



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Universitat Politècnica de València

# **Diseño, modelado y control del sistema de propulsión para un vehículo aéreo no tripulado basado en globo aerostático dirigible**

Trabajo Fin de Grado

**Grado en Ingeniería Aeroespacial**

**Autor:** Rodrigo Penadés Mañes

**Tutor:** Sergio García-Nieto Rodríguez

2016/2017



## Resumen

El presente documento recoge el trabajo realizado sobre un globo dirigible disponible en el laboratorio del Grupo de Control Predictivo y Optimización Heurística, CPOH, del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, DISA, de la Universidad Politécnica de Valencia. Primero, se ha estudiado y aplicado un modelo matemático completo. A continuación, en base a los resultados de las estimaciones semi-empíricas de los efectos aerodinámicos, se ha diseñado el conjunto propulsivo junto con la electrónica necesaria para proporcionarle la capacidad de volar autónomamente una ruta preestablecida. A este efecto, se ha diseñado un control de vuelo en dos fases basado en la teoría de realimentación de estados y la técnica LQR con la ayuda de *Matlab Simulink* y *Wolfram Mathematica*. Finalmente, se ha validado el conjunto del trabajo mediante distintas simulaciones.

**Palabras clave:** Dirigible, UAV, Sistema propulsivo, Control automático, Control de vuelo, LQR



# Índice General

RESUMEN.....	I
ÍNDICE GENERAL .....	III
LISTA DE FIGURAS.....	V
LISTA DE TABLAS .....	VII
NOMENCLATURA .....	IX
MEMORIA.....	1
<b>1. Introducción .....</b>	<b>1</b>
1.1 Base del proyecto .....	1
1.2 Estado del arte.....	2
1.3 Objetivos y alcance del proyecto.....	4
<b>2. Modelo matemático del dirigible .....</b>	<b>5</b>
2.1 Hipótesis del modelo .....	5
2.2 Propiedades y geometría del globo .....	5
2.3 Sistemas de referencia .....	6
2.4 Ángulos de Euler y transformación de ejes .....	7
2.5 Ecuaciones del movimiento en el vacío.....	9
2.6 Aerostática.....	10
2.7 Aerodinámica.....	11
2.7.1 Masa aparente y momento de Munk.....	11
2.7.2 Efectos viscosos en movimientos transversales.....	14
2.7.3 Resistencia axial .....	16
2.8 Derivadas de los ángulos de Euler en función de las velocidades angulares .....	16
2.9 Ecuaciones cinemáticas .....	17
2.10 Resumen y reordenación.....	17
2.10.1 Ecuaciones generales.....	19
<b>3. Diseño mecánico del sistema propulsivo .....</b>	<b>21</b>
3.1 Limitaciones y condicionantes del proyecto .....	21
3.2 Soluciones alternativas.....	22
3.2.1 Configuración 1 .....	23
3.2.2 Configuración 2 .....	24
3.2.3 Configuración 3 .....	26
3.3 Equipos y piezas de la configuración elegida.....	27
3.3.1 Motores.....	27
3.3.2 Hélices .....	28
3.3.3 ESC.....	28
3.3.4 Batería .....	29
3.3.5 Controladora y estación en tierra .....	30
3.3.6 GPS .....	30
3.3.7 Piezas reutilizadas .....	31

3.3.8	Anclaje del motor .....	31
3.4	Ensamblaje del conjunto .....	32
3.5	Pesos y matriz de inercia .....	33
3.6	Términos de control .....	35
<b>4.</b>	<b>Diseño e implementación del control .....</b>	<b>37</b>
4.1	Introducción .....	37
4.2	Implementación de las ecuaciones .....	37
4.2.1	Mathematica .....	38
4.2.2	Simulink.....	38
4.3	Linealización del modelo .....	40
4.3.1	Punto de funcionamiento .....	40
4.3.2	Comportamiento del sistema.....	41
4.3.1	Modelo lineal en espacio de estados .....	43
4.4	Análisis dinámico .....	45
4.4.1	Análisis de estabilidad .....	45
4.4.2	Controlabilidad y observabilidad .....	46
4.5	Diseño del control.....	47
4.5.1	Etapa de navegación .....	48
4.5.2	Control por realimentación de los estados .....	51
4.5.3	Diseño de la matriz de realimentación de los estados.....	53
4.5.4	Etapa de realimentación de los estados .....	54
4.5.5	Visualización 3D .....	55
<b>5.</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>57</b>
5.1	Primera prueba.....	57
5.1.1	Explicación de la ruta .....	57
5.1.2	Resultados de la simulación .....	58
5.2	Segunda prueba.....	60
5.2.1	Explicación de la ruta .....	60
5.2.2	Resultados de la simulación .....	60
<b>6.</b>	<b>Conclusiones.....</b>	<b>64</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>65</b>
	<b>ANEXO A. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES .....</b>	<b>67</b>
A.1	Prueba 1 .....	67
A.2	Prueba 2 .....	70

## Lista de Figuras

Figura 1 Publizepelines, modelo 1,7m RC de 500L [7] .....	2
Figura 2 Dirigible FZ800E [4] y aeroestato TCOM [11] .....	3
Figura 3 MkII ALTAV (izq.) y detalle de uno de los brazos de la propulsión (der.) [12] .....	3
Figura 4 Aproximación del globo como un elipsoide de revolución y sus cotas en mm.....	5
Figura 5 Vista isométrica de un render del globo en Catia .....	6
Figura 6 Sistemas de ejes empleados.....	7
Figura 7 Vistas del render en Catia para la propuesta de diseño 1, híbrido blimcopter.....	23
Figura 8 Concepto híbrido para transporte de grandes cargas [30] .....	24
Figura 9 Modelado 3D de la propuesta de diseño 2 .....	25
Figura 10 Vistas en detalle de un render de un concepto para el brazo propulsivo.....	25
Figura 11 Vistas del modelado 3D de la propuesta de diseño 3 .....	26
Figura 12 Motor RX1105 .....	27
Figura 13 Hélice antigua (Arriba) y hélices RX2030 (Abajo) .....	28
Figura 14 ESC YGE 8S .....	29
Figura 15 Controladora con antena (izq.) y estación en tierra (der.).....	30
Figura 16 Unidad GPS Ublox M8N.....	30
Figura 17 Cabina del dirigible, dimensiones principales. Cotas en mm .....	31
Figura 18 Vistas del anclaje del motor a la barra. Cotas en mm .....	32
Figura 19 Vista del montaje del sistema propulsivo .....	33
Figura 20 Esquema de conexión completo [33] [34].....	33
Figura 21 Posición del CDG en función de u para que $\theta$ sea cero.....	35
Figura 22 Esquema geométrico de la posición y ángulo de la propulsión y en el contexto del globo .	36
Figura 23 Interior del subsistema del modelo no lineal.....	39
Figura 24 Esquema interno en Simulink del bloque subsystem que contiene el numerador de una de las aceleraciones del sistema, du. ....	39
Figura 25 Variación de la propulsión y $\theta$ en un rango de velocidades.....	40
Figura 26 Respuesta de la dinámica longitudinal del dirigible a un escalón de 0,01 N en cada motor simultáneamente .....	41
Figura 27 Respuesta de la dinámica completa del dirigible a un escalón de 0,01 N en cada motor simultáneamente. Cambio en las condiciones iniciales .....	42
Figura 28 Evolución del ángulo $\psi$ en el tiempo .....	43
Figura 29 Esquema del sistema lineal en espacio de estados.....	44
Figura 33 Esquema del control.....	48
Figura 31 Programa del control en Simulink. ....	48
Figura 32 Etapa de Navegación .....	48
Figura 33 Una posible situación del dirigible volando de A a B en rumbo 180° .....	50
Figura 34 Código en Matlab para corregir la referencia .....	50
Figura 35 Esquema de un sistema en espacio de estados realimentado .....	51
Figura 36 Esquema de la realimentación de estado con seguimiento de las referencias .....	52
Figura 37 Etapa de realimentación de los estados.....	54
Figura 38 Conexión Simulink con FlightGear.....	55
Figura 39 Bloque de conexión con FlightGear.....	55
Figura 40 Captura de pantalla con el Zeppelin NT en el entorno FlightGear .....	56
Figura 41 Ruta de la primera prueba de vuelo.....	57
Figura 42 Resultados de la primera prueba de vuelo.....	58
Figura 43 Detalle de la acción de control de la primera prueba .....	59

Figura 44 Ruta espiral de la segunda prueba de vuelo .....	60
Figura 45 Vistas de los resultados de la segunda prueba de vuelo.....	61
Figura 46 Detalle de la actuación de los motores durante la segunda prueba.....	62
Figura 47 Comparativa de las trayectorias realizadas por dirigible con control y en el punto de funcionamiento .....	63
Figura 48 Actuadores del sistema en la primera prueba de vuelo.....	67
Figura 49 Respuesta de la dinámica longitudinal durante la primera prueba de vuelo .....	68
Figura 50 Respuesta de la dinámica longitudinal-lateral durante la primera prueba de vuelo.....	69
Figura 51 Actuadores del sistema durante la segunda prueba de vuelo .....	70
Figura 52 Respuesta de la dinámica longitudinal durante la segunda prueba .....	71
Figura 53 Respuesta de la dinámica lateral-direccional durante la segunda prueba .....	72



## Lista de Tablas

Tabla 1 Especificaciones del globo .....	1
Tabla 2 Características geométricas del globo .....	6
Tabla 3 Constantes y parámetros derivados de la geometría del globo.....	18
Tabla 4 Cálculo de la carga disponible .....	21
Tabla 5 Resistencia aerodinámica frente a la velocidad de vuelo horizontal .....	22
Tabla 6 Resistencia aerodinámica en ascenso vertical.....	22
Tabla 7 Especificaciones del motor RX1105 .....	27
Tabla 8 Pruebas de Empuje con el motor [30] .....	28
Tabla 9 Especificaciones técnicas de la ESC .....	29
Tabla 10 Especificaciones de la batería .....	29
Tabla 11 Dimensiones y pesos de la cabina, servo y tubo .....	31
Tabla 12 Pesos del dirigible .....	34
Tabla 13 Estructura del vector entradas $\mathbf{u}$ para el bloque Fcn de Simulink.....	38
Tabla 14 Polos del sistema .....	45
Tabla 15 Polos del sistema incluyendo el Momento de Munk .....	46
Tabla 16 Selección de índices de controlabilidad del sistema .....	47
Tabla 17 Descripción de las entradas y salidas del bloque de navegación .....	49
Tabla 18 Datos del punto de funcionamiento para la trayectoria espiral .....	62



## Nomenclatura

$a$	Semieje mayor del elipsoide prolato
$\mathbf{A, B, C, D}$	Matrices del sistema linealizado
$b, c$	Semiejes menores del elipsoide prolato
$\mathcal{C}$	Matriz de controlabilidad
$C_{dn}$	Coefficiente de resistencia aerodinámica para un cilindro infinito situado normal al flujo
$C_{d0}$	Coefficiente de resistencia axial
$F_i$	Escalar. Fuerza del motor $i$
$\mathbf{F}$	Vector fuerza
$FR = a/b$	Ratio de esbeltez o finura
$g$	Aceleración de la gravedad
$\mathbf{g}$	Vector aceleración en ejes horizonte local
$I_{ij}$	Momentos y productos de inercia.
$\mathbf{J}$	3x3 Tensor de inercia
$\mathbf{J}$	Función de coste
$k_1, k_2, k_3$	Factores de masa añadida o aparente del elipsoide.
$k_{v_i}$	Control revoluciones motor
$K_{\dot{p}}$	Derivada del momento debido a masa aparente en el eje X debida a la aceleración $\dot{p}$
$\mathbf{K}$	3x11 Matriz de ganancias para la realimentación de los estados
$L$	Longitud total del dirigible
$\mathbf{L}_B$	Vector sustentación aerostática en ejes horizonte local
$m$	Masa del dirigible
$m', I'$	Masa e Inercia del volumen de aire desplazado por dirigible
$\mathbf{M}$	6x6 Matriz de masas
$\mathbf{M}_A$	6x6 Matriz de masa aparente
$\mathbf{M}_C$	Vector de momentos debidos a las fuerzas de control
$\mathbf{M}_{o \leftarrow HL}$	3x3 Matriz de transformación ejes horizonte local a ejes cuerpo
$\mathbf{M}_{ij}$	3x3 Submatriz de la matriz de masa aparente
$M_{\dot{q}}$	Derivada del momento debido a masa aparente en el eje Y debida a la aceleración $\dot{q}$
$N_{\dot{r}}$	Derivada del momento debido a masa aparente en el eje X debida a la aceleración $\dot{r}$
$q$	Presión dinámica
$\mathbf{Q}$	11x11 Matriz de coste de estados
$\mathbf{r}_B$	Vector desde el origen del sistema ejes cuerpo a la posición del centro de flotación
$\mathbf{r}_C$	Vector desde el origen del sistema ejes cuerpo a la posición del motor
$\mathbf{r}_G$	Vector desde el origen del sistema ejes cuerpo a la posición del centro de gravedad
$\mathbf{r}_V$	Vector desde el origen del sistema ejes cuerpo a la posición de efectos viscosos
$\mathbf{ref}$	Vector de referencias
$R$	Función del radio respecto a la coordenada $\varepsilon$
$\mathbf{R}$	3x3 Matriz de coste del control
$Re = V L/\nu$	Número de Reynolds
$S$	Función de la sección transversal respecto a la coordenada $\varepsilon$
$S_{ref} = Vol^{2/3}$	Superficie de referencia del dirigible
$\mathbf{U}$	Vector de entradas de control
$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_o^T, \boldsymbol{\omega}_o^T]^T$	Vector de velocidades generalizadas
$\mathbf{v}_o = [u_0, v_0, w_0]^T$	Velocidad lineal
$V$	Módulo de la velocidad
$Vol$	Volumen del globo
$\mathbf{w}$	Vector con las referencias del control en el punto de funcionamiento
$x, y, z$	Coordenadas de un punto en los ejes cuerpo
$x', y', z'$	Coordenadas del dirigible en el sistema inercial
$X, Y, Z$	Ejes del triedro ortogonal a derechas del correspondiente sistema de referencia (ver subíndice)

