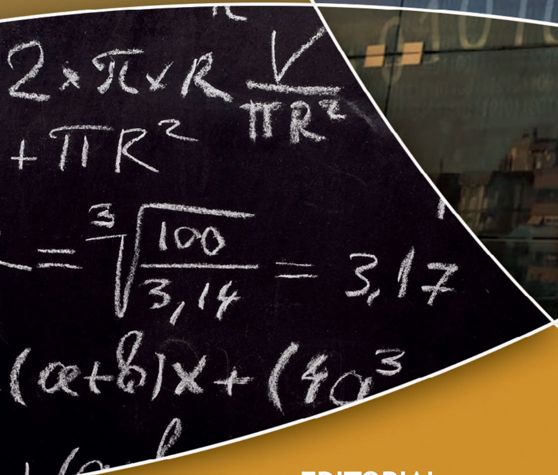
a académica

Modelos matemáticos discretos para Administración y Dirección de Empresas

Problemas resueltos

Juan Carlos Cortés | Llúcia Monreal | Ana Navarro | Almudena Sánchez | Cristina Santamaría | Rafael J. Villanueva |



EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Juan Carlos Cortés López
Llúcia Monreal Mengual
Ana Navarro Quiles
Almudena Sánchez Sánchez
Cristina Santamaría Navarro
Rafael Jacinto Villanueva Micó

Modelos matemáticos discretos para administración y dirección de empresas

Problemas resueltos

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Colección Académica

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:
Cortés López, J. C., et al (2016*). Modelos matemáticos discretos para administración y dirección de empresas. Problemas resueltos*. Valencia: Universitat Politècnica de València

distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0576_08_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-578-1
Impreso bajo demanda

Impreso en España

Resumen

Este texto está diseñado para introducir al lector en el estudio de modelos económicos dinámicos formulados mediante ecuaciones en diferencias de tipo lineal. Para ello se han clasificado los modelos estudiados en diferentes capítulos dependiendo del tipo de ecuación a la que se adapta el modelo. Los modelos que se estudian, aprovechando la potencia del método matemático, juegan un papel relevante en áreas como la Microeconomía, la Macroeconomía, las Finanzas, la Investigación Comercial y Marketing, etc., y pretenden dotas de una formación matemática multidisciplinaria a nuestros estudiantes del Grado en Administración y Dirección de Empresas de la Universitat Politècnica de València.

En el Capítulo 1, se estudian dos tipos de modelos sencillos de naturaleza estática, en primer lugar el modelo lineal estático de mercado con equilibrio y posteriormente varios modelos de renta nacional. El objetivo de este capítulo es mostrar las ideas más relevantes en cuanto a formulación e interpretación de ambos modelos que posteriormente desempeñarán un rol clave al estudiar diferentes versiones dinámicas de dichos modelos. En el Capítulo 2 se muestra una variedad de modelos económicos que están enunciados a través de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden a coeficientes constantes. Entre otros modelos se abordan las generalizaciones de los modelos de mercado y de renta nacional estudiados en el Capítulo 1. El Capítulo 3 realiza un estudio similar, pero únicamente sobre modelos económicos de renta nacional basados en ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden. Los Capítulos 4 y 5 presentan diferentes modelos económicos formulados vía ecuaciones en diferencias lineales de primer orden matriciales homogéneas y no homogéneas, respecti-

vamente. En el Capítulo 4, el elemento unificador de los modelos presentados es que son de tipo markoviano, es decir, la matriz de coeficientes del modelo es probabilística, mientras que en el Capítulo 5 la matriz de coeficientes es más general. Con todos estos modelos presentados a lo largo de este manual se pretende que el alumno se inicie a través de modelos discretos sencillos, pero muy ricos desde el punto de vista formativo, en la modelización matemática de problemas económicos, aspecto que sin duda va a permitir al alumno ser capaz de asimilar las técnicas expuestas a lo largo de este libro, adquiriendo una formación diferencial y muy valiosa en su futuro académico y profesional dentro del marco de la Economía y la Dirección y Administración de Empresas, donde con frecuencia se presentan problemas muy complejos para los que se requiere de una excelente formación cuantitativa.

