

Desarrollo de un Modelo Markoviano para el Movimiento de Subyacentes Cotizados

Implementación para Activos de IBEX 35

CURSO 2016-2017

Autor:

Miguel Grau Pachés



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Directores:

Dr. Juan Carlos Cortés López

Dra. Cristina Santamaría Navarro



Facultad de Administración y Dirección de Empresas

Agradecimientos

Desde que empecé el grado en Administración y Dirección de empresas, pensaba en este momento, en el de la redacción y entrega del TFG. Para mí, es un momento muy importante, ya que significa el fin de una etapa plagada de esfuerzos, errores, alegrías y enfados, pero sobretodo, buenos recuerdos.

Quiero dar las gracias, en primer lugar, a Juan Carlos Cortés, mi tutor, por haberme ayudado tantísimo y haber estado ahí, a horas intempestivas, solo para que yo pudiese terminar este proyecto. De verdad, un millón de gracias.

También quiero dar las gracias a Guillem, al otro Guillem, A Toni, al otro Toni, a David, a Roberto y a Joan, por estar ahí, formando parte de mi familia, mientras he estado estudiando fuera de casa.

Para finalizar, quiero dar las más sinceras gracias a mi Padre, a Marta y a Salva, por haberme apoyado y ayudado durante todo este tiempo, que ha sido mucho. A mi señora, Laura, por haber estado ahí en cada uno de los momentos importantes, a mi lado, dándome tanto y tan desinteresadamente. Pero sobretodo, quiero darle las gracias a mi Madre, la persona que más ha sufrido para que yo hoy esté aquí, y tenga unos estudios que me permitan llegar a donde quiera.

“Este projecte es per a tu, Mamá. Et vullc”

ÍNDICE

Índice de Figuras.....	1
Índice de Gráficos	2
Índice de Tablas.....	3
Resumen del Trabajo Final de Grado	4
Objetivos del Trabajo Final de Grado.....	7
Antecedentes. Situación actual	9
Capítulo 1. El impacto de la Bolsa en la Economía	12
1.1. La Bolsa en la Economía	13
1.2. El IBEX 35©	15
1.3. Telefónica S.A.	16
1.3.1. Modelo de Negocio.....	17
1.3.2. Resultados Económicos	18
1.3.3. Acciones.....	19
Evolución temporal de las acciones de Telefónica	20
1.4. Repsol S.A.	21
1.4.1. Modelo de Negocio.....	22
1.4.2. Resultados Económicos	24
1.4.3. Acciones.....	25
Evolución temporal de la acción de Repsol	27
1.5. Santander	27
1.5.1. Modelo de Negocio.....	28
1.5.2. Resultados económicos	30
1.5.3. Acciones.....	31
Evolución temporal de la acción de Santander	31
Capítulo 2. Cadenas de Markov	34

2.1. Cadenas de Markov Finitas	34
2.1.1. Introducción y conceptos básicos.....	34
Propiedades de la matriz de transición	37
2.1.2. Evolución de una cadena de Markov	38
2.2. Comportamiento asintótico de las Cadenas de Markov	40
2.2.1. Semejanza de matrices.....	41
2.2.2. Autovalores y autovectores de una matriz.....	42
Propiedades de los autovalores	43
2.2.3. Particularidades de los autovalores de una matriz estocástica	44
2.2.4. Autovectores de una matriz estocástica M. vector de probabilidades de equilibrio	44
2.2.5. Comportamiento asintótico de la ley de probabilidad $P(n)$	45
Teorema de Perron-Frobenius	46
2.2.5.1. Cadenas completamente ergódicas o cadenas regulares.....	46
2.3 Tiempos de primera pasada	48
Resumen final:	49
Capítulo 3. Modelo Markoviano y Aplicación.....	51
3.1. El modelo Markoviano	51
3.2. Aplicación del Modelo Markoviano	55
3.2.1. Toma de datos.....	55
3.2.2. Diseño de la plantilla.....	56
3.2.3. Calculo de las probabilidades finales	58
3.2.4. Previsiones futuras	59
3.2.5. Tiempos de primera pasada.....	60
3.3. Soluciones del Modelo	60
3.3.1. Repsol.....	61
3.3.1.1. Matrices de transición y vectores propios	61
3.3.1.2. Predicción del Modelo. Repsol	63

3.3.1.3. Tiempos de recurrencia del estado E1. Repsol.....	64
3.3.2. Santander.....	64
3.3.2.1. Matrices de transición y vectores propios	65
3.3.2.2. Predicción del Modelo. Santander	67
3.3.1.3. Tiempos de recurrencia del estado E1. Santander	68
3.3.3. Telefónica	68
3.3.3.1. Matrices de transición y vectores propios	68
3.3.3.2. Predicción del Modelo. Telefónica.....	70
3.3.3.2. Predicción del Modelo. Telefónica.....	71
Capítulo 4. Conclusiones	72
Bibliografía.....	74
Anexos	76

Índice de Figuras

Figura 1.3.3. Cuadro Histórico de Remuneración Telefónica 2014-2017.....	21
Figura 1.4.1.1.- Downstream, área de negocio de Repsol, 2016.....	23
Figura 1.4.1.2.- Upstream, área de negocio de Repsol, 2016.....	24
Figura 1.5.1. Modelo de negocio grupo Santander.....	29

Índice de Gráficos

Gráfico 1.3.3.1. Histórica de la acción de telefónica. 01/07/1987 a 21/06/2017.....	22
Gráfico 1.4.3.1- Distribución de acciones Repsol.....	26
Gráfico 1.3.3.1. Evolución histórica de la acción de Repsol. 01/02/2000 a 21/06/2017.....	28
Gráfico 1.5.3.1 Remuneración en efectivo grupo Santander.....	32
Gráfico 1.5.3.2 Evolución del valor de la acción grupo Santander 1988-2017.....	33
Gráfico 3.2.1 Grafo de estados del Modelo Markoviano.....	52

Índice de Tablas

Tabla 1.4.2.- Resultados del ejercicio Repsol	25
Tabla 3.2.2.- Plantilla del Modelo Markoviano.....	56

RESUMEN DEL TRABAJO FINAL DE GRADO

El valor de una acción agrupa toda la información relativa acerca de una determinada empresa o compañía: Los posibles dividendos, las expectativas de los grupos de interés, el crecimiento de la compañía, la situación política y económica del lugar al que pertenece, los beneficios, etc. Pero aunque este valor refleje conjuntamente todas y cada una de estas informaciones, nadie es capaz de saber el valor que tendrá el título un día en concreto en el futuro, dado que este valor no solo depende de la compañía, sino que hay una gran cantidad de factores externos que condicionan la oscilación y la tendencia de la acción, como puedan ser variables macroeconómicas como los tipos de interés, la inflación, la prima de riesgo, el ahorro de las familias, la actitud de las empresas competidoras, el comportamiento del mercado en su conjunto, incluso variables atmosféricas que afecten directamente a los productos y/o servicios que las empresas ofrecen. Por todo ello, en lugar de considerar el valor que pueda tener el título

en un instante de tiempo determinado, se puede estudiar el comportamiento de dicho título mediante herramientas que en lugar de determinar el valor aproximado de la acción en un futuro concreto, determinen el comportamiento a largo plazo de dicho título, considerando estacionalidades, tendencias alcistas o bajistas, y establezcan unas probabilidades estables del comportamiento del título en un periodo futuro.

En el presente trabajo de final de Grado (TFG), se estudiará un modelo de predicción que permita clasificar las acciones o títulos por las probabilidades que estos tengan de variar su comportamiento en tres tipos de estados: alcista, estable o bajista. Se utilizará para ello, un modelo basado en Cadenas de Markov, que se aplicará a tres títulos que forman parte del IBEX 35, y que representan tres importantes sectores de la economía española, Repsol, Telefónica y Santander, en un periodo comprendido entre abril de 2016 y marzo de 2017. El objetivo es determinar una matriz estable que permita predecir porcentualmente el comportamiento de dicho título, es decir, si tiende a subir, a mantenerse igual, o a bajar, y en qué proporciones ocurrirá esto en la mayoría de las ocasiones. Aunque el ámbito de aplicación del modelo comprende un período determinado en este estudio, éste es aplicable a cualquier intervalo, considerando que con una mayor cantidad de datos, podremos determinar una matriz más estable, que refleje con más exactitud el comportamiento del objeto de estudio.

El Modelo Markoviano para el movimiento de subyacentes cotizados, está basado en la teoría de las cadenas de Markov, una herramienta que permite interrelacionar distintas variables, creando así una matriz de $(M \times M)$ que interrelaciona M variables entre sí, entre un periodo n y un periodo $n-1$, que refleja todas las probabilidades de que cada uno de los casos suceda, siendo esta matriz resultante una matriz de probabilidades, es decir, todas las columnas sumarán 1.

Uno de los aspectos claves del estudio, es el horizonte en el que vamos a aplicar el modelo. Aunque determinar una matriz de probabilidades que interrelacionen diferentes variables entre sí no es muy costoso, el verdadero objeto de estudio es intentar conseguir una matriz de probabilidades que sea estable, es decir, no sufra demasiadas variaciones, para que este modelo sea de alguna utilidad. Para ello, se ha determinado un año completo, con tal de averiguar si este intervalo es suficiente para

lograr una matriz estable que refleje fielmente el comportamiento de un título a corto y medio plazo.

Previamente a la aplicación del modelo en los distintos títulos, es necesario determinar las variables que formarán parte de nuestro modelo Markoviano. Para ello, vamos a suponer tres variables simples que reflejen el comportamiento de un título. A saber, que el valor del título **suba, se mantenga igual, o baje**.

Una vez determinadas las variables a interrelacionar, construiremos la matriz de probabilidades a partir de la relación entre cada una de estas 3 variables, de forma que nuestra matriz Markoviana será una matriz 3x3 que reflejará las probabilidades de variación del título (suba, igual, o baje) con respecto a un instante de tiempo anterior.

Para la aplicación de este modelo, vamos a considerar aproximadamente 20 valores mensuales de cada título, y vamos a determinar matrices de probabilidades, mes a mes, acumulando los periodos anteriores en cada una de las siguientes matrices, con objeto de lograr una estabilidad.

Una vez lograda una matriz estable, utilizaremos estos datos para calcular el vector estacionario de dicha matriz, que nos dará las probabilidades finales de que el título suba, se mantenga, o vea reducido su valor. Con estos valores, y una condición inicial determinada, podremos predecir el comportamiento a futuro, en un periodo determinado de la acción objeto de estudio.

Para finalizar, se mostrarán a través de matrices y valores numéricos los cálculos de las predicciones de nuestro modelo Markoviano para un periodo n a partir del último dato de marzo de 2017.

OBJETIVOS DEL TRABAJO FINAL DE GRADO

El objetivo principal de la presente memoria es el estudio de técnicas cuantitativas a través de un modelo matemático para poder realizar predicciones futuras sobre el comportamiento de un activo financiero, aplicando el estudio realizado a tres casos prácticos con datos reales. El estudio teórico llevado a cabo en la presente memoria es aplicado para la estimación del comportamiento futuro de una acción del Banco Santander, de Telefónica y de Repsol siendo estos activos financieros los más potentes dentro de los sectores económicos a los que representan y que forman parte de las empresas con más peso del IBEX 35.

La aplicación de este estudio se ha llevado a cabo a través de un modelo Markoviano aplicado a unas variables de comportamiento que clasifican los estados de los

subyacentes cotizados analizados y los ordenan para lograr una visión global de la tendencia de estos activos financieros.

Los **Objetivos** que se proponen alcanzar con el desarrollo de esta memoria son:

- Estudiar y aplicar las herramientas matemáticas de las Cadenas de Markov para determinar un modelo de predicción cualitativo.
- Conocer el desarrollo del Modelo Markoviano y sus principales características
- Establecer las variables cualitativas objeto de estudio para el cálculo del modelo
- Utilizar el modelo para aplicarlo a datos reales con tal de establecer su utilidad para conseguir estabilizar un resultado en un periodo determinado de tiempo
- Obtener las tendencias probabilísticas de la acción Banco Santander, la acción de Repsol, y la acción de Telefónica
- Evaluar los resultados del modelo aplicado comparando las predicciones resultantes con el comportamiento futuro de dichos activos financieros.
- Observar el comportamiento recurrente del Estado 1 (SUBE), mediante la herramienta de los tiempos de primera pasada.

ANTECEDENTES. SITUACIÓN ACTUAL

En un mundo globalizado y en un momento en el que el tiempo y la oportunidad son los pilares del desarrollo, una herramienta como los mercados financieros es, para muchos, la mejor forma para competir y mejorar las oportunidades de desarrollo de sus ideas.

En España, los mercados financieros se agrupan en el Grupo Bolsas y Mercados Españoles, que es el operador de todos los mercados de valores y sistemas financieros de nuestro país.

El principal motor de la bolsa, son los beneficios futuros que puedan generar las compañías. Estos beneficios pueden verse afectados positiva o negativamente. Por ejemplo, un aumento de los tipos de interés, provoca que las cotizaciones bursátiles desciendan. Esto se puede explicar desde un punto de vista macroeconómico de la siguiente forma: un aumento de los tipos de interés provoca un aumento en los costes de financiación de las empresas que utilizan la financiación ajena como forma de financiación de sus operaciones. Por lo tanto, una financiación más costosa, verá

reflejada una disminución de los beneficios al final del ejercicio, lo que provocará una reducción en los dividendos que genera esta empresa para sus accionistas, y por tanto, un descenso en las cotizaciones de sus acciones.

Podemos decir pues, que un aumento de los tipos de interés provoca una fase bajista en la bolsa.

La prima de riesgo es otra variable macroeconómica que afecta al valor de las acciones de las empresas que cotizan en bolsa. Aunque esta variable haya adquirido importancia en los últimos años debido a la situación de crisis sufrida desde la caída de los mercados en 2008, esta variable hace mucho tiempo que afecta directamente al valor de las acciones de un determinado país. Siguiendo con el ejemplo anterior, un aumento de la prima de riesgo, provoca una situación de inseguridad para los mercados extranjeros, que provocará una retirada de capitales y un aumento de los costes de financiación para las empresas de ese país, lo que, como ya hemos mencionado, provoca una disminución de los beneficios, una reducción en los dividendos de la compañía, y finalmente, una reducción del valor de sus acciones. Por tanto, un aumento de la prima de riesgo provoca una fase bajista en la bolsa.

De igual forma, una reducción de la prima de riesgo, provocará el efecto contrario, es decir, una fase alcista en la bolsa.

La teoría de ciclos, explica cómo los ciclos bursátiles anticipan el comportamiento de los ciclos económicos, y cómo los mercados financieros afectan directamente al futuro de los mercados económicos y a las situaciones económicas futuras.

Es por ello, que el valor futuro o el comportamiento que pueda tener un título o acción es de vital importancia para muchos inversores y para muchos responsables económicos, ya que esto ayudará a predecir comportamientos futuros de la economía, y por tanto permitirá reaccionar a tiempo ante situaciones que afecten negativamente a la economía.

El estudio de las finanzas cuantitativas surgió en la década de 1970 cuando algunos inversores americanos empezaron a aplicar modelos matemáticos para la asignación de precios de acciones y bonos.

Desde entonces, ha habido muchos avances en estos modelos, que se han visto sustituidos con el tiempo por modelos más exactos que incluyen aleatoriedad y variabilidad y predicen un comportamiento mucho más ajustado.

Debido a la importancia actual de estos modelos predictivos, se ha decidido estudiar, con los conocimientos adquiridos durante el Grado en Administración y Dirección de Empresas de la UPV, un modelo de comportamiento de acciones, que permite asignar las probabilidades de comportamiento y oscilación de un título utilizando la Teoría de las Cadenas de Markov como base para el modelo de análisis cualitativo.

Este modelo no predice el valor de la acción en un momento de tiempo futuro, sino que evalúa su comportamiento utilizando datos históricos, y permite establecer un comportamiento futuro estable, que permita conocer probabilísticamente la dirección de las fluctuaciones futuras de una acción, es decir, las probabilidades de que la acción suba, se mantenga en un mismo valor, o descienda. No es por tanto un objetivo de este trabajo aplicar un modelo de predicción del valor para un subyacente cotizado, sino estudiar un modelo de tipo Markoviano para clasificar los estados del subyacente. En principio, aunque esta clasificación se ha realizado en tres estados (subir, mantener igual y bajar), podría ser dividida en un mayor número de estados manteniendo conceptualmente el enfoque propuesto.

1 EL IMPACTO DE LA BOLSA EN LA ECONOMÍA

El mercado bursátil es el mejor indicador del comportamiento futuro de la economía. Mediante la “Teoría de ciclos” podemos explicar cómo los mercados bursátiles anticiparán el comportamiento futuro de la economía. Del mismo modo, los mercados financieros y los índices de referencia, influyen de igual modo en la economía de un país.

El valor de los títulos que cotizan en los mercados bursátiles es muy importante, en muchos aspectos, ya que es el lugar en el que las empresas buscan financiación para sus operaciones. Por tanto, una tendencia alcista en el valor de una acción atraerá el interés de los inversores, y la empresa verá financiadas sus operaciones a través de terceros. Al mismo tiempo, los inversores buscan una alta rentabilidad de sus acciones, para ver aumentadas sus ganancias, por lo que si la empresa genera beneficios, los inversores y accionistas verán recompensados sus esfuerzos financieros.

Como todos los mercados, el mercado bursátil se rige por la ley de la oferta y la demanda; ante un aumento de la oferta de acciones, por encima de la demanda de estas, provocará una disminución en los precios. Lo contrario sucederá si la demanda de acciones es superior a la oferta de éstas, ya que hay más interesados en adquirir el producto, que producto en sí.

En nuestro país, un índice que refleja fielmente el comportamiento de las empresas de mayor volumen de negocio es el IBEX 35, que nos permite ver la evolución de la situación financiera de las entidades privadas de nuestro país en un momento determinado de tiempo.

Durante este capítulo se analizará el impacto del mercado bursátil en la economía a través de la teoría de ciclos. También se detallarán los aspectos más relevantes del IBEX 35, y por último, se expondrá un poco de la historia de las entidades cuyas acciones forman parte de la aplicación del modelo Markoviano objeto de esta memoria, a saber: Repsol, Santander y Telefónica, 3 de las empresas con mayor capitalización bursátil de este país.

1.1. La Bolsa en la Economía

En este apartado se explicará la relación que existe entre el Ciclo económico y el ciclo Bursátil, a través de la teoría de ciclos. Esta teoría fue desarrollada durante la década de 1930 por la escuela Austríaca¹.

En un momento en el que el ciclo económico se encuentra en recesión, el ciclo bursátil empieza su fase alcista. Esto se debe a que en un momento en el que los títulos se encuentran en valores mínimos debido al estado económico, las grandes empresas, que no dependen solamente de la situación económica de un país, empiezan a invertir en títulos que se encuentran en precios mínimos, lo que se traduce en un aumento progresivo de las cotizaciones debido al aumento de la demanda. En este punto, el ciclo económico empieza su recuperación, y se empiezan a tomar por los organismos competentes, las políticas fiscales y económicas necesarias para mejorar la situación

¹ La Teoría de ciclos económicos fue desarrollada por los economistas F.A. Hayek y L.V. Mises

económica (bajadas de tipos de interés, aumento del empleo, aumento del consumo, reducción de la prima de riesgo) lo que provoca un aumento de las cargas financieras de las empresas, que pueden financiarse a mejor precio, y generar mayores beneficios, traduciéndose esto en un aumento de las cotizaciones, y por lo tanto, una mejora de los mercados bursátiles.

Este aumento en la bolsa, provoca que el ciclo económico entre en fase de expansión, es decir, pleno empleo, tipos de interés muy bajos, etc. Que a su vez, provoca que las familias y las empresas consideren este un buen momento para llevar a cabo sus proyectos, y por tanto, endeudarse.

Ante esta situación de expansión, los inversores más potentes aprovechan la subida de precios para vender todas las acciones que han comprado a precios mínimos a pequeños inversores que actualmente están dotados de liquidez y ganar así la diferencia, lo que provoca una subida de los tipos de interés, y como consecuencia, una etapa de recesión en el ciclo bursátil. En el siguiente periodo, los tipos de interés estarán altos, las familias tendrán que devolver los capitales que han pedido prestados, y se producirá una situación de recesión en el ciclo económico. Así es como se interrelacionan el ciclo económico y el ciclo bursátil.

Aunque hay mecanismos capaces de amortiguar estos efectos enunciados anteriormente (políticas fiscales y monetarias), en Europa existe un problema importante respecto a este tema. Mientras que cada país es independiente para ejercer las políticas fiscales que considere convenientes para adecuar su ciclo económico, las políticas monetarias vienen dadas por el Banco Central Europeo, y muchas veces los intereses del BCE no van en la misma dirección para todos los países miembros. Esto provoca que en algunos casos las políticas monetarias sean contrarias a las fiscales, y puesto que el efecto multiplicador de las políticas monetarias es mucho mayor que el de las políticas fiscales, esta situación provoca, en algunos países, que las políticas monetarias dictadas por Europa, diluyan los efectos de las políticas fiscales de estos.

1.2. El IBEX 35[®]

El índice IBEX 35[®] es el índice compuesto por los 35 valores más líquidos cotizados en el Sistema de Interconexión Bursátil de las cuatro Bolsas Españolas, usado como referente nacional e internacional y subyacente en la contratación de productos derivados. Técnicamente es un índice de precios, ponderado por capitalización y ajustado por el capital flotante de cada compañía integrante del índice.

Este índice se puso en marcha el 14 de enero de 1992, y agrupó, como ya hemos mencionado, los valores más líquidos del momento, convirtiéndose, desde entonces, en el referente para la situación bursátil de las empresas de nuestro país.

La entrada o salida de las empresas de este índice, viene determinada por el Comité Asesor Técnico (CAT), que se reúne dos veces al año para determinar que entidades formarán parte del índice en los siguientes periodos.

Para poder formar parte del índice, las empresas deben cumplir algunos requisitos:

- Su capitalización media tiene que ser superior al 0,3% de la del IBEX 35 en el periodo analizado.
- Tiene que haber sido contratado por lo menos en la tercera parte de las sesiones de este período. (aunque podría no tenerse en cuenta este requisito si la empresa estuviese entre las 20 con mayor capitalización).

Todas las empresas que se han seleccionado para aplicar el modelo Markoviano para el movimiento de subyacentes cotizados forman parte del IBEX 35, además de ser las líderes de sus respectivos sectores, por lo que el peso dentro del IBEX es elevado, y sus decisiones repercuten sobre este.

A continuación se expondrán las principales características, evolución histórica y situación actual de Repsol, Santander y Telefónica, las empresas seleccionadas para nuestro proyecto.

1.3. Telefónica S.A.

Telefónica S.A es una empresa multinacional española de telecomunicaciones, con sede en Madrid, situada como la empresa de telecomunicaciones más potente de Europa y la octava² a nivel mundial.

Fundada en Madrid el 19 de Abril de 1924, con la denominación de Compañía Telefónica Nacional de España (CTNE), con un capital de una millón de pesetas, representado por 2000 acciones ordinarias de 50 pesetas de valor nominal cada una.

En 1945 el estado español adquiere una gran participación de la empresa que se ve diluida en 1967 con una ampliación de capital. No obstante, no es hasta 1999 cuando vuelve a convertirse en totalmente privada mediante oferta pública de acciones.

En la década de los 90 cambia su nombre por Telefónica S.A., denominación que se mantiene hasta la fecha.

Actualmente, está implantada en más de 20 países. Según datos de su página web, tiene más de 347 millones de clientes, en 21 países, y un promedio de 127.000 empleados.

El importe neto de la cifra de negocios (ingresos) fue de 13.132 millones de euros en enero-marzo 2017 y 347 millones de accesos totales a marzo de 2017. Cuenta con más de 274 millones de accesos de telefonía móvil; 37,8 millones de accesos de telefonía fija; más de 21,6 millones de accesos de datos e Internet y 8,2 millones de accesos de televisión de pago.

es una empresa totalmente privada que cuenta con más de un millón y medio de accionistas y cotiza en varios de los principales mercados bursátiles del mundo.

Su plan estratégico de 2016 a 2010 tiene como objetivo convertir la compañía en una que impulse las conexiones de la vida para que las personas elijan un mundo de posibilidades infinitas. Este se sustenta en 6 elementos claves: Conectividad excelente,

² Parietti, M. (2017) The World's Top 10 Telecommunications Companies.

oferta integral, experiencia de cliente, innovación, digitalización extremo a extremo y asignación de capital.

1.3.1. Modelo de Negocio

Para desarrollar su modelo de negocio, Telefónica cuenta con una estructura organizativa orientada totalmente al cliente e incorpora una oferta digital en el foco de las políticas comerciales. El esquema da más visibilidad a las operadoras locales, acercándolas al centro de decisión corporativo, simplifica el organigrama global y refuerza las áreas transversales para mejorar la flexibilidad y la agilidad en la toma de decisiones. Además de las áreas transversales, gestionadas por el CCDO³, que se encarga de propiciar el crecimiento de los ingresos y el CGRO⁴: que se encarga de la gestión eficiente de los costes, esta estructura organizativa comprende los siguientes segmentos: Telefónica España, Telefónica Brasil, Telefónica Alemania, Telefónica Reino Unido y Telefónica Hispanoamérica (integrado por las operadoras del Grupo en Argentina, Chile, Perú, Colombia, México, Venezuela, Centroamérica, Ecuador y Uruguay). Estos segmentos incluyen la información relativa a los negocios de fija, móvil, cable, internet y televisión; así como otros servicios digitales acorde a cada país.

La estrategia del Grupo Telefónica se centra en:

- Generar valor con:
 - Conectividad Excelente por lo que la gestión de sus infraestructuras y la inversión continua en red son clave. Además apuestan por devolver a los clientes la soberanía sobre sus datos.
 - Oferta de productos integrados. Ofrecer a los clientes datos para ampliar sus servicios, como video o servicios digitales ofreciendo propuestas únicas, simples y claras.
 - Incremento de valor y mejora de la experiencia del cliente con un acceso digital con un objetivo de ofrecer los mejores productos, soluciones y contenidos.

³ Chief Commercial Digital Officer.

⁴ Chief Global Resources Officer

- A través de:
 - Digitalización *end-to-end*: reducir la inversión en *legacy* para mejorar la virtualización, disminuir servers, data center y aplicaciones, digitalización en los procesos y los sistemas, digitalizando tanto el *front* como el *backoffice*, ofreciendo una experiencia verdaderamente digital a los clientes.
 - Big Data e Innovación para ofrecerle más valor al cliente y devolverles a los clientes el control de sus datos.
 - Y continuar trabajando en *capital allocation* en el *legacy* y la simplificación para poder seguir invirtiendo.

1.3.2. Resultados Económicos

La Sociedad ha obtenido unos resultados positivos durante el ejercicio 2016 de 24 millones de euros. Los hechos más significativos reflejados en la cuenta de pérdidas y ganancias del ejercicio 2016 son los siguientes:

- La cifra de “Importe neto de la cifra de negocios” cuyo importe asciende a 2.710 millones de euros disminuye respecto al mismo periodo del año anterior debido fundamentalmente al menor importe de dividendos recibidos de empresas del Grupo y asociadas. En el año 2016 no se han distribuido dividendos de Telefónica Internacional, S.A.U. ni de Telefónica de España, S.A.U. y en 2015 existían ingresos por dividendos de 2.601 millones de euros procedentes de estas dos sociedades.
- La cifra de “Deterioro y resultado por enajenaciones de instrumentos financieros” (una reversión de 2.049 millones de euros en 2016) cambia de signo respecto a 2015 principalmente debido al impacto de la reversión de la corrección valorativa en Telefónica Brasil, S.A. y Sao Paulo Telecomunicações, Ltda por importe de 3.196 millones de euros (en 2015 se dotó una corrección valorativa de 2.625 millones de euros) y a la reversión de la corrección valorativa de Telefónica Internacional, S.A.U., absorbida por Telefónica Latinoamérica Holding, S.L., dotada en 2015 por 1.133 millones de euros.
- El resultado financiero es negativo por 2.227 millones de euros (1.902 millones de euros negativos en 2015). Este resultado se debe, fundamentalmente, a los

gastos financieros con empresas del Grupo y asociadas, siendo los más significativos de Telefónica Europe, B.V. por importe de 452 millones de euros (471 millones de euros en 2015) y Telefónica Emisiones, S.A.U. por importe de 1.337 millones de euros (1.589 millones de euros en 2015).

- El impuesto de sociedades es un gasto por 2.842 millones de euros, fundamentalmente por la reversión de activos por impuestos diferidos relacionados con las correcciones valorativas de las inversiones (-3.626 millones de euros), baja de créditos fiscales por bases imponibles negativas (-866 millones de euros) y registro de activos fiscales por deducciones (+639 millones de euros).