$\mathbf{X}$	8x1 Vector de estados
$\hat{\mathbf{X}}$	11x1 Vector de estados ampliado
$X_{\dot{u}}$	Valor de derivada de la fuerza debida a masa aparente en el eje X debida a la aceleración $\dot{u}$
$\mathbf{Y}$	Vector de salidas
$Y_{\dot{v}}$	Valor de la derivada de la fuerza debida a masa aparente en el eje Y debida a la aceleración $\dot{v}$
$Z_{\dot{w}}$	Valor de la derivada de la fuerza debida a masa aparente en el eje Z debida a la aceleración $\dot{w}$

$\alpha$	Ángulo entre el eje x y el vector velocidad
$\alpha_1, \beta_1$	Integrales geométricas para los factores de masa aparente
$\varepsilon$	Distancia longitudinal desde la <i>nariz</i> del globo
$\gamma$	Ángulo entre el eje x y el vector velocidad en la posición $\varepsilon_V$
$\eta$	Factor de corrección para la resistencia por flujo cruzado en cuerpos finitos
$\lambda_c$	Autovalores del sistema
$\rho$	Densidad del aire a nivel del mar
$\psi$	Ángulo de guiñada, <i>yaw</i>
$\theta$	Ángulo de cabeceo
$\phi$	Ángulo de alabeo
$\boldsymbol{\tau}$	Vector de fuerzas y momentos
$\nu$	Viscosidad cinemática del fluido
$\boldsymbol{\omega}_o = [p_o, q_o, r_o]^T$	Vector velocidad angular

#### Subíndices

A	Masa añadida o aparente
<i>Axial</i>	Resistencia axial
C	Control
B	Flotación
e	Error
eq	Equilibrio
G	Gravedad
HL	En referencia al sistema de ejes Horizonte Local
I	Inercial
o	En referencia al sistema de ejes cuerpo
<i>ref</i>	Referencia del control
T	En referencia al sistema de ejes tierra
V	Viscosidad

#### Siglas, acrónimos

ASL	<i>At Sea Level</i> , a nivel del mar
BEC	<i>Battery eliminator circuit</i> , circuito eliminador de batería
C.B	<i>Center of Buoyancy</i> , centro de flotación
C.G	Centro de gravedad
CW	<i>Clock Wise</i> , en el sentido de las agujas del reloj o giro a derechas
CCW	<i>Counter Clock Wise</i> , sentido contrario a las agujas del reloj o giro a izquierdas
ESC	<i>Electronic Speed Control</i> , controladora electrónica de la velocidad
IMU	Unidad de medición inercial
LTA	<i>Lighter Than Air</i> , más ligeros que el aire
UAV	<i>Unmanned aerial vehicle</i> , vehículo aéreo no tripulado





# Memoria

## 1. Introducción

En los últimos años se ha observado un creciente interés por los vehículos aéreos LTA (Lighter Than Air), más conocidos como globos dirigibles, que se ha traducido en un resurgimiento de proyectos basados en esta plataforma como alternativa a otras aeronaves.

Este aumento de popularidad se debe a las ventajas que ofrece el empleo de fuerzas aerostáticas para generar la sustentación en aplicaciones donde la velocidad no es relativamente importante: desde su empleo con fines publicitarios, pasando por misiones de vigilancia y monitorización del medio ambiente, hasta su uso como *pseudosatélites* de comunicación y plataforma de testeo de sensores en aplicaciones a gran altitud (véase [1],[2] y [3]).

Algunas de estas ventajas frente a helicópteros y aviones, como se mencionan en [4] y [5], son:

- La independencia de la velocidad para generar sustentación conlleva un gasto energético muy inferior.
- Esto posibilita vuelos de larga duración con baterías o depósitos de combustible pequeños.
- La capacidad de flotar les permite permanecer estáticos en el aire.
- También es posible el despegue vertical.
- Posibilidades de integrar tecnología de energía solar para aumentar la autonomía [6].

### 1.1 Base del proyecto

El presente Trabajo de Fin de Grado (en adelante TFG) retoma un TFG anterior del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática (en adelante DISA) realizado por Daniel Orient. En dicho proyecto [7] se realizó un modelo dinámico del dirigible, se implementó en Matlab Simulink y se diseñó un sistema de control como base para el posterior diseño de un UAV, vehículo aéreo no tripulado.

Se empleará el mismo dirigible comercial flexible de la empresa Publizepelines, el modelo 1,7m RC de 500L. El globo de este dirigible, Figura 1, será la base del diseño del UAV de este TFG. En la Tabla 1 se recogen sus características principales:

Longitud, $L = 2 a$	1,7 m
Diámetro máximo, $2 b$	0,75 m
Ratio de esbeltez, $FR$	2,27
Volumen, $Vol$	0,5 m <sup>3</sup>
Peso (globo)	291 g
Carga disponible <sup>1</sup>	180 g

Tabla 1 Especificaciones del globo

<sup>1</sup> Empleando Helio al 90%, cálculo conservador.



Figura 1 Publizepelines, modelo 1,7m RC de 500L [7]

## 1.2 Estado del arte

Este creciente interés general también se ha visto reflejado en la literatura académica en forma de memorias de proyectos de investigación, artículos específicos y desarrollo de tesis por distintas universidades.

En este apartado se va a mencionar resumidamente la literatura consultada y estudiada, así como los proyectos más importantes.

### **Skyship-500 Airship de la McGill University**

Este dirigible comercial es la base del extenso estudio de Y. Li y M. Nahon [8], [9] del comportamiento dinámico de los dirigibles en su esfuerzo por ofrecer un modelo matemático lo más completo posible y que sirva como estándar para otros proyectos. Son estudios muy completos y bastante recientes (2006/2007) que se han aplicado con éxito en proyectos posteriores y es la base del modelo dinámico de este TFG.

### **YEZ-A2 de Cranfield Institute of Technology**

Esta tesis de S.B.V. Gomes [10] es el primer modelo completo moderno. Pero es un poco farragoso. Destaca el completo estudio aerodinámico.

### **FZ800E y TCOM de la Stellenbosh University**

El primero es un Trabajo de Fin de Master (TFM) de G.C. Avenant [4] y es una muestra de la aplicación del modelo de Y. Li. Este trabajo se centra en el diseño de un sistema de control basado en lógica difusa, o *Fuzzy logic*, para vuelo autónomo.

El segundo proyecto es otro TFM, de D.A. Fourie [11] que también basa el modelo dinámico en el trabajo de Y. Li y N. Mahon. Aunque en este caso el globo se emplea como plataforma para el posterior desarrollo de sensores remotos.





Figura 2 Dirigible FZ800E [4] y aeroestato TCOM [11]

### Quanser's ALTAV MkII de McGill University

El dirigible ALTAV, desarrollado por la empresa Quanser con el apoyo de P. Peddiraju et al [12] es un proyecto muy interesante por su configuración propulsiva y carente de superficies en cola. Además, hay que destacar su revisión del modelo de Y. Li y el desarrollo de un modelo matemático que incluye la influencia de los vientos.



Figura 3 MkII ALTAV (izq.) y detalle de uno de los brazos de la propulsión (der.) [12]

Además de estos proyectos, a nivel empresarial hay que destacar las nuevas apuestas de empresas del sector aeronáutico por este tipo de aeronaves:

- Lockheed Martin y su diseño híbrido experimental **P-791** [13]. También destacar el proyecto ISIS (Integrated Sensor is Structure)
- Boeing y el desarrollo *blimpcopter*, un híbrido entre dirigible y helicóptero, **SkyHook JHL-40**.
- La nueva empresa Hybrid Air Vehicles, que destaca por estar en la fase final del desarrollo del **HAV-304 / Airlander 10** [14].
- Otra nueva empresa, Solarship, dedicada al desarrollo y fabricación de dirigibles híbridos que integran paneles solares [6].

Estos modelos híbridos se apoyan en la generación de sustentación con el globo para, entre otras cosas, evitar el empleo de lastres, ahorrar al máximo en infraestructura en tierra, reducir el volumen necesario y poder aumentar la velocidad en vuelo y la autonomía global del conjunto [15].

### 1.3 Objetivos y alcance del proyecto

Tras un estudio del proyecto anterior se establecen los siguientes objetivos para este TFG:

1. Revisión bibliográfica y estudio de la misma para el desarrollo de un nuevo modelo matemático más completo que describa el comportamiento dinámico del dirigible poniendo especial interés en las diferentes contribuciones aerodinámicas presentes.
2. Realizar una estimación inicial de dichas fuerzas aerodinámicas para el posterior dimensionado de la parte propulsiva.
3. En base al globo disponible, estudiar posibles configuraciones para la propulsión y escoger una.
4. Una vez se elija una configuración, buscar y comprar las piezas necesarias que satisfagan las necesidades estimadas en el punto 2.
5. Introducir en el modelo dinámico la configuración y realizar simulaciones del modelo y posterior análisis del comportamiento.
6. Diseñar un sistema de control para la dirección, posición y velocidad para dotar de vuelo autónomo al dirigible.

## 2. Modelo matemático del dirigible

En esta sección se va a desarrollar el modelo matemático de la aeronave. Las ecuaciones resultantes son resultado de la aplicación del modelo de Newton-Euler para un sólido rígido particularizadas para el globo dirigible de este proyecto. En concreto, este modelo está basado en el trabajo realizado por Yuwen Li y Meyer Nahon [8] el cual ha sido aplicado con éxito en varios proyectos ([2], [6]) pero sin tener en cuenta algunas contribuciones, y con algunas simplificaciones que se detallarán más adelante.

Al final de esta sección se recogen todas las expresiones de forma general y una tabla con las constantes particulares del globo empleado.

### 2.1 Hipótesis del modelo

Primero, se exponen las hipótesis sobre las que se desarrolla el modelo:

1. **Sólido rígido.** Se considera todo el conjunto como un cuerpo rígido, despreciando los efectos aeroelásticos. Esto permitirá describir el movimiento de vuelo como una traslación y una rotación alrededor del origen del sistema de ejes cuerpo, detallado más adelante.
2. **Tierra como sistema casi-inercial y plana.** Se despreciará la influencia del movimiento de giro y será el origen del sistema inercial.
3. **Viento nulo.** Aunque las velocidades de vuelo son de la misma magnitud que la de vientos suaves, y la influencia de estos puede ser notable, el aparato está diseñado para vuelo en interiores por lo que esta simplificación tiene plena validez. Si resultara pertinente su inclusión se puede consultar este proyecto [12].
4. **Masa Constante.** El modelo es eléctrico, por lo que la masa permanecerá constante en todas las actuaciones.
5. **Simetría respecto del plano XoZ.** Esto implica que los productos de inercia  $I_{yx}$  e  $I_{yz}$  son nulos. Además, los centros de gravedad y flotación estarán contenidos en dicho plano.

### 2.2 Propiedades y geometría del globo

A continuación, se muestra geometría del globo empleado. Con estas dimensiones se han obtenido los datos numéricos aquí reflejados. La mayoría de éstos son constantes de naturaleza aerodinámica que se derivan de estas dimensiones.

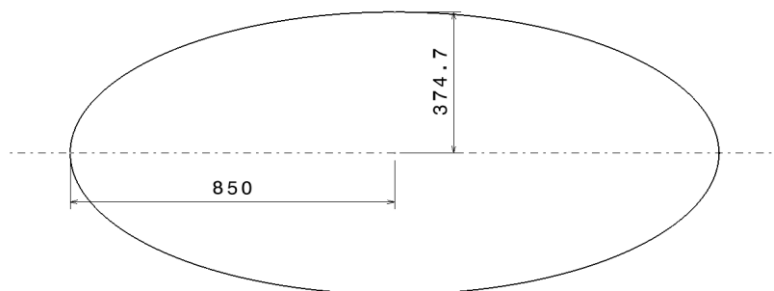


Figura 4 Aproximación del globo como un elipsoide de revolución y sus cotas en mm

Como se puede observar en la Figura 4, el globo se ha aproximado a un esferoide prolato, un elipsoide de revolución. Esta simplificación geométrica, aunque se podría afinar, se empleada en varios apartados por diferentes autores y, como se puede comparar en la Figura 1, se aproxima bastante bien a la forma del globo. Por todo ello se ha considerado suficiente para el desarrollo del proyecto.