Índice general

Capítulo 1

Modelo estático

En este capítulo se presentan varios modelos económicos en cuya formulación no aparece la variable tiempo, se trata por tanto de modelos estáticos. Estos modelos desempeñan un rol formativo importante por dos motivos, primero porque permiten introducirse de manera sencilla en los principales aspectos de la modelización matemática en Economía y, en segundo lugar, porque las soluciones de los modelos estáticos coinciden a menudo con el comportamiento asintótico a largo plazo de los modelos dinámicos que se abordarán en capítulos posteriores. A lo largo del capítulo se estudian, en primer lugar y a través de varios ejemplos particulares, los elementos y conceptos básicos del modelo lineal estático de equilibrio para un mercado de un único bien. Este modelo está caracterizado por tres ecuaciones, las de oferta y demanda (que se asumen lineales), y una tercera ecuación, denominada de equilibrio, que impone la condición de excedente nulo (la demanda y la oferta coinciden). Posteriormente se estudian varios modelos de renta nacional, incluyendo el importante modelo macro-económico ISLM.

1.1 Estudio de un modelo lineal estático de mercado. Cálculo del equilibrio I

Dado el modelo de mercado de un bien

$$\left.\begin{array}{rcl} Q_S & = & Q_D, \\ Q_D & = & 5 - 2P, \\ Q_S & = & -7 + 4P, \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

donde Q_S y Q_D son las funciones de oferta y demanda respectivamente, y P es el precio del producto.

Apartado (a)

Calcula el precio de equilibrio, P_e, y la producción de equilibrio, Q_e.

Solución

El precio de equilibrio, P_e, se obtiene cuando las funciones de oferta y demanda coinciden, es decir, $Q_S = Q_D$. Teniendo en cuenta los valores de ambas, dados en (1.1), se obtiene el precio de equilibrio

$$Q_S = Q_D \Rightarrow 5 - 2P = -7 + 4P \Rightarrow P_\mathrm{e} = 2.$$

Ahora calculamos la producción de equilibrio, Q_e, sustituyendo su valor en la función de demanda (o de oferta)

$$Q_\mathrm{e} = Q_D(2) = 5 - 2 \times 2 = 1.$$

Apartado (b)

Dibuja en la misma gráfica las funciones Q_S y Q_D. ¿Hay intersección? Si la hay, interprétala económicamente.

Solución

Representamos ambas funciones, $Q_S(P)$ y $Q_D(P)$ (Figura 1.1).

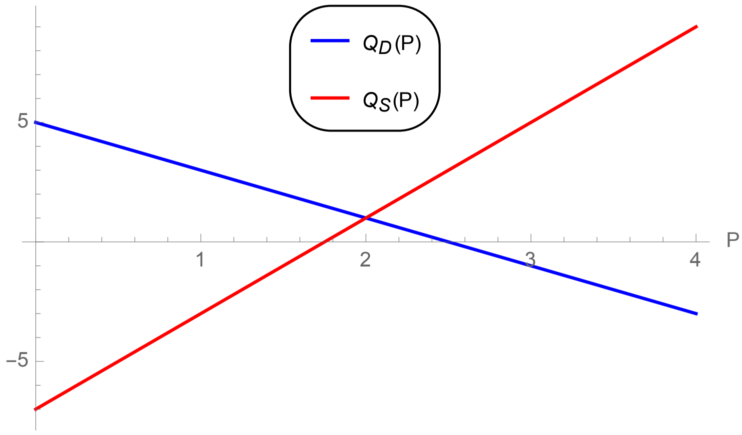


Figura 1.1: Representación gráfica de la función de demanda (azul) y la función de oferta (rojo), dadas por el modelo (1.1).

Como podemos observar hay intersección en el punto $(P_e, Q_e) = (2, 1)$. De acuerdo con el apartado anterior, las coordenadas de este punto se corresponden con el precio de equilibrio (1ª coordenada) y la producción de equilibrio (2ª coordenada). Económicamente, dicho punto es útil para que el exceso de demanda y de oferta sea nulo, y por tanto no haya excedente.