1.3.3. Acciones

El capital social de Telefónica, S.A. está representado por un total de 5.037.804.990 acciones (5.037.804.990 derechos de voto).

Cada acción presente o representada en la Junta General de Accionistas dará derecho a un voto.

Telefónica establece la política de remuneración al accionista teniendo en cuenta los beneficios del Grupo, la generación de caja, la solvencia, la liquidez, la flexibilidad para acometer inversiones estratégicas, y las expectativas de los accionistas e inversores.

Actualmente, se retribuye una cantidad fija determinada por la entidad, pagada en efectivo en dos tramos.

Fecha	Concepto	Tipo	Importe	Información adicional
16 de junio de 2017	Dividendo	Remuneración en efectivo	0,20 € brutos por acción	Distribución de dividendo con cargo a reservas de libre disposición. Ver Hecho Relevante PDF [73 KB]
14 de noviembre de 2016	Dividendo	Remuneración mediante scrip dividend	0,35 € brutos por acción Scrip dividend: precio de compromiso de compra por parte de TEF: 0,340€	Distribución de dividendo mediante scrip dividend ("Telefónica Dividendo Flexible"). Ver Hecho Relevante PDF [218 KB]
19 de mayo de 2016	Dividendo	Remuneración en efectivo	0,40 € brutos por acción	Distribución de dividendo con cargo a reservas de libre disposición. Ver Hecho Relevante PDF [73 KB]
18 de noviembre de 2015	Dividendo	Remuneración mediante scrip dividend	0,35 € brutos por acción Scrip dividend: precio de compromiso de compra por parte de TEF: 0,345€	Distribución de dividendo mediante scrip dividend ("Telefónica Dividendo Flexible"). Ver Hecho Relevante PDF [245 KB]
12 de mayo de 2015	Dividendo	Remuneración en efectivo	0,40 € brutos por acción	Distribución de dividendo a cuenta de los beneficios del ejercicio 2015. Ver Hecho Relevante PDF [86 KB]
19 de noviembre de 2014	Dividendo	Remuneración mediante scrip dividend	0,35 € brutos por acción Scrip dividend: precio de compromiso de compra por parte de TEF: 0,336€	Distribución de dividendo mediante scrip dividend ("Telefónica Dividendo Flexible"). Ver Hecho Relevante PDF [75 KB]

Figura 1.3.3. Cuadro Histórico de Remuneración Telefónica 2014-2017

Fuente: Página Web Telefónica

Evolución temporal de las acciones de Telefónica

La acción de Telefónica S.A. (TEF) cotiza en el IBEX 35 desde el inicio de este, y nunca ha dejado de formar parte de él. Su valor máximo histórico se consiguió el 1 de noviembre de 2007 con un valor de 17,62 puntos. Aunque los valores mínimos se corresponden con los primeros años de la entidad, se pueden apreciar tres caídas importantes del valor de estas acciones en Septiembre de 2002, cuando bajó por primera vez en 5 años de los 4 puntos, y dos caídas por debajo de los 7 puntos en mayo de 2012 y noviembre de 2016.

Su evolución histórica, que podemos ver en el Gráfico 1.3.3.1, pasa de unos valores más o menos constantes y crecientes desde 1987 hasta 1997, donde empieza a experimentar un crecimiento bastante pronunciado, llegando a su máximo en el año 2000 con 11,61 puntos. A partir de ahí, empieza una espiral de bajadas que provocará una caída de casi 7 puntos en apenas 2 años. Después del mínimo de 2002, experimenta una crecida más o menos constante hasta el 2007, momento en el que llega su máximo histórico. A partir

de ahí, el título ha experimentado gran cantidad de subidas y bajadas, coincidiendo con los periodos de inestabilidad económica sufridos en nuestro país desde 2008, hasta situarse actualmente en los 10,5 puntos, aproximadamente.



Gráfico 1.3.3.1. Evolución histórica de la acción de telefónica. 01/07/1987 a 21/06/2017

Fuente: Yahoo Finance

1.4. Repsol S.A.

Repsol figura entre los principales grupos petroleros y de gas españoles. Repsol es una compañía energética internacional que realiza todas las actividades de exploración, desarrollo y producción de crudo y gas natural, transporte de productos petrolíferos, gases licuados del petróleo (GLP) y gas natural, refino, producción y comercialización de una amplia gama de productos derivados del petróleo, petroquímicos, GLP y gas natural.

El grupo Repsol figura como tal desde 1987, como una agrupación de compañías en las que el estado español tenía una participación minoritaria, uniéndolas en torno a un potente consolidado empresarial. Algunas de estas empresas eran: Hispanoil, REPESA, GNL, CAMPSA, Petronor, Butano S.A.

Desde 1989, el estado inicia la privatización de la compañía mediante OPV⁵ que culmina con la privatización total de la compañía en 1997.

A partir de este momento, Repsol comienza una fase de expansión, con la adquisición completa, entre 1999 y 2007 de YPF (Yacimientos Petrolíferos Fiscales), compañía Argentina, que en 2012 sería expropiada parcialmente por el gobierno de Cristina Fernández de Kirchner, tal y como nos cuenta Fernández (2016)⁶

1.4.1. Modelo de Negocio

Repsol es una compañía energética integrada, con amplia experiencia en el sector, que desarrolla su actividad a escala global en dos áreas de negocio:

Upstream



Figura 1.4.1.1.- Upstream, área de negocio de Repsol, 2016

Fuente: Informe de gestión Repsol 2016

⁵ Oferta Pública de Venta

⁶ FERNANDEZ, Pablo. Valoración de una expropiación: YPF y Repsol en Argentina (Valuation of an Expropriated Company: The Case of YPF and Repsol in Argentina). 2016.

Downstream



Figura 1.4.1.2.- Downstream, área de negocio de Repsol, 2016

Fuente: Informe de gestión Repsol 2016

La visión de Repsol es ser una empresa global que busca el bienestar de las personas y se anticipa en la construcción de un futuro mejor a través del desarrollo de energías inteligentes para ofrecer mejores soluciones energéticas. Esta visión se debe concretar aplicando los valores fundamentales de la compañía:

- **Integridad:** Cuidamos el bienestar de las personas, la compañía y el entorno en el que operamos y actuamos conforme a los compromisos que adquirimos.
- **Responsabilidad:** Alcanzamos nuestros retos teniendo en cuenta el impacto global de nuestras decisiones y actuaciones, en las personas, el entorno y el planeta.
- **Flexibilidad:** Nuestra escucha activa permite la consecución de nuestros retos de forma equilibrada y sostenida.
- **Transparencia:** Trabajamos bajo la máxima de que todas nuestras actuaciones puedan ser reportadas de manera veraz, clara y contrastable, y entendemos la información como un activo de la compañía que compartimos para generar valor.
- **Innovación:** Creemos que la clave de nuestra competitividad y evolución reside en nuestra capacidad para generar ideas y llevarlas a la práctica, en un entorno de colaboración y aprendizaje colectivo continuo.

1.4.2. Resultados Económicos

Durante el año 2016 Repsol ha continuado con el proceso de transformación iniciado tras la adquisición de Talisman y la aprobación del Plan Estratégico 2016-2020. Este proceso ha permitido obtener ganancias de eficiencia y ahorros en costes operativos e inversiones, materializar sinergias en la integración de los negocios y realizar una gestión flexible del portafolio para desinvertir en activos no estratégicos. Estas medidas, junto con las ventajas derivadas del modelo integrado de compañía, han puesto de manifiesto la resiliencia de Repsol y su capacidad para obtener unos resultados muy notables incluso en el actual contexto de bajos precios del crudo y del gas: el resultado neto del ejercicio ha ascendido a 1.736 millones de euros y el flujo de caja obtenido ha permitido reducir la deuda neta del Grupo en 3.790 millones de euros respecto al ejercicio 2015.

RESULTADOS DEL EJERCICIO

<i>Millones de euros</i>	2016	2015 ⁵	Variación
Upstream	52	(925)	977
Downstream	1.883	2.150	(267)
Corporación y otros	(13)	627	(640)
Resultado neto ajustado	1.922	1.852	70
Efecto patrimonial	133	(459)	592
Resultados específicos	(319)	(2.791)	2.472
Resultado neto	1.736	(1.398)	3.134

Tabla 1.4.2.- Resultados del ejercicio Repsol

Fuente: Informe de gestión Repsol 2016

En los resultados de Upstream se aprecia una importante mejora, retomando los beneficios a pesar del difícil entorno de precios. A esta mejora contribuyen de manera destacada el incremento de la producción total media (690 kboe/d, un 23% más que en 2015, principalmente por la contribución de los activos de ROGCI y los aumentos en Venezuela, Noruega, Perú y Brasil), las mejoras de eficiencia operativa y la reducción de gastos de exploración, que compensan con creces el impacto negativo de la caída de los precios de realización del crudo y del gas (14% en ambos casos). En Downstream, las

ventajas competitivas derivadas de nuestro modelo integrado de negocio y de la calidad de nuestros activos de refino, el buen desempeño de la Química y los mejores resultados en los negocios comerciales, han permitido paliar el impacto negativo del deterioro del entorno internacional de los negocios de Refino y de Gas & Power en Norteamérica. Los menores resultados en Corporación se explican fundamentalmente por la ausencia de los excepcionales resultados financieros obtenidos en 2015 por las posiciones en dólar derivadas del cobro de la indemnización por la expropiación de YPF.

En definitiva, el resultado neto del Grupo alcanza en 2016 un beneficio de 1.736 millones de euros, frente a los -1.398 millones de euros de 2015.

1.4.3. Acciones

Repsol cuenta con una capitalización de 20.605.495.000. euros, repartida en un total de 1.496.405.000 acciones. De este total de acciones, un 9,84% pertenece al grupo CaixaBank, un 8,2% pertenece a SACYR, un 4,77% pertenece a Temasek, y el resto es capital Free Float⁷



Grafico 1.4.3.1- Distribución de acciones Repsol

Fuente: Web Repsol.

⁷ Capital Flotante. Porcentaje de acciones susceptible de ser negociados en bolsa.

La retribución percibida por los accionistas en los ejercicios 2016 y 2015 del programa “Repsol Dividendo Flexible⁸”, es la siguiente:

- Retribución de 0,96 €/acción en el ejercicio 2015. Incluye el importe del compromiso irrevocable de compra de derechos de asignación gratuita asumido por Repsol en las dos ampliaciones de capital liberadas cerradas en enero y julio de 2015 (0,472 y 0,484 euros brutos por derecho, respectivamente). Repsol ha pagado durante 2015 un importe bruto total de 488 millones de euros a los accionistas y les ha entregado 50.088.670 acciones nuevas, por un importe equivalente de 814 millones de euros, a aquellos que optaron por recibir acciones nuevas de la sociedad.
- Retribución de 0,76 €/acción en el ejercicio 2016. Incluye el importe del compromiso irrevocable de compra de derechos de asignación gratuita asumido por Repsol en las dos ampliaciones de capital liberadas cerradas en enero y julio de 2016 (0,466 y 0,292 euros brutos por derecho, respectivamente). Repsol ha pagado durante 2016 un importe bruto total de 377 millones de euros a los accionistas y les ha entregado 65.283.041 acciones nuevas, por un importe equivalente de 697 millones de euros, a aquellos que optaron por recibir acciones nuevas de la sociedad.

Asimismo, en enero de 2017 en el marco del programa “Repsol dividendo flexible” y en sustitución del que hubiera sido el dividendo a cuenta del ejercicio 2016, Repsol ha realizado un desembolso en efectivo de 99 millones de euros (0,335 euros brutos por derecho) a aquellos accionistas que optaron por vender sus derechos de asignación.

⁸ En el año 2012 Repsol puso en marcha, por primera vez, el programa de retribución al accionista denominado “Repsol Dividendo Flexible”. Dicho programa se instrumenta a través de ampliaciones de capital liberadas con cargo a reservas voluntarias procedentes de beneficios no distribuidos con el compromiso irrevocable de Repsol, S.A. de comprar los derechos de asignación gratuita derivados de la ampliación a un precio fijo garantizado. Este programa permite a los accionistas elegir entre recibir parte o la totalidad de su retribución en acciones liberadas de la sociedad o en efectivo mediante la venta de los derechos de asignación gratuita que reciban, bien en el mercado al precio de cotización de los mismos, bien a la propia Compañía. Para información adicional sobre la retribución total percibida por los accionistas y las mencionadas ampliaciones de capital liberadas derivadas del programa “Repsol Dividendo Flexible”, véase los apartados 13.1 “Capital social” y 13.4 “Dividendos y retribución al accionista” de la Nota 13 “Patrimonio Neto” de las cuentas anuales consolidadas correspondiente al ejercicio 2016.

gratuita a la Compañía y ha retribuido con 30.760.751 acciones, por un importe equivalente de 392 millones de euros, a aquellos que optaron por recibir acciones nuevas de la Sociedad.

Evolución temporal de la acción de Repsol

Como se puede apreciar en el Gráfico 1.4.3.2, la evolución del valor de las acciones ha sido cíclico durante los últimos años, siendo los ciclos de crecimiento-decrecimiento de aproximadamente 5 años. Su máximo histórico se sitúa en 2011, coincidiendo con un hallazgo importante de petróleo en Argentina, mientras que sus mínimos más destacados coinciden con el inicio del periodo de recesión en 2008, y con la expropiación del conglomerado de hidrocarburos argentino YPF.



Gráfico 1.3.3.1. Evolución histórica de la acción de Repsol. 01/02/2000 a 21/06/2017

Fuente: Yahoo Finance

1.5. Santander

La historia del Santander comienza el 15 de mayo de 1857, cuando la Reina Isabel II firma el Real Decreto que autoriza la constitución del Banco de Santander. Desde sus

orígenes fue un banco abierto al exterior, inicialmente ligado al comercio entre el puerto de Santander, en el norte de España e Iberoamérica.

El gran crecimiento de principios del siglo XX: Entre los años 1900 y 1919 el Banco Santander dobló su balance, amplió su capital hasta los diez millones de pesetas, aumentó sus ingresos, se acercó a la cifra de medio millón de pesetas de beneficios en el ejercicio de 1917 y su rentabilidad se colocó por encima de la media de las sociedades de crédito españolas. Además, durante estos años, se fundan los tres grandes bancos españoles que con el tiempo se integrarán en el Santander: el Banco Hispanoamericano (1900), el Español de Crédito (1902) y el Central (1919).

Actualmente, y después de más de un siglo de historia, el Grupo Santander cuenta con aproximadamente 188.000 empleados, 125 millones de clientes, y 3,9 millones de accionistas en todo el mundo.

1.5.1. Modelo de Negocio

Santander cuenta con un modelo de negocio centrado en el cliente que le permite cumplir con su misión de contribuir al progreso de las personas y de las empresas.

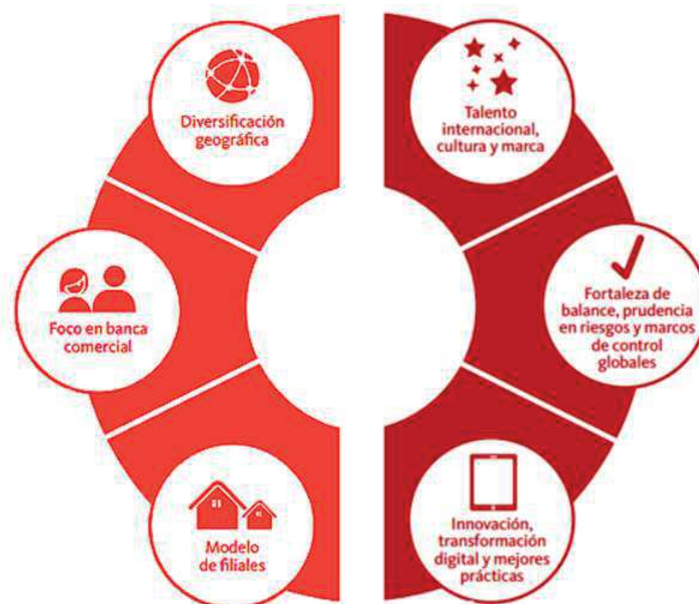


Figura 1.4.1. Modelo de negocio grupo Santander

Fuente: Web Santander

- **Diversificación Geográfica:** Grupo Santander cuenta con una diversificación geográfica equilibrada entre sus diez mercados principales, en los que alcanza cuotas de mercado elevadas: España, Alemania, Polonia, Portugal, Reino Unido, Brasil, México, Chile, Argentina y Estados Unidos. Además, tiene una cuota de mercado significativa en Uruguay y Puerto Rico, negocios de financiación al consumo en otros países europeos y presencia en China a través del negocio de banca mayorista y de financiación al consumo
- **Foco en banca comercial y vinculación de clientes:** El modelo comercial de Banco Santander está orientado a satisfacer las necesidades de todo tipo de clientes: particulares de distintos niveles de renta, empresas de cualquier tamaño y de diferentes sectores de actividad, corporaciones privadas e instituciones públicas. Desarrollar relaciones duraderas y sostenibles con ellos es el principal objetivo del Banco. El Banco tiene altas cuotas de mercado en banca comercial en sus principales países.
- **Modelo de filiales:** Grupo Santander está estructurado a través de un modelo de filiales autónomas en capital y liquidez, que son gestionadas según criterios locales y por equipos locales que aportan un gran conocimiento y experiencia en la relación con los clientes en sus mercados, al tiempo que se benefician de las sinergias y ventajas de pertenecer a Grupo Santander.
- **Fortaleza de balance, prudencia en riesgos y marcos de control globales:** Santander mantiene un perfil de riesgo medio-bajo y una alta calidad de sus activos, y cuenta con un capital sólido y adecuado a su modelo de negocio, estructura de balance, perfil de riesgos y exigencias regulatorias. Financia la mayoría de los créditos con depósitos de clientes, mantiene un amplio acceso a la financiación mayorista y cuenta con un gran abanico de instrumentos y mercados para obtener liquidez. Banco Santander cuenta con marcos de actuación y políticas corporativas, modelos de atención al cliente comunes y sistemas de control globales. Esto permite al Grupo obtener mayores resultados y aportar más valor que el que se derivaría de la suma de cada uno de los bancos locales.
- **Innovación, transformación digital y mejores prácticas:** la innovación ha sido una de las señas de identidad de Grupo Santander desde su nacimiento. En numerosas ocasiones el Banco ha revolucionado el sector financiero con nuevos productos y

servicios. Santander está llevando a cabo un intenso proceso de transformación digital para anticiparse, con soluciones innovadoras y atractivas, a las nuevas necesidades de los clientes. La mejora de la banca *online*, banca móvil, *mobile wallet* y una nueva estrategia para pagos digitales son algunos ejemplos de ello. La dimensión del Grupo permite identificar y trasladar con rapidez y eficacia sus mejores prácticas entre los distintos mercados en los que está presente, adaptándolas a las peculiaridades locales. Además, en los últimos años Santander ha lanzado propuestas de valor globales para sus clientes de rentas altas (*Santander Select*), para las pymes (*Santander Advance*) y para las empresas (*Santander Passport*), lo que pone de relieve las ventajas de trabajar con un banco internacional y diversificado como Santander

- Marca Santander: La marca Santander centraliza la identidad del Grupo, y expresa una cultura corporativa y un posicionamiento internacional único, consistente y coherente con una forma de hacer banca sencilla, personal y justa en todo el mundo.

1.5.2. Resultados económicos

Santander avanzó durante 2016 en su estrategia de vinculación y fidelización de clientes en todos sus mercados con el lanzamiento de distintas estrategias y productos de alto valor añadido. El Banco ha reforzado su oferta multicanal con nuevas aplicaciones para el móvil, desarrollo de la biometría y lanzamiento de nuevas facilidades de medios de pago en varios de sus mercados. Todo ello permite que el número de clientes vinculados aumente en 1,4 millones (particulares +9% y empresas +29%) y el de clientes digitales en 4,3 millones, destacando el crecimiento de los clientes de banca móvil en un 53%.

El beneficio ordinario antes de impuestos crece un 12% (sin efecto de tipo de cambio) y sube en 9 de las 10 principales unidades del Grupo. El beneficio atribuido sube un 4% hasta los 6.204 millones de euros. La buena evolución de la cuenta de resultados permite a Santander cumplir con los principales objetivos financieros y consolidarse como uno de los bancos europeos con mejor rentabilidad para el accionista.

1.5.3. Acciones

El Grupo Santander cuenta con un capital de 85.408.769.000 Euros, repartidos en 14.582.340.701 acciones, lo que supone un total de más de 3,9 millones de accionistas.

La retribución total al accionista con cargo a los resultados del ejercicio 2016 asciende a 0,21 euros por acción (+5% frente a 2015). Todos estos dividendos ya han sido abonados: dos de ellos en efectivo de 0,055 euros por acción cada uno y uno a través del *Scrip Dividend*, de 0,045 euros por acción.



Gráfico 1.5.3.1 Remuneración en efectivo grupo Santander

Fuente: Web Santander

Evolución temporal de la acción de Santander

Viendo el Gráfico 1.4.3.2, se puede ver la evolución que ha sufrido el valor de las acciones del banco Santander en un periodo comprendido entre 1988 y 2017. Se puede apreciar su máximo histórico en mayo del 2008, justo antes de entrar en el periodo de recesión de 2009, que coincide justamente con el mínimo histórico de la entidad. Posteriormente a estos hechos, se pueden apreciar dos ciclos marcados de una duración aproximada de 3 años, siendo la situación actual del valor de las acciones de crecimiento, es decir, se encuentran en una fase alcista en estos momentos.



Gráfico 1.5.3.2 Evolución del valor de la acción grupo Santander 1988-2017

Fuente: Web Santander

2 | CADENAS DE MARKOV

Este capítulo está dedicado a revisar los fundamentos del modelo matemático que se utilizará en este trabajo y pretende ayudar al lector a comprender los resultados que posteriormente se aplicarán a lo largo del análisis de modelización. Algunos de los contenidos de este capítulo suponen una ampliación de los conceptos estudiados a lo largo del Grado en Administración y Dirección de Empresas.

2.1. Cadenas de Markov Finitas

2.1.1. Introducción y conceptos básicos

Se va a estudiar a continuación un modelo matemático: las cadenas de Markov finitas, que es el resultado de los trabajos de investigación en matemática pura realizados por Andrei A. Markov (1856-1922) entre los años 1907 y 1912, y que posteriormente ha encontrado muy numerosas aplicaciones en diversos campos.

Una cadena de Markov es un modelo matemático dinámico y estocástico, es decir, que permite describir la evolución de un sistema a lo largo del tiempo utilizando la probabilidad.

En una cadena de Markov finita llamamos E al espacio conjunto de estado en los que puede estar el sistema S en cada instante.

$$E = \{1, 2, 3, \dots, r\}, \text{ siendo } r \geq 2.$$

Para el espacio de estados E se considera una σ -álgebra de sucesos. En el caso en que el conjunto E tiene un número finito de elementos, que es el que se va a estudiar, la σ -álgebra, generada por los sucesos $E_i = \{i\}$, $\forall i \in E$, será el álgebra de Boole de todos los subconjuntos o partes de E , que se designa con $P(E)$.

Se define una probabilidad en $P(E)$ asignando a cada suceso elemental $E_i = \{i\}$ el número $P(E_i) = p_i$, $0 \leq p_i \leq 1$, $\forall i = 1, 2, \dots, r$. Como los sucesos $E_1, E_2, \dots, E_j, \dots, E_r$ forman una partición de E , se verifica que $\sum_{i=1}^r p_i = 1$.

Para comprender la evolución de una cadena se utilizarán matrices y vectores de probabilidad porque facilitan su estudio.

Un vector columna $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix}$ es un vector de probabilidad si $v_i \geq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, r$. Y

además $\sum_{i=1}^r v_i = 1$. Análogamente, el vector fila $v = [v_1, v_2, \dots, v_r]$ es también un vector de probabilidad de r componentes está determinado conociendo $(r - 1)$ de ellas.

Se considera que el sistema solo cambia de estado en instantes de tiempo dados:

$$t = 0, \quad t = 1, \quad t = 2, \dots, \quad t = n, \dots$$

que son a lo sumo una infinidad numerable, es decir, la variable tiempo es discreta.

En cada instante n se considera una variable aleatoria $X_n = X(t = n)$ cuyo conjunto de valores si es cuantitativa, o atributos si es cualitativa, es E , espacio de estados del sistema.

Se tiene así una sucesión de variables aleatorias $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ discretas y con un conjunto de valores E .

Se dice que el sistema S en el instante n está en el estado i si $X_n \in E_i = \{i\}$. Se escribe $P(X_n \in E_i) = P(X_n = i)$ para indicar la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado i en el instante n .

Se define el *vector de probabilidad en la etapa n -ésima, o ley de probabilidad en el paso n -ésimo, al vector columna:*

$$P(n) = \begin{bmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_j(n) \\ \vdots \\ p_r(n) \end{bmatrix} \text{ siendo } p_j(n) = P(X_n = j).$$

Este vector está formado por probabilidades que suman la unidad porque el sistema en cada etapa está en uno de los estados $E_1, E_2, \dots, E_j, \dots, E_r$ que forman una partición del conjunto de estados E .

Dado el conjunto finito de estados E , a cada par $(i, j) \in E \times E$ se le asigna un número p_{ij} no negativo definido del siguiente modo:

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in E.$$

Definición. Una cadena de Markov finita es una sucesión de variables aleatorias discretas $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, todas con rango finito y conjunto de valores E , espacio de estados del sistema, que verifican:

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n) = P_{i_n j} \quad \forall n \geq 0 \quad \text{y} \\ \forall i_0, i_1, \dots, i_n \in E \text{ para los que } P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) > 0.$$

El conjunto E es el conjunto de estados de la cadena y las probabilidades

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

que no depende de n , se llaman probabilidades de transición o probabilidades de transición en una etapa.

Es decir, una cadena de Markov es un proceso aleatorio homogéneo en el tiempo, porque las probabilidades de transición no dependen de la etapa n en la que se encuentre el sistema, de parámetro discreto, porque la variable tiempo sólo puede tomar una infinidad numerable de valores: $0, 1, 2, \dots, n, \dots$, y es finito por ser el conjunto de estados de la cadena E , un conjunto finito.

En una cadena de Markov, la probabilidad de que el proceso esté en el instante $n + 1$ en un estado determinado depende del estado en que se encuentre en el instante anterior y este último del anterior a él, y así sucesivamente. El estado en el que se encuentra en el instante n resume para X_{n+1} todos los estados anteriores.

Se llama matriz de transición, o matriz de transición en una etapa de una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{1, 2, 3, \dots, r\}$ siendo $r \geq 2$ a la matriz M , de orden r ,

$$\begin{array}{c} \text{Estado en el instante } (n + 1) \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_r \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Estado en el instante } n \\ \begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & \dots & E_i & \dots & E_r \\ \left[\begin{array}{cccccc} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{i1} & \dots & p_{r1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{i2} & \dots & p_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1j} & p_{2j} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{rj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1r} & p_{2r} & \dots & p_{ir} & \dots & p_{rr} \end{array} \right] \end{array} \end{array} = M_{r \times r},$$

cuyas columnas representan las probabilidades de transición del proceso de un estado dado a cualquiera de los estados de la cadena en una etapa. Así, el elemento de la columna i de la fila j representa la probabilidad de tránsito del estado i al estado j en cualquier etapa:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Propiedades de la matriz de transición

1. $0 \leq p_{ij} \leq 1$.

2. $\sum_{j=1}^r p_{ij} = 1, \forall i = 1, 2, \dots, r$, es decir, la suma de los elementos de cada columna es 1. Por tanto, sus columnas son vectores de probabilidad. Se dice que la matriz de transición M es una matriz estocástica por columnas.

De las dos propiedades anteriores se deduce la siguiente propiedad:

3. El producto de dos matrices estocásticas por columnas es otra matriz estocástica por columnas.

Y como consecuencia de esta:

4. Las potencias de matrices estocásticas por columnas son también matrices estocásticas por columnas.

5. Si $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix}$ es un vector de probabilidad, esto es, si $0 \leq v_i \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots, r$ y $\sum_{i=1}^r v_i = 1$ y $M_{r \times r}$ es una matriz estocástica por columnas $M_{r \times r} \cdot v$ es otro vector de probabilidad de la misma dimensión $r \times 1$.

Una matriz se dice que es estocástica por filas si sus filas son vectores de probabilidad.

La matriz traspuesta de M , M^T es estocástica por filas.

Una matriz que es estocástica por filas y por columnas a la vez se dice que es biestocástica.

