

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR DE GANDIA

Master en Ingeniería Acústica



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE VALENCIA



ESCUELA POLITECNICA
SUPERIOR DE GANDIA

“Diseño de un banco vibrométrico de medida de ondas flexurales de placas delgadas”

TRABAJO FINAL DE MASTER

Autor:

Luis Núñez Rodríguez

Tutor:

Rubén Picó Vila

Cotutor:

Iván Herrero Durá

GANDIA, 2017

Resumen

Un Vibrómetro Láser Doppler es un instrumento de medición de vibraciones constituido por un láser que se enfoca a la superficie vibrante que se pretende caracterizar. Debido al efecto Doppler, la frecuencia de la luz láser que se refleja varía si se desplaza la superficie enfocada, produciendo un corrimiento Doppler que se mide como una señal eléctrica digital en el vibrómetro con la ayuda de un interferómetro. Las propiedades resonantes de un sistema mecánico se pueden analizar al excitarlo mediante un excitador (shaker) y medir su respuesta vibratoria con un vibrómetro.

En este trabajo se realiza un estudio de caracterización de las vibraciones y análisis modal de estructuras simples. Para ello se procede en primer lugar a caracterizar el conjunto de dispositivos que forman el sistema de medida de vibraciones. Posteriormente, se establece el protocolo de medida de análisis modal y se exponen los resultados de las medidas para su posterior comparación con métodos analíticos y de simulación en elementos finitos.

Abstract

A Laser Doppler Vibrometer is an instrument to measure vibrations which consists of a laser that is directed at the vibrating surface to be characterized. Due to the Doppler effect, the frequency of reflected laser light varies if the focused surface is moved, producing a Doppler shift that is measured on the vibrometer as a digital electrical signal using an interferometer. The resonant properties of a mechanical system can be analyzed by stimulating it using a shaker and measuring its vibrational response with a vibrometer.

In this thesis, a study of the characterization of the vibrations and modal analysis of simple structures is performed. To do this, firstly it is necessary to characterize all the devices that form part of the vibration measurement system. Afterwards, the modal analysis protocol is established and the results of the measurements are presented for later comparison with analytical and simulation in finite elements methods.

Palabras clave

Vibrómetro, placas delgadas, diapasón, vibraciones, análisis modal.

Keywords

Vibrometer, thin plates, tuning fork, vibrations, modal analysis.

Índice

Diseño de un banco vibrométrico de medida de ondas flexurales de placas delgadas.....	6
1 Introducción.....	6
1.1 Objetivos principales	6
1.2 Metodología del trabajo	6
1.3 Etapas.....	7
2 Medición de vibraciones.....	8
2.1 Teoría básica de vibraciones.....	8
2.2 Análisis y ensayo modal	9
2.3 Introducción al Vibrómetro Láser Doppler.....	10
2.3.1 Funcionamiento del Vibrómetro Láser Doppler.....	11
2.3.2 Características de la medida con el Vibrómetro Láser Doppler	12
2.4 Introducción al análisis vibracional del diapasón	14
2.4.1 Conceptos teóricos vibratorios	14
2.5 Introducción al análisis vibracional de placas delgadas	18
3 Configuración de medida	22
3.1 Instrumentos de medida	22
3.2 Software de adquisición y generación de señal	23
3.3 Condiciones de medida	24
3.3.1 Puesta a punto del sistema vibrométrico	24
3.3.2 Acoplamiento y sujeción de sistemas.....	28
4 Diapasón	32
4.1 Análisis de las medidas vibratorias del diapasón.....	32
4.2 Simulación numérica en elementos finitos	33
4.3 Medidas experimentales	36
4.3.1 Medidas en plano.....	37
4.3.2 Medidas fuera de plano.....	40
4.3.3 Medidas acopladas fuera y en el plano.....	42
4.3.4 Caja de resonancia	47
4.4 Resumen de resultados del diapasón.....	49
5 Placas delgadas rectangulares.....	50
5.1 Análisis de las medidas vibratorias de placas delgadas	50
5.2 Simulación en elementos finitos	52
5.3 Medidas experimentales	55
5.4 Resumen de resultados de la placa.....	62
6 Conclusiones.....	63
7 Bibliografía.....	64

Índice de figuras

Figura 1: Diagrama de las etapas seguidas en la realización del TFM	7
Figura 2: Ejemplo de sistemas vibratorios simples [1].....	8
Figura 3: Ejemplo de medida con Vibrómetro Láser Doppler [2]	11
Figura 4: Ejemplo de los efectos de la distancia de separación en el nivel de señal recibida [3]	13
Figura 5: Ejemplo de distancia de separación y resolución espacial de un objeto	13
Figura 6: Tipos de modos de vibración del diapasón	15
Figura 7: Modo fundamental en plano [4].....	15
Figura 8: Modo Clang en plano [4]	16
Figura 9: Modos antisimétricos en plano [4].....	16
Figura 10: Modos simétricos fuera de plano [4].....	16
Figura 11: Modos antisimétricos fuera de plano [4].....	17
Figura 12: Ejemplos de aplicaciones de uso de placas delgadas [6]	18
Figura 13: Tipos de simetrías en placas rectangulares	21
Figura 14: Tipos de sistemas nodales centrales del cuadrado (a) y rectángulo (b) [8]...	21
Figura 15: Conjunto de dispositivos para la medición mediante Vibrometría Láser Doppler	22
Figura 16: Panel de control del software de control para las medidas vibrométricas	23
Figura 17: Pegatinas reflectantes	24
Figura 18: Ajuste de la señal recibida	24
Figura 19: Medida en punta del shaker	25
Figura 20: Prueba de diferentes distancias de separación del vibrómetro.....	26
Figura 21: Cuadrado circunscrito al shaker	27
Figura 22: Plano de la punta del shaker a varias frecuencias	27
Figura 23: Materiales de fijación.....	28
Figura 24: Comparativa de materiales de fijación 1	28
Figura 25: Placa delgada rectangular utilizada para las mediciones	29
Figura 26: Sistema de soporte de la placa utilizado para las mediciones.....	29
Figura 27: Materiales de sujeción.....	30
Figura 28: Gráfica comparativa de los diferentes materiales de sujeción de la placa 1 .	30
Figura 29: Gráfica comparativa de los diferentes materiales de sujeción de la placa 2 .	31
Figura 30: Modelo del diapasón acotado con sus dimensiones en mm.....	32
Figura 31: Modelo geométrico del diapasón empleado para la simulación numérica ...	33
Figura 32: Modos en plano antisimétricos obtenidos con simulación numérica.....	34
Figura 33: Modos en plano simétricos obtenidos con simulación numérica.....	35
Figura 34: Modos fuera de plano simétricos obtenidos con simulación numérica	35
Figura 35: Modos fuera de plano antisimétricos obtenidos con simulación numérica ..	36
Figura 36: Montaje experimental para las medidas con el diapasón. a) Esquema del montaje. b) Imagen real de una medida experimental con el diapasón.....	36
Figura 37: Clasificación de las configuraciones para cada tipo de medida realizada con el diapasón	37
Figura 38: Medida completa de los modos con excitación y recepción en plano	37

Figura 39: Medida del modo 1 del diapasón con la configuración IN - IN.....	38
Figura 40: Medida del modo 2 del diapasón con la configuración IN - IN.....	39
Figura 41: Medida del modo 3 del diapasón con la configuración IN - IN.....	39
Figura 42: Medida del modo 3 del diapasón con la configuración IN - IN.....	40
Figura 43: Medida completa de los modos con excitación y recepción fuera de plano .	40
Figura 44: Medida del modo 1 del diapasón con la configuración OUT - OUT.....	41
Figura 45: Medida del modo 2 del diapasón con la configuración OUT - OUT.....	41
Figura 46: Medida del modo 3 del diapasón con la configuración OUT - OUT.....	42
Figura 47: Medida completa de los modos con excitación en plano y recepción fuera de plano	42
Figura 48: Medida del modo 1 del diapasón con la configuración IN - OUT.....	43
Figura 49: Medida del modo 2 del diapasón con la configuración IN - OUT.....	43
Figura 50: Medida del modo3 del diapasón con la configuración IN - OUT.....	44
Figura 51: Medida del modo 4 del diapasón con la configuración IN - OUT.....	44
Figura 52: Medida completa de los modos con excitación fuera de plano y recepción en plano	45
Figura 53: Medida del modo 1 del diapasón con la configuración OUT - IN.....	45
Figura 54: Medida del modo 2 del diapasón con la configuración OUT - IN.....	46
Figura 55: Medida del modo 3 del diapasón con la configuración OUT - IN.....	46
Figura 56: Dimensiones de la caja de resonancia del diapasón.....	47
Figura 57: Medidas en la caja de resonancia del diapasón.....	47
Figura 58: Medida experimental de la caja de resonancia del diapasón	48
Figura 59: Modelo de la placa rectangular con sus dimensiones	50
Figura 60: Modelo geométrico de la placa empleado para la simulación numérica	52
Figura 61: Primer modo de la placa obtenido con simulación numérica	53
Figura 62: Segundo modo de la placa obtenido con simulación numérica	53
Figura 63: Tercer modo de la placa obtenido con simulación numérica.....	54
Figura 64: Cuarto modo de la placa obtenido con simulación numérica	54
Figura 65: Quinto modo de la placa obtenido con simulación numérica	55
Figura 66: Montaje experimental de la placa con los puntos de excitación (azul) y recepción (rojo).....	56
Figura 67: Medida de los modos de la placa en el punto 1	56
Figura 68: Medida de los modos de la placa en el punto 1	57
Figura 69: Medida de los modos de la placa en el punto 3	57
Figura 70: Medida de los modos de la placa en el punto 4	58
Figura 71: Medida de los modos de la placa en el punto 5	58
Figura 72: Forma modal del primer modo experimental de la placa.....	59
Figura 73: Forma modal del segundo modo experimental de la placa.....	60
Figura 74: Forma modal del tercer modo experimental de la placa	60
Figura 75: Forma modal del cuarto modo experimental de la placa	61
Figura 76: Forma modal del quinto modo experimental de la placa.....	61

Índice de tablas

Tabla 1: Resumen de los tipos de vibraciones [1]	9
Tabla 2: Coeficientes para la obtención de los modos en placas rectangulares con condiciones libres [7]	20
Tabla 3: Frecuencias obtenidas analíticamente de los modos en plano del diapasón	33
Tabla 4: Frecuencias de los modos del diapasón obtenidas con simulación numérica ...	34
Tabla 5: Resumen de las frecuencias modales del diapasón obtenidas con cada método	49
Tabla 6: Parámetros característicos de la placa utilizada para las medidas.....	51
Tabla 7: Resultados analíticos de las 5 primeras frecuencias modales de la placa rectangular libre.....	51
Tabla 8: Frecuencias de los 5 primeros modos de la placa obtenidas mediante simulación numérica	52
Tabla 9: Resumen de las frecuencias de los modos detectados experimentalmente	59
Tabla 10: Resumen de las frecuencias modales de la placa obtenidas con los diferentes métodos.....	62

Diseño de un banco vibrométrico de medida de ondas flexurales de placas delgadas

1 Introducción

Un vibrómetro Láser Doppler es un dispositivo de medida para la caracterización de oscilaciones mecánicas (vibraciones) de una estructura en una o varias dimensiones. Este instrumento contiene un láser que se enfoca a la superficie a medir y debido al efecto Doppler, la frecuencia de la luz reflejada varía al producirse un desplazamiento. Este fenómeno provoca una variación de frecuencia (corrimiento Doppler) que es medible. El dispositivo tiene incorporado un interferómetro que convierte esa variación en una señal eléctrica digital. Este dispositivo permitirá realizar el estudio vibracional de diversas estructuras a lo largo de este trabajo, empleando para ello el análisis modal. A continuación, se presentan los objetivos, metodología y etapas del trabajo realizado.

1.1 Objetivos principales

El primer objetivo principal de este trabajo consiste en la puesta a punto del sistema de medición de vibraciones (Vibrómetro Láser Doppler) mediante la realización de diversas pruebas al conjunto de dispositivos que conforman el sistema. Esto resulta de gran necesidad al tratarse de un sistema de reciente adquisición. Dentro de dicho objetivo se encuentra la caracterización del Vibrómetro Laser Doppler (LDV) incluyendo las variaciones debidas a las distancias y las pruebas de diferentes tipos de medidas con el sistema. También se abordará la caracterización de los sistemas de acoplamiento y sujeción de las estructuras simples analizadas.

En segundo lugar, se realizará la caracterización de las vibraciones de diferentes estructuras simples. Primeramente, se utilizará un diapasón y tras esto, una placa delgada rectangular. Para ello, se realizará el diseño y concepción del protocolo de medidas para el análisis modal de estructuras simples. Tras esto, se procederá a la realización del análisis teórico, simulación con elementos finitos y medidas experimentales de cada estructura para su posterior comparación de resultados.

1.2 Metodología del trabajo

La metodología empleada durante el trabajo ha sido la realización previa de un análisis bibliográfico de las vibraciones de las estructuras analizadas. Una vez estudiados sus conceptos vibracionales, se procede a la realización de los cálculos teóricos de los modos de cada estructura, seguido por la realización de simulaciones con elementos finitos y la posterior realización de las medidas experimentales con el vibrómetro para la comparación de los resultados obtenidos en todos los métodos que permitirá corroborar si las medidas se realizaron correctamente.

1.3 Etapas

En este apartado se presentan las etapas seguidas en la realización del trabajo:

- Revisión bibliográfica (30h)
- Caracterización del Vibrómetro Láser Doppler (30h)
- Puesta a punto del banco de medidas de vibraciones en líneas y planos (40h)
- Análisis del acoplamiento y sujeción de las estructuras vibrantes (30h)
- Diseño del protocolo de medida de análisis modal de estructuras simples (40h)
- Estudio de caracterización de las estructuras simples en vibración (70h)
- Redacción de la memoria (40h)
- Preparación de la presentación (10h)

A continuación, se presenta un diagrama resumen del proceso seguido en el trabajo realizado:



Figura 1: Diagrama de las etapas seguidas en la realización del TFM

2 Medición de vibraciones

Para comenzar, resulta de gran importancia introducir conceptos teóricos sobre las vibraciones y sus métodos de medida. En este trabajo se va a abordar su medición mediante el uso de un Vibrómetro Láser Doppler, con el cual se cuenta en los laboratorios de Física Aplicada del Campus de Gandia, y el análisis modal en diferentes estructuras simples. A lo largo de este apartado, se presentarán dichos conceptos generales para la medida de vibraciones, conceptos específicos sobre el método de medida empleado y posteriormente un análisis concreto de los conceptos teóricos necesarios para entender las vibraciones de las estructuras empleadas, que en este caso se trata de un diapasón y una placa delgada.

2.1 Teoría básica de vibraciones

Resulta necesario comenzar este apartado introduciendo los conceptos básicos para comprender qué son las vibraciones. Cuando se habla de vibración se refiere a un movimiento repetitivo de objetos relativo a una posición estacionaria de referencia llamada equilibrio. Esta repetición puede no ser constante y no tiene por qué tener una copia. Se trata de un fenómeno que afecta mucho a la naturaleza de los diseños de ingeniería, ya que las propiedades vibratorias de los dispositivos utilizados suelen ser factores limitantes en su rendimiento. La vibración puede ser perjudicial y a evitar o útil y deseada. En ambos casos, conocer cómo analizarla, medirla y controlarla es deseable. Algunos ejemplos típicos de vibraciones pueden ser el movimiento de una cuerda, de las alas de un avión en pleno vuelo o de un edificio debido al viento o un terremoto.

La explicación física de este fenómeno está relacionada con la interacción entre la energía potencial y la energía cinética, por lo que resulta necesaria la presencia de un medio que almacene y libere ambas energías. Un ejemplo típico de un sistema vibratorio es el de una masa conectada a un muelle horizontal. La masa es el componente responsable de la energía cinética, mientras que el muelle es de la energía potencial. Otro ejemplo típico es un péndulo, en el que no hay una componente de energía potencial como el muelle, ya que la masa hace un papel doble para ambas energías. Este es un ejemplo claro de que el sistema vibratorio debe tener componentes de masa y rigidez.

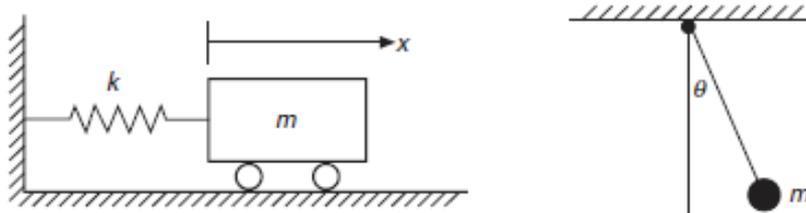


Figura 2: Ejemplo de sistemas vibratorios simples [1]

El estudio de las vibraciones se puede clasificar en los términos que se recogen en la siguiente tabla:

Término	Tipo de vibración	Descripción
Excitación externa	Libre	Inducida solo por una excitación inicial
	Forzada	Sujeta a una o varias excitaciones externas continuas
Presencia de amortiguación	No amortiguada	Sin pérdida o disipación de energía
	Amortiguada	Con pérdida de energía

Tabla 1: Resumen de los tipos de vibraciones [1]

En este trabajo se van a estudiar las vibraciones de dos estructuras simples mediante una excitación inicial externa con pérdida de energía, por lo que estaríamos hablando de vibraciones libres no amortiguadas.

2.2 Análisis y ensayo modal

Tras la introducción básica sobre vibraciones, se va a presentar el método utilizado para el estudio de este fenómeno en las estructuras. Este método, llamado análisis modal, es el proceso de obtención de las características dinámicas de un sistema en forma de parámetros como frecuencias naturales y formas modales que permiten obtener un modelo matemático para modelar su comportamiento dinámico. El modelo formulado es llamado modelo modal y la información obtenida es conocida como datos modales.

El análisis modal se basa en que la respuesta vibratoria de un sistema lineal invariante en el tiempo puede expresarse como la combinación lineal de un conjunto de movimientos armónicos simples llamados modos de vibración. Los modos naturales de vibración son inherentes al sistema dinámico y están completamente determinados por sus propiedades físicas (masa, rigidez, amortiguamiento) y su distribución espacial. Cada modo es descrito en función de sus parámetros modales como la frecuencia natural y el patrón de desplazamiento característico llamado forma modal. El grado de participación de cada modo en la vibración total es determinado por las propiedades de la fuente de excitación y por las formas modales del sistema.

El análisis modal comprende técnicas experimentales y teóricas. La parte teórica está basada en un modelo físico de un sistema dinámico que comprende sus propiedades de masa, rigidez y amortiguación, las cuales pueden darse en forma de ecuaciones diferenciales parciales. El análisis mediante elementos finitos permite la discretización de casi cualquier estructura dinámica lineal y, por lo tanto, ha mejorado mucho la capacidad y el alcance del análisis modal teórico. Por otro lado, el rápido desarrollo en las últimas décadas de métodos de adquisición de datos y capacidades de procesamiento ha dado lugar a grandes avances en el ámbito experimental del análisis, que es conocido como ensayo modal.

El ensayo modal es una técnica experimental usada para derivar el modelo modal de un sistema vibratorio. La base teórica consiste en establecer una relación entre la respuesta de vibración en una posición y la excitación en la misma u otra posición en función de la frecuencia de excitación. Esta relación que suele ser una función matemática compleja es conocida como respuesta en frecuencia. La técnica de ensayo modal consiste en medir las respuestas en frecuencia de la estructura. La medición puede hacerse simplemente colocando una excitación medida en una posición de la estructura, en ausencia de otras excitaciones y midiendo las respuestas de vibración en una o más localizaciones. La excitación puede ser con un barrido de las frecuencias seleccionadas, sinusoidal, ruido aleatorio o blanco. Normalmente se mide mediante un transductor de fuerza en el punto de excitación mientras que la respuesta se mide mediante acelerómetros o vibrómetros para posteriormente enviar ambas señales a un analizador que calculará la respuesta en frecuencia del sistema.

En resumen, el análisis modal experimental implica tres fases: preparación del ensayo, medidas de respuesta en frecuencia e identificación de parámetros modales. La preparación del ensayo implica la selección de una estructura de sujeción, el tipo de excitación, la ubicación de la excitación, el hardware para medir las respuestas, determinación de un modelo de geometría estructural que consiste en los puntos de respuesta a medir y la identificación de mecanismos que podrían conducir a medidas inexactas.

2.3 Introducción al Vibrómetro Láser Doppler

Tras exponer el método de análisis y conceptos de vibraciones, se va a introducir el dispositivo utilizado para la realización del ensayo modal. La aparición del Vibrómetro Láser Doppler (LDV) han supuesto un gran avance en las medidas de vibraciones ampliando las capacidades de medida con respecto a los sensores tradicionales de vibraciones, ya que permite medidas remotas, no intrusivas y con gran resolución espacial reduciendo el tiempo de ensayo y mejorando el rendimiento.

En la década de 1980, aparecieron los primeros modelos de LDV, pero su limitada sensibilidad y la baja relación señal a ruido (SNR) permitía medidas solo en superficies muy difusivas o utilizando una cinta retro-difusiva en la zona a medir. A principios de 1990, los desarrollos de hardware y software aumentaron el rendimiento y utilidad de la instrumentación haciendo que más investigadores comenzaran a utilizarlo. En muchos casos, ha demostrado ofrecer ventajas significativas respecto a los acelerómetros en cuanto a los resultados obtenidos. Empleando un vibrómetro láser simplemente como un transductor en un único punto es posible realizar mediciones precisas y no intrusivas, ya que los resultados no se verán afectados por errores debidos a la carga de masa del acelerómetro que resultaba relevante para la estimación de parámetros modales, especialmente en ensayos con estructuras ligeras o pequeñas o materiales no lineales muy amortiguados (caucho).

Además, el LDV es una técnica de medida remota en el sentido en que también puede medirse si se coloca lejos del objeto a medir con suficiente precisión a una distancia mayor de 30m. Esta característica no es común en todos los sensores sin contacto (como los de triangulación) y parecer ser muy útil para extender las aplicaciones del análisis de vibraciones de grandes estructuras.

A parte del gran número de aplicaciones en las que se ha empleado el LDV simplemente para sustituir a los acelerómetros, se han encontrado resultados interesantes también en el campo de la investigación avanzada. La medición de las vibraciones monitorizando la translación o rotación de objetos y el escaneo continuo a lo largo de líneas para determinar las formas modales son algunos ejemplos. Este tipo de avances ofrece soluciones efectivas para muchos problemas en varios campos de aplicación, como en el estudio del mecanismo en condiciones operativas, detección de daños, caracterización de materiales y también en algunas ramas biomédicas.

2.3.1 Funcionamiento del Vibrómetro Láser Doppler

Esta técnica se utiliza mayoritariamente para la medida directa de la velocidad de objetos en movimiento. El vibrómetro contiene un láser de onda continua, que se enfoca a la superficie por medir. Debido al efecto Doppler, la frecuencia de la luz láser que se refleja varía si se desplaza la superficie enfocada. El detector recibe simultáneamente la frecuencia de excitación y la frecuencia producida por el efecto Doppler y estas dos ondas, cuando se añaden coherentemente, producen un batimiento. Este fenómeno acústico se genera al interferirse entre sí dos ondas sinusoidales con frecuencias ligeramente distintas. La frecuencia de batimiento es igual a la diferencia de las frecuencias de las dos ondas originarias. Esta variación de la frecuencia o efecto Doppler se mide en el vibrómetro con la ayuda de un interferómetro, el cuál hace una demodulación del cambio de frecuencia y lo transforma en una señal de voltaje. En la figura 3 se muestra un ejemplo de medida en un objeto con velocidad constante, con los componentes del vibrómetro Láser Doppler que participan en la medida.