Apartado (c)

Calcula el precio, P, para el cual $Q_D = 0$. Interpreta económicamente dicho valor de P.

Solución

Calculamos el valor del precio que anula la función de demanda, esto es

$$Q_D = 0 \Rightarrow 5 - 2P = 0 \Rightarrow P = \frac{5}{2}.$$

Este precio indica el precio máximo que los consumidores están dispuestos a pagar por el producto.

Apartado (d)

Calcula el precio, P, para el cual $Q_S = 0$. Interpreta económicamente dicho valor de P.

Solución

Calculamos el valor del precio que anula la función oferta, esto es

$$Q_S = 0 \Rightarrow -7 + 4P = 0 \Rightarrow P = \frac{7}{4}.$$

Este precio puede interpretarse como el precio que la compañía paga por poner el producto en el mercado, es decir, los costes totales de producción.

1.2 Estudio de un modelo lineal estático de mercado. Cálculo del equilibrio II

Dado el modelo de mercado de un bien

$$\left.\begin{array}{rcl} Q_S &=& Q_D, \\ Q_D &=& 14 - 5P, \\ Q_S &=& -2 + 3P, \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

donde Q_S y Q_D son las funciones de oferta y demanda respectivamente, y P es el precio del producto.

Apartado (a)

Calcula el precio de equilibrio, P_{e}, y la producción de equilibrio, Q_{e}.

Solución

Resolviendo el sistema dado en (1.2), tenemos que

$$Q_{\mathrm{e}} = Q_D = Q_S = 4, \quad P_{\mathrm{e}} = 2.$$

Apartado (b)

Dibuja en la misma gráfica las funciones Q_S y Q_D. ¿Hay intersección? Si la hay, interprétala económicamente.

Solución

La representación gráfica de las funciones Q_S y Q_D se muestra en la Figura 1.2.

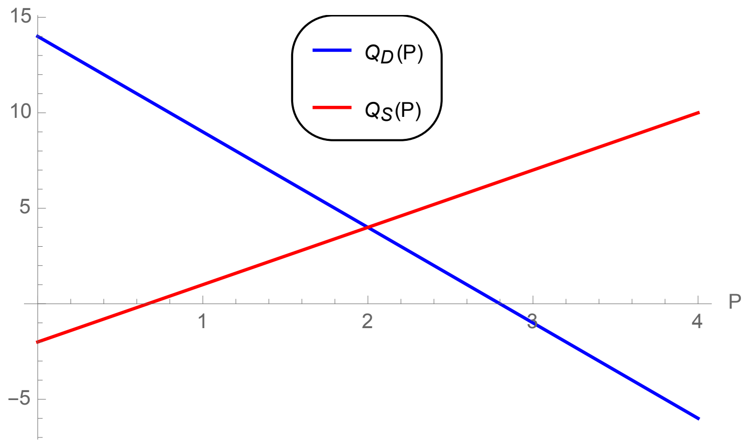


Figura 1.2: Representación gráfica de la función de demanda (azul) y la función de oferta (rojo), dadas por el modelo (1.2).

Sí, hay intersección. Dicha intersección corresponde al punto $(P_{\mathrm{e}}, Q_{\mathrm{e}}) = (2, 4)$, donde 2 es el precio de equilibrio y 4 la producción de equilibrio.

Apartado (c)

Calcula el precio para el cual $Q_D = 0$. Interpreta económicamente dicho valor de P.

Solución

Resolvemos la ecuación indicada en el apartado

$$Q_D = 0 \Rightarrow 14 - 5P = 0 \Rightarrow P = \frac{14}{5}.$$

Este valor $P = \frac{14}{5}$ representa el precio máximo que pagará un cliente para adquirir el producto.

Apartado (d)

Calcula el precio para el cual $Q_S = 0$. Interpreta económicamente dicho valor de P.

Solución

Resolvemos la ecuación indicada en el apartado

$$Q_S = 0 \Rightarrow -2 + 3P = 0 \Rightarrow P = \frac{2}{3}.$$

Este valor $P = \frac{14}{5}$ representa el precio mínimo por el cual el productor empezará a producir.