2.1.2. Evolución de una cadena de Markov

Una cadena de Markov queda determinada si se conocen los siguientes datos:

1. Su espacio de estados, el conjunto finito $E = \{1, 2, 3, \dots, r\}$ siendo $r \geq 2$.
2. La matriz estocástica $M = [p_{ij}]_{r \times r}$ matriz de probabilidades de transición en una etapa.

3. El vector de probabilidad inicia $P(0) = \begin{bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \vdots \\ P_r(0) \end{bmatrix}$ siendo $p_i(0) = P(X_0 = i)$ la

probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado i , para $i = 1, 2, \dots, r$, en el instante inicial.

Con los datos anteriores se puede deducir la ley de probabilidad para cualquier etapa n . Así, la ley de probabilidad pasada una etapa, teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total, es:

$$\begin{aligned} p_j(1) &= P(X_1 = j) = \\ &= P(X_0 = 1) \cdot P(X_1 = j | X_0 = 1) + P(X_0 = 2) \cdot P(X_1 = j | X_0 = 2) \\ &+ \dots + P(X_0 = r) \cdot P(X_1 = j | X_0 = r) = \\ &= p_1(0) \cdot p_{1j} + p_2(0) \cdot p_{2j} + \dots + p_r(0) \cdot p_{rj}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, r, \end{aligned}$$

que en forma matricial se resume en:

$$\begin{bmatrix} p_1(1) \\ p_2(1) \\ \dots \\ p_j(1) \\ \dots \\ p_r(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{i1} & \dots & p_{r1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{i2} & \dots & p_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1j} & p_{2j} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{rj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1r} & p_{2r} & \dots & p_{ir} & \dots & p_{rr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ \dots \\ p_j(0) \\ \dots \\ p_r(0) \end{bmatrix}.$$

Llamando $P(n)$ al vector de probabilidad en la etapa n -ésima,

$$P(n) = \begin{bmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_j(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ \vdots \\ P(X_n = n) \end{bmatrix},$$

Si $n = 1$: $P(1) = M \cdot P(0)$,

Si $n = 2$: $P(2) = M \cdot P(1) = M^2 \cdot P(0)$,

...

$$P(n) = M^n \cdot P(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La ley de probabilidad en el etapa n -ésima es el producto de la potencia n -ésima de M por la ley de probabilidad en el instante inicial.

Esto significa que conocida la ley de probabilidad inicial, $P(0)$, la evolución de la cadena solo depende de la matriz de transición M .

2.2. Comportamiento asintótico de las Cadenas de Markov

Este apartado centra el interés en obtener información sobre el comportamiento a largo plazo de la cadena de Markov, es decir, sobre la probabilidad de que el sistema esté en cada uno de los estados posibles de la misma al aumentar el número n de transiciones.

De momento, con el estudio realizado hasta aquí solo se puede contestar a algunos casos particulares. Por ejemplo, si una cadena de Markov consta de dos clases y la clase final es absorbente (una clase que al alcanzarla en algún instante temporal ya no se abandona nunca), a largo plazo el sistema quedará confinado allí.

Cuando Markov (1856-1922) estudió este tipo de procesos estocásticos no utilizó las matrices, pero gracias a la aportación de W.R. Hamilton (1805-1865), A. Cayley (1821-1895) y J.J. Sylvester (1814-1897), quienes desarrollaron simultáneamente el cálculo matricial, el estudio de las cadenas de Markov se ha simplificado enormemente.

Al investigar la evolución de una cadena, se dice que una cadena de Markov está totalmente determinada si se conoce el conjunto de estados, la matriz de transición y el vector de probabilidad inicial, pues la ley de probabilidad en la n -ésima etapa es: $P(n) = M^n \cdot P(0), \forall n \in \mathbb{N}$.

En este apartado se trata de responder a la siguiente pregunta: ¿Qué se puede decir del $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n \cdot P(0)$? Es decir, ¿cuál será el comportamiento asintótico de la cadena?.

El primer problema que surge es el del cálculo de la potencia n -ésima de la matriz de transición. Este cálculo, que es inmediato si la matriz M es diagonal, pero en general requiere la noción de semejanza de matrices.

2.2.1. Semejanza de matrices

Dos matrices $M_{r \times r}$ y $A_{r \times r}$ son semejantes, $M \sim A$, si existe una matriz $P_{r \times r}$ regular, es decir, con $|P| \neq 0$, tal que:

$$A = P^{-1} \cdot M \cdot P.$$

El conjunto de todas las matrices semejantes a la matriz $M_{r \times r}$ es:

$$\{A_{r \times r} = P^{-1} \cdot M \cdot P, \forall P_{r \times r} \text{ con } |P| \neq 0\}.$$

La semejanza de matrices define una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{M}_{r \times r}$ de las matrices de orden r , pues verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, y como tal produce una partición del conjunto $\mathcal{M}_{r \times r} / \sim$ en clases de equivalencia. Cada clase está formada por todas las matrices semejantes entre sí.

La respuesta a la pregunta sobre la existencia, en la clase de equivalencia de la matriz $M_{r \times r}$, de una matriz semejante diagonal se debe a Camille Jordan (1838-1922) quien nos legó el siguiente teorema:

Teorema de Jordan: Toda matriz cuadrada $M_{r \times r}$ sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado – como lo es el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos- es semejante a una matriz J diagonal, o diagonal por cajas, que es la forma canónica de Jordan asociada a la matriz $M_{r \times r}$, es decir:

$$\exists P_{r \times r} \text{ regular tal que } J = P^{-1} \cdot M \cdot P.$$

El cálculo de la forma canónica de Jordan asociada a una matriz $M_{r \times r}$ requiere el conocimiento de los autovalores y autovectores de esa matriz.

2.2.2. Autovalores y autovectores de una matriz

Si $M_{r \times r}$ es una matriz numérica con elementos en \mathbb{R} , el número $\lambda \in K(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ es un autovalor de $M_{r \times r} \leftrightarrow \exists x \neq 0$ tal que $Mx = \lambda x$.

El vector $x \neq 0$ es un autovector de M por la derecha asociado al autovalor $\lambda \in K \leftrightarrow Mx = \lambda x$.

Los autovalores también se llaman valores propios y los autovectores vectores propios.

Para hallar los autovalores de $M_{r \times r}$ hay que determinar los vectores $x \neq 0$ tales que:

$$Mx = \lambda x \leftrightarrow Mx - \lambda x = 0 \leftrightarrow (M - \lambda I)x = 0.$$

Para que $\exists x \neq 0$ que sea solución de este sistema homogéneo ha de ser $\text{rango}(M - \lambda I) < n^{\circ} \text{ Incógnitas} \rightarrow |M - \lambda I| = 0$.

Se llama ecuación característica de la matriz $M_{r \times r}$, a la ecuación $|M - \lambda I| = 0$, y polinomio característico de $M_{r \times r}$, al polinomio $|M - \lambda I|$, que es de grado r .

Las raíces del polinomio característico, o lo que es lo mismo, las soluciones de la ecuación característica, son los valores propios de $M_{r \times r}$.

Si $M_{r \times r}$, es una matriz estocástica, es una matriz de números reales. El polinomio característico de M es un polinomio de grado r con coeficientes reales, que tendrá a lo sumo r raíces distintas, los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, reales o complejos. Si el polinomio característico de M tiene una raíz compleja también tiene su conjugada.

El autoespacio asociado al autovalor λ_j es el subespacio vectorial de \mathbb{R} definido del siguiente modo:

$$N(\lambda = \lambda_j) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } Mx = \lambda_j x\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } (M - \lambda I)x = 0\}.$$

El autoespacio $N(\lambda = \lambda_j)$ siempre contiene al menos un vector $x \neq 0$ si λ_j es un autovalor de $M_{r \times r}$. Cualquier vector no nulo del autoespacio asociado al autovalor λ_j es un autovector asociado a λ_j .

Propiedades de los autovalores

- Si λ_1 y λ_2 son dos autovalores diferentes de $M_{r \times r}$ entonces $N(\lambda = \lambda_1) \cap N(\lambda = \lambda_2) = \{0\}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son autovalores de $M_{r \times r}$ todos distintos entre sí, $x \neq 0$ siendo $x_j \in N(\lambda = \lambda_j), \forall j = 1, 2, \dots, q$, entonces, $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.
- Si λ_j es un autovalor múltiplo de orden de multiplicidad s se verifica que: $1 \leq \dim(N(\lambda = \lambda_j)) \leq s$.
- En consecuencia, si λ_j es un autovalor simple será $\dim(N(\lambda = \lambda_j)) = 1$.
- Si todos los autovalores de la matriz $M_{r \times r}$ son distintos, o en el caso en que los tenga múltiples, los autoespacios asociados tienen dimensión igual al orden de multiplicidad de cada una de las raíces, se pueden encontrar r autovectores x_1, x_2, \dots, x_r linealmente independientes asociados respectivamente a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ y, por tanto, una base de \mathbb{R} formada por autovectores. Si P es la matriz que tiene por columnas esos autovectores se verifica que

$$P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix}.$$

Esta es la forma canónica de Jordan de la matriz $M_{r \times r}$, que en este caso es una matriz diagonal.

2.2.3. Particularidades de los autovalores de una matriz estocástica

Se demuestra fácilmente que:

- Toda matriz estocástica tiene el autovalor $\lambda = 1$.
- Si λ_j es un autovalor de una matriz estocástica el módulo de λ_j es $|\lambda_j| \leq 1$, tanto si λ_j es real como si es complejo.
- Los autovalores de módulo 1 de una matriz estocástica son raíces enteras de la unidad.
- Todos los autovalores de λ_i de módulo 1 tienen autoespacios $N(\lambda = \lambda_i)$ de dimensión igual al orden de multiplicidad de la raíz λ_i .
- Si $M_{r \times r}$ es una matriz de transición de una cadena de Markov y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que M^n tiene todos sus elementos positivos, entonces 1 es el único autovalor de M de módulo 1 y es simple, los demás autovalores tienen $|\lambda_i| < 1$.

2.2.4. Autovectores de una matriz estocástica M. vector de probabilidades de equilibrio

- Si $M_{r \times r}$ es una matriz estocástica por columnas y F es un vector fila con todas sus componentes iguales a 1, se verifica que $FM = F \leftrightarrow F(M - I) = 0$, es decir que $F = [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{1 \times r}$ es un autovector por la izquierda de la matriz $M_{r \times r}$ o autovector fila asociado a la matriz estocástica M asociado al autovalor $\lambda = 1$.
- Si C^1, C^2, \dots, C^r son autovectores columna asociados respectivamente a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, el vector C^1 verifica que $MC^1 = C^1$, por tanto, $C^1 \in N(\lambda = 1)$ y, como la dimensión del autoespacio $N(\lambda = 1)$ es igual al orden de multiplicidad del autovalor 1, siempre se pueden encontrar tantos autovectores columna asociados al autovalor 1 como veces aparezca repetido ese autovalor.
- Si P^1 es un autovector columna asociado al autovalor 1, que además es un vector de probabilidad, y $P(0) = P^1$ entonces $P(1) = M \cdot P(0) = P^1$ y también $P(n) = M^n \cdot P(0) = P^1, \forall n \in \mathbb{N}$ y esto significa que si el vector de probabilidad inicial de la cadena es $P(0) = P^1$ entonces este permanecerá invariable en todas las etapas. Por esta razón, a un vector probabilidad P^1 que

sea autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ se le llama vector de probabilidades de equilibrio o vector de probabilidades estacionario, o también vector fijo.

- Si $M_{r \times r}$ es una matriz biestocástica $F = [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{1 \times r}$ es un autovector fila

asociado al autovalor $\lambda = 1$ y $P^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{r \times 1}$ es un autovector columna asociado

al mismo autovalor. Por tanto, en este caso el vector $P^1 = \begin{bmatrix} 1/r \\ 1/r \\ \vdots \\ 1/r \end{bmatrix}_{r \times 1}$ es vector de

probabilidades de equilibrio para esa cadena.

2.2.5. Comportamiento asintótico de la ley de probabilidad $P(n)$

El análisis del comportamiento asintótico de $P(n)$ requiere del estudio del siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n \cdot P(0) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (P \cdot J^n \cdot P^{-1}) \cdot P(0).$$

Las matrices $M_{r \times r}$ de las cadenas de Markov son matrices estocásticas y, por tanto, pertenecen a una clase particular de matrices, las no negativas, es decir, las que tienen todos sus elementos positivos o cero.

Para poder analizar el $\lim_{n \rightarrow \infty} (P \cdot J^n \cdot P^{-1})$ es conveniente conocer algunos conceptos sobre matrices.

- Una matriz $M_{r \times r}$ se dice que es reducible si:
 - r es 1 y $M_{1 \times 1} = [0]_{1 \times 1}$.
 - $r \geq 2$ y existe una matriz permutación $S_{r \times r}$ y un número entero k , siendo

$$1 \leq k \leq r - 1 \text{ tal que } S^T \cdot M \cdot S = \begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix} \text{ siendo } A_{k \times k} \text{ y } C_{(r-k) \times (r-k)}$$

matrices cuadradas, $B_{(r-k) \times k}$ y $O_{k \times (r-k)}$ una matriz nula.

Por tanto, una matriz cuadrada de orden mayor que 1 es reducible si cambiando filas y columnas se puede obtener una matriz con un bloque de ceros de k filas y único autovalor

de módulo máximo y existe un autovector asociado con todas las componentes positivas.

El siguiente teorema, debido a Perron y a F. Georg Frobenius (1849–1917), es particularmente importante en el estudio del comportamiento asintótico de las cadenas de Markov.

Teorema de Perron-Frobenius

Si $M_{r \times r}$ es una matriz irreducible y no negativa con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ y $p = \max|\lambda_i|$, entonces p es autovalor simple de M y existe un autovector v asociado a p con todas las componentes positivas. Todo autovalor de módulo p es simple y todo autovector con todas las componentes positivas es proporcional a v .

Si $M_{r \times r}$ es una matriz irreducible y no negativa, y tiene $m > 1$ autovalores de módulo máximo, entonces todo autovalor distinto de cero de M pertenece a una circunferencia en el plano complejo centrada en el origen que pasa exactamente por los m autovalores de M , además, m es divisor del número de autovalores distintos de cero de la matriz M .

Si $M_{r \times r}$ es una matriz no singular, no negativa e irreducible de orden r primo, tiene o uno o r autovalores de módulo máximo y no es viable otra posibilidad.

Caso particular:

Si M es la matriz de una cadena de Markov irreducible y tiene m autovalores de módulo máximo, m es divisor del número de autovalores distintos de cero de M , y los autovalores de módulo máximo son las m raíces enteras de la unidad.

Si $M_{r \times r}$ es la matriz de transición de una cadena de Markov, es siempre una matriz no negativa y el autovalore dominante es $\lambda = 1$.

2.2.5.1. Cadenas completamente ergódicas o cadenas regulares

Si M , matriz de transición de una cadena de Markov, es irreducible y primitiva, entonces $\lambda = 1$ es el único autovalor de módulo máximo.

El autovalor dominante $p = \max|\lambda_i| = 1$, es un autovalor simple de M , existe un autovector P^1 , asociado al autovalor 1, con todas las componentes positivas, y además

1 es el único autovalor que tiene asociados autovectores con todas las componentes positivas.

Si los autovalores de M son $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, solo hay uno de módulo máximo:

$\lambda_1 = 1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_r|$. Como consecuencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = [P^1 \ P^2 \ \dots \ P^n] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ F_2 & & & \\ \dots & & & \\ F_r & & & \end{bmatrix} = [P^1 \ P^2 \ \dots \ P^n] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = [P^1 \ P^1 \ \dots \ P^1],$$

es una matriz con todas las columnas iguales al vector P^1 .

Conclusiones:

Al tener el vector P^1 todas las componentes positivas, siempre se podrá volver a pasar por uno cualquiera de los estados.

Existe un vector de estado permanente o estable que coincide con la única distribución estacionaria P^1 de la cadena. El vector de estado de la cadena cuando el número de etapas tiende a infinito, es un vector de probabilidad, que es autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ y no depende del vector de estado inicial $P(0)$.

Esto significa que la cadena de Markov consta de una sola clase final ergódica y no posee estados transitorios. Se dice que es completamente ergódica o que es una cadena regular. El comportamiento asintótico de la cadena es independiente del vector de estado inicial.

2.3. Tiempos de primera pasada

Al número de transiciones que hace el proceso de ir de un estado E_i a un estado E_j por primera vez se le denomina tiempo medio de primer paso μ_{ij} .

Cuando $j = i$, el valor μ_{ii} es justo el número de transiciones hasta que el proceso regresa al estado inicial i , y a este valor se le llama tiempo medio de recurrencia.

Para poder aplicar estos tiempos, es necesario que las cadenas de Markov que se utilicen sean ergódicas, es decir, describan un proceso en el cual es posible avanzar desde un estado hasta cualquier otro estado. Se cumple que el siguiente límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$, existe.

Si todos los estados de una cadena son recurrentes (es decir, siempre son alcanzables en cualquier instante de tiempo), de una misma clase, y aperiódicos, entonces la cadena es ergódica.

Función de probabilidad:

Se denota $f_{ij}^{(n)}$, a la probabilidad de ir desde el estado i al estado j en n pasos por primera vez.

Tenemos entonces:

n	1	2	3	4	...
$f_{ij}^{(n)}$	$f_{ij}^{(1)}$	$f_{ij}^{(2)}$	$f_{ij}^{(3)}$	$f_{ij}^{(4)}$...

Claramente se tiene:

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

$$f_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj},$$

$$f_{ij}^{(3)} = p_{ij}^{(3)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(2)} - f_{ij}^{(2)} p_{jj},$$

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} - f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(n-2)} - \dots - f_{ij}^{(n-1)} p_{jj}.$$

Resolución de los tiempos:

Como generalmente es bastante la carga de trabajo calcular las $f_{ij}^{(n)}$ para todas la n , se suele optar por obtener el tiempo esperado de primera pasada del estado i al estado j de la siguiente manera:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} & \text{si } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1. \end{cases}$$

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj}.$$

Resumen final:

El conocimiento de los autovalores de la matriz de transición de una cadena de Markov permite averiguar el comportamiento asintótico de esta cadena:

1. Si la matriz de transición de la cadena solo tiene un autovalor de módulo 1, este necesariamente es $\lambda = 1$, la cadena consta de una sola clase final. existe un único vector de estado permanente o estable que es la distribución estacionaria P^1 . Si este vector tiene todas las componentes positivas, la cadena es completamente ergódica, y si hay alguna componente nula, es simplemente ergódica, lo que significa que además de la clase ergódica tiene al menos una clase de estado transitorio. En ambos casos la distribución P^1 es la distribución a la larga de la cadena, independientemente de la distribución de probabilidad inicial.
2. Si la matriz de transición de la cadena tiene el autovalor 1 simple pero posee otros m autovalores de módulo 1, es una cadena periódica de periodo m , tiene una sola distribución estacionaria que viene dada por el autovector P^1 asociado al autovalor dominante, pero no es una distribución de estado permanente porque no existe el $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n \cdot P(0)$.
3. Si el autovalor 1 es múltiple de orden de multiplicidad k , la cadena es múltiple y consta de k clases finales, y puede tener o no alguna clase de estados

transitorios, pero a la larga quedará confinada en una de las clases finales. Por tanto, estas son las únicas que tienen interés en el estudio del comportamiento asintótico de la cadena.

Si alguna clase final es unitaria, el único estado que la forma es absorbente. Una cadena múltiple con k clases finales tiene k distribuciones estacionarias que vienen dadas por k autovectores linealmente independientes asociados al autovalor dominante $\lambda = 1$.

La distribución a la larga de este tipo de cadenas depende de la distribución de probabilidad inicial.

En todos los casos, siempre se puede dar al menos una distribución de probabilidad estacionaria, o distribución inicial que permanece inalterable en todas las etapas, esta es el vector de probabilidad P^1 , autovector asociado al autovalor dominante $\lambda = 1$.

3 | MODELO MARKOVIANO Y APLICACIÓN

El objetivo de este capítulo es presentar el modelo Markoviano que constituye la base matemática sobre la que se realizarán la clasificación de los activos subyacentes de Repsol, el Banco Santander, y Telefónica. A continuación, se realizarán las aplicaciones en los distintos activos, explicando las variaciones del modelo aplicadas para cada supuesto.

3.1. El modelo Markoviano

El modelo que se va a describir a continuación, es una versión del modelo explicado en el Capítulo 2 en el que se han determinado, como punto inicial, tres estados E_1, E_2, E_3 que se corresponden con los tres posibles estados en los que se han clasificado cada uno de los subyacentes cotizados, es decir:

$E_{1,n}$: El subyacente cotizado aumenta su valor en el período n . SUBE.

$E_{2,n}$: El subyacente cotizado mantiene su valor en el período n . IGUAL.

$E_{3,n}$: El subyacente cotizado reduce su valor en el período n . BAJA.

El modelo dinámico de cómo va cambiando con el tiempo esta clasificación de estados se basa en un modelo de Markov que se representa mediante el grafo del Gráfico 3.2.1.

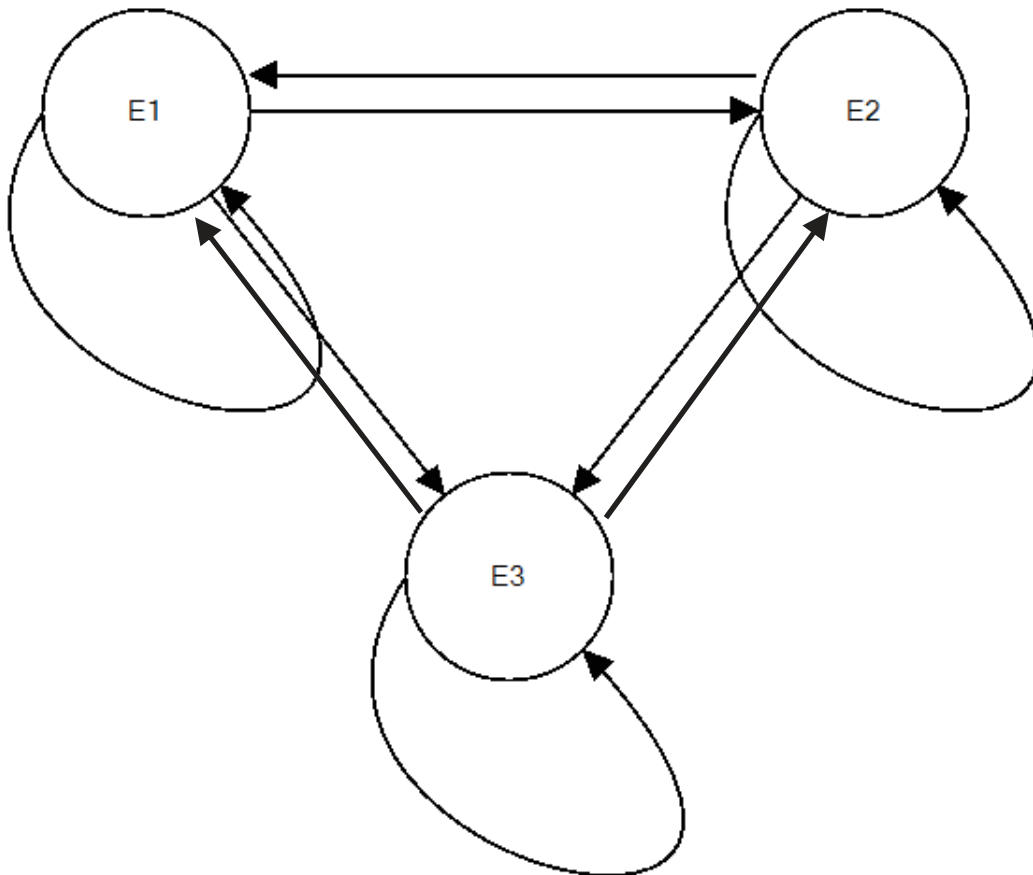


Gráfico 3.2.1 Grafo de estados del Modelo Markoviano

Fuente: Elaboración propia

El conjunto de probabilidades $P(E)$ agrupa todas las probabilidades $\{p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{31}, p_{32}, p_{33}\}$ de que cada uno de los estados se relacione

con los otros y consigo mismo, en cada instante temporal (días) en que se considera evoluciona las acciones de las compañías estudiadas.

En una cadena de Markov, la probabilidad de que el proceso esté en el instante $n + 1$ en un estado determinado depende del estado en que se encuentre en el instante anterior n . Por tanto, las probabilidades según los estados serán:

$$p_{11} = P[E_{1,n+1}|E_{1,n}] := \frac{P[E_{1,n} \cap E_{1,n+1}]}{P[E_{1,n}]},$$

$$p_{12} = P[E_{1,n+1}|E_{2,n}] := \frac{P[E_{2,n} \cap E_{1,n+1}]}{P[E_{2,n}]},$$

$$p_{13} = P[E_{1,n+1}|E_{3,n}] := \frac{P[E_{3,n} \cap E_{1,n+1}]}{P[E_{3,n}]},$$

$$p_{21} = P[E_{2,n+1}|E_{1,n}] := \frac{P[E_{1,n} \cap E_{2,n+1}]}{P[E_{1,n}]},$$

$$p_{22} = P[E_{2,n+1}|E_{2,n}] := \frac{P[E_{2,n} \cap E_{2,n+1}]}{P[E_{2,n}]},$$

$$p_{23} = P[E_{2,n+1}|E_{3,n}] := \frac{P[E_{3,n} \cap E_{2,n+1}]}{P[E_{3,n}]},$$

$$p_{31} = P[E_{3,n+1}|E_{1,n}] := \frac{P[E_{1,n} \cap E_{3,n+1}]}{P[E_{1,n}]},$$

$$p_{32} = P[E_{3,n+1}|E_{2,n}] := \frac{P[E_{2,n} \cap E_{3,n+1}]}{P[E_{2,n}]},$$

$$p_{33} = P[E_{3,n+1}|E_{3,n}] := \frac{P[E_{3,n} \cap E_{3,n+1}]}{P[E_{3,n}]}.$$

Una vez definidas las probabilidades, se puede generar la matriz de transición M , que será una matriz 3×3 , cuyas columnas representan las probabilidades de transición del proceso de un estado dado a cualquiera de los estados de la cadena en una etapa. Así, por ejemplo, el elemento de la columna 1 de la fila 2 representa la probabilidad de tránsito del estado 1 al estado 2 en cualquier etapa:

$$M_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es una matriz estocástica por columnas, es decir, la suma de los elementos de cada columna es 1. Por tanto, sus columnas son vectores de probabilidad.

Una vez definida la matriz de transición, podemos calcular su vector propio X_e asociado al valor $\lambda = 1$:

$$\vec{X}_{n+1} = M \cdot \vec{X}_n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\vec{X}_n = \begin{bmatrix} E_{1,n} \\ E_{2,n} \\ E_{3,n} \end{bmatrix}, \quad \vec{X}_0 = \begin{bmatrix} E_{1,0} \\ E_{2,0} \\ E_{3,0} \end{bmatrix},$$

$$\vec{X}_n = M^n \cdot \vec{X}_0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{X}_n = X_e = \begin{bmatrix} E_{1,e} \\ E_{2,e} \\ E_{3,e} \end{bmatrix}.$$

Este vector X_e es el vector propio o autovector de probabilidad ($E_{1,e} + E_{2,e} + E_{3,e} = 1$) asociado al valor propio $\lambda = 1$, que siempre es valor propio de la matriz M al ser esta una matriz estocástica.

El vector propio de la matriz de transición nos da las probabilidades de que cada uno de los estados estacionarios o a largo plazo $E_{1,e}, E_{2,e}, E_{3,e}$, , suceda. Por lo tanto, cuando se aplique el modelo sobre una matriz de transición estable, esto es, que esté calculada con un número suficiente de datos para que esta apenas varíe dentro del

comportamiento natural del activo subyacente, se conseguirá un vector que clasifique cada uno de los estados, y permita determinar las probabilidades de que esos estados se cumplan en periodos futuros.

Para finalizar, mediante el software Mathematica[®], se determinará gracias al vector propio y a una condición inicial dada que se calculará en el último periodo estudiado, una previsión para n periodos de cada uno de los activos subyacentes, determinando así el comportamiento futuro de estos activos.

3.2. Aplicación del Modelo Markoviano

En este apartado se va a mostrar la aplicación que se ha realizado del modelo Markoviano mencionado en el apartado anterior usando para ello datos de cotizaciones reales de las compañías seleccionadas. Para ello se han elegido tres entidades, representantes cada una de su sector de la economía española, y que forman parte del IBEX 35. Estas entidades han sido: Repsol, Santander y Telefónica.