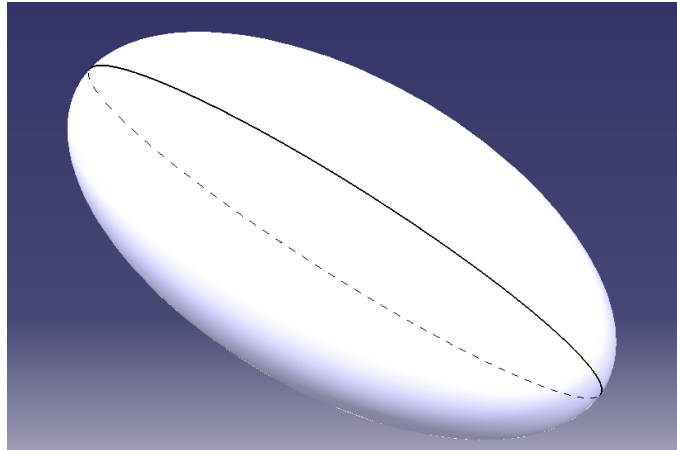


Figura 5 Vista isométrica de un render del globo en Catia

Se reproducen aquí de nuevo los datos del globo que serán utilizados en el resto del trabajo:

Longitud total, $L$	1,7 m
Semieje mayor elipsoide, $a$	0,85 m
Diámetro máximo, $2 b$	0,75 m
Semieje menor elipsoide, $b$	0,37 m
Ratio de esbeltez, $FR$	2,27
Volumen, $Vol$	0,5 m <sup>3</sup>
Peso (sólo globo)	291 g
Flotación	5,9 N

Tabla 2 Características geométricas del globo

### 2.3 Sistemas de referencia

La posición del dirigible está descrita en coordenadas que van hasta el origen del sistema de ejes cuerpo fijo en el sistema inercial. Estos sistemas de referencia se establecen de la siguiente forma:

- **Sistema de ejes tierra o topocéntrico.** Sistema considerado inercial con origen,  $O_T$ , fijo en la superficie terrestre ASL. El eje  $X_T$  con sentido norte,  $Y_T$  al este y  $Z_T$  perpendicular a los otros dos formando un triedro a derechas (positivo hacia el interior de la Tierra).

- **Sistema de ejes cuerpo.** Normalmente este sistema sitúa su origen en el centro de gravedad (C.G) de las aeronaves porque los términos centrífugos se eliminan y los movimientos de rotación y traslación están desacoplados. Pero en el caso de los dirigibles es preferible tomar el centro de flotación (C.B) porque, como se verá en 0, la matriz de masas completa será más sencilla. Además, aunque se definiese el modelo en el centro de gravedad los movimientos seguirían acoplados [9].

El eje  $X_0$  está contenido en el plano de simetría y sigue el eje central de revolución de globo, hacia delante. El eje  $Z_0$  también está contenido en el plano de simetría, es perpendicular a  $X_0$  y apunta hacia abajo. El eje  $Y_0$  es perpendicular a estos dos formando un triedro a derechas.

- **Sistema de ejes horizonte local.** Este sistema se emplea para expresar la actitud de la aeronave. Su origen,  $O_{HL}$ , coincide con el origen del sistema de ejes cuerpo,  $O_0$ , pero sus ejes,  $\{X_{HL}, Y_{HL}, Z_{HL}\}$  permanecen paralelos a los ejes tierra,  $\{X_T, Y_T, Z_T\}$ . Los ángulos que se formen entre los ejes de este sistema y los ejes cuerpo definirán orientación en el espacio.

Para mayor claridad se adjunta la Figura 6 donde se muestran los tres sistemas de ejes empleados. El sistema de ejes cuerpo está girado un cierto ángulo sobre el eje Z.

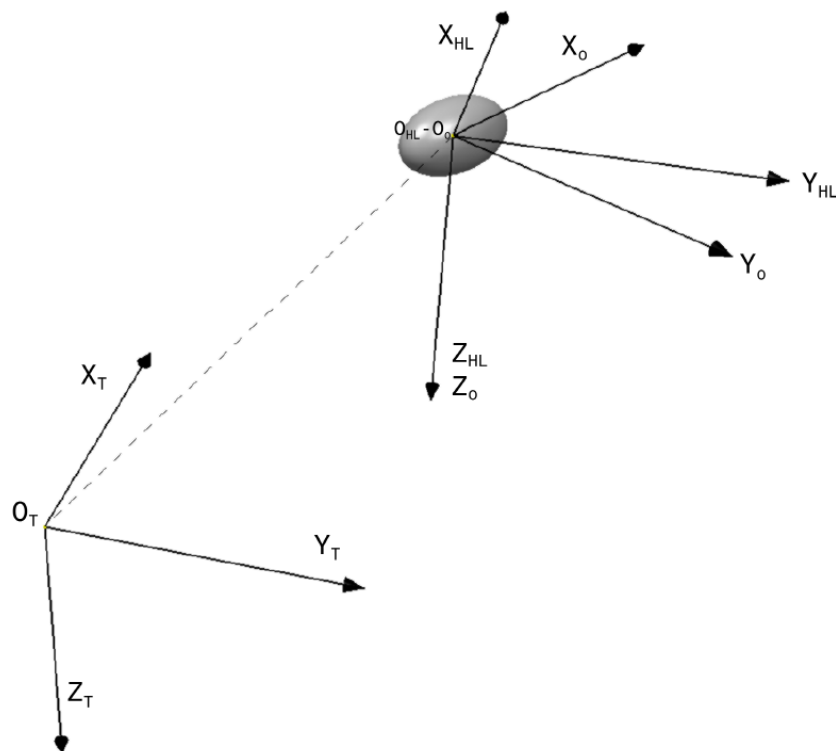


Figura 6 Sistemas de ejes empleados

## 2.4 Ángulos de Euler y transformación de ejes

La orientación en el espacio se define mediante los ángulos de Euler: **alabeo** ( $\phi$ ), **cabeceo** ( $\theta$ ) y **guiñada** ( $\psi$ ). Estos ángulos describen la actitud de la aeronave relacionando la orientación del sistema no inercial, los ejes cuerpos, respecto al sistema horizonte local efectuando tres rotaciones alrededor de los ejes cuerpo.

En el ámbito aeronáutico se emplea la secuencia  $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$ , también conocida como secuencia 321 [16], [17]. Estas sucesiones de giros no son conmutativas porque el producto de las matrices que definen cada rotación no lo es. Es por ello que se definen estos convenios. A continuación, se detalla la secuencia:

- **Giro 3: giro sobre el eje  $Z_o$ , con ángulo de rumbo  $\psi$**  o movimiento de guiñada. Este giro comprende valores entre  $-\pi \leq \psi \leq \pi$  rad y está definido positivo a derechas. La matriz que define este giro:

$$m_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

- **Giro 2: giro sobre el eje  $Y_o$ , ángulo de asiento longitudinal  $\theta$**  o movimiento de cabeceo. Este giro está definido positivo por encima del horizonte, siguiendo el convenio de la mano derecha. comprende valores entre  $-\pi/2$  rad  $\leq \theta \leq \pi/2$  rad:

$$m_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2)$$

- **Giro 1: giro sobre el eje  $X_o$ , ángulo de asiento lateral  $\phi$**  o movimiento de alabeo. Está definido positivo a derechas y comprende valores entre  $-\pi \leq \psi \leq \pi$  rad:

$$m_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Como las rotaciones se realizan respecto a los ejes fijos de un sistema de referencia inercial las matrices se *postmultiplican*, es decir, la multiplicación se realiza en el orden inverso al que correspondería [16]. La matriz resultado de esta operación será la matriz de transformación entre sistemas:

$$\mathbf{M}_{o \leftarrow HL} = m_1(\phi) \cdot m_2(\theta) \cdot m_3(\psi) \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \cos(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) & \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) - \sin(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \cos(\psi) \sin(\phi) & \cos(\theta) \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$= \mathbf{M}_{o \leftarrow HL}$

Para deshacer esta transformación se emplea la secuencia inversa, 123. Bastará con hallar la inversa de esta matriz, que es su traspuesta.

Esta transformación será muy útil para expresar en ejes cuerpo las componentes de la fuerza de la gravedad y las debidas a la flotación. Y su inversa permitirá integrar la posición [17].

## 2.5 Ecuaciones del movimiento en el vacío.

Siguiendo el modelo de Y. Li [8], se comienza desde el caso más simple: el de un sólido rígido moviéndose en el vacío. Esto incluye los términos inerciales, la acción gravitatoria y los de las acciones de control. Posteriormente se incluirán el resto de contribuciones al modelo. Según la aproximación de Newton-Euler y expresado de forma matricial se tiene:

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\tau}_I + \boldsymbol{\tau}_G + \boldsymbol{\tau}_C \quad (6)$$

Donde  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_o^T, \boldsymbol{\omega}_o^T]^T$ , con  $\mathbf{v}_o = [u_o, v_o, w_o]^T$  y  $\boldsymbol{\omega}_o = [p_o, q_o, r_o]^T$ , es el vector con las componentes de las velocidades lineales y angulares expresadas en el sistema de ejes cuerpo y  $\mathbf{M}$  es la matriz 6x6 de masas, que tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m \mathbf{r}_G^x \\ m \mathbf{r}_G^x & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Donde  $m$  es la masa total del dirigible,  $\mathbf{J}$  es el segundo momento de inercia y  $\mathbf{r}_G$  es el vector posición del centro de gravedad desde el origen,  $o$ . Es importante indicar que tanto  $\mathbf{J}$  como  $\mathbf{r}_G$  están expresadas en los ejes cuerpos:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_G = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} \quad (8)$$

El superíndice “x” indica que es la matriz antisimétrica. Esa matriz es equivalente a realizar un producto vectorial con el correspondiente vector. En este caso, para que sirva de ejemplo, estaría definida como:

$$\mathbf{r}_G^x = \begin{bmatrix} 0 & -z_G & y_G \\ z_G & 0 & -x_G \\ -y_G & x_G & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Los términos de Coriolis y las fuerzas centrífugas se concentran en el término inercial:

$$\boldsymbol{\tau}_I = \begin{bmatrix} -m \boldsymbol{\omega}_o^x \mathbf{v}_o + m \boldsymbol{\omega}_o^x \mathbf{r}_G^x \boldsymbol{\omega}_o \\ -m \mathbf{r}_G^x \boldsymbol{\omega}_o^x \mathbf{v}_o - \boldsymbol{\omega}_o^x \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_o \end{bmatrix} \quad (10)$$

El origen de este término y el de la estructura de la matriz  $\mathbf{M}$  se puede encontrar en la literatura naval, por ejemplo [18], donde es el desarrollo de las ecuaciones del movimiento suele hacerse en el centro de flotación.

Los términos debidos a la gravedad se recogen así:

$$\boldsymbol{\tau}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G \\ \mathbf{r}_G^x \mathbf{F}_G \end{bmatrix} \quad (11)$$

Siendo el vector  $\mathbf{F}_G$  igual a:

$$\mathbf{F}_G = m \mathbf{M}_{o \leftarrow HL} \mathbf{g} = \begin{pmatrix} -g m \sin \theta \\ g m \cos \theta \sin \phi \\ g m \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (12)$$

Donde se puede ver una aplicación directa de la matriz de transformación a ejes cuerpo para transformar el vector gravedad. Por simplicidad, se define de valor constante  $g = 9,81 \text{ m/s}$  y perpendicular a la superficie terrestre:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (13)$$

El término de control se discutirá en 3.6, en la sección de diseño. Aunque por ahora se incluye en la parte derecha de las ecuaciones del movimiento como

$$\boldsymbol{\tau}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_C \\ \mathbf{M}_C \end{bmatrix} \quad (14)$$

Donde  $\mathbf{F}_C$  es el vector de fuerzas debidas al control y  $\mathbf{M}_C$  el vector con los momentos creados por estas fuerzas.

Aunque la mayoría de los datos numéricos de este apartado dependen del diseño mecánico de la propulsión y la configuración final, estas expresiones pueden simplificarse de acuerdo a la **hipótesis 5**. De este modo, la matriz de inercia  $\mathbf{J}$  y el vector  $\mathbf{r}_G$  quedarían así:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{zx} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_G = \begin{pmatrix} x_G \\ 0 \\ z_G \end{pmatrix}; \quad (15)$$

Al final de este capítulo se recogerán todas las ecuaciones expandidas.

## 2.6 Aerostática

En la interacción entre el aire y el globo existen dos componentes bien diferenciadas. La primera de ellas es la aerostática.

La aerostática, como define la Real Academia de la Ingeniería, es la “Ciencia que trata del equilibrio del aire u otros gases y de los cuerpos sólidos inmersos en ellos bajo la influencia única de las fuerzas gravitatorias naturales.” [19]

En el caso de los dirigibles, estos basan la generación de la sustentación necesaria para mantenerse en vuelo en el empleo de gases más ligeros que el aire atmosférico, principalmente. Actualmente prima el uso del Helio por motivos seguridad. Matemáticamente este término se introduce como:



$$\boldsymbol{\tau}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{r}_B^x \mathbf{F}_B \end{bmatrix} \quad (16)$$

La fuerza flotante, o *buoyant force* en inglés, tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{M}_{0 \leftarrow HL} \mathbf{L}_B = \mathbf{M}_{0 \leftarrow HL} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g Vol \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho g Vol \sin \theta \\ -\rho g Vol \cos \theta \sin \phi \\ -\rho g Vol \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

Donde  $\rho$  es la densidad del aire y  $Vol$  el volumen del globo. En la sección de diseño se comentará la carga disponible, ya que es el mayor factor limitante. Por ahora solo indicar que se asumirá que el dirigible tiene flotabilidad neutra, por lo que:

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_G \quad (18)$$

Al haber tomado el centro de flotación como origen del sistema de ejes, la fuerza de sustentación aerostática no produce momentos.