1.3 Estudio conjunto de cinco modelos estáticos de renta nacional

Una de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales (s.e.l.) a la Economía, es el estudio de los **modelos de mercado de renta nacional**. Se trata de la descripción matemática a través de un s.e.l. del comportamiento de la renta de un país. Las variables que intervienen en el modelo suelen ser de carácter macroeconómico (gastos públicos, impuestos, inversión pública, renta del país, etc) y están relacionadas de forma lineal (combinaciones lineales de las mismas). Se trata de modelos muy sencillos, que aunque son groseros para describir un comportamiento tan sofisticado como el que puede tener la renta nacional de un país, tienen mucho interés pedagógico como un primer paso para introducirse posteriormente en el estudio de modelos más elaborados. Por ejemplo, muchas veces las soluciones de estos modelos estáticos (es decir, aquellos en los que no aparece dependencia temporal) aparecen como los valores límite de las soluciones de modelos dinámicos (esto es aquellos en los que en su formulación se considera la variable tiempo).

Lo que sigue de este problema, está dedicado a estudiar los siguientes tipos de modelos lineales de renta nacional, aunque al final del problema, te propondremos que estudies un modelo no lineal particular, para que comprendrás que no siempre tiene por qué ser lineal la formulación del modelo.

- **Modelo lineal keynesiano de renta nacional**.

$$\left.\begin{array}{rcl} Y &=& C + I_0 + G_0, \\ C &=& a + bY, \end{array}\right\} \quad (a > 0,\ 0 < b < 1), \tag{1.3}$$

siendo Y la renta (o ingresos) nacionales, C los gastos del consumo, I_0 la inversión pública y G_0 los gastos públicos.

- **Modelo lineal de renta nacional con impuestos dependientes de la renta**.

$$\left.\begin{array}{rcl} Y &=& C + I_0 + G_0, \\ C &=& a + b(Y - T), \\ T &=& d + tY, \end{array}\right\} \quad (a, d > 0,\ 0 < b, t < 1), \tag{1.4}$$

teniendo Y, C, I_0 y G_0 el mismo significado que en el modelo lineal de Keynes, y siendo T los impuestos.

- **Modelo lineal de renta nacional con gastos públicos dependientes de la renta.**

$$\left.\begin{array}{rcl} Y &=& C + I_0 + G, \\ C &=& a + b\,(Y - T_0)\,, \\ G &=& gY, \end{array}\right\} \quad (a > 0,\ 0 < b, g < 1), \tag{1.5}$$

teniendo Y, C e I_0 el mismo significado que en el modelo lineal de Keynes, y siendo T_0 y G los impuestos y los gastos públicos, respectivamente.

- **Modelo lineal de renta nacional con importaciones dependientes de la renta.**

$$\left.\begin{array}{lcl} Y & = & C + I_0 + G_0 + X_0 - M, \\ C & = & a + bY, \\ M & = & c + dY, \end{array}\right\} \quad (a > 0, c < 0, 0 < b, d < 1), \tag{1.6}$$

teniendo Y, C, I_0 y G_0 el mismo significado que en el modelo (1.3), y siendo X_0 y M las exportaciones y las importaciones, respectivamente.

- **Modelo lineal de renta nacional con inversiones e impuestos dependientes de la renta.**

$$\left.\begin{array}{lcl} Y & = & C + I + G_0, \\ C & = & a + b(Y - T), \\ I & = & c + dY, \\ T & = & eY, \end{array}\right\} \quad (a, c > 0,\ 0 < b, d, e < 1), \tag{1.7}$$

teniendo Y, C, I, T y G_0 el mismo significado que el introducido en los modelos anteriores.

A continuación se plantearán una serie de cuestiones, muy parecidas para cada uno de los modelos anteriores, con objeto de compararlos, las cuales deberán responderse únicamente mediante el método de resolución que se especifique.

Apartado (a)

Para cada uno de los cinco modelos anteriores, especifica en una tabla ordenada, cuáles son las variables endógenas, las exógenas y los parámetros.