Se ha decidido aplicar el modelo en un período de un año con diferentes objetivos. El principal objetivo, que coincide con el del proyecto, es conseguir estabilizar una matriz de probabilidades en este período, logrando así un modelo más fiable en el corto-medio plazo, que nos permita en último momento, determinar previsiones futuras. Otro de los objetivos de utilizar este período concreto, es que el modelo esté basado en los últimos datos recogidos de estas empresas, con tal de que el modelo quede actualizado, por lo que hemos usado los datos de estas entidades, de abril del 2016 a marzo de 2017, período de realización de parte de este Trabajo Final de Grado.

3.2.1. Toma de datos

Para seleccionar los datos, hemos establecido diferentes parámetros. Todos los datos tomados son diarios y a fecha de cierre de cada una de las entidades. Para recopilar todos estos datos hemos utilizado herramientas web⁹, y hemos exportado los datos a Excel[®], principal herramienta de trabajo, junto con el software Mathematica[®] de

⁹ Web bolsa de Madrid y Yahoo Finanzas.

Wolfram. A continuación se han establecido bloques de 20 días¹⁰, mes a mes, con el objetivo de ir estableciendo, matrices de transición, y vectores propios, para ir comprobando la estabilidad a lo largo de todo el año.

Los datos se muestran en el Anexo 1 de esta memoria.

3.2.2. Diseño de la plantilla

Una vez recogidos todos los datos, se ha establecido una plantilla, con todos los datos necesarios para determinar el modelo, y de fácil manejo para minimizar el trabajo operativo. Para ello se muestra a continuación una imagen de dicha plantilla, sobre la que se explicarán cada uno de los contenidos de la misma.

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31

TOTALES	
SUBE	12
IGUAL	1
BAJA	6

N=20

P11	0,75
P12	0
P13	0,5
P21	0
P22	0
P23	0,16666667
P31	0,25
P32	1
P33	0,33333333

	0,75	0	0,5
MATRIZ	0	0	0,166666667
	0,25	1	0,333333333
	1	1	1

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

Tabla 3.2.2.- Plantilla del Modelo Markoviano

Fuente: Elaboración Propia. Excel©

En la primera columna está la fecha de la cotización, seguida de su valor ajustado a cierre. En la tercera columna, se ha creado una fórmula¹¹ utilizando la función "SI", que

¹⁰ La bolsa suele abrir una media de 240/250 días al año, por lo que $240/12 = 20$ días/mes.

¹¹ =+SI(B2<D23;"BAJA";SI(B2=D23;"IGUAL";"SUBE")).

se corresponde con la función "if" de programación básica, con tal de determinar, para cada instante de tiempo t , el estado en el que se encuentra el valor de la acción con respecto al instante de tiempo anterior. De esta forma, clasificamos cada uno de los valores según los estados del modelo. En este punto concreto del modelo, es donde se han establecido variaciones entre las diferentes entidades. En Repsol, se ha utilizado un modelo más rígido, ya que los resultados obtenidos eran positivos. En cambio, en los modelos de Telefónica y de Santander, se han tenido que modificar las fórmulas para darle mayor flexibilidad a los estados, ya que no existían casos en los que el valor de la acción se mantuviese constante, por lo que se ha establecido un condicionante que considera que el valor del título se mantiene igual si este sufre una variación inferior a un 2.5% con respecto al periodo anterior.

En la última columna de la primera tabla se ha clasificado cada valor en función de la posición que ocuparía en el grafo, es decir, del estado en el que se encuentra, y del estado en el instante de tiempo inmediatamente posterior. Para ello se ha vuelto a utilizar la función "SI" de Excel® y el operador lógico "Y"¹².

Una vez clasificados todos los elementos, se ha procedido a calcular las probabilidades de la matriz de transición. Para ello se ha utilizado la columna mencionada en el apartado anterior, y la tabla de los Totales¹³. Aplicando la fórmula de las probabilidades mencionada en el primer apartado de este capítulo, se obtienen las probabilidades de que se suceden cada uno de los 9 casos posibles dentro de la matriz de transición.

Por último, se ha calculado la matriz de transición para este periodo, comprobando que se haya hecho correctamente, y esta sea, efectivamente una matriz estocástica, es decir, las columnas sumen la unidad.

Esto se ha repetido para cada uno de los 12 períodos a estudiar, y en cada una de las tres entidades. Como el modelo busca encontrar una estabilidad, los periodos se acumulan, es decir, en el segundo período están incluidos los datos del primero, en el

¹²+SI(Y(C4="SUBE";C3="SUBE");"P11";SI(Y(C4="SUBE";C3="IGUAL");"P12";SI(Y(C4="SUBE";C3="BAJA");"P13";SI(Y(C4="IGUAL";C3="SUBE");"P21";SI(Y(C4="IGUAL";C3="IGUAL");"P22";SI(Y(C4="IGUAL";C3="BAJA");"P23";SI(Y(C4="BAJA";C3="SUBE");"P31";SI(Y(C4="BAJA";C3="IGUAL");"P32";"P33"))))))))

¹³ Esta tabla muestra la cantidad total de valores que han sido "SUBE", "IGUAL" Y "BAJA" en el periodo.

tercero los del segundo, y así sucesivamente, por lo que en el último período la matriz de transición está determinada a partir de 240 datos.

3.2.3. Cálculo de las probabilidades finales

Una vez establecidas todas las matrices de transición, se han calculado sus vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$, con el objetivo de determinar, si éstos se estabilizan a lo largo del periodo estudiado, y con el objetivo de averiguar, en el conjunto de datos analizados, las probabilidades estimadas de que cada uno de los estados se sucedan.

Para ello, hemos utilizado el software Mathematica®. Con las imágenes que se muestran a continuación, se explicarán los pasos realizados para obtener estas probabilidades.

Primero se calcula el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$. Para ello, se define la matriz de transición dentro del software y a continuación se utiliza el comando “Eigensystem”, que determina los valores propios y los vectores propios de la matriz de transición:

$$\text{RepsolAbril} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 0.25 & 1 & 2/6 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbril]

|autovalores y autovectores

```
{ {1., 0.397667, -0.314333}, { {-0.891953, -0.0743294, -0.445976},
  {-0.794608, 0.234675, 0.559934}, {-0.383338, -0.432661, 0.816} }
```

Los tres primeros datos son los valores propios de la matriz. Como se observa en la salida de Mathematica®, al tratarse de una matriz estocástica, uno de los autovalores es el 1, por lo que el vector propio asociado a este valor, será el primero de la segunda lista de datos. Así los vectores propios asociados a este valor propio será de la forma:

$$\vec{v}_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} -0.89195 \\ -0.07432 \\ -0.44597 \end{bmatrix} \cdot r, \quad r \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Ahora bien, como cada componente representa el porcentaje de elementos que pertenecen a cada uno de los 3 estados, se tiene que cumplir que su suma sea el 100%, por lo que se utiliza el comando “Solve” para normalizar dicho vector:

$$\text{Solve}[-(0.891957 + 0.0743294 + 0.445976487)r == 1, r].$$

Se determina así el siguiente valor $r \rightarrow -0.70808$. Sustituyéndolo en la expresión de $\vec{v}_{\lambda=1}$ se tiene que:

$$\vec{v}_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} -0.8919 \\ -0.07432 \\ -0.4459 \end{bmatrix} \cdot (-0.70808) = \begin{bmatrix} 0.6315 \\ 0.0526 \\ 0.3157 \end{bmatrix}.$$

Que, finalmente, proporciona un vector que representa las probabilidades de que suceda cada uno de los 3 estados a largo plazo. Concretamente, hay una probabilidad de 63,15% de que a largo plazo la acción “suba”; un 5,26% de que “permanezca igual” y el resto, 31,59% de que “baje”. Este último valor se ha redondeado para que la suma total sea lógicamente 1.

3.2.4. Previsiones futuras

Como ya hemos mencionado anteriormente, estos porcentajes se han calculado para cada una de las matrices de transición, con el objetivo de comprobar su estabilidad a lo largo del tiempo. Sin embargo, para el último paso de la aplicación del modelo, se utiliza únicamente la última matriz de transición de cada una de las tres entidades, que juntamente con una condición inicial¹⁴ que se calcula con los últimos n valores del año¹⁵, servirá para determinar el comportamiento del título en los siguientes 5 periodos. Así:

¹⁴ La condición inicial es la probabilidad de que se suceda cada estado con los últimos 20 valores de la muestra.

¹⁵ $n = 20$.

```

TelefonicaAbrilMarzo;
b = {0.65, 0.05, 0.3};
Table[MatrixPower[TelefonicaAbrilMarzo, t].b,
|tabla |potencia matricial
{t, 0, 5}] // MatrixForm
|forma de matriz

```

En las soluciones de cada una de las entidades se detallarán los resultados.

3.2.5. Tiempos de primera pasada

Es interesante desde un punto de vista de mejora del modelo, calcular, en este caso, el tiempo de recurrencia del estado "SUBE", es decir, el tiempo medio de días en los que el estado "SUBE" tiende a repetirse. Para ello se van a utilizar los tiempos de primera pasada, explicados en el Apartado 2.3.

Para calcular el tiempo de pasada del estado E_1 al mismo, se utilizará la matriz de transición más estable de cada una de las empresas utilizadas, y mediante un sistema de ecuaciones, se calculará el tiempo medio de días en los que, según la matriz de transición, se sucederá de nuevo el estado "SUBE" (correspondiente según nuestra notación al estado E_1). Así:

$$\mu_{11} = 1 + p_{12}\mu_{21} + p_{13}\mu_{31},$$

$$\mu_{21} = 1 + p_{22}\mu_{21} + p_{23}\mu_{31},$$

$$\mu_{31} = 1 + p_{32}\mu_{21} + p_{33}\mu_{31}.$$

Con esto se calcularán los tiempos medios en días de tres estados de pasar del estado SUBE al resto de estados (incluido el estado SUBE), porque se calcula mediante una sistema de ecuaciones acoplado, pero para nuestros intereses a efectos de ilustración solo será relevante el tiempo μ_1 , que es el tiempo de recurrencia del estado "SUBE".

3.3. Soluciones del Modelo

En este apartado, se van a exponer los resultados obtenidos para cada una de las tres entidades, explicando, para cada caso, las diferencias en la aplicación del modelo y los diferentes resultados. Para ello facilitar la comprensión, se ha decidido separar en tres subapartados, uno para cada entidad, y en ellos se explicará de manera individual los resultados obtenidos para cada una de ellas.

3.3.1. Repsol

El modelo de Repsol, como se ha mencionado anteriormente es el modelo más rígido, puesto que no se ha aplicado un coeficiente para determinar el alcance del estado "IGUAL", es decir, no se ha considerado que el valor del título se mantiene si este está dentro de un rango establecido con anterioridad, sino que el valor de un periodo y su inmediato posterior es el mismo.

Esto se ha realizado con dos propósitos distintos. El primero es determinar si se puede alcanzar la estabilidad cuando uno de los estados es probabilísticamente muy inferior al resto de estados, y el segundo es poder determinar las diferencias entre este modelo y uno más flexible.

A continuación se muestran cada una de las matrices de transición de los diferentes períodos del horizonte temporal estudiado y sus respectivos vectores propios:

3.3.1.1. Matrices de transición y vectores propios

$$M_{\text{RepsolAbril}} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 0.25 & 1 & 2/6 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Abril}} = \begin{bmatrix} 0.63157 \\ 0.05263 \\ 0.31578 \end{bmatrix},$$

$$M_{\text{RepsolMayo}} = \begin{bmatrix} 0.591 & 0.5 & 0.534 \\ 0.045 & 0 & 0.066 \\ 0.3636 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Mayo}} = \begin{bmatrix} 0.5644 \\ 0.0507 \\ 0.3847 \end{bmatrix},$$

$$M_{\text{RepsolJunio}} = \begin{bmatrix} 0.636 & 0.5 & 0.5 \\ 0.03 & 0 & 0.042 \\ 0.334 & 0.5 & 0.458 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Junio}} = \begin{bmatrix} 0.5787 \\ 0.0336 \\ 0.3876 \end{bmatrix},$$

$$M_{\text{RepsolJulio}} = \begin{bmatrix} 0.595 & 0.5 & 0.472 \\ 0.024 & 0 & 0.028 \\ 0.381 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Julio}} = \begin{bmatrix} 0.5390 \\ 0.0251 \\ 0.4358 \end{bmatrix},$$

$$M_{\text{RepsolAgosto}} = \begin{bmatrix} 0.582 & 0.333 & 0.512 \\ 0.036 & 0 & 0.023 \\ 0.382 & 0.667 & 0.465 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Agosto}} = \begin{bmatrix} 0.5448 \\ 0.0294 \\ 0.4257 \end{bmatrix},$$

$$M_{\text{RepsolSeptiembre}} = \begin{bmatrix} 0.569 & 0.333 & 0.519 \\ 0.031 & 0 & 0.019 \\ 0.4 & 0.667 & 0.462 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Septiembre}} = \begin{bmatrix} 0.5414 \\ 0.0250 \\ 0.4335 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{RepsolOctubre}} = \begin{bmatrix} 0.557 & 0.333 & 0.557 \\ 0.025 & 0 & 0.016 \\ 0.418 & 0.667 & 0.427 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Octubre}} = \begin{bmatrix} 0.5523 \\ 0.0206 \\ 0.4269 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{RepsolNoviembre}} = \begin{bmatrix} 0.534 & 0.333 & 0.548 \\ 0.023 & 0 & 0.014 \\ 0.443 & 0.667 & 0.438 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Noviembre}} = \begin{bmatrix} 0.5364 \\ 0.0185 \\ 0.4449 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{RepsolDiciembre}} = \begin{bmatrix} 0.525 & 0.333 & 0.58 \\ 0.02 & 0 & 0.013 \\ 0.455 & 0.667 & 0.407 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Diciembre}} = \begin{bmatrix} 0.5458 \\ 0.0166 \\ 0.4375 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{RepsolEnero}} = \begin{bmatrix} 0.535 & 0.5 & 0.58 \\ 0.018 & 0 & 0.023 \\ 0.447 & 0.5 & 0.398 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Enero}} = \begin{bmatrix} 0.5532 \\ 0.0197 \\ 0.4269 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{RepsolFebrero}} = \begin{bmatrix} 0.525 & 0.5 & 0.564 \\ 0.016 & 0 & 0.02 \\ 0.459 & 0.5 & 0.416 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Febrero}} = \begin{bmatrix} 0.5417 \\ 0.0174 \\ 0.4407 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{RepsolMarzo}} = \begin{bmatrix} 0.519 & 0.5 & 0.569 \\ 0.022 & 0.167 & 0.018 \\ 0.459 & 0.333 & 0.413 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}^{\text{Marzo}} = \begin{bmatrix} 0.5403 \\ 0.0236 \\ 0.4359 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar, al principio las matrices son más distintas entre sí, produciéndose variaciones significativas de un período al siguiente. Es a partir de diciembre cuando se empieza a observar una estabilidad en las matrices y sobre todo en los vectores propios asociados.

Si bien es cierto que el segundo estado, que representa la igualdad entre los valores de las cotizaciones es el menos estable del conjunto, debido a que la escasa cantidad de casos provoca que un único caso, sobre 240 genere una desigualdad significativa en este estado. Así lo podemos comprobar en el último período, en el que, casualmente, se produce lo que acabamos de mencionar.

Se comprobará, en las dos aplicaciones posteriores si esta variabilidad en el modelo se ve diluida con la aplicación del rango de igualdad del 2,5%.

Para finalizar, y antes de calcular la previsión para períodos futuros, se puede afirmar que la probabilidad de que, en un futuro la acción de Repsol experimente una subida,

es del 54,03%, la probabilidad de que su valor se mantenga estable es del 2,36%, y la probabilidad de que su valor decrezca es del 43,59%.

3.3.1.2. Predicción del Modelo. Repsol

En este apartado se va a utilizar la última matriz de transición, correspondiente a la totalidad de los datos estudiados para la empresa Repsol, y una condición inicial que se explicará a continuación, para hallar, a través de un función en el software *Mathemática*[®], las probabilidades de que cada uno de los tres estados en los 5 períodos posteriores a la finalización del estudio, es decir, para los meses de abril a agosto de 2017.

La condición inicial es el número de casos totales para cada uno de los estados en los últimos datos añadidos para el último periodo, es decir, los 20 datos de marzo de 2017.

Teniendo pues, la matriz $M_{RepsolMarzo} = \begin{bmatrix} 0.519 & 0.5 & 0.569 \\ 0.022 & 0.167 & 0.018 \\ 0.459 & 0.333 & 0.413 \end{bmatrix}$ y la condición

inicial $C_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$, se determina:

RepsolAbrilMarzo;

b = {0.5, 0.1, 0.4};

Table[MatrixPower[RepsolAbrilMarzo, t].b, {t, 0, 5}] // MatrixForm

[tabla	potencia matricial	[forma de matri
------------------------	------------------------------------	---------------------------------

Siendo las previsiones para los 5 siguientes períodos de:

$$Prevision\ Repsol = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5371 & 0.0349 & 0.42800000 \\ 0.5397369 & 0.0253485 & 0.4349146000 \\ 0.5402641085 & 0.02393587409 & 0.4358000174 \\ 0.5403352192 & 0.02372750167 & 0.435937279065 \\ 0.5403460414 & 0.02369673862 & 0.43595721995 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar, los primeros valores tiene una variabilidad superior, viéndose una estabilización rápida, tendiendo hacia el vector propio estable del modelo de Repsol.

Aunque estos valores son predictivos, se podría comprobar la efectividad del modelo calculando las matrices de transición y los vectores propios asociados de los períodos previstos.

Cabe destacar que en un momento en el que los estudios contienen bases de datos infinitamente superiores a las utilizadas en este proyecto, se ha conseguido el objetivo principal de este, que es encontrar una matriz de transición y un vector propio asociados en un periodo de tan solo 12 meses. Con un análisis de una mayor cantidad de datos, y ajustes de sensibilidad y volatilidad, se puede conseguir un buen modelo de predicción del comportamiento del movimiento de subyacentes cotizados utilizando para ello, un modelo de cadenas de Markov.

3.3.1.3. Tiempo de recurrencia del estado E_1 . Repsol.

En este apartado se va a calcular el tiempo de recurrencia del estado SUBE del modelo Markoviano. Para ello se establece un sistema de ecuaciones, que se resolverá para determinar el tiempo medio en días en los que la acción de Repsol aumentará su cotización. Para ello:

$$M_{\text{RepsolMarzo}} = \begin{bmatrix} 0.519 & 0.5 & 0.569 \\ 0.022 & 0.167 & 0.018 \\ 0.459 & 0.333 & 0.413 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{11} = 1 + 0.5 \mu_{21} + 0.569 \mu_{31}$$

$$\mu_{21} = 1 + 0.167 \mu_{21} + 0.018 \mu_{31}$$

$$\mu_{31} = 1 + 0.333 \mu_{21} + 0.413 \mu_{31}$$

Mediante el comando Solve del Software Mathematica® tenemos que el tiempo de primera pasada del estado 1 al estado 1, es decir, el tiempo de recurrencia del estado 1 es $\mu_{11} = 2.996$, Siendo, $\mu_{21} = 1.2525$ y $\mu_{31} = 2.4077$ los otros valores. Por tanto, el tiempo medio esperado de que tras un estado de SUBE la acción de Santander vuelva a SUBE es aproximadamente 3 períodos o días.

3.3.2. Santander

Para el modelo de Santander, se han establecido una serie de ajustes para intentar conseguir una mayor estabilidad en el modelo, ya que, como ya hemos mencionado, el segundo estado es mucho menos probable que el resto, por lo que se

ha aumentado el rango de este con tal de tener más casos que cumplan el estado de Igualdad. Concretamente, se ha establecido que si la variación del valor de la acción no supera el 2,5% con respecto al período anterior, el modelo va a considerar que el valor se ha mantenido constante para ese período. Se ha utilizado una variación del 2,5% intentando que esta fuera lo menor posible, pero al mismo tiempo tuviese una cantidad suficiente de casos en los que se cumpliese este estado.

Una vez determinada esta variación del modelo, el resto se aplica exactamente igual que en el caso de Repsol.

El objetivo de esta modificación, aparte de lograr una mayor estabilidad en el modelo, es el de poder comparar con el modelo original, y determinar si hay diferencias significativas, y el carácter de estas.

3.3.2.1. Matrices de transición y vectores propios

$$MSantAbril = \begin{bmatrix} 0.769 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.231 & 1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Abril = \begin{bmatrix} 0.6839 \\ 0.0526 \\ 0.2633 \end{bmatrix},$$

$$MSantMayo = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.6 & 0.5 \\ 0.05 & 0.2 & 0.214 \\ 0.4 & 0.2 & 0.286 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Mayo = \begin{bmatrix} 0.5393 \\ 0.1238 \\ 0.3368 \end{bmatrix},$$

$$MSantJunio = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.478 \\ 0.107 & 0.125 & 0.174 \\ 0.393 & 0.375 & 0.348 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Junio = \begin{bmatrix} 0.4917 \\ 0.1344 \\ 0.3737 \end{bmatrix},$$

$$MSantJulio = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.333 & 0.533 \\ 0.158 & 0.167 & 0.133 \\ 0.342 & 0.5 & 0.334 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Julio = \begin{bmatrix} 0.4868 \\ 0.1502 \\ 0.3628 \end{bmatrix},$$

$$MSantAgosto = \begin{bmatrix} 0.489 & 0.421 & 0.457 \\ 0.213 & 0.158 & 0.2 \\ 0.298 & 0.421 & 0.343 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Agosto = \begin{bmatrix} 0.4647 \\ 0.1977 \\ 0.3375 \end{bmatrix},$$

$$MSantSeptiembre = \begin{bmatrix} 0.482 & 0.435 & 0.465 \\ 0.214 & 0.13 & 0.186 \\ 0.304 & 0.435 & 0.349 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Septiembre = \begin{bmatrix} 0.4672 \\ 0.1885 \\ 0.3441 \end{bmatrix},$$

$$MSantOctubre = \begin{bmatrix} 0.485 & 0.419 & 0.457 \\ 0.227 & 0.194 & 0.217 \\ 0.288 & 0.387 & 0.326 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Octubre = \begin{bmatrix} 0.4616 \\ 0.2166 \\ 0.3216 \end{bmatrix},$$

$$MSantNoviembre = \begin{bmatrix} 0.472 & 0.389 & 0.446 \\ 0.236 & 0.194 & 0.215 \\ 0.292 & 0.417 & 0.339 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Noviembre = \begin{bmatrix} 0.4450 \\ 0.2197 \\ 0.3352 \end{bmatrix},$$

$$MSantDiciembre = \begin{bmatrix} 0.475 & 0.357 & 0.475 \\ 0.22 & 0.262 & 0.213 \\ 0.305 & 0.381 & 0.312 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Diciembre = \begin{bmatrix} 0.4481 \\ 0.2272 \\ 0.3245 \end{bmatrix},$$

$$MSantEnero = \begin{bmatrix} 0.472 & 0.36 & 0.462 \\ 0.22 & 0.28 & 0.246 \\ 0.308 & 0.36 & 0.292 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Enero = \begin{bmatrix} 0.4416 \\ 0.2427 \\ 0.3155 \end{bmatrix},$$

$$MSantFebrero = \begin{bmatrix} 0.475 & 0.377 & 0.44 \\ 0.202 & 0.265 & 0.253 \\ 0.323 & 0.358 & 0.307 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Febrero = \begin{bmatrix} 0.4407 \\ 0.2333 \\ 0.3259 \end{bmatrix},$$

$$MSantMarzo = \begin{bmatrix} 0.463 & 0.367 & 0.45 \\ 0.213 & 0.283 & 0.25 \\ 0.324 & 0.35 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Marzo = \begin{bmatrix} 0.4355 \\ 0.2418 \\ 0.3225 \end{bmatrix}.$$

Al igual que con el caso de Repsol, se puede observar como al principio, tanto las matrices como los vectores propios son bastante dispares y hay gran variabilidad de un período al siguiente, pero conforme van avanzando y se van analizando una mayor cantidad de datos se puede apreciar cómo, efectivamente, el modelo se estabiliza y se logra un comportamiento estable en los últimos periodos.

Comparando los resultados con el caso anterior, podemos obtener varias conclusiones. En primer lugar, vemos que la cantidad de casos que se corresponden con el segundo estado (“la acción permanece igual”) son mucho más numerosos que en el caso de Repsol. En segundo lugar, vemos que los resultados son más estables que en el caso de Repsol, ya que, además de apreciar una estabilidad significativamente antes que en el modelo de Repsol, la variabilidad del conjunto de datos es menor, por lo que podemos considerar la efectividad del ajuste realizado como positiva.

La variación en el modelo se ha realizado conforme a los datos obtenidos en un primer momento y a una serie de pruebas que determinaron que una variación del 2,5% en el valor de las acciones era lo suficientemente pequeña como para distorsionar lo menos posible los resultados, pero lo suficiente como para que el modelo no fuese tan sensible a las variaciones del segundo estado.

Para finalizar, y antes de calcular la previsión para períodos futuros, se puede afirmar que la probabilidad de que, en un futuro la acción de Santander experimente una subida, es del 43,55%, la probabilidad de que su valor se mantenga estable es del 24,18%, y la probabilidad de que su valor decrezca es del 32,25%.

3.3.2.2. Predicción del Modelo. Santander

En este apartado se va a utilizar la última matriz de transición, correspondiente a la totalidad de los datos estudiados para la empresa Santander, y una condición inicial, para hallar, a través de un función en el software Mathematica®, las probabilidades de que los estados se sucedan, en los 5 períodos posteriores a la finalización del estudio, es decir, para los meses de abril a agosto de 2017.

Teniendo pues, la matriz $MSantMarzo = \begin{bmatrix} 0.463 & 0.367 & 0.45 \\ 0.213 & 0.283 & 0.25 \\ 0.324 & 0.35 & 0.3 \end{bmatrix}$ y la condición inicial

$C_0 = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.35 \\ 0.3 \end{bmatrix}$, se determina:

SantanderAbrilMarzo;

b = {0.35, 0.35, 0.3};

Table[MatrixPower[SantanderAbrilMarzo, t].b, {t, 0, 5}] // MatrixForm

$$Prevision\ Santander = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.35 & 0.3 \\ 0.4255 & 0.2486 & 0.32589 \\ 0.43489770 & 0.2424602 & 0.322642 \\ 0.43552945 & 0.241909975 & 0.322560 \\ 0.435583355 & 0.2418684 & 0.32254 \\ 0.435587503 & 0.2418650743 & 0.322547 \end{bmatrix}$$

A diferencia del caso de Repsol, en este se aprecia una mayor estabilidad desde el principio de las previsiones, lo que puede dar lugar a un modelo más estable, y por tanto, mejor que el modelo básico de Repsol.

Con el tercer ejemplo se intentará comprobar que, efectivamente, el modelo ajustado es menos sensible, y por lo tanto mejor, que el modelo inicial.

Sin tener en cuenta esta comparación, al igual que en el caso anterior, se ha conseguido una estabilidad en un periodo de 12 meses, lo que se traduce en que un modelo predictivo de este tipo, utilizando las herramientas aprendidas durante los diferentes

curso del Grado en Administración y Dirección de Empresas de la Universitat Politècnica de València, es válido y arroja unos resultados positivos.

3.3.2.3. Tiempo de recurrencia del estado E_1 . Santander

En este apartado se va a calcular el tiempo de recurrencia del estado SUBE del modelo Markoviano. Para ello se establece un sistema de ecuaciones, que se resolverá para determinar el periodo medio en días en los que la acción de Repsol aumentara su cotización. Para ello:

$$MSantMarzo = \begin{bmatrix} 0.463 & 0.367 & 0.45 \\ 0.213 & 0.283 & 0.25 \\ 0.324 & 0.35 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{11} = 1 + 0.367 \mu_{21} + 0.45 \mu_{31},$$

$$\mu_{21} = 1 + 0.283 \mu_{21} + 0.25 \mu_{31},$$

$$\mu_{31} = 1 + 0.35 \mu_{21} + 0.3 \mu_{31}.$$

Mediante el comando Solve del Software Mathematica® tenemos que el tiempo de primera pasada del estado 1 al estado 1, es decir, el tiempo de recurrencia del estado 1 es $\mu_{11} = 2.98395$, Siendo, $\mu_{21} = 2.29247$ y $\mu_{31} = 2.57481$ los otros valores. Por tanto, el tiempo medio esperado de que tras un estado de SUBE la acción de Santander vuelva a SUBE es aproximadamente 3 periodos o días.

3.3.3. Telefónica

Para finalizar la aplicación del modelo, y el estudio del presente proyecto, se va a aplicar por último el modelo a la empresa Telefónica. Al igual que con el modelo de Santander, este tiene una variación con respecto al inicial. Lo que se va a intentar conseguir con este tercer análisis, es determinar, si efectivamente, el modelo modificado es mejor en cuanto a resultados y estabilidad que el modelo inicial.