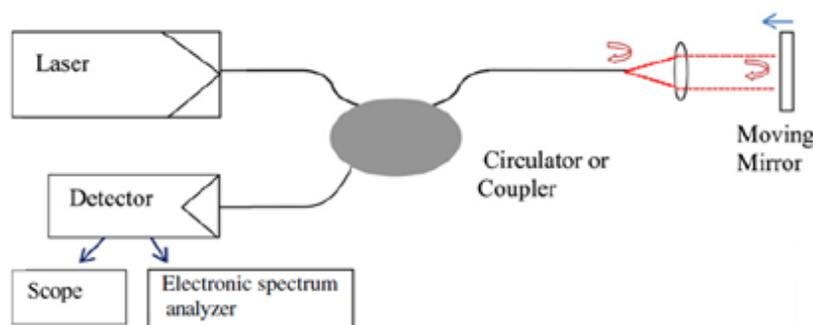


Figura 3: Ejemplo de medida con Vibrómetro Láser Doppler [2]

2.3.2 Características de la medida con el Vibrómetro Láser Doppler

Tras haber explicado el funcionamiento del dispositivo vibrométrico es necesario tener en cuenta las características del sistema a la hora de realizar mediciones. A continuación, se presentan conceptos sobre ellas para la correcta medición.

2.3.2.1 Resolución

Según las especificaciones de los sistemas disponibles en el mercado, la resolución es compatible con las aplicaciones mecánicas convencionales. Los decodificadores de velocidad analógica tienen una resolución de $0.3 \mu\text{m/s}$, mientras que los digitales llegan hasta los $0.01 \mu\text{m/s}$, pero al igual que todos los sistemas digitales, sus prestaciones dependen del rango de medición y del ancho de banda de la frecuencia.

2.3.2.2 Incertidumbre de medida

Las fuentes de incertidumbre de medida en esta técnica están relacionadas con los componentes ópticos y con el procesador de señal analógico. El primero está asociado con la longitud de onda del láser que tiene una incertidumbre menor al 0.0001% y con la incertidumbre del fotodetector, pero sin llegar a afectar a la señal Doppler.

Por otra parte, el procesamiento de señales analógicas influye en la incertidumbre global, ya que la ganancia del demodulador está determinada por su antigüedad y desviación térmica. Para evitarlo, se han desarrollado procesadores de señales digitales. Teniendo en cuenta todos los factores, la incertidumbre de medida estará en torno al $1 - 1.5\%$.

2.3.2.3 Incertidumbre de dirección

El vibrómetro mide la componente de velocidad a lo largo de la zona de visión del láser, por lo que la incertidumbre de dirección viene determinada por la alineación del rayo láser con la estructura a medir. Este hecho le otorga importancia a la revisión de la dirección del haz, que debe ser perpendicular a la superficie a medir.

2.3.2.4 Relación señal a ruido (SNR)

Las mayores limitaciones de un vibrómetro en cuanto a la señal recibida son debidas a efectos del moteado y la baja señal a ruido recibida en superficies con poca difusividad. El moteado es la interferencia que se genera cuando un haz de luz coherente interactúa con una superficie rugosa. Las ondas constitutivas del haz son difundidas por la superficie e interfieren generando zonas de claros y oscuros. Esto influye en el procedimiento de demodulación al superponerse la interferencia con la señal deseada. Como consecuencia, este fenómeno puede provocar caídas momentáneas de la señal obtenida por el vibrómetro a modo de ruido.

2.3.2.5 Condiciones ambientales

La señal recibida por el vibrómetro puede verse afectada por el polvo presente en el entorno de medición y, además, por la aparición de una variación del índice de refracción debida a la oscilación de presión en el medio atravesado por el haz láser.

2.3.2.6 Distancia de separación (stand-off)

La mayor distancia de separación que puede utilizarse para efectuar una buena medición se indica en los manuales de sistemas comerciales como 300 m, pero depende de las propiedades de retrodispersión de la superficie medida. Si esta última está recubierta con algún material retrorreflectante que maximiza el nivel de señal, se puede alcanzar la distancia de medición máxima. Si la superficie es menos reflectante no puede medirse desde una distancia superior a pocos metros. Esto es una gran limitación para aplicaciones del como aeronáutica donde el vibrómetro tiene que usarse en estructuras grandes como un fuselaje cuyas superficies son a menudo negras, un color no adecuado para la difusión de la luz. En la figura 4 se muestra un ejemplo de los efectos que puede provocar la distancia de separación en la señal recibida, llegando incluso a aparecer mínimos de visibilidad donde la señal disminuye si no es bien ajustada.

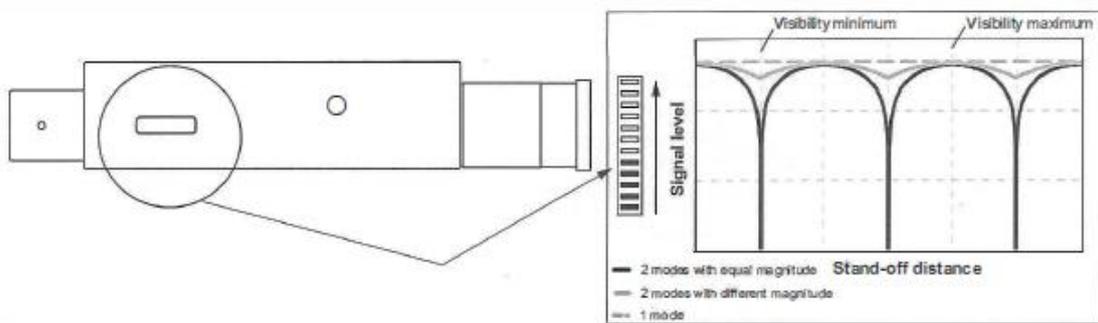


Figura 4: Ejemplo de los efectos de la distancia de separación en el nivel de señal recibida [3]

2.3.2.7 Resolución espacial

La resolución espacial alcanzable por medio de un LDV está relacionada con el tamaño de punto mínimo del haz de láser, que va desde aproximadamente 25 μm para distancias de stand-off de 200 mm a 1,5 mm para distancias de 10 m, en el dispositivo empleado en este trabajo. La resolución espacial está determinada también por la resolución del sistema robótico empleado para el movimiento. En la figura 5 se muestra un esquema que aclara los conceptos de resolución espacial y distancia de stand-off.

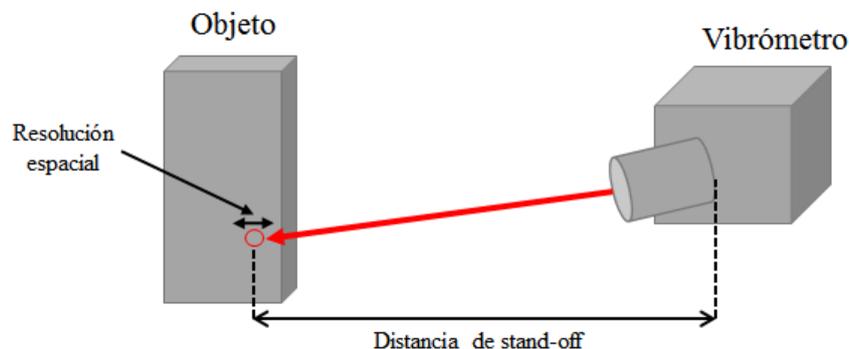


Figura 5: Ejemplo de distancia de separación y resolución espacial de un objeto

2.4 Introducción al análisis vibracional del diapasón

La invención del diapasón se atribuye al trompetista británico John Shore de la corte del rey James II de Inglaterra en 1711. En su tiempo era un famoso músico y Handel, que era el compositor de la corte, escribió muchas de sus más floridas piezas de trompeta para él. En uno de sus conciertos se rompió el labio quedando ya incapacitado para volver a tocar la trompeta. Fue entonces cuando comenzó a prestar atención al laúd para el cual ideó el diapasón. John Shore le dio a Handel uno de sus diapasones que emitía la nota La a 422.5 Hz (512 vibraciones por segundo), lo cual sirvió de tono estándar durante más de 200 años para grandes compositores como Mozart o Beethoven.

El diapasón es un resonador acústico con forma de tenedor utilizado para producir un tono fijo. La razón por la cual es tan utilizado es que, a diferencia de otros resonadores, produce un tono muy puro, concentrando la mayor parte de la energía vibratoria en la frecuencia fundamental y un poco en los sobretonos. Esto es debido a que el primer sobretono se encuentra muy alejado, a 6.25 veces la fundamental, mientras que en una cuerda o viga de metal está solo una octava (2 veces) por encima de la fundamental, por lo que las vibraciones tienden a ser una mezcla de las frecuencias de la fundamental y sus sobretonos. Además de estar alejados, los sobretonos del diapasón suelen disiparse rápido dejando solo una onda senoidal pura a la frecuencia fundamental.

La forma de tenedor con 2 puntas también es debida a que cuando vibra en su modo principal, el mango lo hace hacia arriba y hacia abajo mientras que las puntas se separan y se juntan, habiendo un nodo en la base de cada una. El movimiento del mango es pequeño permitiendo que se pueda sostener el diapasón sin amortiguar la vibración. Éste además se encarga de transmitir la vibración a una caja resonadora de madera que aumenta el débil sonido que emite el diapasón. Esta debilidad es debida a que las ondas sonoras de cada punta están desfasadas 180° la una con la otra, por lo que se interfieren y se anulan entre ellas. El diapasón suele venir afinado de fábrica y su tono y frecuencia se suele estampar en ellos.

2.4.1 Conceptos teóricos vibracionales

El diapasón suele fabricarse generalmente de acero o de aluminio y el largo de sus puntas suele determinar la frecuencia fundamental. Como primera aproximación, el diapasón se puede considerar que está formado por dos vigas en voladizo unidas a la base. Los modos de vibración del diapasón se suelen clasificar en cuatro grupos: modos simétricos en plano, modos antisimétricos en plano, modos simétricos fuera de plano y modos antisimétricos fuera de plano como se puede ver en la figura 6.

	SIMÉTRICOS	ASIMÉTRICOS
EN PLANO		
FUERA DE PLANO		

Figura 6: Tipos de modos de vibración del diapasón

2.4.1.1 Modos en plano

Los modos en plano son los más comunes. El primero de ellos es conocido como modo fundamental y es el más asociado con el diapasón, ya que lleva impresa su frecuencia en la base. En este modo las dos puntas se juntan y se separan alternativamente doblándose como vigas fijadas en la base y libres en el otro extremo. Se trata de un modo simétrico porque las dos puntas forman una imagen en espejo de la otra.

En este modo fundamental, aunque parezca que la base está parada, en realidad, está vibrando hacia arriba y hacia abajo en la frecuencia fundamental y en su segundo armónico, pero el movimiento que realiza es muy pequeño y difícil de percibir.

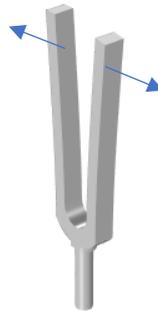


Figura 7: Modo fundamental en plano [4]

El segundo modo más reconocible es el conocido como modo Clang. Este modo representa la segunda forma modal de una viga fija-libre y tiene una frecuencia mucho más alta de 6.25 veces la fundamental. El tono Clang suena más fuerte que la fundamental porque el oído humano es más sensible a frecuencias entre 1 kHz y 4 kHz. Se trata también de un modo simétrico con la imagen espejo de cada punta.

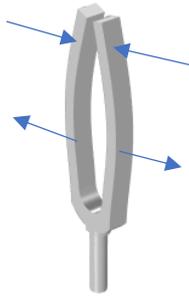


Figura 8: Modo Clang en plano [4]

Además de los modos simétricos mencionados, el diapasón tiene una familia de modos en plano antisimétricos similar a los modos de una viga sólida fija-libre. En vez de oscilar cada punta como una viga separada, todo el diapasón vibra como un objeto. El primero de los modos de esta familia tiene una frecuencia inferior a la del modo fundamental. En este caso, las puntas se mueven a la par sin formar una imagen espejo.

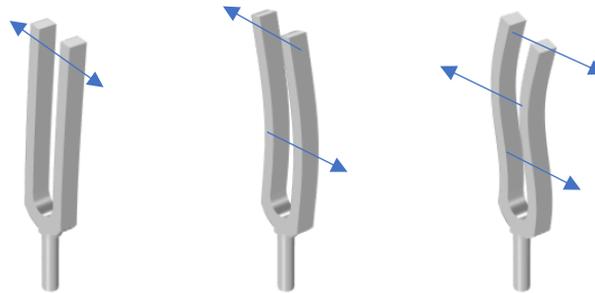


Figura 9: Modos antisimétricos en plano [4]

2.4.1.2 Modos fuera de plano

Otra familia de modos del diapasón menos conocida es la de los modos de vibración fuera de plano. En el primer caso de los modos simétricos fuera de plano, el diapasón actúa como una viga sólida que vibra perpendicularmente al plano de las puntas. La frecuencia más baja de ellos es cercana a la frecuencia fundamental.

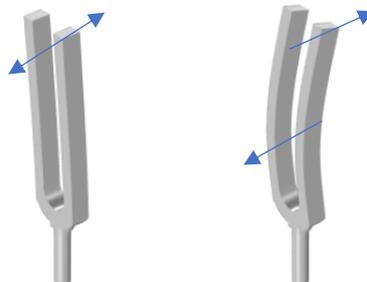


Figura 10: Modos simétricos fuera de plano [4]

El último caso es el de los modos fuera de plano antisimétricos. El diapasón, cuando está fijo en la base, mostrará estos modos donde las puntas oscilan perpendiculares al plano

del diapasón, pero en direcciones opuestas entre sí. Las puntas se retuercen adelante y atrás como los modos de torsión de una viga sólida.

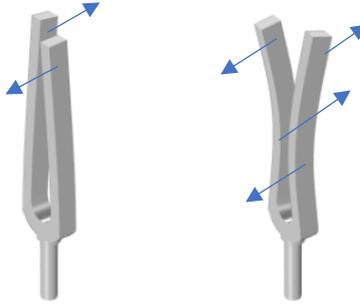


Figura 11: Modos antisimétricos fuera de plano [4]

2.4.1.3 Frecuencias propias teóricas

Como se ha explicado en apartados anteriores, en los modos en plano **simétricos**, el movimiento de las puntas del diapasón es similar al de una viga en voladizo cuyas frecuencias modales siguen la siguiente ecuación [5]:

$$f_n = \left(\frac{\pi K}{8L^2}\right) \sqrt{\frac{E}{\rho}} [1.194^2, 2.988^2, 5^2, 7^2, \dots, (2n - 1)^2] \quad (1)$$

donde E es el módulo de Young, ρ es la densidad, L es la longitud de las puntas y K es el radio de giro de la sección de las puntas del diapasón. En este caso al tratarse de una sección rectangular, el radio de giro será $\frac{L}{\sqrt{12}}$ siendo L el espesor de la punta.

En el caso de los modos **antisimétricos** en plano, el diapasón se dobla como una viga con extremos libres con frecuencias modales que se obtienen con la siguiente ecuación [5]:

$$f_n = \left(\frac{\pi K}{8L^2}\right) \sqrt{\frac{E}{\rho}} [3.011^2, 2.988^2, 5^2, 7^2, \dots, (2n + 1)^2] \quad (2)$$

Los modos simétricos y antisimétricos fuera de plano se espera que se comporten como los modos en plano, aunque la rigidez de flexión sea diferente y por lo tanto las frecuencias son también diferentes de los modos en plano.

2.5 Introducción al análisis vibracional de placas delgadas

Las placas delgadas rectangulares son estructuras planas compuestas por dos planos paralelos, llamados caras, y una superficie poliédrica llamada borde. Los bordes del poliedro son perpendiculares a las caras planas. La distancia entre las caras se denomina espesor (h) de la placa y se asume que es pequeño comparado con otras dimensiones características de las caras (longitud y anchura). Las caras de la placa tienen límites rectos y las cargas dinámicas soportadas por las placas son perpendiculares a las caras.

La acción de carga de una placa es similar a la de las vigas, por lo que las placas pueden ser aproximadas a una rejilla de un número infinito de vigas, dependiendo de la rigidez de flexión de las estructuras. Esto permite que sean estructuras ligeras, lo cual ofrece numerosas ventajas económicas.

Una placa resiste cargas transversales exclusivamente en forma de flexión [6]. Las propiedades flexurales de una placa dependen en gran medida de su espesor en comparación con otras dimensiones. Como estas cargas son aplicadas en ambas direcciones y la rigidez de torsión es bastante significativa, las placas son más rígidas que una viga con envergadura y espesor comparable. Estas características hacen que las placas combinen un peso ligero y una forma eficiente con alta capacidad de carga y efectividad económica y tecnológica.

Debido a estas ventajas expuestas, las placas delgadas son utilizadas frecuentemente en todos los campos de la ingeniería. Se utilizan en estructuras arquitectónicas, puentes, estructuras hidráulicas, pavimentos, contenedores, aviones, misiles, barcos, instrumentos, piezas de máquinas, etc.

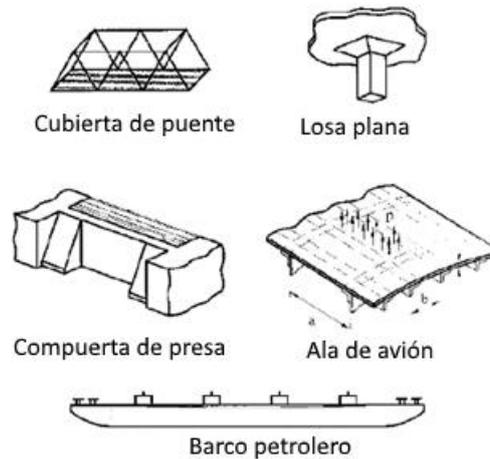


Figura 12: Ejemplos de aplicaciones de uso de placas delgadas [6]

En cuanto al modelo analítico, resulta necesario introducir la ecuación diferencial clásica de movimiento para la deflexión transversal (w) de una placa [7] que es la siguiente:

$$D\nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Donde t es el tiempo, $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ donde ∇^2 es el operador Laplaciano, ρ la densidad de masa por unidad de área (masa distribuida) y D es la rigidez flexural que es definida como:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Siendo E el módulo de Young, h el espesor de la placa y ν el coeficiente de Poisson.

Cuando se asumen vibraciones libres el movimiento se expresa como:

$$w = W \cos(\omega t)$$

donde ω es la frecuencia circular expresada en radianes/unidad de tiempo y W es una función de las coordenadas de posición. Substituyendo las ecuaciones comentadas:

$$(\nabla^4 - k^4)W = 0$$

Donde k es un parámetro de conveniencia definido como

$$k^4 = \frac{\rho\omega^2}{D}$$

Finalmente, las expresiones factorizadas quedarían como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2)W &= 0 & \nabla^2 W_1 + k^2 W_1 &= 0 \\ & & \nabla^2 W_2 + k^2 W_2 &= 0 \end{aligned}$$

Una vez introducidos todos estos términos y ecuaciones generales de la teoría clásica de placas, se pasa a analizar el caso concreto de las placas rectangulares. Existen un total de 21 casos que combinan las condiciones de contorno simple clásicas en los 4 bordes de la placa que son fijo (C), simplemente apoyado (SS) o libre (F). Los parámetros de frecuencia son expresados en términos de $\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$, donde a es la dimensión de longitud de la placa y no depende del coeficiente de Poisson, a no ser que uno de los bordes de la placa esté en condiciones libres. Sin embargo, dado que D contiene ν , las frecuencias dependen de ν en todos los casos.

El caso de condiciones completamente libres tiene múltiples referencias [13]. Las primeras observaciones de los patrones nodales fueron obtenidas por Chladni en 1787, inspirando muchos trabajos posteriores. En 1909 Ritz utilizó también este caso para demostrar su famoso método directo que utiliza el principio de Rayleigh para obtener las frecuencias de vibración. Este método fue utilizado por Warburton para obtener las fórmulas de los 21 casos posibles asumiendo que las formas modales son productos de funciones propias de vigas vibrantes [7]:

$$W(x, y) = X(x)Y(y)$$

Donde $X(x)$ e $Y(y)$ son elegidas como las formas modales fundamentales de vigas que tienen las condiciones de contorno de la placa. Para el caso de condiciones libres en $x = 0$ y $x = a$, siendo a una dimensión de la placa, las ecuaciones son las siguientes [7]:

$$\begin{aligned} X(x) &= 1 & (m = 0) & & X(x) &= 1 - \frac{2x}{a} & (m = 1) \\ X(x) &= \cos \gamma_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\gamma_1/2)}{\sinh(\gamma_1/2)} \cosh \gamma_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) & (m = 2, 4, 6 \dots) \\ X(x) &= \sin \gamma_2 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sin(\gamma_2/2)}{\sinh(\gamma_2/2)} \sinh \gamma_2 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) & (m = 3, 5, 7 \dots) \end{aligned}$$

Donde los valores de γ_1, γ_2 son las raíces de:

$$\tan(\gamma_1/2) + \tanh(\gamma_1/2) = 0 \qquad \tan(\gamma_2/2) - \tanh(\gamma_2/2) = 0$$

Las funciones $Y(y)$ son similarmente elegidas por las condiciones en $y = 0$ y en $y = a$ reemplazando la x por y , a por b y m por n en las ecuaciones anteriores. Los indicadores m y n son el número de líneas nodales de los ejes x e y respectivamente. La frecuencia ω viene dada por la siguiente ecuación [7], siendo a y b las dimensiones de la placa:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 D}{a^4 \rho} \left\{ G_x^4 + G_y^4 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 [\nu H_x H_y + (1 - \nu) J_x J_y] \right\} \quad (3)$$

Donde G_x, H_x, J_x son funciones determinadas según las condiciones de $x = 0$ y $x = a$ y los valores para condiciones libres de la tabla que aparece a continuación. Mientras que G_y, H_y, J_y se obtienen reemplazando m por n y x por y utilizando los mismos valores.

m	G_x	H_x	J_x
0	0	0	0
1	0	0	$12/\pi^2$
2	1.506	1.248	5.017
3, 4, 5...	$m - 1/2$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{6}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$

Tabla 2: Coeficientes para la obtención de los modos en placas rectangulares con condiciones libres [7]

En un sentido matemático los primeros modos propios tienen frecuencias cero y corresponden a la rígida traslación de la estructura en la dirección transversal y a las rotaciones rígidas de la placa alrededor de los ejes de simetría [13].

Hay que remarcar, que este método basado en el movimiento de vigas uniformes vibrantes realiza una aproximación exacta al movimiento de la placa en el caso de condiciones de contorno fijas y simplemente apoyadas, pero con condiciones libres solo consigue aproximarse haciendo que el método pierda precisión cuando hay uno o más ejes en condiciones libres [7].

Resulta necesario aclarar la terminología referida a la simetría de los modos. Los modos simétricos en el eje Y son aquellos que tienen un eje de simetría con respecto a ese eje de coordenadas produciéndose una imagen espejo en la otra mitad de la estructura y los modos antisimétricos en Y tendrían también un eje de simetría en ese eje de coordenadas, pero no se produciría una imagen espejo. La misma clasificación se puede producir en el eje X. En los casos que existen dos ejes de simetría geométrica existirán 4 tipos de simetría de modos. En la figura 13 se presentan ejemplos de los tipos de simetría existente en una placa.