Solución

Las variables endógenas son las incógnitas de cada modelo, las variables exógenas son las variables de carácter económico que están previamente fijadas y suelen detectarse porque van etiquetadas con un subíndice, y los parámetros son el resto de las variables que aparecen en el modelo que no representan directamente ninguna magnitud económica, aunque sí suelen tener interpretación económica.

	variables endógenas	variables exógenas	parámetros
modelo (1.3)	Y, C	I_0, G_0	a, b
modelo (1.4)	Y, C, T	I_0, G_0	a, b, d, t
modelo (1.5)	Y, C, G	I_0, T_0	a, b, g
modelo (1.6)	Y, C, M	I_0, G_0, X_0	a, b, c, d
modelo (1.7)	Y, C, I, T	G_0	a, b, c, d, e

Apartado (b)

Mediante una tabla ordenada, explica el significado económico de los parámetros que se especifican en cada modelo:

Modelo (1.3): a y b.

Modelo (1.4): d y t.

Modelo (1.5): g.

Modelo (1.6): c y d.

Modelo (1.7): c y d.

Solución

Para el modelo (1.3):

a: representa el *consumo autónomo* o consumo fijo debido a las necesidades primarias. Lógicamente $a > 0$.

b: representa la *propensión marginal al consumo* la cual está dada siempre como una proporción ($0 < b < 1$). Se puede interpretar como el porcentaje de renta que se dedica al consumo.

Para el modelo (1.4):

d: representa los *impuestos autónomos* o fijos debido a las prestaciones o servicios básicos. Lógicamente $d > 0$.

t: representa la *tasa impositiva sobre la renta,* la cual está dada siempre como una proporción ($0 < t < 1$). Se puede interpretar como el porcentaje de renta que se destina a pagar impuestos.

Para el modelo (1.5):

g: representa la *propensión marginal al gasto público* o la proporción de la renta nacional que se dedica a pagar los impuestos públicos. Por ser una proporción $0 < g < 1$.

Para el modelo (1.6):

c: representa las *exportaciones autónomas* o fijas que requiere realizar el país. Obsérvese, que si hacemos $Y = 0$ en la última ecuación del modelo (1.6), es decir, si no hubiese renta, hay necesidades que las importaciones no cubren $M = c < 0$.

d: representa la *propensión marginal a la importación,* la cual está dada siempre como una proporción ($0 < d < 1$). Se puede interpretar como el porcentaje de renta que se destina a realizar importaciones.

Para el modelo (1.7):

c: representa los *inversión autónoma* o fija que tiene que afrontar el país. Lógicamente, $c > 0$.

d: representa la *propensión marginal a invertir,* la cual está dada siempre como una proporción ($0 < d < 1$). Se puede interpretar como el porcentaje de renta que se destina a la inversión.

Apartado (c)

Explica de forma separada, el significado económico de cada uno de los modelos. (Sugerencia: puede analizarse primero brevemente el significado de cada ecuación, y después el sistema globalmente).

Solución

Para el modelo (1.3):

Se trata de un modelo lineal muy simple para explicar la renta de un país establecido a partir de la siguiente ecuación tipo Keynes (todo lo que se ahorra se invierte), es decir,

AHORRO(renta o ingresos)=INVERSIÓN (gastos de los agentes).

Los gastos de consumo se consideran como una función lineal creciente de la renta nacional Y. Los parámetros a y b de esta recta se han interpretado económicamente en el apartado anterior.

Para el modelo (1.4):

Se trata de un modelo lineal sobre la renta de un país establecido a partir de la misma ecuación que en el modelo (1.3), aunque ahora se supone que el consumo C es una función lineal de la renta disponible (el valor resultante de descontar los impuestos a la renta: $Y - T$). Por otra parte, se supone que los impuestos son variables, y dependen linealmente de forma creciente del nivel de renta: a mayor nivel de renta, mayor es el pago de impuestos, siendo una parte de este pago fija.

Para el modelo (1.5):

Al igual que para los otros dos modelos (1.3) y (1.4), éste se basa en la misma ecuación AHORRO = INVERSIÓN. Ahora el consumo C es una función lineal de la renta disponible $(Y - T_0)$, siendo ahora los impuestos una cantidad fija. Por otra parte, se supone que los gastos públicos son variables, y directamente proporcionales al nivel de renta.