3.3.3.1. Matrices de transición y vectores propios

$$MTelefAbril = \begin{bmatrix} 0.545 & 1 & 0.5 \\ 0.182 & 0 & 0 \\ 0.273 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Abril = \begin{bmatrix} 0.5787 \\ 0.1053 \\ 0.3159 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefMayo} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.4 & 0.643 \\ 0.2 & 0 & 0.071 \\ 0.35 & 0.6 & 0.286 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Mayo = \begin{bmatrix} 0.512 \\ 0.128 \\ 0.359 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefJunio} = \begin{bmatrix} 0.483 & 0.4 & 0.56 \\ 0.138 & 0 & 0.04 \\ 0.379 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Junio = \begin{bmatrix} 0.5071 \\ 0.0862 \\ 0.4065 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefJulio} = \begin{bmatrix} 0.462 & 0.333 & 0.563 \\ 0.154 & 0.222 & 0.063 \\ 0.384 & 0.445 & 0.374 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Julio = \begin{bmatrix} 0.4847 \\ 0.1273 \\ 0.3878 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefAgosto} = \begin{bmatrix} 0.469 & 0.375 & 0.556 \\ 0.184 & 0.25 & 0.083 \\ 0.347 & 0.375 & 0.361 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Agosto = \begin{bmatrix} 0.4851 \\ 0.1584 \\ 0.3564 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefSeptiembre} = \begin{bmatrix} 0.483 & 0.421 & 0.511 \\ 0.19 & 0.211 & 0.089 \\ 0.327 & 0.368 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Septiembre = \begin{bmatrix} 0.4833 \\ 0.1569 \\ 0.3596 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefOctubre} = \begin{bmatrix} 0.455 & 0.375 & 0.509 \\ 0.227 & 0.208 & 0.094 \\ 0.318 & 0.417 & 0.397 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Octubre = \begin{bmatrix} 0.4606 \\ 0.1752 \\ 0.3641 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefNoviembre} = \begin{bmatrix} 0.435 & 0.333 & 0.462 \\ 0.232 & 0.167 & 0.138 \\ 0.333 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Noviembre = \begin{bmatrix} 0.4268 \\ 0.1834 \\ 0.3897 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefDiciembre} = \begin{bmatrix} 0.457 & 0.364 & 0.465 \\ 0.222 & 0.151 & 0.141 \\ 0.321 & 0.485 & 0.394 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Diciembre = \begin{bmatrix} 0.4434 \\ 0.1787 \\ 0.3778 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefEnero} = \begin{bmatrix} 0.456 & 0.385 & 0.441 \\ 0.222 & 0.154 & 0.169 \\ 0.322 & 0.461 & 0.39 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Enero = \begin{bmatrix} 0.4369 \\ 0.1893 \\ 0.3737 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefFebrero} = \begin{bmatrix} 0.465 & 0.409 & 0.451 \\ 0.228 & 0.159 & 0.171 \\ 0.307 & 0.432 & 0.378 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Febrero = \begin{bmatrix} 0.4491 \\ 0.1942 \\ 0.3566 \end{bmatrix},$$

$$M_{TelefMarzo} = \begin{bmatrix} 0.482 & 0.435 & 0.455 \\ 0.211 & 0.152 & 0.17 \\ 0.307 & 0.413 & 0.375 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\lambda=1}Marzo = \begin{bmatrix} 0.4638 \\ 0.1856 \\ 0.3505 \end{bmatrix}.$$

Al igual que con los casos anteriores, observamos que ante un inicio con más variabilidad, el modelo tiende a estabilizarse en torno a unas probabilidades que varían muy poco de un periodo a otro. Tal vez este sea un poco más sensible que el modelo de Santander, que a la vista de los resultados parece ser el más estable de los tres. Sin

embargo, estos resultados son mejores que en el caso de Repsol, por lo que se puede determinar que el modelo ajustado presenta una menor variabilidad en los resultados, y por tanto, es más estable.

Para finalizar, y antes de calcular la previsión para períodos futuros, se puede afirmar que la probabilidad de que, en un futuro la acción de Telefónica experimente una subida, es del 46,38%, la probabilidad de que su valor se mantenga estable es del 18,56%, y la probabilidad de que su valor decrezca es del 35,05%.

El hecho de que en este modelo el número de casos en los que el valor de la acción de Telefónica se mantiene igual es bastante inferior al de Santander, puede dar alguna información sobre la volatilidad de la acción de telefónica, es decir, las oscilaciones en los valores, por norma han de ser superiores al 2,5% en más casos que el título Santander, por lo que se puede considerar el título de Telefónica como uno de mayor riesgo.

3.3.3.2. Predicción del Modelo. Telefónica

En este apartado se va a utilizar la última matriz de transición, correspondiente a la totalidad de los datos estudiados para la empresa Telefónica, y una condición para hallar, a través de un función en el software Mathematica®, las probabilidades de que los estados se sucedan, en los 5 períodos posteriores a la finalización del estudio, es decir, para los meses de abril a agosto de 2017.

Teniendo pues, la matriz $M_{TelefMarzo} = \begin{bmatrix} 0.482 & 0.435 & 0.455 \\ 0.211 & 0.152 & 0.17 \\ 0.307 & 0.413 & 0.375 \end{bmatrix}$ y la condición

inicial $C_0 = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \\ 0.3 \end{bmatrix}$, se determina:

```
TelefonicaAbrilMarzo;
```

```
b = {0.65, 0.05, 0.3};
```

```
Table [MatrixPower [TelefonicaAbrilMarzo, t] . b,  
[tabla |potencia matricial
```

$$Prevision\ Telefónica = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.05 & 0.3 \\ 0.47155 & 0.195749999 & 0.3327 \\ 0.46381685 & 0.1858100499 & 0.3503731 \\ 0.46380685 & 0.185671909 & 0.3505212360 \\ 0.4638093468 & 0.185673986 & 0.3505166665 \\ 0.4638093726 & 0.18567405146 & 0.35051657590 \end{bmatrix}$$

Efectivamente, y cómo podemos comprobar, estas previsiones son menos sensibles que las de Repsol, y los resultados se asemejan más a los de Santander. Igual que con el caso anterior, los valores de predicción tienden a acercarse al vector propio de la matriz de transición para el valor propio $\lambda = 1$, por lo que se puede determinar que los resultados son coherentes con la teoría de las cadenas de Markov.

3.3.3.3. Tiempo de recurrencia del estado E_1 . Telefónica

En este apartado se va a calcular el tiempo de recurrencia del estado SUBE del modelo Markoviano. Para ello se establece un sistema de ecuaciones, que se resolverá para determinar el periodo medio en días en los que la acción de Repsol aumentara su cotización. Para ello:

$$M_{TelefMarzo} = \begin{bmatrix} 0.482 & 0.435 & 0.455 \\ 0.211 & 0.152 & 0.17 \\ 0.307 & 0.413 & 0.375 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{11} = 1 + 0.435 \mu_{21} + 0.455 \mu_{31}$$

$$\mu_{21} = 1 + 0.152 \mu_{21} + 0.17 \mu_{31}$$

$$\mu_{31} = 1 + 0.413 \mu_{21} + 0.375 \mu_{31}$$

Mediante el comando Solve del Software Mathematica® tenemos que el tiempo de primera pasada del estado 1 al estado 1, es decir, el tiempo de recurrencia del estado 1 es $\mu_{11} = 2.631$, Siendo, $\mu_{21} = 1.2275$ y $\mu_{31} = 2.4111$ los otros valores. Por tanto, el tiempo medio esperado de que tras un estado de SUBE la acción de Santander vuelva a SUBE es ligeramente menor a 3 períodos o días.

4 | CONCLUSIONES

Durante la realización de este proyecto, se han podido aplicar los conocimientos adquiridos durante el Grado en Administración y Dirección de Empresas, adquiridos en diferentes campos, como son los Modelos Matemáticos, la Macroeconomía, y los conocimientos de Finanzas. Más concretamente, se ha centrado la aplicación de conocimientos matemáticos, en concreto los relativos a las Cadenas de Markov, para determinar un modelo de predicción para activos subyacentes cotizados .

Debido al estudio de este proyecto, se han mejorado los conocimientos relativos a las Cadenas de Markov estudiados durante el Grado. Esto ha sido gracias a la información ampliada acerca de este tema consultada durante la realización del proyecto y a la aplicación de estos conocimientos, que ha permitido afianzarlos y tratarlos con cierta profundidad.

Con la aplicación del modelo a elementos reales, como son las cotizaciones de un año de tres empresas diferentes de gran peso dentro de la economía española, se pretendía conseguir un modelo estable, que reflejará las probabilidades del horizonte de sucesos respecto de la clasificación del comportamiento cualitativo en tres estados (subida, estabilidad y bajada del activo subyacente). Se puede afirmar que se ha conseguido dicha estabilidad, tanto en el modelo inicial como en el modelo ajustado, permitiendo así determinar, con cierta seguridad, el comportamiento cualitativo futuro de los títulos objeto de estudio. Así, se han conseguido determinar las tendencias probabilísticas de cada una de las diferentes entidades en un período futuro de 5 meses.

A continuación, se ha establecido una comparación entre el modelo inicial, y un modelo ajustado para determinar si este último estaba dotado de mejores características, y por tanto clasificaba mejor los posibles estados de los activos analizados para tener una mejor comprensión y mayor utilidad en el momento de usar el modelo para la inversión bursátil. Los resultados demuestran que una variación poco significativa del valor de la acción, al tratarla como un estado de invariabilidad del activo, mejora la comprensión del modelo, ya que permite determinar las probabilidades de una crecida, estabilidad o disminución significativa del título en cuestión. Esto es beneficioso a la hora de la toma de decisiones y por tanto, le da mayor utilidad al modelo planteado inicialmente, el cual, en la práctica debe complementarse con modelo de corte cuantitativo.

Por último, se han calculado los tiempos de recurrencia asociados al Estado 1 (Sube), para dotar al modelo de mayor utilidad, y que este dato pueda ser relevante para la toma de decisiones en caso de utilizarse el modelo.

Al finalizar este proyecto se ha comprobado si los objetivos planteados al principio de este se han cumplido, y si los resultados son satisfactorios. Se puede afirmar que ambos se han conseguido. Si es cierto que este modelo puede mejorarse y seguir investigando en esta dirección puede arrojar resultados positivos, pero se ha considerado suficiente el alcance de este proyecto con los conocimientos disponibles.

BIBLIOGRAFÍA

Libros:

TERESA, G. M. M., & MONTEIGA, G. (2003). Modelos matemáticos discretos en las ciencias. de la naturaleza. Teoría y problemas Ediciones Diaz de Santos SA Madrid.

STEELE, J. M. (2001). Random Walk and First Step Analysis. In Stochastic Calculus and Financial Applications (pp. 1-10). Springer New York.

NORRIS, J. R. (1998). Markov chains (No. 2). Cambridge University press.

CABALLERO, M. E., RIVERO, V. M., URIBE, G., & VELARDE, C. (2004). Cadenas de Markov. Un enfoque elemental. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 29.

Páginas web:

Bolsa de Madrid www.bolsademadrid.es (fecha del último de acceso: 23/06/2017).

Telefónica: www.telefonica.es/ (fecha del último de acceso: 23/06/2017).

Memoria Anual Telefónica 2017: [www.telefonica.com/es/web/shareholders-investors/informacion financiera y registros oficiales/informe-anual](http://www.telefonica.com/es/web/shareholders-investors/informacion_financiera_y_registros_oficiales/informe-anual) (fecha del último de acceso: 23/06/2017).

Banco Santander: www.bancosantander.com (fecha del último de acceso: 23/06/2017).

Memoria Anual Banco Santander 2017: www.santander.com (fecha del último de acceso: 23/06/2017).

Repsol : www.repsol.es (fecha del último de acceso: 23/06/2017).

Memoria Anual Repsol 2017: www.repsol.energy/es/accionistas-inversores/gobierno-corporativo/junta-general-de-accionistas/index.cshtml (fecha del último de acceso: 23/06/2017).

Página web de Yahoo Finanzas: <https://es.finance.yahoo.com/> (fecha del último de acceso: 23/06/2017).



ANEXOS

A continuación se exponen los documentos utilizados para el cálculo del modelo y sus distintas soluciones. Como la cantidad de documentos es muy elevada, de los documentos correspondientes a la aplicación del modelo para las tres empresas, solo se mostrará en los anexos el de una de las tres entidades, ya que se aplica la misma plantilla para todas.

PLANTILLA MODELO MARKOVIANO REPSOL

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

TOTALES	
SUBE	12
IGUAL	1
BAJA	6

N=20

P11	0,75
P12	0
P13	0,5
P21	0
P22	0
P23	0,1666667
P31	0,25
P32	1
P33	0,3333333

	0,75	0	0,5
MATRIZ P	0	0	0,1666667
	0,25	1	0,3333333
	1	1	1

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

TOTALES		COTIZACION PREVIA	9,6
SUBE	22	N=20	
IGUAL	2		
BAJA	15		

P11	0,5909091
P12	0,5
P13	0,5333333
P21	0,0454545
P22	0
P23	0,0666667
P31	0,3636364
P32	0,5
P33	0,4

	0,5909091	0,5	0,5333333
MATRIZ P	0,0454545	0	0,0666667
	0,3636364	0,5	0,4
	1	1	1

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

N=20

P11	0,6363636
P12	0,5
P13	0,5
P21	0,030303
P22	0
P23	0,0416667
P31	0,3333333
P32	0,5
P33	0,4583333

	0,6363636	0,5	0,5
MATRIZ P	0,030303	0	0,0416667
	0,3333333	0,5	0,4583333
	1	1	1

TOTALES	
SUBE	33
IGUAL	2
BAJA	24
SUBE	33
IGUAL	2
BAJA	24
SUBE	33
IGUAL	2
BAJA	24

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31
01/06/2016	11,425	BAJA	P33
02/06/2016	11,435	SUBE	P13
03/06/2016	11,29	BAJA	P31
06/06/2016	11,65	SUBE	P13
07/06/2016	11,885	SUBE	P11
08/06/2016	11,915	SUBE	P11
09/06/2016	11,655	BAJA	P31
10/06/2016	11,35	BAJA	P33
15/06/2016	10,975	BAJA	P33
16/06/2016	10,71	BAJA	P33
17/06/2016	10,995	SUBE	P13
20/06/2016	11,29	SUBE	P11
21/06/2016	11,38	SUBE	P11
22/06/2016	11,39	SUBE	P11
23/06/2016	11,7	SUBE	P11
24/06/2016	10,42	BAJA	P31
27/06/2016	10,205	BAJA	P33
28/06/2016	10,505	SUBE	P13
29/06/2016	11,28	SUBE	P11
30/06/2016	11,41	SUBE	P11

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

N=20

P11	0,5952381
P12	0,5
P13	0,4722222
P21	0,0238095
P22	0
P23	0,0277778
P31	0,3809524
P32	0,5
P33	0,5

	0,5952381	0,5	0,4722222
MATRIZ P	0,0238095	0	0,0277778
	0,3809524	0,5	0,5
	1	1	1

TOTALES	
SUBE	42
IGUAL	2
BAJA	36
SUBE	42
IGUAL	2
BAJA	36
SUBE	42
IGUAL	2
BAJA	36

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31
01/06/2016	11,425	BAJA	P33
02/06/2016	11,435	SUBE	P13
03/06/2016	11,29	BAJA	P31
06/06/2016	11,65	SUBE	P13
07/06/2016	11,885	SUBE	P11
08/06/2016	11,915	SUBE	P11
09/06/2016	11,655	BAJA	P31
10/06/2016	11,35	BAJA	P33
15/06/2016	10,975	BAJA	P33
16/06/2016	10,71	BAJA	P33
17/06/2016	10,995	SUBE	P13
20/06/2016	11,29	SUBE	P11
21/06/2016	11,38	SUBE	P11
22/06/2016	11,39	SUBE	P11
23/06/2016	11,7	SUBE	P11
24/06/2016	10,42	BAJA	P31
27/06/2016	10,205	BAJA	P33
28/06/2016	10,505	SUBE	P13
29/06/2016	11,28	SUBE	P11
30/06/2016	11,41	SUBE	P11
01/07/2016	11,675	SUBE	P11
04/07/2016	11,575	BAJA	P31
05/07/2016	11,385	BAJA	P33
06/07/2016	11,18	BAJA	P33
07/07/2016	11,39	SUBE	P13

08/07/2016	11,65	SUBE	P11
11/07/2016	11,73	SUBE	P11
12/07/2016	12,145	SUBE	P11
13/07/2016	12	BAJA	P31
14/07/2016	12,185	SUBE	P13
15/07/2016	12,145	BAJA	P31
18/07/2016	12,04	BAJA	P33
19/07/2016	11,825	BAJA	P33
20/07/2016	11,805	BAJA	P33
21/07/2016	12,075	SUBE	P13
22/07/2016	11,98	BAJA	P31
25/07/2016	11,765	BAJA	P33
26/07/2016	11,545	BAJA	P33
27/07/2016	11,65	SUBE	P13
28/07/2016	11,24	BAJA	P31
29/07/2016	11,275	SUBE	P13

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

N=20

P11	0,5818182
P12	0,3333333
P13	0,5116279
P21	0,0363636
P22	0
P23	0,0232558
P31	0,3818182
P32	0,6666667
P33	0,4651163

	0,5818182	0,3333333	0,5116279
MATRIZ P	0,0363636	0	0,0232558
	0,3818182	0,6666667	0,4651163
	1	1	1

TOTALES	
SUBE	55
IGUAL	3
BAJA	43
SUBE	55
IGUAL	3
BAJA	43
SUBE	55
IGUAL	3
BAJA	43

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31
01/06/2016	11,425	BAJA	P33
02/06/2016	11,435	SUBE	P13
03/06/2016	11,29	BAJA	P31
06/06/2016	11,65	SUBE	P13
07/06/2016	11,885	SUBE	P11
08/06/2016	11,915	SUBE	P11
09/06/2016	11,655	BAJA	P31
10/06/2016	11,35	BAJA	P33
15/06/2016	10,975	BAJA	P33
16/06/2016	10,71	BAJA	P33
17/06/2016	10,995	SUBE	P13
20/06/2016	11,29	SUBE	P11
21/06/2016	11,38	SUBE	P11
22/06/2016	11,39	SUBE	P11
23/06/2016	11,7	SUBE	P11
24/06/2016	10,42	BAJA	P31
27/06/2016	10,205	BAJA	P33
28/06/2016	10,505	SUBE	P13
29/06/2016	11,28	SUBE	P11
30/06/2016	11,41	SUBE	P11
01/07/2016	11,675	SUBE	P11
04/07/2016	11,575	BAJA	P31
05/07/2016	11,385	BAJA	P33
06/07/2016	11,18	BAJA	P33
07/07/2016	11,39	SUBE	P13

08/07/2016	11,65	SUBE	P11
11/07/2016	11,73	SUBE	P11
12/07/2016	12,145	SUBE	P11
13/07/2016	12	BAJA	P31
14/07/2016	12,185	SUBE	P13
15/07/2016	12,145	BAJA	P31
18/07/2016	12,04	BAJA	P33
19/07/2016	11,825	BAJA	P33
20/07/2016	11,805	BAJA	P33
21/07/2016	12,075	SUBE	P13
22/07/2016	11,98	BAJA	P31
25/07/2016	11,765	BAJA	P33
26/07/2016	11,545	BAJA	P33
27/07/2016	11,65	SUBE	P13
28/07/2016	11,24	BAJA	P31
29/07/2016	11,275	SUBE	P13
01/08/2016	11,11	BAJA	P31
02/08/2016	10,89	BAJA	P33
03/08/2016	10,97	SUBE	P13
04/08/2016	11,345	SUBE	P11
05/08/2016	11,5	SUBE	P11
08/08/2016	11,63	SUBE	P11
09/08/2016	11,735	SUBE	P11
10/08/2016	11,715	BAJA	P31
11/08/2016	11,89	SUBE	P13
12/08/2016	11,92	SUBE	P11
15/08/2016	12,09	SUBE	P11
16/08/2016	12,215	SUBE	P11
17/08/2016	12,03	BAJA	P31
18/08/2016	12,165	SUBE	P13
19/08/2016	12,005	BAJA	P31
22/08/2016	11,92	BAJA	P33
23/08/2016	12	SUBE	P13

24/08/2016	12	IGUAL	P21
25/08/2016	11,975	BAJA	P32
26/08/2016	12,085	SUBE	P13
29/08/2016	11,925	BAJA	P31

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

N=20

P11	0,5692308
P12	0,3333333
P13	0,5185185
P21	0,0307692
P22	0
P23	0,0185185
P31	0,4
P32	0,6666667
P33	0,462963

	0,5692308	0,3333333	0,5185185
MATRIZ P	0,0307692	0	0,0185185
	0,4	0,6666667	0,462963
	1	1	1

TOTALES	
SUBE	65
IGUAL	3
BAJA	54
SUBE	65
IGUAL	3
BAJA	54
SUBE	65
IGUAL	3
BAJA	54

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31
01/06/2016	11,425	BAJA	P33
02/06/2016	11,435	SUBE	P13
03/06/2016	11,29	BAJA	P31
06/06/2016	11,65	SUBE	P13
07/06/2016	11,885	SUBE	P11
08/06/2016	11,915	SUBE	P11
09/06/2016	11,655	BAJA	P31
10/06/2016	11,35	BAJA	P33
15/06/2016	10,975	BAJA	P33
16/06/2016	10,71	BAJA	P33
17/06/2016	10,995	SUBE	P13
20/06/2016	11,29	SUBE	P11
21/06/2016	11,38	SUBE	P11
22/06/2016	11,39	SUBE	P11
23/06/2016	11,7	SUBE	P11
24/06/2016	10,42	BAJA	P31
27/06/2016	10,205	BAJA	P33
28/06/2016	10,505	SUBE	P13
29/06/2016	11,28	SUBE	P11
30/06/2016	11,41	SUBE	P11
01/07/2016	11,675	SUBE	P11
04/07/2016	11,575	BAJA	P31
05/07/2016	11,385	BAJA	P33
06/07/2016	11,18	BAJA	P33
07/07/2016	11,39	SUBE	P13

08/07/2016	11,65	SUBE	P11
11/07/2016	11,73	SUBE	P11
12/07/2016	12,145	SUBE	P11
13/07/2016	12	BAJA	P31
14/07/2016	12,185	SUBE	P13
15/07/2016	12,145	BAJA	P31
18/07/2016	12,04	BAJA	P33
19/07/2016	11,825	BAJA	P33
20/07/2016	11,805	BAJA	P33
21/07/2016	12,075	SUBE	P13
22/07/2016	11,98	BAJA	P31
25/07/2016	11,765	BAJA	P33
26/07/2016	11,545	BAJA	P33
27/07/2016	11,65	SUBE	P13
28/07/2016	11,24	BAJA	P31
29/07/2016	11,275	SUBE	P13
01/08/2016	11,11	BAJA	P31
02/08/2016	10,89	BAJA	P33
03/08/2016	10,97	SUBE	P13
04/08/2016	11,345	SUBE	P11
05/08/2016	11,5	SUBE	P11
08/08/2016	11,63	SUBE	P11
09/08/2016	11,735	SUBE	P11
10/08/2016	11,715	BAJA	P31
11/08/2016	11,89	SUBE	P13
12/08/2016	11,92	SUBE	P11
15/08/2016	12,09	SUBE	P11
16/08/2016	12,215	SUBE	P11
17/08/2016	12,03	BAJA	P31
18/08/2016	12,165	SUBE	P13
19/08/2016	12,005	BAJA	P31
22/08/2016	11,92	BAJA	P33
23/08/2016	12	SUBE	P13

24/08/2016	12	IGUAL	P21
25/08/2016	11,975	BAJA	P32
26/08/2016	12,085	SUBE	P13
29/08/2016	11,925	BAJA	P31
01/09/2016	12,18	SUBE	P13
02/09/2016	12,525	SUBE	P11
05/09/2016	12,52	BAJA	P31
06/09/2016	12,36	BAJA	P33
07/09/2016	12,615	SUBE	P13
08/09/2016	12,785	SUBE	P11
09/09/2016	12,595	BAJA	P31
12/09/2016	12,41	BAJA	P33
13/09/2016	12,105	BAJA	P33
14/09/2016	11,965	BAJA	P33
15/09/2016	12,03	SUBE	P13
16/09/2016	11,77	BAJA	P31
19/09/2016	11,935	SUBE	P13
20/09/2016	11,78	BAJA	P31
21/09/2016	11,865	SUBE	P13
22/09/2016	11,98	SUBE	P11
23/09/2016	11,985	SUBE	P11
26/09/2016	11,84	BAJA	P31
27/09/2016	11,555	BAJA	P33
28/09/2016	11,67	SUBE	P13
29/09/2016	12,105	SUBE	P11

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

N=20

P11	0,556962
P12	0,3333333
P13	0,557377
P21	0,0253165
P22	0
P23	0,0163934
P31	0,4177215
P32	0,6666667
P33	0,4262295

	0,556962	0,3333333	0,557377
MATRIZ P	0,0253165	0	0,0163934
	0,4177215	0,6666667	0,4262295
	1	1	1

TOTALES	
SUBE	79
IGUAL	3
BAJA	61
SUBE	79
IGUAL	3
BAJA	61
SUBE	79
IGUAL	3
BAJA	61

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31
01/06/2016	11,425	BAJA	P33
02/06/2016	11,435	SUBE	P13
03/06/2016	11,29	BAJA	P31
06/06/2016	11,65	SUBE	P13
07/06/2016	11,885	SUBE	P11
08/06/2016	11,915	SUBE	P11
09/06/2016	11,655	BAJA	P31
10/06/2016	11,35	BAJA	P33
15/06/2016	10,975	BAJA	P33
16/06/2016	10,71	BAJA	P33
17/06/2016	10,995	SUBE	P13
20/06/2016	11,29	SUBE	P11
21/06/2016	11,38	SUBE	P11
22/06/2016	11,39	SUBE	P11
23/06/2016	11,7	SUBE	P11
24/06/2016	10,42	BAJA	P31
27/06/2016	10,205	BAJA	P33
28/06/2016	10,505	SUBE	P13
29/06/2016	11,28	SUBE	P11
30/06/2016	11,41	SUBE	P11
01/07/2016	11,675	SUBE	P11
04/07/2016	11,575	BAJA	P31
05/07/2016	11,385	BAJA	P33
06/07/2016	11,18	BAJA	P33
07/07/2016	11,39	SUBE	P13

08/07/2016	11,65	SUBE	P11
11/07/2016	11,73	SUBE	P11
12/07/2016	12,145	SUBE	P11
13/07/2016	12	BAJA	P31
14/07/2016	12,185	SUBE	P13
15/07/2016	12,145	BAJA	P31
18/07/2016	12,04	BAJA	P33
19/07/2016	11,825	BAJA	P33
20/07/2016	11,805	BAJA	P33
21/07/2016	12,075	SUBE	P13
22/07/2016	11,98	BAJA	P31
25/07/2016	11,765	BAJA	P33
26/07/2016	11,545	BAJA	P33
27/07/2016	11,65	SUBE	P13
28/07/2016	11,24	BAJA	P31
29/07/2016	11,275	SUBE	P13
01/08/2016	11,11	BAJA	P31
02/08/2016	10,89	BAJA	P33
03/08/2016	10,97	SUBE	P13
04/08/2016	11,345	SUBE	P11
05/08/2016	11,5	SUBE	P11
08/08/2016	11,63	SUBE	P11
09/08/2016	11,735	SUBE	P11
10/08/2016	11,715	BAJA	P31
11/08/2016	11,89	SUBE	P13
12/08/2016	11,92	SUBE	P11
15/08/2016	12,09	SUBE	P11
16/08/2016	12,215	SUBE	P11
17/08/2016	12,03	BAJA	P31
18/08/2016	12,165	SUBE	P13
19/08/2016	12,005	BAJA	P31
22/08/2016	11,92	BAJA	P33
23/08/2016	12	SUBE	P13