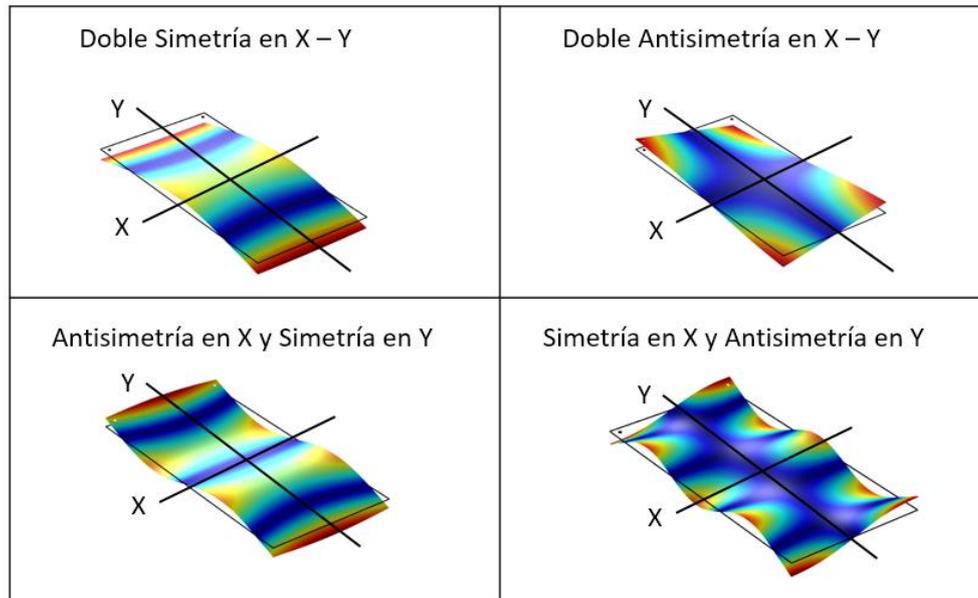


Figura 13: Tipos de simetrías en placas rectangulares

La simetría de un rectángulo no es la misma que la del cuadrado, ya que desaparecen los modos diagonales. En el caso del cuadrado hasta 4 líneas nodales pueden pasar por el centro mientras que en el rectángulo no puede haber más de 2 líneas nodales en el centro [8]. En la figura 14 se muestran las clases de sistemas nodales del cuadrado y rectángulo clasificadas por los tipos de líneas nodales en el centro.

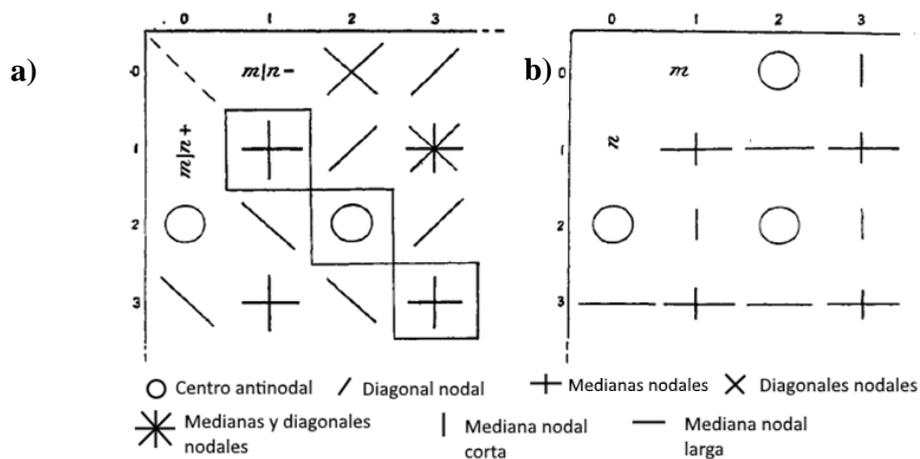


Figura 14: Tipos de sistemas nodales centrales del cuadrado (a) y rectángulo (b) [8]

3 Configuración de medida

En el tercer apartado, se presentarán los dispositivos empleados para la realización de las medidas vibrométricas, su proceso de ajuste y las diferentes condiciones que influyen en las medidas a realizar.

3.1 Instrumentos de medida

Las medidas se realizaron con un excitador (*Shaker*) marca The Modal Shop modelo 2007E que cuenta con un amplificador de potencia marca The Modal Shop modelo 2100E21. El vibrómetro Láser Doppler es el modelo Polytec CLV-2534-2 y el sistema con el que se cuenta para moverlo es un motor de ejes National Instruments MID-7604/7602 y unos ejes de movimiento 3D Owis GmbH. El sistema de generación y recepción de la señal está formado por un chasis PXI-1033, una tarjeta generadora PXI-5412, una tarjeta capturadora PXI-5102 y controlador del movimiento de los ejes PXI-7334. Por último, el software utilizado para el control del sistema completo de vibrometría y la obtención de los datos de medida ya ha sido desarrollado e implementado a través de LabVIEW en el laboratorio. En la figura 15 se muestra un esquema del sistema completo de vibrometría utilizado para la realización de las mediciones de este trabajo.

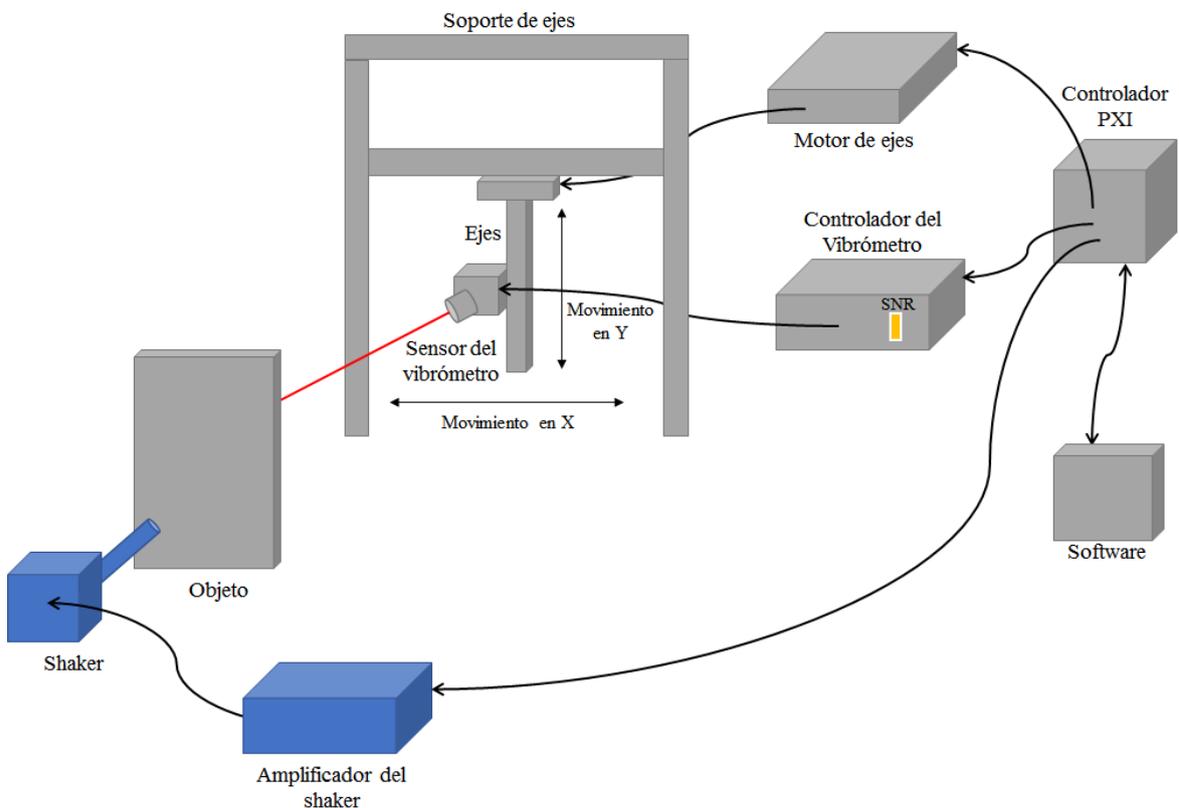


Figura 15: Conjunto de dispositivos para la medición mediante Vibrometría Láser Doppler

3.2 Software de adquisición y generación de señal

Además del conjunto de dispositivos de medida, el software que se emplea para generar y adquirir las señales y controlar todos los dispositivos ha sido desarrollado para su uso específico en este sistema, por lo que se encuentra en fase de desarrollo. Esta aplicación permite controlar los ejes que mueven el sensor del vibrómetro y además realizar múltiples tipos de medidas que pueden ser visualizadas en pantalla antes de ser exportadas para su análisis. Desde ella también se controlan los parámetros de configuración del vibrómetro, la tarjeta generadora que envía la señal al excitador y la tarjeta de adquisición para la representación de la señal recibida. En la figura 16 se muestra el panel frontal de la aplicación utilizada para las medidas.

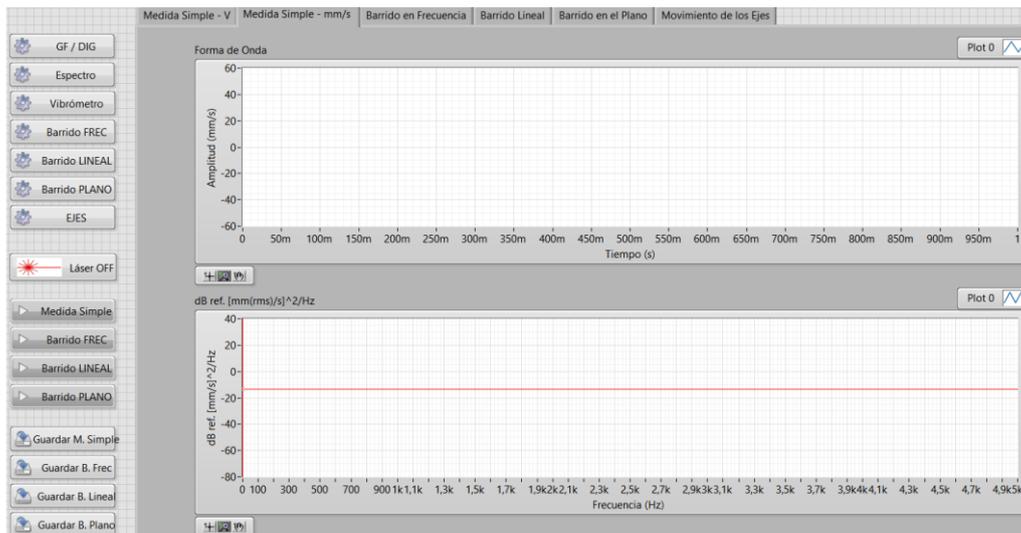


Figura 16: Panel de control del software de control para las medidas vibrométricas

Dentro de las medidas que se pueden realizar existen medidas simples, barridos en frecuencia, barridos lineales y barridos en el plano. Las medidas simples permiten observar la amplitud de la señal recibida en el tiempo de excitación y su espectro en frecuencia. El barrido en frecuencia realiza medidas entre un mínimo y máximo de frecuencia con medidas en cada paso de frecuencia elegido, mostrando posteriormente las amplitudes máximas en una gráfica por frecuencias. El barrido lineal permite realizar una medida moviendo el vibrómetro a lo largo de una línea en el eje de coordenadas (eligiendo mínimo, máximo y paso de posición) en una única frecuencia de excitación, representando posteriormente las amplitudes de cada punto de la línea. De forma similar, el barrido en plano realiza esta operación, pero haciendo el movimiento en 2 ejes de coordenadas elegidos mostrando las amplitudes de cada punto del plano.

Las unidades de amplitud que permite la aplicación en las que se representan y exportan las señales son valores de tensión en V, densidad espectral de potencia con unidades de $\frac{mmrms}{s} / \sqrt{Hz}$ y amplitud de velocidad con unidades de mm/s. A lo largo del trabajo, se presentarán los resultados con las 2 últimas unidades mencionadas, pero cabe aclarar que el uso de diferentes unidades de amplitud no debería suponer un problema, ya que lo que se pretende es analizar y detectar los modos de los sistemas.

3.3 Condiciones de medida

A continuación, se van a exponer y analizar las pruebas realizadas para la calibración del sistema vibrométrico y las condiciones de medida que puedan afectar a la hora de realizar las mediciones.

3.3.1 Puesta a punto del sistema vibrométrico

Primeramente, resulta de gran importancia conocer las condiciones óptimas para realizar las medidas con el vibrómetro. Tras conocer las características del dispositivo, resulta necesario realizar un ajuste previo antes de pasar a las mediciones, por lo que se realizan pruebas para determinar a distancia a la cual se deben de colocar los objetos a medir y el ajuste de la dirección del haz hacia la lente.

3.3.1.1 Ajuste de la señal recibida

En primer lugar, se analiza el correcto ajuste de la dirección del haz reflejado. Dependiendo de la superficie donde se produzca la reflexión, puede haber mayor cantidad de señal recibida o incluso ninguna. Para corregir este fenómeno en los casos donde haya poca reflexión se utilizarán pegatinas reflectantes como las que se muestran en la figura 17.

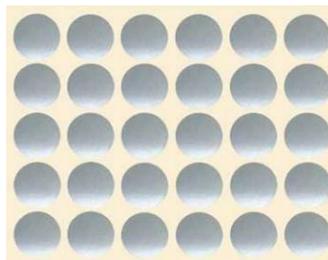


Figura 17: Pegatinas reflectantes

Otro de los posibles factores que influyen en la señal es el ángulo en el que incide el haz sobre la estructura a analizar. Si la señal reflejada no está alineada hacia el sensor, esto puede provocar que la señal recibida disminuya, tal y como se comentaba en el apartado 2.3. Por lo tanto, resulta de gran importancia colocar la estructura y el vibrómetro de manera ortogonal para que el haz se refleje en el sensor y se capte la mayor cantidad de señal posible. Para ello, se realizan los ajustes pertinentes antes de cada medida observando el indicador de señal que tiene el vibrómetro hasta conseguir mantenerlo a máximo nivel, como se puede observar en la figura 18.



Figura 18: Ajuste de la señal recibida

3.3.1.2 Ajuste de las distancias de separación

En segundo lugar, se comprobará la respuesta del vibrómetro a diferentes distancias de separación del objeto a medir para observar si la amplitud de la señal se ve afectada. Para ello, se consulta el manual del vibrómetro en el que se indica cómo realizar el cálculo de la distancia de separación a la que se debe colocar el objeto. A continuación, se muestra el cálculo y sus resultados:

$$\text{Visibility max (mm)} = 91 \text{ mm} + (n * 204)$$

$$\text{max1 (mm)} = 295 \quad \text{max2 (mm)} = 499 \quad \text{max3 (mm)} = 703$$

Se descarta el máximo 1, ya que solo sirve con un objetivo microscópico y no se dispone de él.

Tras realizar los cálculos, se pasa a la comprobación del comportamiento del vibrómetro. Para realizar el ajuste, se comprueban varias distancias de separación del objeto mediante un barrido frecuencial que permitirá observar la reacción del sistema al cambio de distancia. El vibrómetro cuenta con una lente con distancia focal ajustable para realizar el enfoque adecuado del haz láser. Por lo que, en cada caso se ajusta la focal dependiendo de la distancia de separación para que estén en condiciones similares. Para realizar estas pruebas se utiliza el shaker como excitación colocando una pegatina reflectante en su punta y enfocando el haz hacia el centro de la punta. Se utiliza este dispositivo, ya que emite la señal de excitación y permitirá directamente observarla en el vibrómetro.



Figura 19: Medida en punta del shaker

Se realiza el barrido frecuencial en varias distancias Max2 = 499 mm, 570 mm, 650 mm, Max3 = 703 mm y una distancia donde debería aparecer un mínimo de visibilidad a 601 mm, que es el punto medio entre los máximos 2 y 3. La amplitud de excitación es de 100 mVpp.

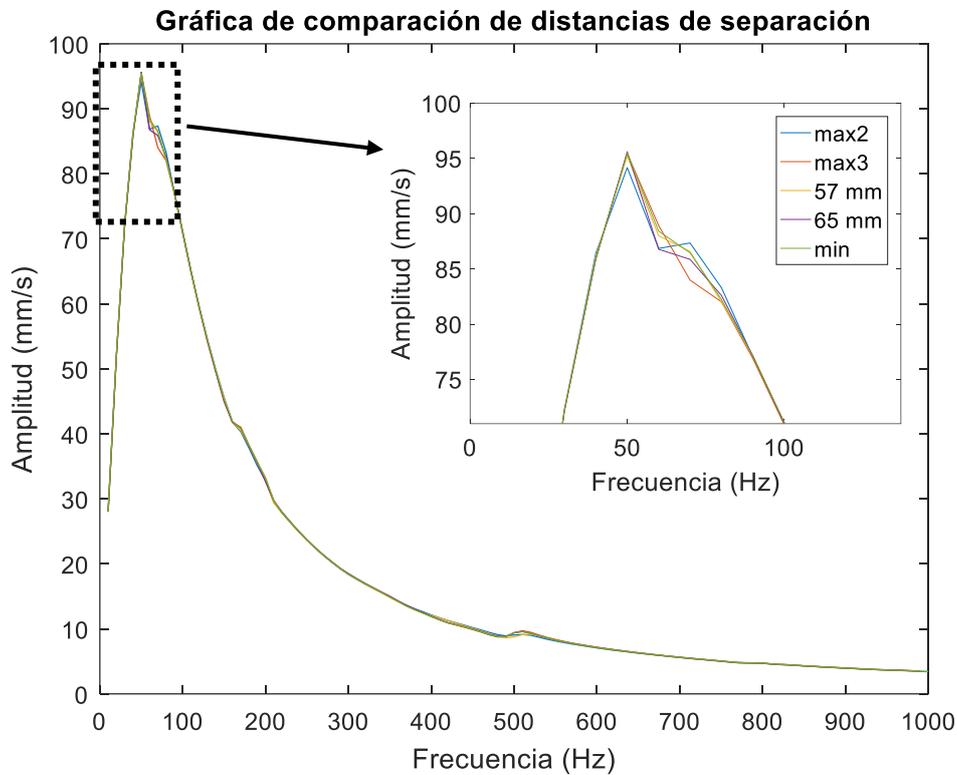


Figura 20: Prueba de diferentes distancias de separación del vibrómetro

Los resultados a diferentes distancias son prácticamente iguales. Se ha probado a colocar en 2 máximos visibles, un mínimo y también dos puntos intermedios con un barrido frecuencial de 10 Hz a 1 kHz con pasos de 10 Hz. Queda constatado que las distancias de separación no tienen una gran influencia siempre que se realicen los ajustes pertinentes en el sensor.

3.3.1.3 Ajuste de las medidas en plano

Tras realizar las pruebas de calibración de distancia de separación (stand-off) se pasa a comprobar los distintos tipos de medida utilizando de nuevo el shaker como excitación. Este dispositivo es el que emite directamente la excitación, por lo que se podrá observar claramente a través del vibrómetro la señal enviada. Se coloca la punta del shaker a 499 mm de distancia en un máximo de visibilidad y se ajusta la focal.

La primera prueba consiste en realizar un barrido en plano de la zona que rodea a la punta del shaker. Se trata de una punta redonda de unos 8 mm de diámetro, por lo que se comienza realizando un barrido en el cuadrado circunscrito. Se realiza un plano de 12 x 12 mm con incrementos de 2 mm y frecuencia de excitación de 50 Hz.

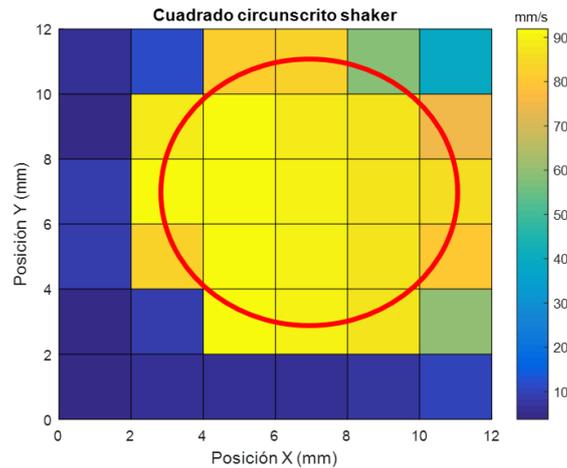


Figura 21: Cuadrado circunscrito al shaker

Los resultados indican que el vibrómetro detecta correctamente la zona donde se encuentra el objeto a medir, dejando en valores mínimos el resto del plano donde no hay objeto vibrando. A continuación, se hará la misma prueba en la zona más acotada a la punta del shaker y con diferentes frecuencias. Se realiza un plano de 0 a 8 mm e incrementos de 2 mm con frecuencias de 50 Hz a 300 Hz en pasos de 50 Hz.

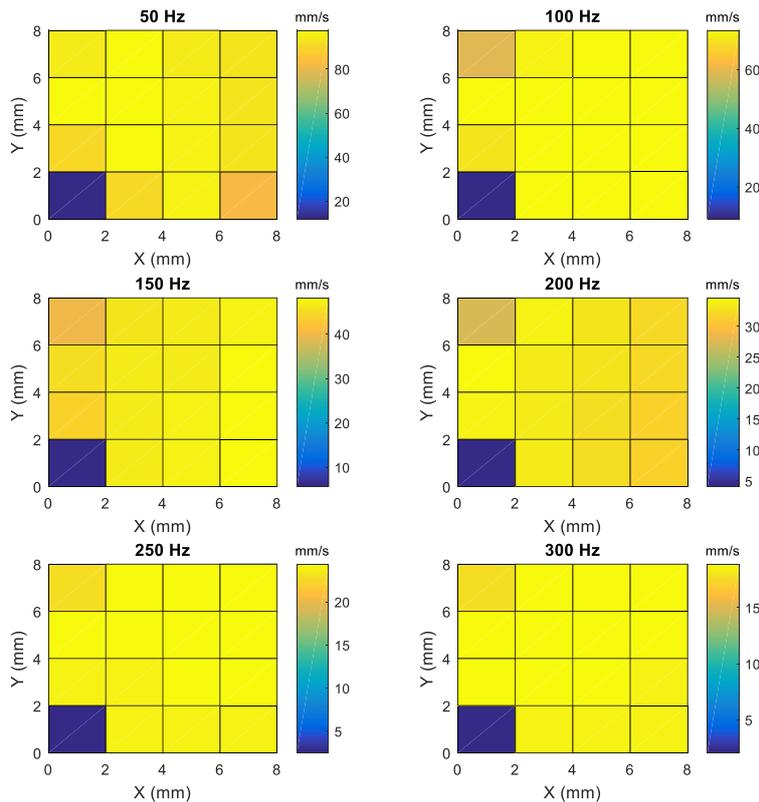


Figura 22: Plano de la punta del shaker a varias frecuencias

En este caso, se ha realizado el barrido en una zona más próxima a la punta del shaker a medir para observar los cambios que se producen al variar la frecuencia. El objeto nuevamente vuelve a ser bien detectado y la amplitud de velocidad va disminuyendo a medida que se aumenta la frecuencia de vibración del excitador.

3.3.2 Acoplamiento y sujeción de sistemas

Posteriormente al análisis del sistema de medida vibrométrico, se realizan pruebas con diferentes materiales de fijación de las estructuras simples al excitador y también de los sistemas de sujeción de la placa delgada a analizar.

3.3.2.1 Ajuste de materiales de acoplamiento de estructuras

En este apartado, se analizan los materiales empleados como sistema acoplador entre la estructura y el shaker. Se realizan pruebas con diferentes materiales para observar si existe influencia en las medidas debida a la amortiguación de la señal enviada. En la figura 23 se muestran los tres materiales analizados.