Para el modelo (1.6):

Al igual que para los otros modelos (1.3)–(1.5), éste se basa en la misma ecuación de equilibrio tipo Keynes: AHORRO = INVERSIÓN. En este caso los gastos domésticos de consumo C y las importaciones del país se supone que son funciones lineales de la renta Y.

Para el modelo (1.7):

Al igual que para los otros modelos (1.3)–(1.6), éste se basa en la misma ecuación de equilibrio tipo Keynes: AHORRO = INVERSIÓN. En este caso se supone que el consumo y la inversión son funciones lineales de la renta disponible $(Y - T)$ y de la renta (Y), respectivamente, y que los impuestos son directamente proporcionales al nivel de renta Y.

Apartado (d)

Para el modelo (1.3), determina los valores de equilibrio de la renta, $\bar{Y}$, y del consumo, $\bar{C}$. Analiza el signo de los valores $\bar{Y}$ y $\bar{C}$ obtenidos, y si es necesario, establece restricciones sobre las variables exógenas y los parámetros del modelo para que éste sea consistente.

A partir de las expresiones obtenidas para los valores de equilibrio, demuestra que $\bar{Y} > \bar{C}$, es decir, en el equilibrio el nivel de renta del país es mayor que el nivel de consumo. ¿Se te ocurre otra forma más sencilla de probar esta desigualdad?

Solución

Con el comando **Solve** de Mathematica podemos resolver el s.e.l. (1.3), obteniendo

$$\bar{Y} = -\frac{a + I_0 + G_0}{-1 + b}, \quad \bar{C} = -\frac{a + bI_0 + bG_0}{-1 + b}.$$

No es necesario establecer ninguna condición de consistencia sobre las variables exógenas y los parámetros, ya que, los valores obtenidos de $\bar{Y}$ y $\bar{C}$ están bien definidos, pues como $0 < b < 1$, el denominador no se anula (es negativo) y como $a, b, I_0, G_0 > 0$, se tiene que $\bar{Y} > 0$ y $\bar{C} > 0$.

Obsérvese que la solución de equilibrio es única.

Para ver que $\bar{Y} > \bar{C}$, basta reescribir la solución de equilibrio de la siguiente forma equivalente, y tener en cuenta que $0 < b < 1$:

$$\bar{Y} = \frac{a}{1-b} + \frac{I_0 + G_0}{1-b} > \frac{a}{1-b} + b\frac{I_0 + G_0}{1-b} = \bar{C}.$$

También podemos probar que $\bar{Y} > \bar{C}$ de la siguiente forma: dado que $\bar{Y}$ y $\bar{C}$ son soluciones del s.e.l. (1.3), en particular satisfacen la primera ecuación, luego

$$\bar{Y} = \bar{C} + I_0 + G_0 \Longrightarrow \bar{Y} - \bar{C} = I_0 + G_0$$

y como $I_0, G_0 > 0$ se deduce que $\bar{Y} > \bar{C}$.

Apartado (e)

Para el modelo (1.4), demuestra utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius que el s.e.l. tiene solución única.

Determina los valores de equilibrio de la renta, $\bar{Y}$, del consumo, $\bar{C}$ y de los impuestos, $\bar{T}$. Analiza el signo de los valores $\bar{Y}$, $\bar{C}$ y $\bar{T}$ obtenidos, y si es necesario, establece restricciones sobre las variables exógenas y los parámetros del modelo, para que éste sea consistente.

Demuestra que al igual que en el modelo (1.3), también ahora se tiene que $\bar{Y} > \bar{C}$.