24/08/2016	12	IGUAL	P21
25/08/2016	11,975	BAJA	P32
26/08/2016	12,085	SUBE	P13
29/08/2016	11,925	BAJA	P31
01/09/2016	12,18	SUBE	P13
02/09/2016	12,525	SUBE	P11
05/09/2016	12,52	BAJA	P31
06/09/2016	12,36	BAJA	P33
07/09/2016	12,615	SUBE	P13
08/09/2016	12,785	SUBE	P11
09/09/2016	12,595	BAJA	P31
12/09/2016	12,41	BAJA	P33
13/09/2016	12,105	BAJA	P33
14/09/2016	11,965	BAJA	P33
15/09/2016	12,03	SUBE	P13
16/09/2016	11,77	BAJA	P31
19/09/2016	11,935	SUBE	P13
20/09/2016	11,78	BAJA	P31
21/09/2016	11,865	SUBE	P13
22/09/2016	11,98	SUBE	P11
23/09/2016	11,985	SUBE	P11
26/09/2016	11,84	BAJA	P31
27/09/2016	11,555	BAJA	P33
28/09/2016	11,67	SUBE	P13
29/09/2016	12,105	SUBE	P11
03/10/2016	12,045	BAJA	P31
04/10/2016	12,2	SUBE	P13
05/10/2016	12,3	SUBE	P11
06/10/2016	12,285	BAJA	P31
07/10/2016	12,315	SUBE	P13
10/10/2016	12,685	SUBE	P11
11/10/2016	12,59	BAJA	P31
12/10/2016	12,66	SUBE	P13

13/10/2016	12,67	SUBE	P11
14/10/2016	12,69	SUBE	P11
17/10/2016	12,475	BAJA	P31
18/10/2016	12,665	SUBE	P13
19/10/2016	12,85	SUBE	P11
20/10/2016	13	SUBE	P11
21/10/2016	12,975	BAJA	P31
24/10/2016	13,065	SUBE	P13
25/10/2016	12,95	BAJA	P31
26/10/2016	12,91	BAJA	P33
27/10/2016	12,94	SUBE	P13
28/10/2016	12,97	SUBE	P11
31/10/2016	12,765	BAJA	P31

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

N=20

P11	0,5340909
P12	0,3333333
P13	0,5479452
P21	0,0227273
P22	0
P23	0,0136986
P31	0,4431818
P32	0,6666667
P33	0,4383562

	0,5340909	0,3333333	0,5479452
MATRIZ P	0,0227273	0	0,0136986
	0,4431818	0,6666667	0,4383562
	1	1	1

TOTALES	
SUBE	88
IGUAL	3
BAJA	73
SUBE	88
IGUAL	3
BAJA	73
SUBE	88
IGUAL	3
BAJA	73

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31
01/06/2016	11,425	BAJA	P33
02/06/2016	11,435	SUBE	P13
03/06/2016	11,29	BAJA	P31
06/06/2016	11,65	SUBE	P13
07/06/2016	11,885	SUBE	P11
08/06/2016	11,915	SUBE	P11
09/06/2016	11,655	BAJA	P31
10/06/2016	11,35	BAJA	P33
15/06/2016	10,975	BAJA	P33
16/06/2016	10,71	BAJA	P33
17/06/2016	10,995	SUBE	P13
20/06/2016	11,29	SUBE	P11
21/06/2016	11,38	SUBE	P11
22/06/2016	11,39	SUBE	P11
23/06/2016	11,7	SUBE	P11
24/06/2016	10,42	BAJA	P31
27/06/2016	10,205	BAJA	P33
28/06/2016	10,505	SUBE	P13
29/06/2016	11,28	SUBE	P11
30/06/2016	11,41	SUBE	P11
01/07/2016	11,675	SUBE	P11
04/07/2016	11,575	BAJA	P31
05/07/2016	11,385	BAJA	P33
06/07/2016	11,18	BAJA	P33
07/07/2016	11,39	SUBE	P13

08/07/2016	11,65	SUBE	P11
11/07/2016	11,73	SUBE	P11
12/07/2016	12,145	SUBE	P11
13/07/2016	12	BAJA	P31
14/07/2016	12,185	SUBE	P13
15/07/2016	12,145	BAJA	P31
18/07/2016	12,04	BAJA	P33
19/07/2016	11,825	BAJA	P33
20/07/2016	11,805	BAJA	P33
21/07/2016	12,075	SUBE	P13
22/07/2016	11,98	BAJA	P31
25/07/2016	11,765	BAJA	P33
26/07/2016	11,545	BAJA	P33
27/07/2016	11,65	SUBE	P13
28/07/2016	11,24	BAJA	P31
29/07/2016	11,275	SUBE	P13
01/08/2016	11,11	BAJA	P31
02/08/2016	10,89	BAJA	P33
03/08/2016	10,97	SUBE	P13
04/08/2016	11,345	SUBE	P11
05/08/2016	11,5	SUBE	P11
08/08/2016	11,63	SUBE	P11
09/08/2016	11,735	SUBE	P11
10/08/2016	11,715	BAJA	P31
11/08/2016	11,89	SUBE	P13
12/08/2016	11,92	SUBE	P11
15/08/2016	12,09	SUBE	P11
16/08/2016	12,215	SUBE	P11
17/08/2016	12,03	BAJA	P31
18/08/2016	12,165	SUBE	P13
19/08/2016	12,005	BAJA	P31
22/08/2016	11,92	BAJA	P33
23/08/2016	12	SUBE	P13

24/08/2016	12	IGUAL	P21
25/08/2016	11,975	BAJA	P32
26/08/2016	12,085	SUBE	P13
29/08/2016	11,925	BAJA	P31
01/09/2016	12,18	SUBE	P13
02/09/2016	12,525	SUBE	P11
05/09/2016	12,52	BAJA	P31
06/09/2016	12,36	BAJA	P33
07/09/2016	12,615	SUBE	P13
08/09/2016	12,785	SUBE	P11
09/09/2016	12,595	BAJA	P31
12/09/2016	12,41	BAJA	P33
13/09/2016	12,105	BAJA	P33
14/09/2016	11,965	BAJA	P33
15/09/2016	12,03	SUBE	P13
16/09/2016	11,77	BAJA	P31
19/09/2016	11,935	SUBE	P13
20/09/2016	11,78	BAJA	P31
21/09/2016	11,865	SUBE	P13
22/09/2016	11,98	SUBE	P11
23/09/2016	11,985	SUBE	P11
26/09/2016	11,84	BAJA	P31
27/09/2016	11,555	BAJA	P33
28/09/2016	11,67	SUBE	P13
29/09/2016	12,105	SUBE	P11
03/10/2016	12,045	BAJA	P31
04/10/2016	12,2	SUBE	P13
05/10/2016	12,3	SUBE	P11
06/10/2016	12,285	BAJA	P31
07/10/2016	12,315	SUBE	P13
10/10/2016	12,685	SUBE	P11
11/10/2016	12,59	BAJA	P31
12/10/2016	12,66	SUBE	P13

13/10/2016	12,67	SUBE	P11
14/10/2016	12,69	SUBE	P11
17/10/2016	12,475	BAJA	P31
18/10/2016	12,665	SUBE	P13
19/10/2016	12,85	SUBE	P11
20/10/2016	13	SUBE	P11
21/10/2016	12,975	BAJA	P31
24/10/2016	13,065	SUBE	P13
25/10/2016	12,95	BAJA	P31
26/10/2016	12,91	BAJA	P33
27/10/2016	12,94	SUBE	P13
28/10/2016	12,97	SUBE	P11
31/10/2016	12,765	BAJA	P31
01/11/2016	12,655	BAJA	P33
02/11/2016	12,355	BAJA	P33
03/11/2016	12,5	SUBE	P13
04/11/2016	12,405	BAJA	P31
07/11/2016	12,48	SUBE	P13
08/11/2016	12,52	SUBE	P11
09/11/2016	12,635	SUBE	P11
10/11/2016	12,49	BAJA	P31
11/11/2016	12,155	BAJA	P33
14/11/2016	12,12	BAJA	P33
15/11/2016	12,36	SUBE	P13
16/11/2016	12,335	BAJA	P31
17/11/2016	12,4	SUBE	P13
18/11/2016	12,165	BAJA	P31
21/11/2016	12,29	SUBE	P13
22/11/2016	12,31	SUBE	P11
23/11/2016	12,28	BAJA	P31
24/11/2016	12,3	SUBE	P13
25/11/2016	12,185	BAJA	P31
28/11/2016	12,115	BAJA	P33

29/11/2016	12,08	BAJA	P33
------------	-------	------	-----

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

N=20

P11	0,5247525
P12	0,3333333
P13	0,5802469
P21	0,019802
P22	0
P23	0,0123457
P31	0,4554455
P32	0,6666667
P33	0,4074074

	0,5247525	0,3333333	0,5802469
MATRIZ P	0,019802	0	0,0123457
	0,4554455	0,6666667	0,4074074
	1	1	1

TOTALES	
SUBE	101
IGUAL	3
BAJA	81
SUBE	101
IGUAL	3
BAJA	81
SUBE	101
IGUAL	3
BAJA	81

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31
01/06/2016	11,425	BAJA	P33
02/06/2016	11,435	SUBE	P13
03/06/2016	11,29	BAJA	P31
06/06/2016	11,65	SUBE	P13
07/06/2016	11,885	SUBE	P11
08/06/2016	11,915	SUBE	P11
09/06/2016	11,655	BAJA	P31
10/06/2016	11,35	BAJA	P33
15/06/2016	10,975	BAJA	P33
16/06/2016	10,71	BAJA	P33
17/06/2016	10,995	SUBE	P13
20/06/2016	11,29	SUBE	P11
21/06/2016	11,38	SUBE	P11
22/06/2016	11,39	SUBE	P11
23/06/2016	11,7	SUBE	P11
24/06/2016	10,42	BAJA	P31
27/06/2016	10,205	BAJA	P33
28/06/2016	10,505	SUBE	P13
29/06/2016	11,28	SUBE	P11
30/06/2016	11,41	SUBE	P11
01/07/2016	11,675	SUBE	P11
04/07/2016	11,575	BAJA	P31
05/07/2016	11,385	BAJA	P33
06/07/2016	11,18	BAJA	P33
07/07/2016	11,39	SUBE	P13

08/07/2016	11,65	SUBE	P11
11/07/2016	11,73	SUBE	P11
12/07/2016	12,145	SUBE	P11
13/07/2016	12	BAJA	P31
14/07/2016	12,185	SUBE	P13
15/07/2016	12,145	BAJA	P31
18/07/2016	12,04	BAJA	P33
19/07/2016	11,825	BAJA	P33
20/07/2016	11,805	BAJA	P33
21/07/2016	12,075	SUBE	P13
22/07/2016	11,98	BAJA	P31
25/07/2016	11,765	BAJA	P33
26/07/2016	11,545	BAJA	P33
27/07/2016	11,65	SUBE	P13
28/07/2016	11,24	BAJA	P31
29/07/2016	11,275	SUBE	P13
01/08/2016	11,11	BAJA	P31
02/08/2016	10,89	BAJA	P33
03/08/2016	10,97	SUBE	P13
04/08/2016	11,345	SUBE	P11
05/08/2016	11,5	SUBE	P11
08/08/2016	11,63	SUBE	P11
09/08/2016	11,735	SUBE	P11
10/08/2016	11,715	BAJA	P31
11/08/2016	11,89	SUBE	P13
12/08/2016	11,92	SUBE	P11
15/08/2016	12,09	SUBE	P11
16/08/2016	12,215	SUBE	P11
17/08/2016	12,03	BAJA	P31
18/08/2016	12,165	SUBE	P13
19/08/2016	12,005	BAJA	P31
22/08/2016	11,92	BAJA	P33
23/08/2016	12	SUBE	P13

24/08/2016	12	IGUAL	P21
25/08/2016	11,975	BAJA	P32
26/08/2016	12,085	SUBE	P13
29/08/2016	11,925	BAJA	P31
01/09/2016	12,18	SUBE	P13
02/09/2016	12,525	SUBE	P11
05/09/2016	12,52	BAJA	P31
06/09/2016	12,36	BAJA	P33
07/09/2016	12,615	SUBE	P13
08/09/2016	12,785	SUBE	P11
09/09/2016	12,595	BAJA	P31
12/09/2016	12,41	BAJA	P33
13/09/2016	12,105	BAJA	P33
14/09/2016	11,965	BAJA	P33
15/09/2016	12,03	SUBE	P13
16/09/2016	11,77	BAJA	P31
19/09/2016	11,935	SUBE	P13
20/09/2016	11,78	BAJA	P31
21/09/2016	11,865	SUBE	P13
22/09/2016	11,98	SUBE	P11
23/09/2016	11,985	SUBE	P11
26/09/2016	11,84	BAJA	P31
27/09/2016	11,555	BAJA	P33
28/09/2016	11,67	SUBE	P13
29/09/2016	12,105	SUBE	P11
03/10/2016	12,045	BAJA	P31
04/10/2016	12,2	SUBE	P13
05/10/2016	12,3	SUBE	P11
06/10/2016	12,285	BAJA	P31
07/10/2016	12,315	SUBE	P13
10/10/2016	12,685	SUBE	P11
11/10/2016	12,59	BAJA	P31
12/10/2016	12,66	SUBE	P13

13/10/2016	12,67	SUBE	P11
14/10/2016	12,69	SUBE	P11
17/10/2016	12,475	BAJA	P31
18/10/2016	12,665	SUBE	P13
19/10/2016	12,85	SUBE	P11
20/10/2016	13	SUBE	P11
21/10/2016	12,975	BAJA	P31
24/10/2016	13,065	SUBE	P13
25/10/2016	12,95	BAJA	P31
26/10/2016	12,91	BAJA	P33
27/10/2016	12,94	SUBE	P13
28/10/2016	12,97	SUBE	P11
31/10/2016	12,765	BAJA	P31
01/11/2016	12,655	BAJA	P33
02/11/2016	12,355	BAJA	P33
03/11/2016	12,5	SUBE	P13
04/11/2016	12,405	BAJA	P31
07/11/2016	12,48	SUBE	P13
08/11/2016	12,52	SUBE	P11
09/11/2016	12,635	SUBE	P11
10/11/2016	12,49	BAJA	P31
11/11/2016	12,155	BAJA	P33
14/11/2016	12,12	BAJA	P33
15/11/2016	12,36	SUBE	P13
16/11/2016	12,335	BAJA	P31
17/11/2016	12,4	SUBE	P13
18/11/2016	12,165	BAJA	P31
21/11/2016	12,29	SUBE	P13
22/11/2016	12,31	SUBE	P11
23/11/2016	12,28	BAJA	P31
24/11/2016	12,3	SUBE	P13
25/11/2016	12,185	BAJA	P31
28/11/2016	12,115	BAJA	P33

29/11/2016	12,08	BAJA	P33
01/12/2016	12,895	SUBE	P13
02/12/2016	12,755	BAJA	P31
05/12/2016	12,905	SUBE	P13
06/12/2016	12,9	BAJA	P31
07/12/2016	12,985	SUBE	P13
08/12/2016	13,115	SUBE	P11
09/12/2016	12,905	BAJA	P31
12/12/2016	13,115	SUBE	P13
13/12/2016	13,19	SUBE	P11
14/12/2016	13,2	SUBE	P11
15/12/2016	13,295	SUBE	P11
16/12/2016	13,825	SUBE	P11
19/12/2016	13,37	BAJA	P31
20/12/2016	13,6	SUBE	P13
21/12/2016	13,47	BAJA	P31
22/12/2016	13,42	BAJA	P33
23/12/2016	13,435	SUBE	P13
27/12/2016	13,475	SUBE	P11
28/12/2016	13,4	BAJA	P31
29/12/2016	13,48	SUBE	P13
30/12/2016	13,42	BAJA	P31

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

N=20

P11	0,5350877
P12	0,5
P13	0,5795455
P21	0,0175439
P22	0
P23	0,0227273
P31	0,4473684
P32	0,5
P33	0,3977273

	0,5350877	0,5	0,5795455
MATRIZ P	0,0175439	0	0,0227273
	0,4473684	0,5	0,3977273
	1	1	1

TOTALES	
SUBE	114
IGUAL	4
BAJA	88
SUBE	114
IGUAL	4
BAJA	88
SUBE	114
IGUAL	4
BAJA	88

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31
01/06/2016	11,425	BAJA	P33
02/06/2016	11,435	SUBE	P13
03/06/2016	11,29	BAJA	P31
06/06/2016	11,65	SUBE	P13
07/06/2016	11,885	SUBE	P11
08/06/2016	11,915	SUBE	P11
09/06/2016	11,655	BAJA	P31
10/06/2016	11,35	BAJA	P33
15/06/2016	10,975	BAJA	P33
16/06/2016	10,71	BAJA	P33
17/06/2016	10,995	SUBE	P13
20/06/2016	11,29	SUBE	P11
21/06/2016	11,38	SUBE	P11
22/06/2016	11,39	SUBE	P11
23/06/2016	11,7	SUBE	P11
24/06/2016	10,42	BAJA	P31
27/06/2016	10,205	BAJA	P33
28/06/2016	10,505	SUBE	P13
29/06/2016	11,28	SUBE	P11
30/06/2016	11,41	SUBE	P11
01/07/2016	11,675	SUBE	P11
04/07/2016	11,575	BAJA	P31
05/07/2016	11,385	BAJA	P33
06/07/2016	11,18	BAJA	P33
07/07/2016	11,39	SUBE	P13

08/07/2016	11,65	SUBE	P11
11/07/2016	11,73	SUBE	P11
12/07/2016	12,145	SUBE	P11
13/07/2016	12	BAJA	P31
14/07/2016	12,185	SUBE	P13
15/07/2016	12,145	BAJA	P31
18/07/2016	12,04	BAJA	P33
19/07/2016	11,825	BAJA	P33
20/07/2016	11,805	BAJA	P33
21/07/2016	12,075	SUBE	P13
22/07/2016	11,98	BAJA	P31
25/07/2016	11,765	BAJA	P33
26/07/2016	11,545	BAJA	P33
27/07/2016	11,65	SUBE	P13
28/07/2016	11,24	BAJA	P31
29/07/2016	11,275	SUBE	P13
01/08/2016	11,11	BAJA	P31
02/08/2016	10,89	BAJA	P33
03/08/2016	10,97	SUBE	P13
04/08/2016	11,345	SUBE	P11
05/08/2016	11,5	SUBE	P11
08/08/2016	11,63	SUBE	P11
09/08/2016	11,735	SUBE	P11
10/08/2016	11,715	BAJA	P31
11/08/2016	11,89	SUBE	P13
12/08/2016	11,92	SUBE	P11
15/08/2016	12,09	SUBE	P11
16/08/2016	12,215	SUBE	P11
17/08/2016	12,03	BAJA	P31
18/08/2016	12,165	SUBE	P13
19/08/2016	12,005	BAJA	P31
22/08/2016	11,92	BAJA	P33
23/08/2016	12	SUBE	P13

24/08/2016	12	IGUAL	P21
25/08/2016	11,975	BAJA	P32
26/08/2016	12,085	SUBE	P13
29/08/2016	11,925	BAJA	P31
01/09/2016	12,18	SUBE	P13
02/09/2016	12,525	SUBE	P11
05/09/2016	12,52	BAJA	P31
06/09/2016	12,36	BAJA	P33
07/09/2016	12,615	SUBE	P13
08/09/2016	12,785	SUBE	P11
09/09/2016	12,595	BAJA	P31
12/09/2016	12,41	BAJA	P33
13/09/2016	12,105	BAJA	P33
14/09/2016	11,965	BAJA	P33
15/09/2016	12,03	SUBE	P13
16/09/2016	11,77	BAJA	P31
19/09/2016	11,935	SUBE	P13
20/09/2016	11,78	BAJA	P31
21/09/2016	11,865	SUBE	P13
22/09/2016	11,98	SUBE	P11
23/09/2016	11,985	SUBE	P11
26/09/2016	11,84	BAJA	P31
27/09/2016	11,555	BAJA	P33
28/09/2016	11,67	SUBE	P13
29/09/2016	12,105	SUBE	P11
03/10/2016	12,045	BAJA	P31
04/10/2016	12,2	SUBE	P13
05/10/2016	12,3	SUBE	P11
06/10/2016	12,285	BAJA	P31
07/10/2016	12,315	SUBE	P13
10/10/2016	12,685	SUBE	P11
11/10/2016	12,59	BAJA	P31
12/10/2016	12,66	SUBE	P13

13/10/2016	12,67	SUBE	P11
14/10/2016	12,69	SUBE	P11
17/10/2016	12,475	BAJA	P31
18/10/2016	12,665	SUBE	P13
19/10/2016	12,85	SUBE	P11
20/10/2016	13	SUBE	P11
21/10/2016	12,975	BAJA	P31
24/10/2016	13,065	SUBE	P13
25/10/2016	12,95	BAJA	P31
26/10/2016	12,91	BAJA	P33
27/10/2016	12,94	SUBE	P13
28/10/2016	12,97	SUBE	P11
31/10/2016	12,765	BAJA	P31
01/11/2016	12,655	BAJA	P33
02/11/2016	12,355	BAJA	P33
03/11/2016	12,5	SUBE	P13
04/11/2016	12,405	BAJA	P31
07/11/2016	12,48	SUBE	P13
08/11/2016	12,52	SUBE	P11
09/11/2016	12,635	SUBE	P11
10/11/2016	12,49	BAJA	P31
11/11/2016	12,155	BAJA	P33
14/11/2016	12,12	BAJA	P33
15/11/2016	12,36	SUBE	P13
16/11/2016	12,335	BAJA	P31
17/11/2016	12,4	SUBE	P13
18/11/2016	12,165	BAJA	P31
21/11/2016	12,29	SUBE	P13
22/11/2016	12,31	SUBE	P11
23/11/2016	12,28	BAJA	P31
24/11/2016	12,3	SUBE	P13
25/11/2016	12,185	BAJA	P31
28/11/2016	12,115	BAJA	P33

29/11/2016	12,08	BAJA	P33
01/12/2016	12,895	SUBE	P13
02/12/2016	12,755	BAJA	P31
05/12/2016	12,905	SUBE	P13
06/12/2016	12,9	BAJA	P31
07/12/2016	12,985	SUBE	P13
08/12/2016	13,115	SUBE	P11
09/12/2016	12,905	BAJA	P31
12/12/2016	13,115	SUBE	P13
13/12/2016	13,19	SUBE	P11
14/12/2016	13,2	SUBE	P11
15/12/2016	13,295	SUBE	P11
16/12/2016	13,825	SUBE	P11
19/12/2016	13,37	BAJA	P31
20/12/2016	13,6	SUBE	P13
21/12/2016	13,47	BAJA	P31
22/12/2016	13,42	BAJA	P33
23/12/2016	13,435	SUBE	P13
27/12/2016	13,475	SUBE	P11
28/12/2016	13,4	BAJA	P31
29/12/2016	13,48	SUBE	P13
30/12/2016	13,42	BAJA	P31
02/01/2017	13,525	SUBE	P13
03/01/2017	13,63	SUBE	P11
04/01/2017	13,66	SUBE	P11
05/01/2017	13,68	SUBE	P11
06/01/2017	13,7	SUBE	P11
09/01/2017	13,57	BAJA	P31
10/01/2017	13,72	SUBE	P13
11/01/2017	13,9	SUBE	P11
12/01/2017	14,03	SUBE	P11
13/01/2017	14,21	SUBE	P11
16/01/2017	14,105	BAJA	P31

17/01/2017	14,105	IGUAL	P23
18/01/2017	14,13	SUBE	P12
19/01/2017	14,1	BAJA	P31
20/01/2017	14,195	SUBE	P13
23/01/2017	14	BAJA	P31
24/01/2017	14,08	SUBE	P13
25/01/2017	14,25	SUBE	P11
26/01/2017	14,2	BAJA	P31
27/01/2017	14,09	BAJA	P33
30/01/2017	13,765	BAJA	P33

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

N=20

P11	0,5245902
P12	0,5
P13	0,5643564
P21	0,0163934
P22	0
P23	0,019802
P31	0,4590164
P32	0,5
P33	0,4158416

	0,5245902	0,5	0,5643564
MATRIZ P	0,0163934	0	0,019802
	0,4590164	0,5	0,4158416
	1	1	1

TOTALES	
SUBE	122
IGUAL	4
BAJA	101
SUBE	122
IGUAL	4
BAJA	101
SUBE	122
IGUAL	4
BAJA	101

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31
01/06/2016	11,425	BAJA	P33
02/06/2016	11,435	SUBE	P13
03/06/2016	11,29	BAJA	P31
06/06/2016	11,65	SUBE	P13
07/06/2016	11,885	SUBE	P11
08/06/2016	11,915	SUBE	P11
09/06/2016	11,655	BAJA	P31
10/06/2016	11,35	BAJA	P33
15/06/2016	10,975	BAJA	P33
16/06/2016	10,71	BAJA	P33
17/06/2016	10,995	SUBE	P13
20/06/2016	11,29	SUBE	P11
21/06/2016	11,38	SUBE	P11
22/06/2016	11,39	SUBE	P11
23/06/2016	11,7	SUBE	P11
24/06/2016	10,42	BAJA	P31
27/06/2016	10,205	BAJA	P33
28/06/2016	10,505	SUBE	P13
29/06/2016	11,28	SUBE	P11
30/06/2016	11,41	SUBE	P11
01/07/2016	11,675	SUBE	P11
04/07/2016	11,575	BAJA	P31
05/07/2016	11,385	BAJA	P33
06/07/2016	11,18	BAJA	P33
07/07/2016	11,39	SUBE	P13

08/07/2016	11,65	SUBE	P11
11/07/2016	11,73	SUBE	P11
12/07/2016	12,145	SUBE	P11
13/07/2016	12	BAJA	P31
14/07/2016	12,185	SUBE	P13
15/07/2016	12,145	BAJA	P31
18/07/2016	12,04	BAJA	P33
19/07/2016	11,825	BAJA	P33
20/07/2016	11,805	BAJA	P33
21/07/2016	12,075	SUBE	P13
22/07/2016	11,98	BAJA	P31
25/07/2016	11,765	BAJA	P33
26/07/2016	11,545	BAJA	P33
27/07/2016	11,65	SUBE	P13
28/07/2016	11,24	BAJA	P31
29/07/2016	11,275	SUBE	P13
01/08/2016	11,11	BAJA	P31
02/08/2016	10,89	BAJA	P33
03/08/2016	10,97	SUBE	P13
04/08/2016	11,345	SUBE	P11
05/08/2016	11,5	SUBE	P11
08/08/2016	11,63	SUBE	P11
09/08/2016	11,735	SUBE	P11
10/08/2016	11,715	BAJA	P31
11/08/2016	11,89	SUBE	P13
12/08/2016	11,92	SUBE	P11
15/08/2016	12,09	SUBE	P11
16/08/2016	12,215	SUBE	P11
17/08/2016	12,03	BAJA	P31
18/08/2016	12,165	SUBE	P13
19/08/2016	12,005	BAJA	P31
22/08/2016	11,92	BAJA	P33
23/08/2016	12	SUBE	P13

24/08/2016	12	IGUAL	P21
25/08/2016	11,975	BAJA	P32
26/08/2016	12,085	SUBE	P13
29/08/2016	11,925	BAJA	P31
01/09/2016	12,18	SUBE	P13
02/09/2016	12,525	SUBE	P11
05/09/2016	12,52	BAJA	P31
06/09/2016	12,36	BAJA	P33
07/09/2016	12,615	SUBE	P13
08/09/2016	12,785	SUBE	P11
09/09/2016	12,595	BAJA	P31
12/09/2016	12,41	BAJA	P33
13/09/2016	12,105	BAJA	P33
14/09/2016	11,965	BAJA	P33
15/09/2016	12,03	SUBE	P13
16/09/2016	11,77	BAJA	P31
19/09/2016	11,935	SUBE	P13
20/09/2016	11,78	BAJA	P31
21/09/2016	11,865	SUBE	P13
22/09/2016	11,98	SUBE	P11
23/09/2016	11,985	SUBE	P11
26/09/2016	11,84	BAJA	P31
27/09/2016	11,555	BAJA	P33
28/09/2016	11,67	SUBE	P13
29/09/2016	12,105	SUBE	P11
03/10/2016	12,045	BAJA	P31
04/10/2016	12,2	SUBE	P13
05/10/2016	12,3	SUBE	P11
06/10/2016	12,285	BAJA	P31
07/10/2016	12,315	SUBE	P13
10/10/2016	12,685	SUBE	P11
11/10/2016	12,59	BAJA	P31
12/10/2016	12,66	SUBE	P13