Figura 23: Materiales de fijación

Para el análisis, se realiza un barrido frecuencial de 1 a 30 Hz en pasos de 2 Hz y con promedio de 5 medidas de 1 s en la placa metálica con la excitación en un el punto a 50 mm del borde derecho y a 60 mm del borde inferior y el vibrómetro en el punto 1 a 40 mm del borde derecho y a 50 mm del borde inferior dando como resultado la siguiente gráfica:

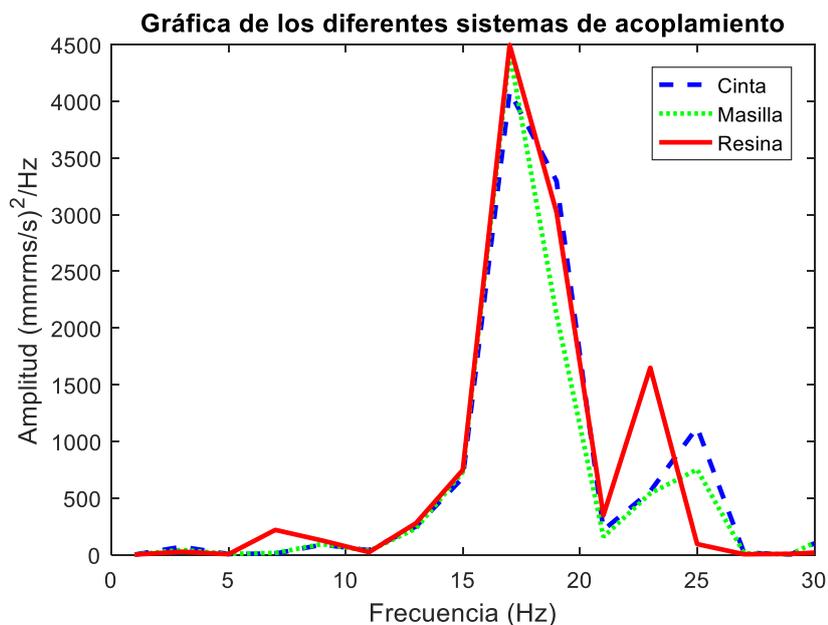


Figura 24: Comparativa de materiales de fijación 1

En esta gráfica, se puede observar que los tres sistemas de acoplamiento dan resultados similares siendo ligeramente superior la amplitud con el uso de la resina. Tras estas pruebas se puede concluir que los tres sistemas son válidos para el uso como fijación de las estructuras con el excitador, ya que no influyen en las medidas. Se pasa entonces a analizar la usabilidad de cada uno para elegir el más adecuado:

- En el caso de la cinta de doble cara, la fijación que proporciona con la placa es baja dando sensación de facilidad de despegarse del excitador cuando hay grandes desplazamientos, lo cual resulta incómodo para las medidas porque puede soltarse en mitad de una medición provocando la obligación de repetirla y la necesidad de mayor vigilancia por si se produce dicho suceso.
- La resina para acelerómetros es un material más rígido y difícil de separar de los sistemas a fijar tras su uso, dejando restos que son complicados de eliminar y obligando a tener mayor precaución antes y después de su uso.
- La masilla, en cambio, es el sistema que se considera más apropiado, por ser más flexible y fácil de fijar y separar en cualquier superficie.

3.3.2.2 Ajuste de materiales de sujeción de la placa al soporte

En el experimento a realizar se pretende simular que la placa metálica está en condiciones libres, por lo que se ha intentado que ésta quede suspendida en el aire. La placa tiene 2 agujeros pequeños por donde se introducirán los materiales de sujeción que la mantendrán erguida de forma que quede perpendicular al sensor del vibrómetro.



Figura 25: Placa delgada rectangular utilizada para las mediciones

Para la sujeción de placa se emplea un puente para focos de iluminación sostenido con 2 trípodes, tal y como se puede observar en la figura 26.



Figura 26: Sistema de soporte de la placa utilizado para las mediciones

Se emplean 2 materiales para comparar cuál da mejor resultado. Estos materiales son cuerda y goma elástica.



Figura 27: Materiales de sujeción

Para realizar la comparativa entre ambos materiales se coloca la placa a la distancia del vibrómetro de 703 mm que corresponde al 3° máximo de visibilidad, de esta manera nos aseguramos que no haya influencia de la distancia de separación y además resulta más sencillo para dejar ajustada la focal del vibrómetro y no modificarla. El excitador se coloca en a 50 mm del borde derecho de la placa y a 60 mm del borde inferior dejando el mismo punto para todas las medidas, pero utilizando diferentes puntos de recepción.

En primer lugar, el vibrómetro se coloca el punto 1 a 40 mm del borde derecho de la placa y a 50 mm del borde inferior dando los resultados que aparecen en la figura 28.

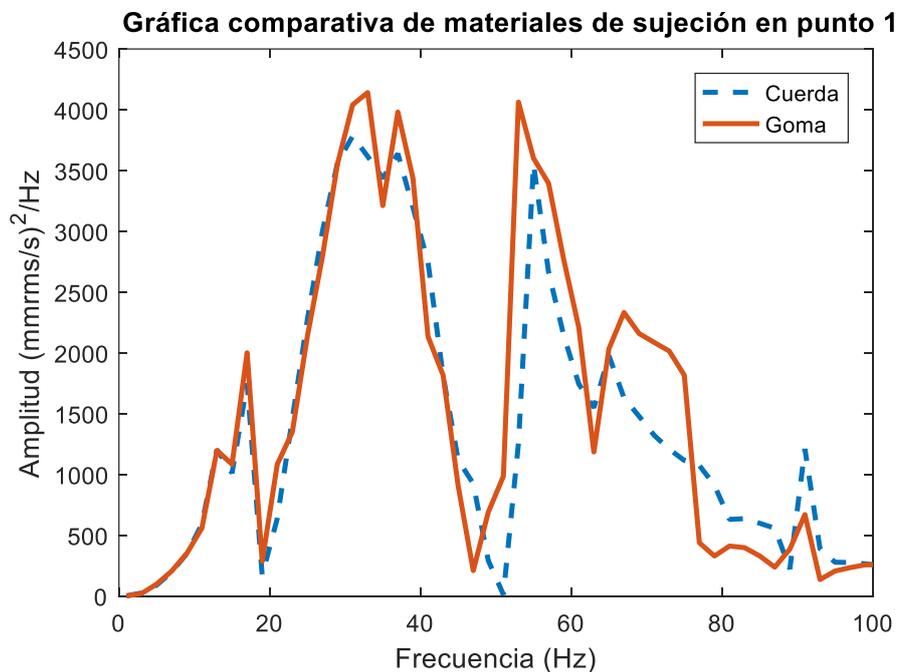


Figura 28: Gráfica comparativa de los diferentes materiales de sujeción de la placa 1

En segundo lugar, el vibrómetro se coloca en el punto 2 a 100 mm del borde derecho de la placa y a 95 mm del borde inferior dando los resultados que aparecen en la figura 29.

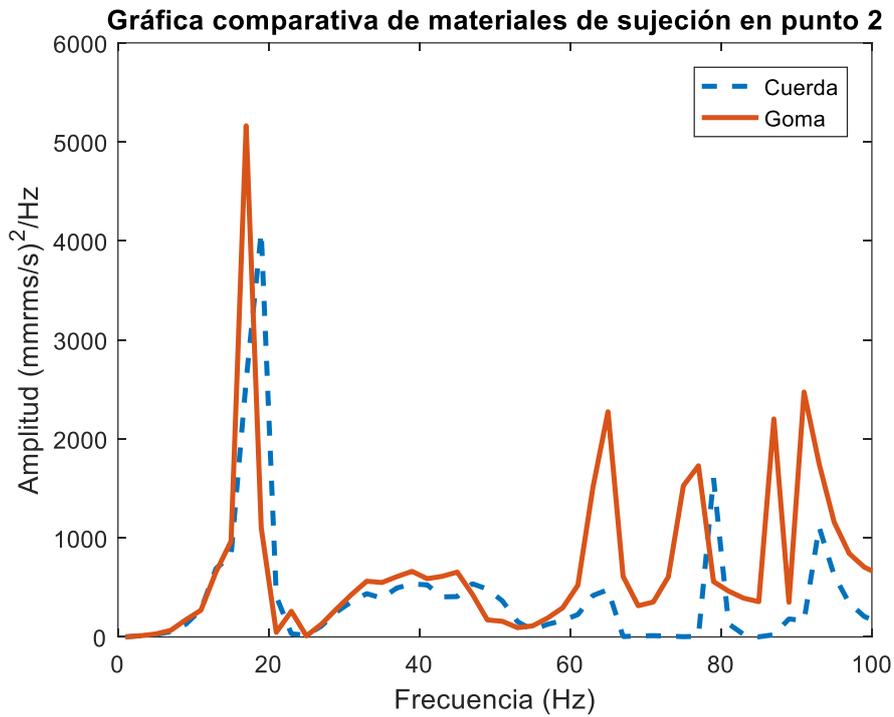


Figura 29: Gráfica comparativa de los diferentes materiales de sujeción de la placa 2

En todos los casos la goma suele dar resultados con mayores amplitudes de los modos de la placa. Las frecuencias modales resultantes son muy similares, por lo que no existe influencia del modo de sujeción de la placa. También se considera que la goma tiene una menor rigidez al ser más elástica, lo cual puede dar mejor resultado al sostener la placa en condiciones libres.

4 Diapasón

En este cuarto apartado, se va a exponer el análisis vibrométrico de la primera estructura simple medida. En este caso se ha elegido un instrumento sencillo como es el diapasón que sirve como toma de contacto con el análisis de vibraciones. Se explicará el análisis teórico, después las simulaciones realizadas con software de elementos finitos (*Comsol Multiphysics*) y por último los resultados de las medidas experimentales realizadas.

4.1 Análisis de las medidas vibratorias del diapasón

Empleando los conocimientos teóricos de las vibraciones del diapasón presentados en el apartado 2.4 se realiza el análisis del diapasón. Se ha utilizado para los experimentos un diapasón Leybold de acero con una frecuencia fundamental de 440 Hz, según sus especificaciones. Sus características son las siguientes:

$$M = 203.03 \text{ g} = 0.203 \text{ kg} \quad V = 26172.3 \text{ mm}^3 = 26.17 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0.203}{26.17 \cdot 10^{-6}} = 7756.97 \text{ kg/m}^3 \quad \nu = 0.28$$

$$\text{Largo tines (L)} = 0.11 \text{ m} \quad \text{Frec fund} = 440 \text{ Hz} \quad \text{Espesor } l = 0.007 \text{ m}$$

$$\text{Radio giro sección rectangular: } K = \frac{l}{\sqrt{12}} = \frac{0.007}{\sqrt{12}} = 2.0207 \cdot 10^{-3}$$

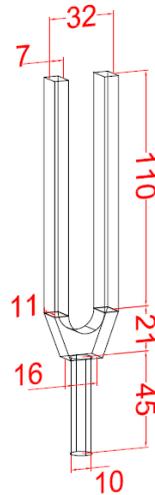


Figura 30: Modelo del diapasón acotado con sus dimensiones en mm

Una vez se cuenta con todos estos datos y con la frecuencia fundamental esperada, a través de la fórmula expuesta en el apartado 2.4.1.3 para la frecuencia del primer modo en plano simétrico del diapasón, se obtiene el módulo de Young específico de este material:

$$f_n = \left(\frac{\pi \cdot K}{8 \cdot L^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot [1.194^2, 2.988^2, 5^2, 7^2, \dots, (2 \cdot n - 1)^2] \quad (1)$$

$$\text{Modo 1: } 440 \text{ Hz} = \left(\frac{\pi \cdot 2.0207 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 0.11^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{7756.97}} \cdot [1.194^2]$$

$$\sqrt{\frac{E}{7756.97}} = 440 \div \left(\left(\frac{\pi \cdot 2.0207 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 0.11^2} \right) \cdot [1.194^2] \right) \quad E = 1.72 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \sim 172 \text{ GPa}$$

Tras la obtención de todos los parámetros necesarios, se realizan los cálculos de los siguientes modos cuyos resultados se recogen en la Tabla 2.

En Plano		
Modo	Simétrico (Hz)	Antisimétrico (Hz)
1	440	-
2	2755	2798
3	7716	7716

Tabla 3: Frecuencias obtenidas analíticamente de los modos en plano del diapasón

4.2 Simulación numérica en elementos finitos

Tras realizar los cálculos analíticos, se pasa a obtener los resultados numéricos a través de una simulación con el software de elementos finitos *COMSOL Multiphysics*. Para ello, se modela la geometría del diapasón con las medidas de sus dimensiones en AutoCAD para posteriormente ser importada a la simulación numérica. Tras realizar el modelado geométrico, se realiza el modelo numérico empleando el módulo de mecánica para obtener las frecuencias propias. Se utilizan las propiedades del material antes obtenidas como son la densidad (ρ), coeficiente de Poisson (ν) y módulo de Young (E).

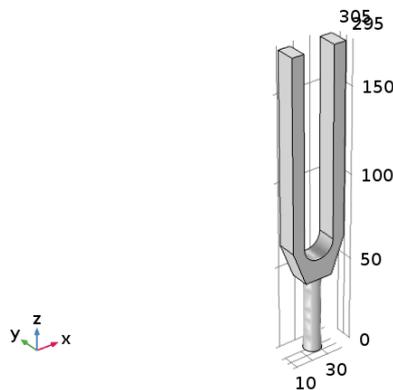


Figura 31: Modelo geométrico del diapasón empleado para la simulación numérica

Tras obtener los resultados de la simulación se observa que la frecuencia fundamental obtenida es de 333 Hz, lo cual no concuerda con la frecuencia esperada. Ya que el valor de densidad fue obtenido con valores medidos, esto indica que el margen de error no será alto, por lo que se decide ajustar el valor del módulo de Young, que fue antes obtenido empleando las fórmulas en los cálculos analíticos. Estas ecuaciones suponen que el diapasón está formado por dos vigas con extremos fijo-libre, por lo cual se realiza una simplificación del modelo que no tiene en cuenta ni las características geométricas del diapasón ni el material del que está compuesto. Por este motivo, se realiza el ajuste del módulo de Young hasta obtener la frecuencia fundamental esperada de 440 Hz.

Una vez realizados los ajustes, se presentan a continuación los resultados de los modos obtenidos con sus frecuencias.

En Plano			Fuera de Plano		
Modo	Simétrico (Hz)	Antisimétrico (Hz)	Modo	Simétrico (Hz)	Antisimétrico (Hz)
1	440.52	418.85	1	580.27	645.88
2	2790.8	2581.2	2	3702	3963.7

Tabla 4: Frecuencias de los modos del diapasón obtenidas con simulación numérica

Tras las frecuencias, se analizan las formas modales obtenidas clasificadas por el tipo de modo según la teoría descrita en el apartado 2.4.1.

Modos en plano

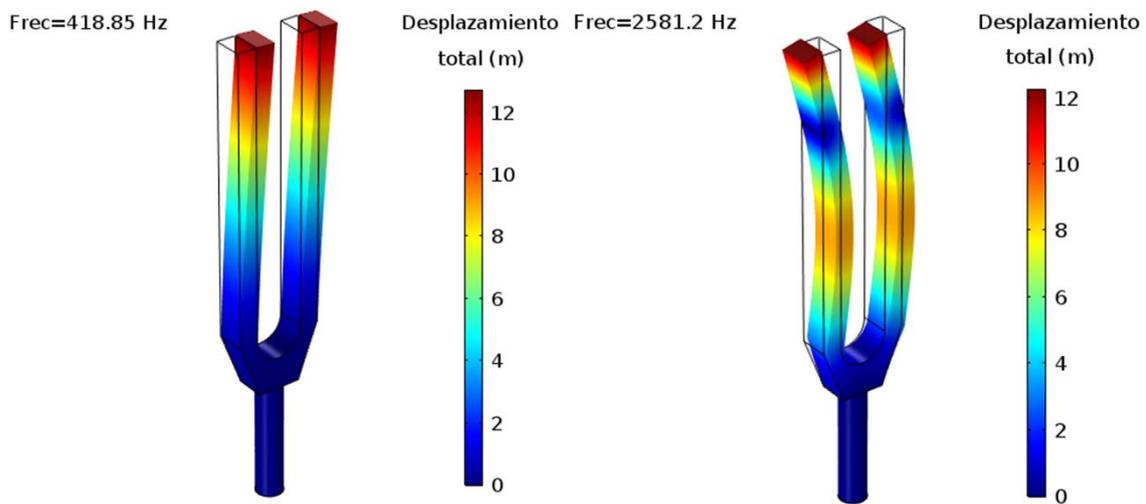


Figura 32: Modos en plano antisimétricos obtenidos con simulación numérica

En el caso de los modos en plano comentados en el apartado 2.4.1.1, el primer modo antisimétrico tiene un máximo de desplazamiento en el extremo de las puntas descendiendo siendo la parte que se desplaza, ya que la base tiene un nulo de desplazamiento. En el segundo modo, hay desplazamiento en el extremo y en la zona media con 2 nodos en la zona de la base y otro entre el extremo y el punto medio. En estos modos las puntas del diapasón se mueven conjuntamente desplazándose lateralmente.

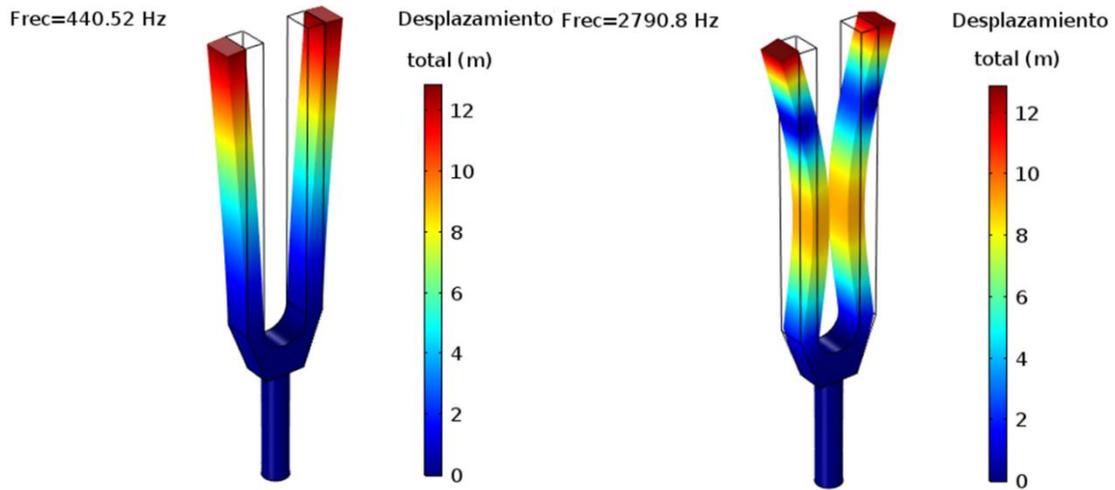


Figura 33: Modos en plano simétricos obtenidos con simulación numérica

El segundo caso de los modos en plano, son los simétricos en los que se produce un desplazamiento similar al anterior, pero en este caso se produce el efecto espejo, ya que las puntas se mueven en direcciones opuestas de forma lateral.

Modos fuera de plano

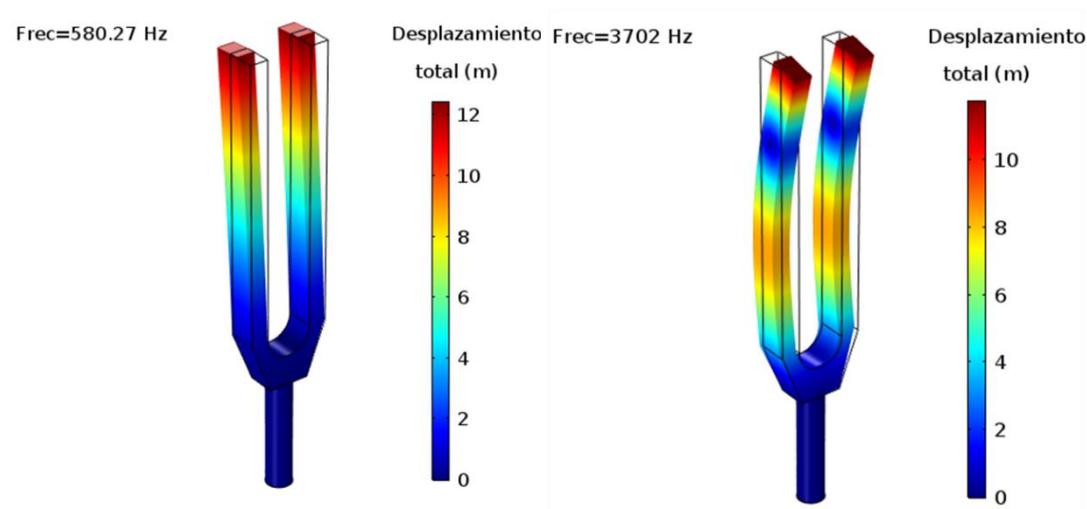


Figura 34: Modos fuera de plano simétricos obtenidos con simulación numérica

Los modos fuera de plano, explicados en el apartado 2.4.1.2, tienen un desplazamiento similar a los que son en plano, pero se mueven las puntas de delante a atrás en vez de lateralmente. El primer modo tiene el desplazamiento en el extremo de las puntas con la base en un mínimo. En cambio, el segundo modo tiene desplazamiento en el extremo y en la zona media con nodo en la base y en la zona entre el extremo y el medio.

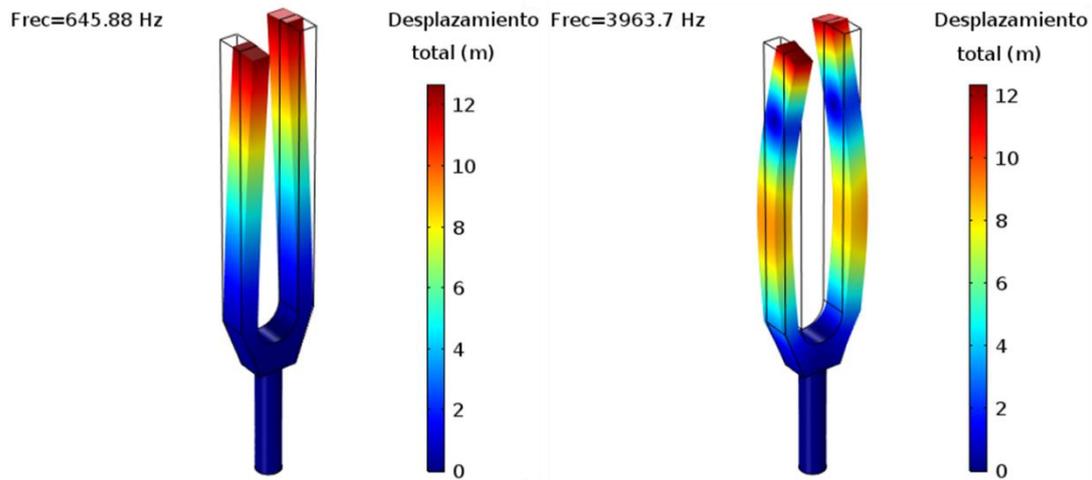


Figura 35: Modos fuera de plano antisimétricos obtenidos con simulación numérica

El último caso de los modos fuera de plano son los antisimétricos donde se produce el efecto espejo entre las puntas que se desplazan en direcciones opuestas. Las formas modales son similares a las simétricas y sigue desplazándose de delante a atrás en vez de lateralmente.

4.3 Medidas experimentales

Las amplitudes relativas de excitación de los diversos modos dependen de donde se excita el diapasón. Golpear cerca de un nodo proporciona una menor excitación para ese modo, mientras que golpear cerca de un antinodo generalmente excita fuertemente el modo. Por esto, resulta de gran importancia la elección del punto donde se coloca el excitador (shaker). Para ello, se elige un punto cercano a la base de las puntas del diapasón (a 7.5 cm del extremo), ya que los modos que se quieren visualizar se encuentran en la zona media y en los extremos de las puntas. El vibrómetro se coloca lo más cercano posible al extremo (a 1 cm) ya que ahí es donde aparece el mayor desplazamiento en todos los modos a visualizar. El montaje experimental comentado se puede visualizar en la figura 36 y será el mismo en todos los tipos de medida a realizar.

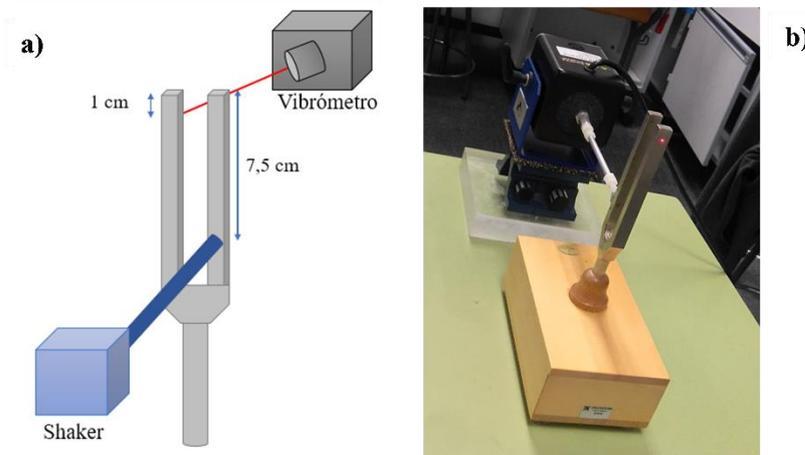


Figura 36: Montaje experimental para las medidas con el diapasón. a) Esquema del montaje. b) Imagen real de una medida experimental con el diapasón

Para la visualización correcta de todos los tipos de modos que existen en el diapasón, se han realizado 4 tipos diferentes de medidas combinando las diferentes posiciones de excitación y recepción. En la figura 37 se muestran los tipos y configuraciones de medida.