## 2.7 Aerodinámica

A continuación se van a detallar las interacciones más relevantes entre el dirigible y el aire circundante y los movimientos relativos entre ellos. La mayoría de estos efectos, a diferencia de los aviones, atañen al globo y no a las posibles superficies planas de sustentación. Independientemente de este hecho, la interacción entre las superficies de cola y el globo es importante. Pero en este proyecto no se modelaran al haber prescindido de ellas, como se comentará en la sección 3.5.

### 2.7.1 Masa aparente y momento de Munk

El efecto de masa aparente, añadida o ficticia es un efecto que afecta a todos los cuerpos que experimentan una aceleración por el simple hecho de estar inmersos en un fluido [5]. La cuestión es que el efecto comienza a ser relevante en el momento en el que la masa del objeto es similar a la del fluido circundante desplazado (como es el caso de los dirigibles y globos).

Estas fuerzas son el producto de la variación de energía cinética transmitida al fluido. Es decir, cuando el vehículo acelera debe también acelerar el fluido que lo rodea. Por ello, se comporta como si tuviera más masa de la que realmente tiene (de ahí el nombre del efecto) [20].

Relativo a éste existen bastantes trabajos que recogen las ecuaciones aplicadas directamente a dirigibles aproximados como esferoides prolatos [5]. Aunque lo habitual en esta clase de trabajos es presentar los resultados más significativos —véase en [9] y [4]—, en el transcurso del trabajo no fue posible reproducir los resultados de [10] y [11] (base del resto de trabajos). Finalmente, recurriendo a la fuente principal [21] de dichos trabajos, se obtuvieron los resultados esperados.

Se define ahora la matriz de masa aparente:

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Esta matriz,  $\mathbf{M}_A$ , está compuesta por cuatro submatrices cuyos elementos serán discutidos a lo largo de esta sección. Se sumará directamente a la matriz de masas  $\mathbf{M}$  en el lado izquierdo de las ecuaciones del movimiento y en el lado derecho se incluirán los efectos con el siguiente vector:

$$\boldsymbol{\tau}_A = - \left[ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_o^x (\mathbf{M}_{11} \mathbf{v}_o + \mathbf{M}_{12} \boldsymbol{\omega}_o) \\ \mathbf{v}_o^x (\mathbf{M}_{11} \mathbf{v}_o + \mathbf{M}_{12} \boldsymbol{\omega}_o) + \boldsymbol{\omega}_o^x (\mathbf{M}_{21} \mathbf{v}_o + \mathbf{M}_{22} \boldsymbol{\omega}_o) \end{array} \right] \quad (20)$$

El cual está relacionado con el acoplamiento de las velocidades lineales y angulares y que es prácticamente igual que  $\boldsymbol{\tau}_i$  pero incluyendo un término,  $-\mathbf{v}_o^x (\mathbf{M}_{11} \mathbf{v}_o)$ , conocido como el **momento de Munk** [22]. Este momento aparece cuando el globo se inclina y tiende a desestabilizarlo en la guiñada y el cabeceo. El motivo del aumento del momento se debe a la localización asimétrica de los puntos de estancamiento frontal (punto de máxima presión) y trasero (punto de menor presión).

Se procede ahora a estimar ahora el valor de este efecto. En el caso de los dirigibles tiene dos contribuciones: el globo y las superficies de cola. En [23] se encuentra un método para el cálculo para dichas superficies pero, como se ha comentado, al haber prescindido de ellas sólo se estimará el efecto sobre el globo. Por esto las matrices  $\mathbf{M}_{12}$  y  $\mathbf{M}_{21}$  son nulas.

Los cálculos para estimar el efecto sobre el globo se basan en la aplicación de la teoría potencial y las derivadas obtenidas son función directa de la forma y tamaño del elipsoide y la densidad del fluido,  $\rho$ . La gran simetría del elipsoide de revolución reduce el número de derivadas o términos de masa aparente dejando las submatrices  $\mathbf{M}_{11}$  y  $\mathbf{M}_{22}$  con la siguiente estructura:

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{\dot{w}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{22} = \begin{bmatrix} K_{\dot{p}} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & 0 & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Su simplicidad es uno de los motivos para la elección de los ejes cuerpo en el centro de flotación. Además, si las dimensiones b y c del esferoide (semi-ejes menores) son iguales, como en el caso de este proyecto, las derivadas  $Y_{\dot{v}}$  y  $Z_{\dot{w}}$  son iguales y  $M_{\dot{q}}$  y  $N_{\dot{r}}$  también. Por lo que el cálculo queda reducido a 3 constantes, ya que  $K_{\dot{p}}$  se puede considerar 0 [20]. Las expresiones de estas son:

$$X_{\dot{u}} = k_1 m' \quad (22)$$

$$Y_{\dot{v}} = Z_{\dot{w}} = k_2 m' \quad (23)$$

$$M_{\dot{q}} = N_{\dot{r}} = k_3 I' \quad (24)$$

Con  $m'$  y  $I'$  la masa y la inercia del aire desplazado por el globo, respectivamente:

$$m' = \frac{4}{3}\pi\rho ab^2 \quad (25)$$

$$I' = \frac{4}{15}\pi\rho ab^2(a^2 + b^2) \quad (26)$$

Es importante señalar que el hecho de que exista una relación con la masa de aire desplazada por el globo esto no significa que se pueda asumir que este efecto esté relacionado con un volumen limitado del campo fluido o que una cantidad limitada de fluido se desplace con el dirigible [20].

Volviendo a las constantes  $k$ , estas son también funciones de la geometría y tienen las siguientes expresiones:

$$k_1 = \frac{\alpha_1}{2 - \alpha_1}; \quad (27)$$

$$k_2 = \frac{\beta_1}{2 - \beta_1}; \quad (28)$$

$$k_3 = \frac{-(b^2 - a^2)^2(\beta_1 - \alpha_1)}{(a^2 + b^2)(2(b^2 - a^2) + (b^2 + a^2)(\beta_1 - \alpha_1))} \quad (29)$$

Donde  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  son dos integrales puramente numéricas:

$$\alpha_1 = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad (30)$$

$$\beta_1 = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad (31)$$

Si se introducen los datos geométricos del globo del proyecto se obtiene:

$$k_1 = 0,178; k_2 = 0,738; k_3 = 0,311$$

Y asumiendo que la densidad del aire es la 1,223 kg/m<sup>3</sup>, como marca la atmósfera ISA al nivel del mar, las matrices  $M_{11}$  y  $M_{22}$  quedarían así:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0,108 & 0 & 0 \\ 0 & 0,451 & 0 \\ 0 & 0 & 0,451 \end{bmatrix}; M_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0327 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0327 \end{bmatrix}$$

### 2.7.2 Efectos viscosos en movimientos transversales

Para el modelado de los efectos viscosos se han revisado varias propuestas y tras realizar algunas simulaciones se ha decidido emplear un modelo semi-empírico propuesto por Hopkins [24] ligeramente modificado por L. Yu y M. Nahon [9] en su trabajo. Otro modelo estudiado puede encontrarse en el proyecto de P. Peddiraju et al [12] donde se desarrolla un método desarrollado por L. Jorgensen [25], también semi-empírico.

El método de Hopkins original modela el comportamiento de las fuerzas y momentos sobre el cuerpo distinguiendo dos contribuciones. El primer término proviene de la teoría potencial y el segundo de la contribución viscosa del fluido. En el trabajo de Y. Li introducen este mismo método pero con ciertos cambios. El primer término se emplea para retirar eficazmente la contribución potencial en el tramo donde predominan los efectos viscosos y el segundo término estima y agrega dichos efectos al modelo

Hay que señalar que en el trabajo de Hopkins se emplean cuerpos de revolución bastante más esbeltos que el globo del que se dispone. Este tiene un ratio de esbeltez,  $FR = a/b$ , de 2,27 y en dicho estudio el cuerpo con menor ratio es de 4.

Dicho esto, la fuerza debida a efectos viscosos tiene la siguiente expresión:

$$F_V = -q \sin 2\gamma \cdot (k_2 - k_1) \int_{\varepsilon_V}^L \frac{dS}{d\varepsilon} d\varepsilon + q \eta C_{dn} \sin^2 \gamma \cdot \int_{\varepsilon_V}^L 2R d\varepsilon \quad (32)$$

Donde  $q$  es la presión dinámica (no confundir con la velocidad angular):

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (33)$$

Con  $V$  el módulo de la velocidad,  $V = |\mathbf{v}_0| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ .

$k_2$  y  $k_1$  son los coeficientes de masa aparente transversal y longitudinal respectivamente que han sido calculados en del aparatado anterior.

$C_{dn}$  es el coeficiente de resistencia aerodinámica para un cilindro infinito situado normal al flujo y cuyo valor se puede encontrar en la literatura aeronáutica en función del Reynolds. Para este proyecto se estima en  $C_{dn} = 1,2$ .

$\eta$  es un factor de corrección debido a que el cuerpo es finito. Se calcula con la relación de finura o esbeltez del cuerpo empleando un gráfico proporcionado en [24] obteniéndose un valor de  $\eta = 0,57$ .

$S$  y  $R$  son las expresiones del área de la sección transversal y su radio a lo largo del eje x. Las expresiones empleadas están derivadas de la fórmula cartesiana de la elipse con el origen desplazado una distancia  $a$  en el eje de abcisas.  $\varepsilon$  es la coordenada de la posición longitudinal desde la "nariz" del globo:

$$R = \sqrt{b^2 \left( 1 - \frac{(\varepsilon - a)^2}{a^2} \right)} \quad (34)$$

$$S = \pi R^2 = \pi b^2 \left( 1 - \frac{(\varepsilon - a)^2}{a^2} \right) \quad (35)$$

El límite de integración  $\varepsilon_v$  marca el punto en el cual el flujo deja de poder ser considerado potencial porque los efectos viscosos comienzan a ser no despreciables. Dicho punto está determinado empíricamente en [24] y se obtiene con la siguiente expresión:

$$\varepsilon_v = 0,378 L + 0,527 \varepsilon_1 \quad (36)$$

Siendo  $L$  la longitud total del globo, y  $\varepsilon_1$  la posición donde  $dS/d\varepsilon$  tiene su máximo valor negativo, que en el caso del elipsoide coincide con el extremo final,  $\varepsilon_1 = 2a$ , con lo que se obtiene que  $\varepsilon_v = 1,54$  m.

$\gamma$  es el ángulo que forma el vector velocidad respecto del eje central en  $\varepsilon_v$ :

$$\gamma = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_v^2 + w_v^2}}{u_v} \right) \quad (37)$$

Las componentes de la velocidad en dicho punto serían:

$$\mathbf{v}_V = [u_v, v_v, w_v]^T = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{r}_v \quad (38)$$

Siendo el vector de posición igual a  $\mathbf{r}_v = [(\varepsilon_m - \varepsilon_v) \quad 0 \quad 0]^T$ .

La contribución de esta fuerza se puede añadir con el siguiente vector en el lado derecho de las ecuaciones:

$$\mathbf{F}_V = F_V \left[ 0, \frac{-v_v}{\sqrt{v_v^2 + w_v^2}}, \frac{-w_v}{\sqrt{v_v^2 + w_v^2}} \right]^T \quad (39)$$

Por otra parte, el momento correspondiente se calcula mediante:

$$M_V = -q \sin 2\gamma (k_2 - k_1) \int_{\varepsilon_v}^L \frac{dS}{d\varepsilon} (\varepsilon_m - \varepsilon) d\varepsilon + q \eta C_{dn} \sin^2 \gamma \int_{\varepsilon_v}^L 2R(\varepsilon_m - \varepsilon) d\varepsilon \quad (40)$$

Donde  $\varepsilon_m$  es la posición del origen del sistema de ejes cuerpo respecto de la nariz,  $\varepsilon_m = a$ .

El vector del momento sería:

$$\mathbf{M}_V = M_V \left[ 0, \frac{w_v}{\sqrt{v_v^2 + w_v^2}}, \frac{-v_v}{\sqrt{v_v^2 + w_v^2}} \right]^T \quad (41)$$

Tras integrar y aplicar todos los datos numéricos se obtiene:

$$F_V = -Cte_{F_v1} q \sin 2\gamma + Cte_{F_v2} q \sin^2 \gamma = 0,0849 q \sin 2\gamma + 0,033 q \sin^2 \gamma \quad (42)$$

$$M_V = -Cte_{M_v1} q \sin 2\gamma + Cte_{M_v2} q \sin^2 \gamma = -0,0656 q \sin 2\gamma - 0,0249 q \sin^2 \gamma \quad (43)$$

Los valores obtenidos son muy pequeños pero parecen razonables a tenor de que el globo lo es. Llama también la atención los signos que se obtienen porque el término que corrige la contribución potencial (el primero) debería tener signo contrario (se resta), tanto en la fuerza como el momento, y en cambio tiene el mismo signo que la contribución viscosa. En otro trabajo consultado los resultados también tienen estos mismos signos [4] y, por ejemplo, en el proyecto de P. Peddiraju et al eliminan ese primer término, aunque no queda clara la razón.

Estas discrepancias entre proyectos y métodos tampoco son de una gran importancia porque, como suele señalarse, todos estos datos deben ser corregidos con diferentes pruebas de vuelo, aunque sirven como primera aproximación.

