad de los vehículos ferroviarios.

Bibliografía

- [1] Gobierno de España. Página web de la Moncloa. 2017. <http://www.lamoncloa.gob.es/espana/eh15/infraestructuras/Paginas/index.aspx>
- [2] José Martínez-Casas, Laura Mazzola, Luis Baeza y Stefano Bruni. Numerical estimation of stresses in railway axles using a train-track interaction model. *International Journal of Fatigue*. 2013
- [3] José Martínez-Casas, Juan Giner-Navarro, L. Baeza y F.D. Denia. Improved railway wheelset-track interaction model in the high-frequency domain. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017
- [4] José Martínez Casas. Modelos dinámicos avanzados de ejes ferroviarios. Tesis Doctoral, 2013
- [5] OC Zienkiewicz, RL Taylor, y JZ Zhu. *The finite element method: its basis and fundamentals*. 2005.
- [6] William Weaver Jr, Stephen P Timoshenko, y Donovan Harold Young. *Vibration problems in engineering*. John Wiley & Sons, 1990.
- [7] JJ Kalker. A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. *Vehicle system dynamics*, 1982
- [8] Luis Baeza y Huajiang Ouyang. A railway track dynamics model based on modal substructuring and a cyclic boundary condition. *Journal of Sound and Vibration*, 2011