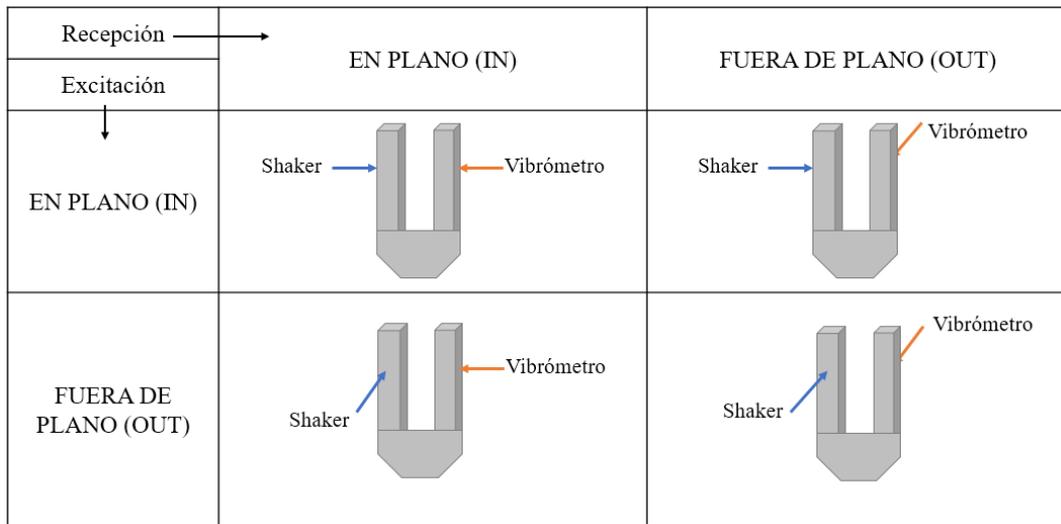


Figura 37: Clasificación de las configuraciones para cada tipo de medida realizada con el diapasón

4.3.1 Medidas en plano

Para comenzar, se realiza un barrido de 300 Hz a 3000 Hz cada 20 Hz. Este tipo de medida permite visualizar generalmente donde se pueden situar los modos pero sin concretar demasiado la frecuencia, por lo que la frecuencia modal puede verse enmascarada al ser el paso de medida tan alto. En la primera configuración de medida empleada, el excitador está colocado en el plano del diapasón (IN) y la recepción mediante el vibrómetro, tiene el láser colocado también en el plano del diapasón (IN).

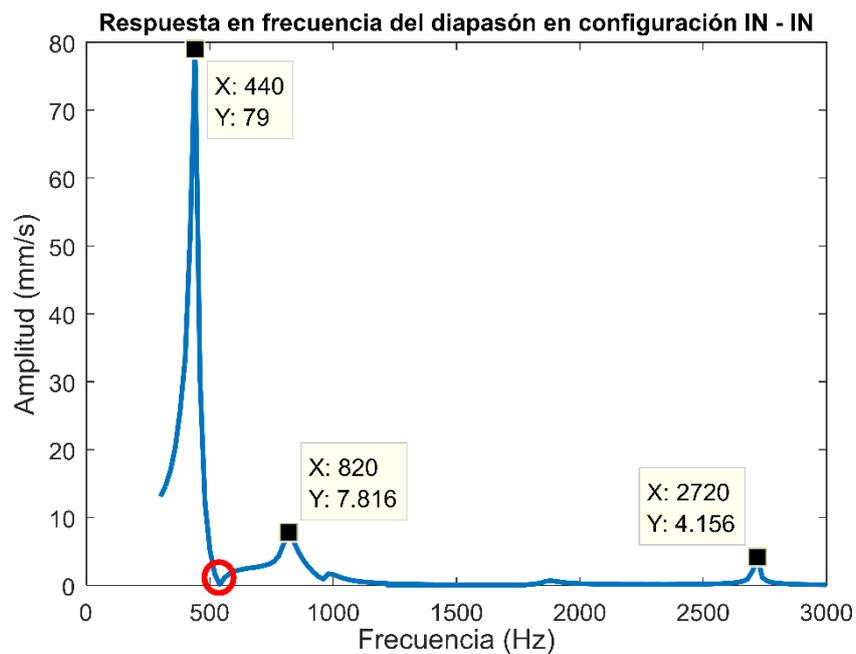


Figura 38: Medida completa de los modos con excitación y recepción en plano

Se puede observar que aparece un primer modo muy pronunciado a la frecuencia de 440 Hz que llega a alcanzar una velocidad de desplazamiento de 79 mm/s, un segundo modo a 820 Hz que no llega a los 8 mm/s y un tercer modo a 2.72 kHz que se sitúa en los 4 mm/s. También resulta reseñable que aparece un nulo de velocidad (remarcado con un círculo rojo en la figura 38) a frecuencia 540 Hz que puede ser interesante de analizar por la posibilidad de que sea un modo en antiresonancia.

A continuación, se pasa a analizar cada modo de manera individual. Para ello, se realizan barridos frecuenciales en el rango de frecuencias cercano al modo visualizado en el barrido completo y se hacen medidas en pasos¹ de 1 Hz. También se realiza un barrido lineal a lo largo (eje vertical) de una de las puntas del diapasón para detectar la forma modal mediante la excitación a la frecuencia modal en diferentes puntos a lo largo de la misma línea que recorre la punta. En las gráficas aparecerá la posición de 0 a 100 mm que indica la distancia desde el punto más lejano al extremo (0 mm) al punto más cercano (100 mm). A pesar de que la punta mide 110 mm se ha dejado un margen de 10 mm para evitar posibles reflexiones en el borde.

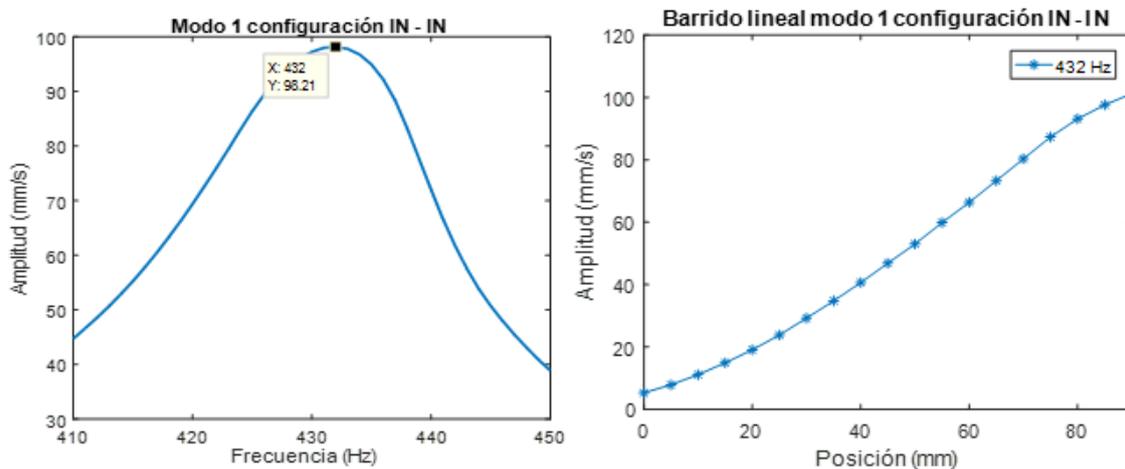


Figura 39: Medida del modo 1 del diapasón con la configuración IN - IN

La frecuencia modal del primer modo detectado con esta configuración es de 432 Hz (ver figura 39). Esta correspondería con un modo en plano antisimétrico, ya que se encuentra por debajo de la fundamental esperada que debería aparecer en 440 Hz. El barrido lineal indica que el mayor desplazamiento se produce en el extremo de la punta donde hay condiciones libres, tal y como se esperaba, dejando la base en un desplazamiento casi nulo, tal y como se puede ver en la figura 39.

¹ Paso de frecuencia: Intervalo de frecuencias en el cual se realiza cada medida.

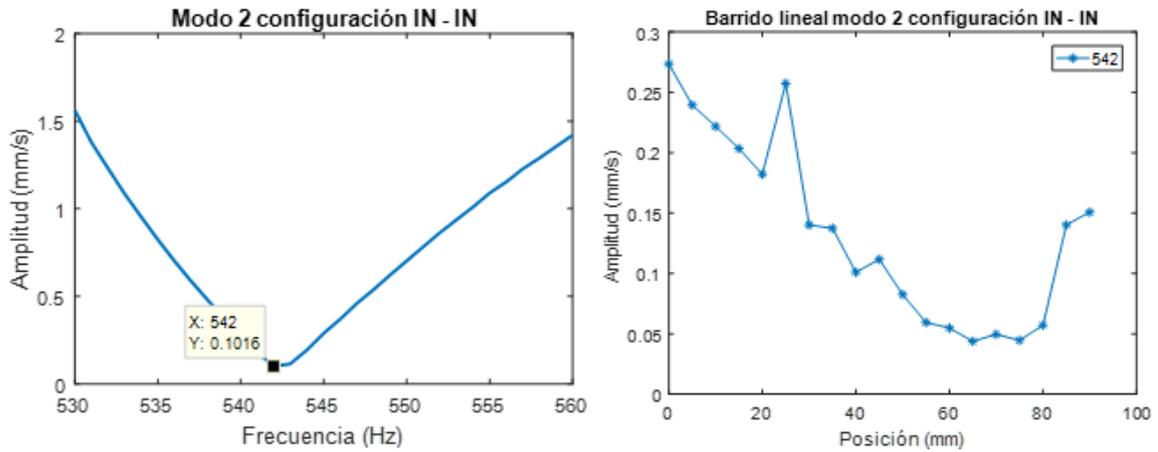


Figura 40: Medida del modo 2 del diapasón con la configuración IN - IN

En este segundo modo, aparece un nulo en la amplitud de velocidad en la frecuencia 542 Hz, lo cual puede ser debido a que se encuentra en contrafase. El barrido lineal indica que hay mayores amplitudes de velocidad en la base y en el extremo de la punta, produciéndose el mínimo en la zona media. A pesar de esto, las diferencias no son tan significativas como para poder obtener una conclusión clara y por la frecuencia debería corresponder con un modo fuera de plano que no tendría esa forma modal, ya que el extremo debería tener mayor amplitud que el resto. Por tanto, se descarta que pueda ser un modo este nulo de velocidad.

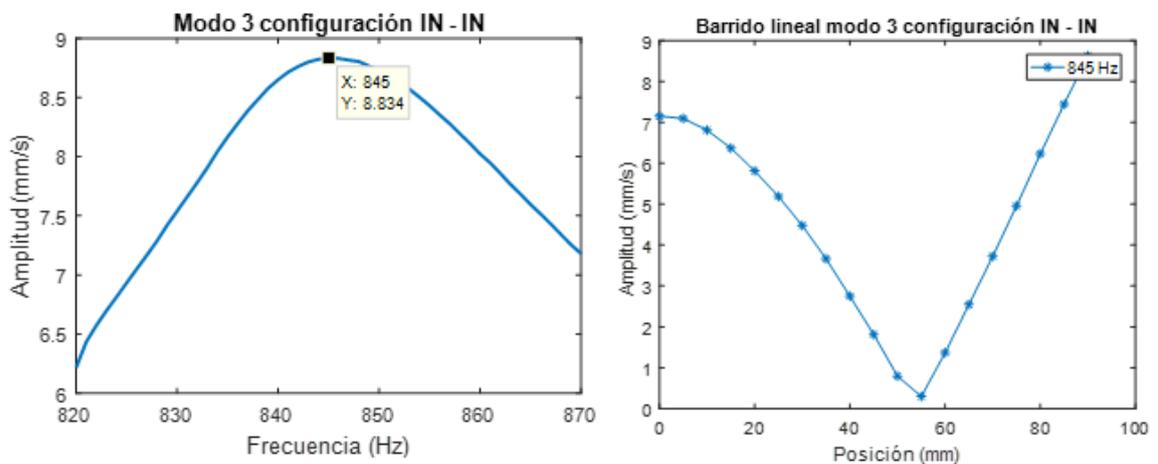


Figura 41: Medida del modo 3 del diapasón con la configuración IN - IN

El tercer modo de esta configuración aparece en la frecuencia 845 Hz, siendo un modo con mayores amplitudes en el extremo y en la base de la punta, ya que aparece un nodo fácilmente identificable en la zona media. Este modo no aparece en los cálculos teóricos ni en las simulaciones, por lo que podría tratarse un armónico del modo fundamental, ya que la frecuencia se encuentra al doble de ésta.

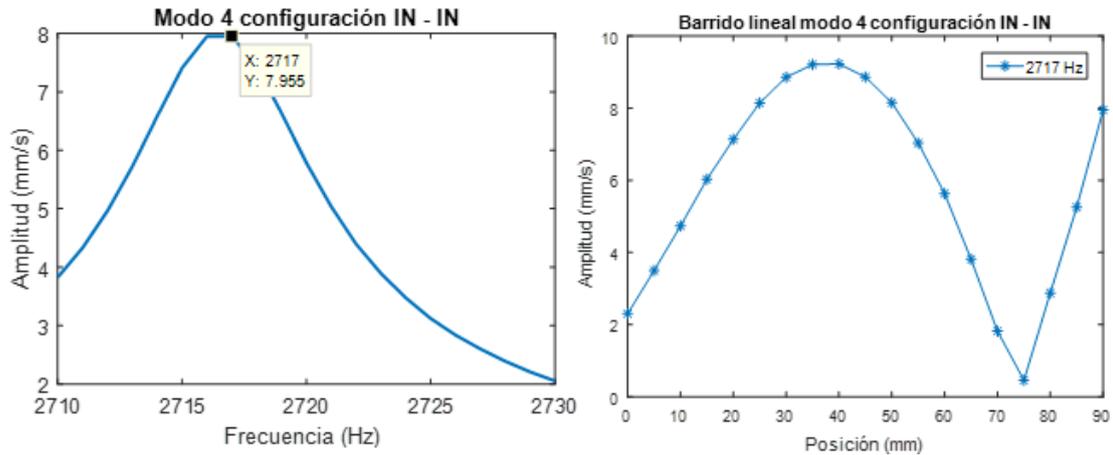


Figura 42: Medida del modo 3 del diapasón con la configuración IN - IN

Por último, el cuarto modo de esta configuración se sitúa en la frecuencia 2717 Hz. El barrido lineal indica que hay mayores amplitudes en el extremo y en la zona posterior a la base de la punta. En este caso hay un nodo justo en la base y otro a unos 30 cm del extremo, justo antes de otro máximo. Esta forma y frecuencia modal se asemeja al segundo modo en plano, pero no se puede definir exactamente si es simétrico o antisimétrico, ya que ambos tienen una forma modal similar y las frecuencias son muy cercanas.

4.3.2 Medidas fuera de plano

La segunda configuración realizada tiene el excitador y el láser colocados fuera del plano del diapasón. El procedimiento descrito en el punto anterior se vuelve a repetir, por lo que se comienza realizando un barrido completo de 300 Hz a 3000 Hz cada 20 Hz para situar los posibles modos.

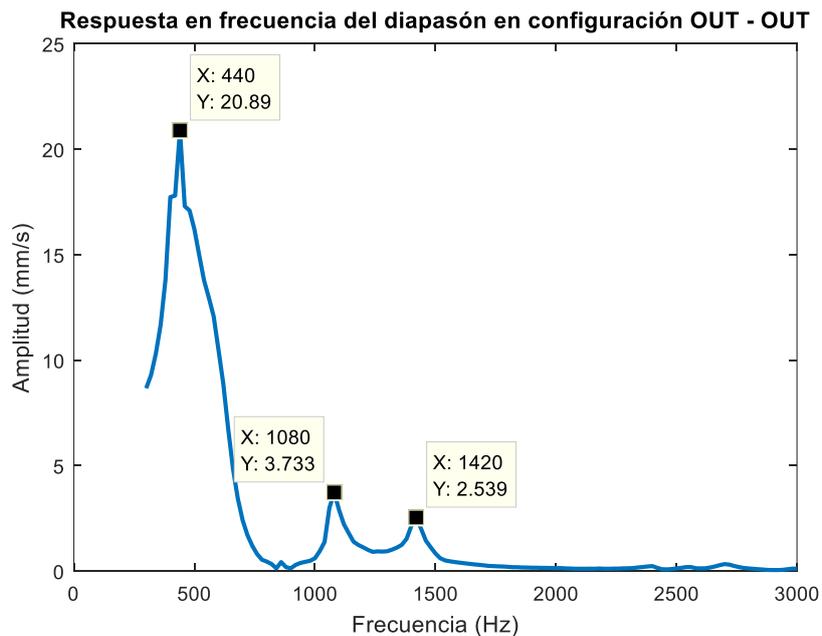


Figura 43: Medida completa de los modos con excitación y recepción fuera de plano

En este caso, se observa que aparece un primer modo a la frecuencia de 440 Hz con una velocidad de desplazamiento de 20 mm/s, un segundo modo a 1080 Hz que no llega a los 4 mm/s y un tercer modo a 1420 Hz que se sitúa en los 2.5 mm/s. Esta configuración muestra los modos con menor amplitud que la anterior y aparecen otras frecuencias intermedias inferiores a los 2 kHz.

A continuación, se pasa a analizar cada modo de manera individual. Para lo cual, como se ha explicado anteriormente, se realizan barridos frecuenciales en el rango de frecuencias cercano al modo visualizado y también se realiza un barrido lineal a lo largo de una de las puntas del diapasón para detectar la forma modal.

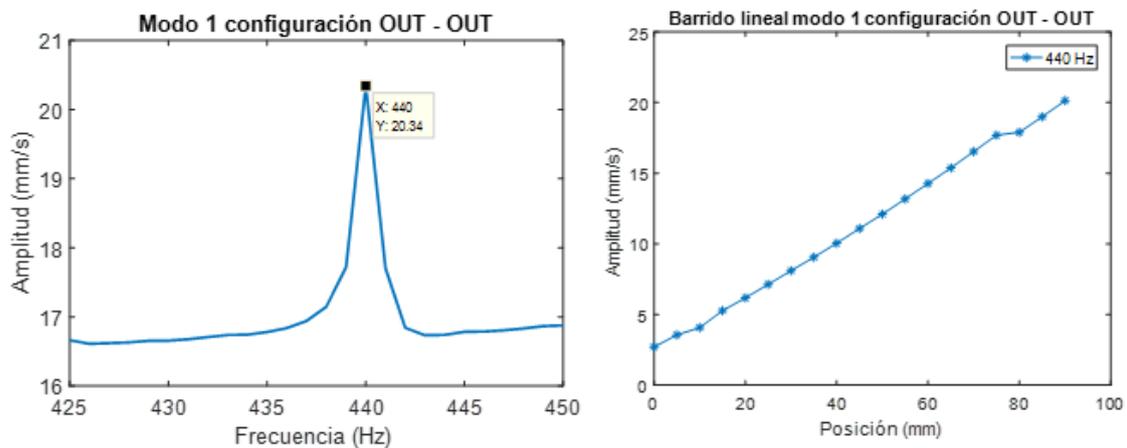


Figura 44: Medida del modo 1 del diapasón con la configuración OUT - OUT

El primer modo tiene una frecuencia modal de 440 Hz y la forma modal es ascendente apareciendo el máximo en el extremo y dejando el valor mínimo en la base. Estos datos se adecúan a los esperados en el modo fundamental del diapasón, que sería el primer modo en plano simétrico.

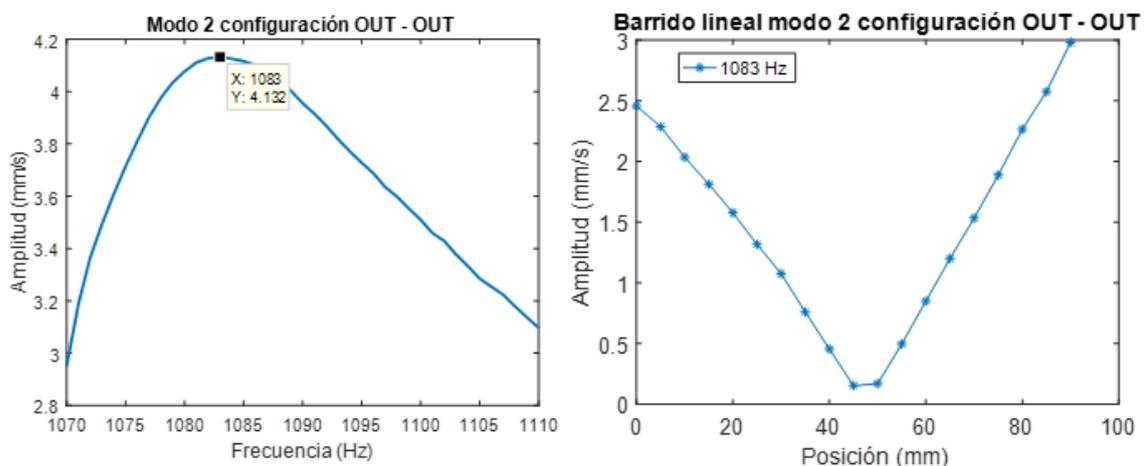


Figura 45: Medida del modo 2 del diapasón con la configuración OUT - OUT

En cuanto al segundo modo que aparece en esta configuración, tiene su frecuencia situada en 1083 Hz con una forma modal que tiene sus máximos en la base y extremo de la punta y un nodo en el medio.

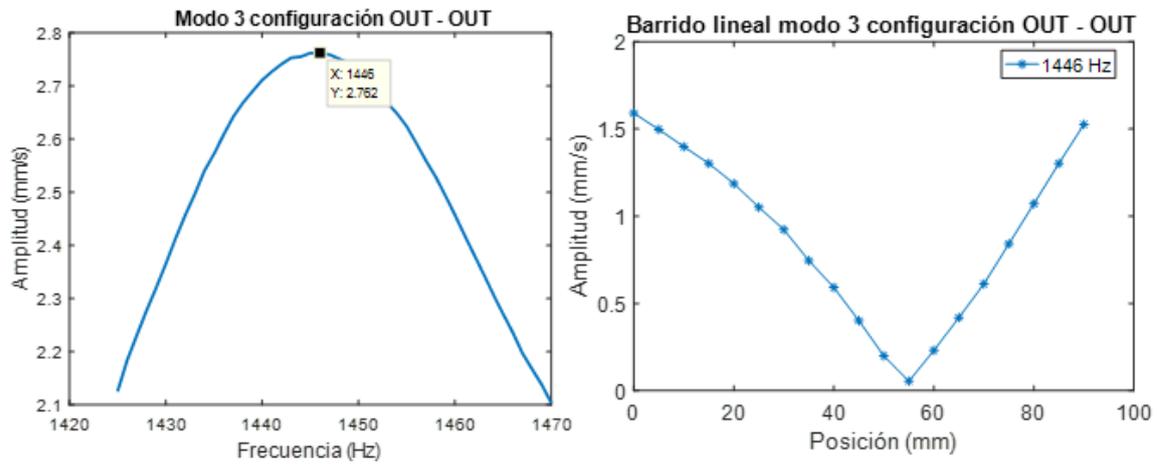


Figura 46: Medida del modo 3 del diapasón con la configuración OUT - OUT

El tercer modo detectado en esta configuración tiene una frecuencia modal de 1446 Hz. El barrido lineal indica que tiene una forma modal con un máximo en la base, un nodo en el centro y otro máximo en el extremo de la punta.

4.3.3 Medidas acopladas fuera y en el plano

La tercera configuración realizada tiene el excitador midiendo en el plano y la recepción apuntando fuera del plano del diapasón. De nuevo se realiza un barrido completo de 300 Hz a 3000 Hz con medidas cada 20 Hz para situar los posibles modos con el resultado que aparece en la figura 47.