Solución

Escribimos el s.e.l. del modelo en forma estándar (incógnitas a la izquierda y términos independientes a la derecha):

$$\left.\begin{array}{lcl} Y - C & = & I_0 + G_0, \\ -bY + C + bT & = & a, \\ -tY + T & = & d. \end{array}\right\}$$

Consideramos la matriz $\;A \mid B\;$ ampliada del sistema

$$A \mid B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & I_0 + G_0 \\ -b & 1 & b & a \\ -t & 0 & 1 & d \end{array}\right),$$

y clasificamos el s.e.l. aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello observemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Det}[A] = 1 - b - bt.$$

como $0 < b, t < 1$, se tiene que $0 < b(1-t) < 1$, luego

$$\det(A) = 1 - b(1-t) > 0, (\text{en particular} : \det(A) \neq 0)$$

y el modelo tiene solución única, la cual puede calcularse mediante Mathematica con el comando **Solve**

$$C = \frac{a - b\,(d + (-1+t)I_0) + (b - bt)G_0}{1 + b(-1+t)}, \quad Y = \frac{a - bd + I_0 + G_0}{1 + b(-1+t)},$$

$$T = \frac{d - bd + t\,(a + I_0) + tG_0}{1 + b(-1+t)}.$$

Acabamos de ver que el denominador de estos valores es siempre positivo, ahora debemos ver bajo qué condiciones lo es el numerador para que estas variables económicas estén bien definidas. En principio debemos exigir que

$$\begin{array}{lcl} \text{Para } \bar{Y} & : & a - bd + I_0 + G_0 > 0, \\ \text{Para } \bar{C} & : & a - bd + b(1-t)\,(I_0 + G_0) > 0, \\ \text{Para } \bar{T} & : & ta - bd + d + t\,(I_0 + G_0) = ta + d(1-b) + t\,(I_0 + G_0) > 0. \end{array}$$

Observemos que las hipótesis sobre los parámetros garantizan que la tercera desigualdad siempre se cumpla. Además como $0 < b, t < 1$, entonces $0 < b(1- t) < 1$, y se tiene que

$$a - bd + b(1-t)\,(I_0 + G_0) < a - bd + I_0 + G_0,$$

por lo tanto bastará exigir la siguiente condición para que la solución de equilibrio sea consistente

$$a - bd + b(1-t)\,(I_0 + G_0) > 0.$$

Como antes, para ver que $\bar{Y} > \bar{C}$, basta reescribir la solución de equilibrio de la siguiente forma equivalente, y tener en cuenta que $0 < b(1-t) < 1$

$$\bar{Y} = \frac{a - bd}{1 - b(1-t)} + \frac{I_0 + G_0}{1 - b(1-t)} > \frac{a - bd}{1 - b(1-t)} + b(1-t)\frac{I_0 + G_0}{1 - b(1-t)} = \bar{C},$$

o bien, más brevemente, como $\bar{Y}$ y $\bar{C}$, son soluciones del s.e.l., en particular satisfacen la primera ecuación: $\bar{Y}-\bar{C}=I_0+G_0$, y como por hipótesis, $I_0, G_0 > 0$, se deduce que $I_0+G_0>0$, y por tanto: $\bar{Y}-\bar{C}>0$, o equivalentemente: $\bar{Y}>\bar{C}$.

Apartado (f)

Para el modelo (1.5), demuestra utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius que el s.e.l. tiene solución única sí y sólo sí $b+g \neq 1$.

Utilizando la regla de Cramer, determina los valores de equilibrio de la renta, $\bar{Y}$, del consumo, $\bar{C}$ y de los gastos públicos $\bar{G}$.

Analiza el signo de los valores $\bar{Y}$, $\bar{C}$ y $\bar{G}$ obtenidos, y si es necesario, establece restricciones sobre las variables exógenas y los parámetros del modelo para que éste sea consistente.

Prueba que $\bar{Y}>\bar{G}$ siempre. También sería deseable que en el estado de equilibrio se cumpliese $\bar{Y}>\bar{C}+\bar{G}$. Justifica que esto se satisface.