### 2.7.3 Resistencia axial

La contribución a la resistencia aerodinámica se puede modelar de forma clásica:

$$F_{Axial} = [-q C_{d0} S_{ref} \cos^2 \alpha, 0, 0]^T \quad (44)$$

Donde  $C_{d0}$  es el coeficiente de resistencia,  $S_{ref}$  es la superficie de referencia y  $\alpha$  es el ángulo que forma el vector velocidad con el eje longitudinal en el punto origen, similar a la fórmula (37) (se estima que el centro aerodinámico queda cerca del C.B.).

Para el valor del coeficiente  $C_{d0}$  el libro de fundamentos de diseño [5] sugiere como primera estimación el trabajo de Hoerner [26]. En éste se recoge una expresión empírica para tubos con perfiles elípticos en función del FR con el que se obtiene un  $C_{d0}$  igual a 0.534 en referencia al área frontal máxima. Y, aunque este mismo autor señale que los resultados obtenidos en modelos 3D son similares al perfil en 2D, al aplicar otra estimación para cuerpos de revolución poco esbeltos y un Re *subcrítico* ( $< 1 \cdot 10^5$ ) el dato obtenido para el  $C_{d0}$  es prácticamente la mitad. En otras fuentes consultadas online, [27] y [28], se puede encontrar una aproximación al valor del  $C_{d0}$  para un elipsoide de revolución de FR igual a 2 y un Re entorno  $10^5$  igual a 0,3.

A falta de pruebas de vuelo pertinentes, se toma un  $C_{d0}$  igual a 0,45 para no subestimar el valor e incluir las aportaciones de la cabina y la propulsión. Como se ha comentado, estas medidas están referenciadas al área frontal máxima,  $\pi b^2$ . Si se emplea la superficie de referencia de los dirigibles [5],  $S_{ref} = Vol^{2/3}$ , el valor final de  $C_{d0}$  es **0,316**.

## 2.8 Derivadas de los ángulos de Euler en función de las velocidades angulares

Una vez se tiene las seis ecuaciones; 3 fuerzas y 3 momentos, es necesario establecer la relación entre velocidades angulares y las derivadas de los ángulos de Euler. Como el desarrollo se puede encontrar en cualquier libro de Mecánica simplemente se exponen las ecuaciones:

$$\dot{\theta} = q_o \cos \phi - r_o \sin \phi \quad (45)$$

$$\dot{\phi} = p_o + (r_o \cos \phi \tan \theta + q_o \sin \phi) \tan \theta \quad (46)$$

$$\dot{\psi} = \sec \theta (r_o \cos \phi + q_o \sin \phi) \quad (47)$$

## 2.9 Ecuaciones cinemáticas

Para terminar, también se incluyen aquí las ecuaciones cinemáticas necesarias para integrar posteriormente la posición. Para ello simplemente es necesario emplear la transformación inversa de ejes cuerpo a ejes horizonte local con la inversa de la matriz  $\mathbf{M}_{o \leftarrow HL}$ :

$$[\dot{x}' \quad \dot{y}' \quad \dot{z}']^T = (\mathbf{M}_{o \leftarrow HL})^{-1} [u_o \quad v_o \quad w_o]^T \quad (48)$$

## 2.10 Resumen y reordenación

Expuestas todas las contribuciones y el resto de las ecuaciones el conjunto quedaría, de forma matricial, de la siguiente forma:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_A)\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\tau}_I + \boldsymbol{\tau}_G + \boldsymbol{\tau}_C + \boldsymbol{\tau}_B + \boldsymbol{\tau}_A + \boldsymbol{\tau}_V + \boldsymbol{\tau}_{Axial} \quad (49)$$

La suma de las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{M}_A$  tendría la siguiente apariencia:

$$\begin{bmatrix} m + X_{\dot{u}} & 0 & 0 & 0 & m z_G & 0 \\ 0 & m + Y_{\dot{v}} & 0 & -m z_G & 0 & m x_G \\ 0 & 0 & m + Z_{\dot{w}} & 0 & -m x_G & 0 \\ 0 & -m z_G & 0 & I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ m z_G & 0 & -m x_G & 0 & I_{yy} + N_{\dot{r}} & 0 \\ 0 & m x_G & 0 & I_{zx} & 0 & I_{zz} + M_{\dot{q}} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Para tener una idea más clara se han adjuntado al final las ecuaciones del modelo matemático completo (49) con todos los vectores expandidos. Se señalarán las contribuciones para facilitar la identificación y para no resultar muy engorroso no se introducirán las expresiones de  $q$  (33),  $\gamma$  (37),  $v_V$  (38), ni  $\alpha$ . En la Tabla 3 se recogen todas las constantes estimadas del globo.

El modelo se completará al final del apartado de diseño con los términos de control y los datos de masa e inercias en los puntos 3.5 y 3.6.

$\tau_A$	$k_1$	0,178	$X_{\dot{u}}$	0,108 kg
	$k_2$	0,738	$Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}$	0,451 kg
	$k_3$	0,311	$K_{\dot{p}}$	0
			$M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}$	0,0327 kg m <sup>2</sup>
$\tau_V$	$\varepsilon_v$	1,54 m	$Cte_{F_v1}$	-0,0849 m <sup>2</sup>
	$\varepsilon_1$	1,7 m	$Cte_{F_v2}$	0,033 m <sup>2</sup>
	$\varepsilon_m$	0,85 m	$Cte_{M_v1}$	0,0656 m <sup>2</sup>
	$C_{dn}$	1,2	$Cte_{M_v2}$	-0,0249 m <sup>2</sup>
	$\eta$	0,57		
$\tau_{Axial}$	$C_{d0}$	0,316	$S_{ref}$	0,629 m <sup>2</sup>

Tabla 3 Constantes y parámetros derivados de la geometría del globo



2.10.1 Ecuaciones generales

	$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_A) \dot{\mathbf{v}}$		$\boldsymbol{\tau}_I$		$\boldsymbol{\tau}_G$		$\boldsymbol{\tau}_C$
$F_X$	$(m + X_{\dot{u}}) \dot{u}_o + m z_G \dot{q}_o$	=	$-m(q_o w_o - r_o v_o) + m(q_o^2 x_G + r_o^2 x_G - p_o r_o z_G)$		$-g m \sin \theta$		$+F_{C_x}$
$F_y$	$(m + Y_{\dot{v}}) \dot{v}_o - m z_G \dot{p}_o + m x_G \dot{r}_o$	=	$-m(r_o u_o - p_o w_o) + m q_o(-p_o x_G - r_o z_G)$		$+g m \cos \theta \sin \phi$		$+F_{C_y}$
$F_Z$	$(m + Z_{\dot{w}}) \dot{w}_o - m x_G \dot{q}_o$	=	$-m(p_o v_o - q_o u_o) + m(-p_o r_o x_G + p_o^2 z_G + q_o^2 z_G)$		$+g m \cos \phi \cos \theta$		$+F_{C_z}$
$M_x$	$I_{xx} \dot{p}_o + I_{xz} \dot{r}_o - m z_G \dot{v}_o$	=	$-I_{xz} p_o q_o + I_{yy} q_o r_o - I_{zz} q_o r_o - m z_G(-r_o u_o + p_o w_o)$		$-g m z_G \cos \theta \sin \phi$		$+M_{C_x}$
$M_y$	$(I_{yy} + M_q) \dot{q}_o + m z_G \dot{u}_o - m x_G \dot{w}_o$	=	$-p_o(I_{xx} - I_{xz}) - r_o(I_{xz} - I_{zz}) - m(q_o u_o x_G + q_o w_o z_G + v_o(-p_o x_G - r_o z_G))$		$-g m(x_G \cos \phi \cos \theta + z_G \sin \theta)$		$+M_{C_y}$
$M_z$	$(I_{zz} + N_r) \dot{r}_o + I_{xz} \dot{p}_o + m x_G \dot{v}_o$	=	$+I_{xx} p_o q_o - I_{yy} p_o q_o + I_{xz} q_o r_o - m(r_o u_o x_G - p_o w_o x_G)$		$+g m x_G \cos \theta \sin \phi$		$+M_{C_z}$

$\boldsymbol{\tau}_B$	$\boldsymbol{\tau}_A$	$\boldsymbol{\tau}_V + \boldsymbol{\tau}_{Axial}$
$+ \rho g Vol \sin \theta$	$+ r_o v_o Y_{\dot{v}} - q_o w_o Z_{\dot{w}}$	$- q C_{d0} S_{ref} \cos^2 \alpha$
$- \rho g Vol \cos \theta \sin \phi$	$- r_o u_o X_{\dot{u}} + p_o w_o Z_{\dot{w}}$	$+ \left( -q \sin 2\gamma \cdot (k_2 - k_1) \int_{\varepsilon_V}^L \frac{dS}{d\varepsilon} d\varepsilon + q \eta C_{dn} \sin^2 \gamma \cdot \int_{\varepsilon_V}^L 2R d\varepsilon \right) \frac{-v_V}{\sqrt{v_V^2 + w_V^2}}$
$- \rho g Vol \cos \phi \cos \theta$	$+ q_o u_o X_{\dot{u}} - p_o v_o Y_{\dot{v}}$	$+ \left( -q \sin 2\gamma \cdot (k_2 - k_1) \int_{\varepsilon_V}^L \frac{dS}{d\varepsilon} d\varepsilon + q \eta C_{dn} \sin^2 \gamma \cdot \int_{\varepsilon_V}^L 2R d\varepsilon \right) \frac{-w_V}{\sqrt{v_V^2 + w_V^2}}$
-	$+ q_o r_o (-M_q + N_r) + v_o w_o (Y_{\dot{v}} - Z_{\dot{w}})$	-
-	$+ p_o r_o M_{\dot{q}} + u_o w_o (-X_{\dot{u}} + Z_{\dot{w}})$	$+ \left( -q \sin 2\gamma (k_2 - k_1) \int_{\varepsilon_V}^L \frac{dS}{d\varepsilon} (\varepsilon_m - \varepsilon) d\varepsilon + q \eta C_{dn} \sin^2 \gamma \int_{\varepsilon_V}^L 2R (\varepsilon_m - \varepsilon) d\varepsilon \right) \frac{w_V}{\sqrt{v_V^2 + w_V^2}}$
-	$- p_o q_o N_r + u_o v_o (X_{\dot{u}} - Y_{\dot{v}})$	$+ \left( -q \sin 2\gamma (k_2 - k_1) \int_{\varepsilon_V}^L \frac{dS}{d\varepsilon} (\varepsilon_m - \varepsilon) d\varepsilon + q \eta C_{dn} \sin^2 \gamma \int_{\varepsilon_V}^L 2R (\varepsilon_m - \varepsilon) d\varepsilon \right) \frac{-v_V}{\sqrt{v_V^2 + w_V^2}}$



### 3. Diseño mecánico del sistema propulsivo

En esta sección se va a mostrar el trabajo de diseño llevado a cabo. En primer lugar, se valorarán las limitaciones del proyecto. A continuación, se describirán las distintas opciones que se han barajado respecto a la configuración del dirigible viendo los aspectos positivos y negativos de cada una. Tras estas valoraciones, se detallará la propuesta escogida y se completará el modelo matemático conforme a dicho diseño para proceder a las simulaciones.

#### 3.1 Limitaciones y condicionantes del proyecto

En el proceso de diseño y fabricación de un dirigible, uno de los puntos cruciales, tras el primer dimensionamiento inicial y sus estimaciones, es el diseño del globo y su fabricación. Como la mayoría de los diseños presenta un fuerte compromiso entre aerodinámica, estructura, carga disponible, maniobrabilidad, etc [5].

Pero como ya se adelantaba en el apartado 1.1, ya se dispone de un globo, proveniente del proyecto anterior. Sus características, recogidas en las Tabla 1 y Tabla 2, son la base del proyecto y también el origen de las limitaciones del diseño:

La estimación de carga disponible parte de la aplicación del Principio de Arquímedes:

<b>Sustentación, <math>L_B</math></b>	$L_B = \rho g Vol$	<b>611,5</b>	g
		Helio 90% Helio 100%	
<b>Masa Helio</b>	mHe	141,4	89
<b>Masa Globo</b>	mGl	291	
<b>Carga disponible</b>	$L_B - (mHe+mGl)$	<b>179,1</b>	<b>231,5</b>

Tabla 4 Cálculo de la carga disponible

Tomando la densidad del aire a la altura del mar que marca la atmósfera ISA,  $1,223 \text{ kg/m}^3$ , y  $9,8 \text{ m/s}^2$  para la aceleración de la gravedad y el volumen de 500 litros,  $0,5 \text{ m}^3$ , el globo experimenta un empuje de 6 N. Si lo convertimos a gramos se tienen 612 g.

El Helio puro tiene una densidad  $0,179 \text{ kg/m}^3$ . En el mercado se pueden encontrar diferentes calidades según el grado de pureza. El Helio más barato ronda el 90% mezclado con otros gases. Para tener una aproximación conservadora, si se mezcla con un 10% de aire la densidad del Helio se eleva a  $0,282 \text{ kg/m}^3$ . Para conocer la carga disponible solo falta multiplicar las densidades por el volumen del globo y restar al empuje este dato y el peso del propio globo. En la Tabla 4 se recoge el cálculo.

Estos datos de carga disponible son una referencia importante tanto si se quiere mantener un diseño con flotabilidad neutra o se decide como base un diseño híbrido.

Los datos numéricos de las matrices de inercia y otros puntos de interés han sido obtenidos del modelo en 3D creado en CATIA que reproduce bastante fielmente el globo disponible. De este modelo 3D es

importante señalar que el globo se ha aproximado a un esferoide prolato. Esta simplificación se ha considerado más que suficiente porque se ajusta bien a la forma original.