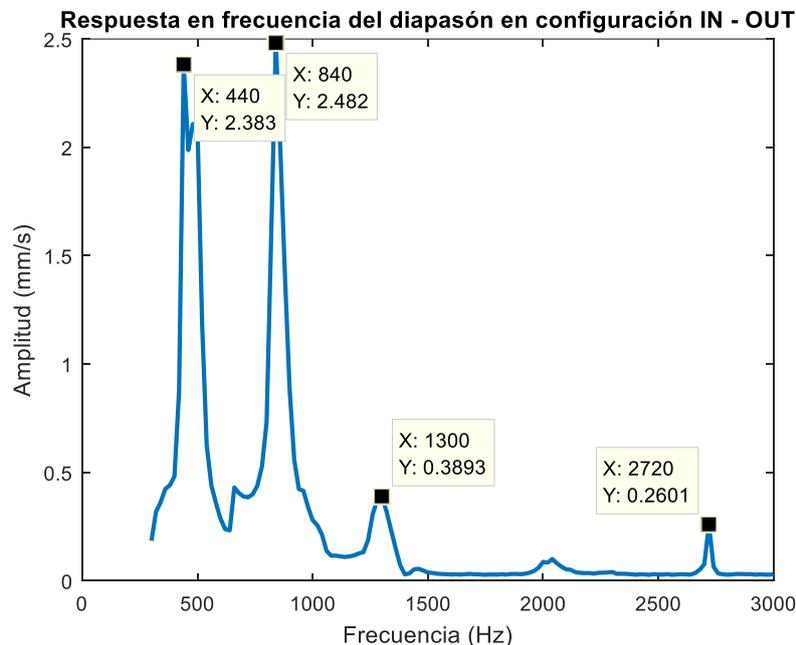


Figura 47: Medida completa de los modos con excitación en plano y recepción fuera de plano

En esta configuración se perciben varios modos, pero con amplitudes bajas comparadas con las anteriores. Aparecen dos modos más pronunciados a frecuencias en torno a 440 Hz y 840 Hz que tienen amplitudes que superan los 2 mm/s. También es de reseñar que

aparecen 2 modos con frecuencias cercanas a 1300 Hz y 2720 Hz, pero con amplitudes por debajo de los 0.5 mm/s, lo cual hace dudar de si realmente se trata de modos. Para observarlos más claramente, se estudiarán a continuación de manera individualizada con un barrido frecuencial acotado a su rango de frecuencias y el barrido lineal para detectar la forma modal.

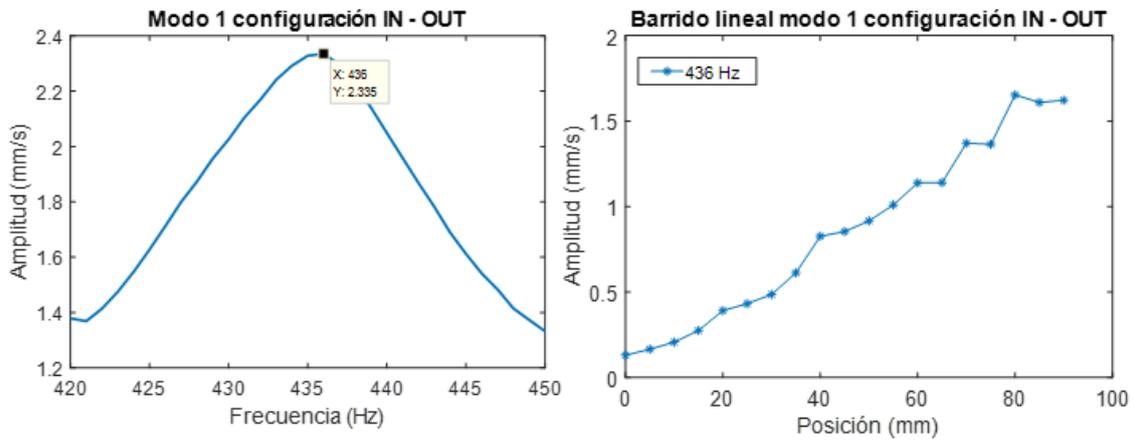


Figura 48: Medida del modo 1 del diapasón con la configuración IN - OUT

El primer modo tiene una frecuencia de 436 Hz y una amplitud de velocidad que aumenta progresivamente hasta llegar al máximo en el extremo. Tanto la frecuencia como la forma modal es similar a la detectada en el caso en plano, ya que la frecuencia está de nuevo por debajo de la fundamental esperada, deduciendo que se trata del primer modo en plano antisimétrico.

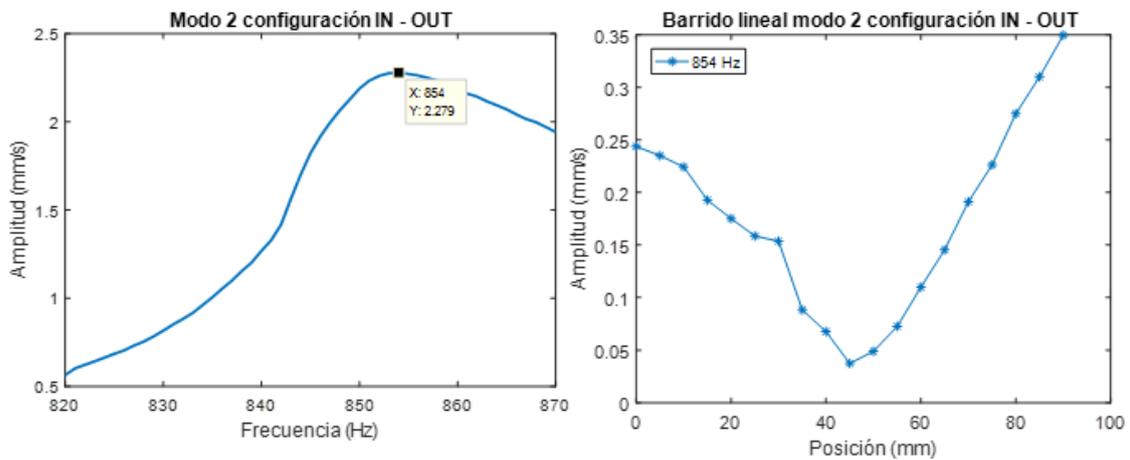


Figura 49: Medida del modo 2 del diapasón con la configuración IN - OUT

El segundo modo con frecuencia de 854 Hz tiene una forma modal que de nuevo indica la aparición de un nulo en la zona media. La amplitud en este caso no es significativa, por lo que puede tratarse de un armónico, ya que no corresponde con ninguna frecuencia de un posible modo.

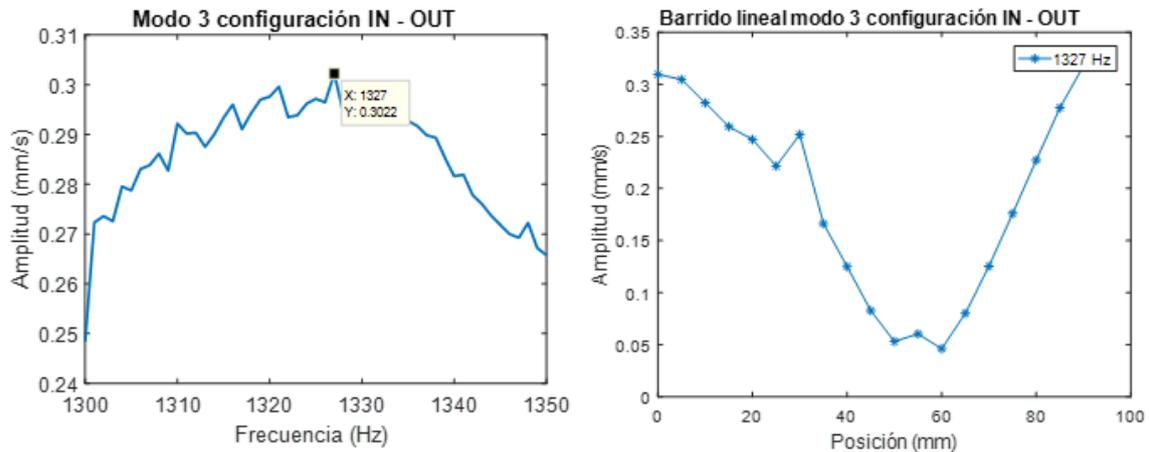


Figura 50: Medida del modo 3 del diapasón con la configuración IN - OUT

El tercer modo que aparece en esta configuración se sitúa en la frecuencia 1327 Hz, aunque hay varias frecuencias con amplitudes similares a esta. La forma modal de nuevo es similar a la del anterior modo con máximos en la base y extremo y nulo en la zona intermedia. Al ser una amplitud tan baja y no quedar tan destacada la frecuencia por encima del resto, no se puede definir que sea claramente un modo.

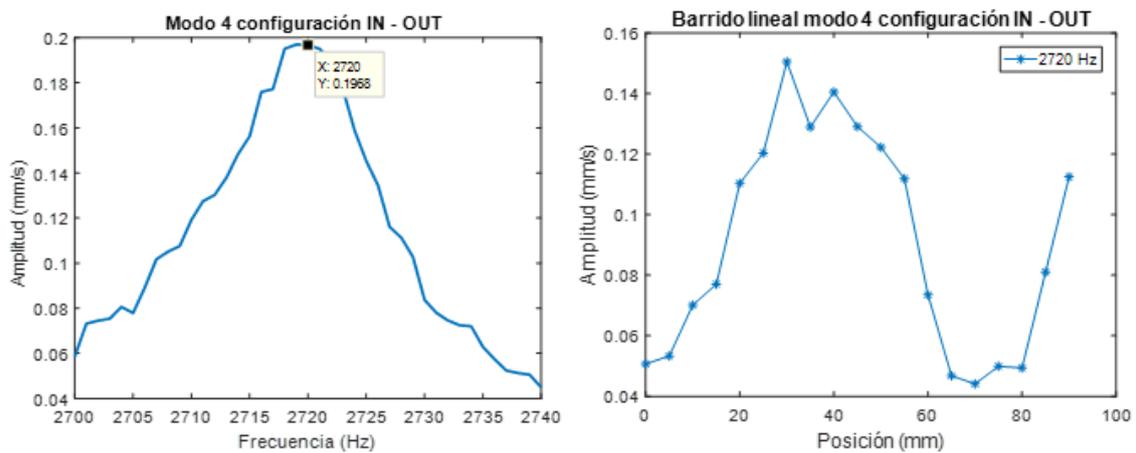


Figura 51: Medida del modo 4 del diapasón con la configuración IN - OUT

El último modo detectado en esta configuración tiene su frecuencia modal situada en 2720 Hz. La forma modal tiene un nodo en la base y después un máximo. En la zona superior al punto medio aparece un mínimo y termina con un máximo en el extremo. Esta forma y frecuencia modal indica que se trata del segundo modo en plano, pero como ocurría anteriormente, no se puede definir si es simétrico o antisimétrico, ya que ambos son similares.

La última configuración realizada se colocó el excitador fuera de plano y la recepción con el vibrómetro en plano al diapasón. Se vuelve a realizar un barrido completo de 300 Hz a 3000 Hz con medidas cada 20 Hz para situar los posibles modos.

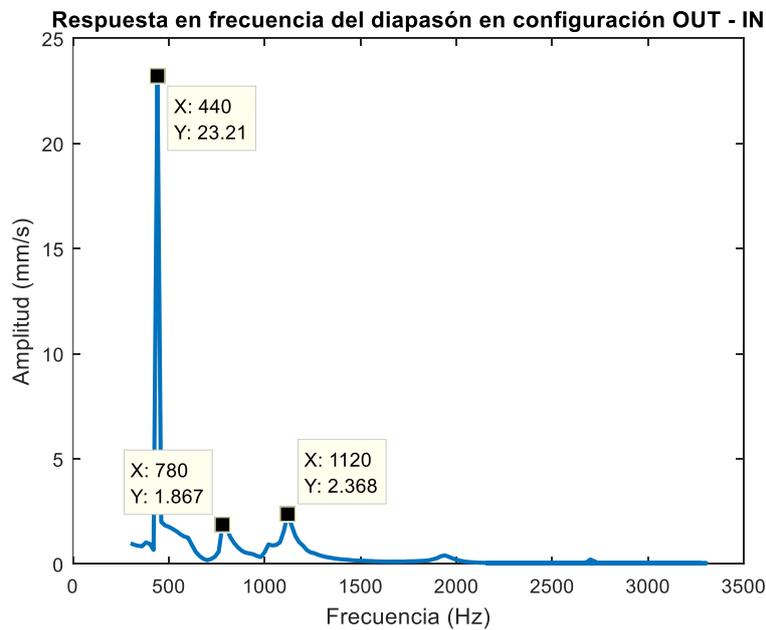


Figura 52: Medida completa de los modos con excitación fuera de plano y recepción en plano

Esta configuración tiene 3 modos visibles, de los cuales el primero es el más significativo. Éste se encuentra en torno a los 440 Hz con una amplitud que supera los 23 mm/s. Los otros dos modos tienen amplitudes inferiores próximas a los 2 mm/s y sus frecuencias modales son cercanas a 780 Hz y 1120 Hz, respectivamente. A continuación, se realiza el estudio detallado de cada modo con el procedimiento de medida anteriormente utilizado.

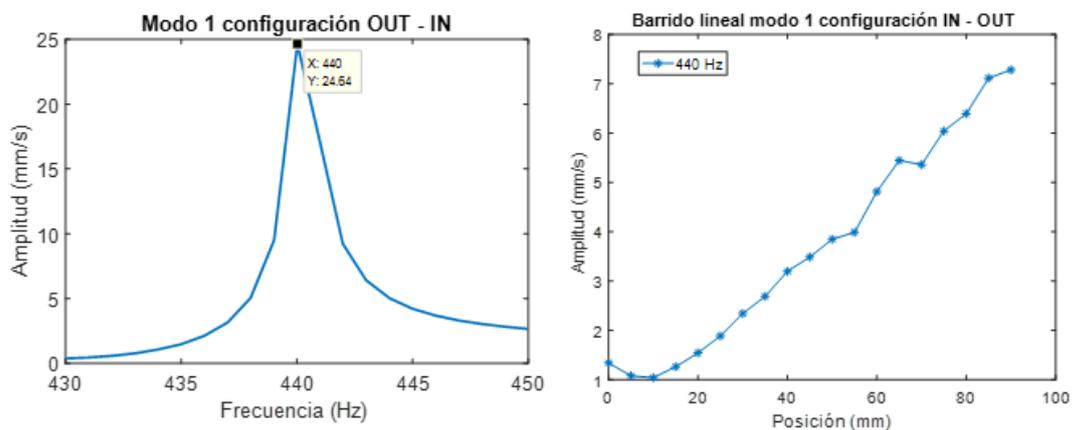


Figura 53: Medida del modo 1 del diapasón con la configuración OUT - IN

El primer modo de esta configuración tiene su frecuencia en 440 Hz y la forma modal indica que el desplazamiento aumenta progresivamente desde la base hasta el máximo en el extremo. Estos datos indican que se trata del modo fundamental en plano antisimétrico.

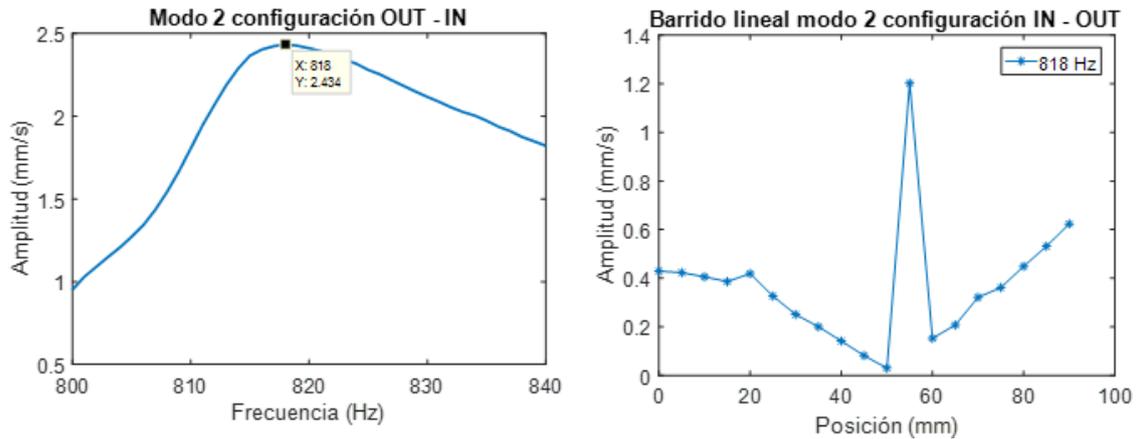


Figura 54: Medida del modo 2 del diapason con la configuración OUT - IN

El segundo modo detectado tiene una frecuencia modal de 818 Hz y el barrido lineal muestra un máximo en la zona intermedia dejando el resto de la punta del diapason en valores más bajos. Estos datos no concuerdan con ningún modo esperado pero la frecuencia continúa siendo cercana al doble de la fundamental, lo que permite deducir que se puede tratar de un armónico de esta.

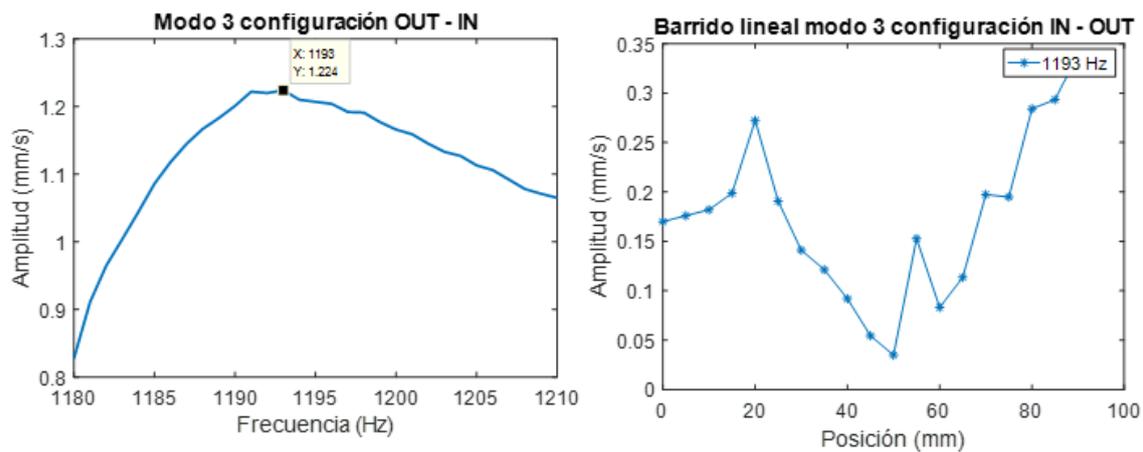


Figura 55: Medida del modo 3 del diapason con la configuración OUT - IN

El tercer modo que aparece en esta configuración tiene una frecuencia modal de 1193 Hz. El barrido lineal indica que hay máximos en la base y el extremo con mínimos en la zona intermedia pero las amplitudes en este caso son muy bajas, por lo que no se pueden sacar conclusiones fiables de este gráfico. Por este motivo, se descarta que se trate de un modo del diapason.

Finalmente se presenta una tabla resumen de los resultados obtenidos experimentalmente en las diferentes configuraciones de medida realizadas. Los resultados resaltados son frecuencias detectadas que no pertenecen a modos, tal y como se ha explicado en los apartados correspondientes de cada configuración.

IN - IN		OUT - OUT		IN - OUT		OUT - IN	
Modo	Frec (Hz)	Modo	Frec (Hz)	Modo	Frec (Hz)	Modo	Frec (Hz)
1	432	1	440	1	436	1	440
2	845	2	1083	2	854	2	818
3	2717	3	1446	3	2720	3	1193

Tabla 5: Frecuencias obtenidas experimentalmente de los modos del diapasón

4.3.4 Caja de resonancia

Tras observar los resultados obtenidos con las diferentes medidas de la estructura, se decide hacer una medida experimental de la caja de resonancia a la que está acoplada la base del diapasón para observar si puede existir influencia sobre los modos de vibración de éste. Esta caja está diseñada para aumentar la resonancia a la frecuencia fundamental de 440 Hz. Se trata de una caja rectangular de 17 cm de largo, 5.5 cm de alto y 10 cm de ancho. Tiene una abertura en uno de los lados de 4 cm de alto y 8 cm de ancho.

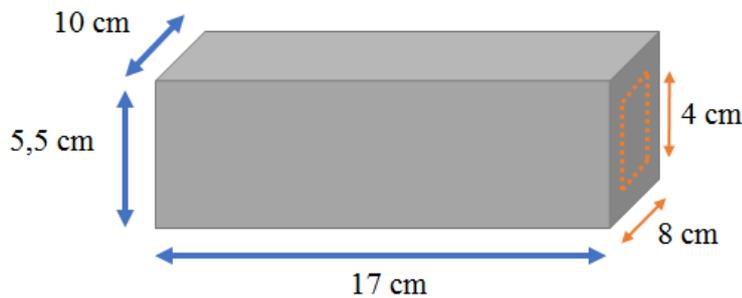


Figura 56: Dimensiones de la caja de resonancia del diapasón

Para realizar las medidas se hace uso de las pegatinas reflectantes en la tapa de la caja como se puede observar en la figura 57.



Figura 57: Medidas en la caja de resonancia del diapasón

Para obtener su respuesta vibratoria, se realiza un barrido frecuencial de 300 Hz a 1000 Hz en pasos de 10 Hz. El shaker se sitúa a 7.5 cm del extremo superior del diente del diapasón más lejano al vibrómetro. El vibrómetro medirá la respuesta en el lateral de la caja donde no hay abertura. Se utilizan dos puntos diferentes en la caja, estando el punto 1 situado a 7.5 cm respecto al borde derecho de la pared de la caja y 4.5 cm de respecto al borde inferior y el punto 2 a 2 cm del borde derecho y 3.5 cm del borde inferior. En la figura 57 se pueden observar los puntos que estarán situados en el centro de las pegatinas reflectantes.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos en las medidas en ambos puntos con la caja de resonancia.

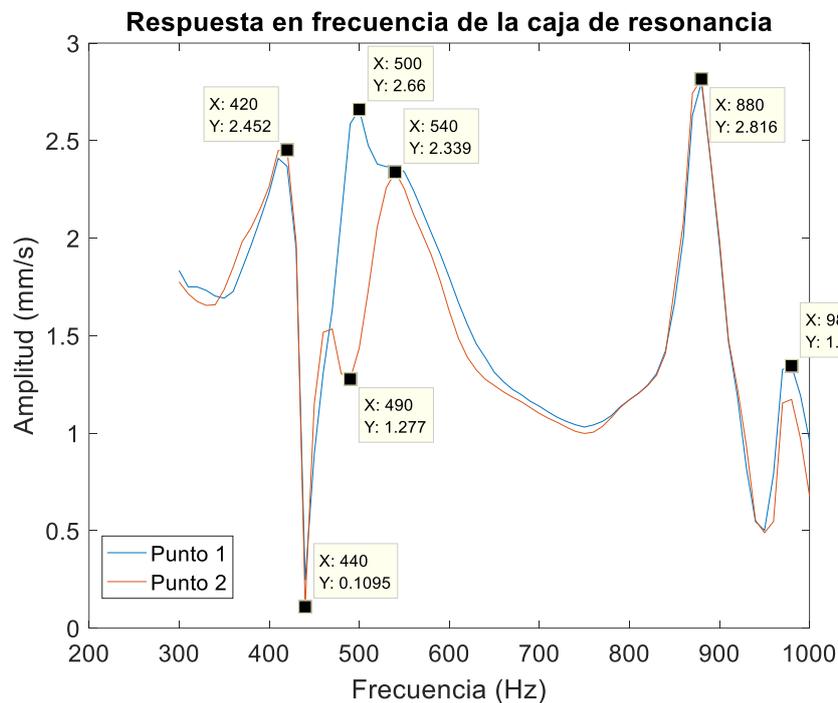


Figura 58: Medida experimental de la caja de resonancia del diapasón

Los resultados muestran un mínimo de amplitud en la frecuencia fundamental del diapasón que puede ser debido a estar midiendo en un punto nodal de la resonancia. También aparece un modo a la frecuencia aproximada de 420 Hz que es inferior a la fundamental, lo cual encaja con el primer modo en plano antisimétrico que se ha medido en el diapasón. Otra cosa destacable es la aparición de un modo a la frecuencia aproximada de 880 Hz, que es el doble de la frecuencia de la fundamental, siendo este su segundo armónico.