Solución

Consideramos la matriz $\left(A \mid B\right)$ ampliada del sistema

$$\left(A \mid B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & I_0 \\ -b & 1 & 0 & a-bT_0 \\ -g & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

y clasificamos el s.e.l. aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello observemos que

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Det}[A]=1-b-g,$$

como $0<b,g<1$, podría suceder que $b+g=1$, luego, el s.e.l. tiene solución única sí y sólo sí $b+g\neq 1$, y en ese caso la solución de equilibrio la podemos calcular aplicando la regla de Cramer

$$\bar{Y} = \frac{\begin{vmatrix} I_0 & -1 & -1 \\ a - bT_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - (b+g)} = \frac{a - bT_0 + I_0}{1 - (b+g)},$$

$$\bar{C} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & I_0 & -1 \\ -b & a - bT_0 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - (b+g)} = \frac{(a - bT_0)(1-g) + bI_0}{1 - (b+g)},$$

$$\bar{G} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & I_0 \\ -b & 1 & a - bT_0 \\ -g & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1 - (b+g)} = \frac{g\,(a - bT_0 + I_0)}{1 - (b+g)}.$$

Ahora debemos ver bajo qué condiciones sobre las variables exógenas y los parámetros, estos valores de equilibrio son positivos, tal y como debe suceder desde el punto de vista económico. En principio debemos exigir que

$$\begin{array}{lcl} \text{Para } \bar{Y} & : & (a - bT_0 + I_0)(1 - (b+g)) > 0. \\ \text{Para } \bar{C} & : & ((a - bT_0)(1-g) + bI_0)(1 - (b+g)) > 0. \\ \text{Para } \bar{G} & : & g\,(a - bT_0 + I_0)(1 - (b+g)) > 0. \end{array}$$

Ahora bien, como $0 < g < 1$

$$(a - bT_0 + I_0)(1 - (b+g)) > g\,(a - bT_0 + I_0)(1 - (b+g)),$$

y por lo tanto será suficiente exigir las siguientes condiciones para que la solución de equilibrio sea consistente

$$\begin{gathered} ((a - bT_0)(1-g) + bI_0)(1 - (b+g)) > 0, \\ g\,(a - bT_0 + I_0)(1 - (b+g)) > 0, \end{gathered}$$

pues la segunda desigualdad garantiza que $\bar{Y}$, $\bar{G} > 0$, y la primera que $\bar{C} > 0$.

Veamos que $\bar{Y} > \bar{G}$. Para ello basta observar que como $0 < g < 1$ se tiene

$$\bar{Y} = \frac{a - bT_0 + I_0}{1 - (b+g)} > g\frac{a - bT_0 + I_0}{1 - (b+g)} = g\bar{Y} = \bar{G},$$

esto también se deduce del hecho de que si $\bar{Y}$ y $\bar{G}$ son soluciones del s.e.l., en particular satisfacen la última ecuación: $G = gY$, y como $0 < g < 1$, se tiene que $\bar{Y} > \bar{G}$.

Además (bajo las condiciones para que el equilibrio esté bien definido) siempre se cumple que

$$\bar{Y} - (\bar{C} + \bar{G}) = \frac{a - bT_0 + I_0}{1 - (b+g)} - \left(\frac{(a - bT_0)(1-g) + \mathrm{bI}_0}{1 - (b+g)} + g\frac{a - bT_0 + I_0}{1 - (b+g)} \right) = I_0 > 0.$$

Esto también puede justificarse teniendo en cuenta que por ser $\bar{Y}$, $\bar{C}$ y $\bar{G}$ soluciones del s.e.l. (1.5) deben de satisfacer la primera ecuación

$$\bar{Y} = \bar{C} + I_0 + \bar{G} \Longrightarrow \bar{Y} - \left(\bar{C} + \bar{G}\right) = I_0.$$

y como $I_0 > 0$, $\bar{Y} - \left(\bar{C} + \bar{G}\right) > 0$.

Apartado (g)

Para el modelo (1.6), demuestra utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius bajo qué condiciones el s.e.l. tiene solución única.

Utiliza el método de la matriz inversa, para determinar los valores de equilibrio de la renta, $\bar{Y}$, del consumo, $\bar{C}$ y de las importaciones $\bar{M}$. Analiza el signo de los valores $\bar{Y}$, $\bar{C}$ y $\bar{M}$ obtenidos, y si es necesario, establece restricciones sobre las variables exógenas y los parámetros del modelo para que éste sea consistente.

Justifica que en el equilibrio también se tiene la condición: $\left(\bar{Y} + \bar{M}\right) - \bar{C} > 0$.

Para seguir leyendo haga click aquí