El globo tiene asociada una resistencia aerodinámica, estimada en 2.7.2 y 2.7.3, que debe ser vencida por la propulsión.

Se va a calcular aquí las necesidades propulsivas derivadas de esta resistencia para tener una referencia sobre la cual escoger los motores. Los valores de la Tabla 5 se han obtenido en base al dato estimado del coeficiente de resistencia axial y la fórmula (44).

Velocidad de vuelo (m/s)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Resistencia (N)	0,030	0,121	0,273	0,485	0,758	1,092
Resistencia (g)	3,096	12,382	27,860	49,528	77,388	111,439

Tabla 5 Resistencia aerodinámica frente a la velocidad de vuelo horizontal

El motivo por el cual se ha introducido una fila con los valores en gramos<sup>2</sup> se debe a una costumbre en el mundo del aeromodelismo por proporcionar el valor del empuje en estas unidades.

También se puede realizar este mismo cálculo para el caso de vuelo vertical aplicando la ecuación (42). Pero se obtienen valores pequeños; casi la mitad, como se recoge en la Tabla 6, lo cual parece un poco contradictorio<sup>3</sup>. Así que en vista de que el vuelo horizontal es más restrictivo y que será el modo normal de vuelo se prefieren los datos anteriores.

Ascenso Vertical	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Resistencia (N)	0,018	0,072	0,162	0,288	0,451	0,649
Resistencia (g)	1,839	7,357	16,553	29,427	45,979	66,210

Tabla 6 Resistencia aerodinámica en ascenso vertical

La velocidad habitual de vuelo estará en torno a 1 m/s. Pero a la hora de elegir motores se fijará como meta que el conjunto sea capaz de proporcionar esos 111 *gramos* de propulsión por cuestiones de maniobrabilidad. Es decir, por si la resultante de resistencia aerodinámica resultara ser superior o, por ejemplo, las especificaciones de control como el tiempo de establecimiento fueran grandes.

También podría resultar que, dependiendo del diseño o la carga, la propulsión deba cargar con parte del peso. En este caso los motores elegidos deberían ser capaces de hacer frente a las dos cargas.

### 3.2 Soluciones alternativas

A continuación, se van a describir las 3 propuestas consideradas a lo largo del proceso de diseño y se discutirán las ventajas e inconvenientes al respecto.

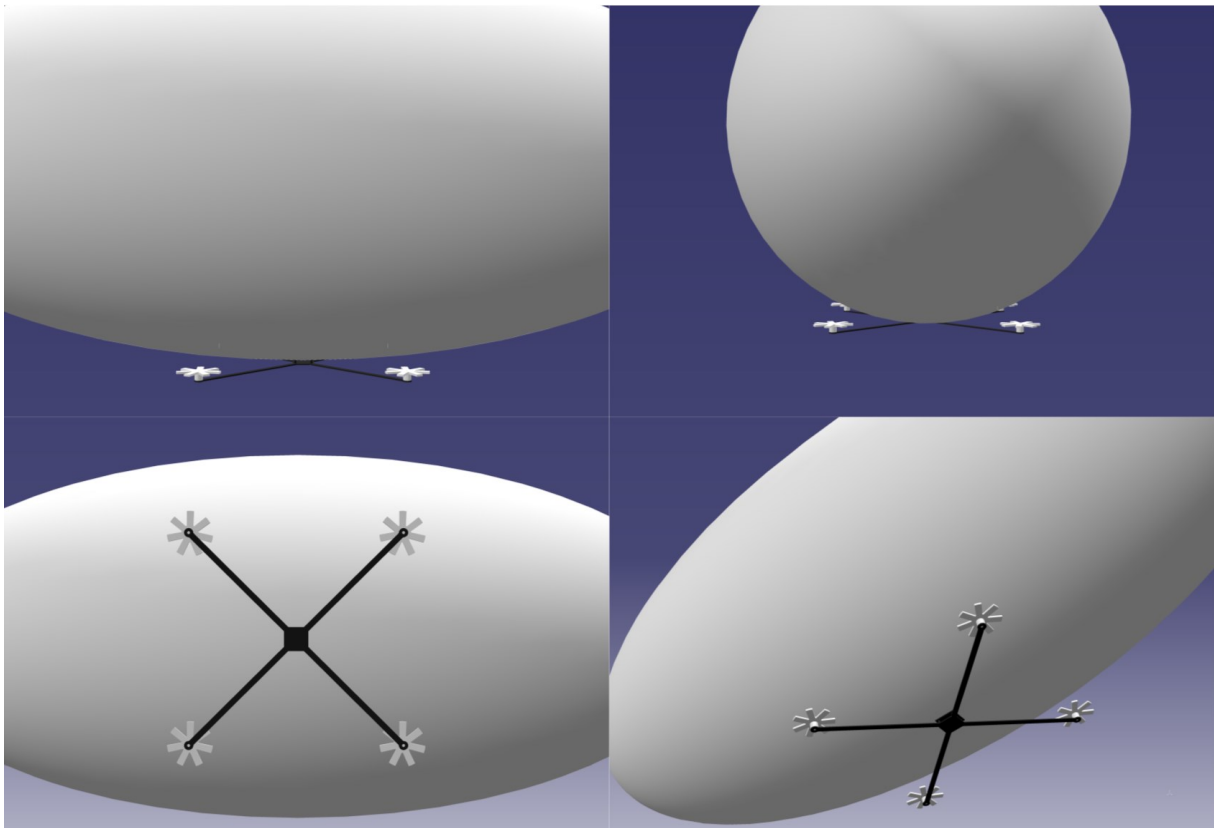
<sup>2</sup> Conceptualmente similar a los kilopondios.

<sup>3</sup> Como ya se ha mencionado estos datos hay que ajustarlos mediante pruebas de vuelo.

### 3.2.1 Configuración 1

La primera opción barajada fue extraída de las conclusiones del TFG anterior de D. Orent: construir un híbrido entre dirigible y cuadricóptero, concepto conocido como *Blimpcopter*. Para hacerse una mejor idea, en la Figura 7 se muestra un modelo en 3D de este concepto.

Esta tipología no es nueva. El concepto apareció por primera vez con el accidentado **PA-97 Helistat** [29]. Y más recientemente se ha vuelto a escoger para el proyecto **SkyHook** de Boeing, que actualmente se encuentra a la espera de financiación para completar el desarrollo.



*Figura 7 Vistas del render en Catia para la propuesta de diseño 1, híbrido blimpcopter*

El diseño consistiría en unir una base de fibra de carbono de cuadricóptero con cuatro brazos con motores a los extremos para combinar sus características. El diseño, a priori, se beneficiaría de la sustentación proporcionada por el globo. Esto permitiría reducir el tamaño del conjunto propulsivo con lo que se dispondría de mayor capacidad de carga y mayor autonomía y, además, en caso de fallo el conjunto podría regresar a tierra con relativa suavidad.

Las razones que llevaron a descartarlo fueron, principalmente, la necesidad de unos brazos muy largos y, por tanto, pesados para que los motores pudieran operar sin interferencia con el globo y las dudas existentes sobre la maniobrabilidad del conjunto.

Sobre el último punto se pensó que se podrían solucionar mediante un mecanismo con dos pares de rotación que permitiera la inclinación de todo el conjunto de la base respecto del globo para facilitar los movimientos de avance. Pero aún quedaría por resolver si la inercia de los motores sería suficiente para girar (al estilo cuadricóptero).

Una posibilidad sería incluir pequeños motores horizontales para ayudar a este cometido, como en la Figura 8. Pero este concepto está más bien ligado al transporte de cargas muy pesadas y es por ello que a esta escala no tenga mucho sentido.

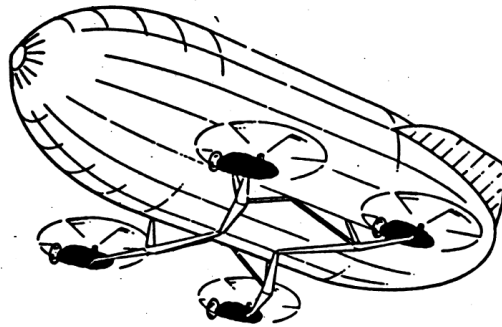


Figura 8 Concepto híbrido para transporte de grandes cargas [30]

### 3.2.2 Configuración 2

Dados los inconvenientes encontrados en el diseño anterior, se pensó en una propuesta inspirada en el dirigible ALTAV de Quansar (ver Figura 3). Este concepto, esbozado en la Figura 9, resuelve dichos problemas montando 4 motores en brazos independientes sobre el dirigible. Cada brazo podría girar sobre su eje gracias a la acción de un servomotor situado en la base. Dicha base estaría asegurada por varios tirantes para dar estabilidad al conjunto. En la góndola inferior se cargaría el resto de la electrónica necesaria y las cámaras o sensores según el caso.

El conjunto superaría la carga disponible por flotación pero también se dispondría de mayor potencia para permitir vuelos en el exterior.

El principal motivo por el cual se ha descartado esta configuración es la gran complejidad del diseño de los brazos y su base de montaje sobre una superficie muy deformable como es la del globo. Cada brazo debería integrar en su estructura el motor, su controladora electrónica, un servo para modificar la inclinación y su propia batería. Además de la necesidad de un presupuesto serio para llevar a cabo el diseño, se considera que excede la extensión de este TFG. Pero queda como propuesta para un futuro proyecto.

En la Figura 10 se muestra una vista en detalle del prototipo realizado sobre este brazo empleando para ilustrar el concepto.