Las medidas realizadas en la caja han permitido observar la influencia de los armónicos de la frecuencia fundamental. Las cajas están diseñadas para resonar y aumentar el sonido emitido por el diapasón a dicha frecuencia, por lo que esto puede justificar la aparición de modos armónicos de la frecuencia fundamental en las medidas realizadas en el diapasón.

4.4 Resumen de resultados del diapasón

Para finalizar se presentan las tablas con las frecuencias obtenidas en cada método de análisis.

En Plano	Analítico		Simulación		Experimental	
	Simétrico (Hz)	Antisimétrico (Hz)	Simétrico (Hz)	Antisimétrico (Hz)	Simétrico (Hz)	Antisimétrico (Hz)
1	440	-	440,5	418,9	440	432-436
2	2755	2798	2790,8	2581,2	2720-2717	*

Tabla 5: Resumen de las frecuencias modales del diapasón obtenidas con cada método

En general, existe una gran concordancia con los modos en plano obtenidos experimentalmente tanto con los simulados como los calculados analíticamente. En cambio, los modos fuera de plano son más complejos y no han resultado tan claramente identificables. Es posible que los primeros modos de este tipo no tengan tanta aportación en las vibraciones de la estructura, lo que impide visualizarlos correctamente con el sistema de medida. A partir de frecuencias más altas de 3 kHz, resultaba complicado obtener medidas correctas por la baja amplitud de desplazamiento, por lo que se ha descartado continuar midiendo a partir de esta frecuencia. Además, hay que comentar el caso marcado con asterisco que se trata de un modo obtenido experimentalmente, pero que no se ha identificado si se trata de un modo simétrico o antisimétrico, debido a que la forma modal es similar en ambos casos y no permite hacer correctamente la diferenciación.

5 Placas delgadas rectangulares

En este quinto apartado, se va a presentar el análisis modal de las vibraciones de la segunda estructura simple medida. Se ha escogido realizar el análisis en una placa delgada rectangular de metal que tiene mayor complejidad que la estructura anterior. En los diversos subapartados se presentará el análisis teórico, las simulaciones en elementos finitos empleando el software *COMSOL Multiphysics* y las medidas experimentales realizadas para estudiar la estructura.

5.1 Análisis de las medidas vibratorias de placas delgadas

El caso a analizar de condiciones completamente libres es el más complejo y con mayor dificultad de los 21 casos, en cuanto a la obtención correcta de las soluciones analíticas. Las mayores dificultades aparecen por la presencia de bordes y esquinas libres que no son bien resueltas por las funciones utilizadas para caracterizar las formas modales de la placa [13].

Las dimensiones de la placa analizada son 200 mm de ancho, 400 mm de largo y un espesor de 1 mm, mientras que los agujeros que se realizaron para su sujeción tienen un diámetro de 4 mm. El modelo y dimensiones se muestran en la figura 59.

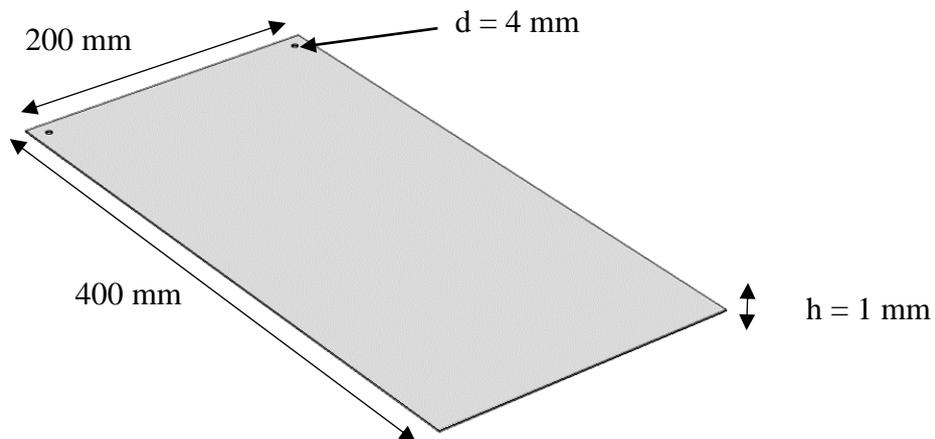


Figura 59: Modelo de la placa rectangular con sus dimensiones

A continuación, se presentan los parámetros característicos de la placa necesarios para realizar el modelo analítico, que se resumen en la tabla 7. Los valores utilizados para el material son valores típicos del titanio que según la densidad medida es el que más se acerca a los resultados.

$$\text{Largo } a = 400 \text{ mm}$$

$$\text{Ancho } b = 200 \text{ mm}$$

$$\text{Espesor } h = 1 \text{ mm}$$

$$M = 372.5 \text{ g} = 0.3725 \text{ kg}$$

$$V = 400 * 200 * 1 = 80000 \text{ mm}^3 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$d = \frac{m}{V} = \frac{0.3725}{8 \cdot 10^{-5}} = 4656.25 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho = d * h = 4656 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 4.656 \text{ kg/m}^2$$

Descripción	Módulo Young	Espesor	Coefficiente Poisson	Rigidez flexural	Masa distribuida	Largo	Ancho
Magnitud	E	h	ν	D	ρ	a	b
Unidad	Pa	m	-	$Pa \cdot m^3$	kg/m^2	m	m
Valor	1,14E+11	1,00E-03	0,342	10,8	4,65625	0,4	0,2

Tabla 6: Parámetros característicos de la placa utilizada para las medidas

La fórmula utilizada (3), anteriormente explicada en el apartado 2.5, se expone a continuación:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 D}{a^4 \rho} \left\{ G_x^4 + G_y^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 [\nu H_x H_y + (1 - \nu) J_x J_y] \right\} \quad (3)$$

Una vez presentados los parámetros y la fórmula, en la tabla 8 se muestran los resultados de los cálculos de los primeros 5 modos que serán analizados posteriormente mediante simulación numérica y medidas experimentales.

Modo		Frecuencia
m	n	Hz
0	1	0
1	0	0
2	0	33,8
1	1	41,6
2	1	91,1
3	0	93,3
0	2	135,4

Tabla 7: Resultados analíticos de las 5 primeras frecuencias modales de la placa rectangular libre

Como se ha comentado en el apartado 2.5, según la Tabla 2 de coeficientes, los primeros modos tendrán frecuencias cero, ya que corresponden a la rígida traslación de la estructura en la dirección transversal y a las rotaciones rígidas de la placa alrededor de los ejes de simetría [13].

5.2 Simulación en elementos finitos

Después de realizar los cálculos analíticos, se van a exponer los resultados numéricos obtenidos a través de una simulación con el software de elementos finitos *COMSOL Multiphysics*. Para ello, se modela la geometría de la placa con las medidas de sus dimensiones y los agujeros realizados para ser sujeta.

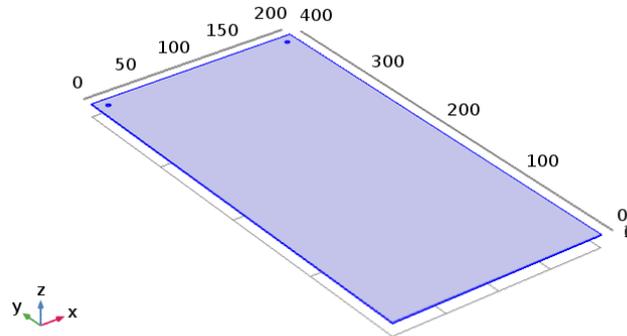


Figura 60: Modelo geométrico de la placa empleado para la simulación numérica

Tras realizar el modelado geométrico, se realiza el modelo numérico empleando el módulo de mecánica para obtener las frecuencias propias. Se utilizan las propiedades del titanio de densidad (ρ), coeficiente de Poisson (ν) y módulo de Young (E). Con el módulo de Young utilizado, la frecuencia es de 32 Hz, por lo que se decide realizar de nuevo un ajuste del módulo de Young, similar al realizado con el diapasón, para obtener la primera frecuencia modal cercana a la calculada analíticamente, ya que se desconoce el valor exacto de este parámetro y el material o aleación de materiales que componen la placa.

La estructura se coloca en condiciones de contorno libres para todos los bordes. Los resultados obtenidos de frecuencias modales de los 5 primeros modos se presentan en la tabla 9.

Modo		Frecuencia
m	n	Hz
2	0	33,7
1	1	41,0
2	1	90,6
3	0	93,7
0	2	139,1

Tabla 8: Frecuencias de los 5 primeros modos de la placa obtenidas mediante simulación numérica

Tras las frecuencias, se pasa a analizar las formas modales obtenidas con la simulación de los 5 primeros modos.

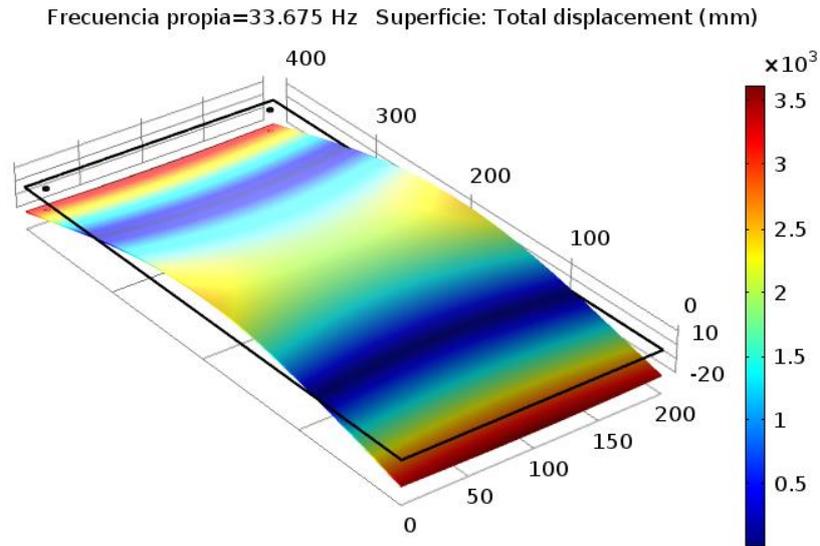


Figura 61: Primer modo de la placa obtenido con simulación numérica

El primer modo está situado sobre los 33 Hz con una forma modal que tiene sus máximos de desplazamiento en los extremos del eje Y, 2 nodos próximos a 100 mm y 300 mm del mismo eje y un antinodo en el centro, por lo que se trata de un modo (2,0). Este modo tiene doble simetría en los ejes X – Y, ya que se produce un efecto espejo en ambas mitades, al ser el desplazamiento hacia la misma dirección en los máximos.

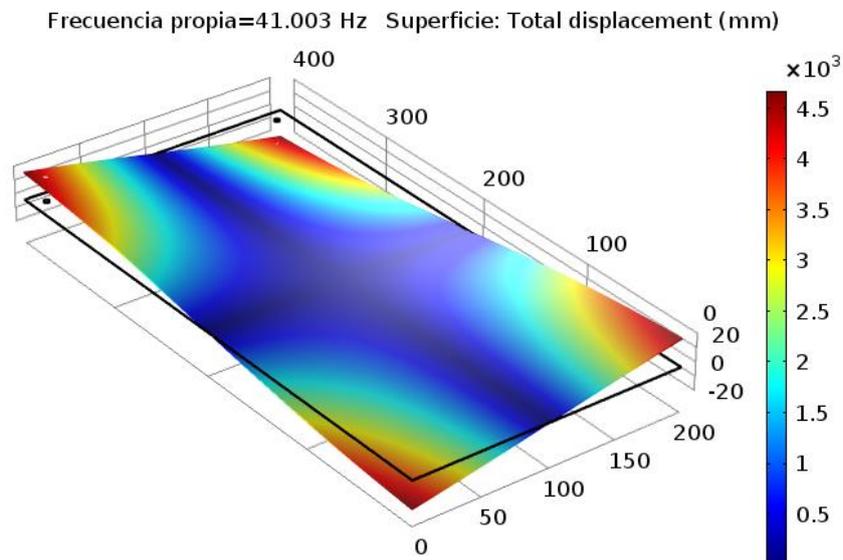


Figura 62: Segundo modo de la placa obtenido con simulación numérica

El segundo modo tiene una frecuencia modal de 41 Hz con máximos de desplazamiento en las 4 esquinas de la placa y un nodo en el punto medio de cada eje apareciendo así las medianas nodales en el centro, por lo que se deduce que se trata de un modo (1,1). Se trata de un modo con doble antisimetría en los ejes X – Y, ya que se producen desplazamientos en direcciones inversas en ambas mitades.

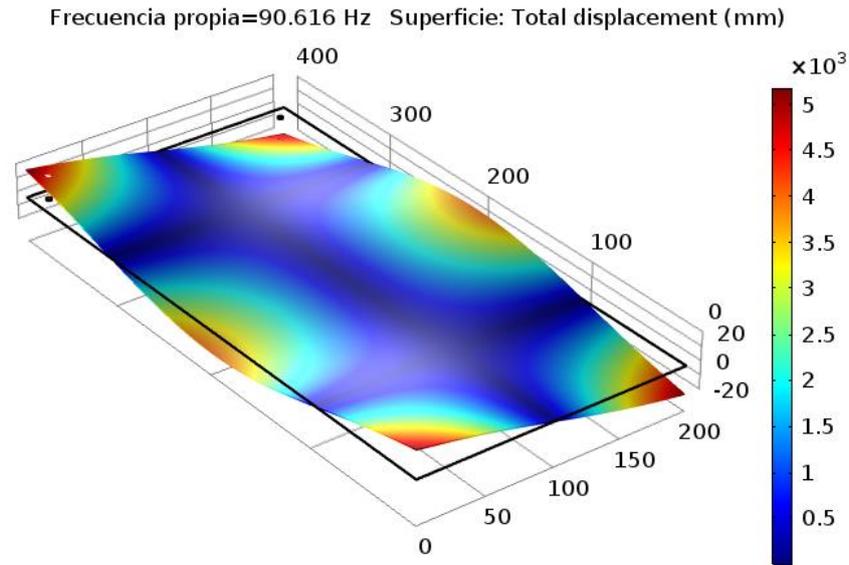


Figura 63: Tercer modo de la placa obtenido con simulación numérica

El tercer modo que se representa tiene su frecuencia modal cercana a los 90 Hz y aparecen 6 máximos de desplazamiento que se sitúan en las 4 esquinas y los otros dos en el punto medio del eje Y pegados a los bordes del eje X. Se pueden observar dos nodos en el eje X cercanos a 100 mm y 300 mm y un nodo en el medio del eje Y, por lo que aparece la mediana nodal larga en el centro. Esto indica que se trata de un modo (2,1) que tiene simetría en el eje X, pero en el eje Y tiene antisimetría al ser inverso el desplazamiento.

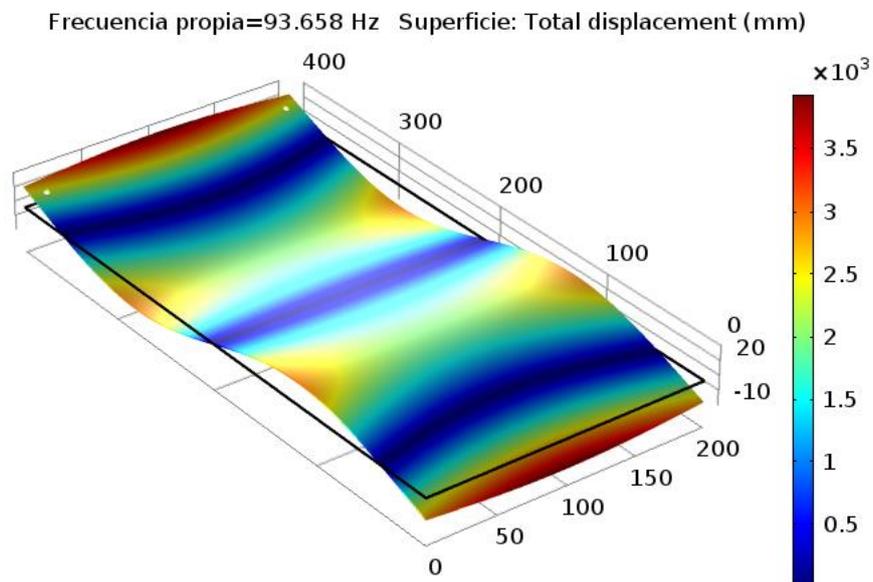


Figura 64: Cuarto modo de la placa obtenido con simulación numérica

El cuarto modo detectado se sitúa en torno a los 93 Hz y tiene máximos en los bordes del eje Y. Aparecen 3 nodos a lo largo del eje X situados tras los máximos de los bordes y en el punto medio apareciendo así la mediana nodal corta en el centro, por lo que se reconoce el modo (3,0). En este caso, este modo tiene antisimetría en el eje X y simetría en el eje Y según el desplazamiento de ambas mitades.

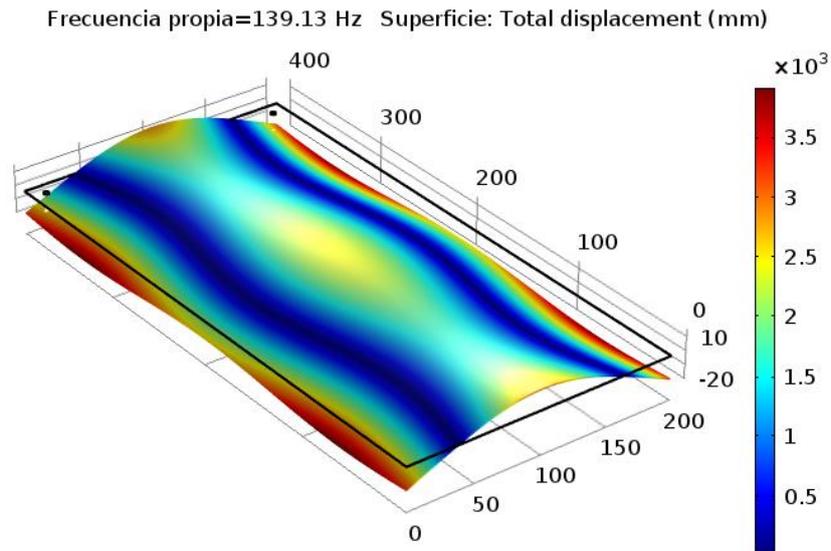


Figura 65: Quinto modo de la placa obtenido con simulación numérica

El quinto modo tiene su frecuencia modal en torno a 139 Hz con máximos de desplazamiento en los límites del eje X y que recorren casi todo el eje Y al completo. Aparecen también 2 nodos tras cada uno de estos máximos y un antinodo en el centro, deduciéndose que se trata del modo (0,2). Este modo tiene simetría doble en los ejes X – Y, al igual que el primer modo detectado.

5.3 Medidas experimentales

Para la realización de las medidas experimentales se ha utiliza un sistema de soporte con dos trípodes y un puente para focos del cual se colgarán las gomas que irán a los agujeros de la placa. Este sistema permite simular las condiciones libres de la placa en todos los bordes. También se fijan las gomas en el puente con 2 pinzas para evitar posibles movimientos que desestabilicen la placa. El montaje empleado puede observarse en la figura 26.

Las medidas se realizan utilizando 2 puntos diferentes de excitación, tratando de colocar el shaker en puntos que no coincidan con nodos para no influir en la aparición de los modos que se pretenden visualizar. En cambio, en las distintas medidas se varían los puntos de recepción del vibrómetro para obtener diferentes respuestas frecuenciales que permitan visualizar los modos. En la figura 66 aparecen los distintos puntos de excitación y recepción.

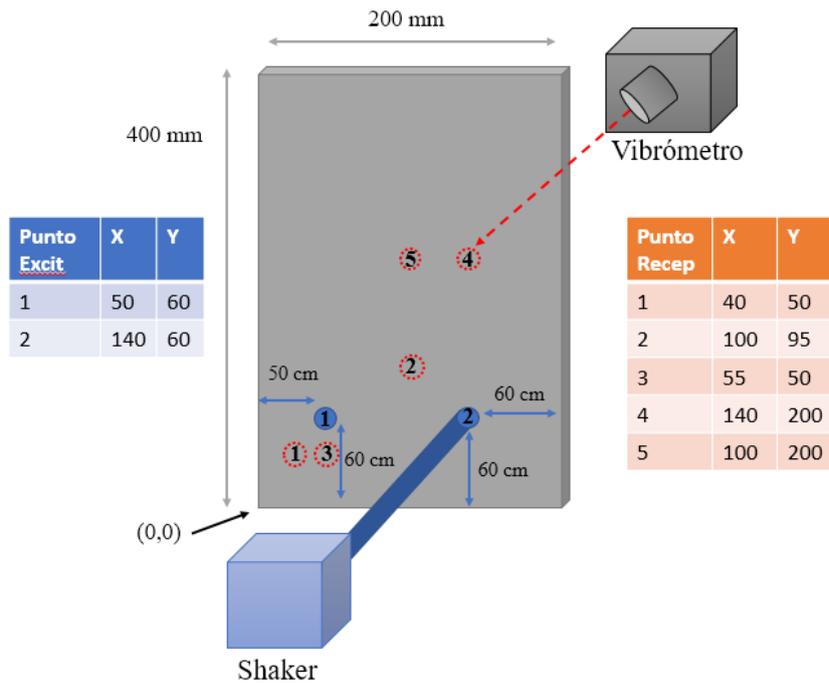


Figura 66: Montaje experimental de la placa con los puntos de excitación (azul) y recepción (rojo)

Las medidas consisten en la realización de barridos frecuenciales desde 1 Hz hasta 150 Hz cada 2 Hz realizando un promedio de 5 medidas de 1s en cada frecuencia de paso.

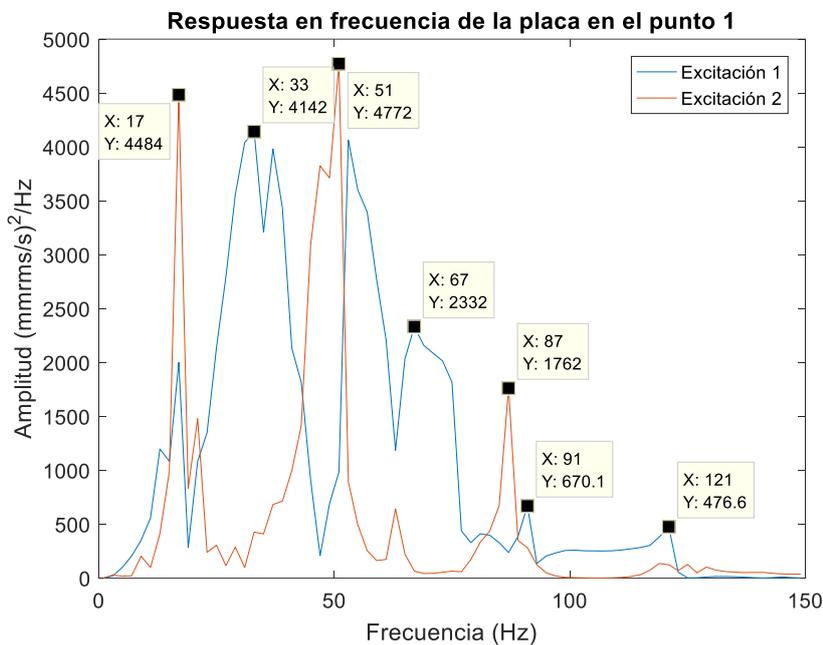


Figura 67: Medida de los modos de la placa en el punto 1

En el primer punto se observan hasta 9 modos con frecuencias próximas a 17 Hz, 21 Hz, 33 Hz, 51 Hz, 67 Hz, 75 Hz, 87 Hz, 91 Hz y 121 Hz. Como era de esperar, la amplitud observada baja a medida que se aumenta la frecuencia debido a que existe menor desplazamiento.