13/10/2016	12,67	SUBE	P11
14/10/2016	12,69	SUBE	P11
17/10/2016	12,475	BAJA	P31
18/10/2016	12,665	SUBE	P13
19/10/2016	12,85	SUBE	P11
20/10/2016	13	SUBE	P11
21/10/2016	12,975	BAJA	P31
24/10/2016	13,065	SUBE	P13
25/10/2016	12,95	BAJA	P31
26/10/2016	12,91	BAJA	P33
27/10/2016	12,94	SUBE	P13
28/10/2016	12,97	SUBE	P11
31/10/2016	12,765	BAJA	P31
01/11/2016	12,655	BAJA	P33
02/11/2016	12,355	BAJA	P33
03/11/2016	12,5	SUBE	P13
04/11/2016	12,405	BAJA	P31
07/11/2016	12,48	SUBE	P13
08/11/2016	12,52	SUBE	P11
09/11/2016	12,635	SUBE	P11
10/11/2016	12,49	BAJA	P31
11/11/2016	12,155	BAJA	P33
14/11/2016	12,12	BAJA	P33
15/11/2016	12,36	SUBE	P13
16/11/2016	12,335	BAJA	P31
17/11/2016	12,4	SUBE	P13
18/11/2016	12,165	BAJA	P31
21/11/2016	12,29	SUBE	P13
22/11/2016	12,31	SUBE	P11
23/11/2016	12,28	BAJA	P31
24/11/2016	12,3	SUBE	P13
25/11/2016	12,185	BAJA	P31
28/11/2016	12,115	BAJA	P33

29/11/2016	12,08	BAJA	P33
01/12/2016	12,895	SUBE	P13
02/12/2016	12,755	BAJA	P31
05/12/2016	12,905	SUBE	P13
06/12/2016	12,9	BAJA	P31
07/12/2016	12,985	SUBE	P13
08/12/2016	13,115	SUBE	P11
09/12/2016	12,905	BAJA	P31
12/12/2016	13,115	SUBE	P13
13/12/2016	13,19	SUBE	P11
14/12/2016	13,2	SUBE	P11
15/12/2016	13,295	SUBE	P11
16/12/2016	13,825	SUBE	P11
19/12/2016	13,37	BAJA	P31
20/12/2016	13,6	SUBE	P13
21/12/2016	13,47	BAJA	P31
22/12/2016	13,42	BAJA	P33
23/12/2016	13,435	SUBE	P13
27/12/2016	13,475	SUBE	P11
28/12/2016	13,4	BAJA	P31
29/12/2016	13,48	SUBE	P13
30/12/2016	13,42	BAJA	P31
02/01/2017	13,525	SUBE	P13
03/01/2017	13,63	SUBE	P11
04/01/2017	13,66	SUBE	P11
05/01/2017	13,68	SUBE	P11
06/01/2017	13,7	SUBE	P11
09/01/2017	13,57	BAJA	P31
10/01/2017	13,72	SUBE	P13
11/01/2017	13,9	SUBE	P11
12/01/2017	14,03	SUBE	P11
13/01/2017	14,21	SUBE	P11
16/01/2017	14,105	BAJA	P31

17/01/2017	14,105	IGUAL	P23
18/01/2017	14,13	SUBE	P12
19/01/2017	14,1	BAJA	P31
20/01/2017	14,195	SUBE	P13
23/01/2017	14	BAJA	P31
24/01/2017	14,08	SUBE	P13
25/01/2017	14,25	SUBE	P11
26/01/2017	14,2	BAJA	P31
27/01/2017	14,09	BAJA	P33
30/01/2017	13,765	BAJA	P33
31/01/2017	13,66	BAJA	P33
01/02/2017	13,665	SUBE	P13
02/02/2017	13,75	SUBE	P11
03/02/2017	13,92	SUBE	P11
06/02/2017	13,855	BAJA	P31
07/02/2017	13,655	BAJA	P33
08/02/2017	13,54	BAJA	P33
09/02/2017	13,72	SUBE	P13
10/02/2017	13,68	BAJA	P31
13/02/2017	13,95	SUBE	P13
14/02/2017	13,93	BAJA	P31
15/02/2017	13,925	BAJA	P33
16/02/2017	13,895	BAJA	P33
17/02/2017	13,625	BAJA	P33
20/02/2017	13,72	SUBE	P13
21/02/2017	13,79	SUBE	P11
22/02/2017	13,695	BAJA	P31
23/02/2017	13,89	SUBE	P13
24/02/2017	13,82	BAJA	P31
27/02/2017	13,795	BAJA	P33
28/02/2017	14	SUBE	P13

FECHA	COTIZACION	ESTADOS E	PROBABILIDADES
04/04/2016	9,321	BAJA	
05/04/2016	9,321	IGUAL	P23
06/04/2016	9,32	BAJA	P32
07/04/2016	9,211	BAJA	P33
08/04/2016	9,472	SUBE	P13
11/04/2016	9,606	SUBE	P11
12/04/2016	9,921	SUBE	P11
13/04/2016	10,565	SUBE	P11
14/04/2016	10,58	SUBE	P11
15/04/2016	10,5	BAJA	P31
18/04/2016	10,55	SUBE	P13
19/04/2016	10,915	SUBE	P11
20/04/2016	11,22	SUBE	P11
21/04/2016	11,35	SUBE	P11
22/04/2016	11,33	BAJA	P31
25/04/2016	11,09	BAJA	P33
26/04/2016	11,395	SUBE	P13
27/04/2016	11,66	SUBE	P11
28/04/2016	11,76	SUBE	P11
29/04/2016	11,445	BAJA	P31
02/05/2016	11,35	BAJA	P33
03/05/2016	10,84	BAJA	P33
04/05/2016	10,8	BAJA	P33
05/05/2016	11,305	SUBE	P13
06/05/2016	11,415	SUBE	P11
09/05/2016	11,075	BAJA	P31
10/05/2016	11,285	SUBE	P13
11/05/2016	11,245	BAJA	P31
12/05/2016	11,41	SUBE	P13
13/05/2016	11,52	SUBE	P11
16/05/2016	11,62	SUBE	P11
17/05/2016	11,62	IGUAL	P21

COTIZACION PREVIA	9,6
-------------------	-----

N=20

P11	0,519
P12	0,500
P13	0,569
P21	0,023
P22	0,167
P23	0,018
P31	0,459
P32	0,333
P33	0,413

	0,518797	0,5	0,5688073
MATRIZ P	0,0225564	0,1666667	0,0183486
	0,4586466	0,3333333	0,412844
	1	1	1

TOTALES	
SUBE	133
IGUAL	6
BAJA	109
SUBE	133
IGUAL	6
BAJA	109
SUBE	133
IGUAL	6
BAJA	109

18/05/2016	11,7	SUBE	P12
20/05/2016	11,3	BAJA	P31
23/05/2016	11,2	BAJA	P33
24/05/2016	11,51	SUBE	P13
25/05/2016	11,935	SUBE	P11
27/05/2016	11,84	BAJA	P31
30/05/2016	11,88	SUBE	P13
31/05/2016	11,575	BAJA	P31
01/06/2016	11,425	BAJA	P33
02/06/2016	11,435	SUBE	P13
03/06/2016	11,29	BAJA	P31
06/06/2016	11,65	SUBE	P13
07/06/2016	11,885	SUBE	P11
08/06/2016	11,915	SUBE	P11
09/06/2016	11,655	BAJA	P31
10/06/2016	11,35	BAJA	P33
15/06/2016	10,975	BAJA	P33
16/06/2016	10,71	BAJA	P33
17/06/2016	10,995	SUBE	P13
20/06/2016	11,29	SUBE	P11
21/06/2016	11,38	SUBE	P11
22/06/2016	11,39	SUBE	P11
23/06/2016	11,7	SUBE	P11
24/06/2016	10,42	BAJA	P31
27/06/2016	10,205	BAJA	P33
28/06/2016	10,505	SUBE	P13
29/06/2016	11,28	SUBE	P11
30/06/2016	11,41	SUBE	P11
01/07/2016	11,675	SUBE	P11
04/07/2016	11,575	BAJA	P31
05/07/2016	11,385	BAJA	P33
06/07/2016	11,18	BAJA	P33
07/07/2016	11,39	SUBE	P13

08/07/2016	11,65	SUBE	P11
11/07/2016	11,73	SUBE	P11
12/07/2016	12,145	SUBE	P11
13/07/2016	12	BAJA	P31
14/07/2016	12,185	SUBE	P13
15/07/2016	12,145	BAJA	P31
18/07/2016	12,04	BAJA	P33
19/07/2016	11,825	BAJA	P33
20/07/2016	11,805	BAJA	P33
21/07/2016	12,075	SUBE	P13
22/07/2016	11,98	BAJA	P31
25/07/2016	11,765	BAJA	P33
26/07/2016	11,545	BAJA	P33
27/07/2016	11,65	SUBE	P13
28/07/2016	11,24	BAJA	P31
29/07/2016	11,275	SUBE	P13
01/08/2016	11,11	BAJA	P31
02/08/2016	10,89	BAJA	P33
03/08/2016	10,97	SUBE	P13
04/08/2016	11,345	SUBE	P11
05/08/2016	11,5	SUBE	P11
08/08/2016	11,63	SUBE	P11
09/08/2016	11,735	SUBE	P11
10/08/2016	11,715	BAJA	P31
11/08/2016	11,89	SUBE	P13
12/08/2016	11,92	SUBE	P11
15/08/2016	12,09	SUBE	P11
16/08/2016	12,215	SUBE	P11
17/08/2016	12,03	BAJA	P31
18/08/2016	12,165	SUBE	P13
19/08/2016	12,005	BAJA	P31
22/08/2016	11,92	BAJA	P33
23/08/2016	12	SUBE	P13

24/08/2016	12	IGUAL	P21
25/08/2016	11,975	BAJA	P32
26/08/2016	12,085	SUBE	P13
29/08/2016	11,925	BAJA	P31
01/09/2016	12,18	SUBE	P13
02/09/2016	12,525	SUBE	P11
05/09/2016	12,52	BAJA	P31
06/09/2016	12,36	BAJA	P33
07/09/2016	12,615	SUBE	P13
08/09/2016	12,785	SUBE	P11
09/09/2016	12,595	BAJA	P31
12/09/2016	12,41	BAJA	P33
13/09/2016	12,105	BAJA	P33
14/09/2016	11,965	BAJA	P33
15/09/2016	12,03	SUBE	P13
16/09/2016	11,77	BAJA	P31
19/09/2016	11,935	SUBE	P13
20/09/2016	11,78	BAJA	P31
21/09/2016	11,865	SUBE	P13
22/09/2016	11,98	SUBE	P11
23/09/2016	11,985	SUBE	P11
26/09/2016	11,84	BAJA	P31
27/09/2016	11,555	BAJA	P33
28/09/2016	11,67	SUBE	P13
29/09/2016	12,105	SUBE	P11
03/10/2016	12,045	BAJA	P31
04/10/2016	12,2	SUBE	P13
05/10/2016	12,3	SUBE	P11
06/10/2016	12,285	BAJA	P31
07/10/2016	12,315	SUBE	P13
10/10/2016	12,685	SUBE	P11
11/10/2016	12,59	BAJA	P31
12/10/2016	12,66	SUBE	P13

13/10/2016	12,67	SUBE	P11
14/10/2016	12,69	SUBE	P11
17/10/2016	12,475	BAJA	P31
18/10/2016	12,665	SUBE	P13
19/10/2016	12,85	SUBE	P11
20/10/2016	13	SUBE	P11
21/10/2016	12,975	BAJA	P31
24/10/2016	13,065	SUBE	P13
25/10/2016	12,95	BAJA	P31
26/10/2016	12,91	BAJA	P33
27/10/2016	12,94	SUBE	P13
28/10/2016	12,97	SUBE	P11
31/10/2016	12,765	BAJA	P31
01/11/2016	12,655	BAJA	P33
02/11/2016	12,355	BAJA	P33
03/11/2016	12,5	SUBE	P13
04/11/2016	12,405	BAJA	P31
07/11/2016	12,48	SUBE	P13
08/11/2016	12,52	SUBE	P11
09/11/2016	12,635	SUBE	P11
10/11/2016	12,49	BAJA	P31
11/11/2016	12,155	BAJA	P33
14/11/2016	12,12	BAJA	P33
15/11/2016	12,36	SUBE	P13
16/11/2016	12,335	BAJA	P31
17/11/2016	12,4	SUBE	P13
18/11/2016	12,165	BAJA	P31
21/11/2016	12,29	SUBE	P13
22/11/2016	12,31	SUBE	P11
23/11/2016	12,28	BAJA	P31
24/11/2016	12,3	SUBE	P13
25/11/2016	12,185	BAJA	P31
28/11/2016	12,115	BAJA	P33

29/11/2016	12,08	BAJA	P33
01/12/2016	12,895	SUBE	P13
02/12/2016	12,755	BAJA	P31
05/12/2016	12,905	SUBE	P13
06/12/2016	12,9	BAJA	P31
07/12/2016	12,985	SUBE	P13
08/12/2016	13,115	SUBE	P11
09/12/2016	12,905	BAJA	P31
12/12/2016	13,115	SUBE	P13
13/12/2016	13,19	SUBE	P11
14/12/2016	13,2	SUBE	P11
15/12/2016	13,295	SUBE	P11
16/12/2016	13,825	SUBE	P11
19/12/2016	13,37	BAJA	P31
20/12/2016	13,6	SUBE	P13
21/12/2016	13,47	BAJA	P31
22/12/2016	13,42	BAJA	P33
23/12/2016	13,435	SUBE	P13
27/12/2016	13,475	SUBE	P11
28/12/2016	13,4	BAJA	P31
29/12/2016	13,48	SUBE	P13
30/12/2016	13,42	BAJA	P31
02/01/2017	13,525	SUBE	P13
03/01/2017	13,63	SUBE	P11
04/01/2017	13,66	SUBE	P11
05/01/2017	13,68	SUBE	P11
06/01/2017	13,7	SUBE	P11
09/01/2017	13,57	BAJA	P31
10/01/2017	13,72	SUBE	P13
11/01/2017	13,9	SUBE	P11
12/01/2017	14,03	SUBE	P11
13/01/2017	14,21	SUBE	P11
16/01/2017	14,105	BAJA	P31

17/01/2017	14,105	IGUAL	P23
18/01/2017	14,13	SUBE	P12
19/01/2017	14,1	BAJA	P31
20/01/2017	14,195	SUBE	P13
23/01/2017	14	BAJA	P31
24/01/2017	14,08	SUBE	P13
25/01/2017	14,25	SUBE	P11
26/01/2017	14,2	BAJA	P31
27/01/2017	14,09	BAJA	P33
30/01/2017	13,765	BAJA	P33
31/01/2017	13,66	BAJA	P33
01/02/2017	13,665	SUBE	P13
02/02/2017	13,75	SUBE	P11
03/02/2017	13,92	SUBE	P11
06/02/2017	13,855	BAJA	P31
07/02/2017	13,655	BAJA	P33
08/02/2017	13,54	BAJA	P33
09/02/2017	13,72	SUBE	P13
10/02/2017	13,68	BAJA	P31
13/02/2017	13,95	SUBE	P13
14/02/2017	13,93	BAJA	P31
15/02/2017	13,925	BAJA	P33
16/02/2017	13,895	BAJA	P33
17/02/2017	13,625	BAJA	P33
20/02/2017	13,72	SUBE	P13
21/02/2017	13,79	SUBE	P11
22/02/2017	13,695	BAJA	P31
23/02/2017	13,89	SUBE	P13
24/02/2017	13,82	BAJA	P31
27/02/2017	13,795	BAJA	P33
28/02/2017	14	SUBE	P13
01/03/2017	14,295	SUBE	P11
02/03/2017	14,295	IGUAL	P21

03/03/2017	14,295	IGUAL	P22
06/03/2017	14,315	SUBE	P12
07/03/2017	14,335	SUBE	P11
08/03/2017	14,24	BAJA	P31
09/03/2017	14,075	BAJA	P33
10/03/2017	14,425	SUBE	P13
13/03/2017	14,405	BAJA	P31
14/03/2017	14,1	BAJA	P33
15/03/2017	14,275	SUBE	P13
16/03/2017	14,485	SUBE	P11
17/03/2017	14,56	SUBE	P11
20/03/2017	14,46	BAJA	P31
21/03/2017	14,475	SUBE	P13
22/03/2017	14,455	BAJA	P31
23/03/2017	14,555	SUBE	P13
24/03/2017	14,37	BAJA	P31
27/03/2017	14,295	BAJA	P33
28/03/2017	14,335	SUBE	P13
29/03/2017	14,39	SUBE	P11

CALCULO VECTORES PROPIOS REPSOL

REPSOL Abril

$$\text{RepsolAbril} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 0.25 & 1 & 2/6 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbril]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{{1., 0.397667, -0.314333}, {{-0.891953, -0.0743294, -0.445976},  
{-0.794608, 0.234675, 0.559934}, {-0.383338, -0.432661, 0.816}}}
```

Solve[-(0.8919529754965997` + 0.07432941462471655` + 0.4459764877482995`) r == 1, r]

[\[resuelve\]](#)

```
{{r -> -0.708085}}
```

```
{-0.8919529754965997`, -0.07432941462471655`, -0.4459764877482995`} *  
(-0.7080854761617744`) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

$$\begin{pmatrix} 0.631579 \\ 0.0526316 \\ 0.315789 \end{pmatrix}$$

REPSOL Abril-Mayo

$$\text{RepsolAbrilMayo} = \begin{pmatrix} 0.591 & 0.5 & 0.534 \\ 0.045 & 0 & 0.066 \\ 1 - (0.591 + 0.045) & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbrilMayo]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{{1., -0.0715541, 0.0625541}, {{0.824014, 0.0741526, 0.561696},  
{-0.161894, -0.612121, 0.774015}, {0.761021, -0.124317, -0.636704}}}
```

Solve[(0.8240141524524814` + 0.07415255399424238` + 0.5616957141497074`) r == 1, r]

[\[resuelve\]](#)

```
{{r -> 0.684996}}
```

```
{0.8240141524524814`, 0.07415255399424238`, 0.5616957141497074`} *  
(0.6849960557183512`) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

$$\begin{pmatrix} 0.564446 \\ 0.0507942 \\ 0.384759 \end{pmatrix}$$

REPSOL Abril-Junio

$$\text{RepsolAbrilJunio} = \begin{pmatrix} 0.636 & 0.5 & 0.5 \\ 0.03 & 0 & 0.042 \\ 0.334 & 0.5 & 0.458 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbrilJunio]

[autovalores y autovectores

{ {1., 0.136, -0.042}, { {-0.829854, -0.048243, -0.555891},
{-0.730441, 0.0492432, 0.681198}, {7.25572 × 10⁻¹⁷, -0.707107, 0.707107} } }

Solve[- (0.8298542062539593` + 0.048243040689097745` + 0.5558908214637845`) r == 1, r]

[resuelve

{ {r → -0.697356} }

{0.8298542062539593`, 0.048243040689097745`, 0.5558908214637845`} *
(0.6973558720826724`) // MatrixForm

[forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 0.578704 \\ 0.0336426 \\ 0.387654 \end{pmatrix}$$

REPSOL Abril-Julio

$$\text{RepsolAbrilJulio} = \begin{pmatrix} 0.595 & 0.5 & 0.472 \\ 0.024 & 0 & 0.028 \\ 0.381 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbrilJulio]

[autovalores y autovectores

{ {1., 0.122255, -0.0272546}, { {0.777069, 0.036244, 0.628371},
{0.71645, -0.019073, -0.697377}, {0.143061, -0.767699, 0.624638} } }

Solve[(0.7770691998601607` + 0.03624404243298379` + 0.6283707727264262`) r == 1, r]

[resuelve

{ {r → 0.693633} }

{0.7770691998601607`, 0.03624404243298379`, 0.6283707727264262`} *
(0.6936332716336772`) // MatrixForm

[forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 0.539001 \\ 0.0251401 \\ 0.435859 \end{pmatrix}$$

REPSOL Abril-Agosto (Irrationals??)

$$\text{RepsolAbrilAgosto} = \begin{pmatrix} 0.582 & 0.333 & 0.512 \\ 0.036 & 0 & 0.023 \\ 0.382 & 0.667 & 0.465 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbrilAgosto]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., 0.0235 + 0.0128355 i, 0.0235 - 0.0128355 i},
  {0.787292 + 0. i, 0.0424901 + 0. i, 0.615115 + 0. i},
  {-0.611596 - 0.0348122 i, -0.161375 + 0.0348122 i, 0.772971 + 0. i},
  {-0.611596 + 0.0348122 i, -0.161375 - 0.0348122 i, 0.772971 + 0. i} }
```

Solve[

[\[resuelve\]](#)

```
(0.7872918188472691` + 0.` i + 0.04249014517479829` + 0.` i + 0.6151147694042011` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r → 0.692091 + 0. i} }
```

```
{0.7872918188472691` + 0.` i, 0.04249014517479829`, 0.` i + 0.6151147694042011` + 0.` i} *
  (0.6920909826051793` + 0.` i) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

```
( 0.544878 + 0. i )
( 0.029407 + 0. i )
( 0.425715 + 0. i )
```

REPSOL Abril-Septiembre

$$\text{RepsolAbrilSeptiembre} = \begin{pmatrix} 0.569 & 0.333 & 0.519 \\ 0.031 & 0 & 0.019 \\ 0.4 & 0.667 & 0.462 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbrilSeptiembre]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., 0.0155 + 0.0322762 i, 0.0155 - 0.0322762 i},
  {-0.78006 + 0. i, -0.0360505 + 0. i, -0.624665 + 0. i},
  {-0.625787 - 0.0916009 i, -0.131969 + 0.0916009 i, 0.757756 + 0. i},
  {-0.625787 + 0.0916009 i, -0.131969 - 0.0916009 i, 0.757756 + 0. i} }
```

Solve[

[\[resuelve\]](#)

```
- (0.7800602378656113` + 0.` i + 0.0360505027438173` + 0.` i + 0.6246650194728084` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r → -0.694071 + 0. i} }
```

```
- {0.7800602378656113` + 0.` i, 0.0360505027438173` + 0.` i, 0.6246650194728084` + 0.` i} *
  (-0.6940705331847904` + 0.` i) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

```
( 0.541417 + 0. i )
( 0.0250216 + 0. i )
( 0.433562 + 0. i )
```

REPSOL Abril-Octubre

$$\text{RepsolAbrilOctubre} = \begin{pmatrix} 0.557 & 0.333 & 0.557 \\ 0.025 & 0 & 0.016 \\ 0.418 & 0.667 & 0.427 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbrilOctubre]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., -0.008 + 0.0441814 i, -0.008 - 0.0441814 i},
  {-0.790838 + 0. i, -0.0295519 + 0. i, -0.611311 + 0. i},
  {-0.669676 - 0.127531 i, -0.0490711 + 0.127531 i, 0.718747 + 0. i},
  {-0.669676 + 0.127531 i, -0.0490711 - 0.127531 i, 0.718747 + 0. i} }
```

Solve[-(0.7908381318682438` + 0.` i +

[\[resuelve\]](#)

0.029551937063328534` + 0.` i + 0.6113114854139018` + 0.` i) r == 1, r]

```
{ {r -> -0.69847 + 0. i} }
```

```
- {0.7908381318682438` + 0.` i, 0.029551937063328534` + 0.` i, 0.6113114854139018` + 0.` i} *
  (-0.698469591630196` + 0.` i) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

$$\begin{pmatrix} 0.552376 + 0. i \\ 0.0206411 + 0. i \\ 0.426982 + 0. i \end{pmatrix}$$

REPSOL Abril-Noviembre

$$\text{RepsolAbrilNoviembre} = \begin{pmatrix} 0.534 & 0.333 & 0.548 \\ 0.023 & 0 & 0.014 \\ 0.443 & 0.667 & 0.438 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbrilNoviembre]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., -0.014 + 0.0439886 i, -0.014 - 0.0439886 i},
  {-0.76946 + 0. i, -0.0266315 + 0. i, -0.638139 + 0. i},
  {-0.678696 - 0.13886 i, -0.0284105 + 0.13886 i, 0.707107 + 0. i},
  {-0.678696 + 0.13886 i, -0.0284105 - 0.13886 i, 0.707107 + 0. i} }
```

Solve[

[\[resuelve\]](#)

-(0.7694603622010402` + 0.` i + 0.02663153574550356` + 0.` i + 0.6381391010628324` + 0.` i) r == 1, r]

```
{ {r -> -0.697238 + 0. i} }
```

```
- {0.7694603622010402` + 0.` i, 0.02663153574550356` + 0.` i, 0.6381391010628324` + 0.` i} *
  (-0.6972377536747569` + 0.` i) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

$$\begin{pmatrix} 0.536497 + 0. i \\ 0.0185685 + 0. i \\ 0.444935 + 0. i \end{pmatrix}$$

REPSOL Abril-Diciembre

$$\text{RepsolAbrilDiciembre} = \begin{pmatrix} 0.525 & 0.333 & 0.580 \\ 0.020 & 0 & 0.013 \\ 0.455 & 0.667 & 0.407 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbrilDiciembre]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., -0.034 + 0.0358887 i, -0.034 - 0.0358887 i},
  {-0.780078 + 0. i, -0.0237296 + 0. i, -0.625233 + 0. i},
  {-0.72804 + 0. i, 0.0618982 + 0.105783 i, 0.666142 - 0.105783 i},
  {-0.72804 + 0. i, 0.0618982 - 0.105783 i, 0.666142 + 0.105783 i} }
```

Solve[

[resuelve](#)

```
- (0.7800776133124071` + 0.` i + 0.02372957627745336` + 0.` i + 0.6252326162465544` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r → -0.699771 + 0. i} }
```

```
- {0.7800776133124071` + 0.` i, 0.02372957627745336` + 0.` i, 0.6252326162465544` + 0.` i} *
  (-0.6997705703618952` + 0.` i) // MatrixForm
```

[forma de matriz](#)

```
( 0.545875 + 0. i )
( 0.0166053 + 0. i )
( 0.437519 + 0. i )
```

REPSOL Abril-Enero

$$\text{RepsolAbrilEnero} = \begin{pmatrix} 0.535 & 0.500 & 0.580 \\ 0.018 & 0 & 0.023 \\ 0.447 & 0.500 & 0.398 \end{pmatrix};$$

Eigensystem[RepsolAbrilEnero]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1.00043, -0.0563158, -0.0111111}, {-0.791379, -0.0282782, -0.610672},
  {-0.653615, -0.0976033, 0.750507}, {0.813167, -0.341084, -0.471616} }
```

Solve[- (0.7913785319188881` + 0.028278197673090377` + 0.6106720582720868`) r == 1, r]

[resuelve](#)

```
{ {r → -0.69914} }
```

```
- {0.7913785319188881`, 0.028278197673090377`, 0.6106720582720868` } *
  (-0.6991399519360281`) // MatrixForm
```

[forma de matriz](#)

```
( 0.553284 )
( 0.0197704 )
( 0.426945 )
```

REPSOL Abril-Febrero

```

RepsolAbrilFebrero = ();
Eigensystem[RepsolAbrilFebrero]
[autovalores y autovectores]
{{1., -0.0481078, -0.0108922}, {{-0.775458, -0.0250254, -0.630904},
{-0.655809, -0.0933276, 0.749136}, {0.814491, -0.357712, -0.456779}}}}

Solve[ -(0.7754575285121138` + 0.025025392435816037` + 0.6309035989811103`) r == 1, r]
[resuelve]
{{r -> -0.698623}}

{-0.7754575285121138`, -0.025025392435816037`, -0.6309035989811103`} *
(-0.6986233180745437`) // MatrixForm
[forma de matriz]
( 0.541753
  0.0174833
  0.440764 )

```

REPSOL Abril-Marzo

```

RepsolAbrilMarzo = ( 0.519 0.500 0.569
                    0.022 0.167 0.018 );
                    0.459 0.333 0.413 );
Eigensystem[RepsolAbrilMarzo]
[autovalores y autovectores]
{{1., 0.147603, -0.0486033}, {{0.777822, 0.0341034, 0.627558},
{0.280881, -0.80439, 0.52351}, {0.714225, -0.0144578, -0.699767}}}}

Solve[ (0.7778221772784394` + 0.03410340953305903` + 0.6275584578284709`) r == 1, r]
[resuelve]
{{r -> 0.694693}}

{0.7778221772784394`, 0.03410340953305903`, 0.6275584578284709`} *
(0.6946933546943974`) // MatrixForm
[forma de matriz]
( 0.540348
  0.0236914
  0.435961 )

```


REPSOL Prevision Futura:

```
RepsolAbrilMarzo;  
b = {0.5, 0.1, 0.4};  
Table[MatrixPower[RepsolAbrilMarzo, t].b, {t, 0, 5}] // MatrixForm  
[tabla [potencia matricial] [forma de matri:  

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5371 & 0.0349 & 0.428 \\ 0.539737 & 0.0253485 & 0.434915 \\ 0.540264 & 0.0239359 & 0.4358 \\ 0.540335 & 0.0237275 & 0.435937 \\ 0.540346 & 0.0236967 & 0.435957 \end{pmatrix}$$