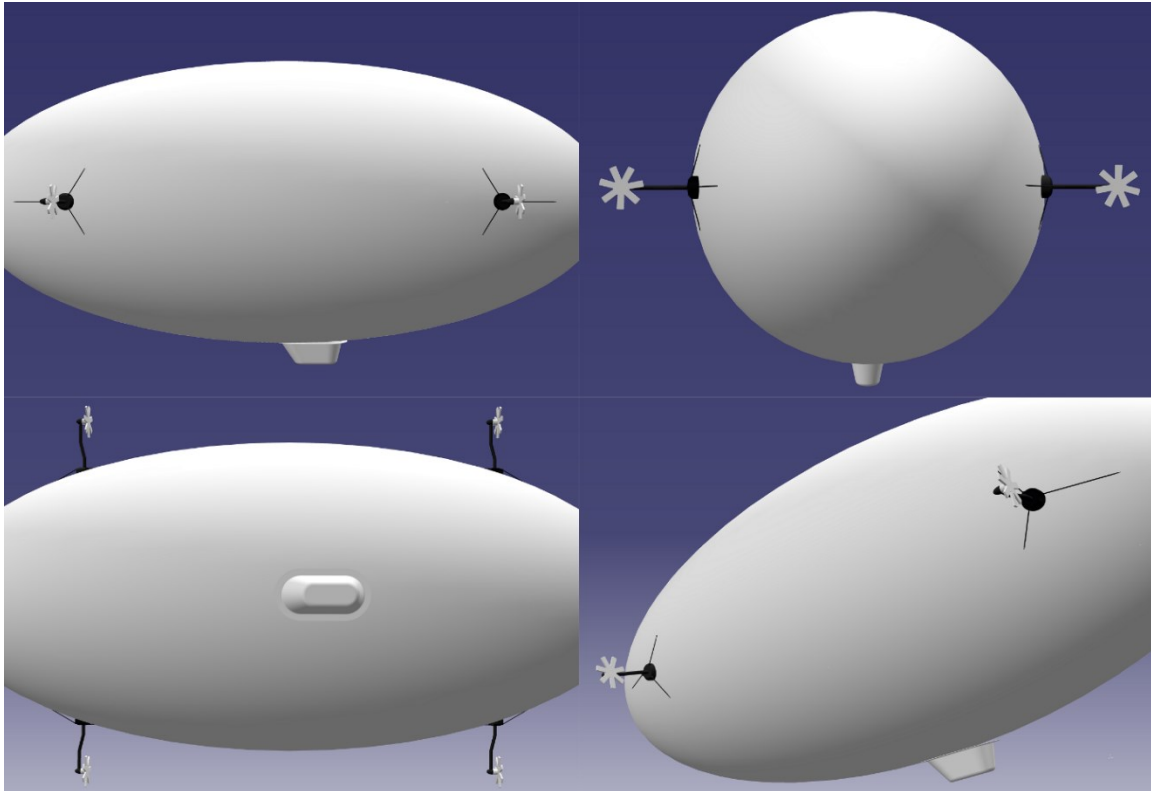


Figura 9 Modelado 3D de la propuesta de diseño 2

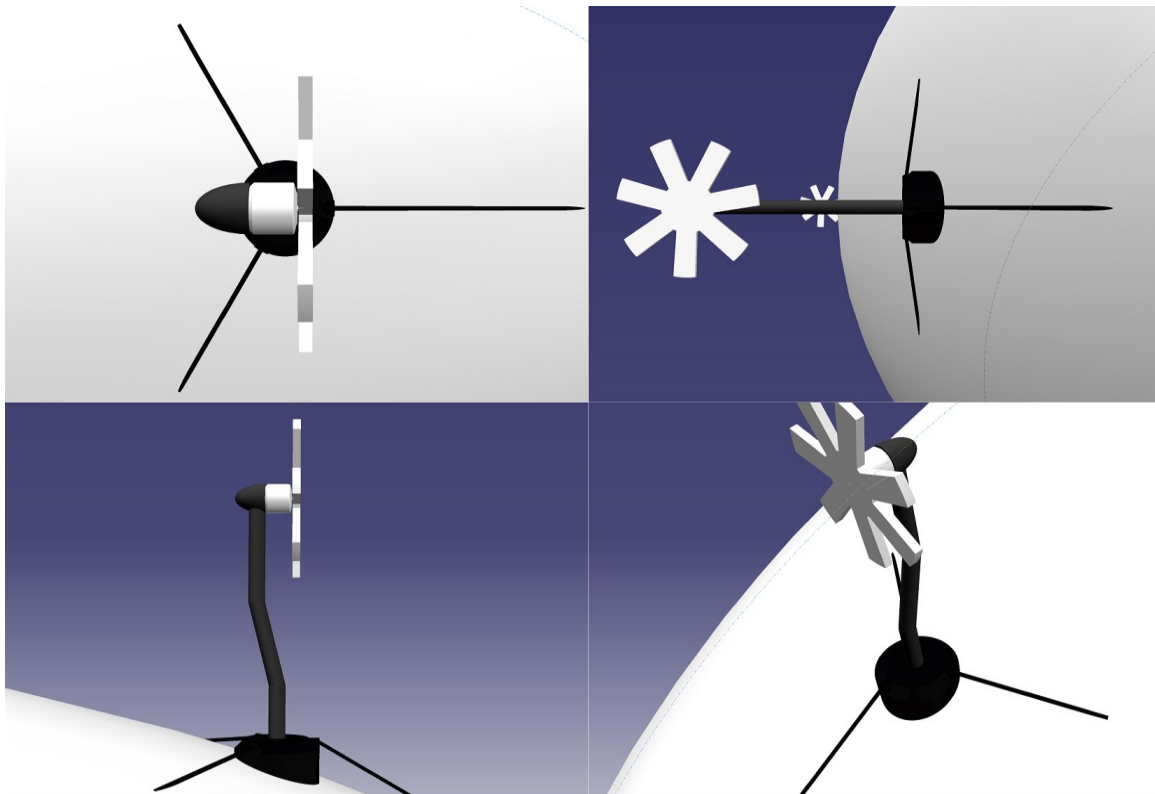


Figura 10 Vistas en detalle de un render de un concepto para el brazo propulsivo

### 3.2.3 Configuración 3

Por último, el diseño más conservador. Esta propuesta, ver Figura 11, apuesta por una configuración similar a la actual llevando a cabo remodelación de la parte electrónica para permitir el vuelo autónomo. La principal diferencia estaría en la eliminación de las superficies de cola<sup>4</sup>.

Las ventajas de esta propuesta radican en la simplicidad del modelo: los motores se montan sobre una barra horizontal y ésta atraviesa la góndola, donde se alojan el resto de componentes electrónicos, un servomotor controla el ángulo de los motores respecto del horizonte para poder modificar la altura.

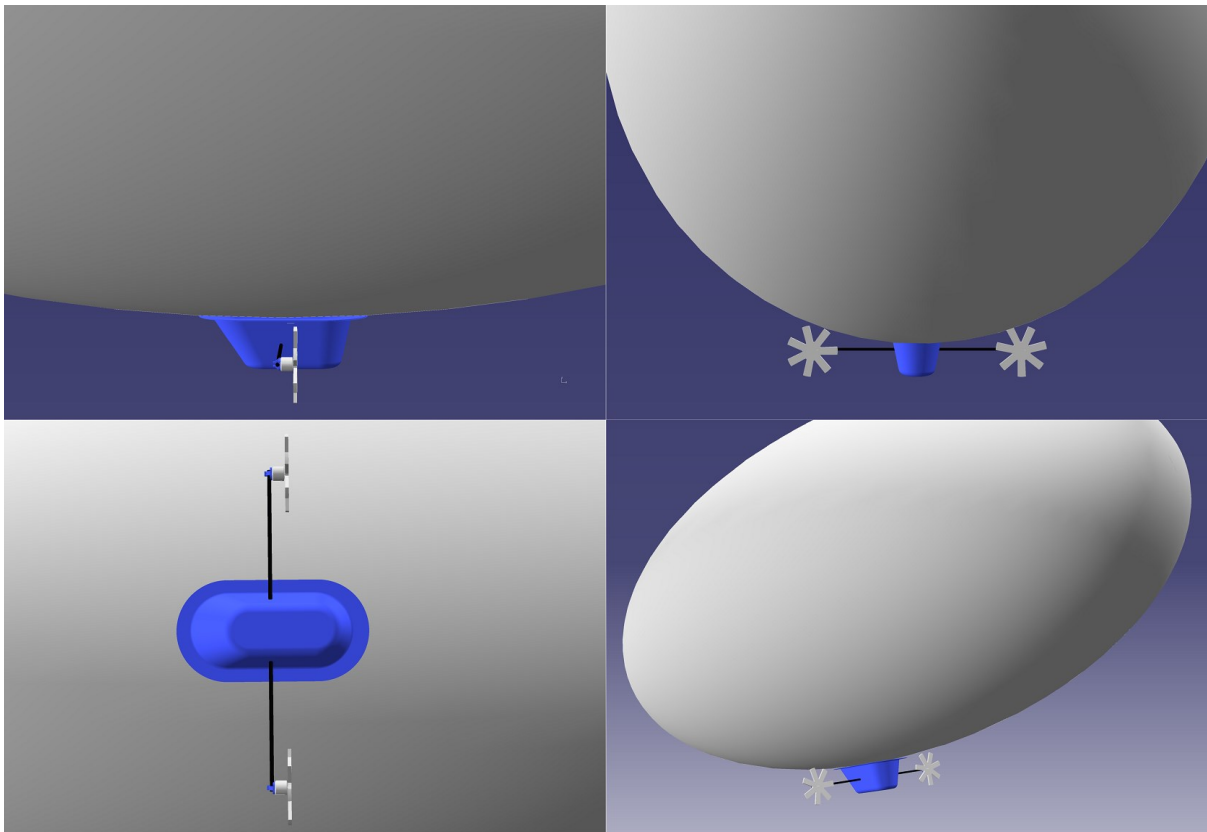


Figura 11 Vistas del modelado 3D de la propuesta de diseño 3

Las pocas piezas necesarias para llevar a cabo este diseño, junto al hecho de reutilizar componentes ya existentes, convierten a esta propuesta en la más factible. Además, su sencillez es una solución de bajo coste que servirá para ajustar y validar el modelo matemático mediante pruebas de vuelo. Con los resultados en mano, si la plataforma despierta el suficiente interés, pondrán plantearse proyectos futuros que traten de aplicar la propuesta de diseño anterior, por ejemplo, o continuar sobre esta misma base desarrollando experimentos.

Los detalles del diseño se comentarán a continuación.

---

<sup>4</sup> Esta decisión se explicará en el punto 3.5.



### 3.3 Equipos y piezas de la configuración elegida

El principal reto de la configuración elegida es lograr un diseño funcional con el mínimo peso posible para dotarle de la suficiente capacidad de carga para montar otros sensores a testear o pequeñas cámaras con las que dotar al proyecto de capacidad de reconocimiento de imagen. Esto es, no superar los **180** gramos de carga disponibles. En los siguientes apartados se describirán detalladamente las piezas

#### 3.3.1 Motores

Después de estudiar las diferentes opciones que se pueden encontrar en el mercado, se optó por un motor **RotorX Racing RX1105**, Figura 12, ya que satisfacía todas las condiciones mencionadas anteriormente en el apartado 3.1.



Figura 12 Motor RX1105

Este motor es un motor *brushless outrunner*. Es decir, que no emplea escobillas para realizar el cambio de polaridad (necesitando de un ESC para el control del mismo) y en los cuales la carcasa externa es la que gira con el eje. Este tipo de motores producen más par que su contraparte, los motores *inrunners*, permitiendo con un menor tamaño montar hélices mayores.

En la Tabla 7 se recogen las especificaciones de este modelo. Y en la Tabla 8 una prueba de empuje llevada a cabo con el motor por un proveedor. Los resultados de dicha prueba concuerdan con otros realizados por otros usuarios.

<b>KV</b>	4000
<b>Rango LiPo</b>	2-4S (3,7-14,8 V)
<b>Hélices recomendadas</b>	3020 y 3025
<b>Peso</b>	5,1 g (incluyendo cables y tornillos)
<b>Diámetro eje</b>	1,5 mm
<b>Longitud eje</b>	4 mm
<b>Dimensiones carcasa</b>	14 x 12,5 mm (ancho x alto)

Tabla 7 Especificaciones del motor RX1105

Celdas LiPo	Acelerador	Empuje (g)	Empuje (N)	Intensidad (A)	Hélice
3S	50%	52	0,510	1,3	RX3020
3S	100%	130	1,274	3,7	RX3020
4S	50%	100	0,980	2,5	RX3020
4S	100%	178	1,744	4,8	RX3020

Tabla 8 Pruebas de Empuje con el motor [30]

Como se puede ver, con una batería LiPo<sup>5</sup> con 3 celdas (3S/11,1 V) y un solo motor montando una hélice 3020, se podría cubrir las necesidades establecidas en el punto 3.1. Además, el conjunto hélice-motor es muy liviano: 6 g (incluyendo los cables y los tornillos en el montaje).

### 3.3.2 Hélices

Para la hélice se ha optado por uno de los modelos recomendados por el fabricante, la **RX3020**, Figura 13. La hélice tiene un montaje estilo T, es decir, que se asegura su fijación mediante dos tornillos a la carcasa externa del motor.



Figura 13 Hélice antigua (Arriba) y hélices RX2030 (Abajo)

Los números que acompañan a la hélice son una notación estándar en el mundo del aeromodelismo. Hacen referencia a sus características principales: los dos primeros dígitos marcan el diámetro en pulgadas, 3 inch ó 7,62cm, y los dos segundos hacen mención al paso.

El paso de una hélice indica el espacio teórico e ideal que avanzaría dicha hélice en una revolución. En este caso 2 inch, ó 5,08 cm, de avance por vuelta.

En el conjunto propulsivo se emplearan dos: una dextrógira, o CW, en el motor izquierdo y una levógira, o CWW, en el motor derecho.

### 3.3.3 ESC

Para las ESC se ha elegido un modelo de alta calidad de la marca alemana **YGE** de **8A**. Estas controladoras de velocidad son muy livianas e incluyendo los cables su peso es de **4,9g**. Además, el modelo integra un **BEC**. Este circuito elimina la necesidad de montar dos baterías en el equipo, una

<sup>5</sup> Batería de polímero de litio.

para alimentar los motores y otra para otros componentes electrónicos, lo cual contribuye a la reducción de peso del sistema. En la Tabla 9 se recogen algunos datos proporcionados por la empresa:

<b>Rango de Baterías</b>	LiPo 2/3S
<b>Intensidad máxima</b>	8 A
<b>BEC</b>	5V, 2A
<b>Límite de velocidad</b>	240.000 rpm
<b>Dimensiones</b>	25 x 17 x 4 mm
<b>Peso (sin/con cables)</b>	2,2 /4,9 g

Tabla 9 Especificaciones técnicas de la ESC

Estas ESC cuentan también con circuito de protección ante bajo voltaje y alarmas sonoras de alta temperatura y por sobrecarga del motor. Además, se tratarán de montar fuera de la cabina, en la barra horizontal, para disipar el calor.

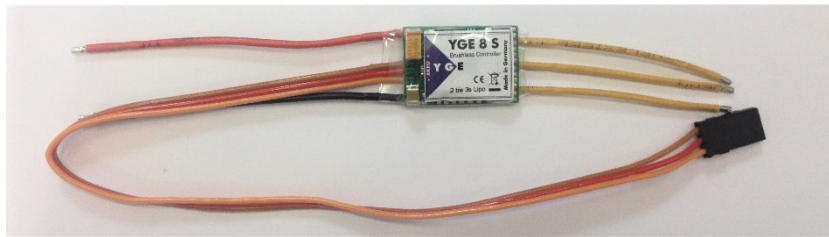


Figura 14 ESC YGE 8S

### 3.3.4 Batería

En la elección de las baterías se ha elegido una batería LiPo del fabricante **Turnigy** modelo **nano-tech 850mah 2S 25~40C Lipo**. En la Tabla 10 se recogen sus características principales.

<b>Capacidad</b>	850 mAh
<b>Construcción</b>	2S1P
<b>Voltaje</b>	7,4 V
<b>Peso (con cables)</b>	49 g
<b>Dimensiones</b>	60x31x16 mm

Tabla 10 Especificaciones de la batería

La principal razón por la que se ha optado por esta batería y no una con tres celdas, 3S, es el peso. Pero si fuese necesario se podría sacrificar algo de la carga disponible en favor de ésta.

### 3.3.5 Controladora y estación en tierra

Se empleará la controladora **OpenPilot CC3D**. Este modelo, disponible en el laboratorio, integra una IMU y además permitirá pilotar el dirigible con el ordenador empleando el transceptor OPLINK [31], lo cual ahorrará el uso de otro sistema para el radio control y, por tanto, también se ahorrará en peso.

La controladora, en la Figura 15 con la estación en tierra a la derecha, pesa 27 gramos en total, incluyendo la antena y la carcasa. Es posible que para reducir peso se retire la cubierta exterior.