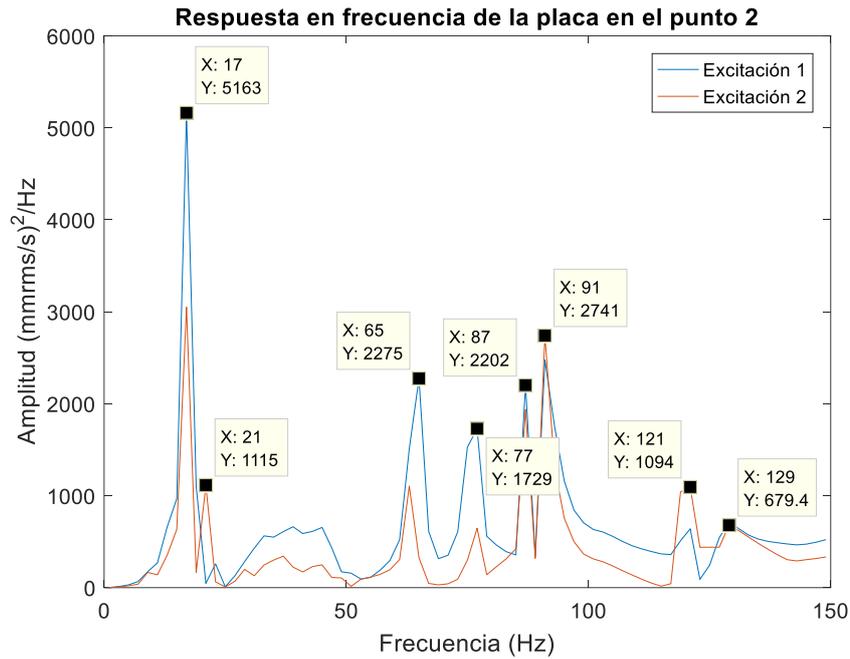


Figura 68: Medida de los modos de la placa en el punto 1

En el segundo punto, se puede observar que el segundo y tercer modo anteriores se han desaparecido, lo cual es debido a que en el punto elegido (X:100 mm Y:95 mm) para la recepción se sitúa en un nodo de dichos modos. Se detectan un total de 8 posibles modos con frecuencias de 17 Hz, 21 Hz, 65 Hz, 77 Hz, 87 Hz, 91 Hz, 121 Hz y 129 Hz.

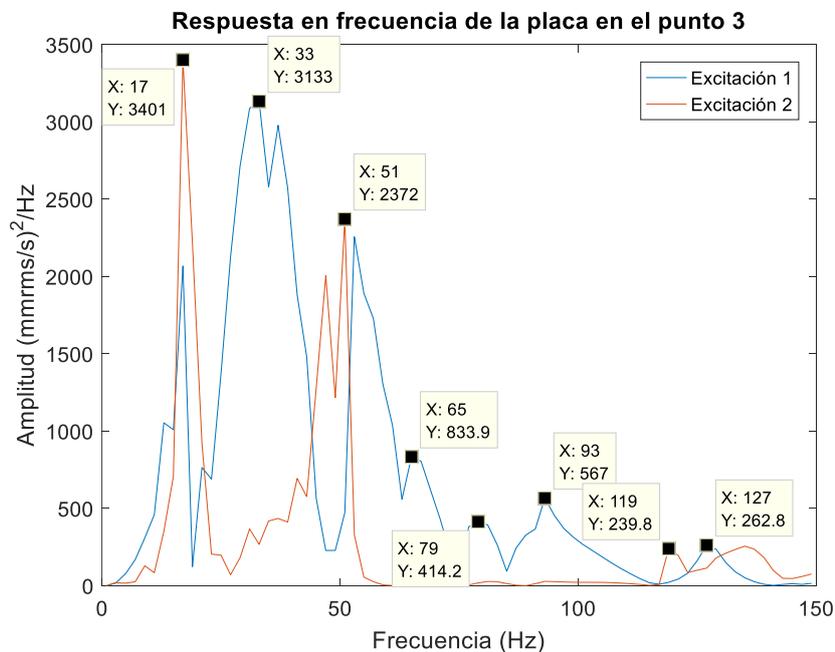


Figura 69: Medida de los modos de la placa en el punto 3

En el tercer punto, se observan los mismos modos que en el punto 1 pero se percibe una atenuación de las amplitudes de los modos de mayor frecuencia. Las frecuencias modales detectadas son 17 Hz, 33 Hz, 51 Hz, 65 Hz, 79 Hz, 93 Hz, 119 Hz y 127 Hz.

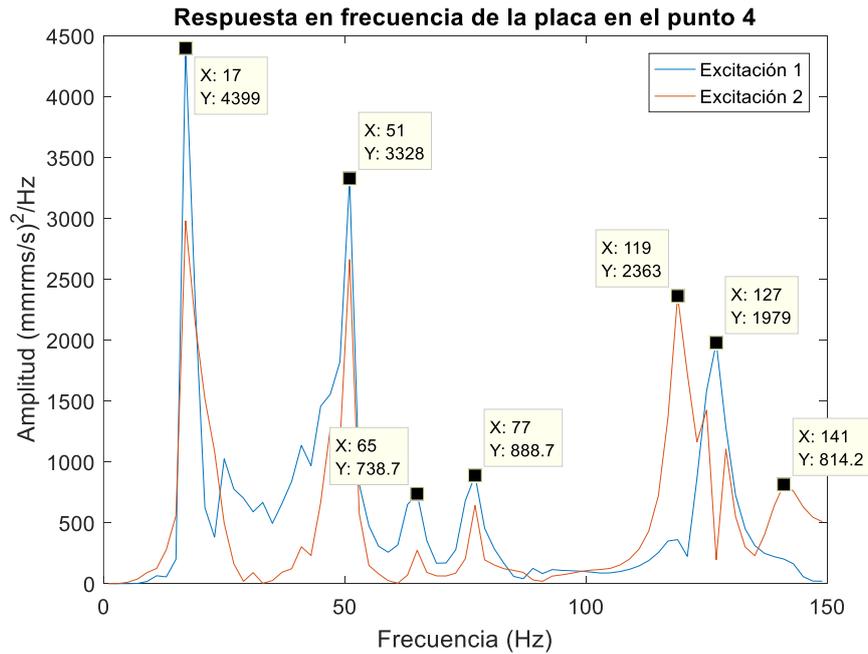


Figura 70: Medida de los modos de la placa en el punto 4

En el cuarto punto, el segundo modo no aparece y los modos 5° y 6° cercanos a los 90 Hz tampoco, lo cual indica que el punto de recepción es cercano a los nodos de estos. Se detectan modos con frecuencias 17 Hz, 25 Hz, 51 Hz, 65 Hz, 77 Hz, 119 Hz, 127 Hz, y 141 Hz.

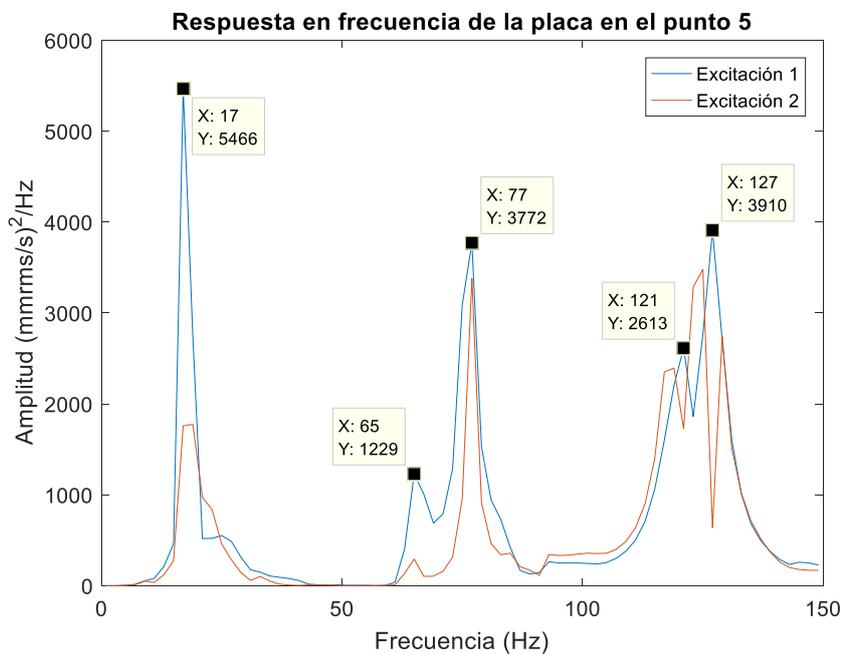


Figura 71: Medida de los modos de la placa en el punto 5

En el último punto, aparecen solo 5 modos con frecuencias 17 Hz, 65 Hz, 77 Hz, 121 Hz y 127 Hz. Tras las medidas se recoge en la tabla 10 los modos y frecuencias detectadas en los diferentes puntos.

Modo	Frecuencia (Hz)				
	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4	Punto 5
1	17	17	17	17	17
3	33	-	33	-	-
4	51	-	51	51	-
5	67	65	65	65	65
6	-	77	79	77	77
7	87	87	-	-	-
8	91	91	93	-	-
9	121	121	119	119	121
10	-	129	127	127	127
11	-	-	-	141	-

Tabla 9: Resumen de las frecuencias de los modos detectados experimentalmente

Una vez detectadas las frecuencias, se procede a analizar las formas modales de cada modo para observarlos con detalle y poder identificarlos. Para ello, se realiza un barrido de un plano de la placa que cubre un espacio de 150 x 150 mm de la parte inferior de ésta, lo cual puede dar una idea de la forma modal de las frecuencias detectadas. Se realizan medidas cada 25 mm a la frecuencia elegida con las posiciones de excitación antes utilizadas y realizando un promedio de 5 medidas de 1 s para obtener las amplitudes de desplazamiento.



Figura 72: Forma modal del primer modo experimental de la placa

El primer modo analizado es el que tiene frecuencia modal de 17 Hz y que aparece en todos los puntos de recepción utilizados. Este modo se encuentra por debajo del primero esperado en la placa y se puede percibir que existe desplazamiento en toda la zona medida. Esto da indicios de que se puede tratar de una rotación rígida, donde la placa se desplaza como un conjunto alrededor de los ejes de simetría. Este caso estaba contemplado para los primeros modos que tenían frecuencia cero según la teoría descrita en el apartado 2.5.

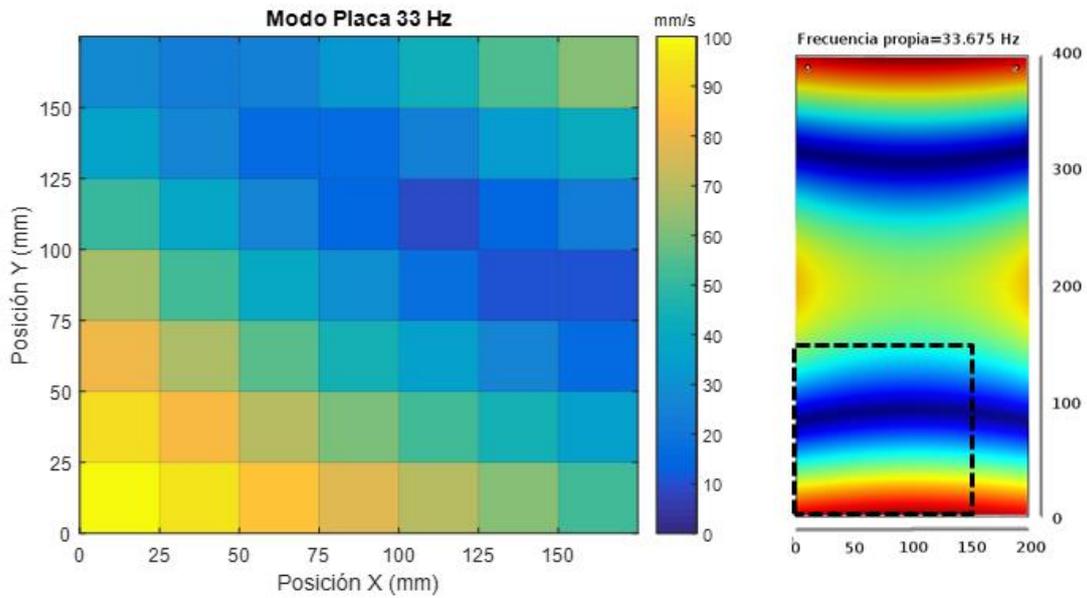


Figura 73: Forma modal del segundo modo experimental de la placa

El segundo modo obtenido experimentalmente tiene máximos de amplitud en la esquina superior derecha y en borde inferior, por lo que tiene similitudes con el primer modo simulado que tiene igual frecuencia.

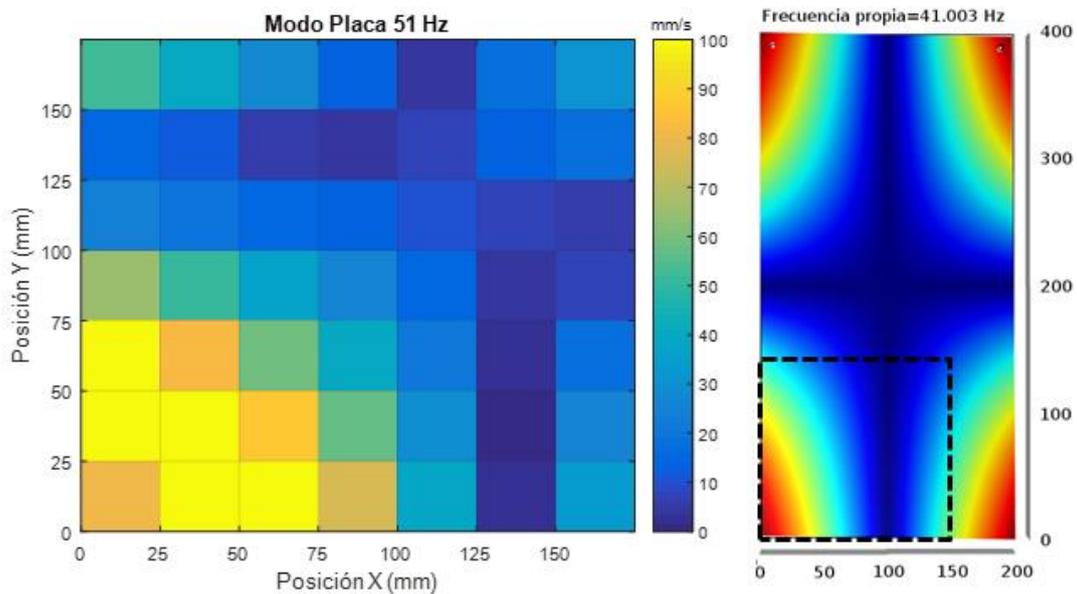


Figura 74: Forma modal del tercer modo experimental de la placa

El tercer modo tiene una forma modal que tiene parecido con el segundo modo simulado al tener la esquina inferior izquierda con máximos de amplitud de desplazamiento y nodos en la zona superior y derecha, lo cual encajaría el modo (1,1).

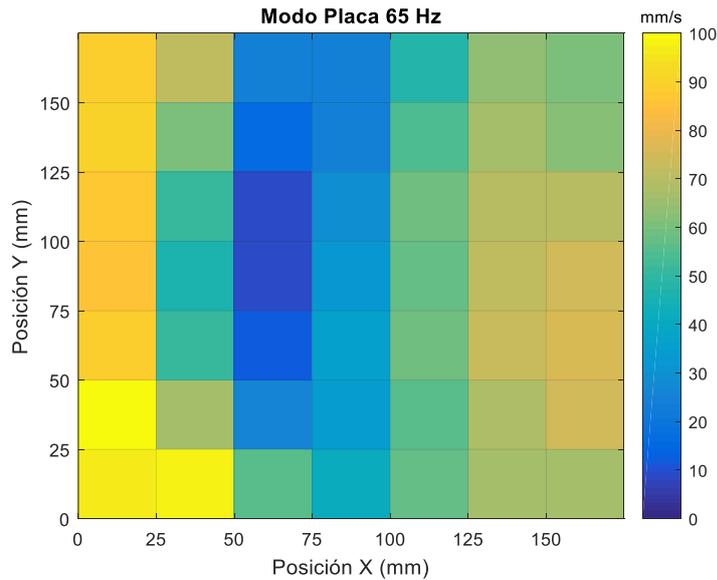


Figura 75: Forma modal del cuarto modo experimental de la placa

La forma modal del cuarto modo cuenta con máximos en el borde del eje X, tras esto un nodo a lo largo del eje vertical y después otro aumento de amplitud. Tanto la forma como la frecuencia modal no guardan relación con ningún modo obtenido en los otros métodos, por lo que se descarta.

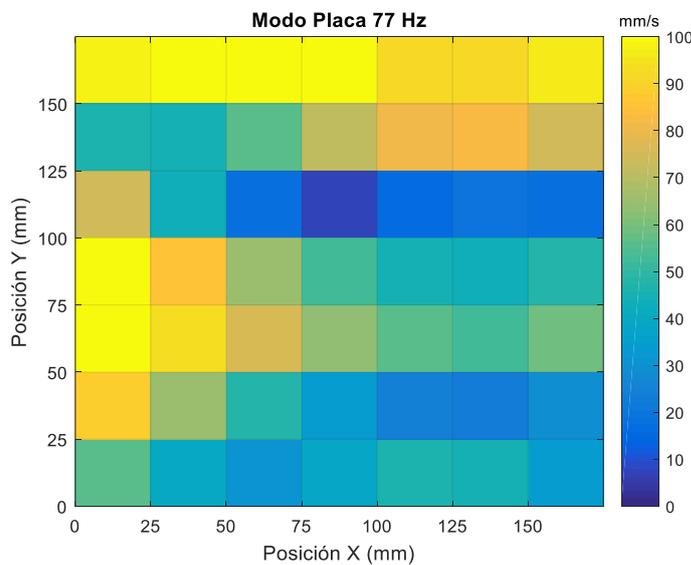


Figura 76: Forma modal del quinto modo experimental de la placa

El quinto modo percibido tiene amplitud alta a lo largo del límite superior del eje X con una zona también de máximo cercana a la esquina inferior contigua al borde la placa. Esta forma y frecuencia modal tampoco guarda relación con ningún modo obtenido, por lo que se descarta igualmente.

A partir de las siguientes frecuencias aparecían más dificultades a la hora de obtener la forma modal con este método por la baja amplitud de desplazamiento, por lo que se descartó realizar más medidas en plano.

5.4 Resumen de resultados de la placa

Para finalizar se presenta la tabla con las frecuencias modales obtenidas con cada método de análisis utilizado con la placa.

Modo		Analítico	Simulación	Experimental
m	n	Frec (Hz)	Frec (Hz)	Frec (Hz)
-	-	-	-	17
2	0	33,8	33,7	33
1	1	41,6	41,0	51
2	1	91,1	90,6	87
3	0	93,3	93,7	91
0	2	135,4	139,1	127

Tabla 10: Resumen de las frecuencias modales de la placa obtenidas con los diferentes métodos

Los resultados de las frecuencias modales de los diferentes métodos empleados para analizar la placa tienen similitudes en los 5 primeros modos obtenidos. Las formas modales, en cambio, presentaron más dificultades a la hora de obtener resultados, por las limitaciones del método de medida empleado, pero los modos que se midieron correctamente sí proporcionan resultados similares lo esperado. Cabe destacar la identificación de la primera frecuencia modal experimental que por su forma modal y su baja frecuencia encaja con la rotación rígida de la placa, la cual no tenía frecuencia analítica.

6 Conclusiones

En este trabajo, se ha realizado la puesta a punto y caracterización del sistema de medida de vibraciones mediante Vibrometría Láser Doppler de reciente adquisición por parte del laboratorio de acústica. Para completar el objetivo se han realizado dos tareas, en primer lugar, se ha caracterizado el sistema de medición, así como las diferentes variables de medida del sistema. En segundo lugar, se ha validado su funcionamiento por medio del análisis vibracional de dos estructuras: el estudio de los modos propios de un diapasón y las ondas flexionales en una placa delgada rectangular.

Durante el trabajo se realizó el diseño del protocolo de medidas para el análisis de las estructuras y las posteriores medidas experimentales con el sistema vibrométrico. Los resultados obtenidos en las mediciones fueron comparados con los cálculos teóricos y las simulaciones realizadas empleando el método de elementos finitos. En ambas estructuras, las comparaciones por frecuencias modales dan lugar a resultados que concuerdan en los tres métodos empleados de análisis teórico, simulación numérica y análisis experimental. Concretamente, en el caso del diapasón se han podido identificar los dos primeros modos en plano y en la placa delgada, los cinco primeros modos propios. Además, también se han obtenido mediante simulación y experimentación las formas modales que permiten la identificación adecuada de los modos propios de ambas estructuras, en los casos en los que ha sido posible.

Este método resulta un gran avance en la medida de las vibraciones, ya que permite la realización de medidas con bajos tiempos de ensayo y gran precisión. Otra gran ventaja es la posibilidad de realizar medidas no intrusivas evitando posibles errores en los resultados, ya que el vibrómetro no necesita estar en contacto con la estructura a medir.

Este trabajo sirve de utilidad para futuros estudios que empleen el sistema de medición mencionado, ya que se presentan múltiples pruebas de las condiciones de medida que deberán tenerse en cuenta. También sirve de introducción a la medida de vibraciones mediante la Vibrometría Láser Doppler proporcionando un primer acercamiento a los métodos de análisis de estructuras simples.

En futuros estudios, se propone la mejora del sistema utilizado introduciendo información de la fase del desplazamiento que permitiría conocer mejor la simetría de los modos caracterizados. Otro posible parámetro que sería de interés sería la fuerza introducida por el excitador, que permitiría poder hacer una función de transferencia que compare la señal de excitación y la recibida.

7 Bibliografía

1. **He, J., Fu, Z.F.** *Modal Analysis*. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2001. 0-7506-5079-6.
2. *Optical methods for distance and displacement measurements*. **Berkovic G., Shafir E.** 4, Yavne : Optical Society of America, 2012, Vol. Advances in Optics and Photonics, págs. 441 - 471.
3. **Polytec.** *CLV-2534-2 User Manual*. Waldbronn : Polytec GmbH, 2011.
4. **Russell, D.** Acoustics and Vibration Animations. [En línea] Pennsylvania State University, 24 de Enero de 2012. <http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/TuningFork/fork-modes.html>.
5. *On the acoustics of tuning forks*. **Rossing, T. D., Russel, D. A., Brown, D. E.** 7, Illinois : American Journal of Physics, 1992, Vol. 60.
6. **Ventsel, E., Krauthammer, T.** *Thin Plates and Shells*. New York : Marcel Dekker, 2001. 0-8247-0575-0.
7. **Leissa, A. W.** *Vibration of plates*. Columbus : National Aeronautics and Space Administration, 1969.
8. *Vibration of Free Rectangular Plates*. **Waller, M. D.** 5, London : Physical Society, 1 de Mayo de 1949, The Proceedings of the Physical Society, Vol. 62, pág. 353 B.
9. **Inman, D.J.** *Engineering vibration*. New Jersey : Pearson Education, 2008. 0-13-228173-2.
10. *Laser Doppler Vibrometry: Development of advanced solutions answering to technology's need*. **Castellini P., Martarelli M., Tomasini E.P.** 20, Ancona : Elsevier, 2006, Vol. Mechanical Systems and Signal Processing, págs. 1265 - 1285.
11. *The origin of the tuning fork*. **Bickerton R. C., Barr G. S.** Stoke-on-Trent : Journal of the Royal Society of Medicine, 1987, Vol. 80.
12. **Wikipedia.** Tuning fork. [En línea] https://en.wikipedia.org/wiki/Tuning_fork.
13. *The free vibration of rectangular plates*. **Leissa, A. W.** Ohio : Journal of Sound and Vibration, 1973, Vol. 31, págs. 257-193.
14. *The Vibration of Rectangular Plates*. **Warburton, G. B.** 12, s.l. : Institute of Mechanical Engineers, 1954, Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Vol. 168, págs. 371-384.