```

CALCULO VECTORES PROPIOS SANTANDER

Matrices Santander

$$\text{SantanderAbril} = \begin{pmatrix} 0.769 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.231 & 1 & 0.2 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilMayo} = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.6 & 0.5 \\ 0.05 & 0.2 & 0.214 \\ 0.4 & 0.2 & 0.286 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilJunio} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.478 \\ 0.107 & 0.125 & 0.174 \\ 0.393 & 0.375 & 0.348 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilJulio} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333 & 0.533 \\ 0.158 & 0.167 & 0.133 \\ 0.342 & 0.5 & 0.334 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilAgosto} = \begin{pmatrix} 0.489 & 0.421 & 0.457 \\ 0.213 & 0.158 & 0.2 \\ 0.298 & 0.421 & 0.343 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilSeptiembre} = \begin{pmatrix} 0.482 & 0.435 & 0.465 \\ 0.214 & 0.130 & 0.186 \\ 0.304 & 0.435 & 0.349 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilOctubre} = \begin{pmatrix} 0.485 & 0.419 & 0.457 \\ 0.227 & 0.194 & 0.217 \\ 0.288 & 0.387 & 0.326 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilNoviembre} = \begin{pmatrix} 0.472 & 0.389 & 0.446 \\ 0.236 & 0.194 & 0.215 \\ 0.292 & 0.417 & 0.339 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilDiciembre} = \begin{pmatrix} 0.475 & 0.357 & 0.475 \\ 0.22 & 0.262 & 0.213 \\ 0.305 & 0.381 & 0.312 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilEnero} = \begin{pmatrix} 0.472 & 0.36 & 0.462 \\ 0.22 & 0.28 & 0.246 \\ 0.308 & 0.36 & 0.292 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilFebrero} = \begin{pmatrix} 0.475 & 0.377 & 0.44 \\ 0.202 & 0.265 & 0.253 \\ 0.323 & 0.358 & 0.307 \end{pmatrix};$$

$$\text{SantanderAbrilMarzo} = \begin{pmatrix} 0.463 & 0.367 & 0.45 \\ 0.213 & 0.283 & 0.25 \\ 0.324 & 0.35 & 0.3 \end{pmatrix};$$

Santander Abril

Eigensystem[SantanderAbril]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., -0.40798, 0.37698}, { {-0.930825, -0.0716735, -0.358368},
  {-0.416207, -0.400238, 0.816445}, {-0.803987, 0.278688, 0.525299} }
```

Solve[$-(0.9308251724544303^x + 0.07167353827899106^x + 0.35836769139495545^x) r == 1, r]$

[\[resuelve\]](#)

```
{ {r → -0.734826} }
```

```
{ -0.9308251724544303^x, -0.07167353827899106^x, -0.35836769139495545^x } *
  (-0.7348259891169431^x) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

$$\begin{pmatrix} 0.683995 \\ 0.0526676 \\ 0.263338 \end{pmatrix}$$

Santander AbrilMayo

Eigensystem[SantanderAbrilMayo]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., 0.018 + 0.124 i, 0.018 - 0.124 i}, { {0.832544 + 0. i, 0.19112 + 0. i, 0.519946 + 0. i},
  {-0.223221 + 0.40705 i, -0.433311 - 0.40705 i, 0.656532 + 0. i},
  {-0.223221 - 0.40705 i, -0.433311 + 0.40705 i, 0.656532 + 0. i} }
```

Solve[

[\[resuelve\]](#)

```
(0.8325439354727475^x + 0.^i + 0.19111956732180976^x + 0.^i + 0.5199460611393013^x + 0.^i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r → 0.647832 + 0. i} }
```

```
{ 0.8325439354727475^x + 0.^i, 0.19111956732180976^x + 0.^i, 0.5199460611393013^x + 0.^i } *
  (0.647832213122287^x + 0.^i) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

$$\begin{pmatrix} 0.539349 + 0. i \\ 0.123813 + 0. i \\ 0.336838 + 0. i \end{pmatrix}$$

Santander AbrilJunio

Eigensystem[SantanderAbrilJunio]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., -0.0135 + 0.0146202 i, -0.0135 - 0.0146202 i},
  { -0.777936 + 0. i, -0.212704 + 0. i, -0.591247 + 0. i },
  { -0.419275 - 0.172673 i, 0.791308 + 0. i, -0.372033 + 0.172673 i },
  { -0.419275 + 0.172673 i, 0.791308 + 0. i, -0.372033 - 0.172673 i } }
```

Solve[

[resuelve](#)

```
- (0.7779359291742303` + 0.` i + 0.21270408089401935` + 0.` i + 0.5912467032219779` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r → -0.632157 + 0. i} }
```

```
{ -0.7779359291742303` + 0.` i, -0.21270408089401935` + 0.` i,
  -0.5912467032219779` + 0.` i } * (-0.6321565201847237` + 0.` i) // MatrixForm
\[forma de matriz\]
```

```
( 0.491777 + 0. i )
( 0.134462 + 0. i )
( 0.37376 + 0. i )
```

Santander AbrilJulio

Eigensystem[SantanderAbrilJulio]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., 0.0005 + 0.0622716 i, 0.0005 - 0.0622716 i},
  { 0.778343 + 0. i, 0.240247 + 0. i, 0.580055 + 0. i },
  { 0.722629 + 0. i, -0.12104 - 0.224996 i, -0.601589 + 0.224996 i },
  { 0.722629 + 0. i, -0.12104 + 0.224996 i, -0.601589 - 0.224996 i } }
```

Solve[

[resuelve](#)

```
(0.7783429319113934` + 0.` i + 0.24024669684092628` + 0.` i + 0.5800550017029421` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r → 0.62553 + 0. i} }
```

```
{ 0.7783429319113934` + 0.` i, 0.24024669684092628` + 0.` i, 0.5800550017029421` + 0.` i } *
  (0.6255298901014793` + 0.` i) // MatrixForm
\[forma de matriz\]
```

```
( 0.486877 + 0. i )
( 0.150281 + 0. i )
( 0.362842 + 0. i )
```

Santander AbrilAgosto

Eigensystem[SantanderAbrilAgosto]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., -0.0350167, 0.0250167}, { {-0.765076, -0.325514, -0.555607},
  {-0.281116, -0.523318, 0.804433}, {-0.63716, -0.123597, 0.760757} }
```

Solve[- (0.7650760157727753` + 0.3255138301626788` + 0.5556072681868719`) r == 1, r]

[\[resuelve\]](#)

```
{ {r -> -0.607461} }
```

```
{ -0.7650760157727753`, -0.3255138301626788`, -0.5556072681868719` } *
  (-0.6074606688477596`) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

```
( 0.464754
  0.197737
  0.33751 )
```

Santander AbrilSeptiembre

Eigensystem[SantanderAbrilSeptiembre]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., -0.0416867, 0.00268671}, { {-0.765774, -0.30895, -0.564038},
  {-0.271502, -0.531119, 0.802621}, {-0.541571, -0.258389, 0.79996} }
```

Solve[- (0.7657744867829616` + 0.30895039639174665` + 0.5640381972541171`) r == 1, r]

[\[resuelve\]](#)

```
{ {r -> 0.610216} }
```

```
{ -0.7657744867829616`, -0.30895039639174665`, -0.5640381972541171` } *
  (-0.6102163344675325`) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

```
( 0.467288
  0.188527
  0.344185 )
```

Santander AbrilOctubre

Eigensystem[SantanderAbrilOctubre]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., 0.0189393, -0.0139393}, { {-0.76571, -0.359283, -0.533482},
  {-0.621299, -0.148143, 0.769442}, {-0.387973, -0.428193, 0.816166} }
```

```
Solve[{-0.7657104731315565` - 0.35928279467630153` - 0.5334822816047732`} r == 1, r]
```

```
[resuelve
```

```
{r -> -0.602963}]
```

```
{-0.7657104731315565`, -0.35928279467630153`, -0.5334822816047732`} *  
(-0.6029633661793579`) // MatrixForm
```

```
[forma de matriz
```

```
(0.461695  
0.216634  
0.32167)
```

Santander AbrilNoviembre

```
Eigensystem[SantanderAbrilNoviembre]
```

```
[autovalores y autovectores
```

```
{{1., 0.0025 + 0.0253919 i, 0.0025 - 0.0253919 i},  
{0.743064 + 0. i, 0.366871 + 0. i, 0.559697 + 0. i},  
{0.505351 + 0.159402 i, 0.279355 - 0.159402 i, -0.784706 + 0. i},  
{0.505351 - 0.159402 i, 0.279355 + 0.159402 i, -0.784706 + 0. i}}}
```

```
Solve[
```

```
[resuelve
```

```
(0.743064203438458` + 0.` i + 0.3668710868641314` + 0.` i + 0.5596974139582036` + 0.` i)  
r == 1, r]
```

```
{r -> 0.598934 + 0. i}
```

```
{0.743064203438458` + 0.` i, 0.3668710868641314` + 0.` i, 0.5596974139582036` + 0.` i} *  
(0.5989341233242891` + 0.` i) // MatrixForm
```

```
[forma de matriz
```

```
(0.445047 + 0. i  
0.219732 + 0. i  
0.335222 + 0. i)
```

Santander AbrilDiciembre

```
Eigensystem[SantanderAbrilDiciembre]
```

```
[autovalores y autovectores
```

```
{{1., 0.0245 + 0.015025 i, 0.0245 - 0.015025 i},  
{-0.749211 + 0. i, -0.379926 + 0. i, -0.542531 + 0. i},  
{-0.766201 + 0. i, 0.159084 + 0.0975607 i, 0.607117 - 0.0975607 i},  
{-0.766201 + 0. i, 0.159084 - 0.0975607 i, 0.607117 + 0.0975607 i}}}
```

```
Solve[
[resuelve
(-0.7492107402554358` + 0.` i - 0.37992600262489595` + 0.` i - 0.5425306435726645` + 0.` i)
r == 1, r]
{{r -> -0.598205 + 0. i}}

(-0.7492107402554358` + 0.` i, -0.37992600262489595` + 0.` i,
-0.5425306435726645` + 0.` i) * (-0.598205126273257` + 0.` i) // MatrixForm
[forma de matriz

( 0.448182 + 0. i )
( 0.227274 + 0. i )
( 0.324545 + 0. i )
```

Santander AbrilEnero

```
Eigensystem[SantanderAbrilEnero]
[autovalores y autovectores
{{1., 0.0748772, -0.0308772}, {{-0.742739, -0.408273, -0.530709},
{-0.806604, 0.513041, 0.293563}, {-0.565891, -0.226785, 0.792676}}}]

Solve[(-0.7427386607787005` - 0.40827349632661647` - 0.5307089918042679`) r == 1, r]
[resuelve
{{r -> -0.594629}}

(-0.7427386607787005`, -0.40827349632661647`, -0.5307089918042679`) *
(-0.5946289018535519`) // MatrixForm
[forma de matriz

( 0.441654 )
( 0.242771 )
( 0.315575 )
```

Santander AbrilFebrero

```
Eigensystem[SantanderAbrilFebrero]
[autovalores y autovectores
{{1., 0.0813381, -0.0343381}, {{-0.739778, -0.391643, -0.547123},
{-0.787879, 0.579506, 0.208374}, {-0.388547, -0.427637, 0.816185}}}]

Solve[(-0.7397783086856213` - 0.3916427677644058` - 0.5471233832108413`) r == 1, r]
[resuelve
{{r -> -0.595754}}
```

```
{-0.7397783086856213`, -0.3916427677644058`, -0.5471233832108413`} *  
(-0.5957542525874108`) // MatrixForm
```

forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 0.440726 \\ 0.233323 \\ 0.325951 \end{pmatrix}$$

Santander AbrilMarzo

```
Eigensystem[SantanderAbrilMarzo]
```

autovalores y autovectores

```
Eigensystem[SantanderAbrilMarzo]
```

```
Solve[{-0.7338995376834623` - 0.40750551066835095` - 0.5434433984905208`} r == 1, r]
```

resuelve

```
{{r -> -0.593525}}
```

```
{-0.7338995376834623`, -0.40750551066835095`, -0.5434433984905208`} *  
(-0.5935251932446235`) // MatrixForm
```

forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 0.435588 \\ 0.241865 \\ 0.322547 \end{pmatrix}$$

Santander Previsiones

```
SantanderAbrilMarzo;
```

```
b = {0.35, 0.35, 0.3};
```

```
Table[MatrixPower[SantanderAbrilMarzo, t].b, {t, 0, 5}] // MatrixForm
```

tabla potencia matricial

forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 0.35 & 0.35 & 0.3 \\ 0.4255 & 0.2486 & 0.3259 \\ 0.434898 & 0.24246 & 0.322642 \\ 0.435529 & 0.24191 & 0.322561 \\ 0.435583 & 0.241868 & 0.322548 \\ 0.435588 & 0.241865 & 0.322547 \end{pmatrix}$$

CALCULO VECTORES PROPIOS TELEFONICA

Matrices Telefónica

$$\text{TelefonicaAbril} = \begin{pmatrix} 0.545 & 1 & 0.5 \\ 0.182 & 0 & 0 \\ 0.273 & 0 & 0.5 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilMayo} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.4 & 0.643 \\ 0.2 & 0 & 0.071 \\ 0.350 & 0.6 & 0.286 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilJunio} = \begin{pmatrix} 0.483 & 0.4 & 0.560 \\ 0.138 & 0 & 0.04 \\ 0.379 & 0.6 & 0.40 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilJulio} = \begin{pmatrix} 0.462 & 0.333 & 0.563 \\ 0.154 & 0.222 & 0.063 \\ 0.384 & 0.445 & 0.374 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilAgosto} = \begin{pmatrix} 0.469 & 0.375 & 0.556 \\ 0.184 & 0.25 & 0.083 \\ 0.347 & 0.375 & 0.361 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilSeptiembre} = \begin{pmatrix} 0.483 & 0.421 & 0.511 \\ 0.190 & 0.211 & 0.089 \\ 0.327 & 0.368 & 0.40 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilOctubre} = \begin{pmatrix} 0.455 & 0.375 & 0.509 \\ 0.227 & 0.208 & 0.094 \\ 0.318 & 0.417 & 0.397 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilNoviembre} = \begin{pmatrix} 0.435 & 0.333 & 0.462 \\ 0.232 & 0.167 & 0.138 \\ 0.333 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilDiciembre} = \begin{pmatrix} 0.457 & 0.364 & 0.465 \\ 0.222 & 0.151 & 0.141 \\ 0.321 & 0.485 & 0.394 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilEnero} = \begin{pmatrix} 0.456 & 0.385 & 0.441 \\ 0.222 & 0.154 & 0.169 \\ 0.322 & 0.461 & 0.390 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilFebrero} = \begin{pmatrix} 0.465 & 0.409 & 0.451 \\ 0.228 & 0.159 & 0.171 \\ 0.307 & 0.432 & 0.378 \end{pmatrix};$$

$$\text{TelefonicaAbrilMarzo} = \begin{pmatrix} 0.482 & 0.435 & 0.455 \\ 0.211 & 0.152 & 0.170 \\ 0.307 & 0.413 & 0.375 \end{pmatrix};$$

Telefónica Abril

Eigensystem[TelefonicaAbril]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., 0.325, -0.28}, { {-0.866706, -0.15774, -0.473221},
  {-0.516591, -0.289291, 0.805881}, {0.804518, -0.522937, -0.281581} } }
```

Solve[(-0.8667060352749273` - 0.15774049842003718` - 0.47322149526011054`) r == 1, r]

[resuelve](#)

```
{ {r -> -0.667705} }
```

```
{ -0.8667060352749273`, -0.15774049842003718`, -0.47322149526011054` } *
  (-0.6677047120366864`) // MatrixForm
```

[forma de matriz](#)

```
( 0.578704
  0.105324
  0.315972 )
```

Telefónica AbrilMayo

Eigensystem[TelefonicaAbrilMayo]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., -0.132 + 0.166211 i, -0.132 - 0.166211 i},
  { {0.8026 + 0. i, 0.200411 + 0. i, 0.561844 + 0. i},
    {0.461537 + 0.421496 i, 0.172442 - 0.421496 i, -0.633979 + 0. i},
    {0.461537 - 0.421496 i, 0.172442 + 0.421496 i, -0.633979 + 0. i} } }
```

Solve[

[resuelve](#)

```
(0.8026000509302942` + 0.` i + 0.20041093020325268` + 0.` i + 0.5618439439041382` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r -> 0.639037 + 0. i} }
```

```
{0.8026000509302942` + 0.` i, 0.20041093020325268` + 0.` i, 0.5618439439041382` + 0.` i} *
  (0.6390368742814404` + 0.` i) // MatrixForm
```

[forma de matriz](#)

```
( 0.512891 + 0. i
  0.12807 + 0. i
  0.359039 + 0. i )
```

Telefónica AbrilJunio

Eigensystem[TelefonicaAbrilJunio]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., -0.0585 + 0.123846 i, -0.0585 - 0.123846 i},
  { {0.773429 + 0. i, 0.131537 + 0. i, 0.620086 + 0. i},
    {-0.434903 - 0.380642 i, -0.244345 + 0.380642 i, 0.679248 + 0. i},
    {-0.434903 + 0.380642 i, -0.244345 - 0.380642 i, 0.679248 + 0. i}} }
```

Solve[(.773429 + 0. i + 0.1315365810276826 i + 0.620085679038218 i) r == 1, r]

[resuelve](#)

```
{ {r -> 0.655716 + 0. i} }
```

```
{.773429 + 0. i, 0.1315365810276826 i + 0. i, 0.620085679038218 i + 0. i} *
(0.6557156642438287 i + 0. i) // MatrixForm
```

[forma de matriz](#)

$$\begin{pmatrix} 0.50715 + 0. i \\ 0.0862506 + 0. i \\ 0.4066 + 0. i \end{pmatrix}$$

Telefónica AbrilJulio

Eigensystem[TelefonicaAbrilJulio]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., 0.029 + 0.0634823 i, 0.029 - 0.0634823 i},
  { {0.764867 + 0. i, 0.200962 + 0. i, 0.61204 + 0. i},
    {0.775947 + 0. i, -0.438579 - 0.214169 i, -0.337368 + 0.214169 i},
    {0.775947 + 0. i, -0.438579 + 0.214169 i, -0.337368 - 0.214169 i}} }
```

Solve[

[resuelve](#)

```
(0.7648671998705608 i + 0. i + 0.20096150668003693 i + 0. i + 0.6120397367778149 i + 0. i)
r == 1, r]
```

```
{ {r -> 0.633766 + 0. i} }
```

```
{0.7648671998705608 i + 0. i, 0.20096150668003693 i + 0. i, 0.6120397367778149 i + 0. i} *
(0.633766398097527 i + 0. i) // MatrixForm
```

[forma de matriz](#)

$$\begin{pmatrix} 0.484747 + 0. i \\ 0.127363 + 0. i \\ 0.38789 + 0. i \end{pmatrix}$$

Telefónica AbrilAgosto

Eigensystem[TelefonicaAbrilAgosto]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., 0.04 + 0.0463897 i, 0.04 - 0.0463897 i},
  {0.779321 + 0. i, 0.25456 + 0. i, 0.572589 + 0. i},
  {0.764114 + 0. i, -0.536147 - 0.19584 i, -0.227968 + 0.19584 i},
  {0.764114 + 0. i, -0.536147 + 0.19584 i, -0.227968 - 0.19584 i} }
```

Solve[

[\[resuelve\]](#)

```
(0.7793209504325643` + 0.` i + 0.25455991690146135` + 0.` i + 0.572588949355474` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r → 0.622483 + 0. i} }
```

```
{0.7793209504325643` + 0.` i, 0.25455991690146135` + 0.` i, 0.572588949355474` + 0.` i} *
  (0.6224829060658792` + 0.` i) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

```
( 0.485114 + 0. i )
( 0.158459 + 0. i )
( 0.356427 + 0. i )
```

Telefónica AbrilSeptiembre

Eigensystem[TelefonicaAbrilSeptiembre]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., 0.047 + 0.0588643 i, 0.047 - 0.0588643 i},
  {0.77632 + 0. i, 0.252114 + 0. i, 0.577725 + 0. i},
  {0.489955 - 0.384545 i, -0.659807 + 0. i, 0.169851 + 0.384545 i},
  {0.489955 + 0.384545 i, -0.659807 + 0. i, 0.169851 - 0.384545 i} }
```

Solve[

[\[resuelve\]](#)

```
(0.7763199505895979` + 0.` i + 0.252114417605942` + 0.` i + 0.5777245492029752` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r → 0.622603 + 0. i} }
```

```
{0.7763199505895979` + 0.` i, 0.252114417605942` + 0.` i, 0.5777245492029752` + 0.` i} *
  (0.6226033981865837` + 0.` i) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

```
( 0.483339 + 0. i )
( 0.156967 + 0. i )
( 0.359693 + 0. i )
```

Telefónica AbrilOctubre

Eigensystem[TelefonicaAbrilOctubre]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., 0.03 + 0.103759 i, 0.03 - 0.103759 i},
  {0.751744 + 0. i, 0.285988 + 0. i, 0.594215 + 0. i},
  {-0.605079 + 0. i, 0.379303 + 0.468527 i, 0.225776 - 0.468527 i},
  {-0.605079 + 0. i, 0.379303 - 0.468527 i, 0.225776 + 0.468527 i} }
```

Solve[

[resuelve](#)

```
(0.7517444692885962` + 0.` i + 0.28598761885100793` + 0.` i + 0.5942148893775193` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r -> 0.612765 + 0. i} }
```

```
{0.7517444692885962` + 0.` i, 0.28598761885100793` + 0.` i, 0.5942148893775193` + 0.` i} *
  (0.6127650063247888` + 0.` i) // MatrixForm
```

[forma de matriz](#)

```
( 0.460643 + 0. i )
( 0.175243 + 0. i )
( 0.364114 + 0. i )
```

Telefónica AbrilNoviembre

Eigensystem[TelefonicaAbrilNoviembre]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., 0.001 + 0.106499 i, 0.001 - 0.106499 i},
  {0.703845 + 0. i, 0.302506 + 0. i, 0.642723 + 0. i},
  {-0.395759 - 0.417306 i, -0.258615 + 0.417306 i, 0.654374 + 0. i},
  {-0.395759 + 0.417306 i, -0.258615 - 0.417306 i, 0.654374 + 0. i} }
```

Solve[

[resuelve](#)

```
(0.7038449491196701` + 0.` i + 0.3025062853047899` + 0.` i + 0.6427225178487418` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r -> 0.606401 + 0. i} }
```

```
{0.7038449491196701` + 0.` i, 0.3025062853047899` + 0.` i, 0.6427225178487418` + 0.` i} *
  (0.6064010167050006` + 0.` i) // MatrixForm
```

[forma de matriz](#)

```
( 0.426812 + 0. i )
( 0.18344 + 0. i )
( 0.389748 + 0. i )
```

Telefónica AbrilDiciembre

Eigensystem[TelefonicaAbrilDiciembre]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., 0.001 + 0.09 i, 0.001 - 0.09 i}, { {0.72763 + 0. i, 0.293253 + 0. i, 0.620127 + 0. i},
  {-0.386214 - 0.377818 i, -0.302254 + 0.377818 i, 0.688468 + 0. i},
  {-0.386214 + 0.377818 i, -0.302254 - 0.377818 i, 0.688468 + 0. i} } }
```

Solve[

[\[resuelve\]](#)

```
(0.7276299629088895` + 0.` i + 0.29325293576520084` + 0.` i + 0.6201268843892346` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r -> 0.609381 + 0. i} }
```

```
{0.7276299629088895` + 0.` i, 0.29325293576520084` + 0.` i, 0.6201268843892346` + 0.` i} *
  (0.6093808887191814` + 0.` i) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

```
( 0.443404 + 0. i
  0.178703 + 0. i
  0.377893 + 0. i )
```

Telefónica AbrilEnero

Eigensystem[TelefonicaAbrilEnero]

[\[autovalores y autovectores\]](#)

```
{ {1., 5.11743 × 10-17 + 0.0523737 i, 5.11743 × 10-17 - 0.0523737 i},
  { {0.721824 + 0. i, 0.312745 + 0. i, 0.617382 + 0. i},
  {-0.382406 - 0.282085 i, -0.366248 + 0.282085 i, 0.748655 + 0. i},
  {-0.382406 + 0.282085 i, -0.366248 - 0.282085 i, 0.748655 + 0. i} } }
```

Solve[

[\[resuelve\]](#)

```
(0.7218241168752181` + 0.` i + 0.3127452560860472` + 0.` i + 0.6173818503106357` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r -> 0.605345 + 0. i} }
```

```
{0.7218241168752181` + 0.` i, 0.3127452560860472` + 0.` i, 0.6173818503106357` + 0.` i} *
  (0.6053447498403567` + 0.` i) // MatrixForm
```

[\[forma de matriz\]](#)

```
( 0.436952 + 0. i
  0.189319 + 0. i
  0.373729 + 0. i )
```

Telefónica AbrilFebrero

Eigensystem[TelefonicaAbrilFebrero]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., 0.001 + 0.0471699 i, 0.001 - 0.0471699 i},
  { {0.741756 + 0. i, 0.320844 + 0. i, 0.588945 + 0. i},
    {-0.328688 - 0.281894 i, -0.41833 + 0.281894 i, 0.747018 + 0. i},
    {-0.328688 + 0.281894 i, -0.41833 - 0.281894 i, 0.747018 + 0. i} } }
```

Solve[

[resuelve](#)

```
(0.741756315312539` + 0.` i + 0.3208443222788449` + 0.` i + 0.588945234767541` + 0.` i) r ==
  1, r]
```

```
{ {r -> 0.605493 + 0. i} }
```

```
{0.741756315312539` + 0.` i, 0.3208443222788449` + 0.` i, 0.588945234767541` + 0.` i} *
  (0.6054933240041869` + 0.` i) // MatrixForm
```

[forma de matriz](#)

```
( 0.449128 + 0. i )
( 0.194269 + 0. i )
( 0.356602 + 0. i )
```

Telefónica AbrilMarzo

Eigensystem[TelefonicaAbrilMarzo]

[autovalores y autovectores](#)

```
{ {1., 0.0045 + 0.017713 i, 0.0045 - 0.017713 i},
  { {-0.75998 + 0. i, -0.304238 + 0. i, -0.574343 + 0. i},
    {-0.319432 - 0.133131 i, -0.477268 + 0.133131 i, 0.7967 + 0. i},
    {-0.319432 + 0.133131 i, -0.477268 - 0.133131 i, 0.7967 + 0. i} } }
```

Solve[

[resuelve](#)

```
(-0.7599799166896869` + 0.` i - 0.30423824651577286` + 0.` i - 0.5743427683755968` + 0.` i)
  r == 1, r]
```

```
{ {r -> -0.610292 + 0. i} }
```

```
{-0.7599799166896869` + 0.` i, -0.30423824651577286` + 0.` i,
  -0.5743427683755968` + 0.` i} * (-0.6102916167024038` + 0.` i) // MatrixForm
```

[forma de matriz](#)

```
( 0.463809 + 0. i )
( 0.185674 + 0. i )
( 0.350517 + 0. i )
```

Telefónica Prevision

```
TelefonicaAbrilMarzo;  
b = {0.65, 0.05, 0.3};  
Table[MatrixPower[TelefonicaAbrilMarzo, t].b, {t, 0, 5}] // MatrixForm  
[tabla [potencia matricial [forma de matri:
```

$$\begin{pmatrix} 0.65 & 0.05 & 0.3 \\ 0.47155 & 0.19575 & 0.3327 \\ 0.463817 & 0.18581 & 0.350373 \\ 0.463807 & 0.185672 & 0.350521 \\ 0.463809 & 0.185674 & 0.350517 \\ 0.463809 & 0.185674 & 0.350517 \end{pmatrix}$$

Tiempos de Recurrencia Santander

```
Solve[{x == 1 + 0.36 * y + 0.45 * z,  
|resuelve  
y == 1 + 0.283 * y + 0.25 * z, z == 1 + 0.35 * y + 0.3 * z}, {x, y, z}]  
{ {x -> 2.98395, y -> 2.29247, z -> 2.57481} }
```

Tiempos de Recurrencia Repsol

```
Solve[{x == 1 + 0.5 * y + 0.569 * z,  
|resuelve  
y == 1 + 0.167 * y + 0.018 * z, z == 1 + 0.33 * y + 0.413 * z}, {x, y, z}]  
{ {x -> 2.99624, y -> 1.25251, z -> 2.40771} }
```

Tiempos de Recurrencia Telefónica

```
Solve[{x == 1 + 0.435 * y + 0.455 * z,  
|resuelve  
y == 1 + 0.152 * y + 0.017 * z, z == 1 + 0.413 * y + 0.375 * z}, {x, y, z}]  
{ {x -> 2.63109, y -> 1.22758, z -> 2.41119} }
```