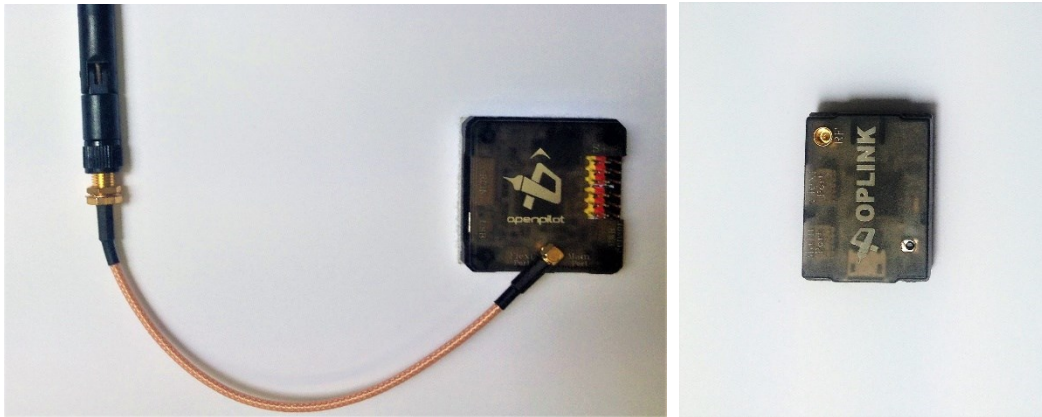


Figura 15 Controladora con antena (izq.) y estación en tierra (der.)

### 3.3.6 GPS

Como parte de la electrónica se incluirá un módulo GPS **Ublox Neo-M8N**. El papel del GPS en este proyecto será el de tener datos de telemetría en la estación de tierra. Este módulo trabaja con las principales constelaciones de satélites GNSS: GPS, GLONASS, Galileo, BEIDU y sus sistemas de aumentación (WAAS, EGNOS, MSAS). Y es capaz de trabajar simultáneamente con hasta 3 señales [32]. Además, dispone de un magnetómetro empleado como brújula que permite conocer la orientación.

El peso con carcasa y cable de este módulo es de 30 g. La cubierta se retirará para ahorrar peso.



Figura 16 Unidad GPS Ublox M8N

### 3.3.7 Piezas reutilizadas

Como se ha mencionado en el punto 3.2.3, se van a reutilizar algunos componentes que venían de serie con el modelo a radiocontrol.

Esto incluye la cabina, la barra de plástico horizontal y el servomotor encargado de la inclinación. En la Tabla 11 se recogen las dimensiones y sus pesos. En la Figura 17 dos vistas con las cotas principales de la cabina actual.

Cabina		Tubo	
Dimensiones	165x105x60 mm	Longitud	320 mm
Peso	20 g	Diámetro exterior	4 mm
Servomotor		Diámetro interior	3mm
Peso	7 g	Peso	8 g

Tabla 11 Dimensiones y pesos de la cabina, servo y tubo

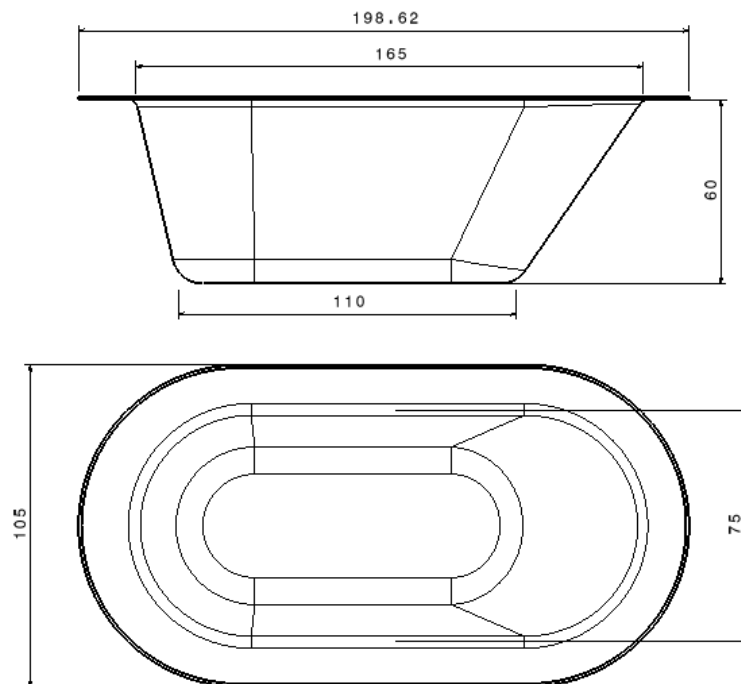


Figura 17 Cabina del dirigible, dimensiones principales. Cotas en mm

### 3.3.8 Anclaje del motor

Para unir el motor a la barra horizontal se ha diseñado una pequeña pieza que servirá de anclaje. En la Figura 18 se puede ver un *render* y varias vistas acotadas de la pieza en cuestión.

La pieza está pensada para ser fabricada mediante impresión 3D y en total no superaría el gramo de peso<sup>6</sup>. Con cuatro tornillos M2 se fijaría el motor y con un tornillo M1 de 8mm se ajustaría el apriete para fijarla a la barra horizontal.

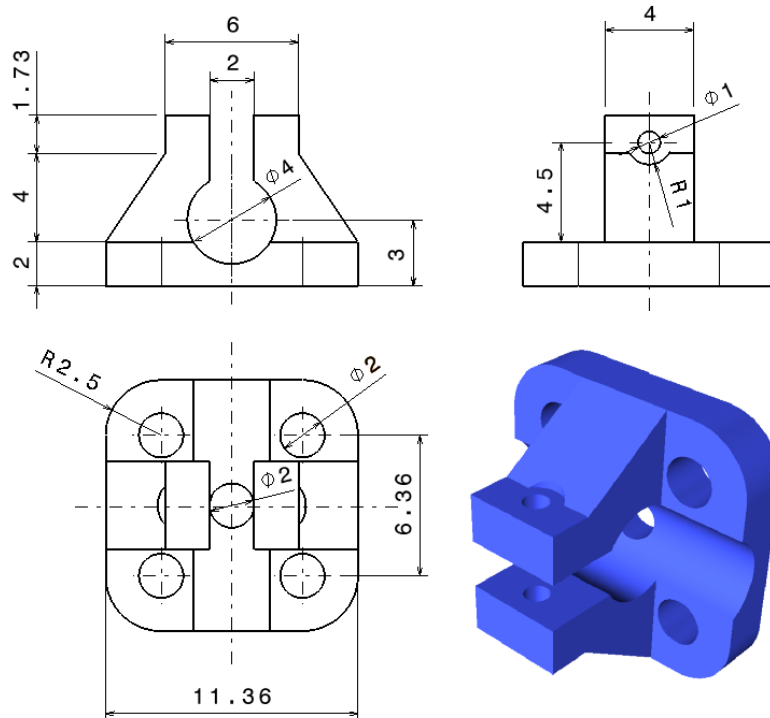


Figura 18 Vistas del anclaje del motor a la barra. Cotas en mm

### 3.4 Ensamblaje del conjunto

En la Figura 19 se ilustra el montaje del sistema propulsivo. El bloque a la derecha de la barra antes de la carcasa simula el volumen de la ESC y su posible ubicación. A la izquierda el conjunto del anclaje-motor-disco de la hélice con los tornillos necesarios para el montaje.

El motivo por el cual la hélice en el diseño 3D tiene esa forma es porque se ha modelado pensando en un disco actuador que, a la hora de calcular la matriz de inercia, se asemeje a una hélice girando.

Se adjunta, en la Figura 20, un esquema de las conexiones extraído de la *wiki* de OpenPilot [33], completado con información de un manual online [34] y adaptado a este proyecto. Sobre este diagrama simplemente comentar que sólo es necesario un cable positivo desde un ESC a la controladora.

La góndola se une al globo mediante unas tiras de *velcro*. En su interior se dispondrán el resto de componentes. El módulo GPS irá montado encima del globo.

<sup>6</sup> Asignándole una densidad promedio, conservadora, de 2 g/cm<sup>3</sup>. Puede variar según el hilo empleado.

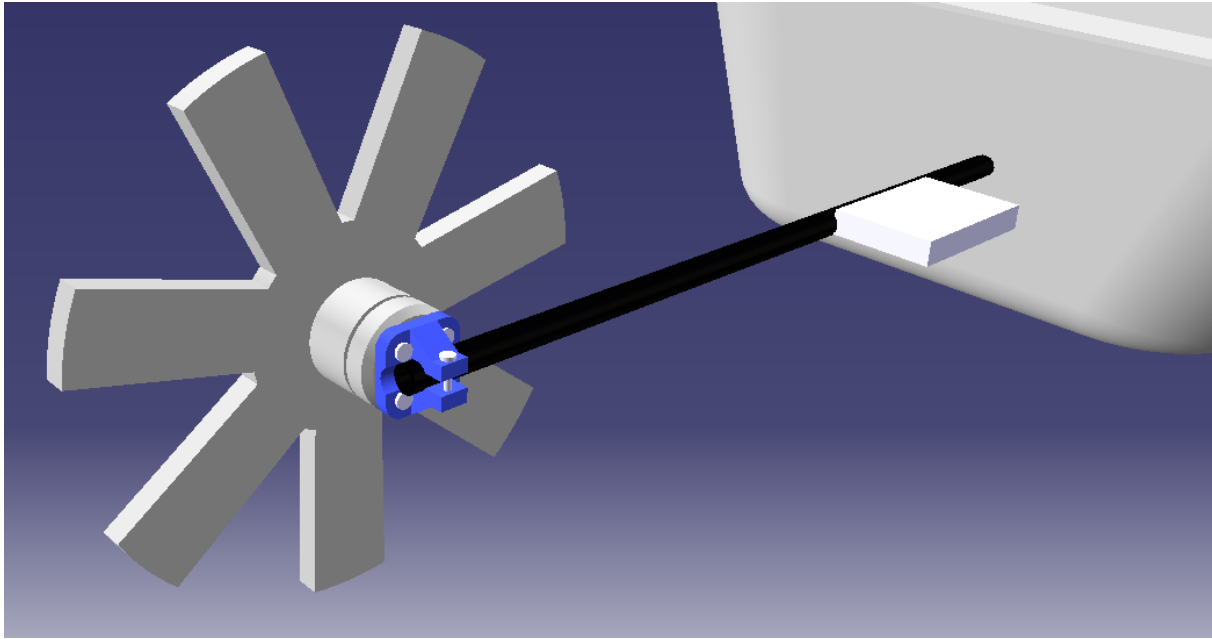


Figura 19 Vista del montaje del sistema propulsivo

### 3.5 Pesos y matriz de inercia

Una vez se tienen las piezas y su disposición es posible completar el modelo dinámico del proyecto. En este apartado se va a estimar la masa total del dirigible y su matriz de inercia.

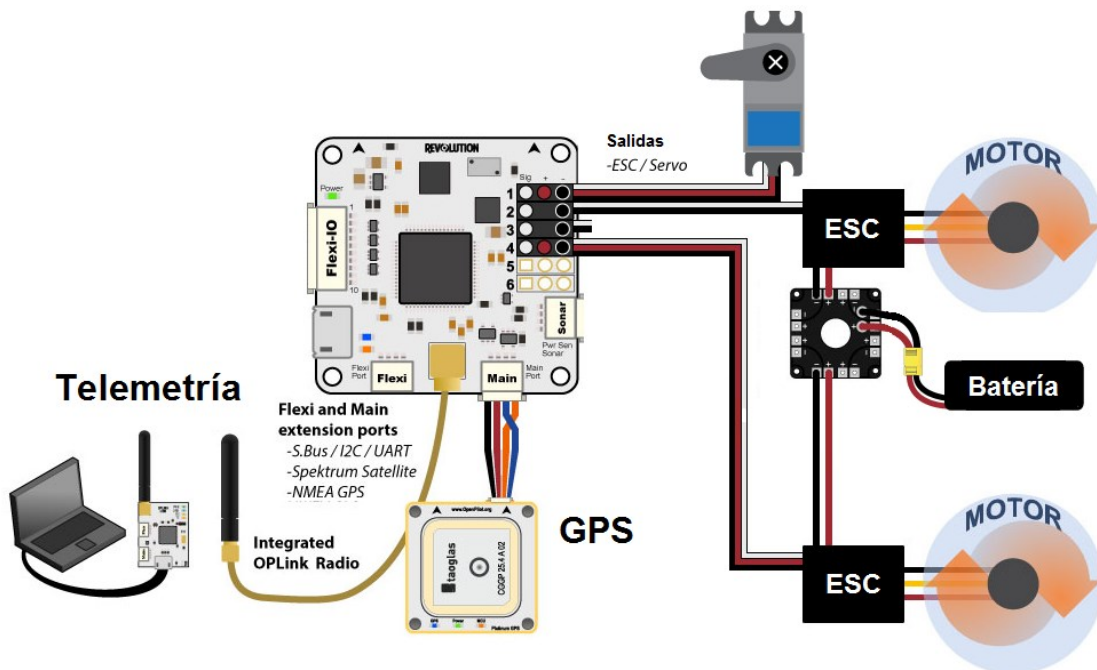


Figura 20 Esquema de conexión completo [33] [34]

En cuanto a la masa, en la Tabla 12 se recogen todas las piezas, sus pesos y una estimación de la carga libre que tendría esta configuración partiendo de las estimaciones de carga disponible calculadas en la Tabla 4.

Piezas	Cantidad	Peso ud., g	Peso, g
Controladora	1	27	27
GPS	1	30	30
Batería	1	50	50
Cabina	1	20	20
Varilla	1	8	8
Servo	1	7	7
Motores	2	5	10
ESC	2	5	10
Hélices	2	1	2
Anclajes	2	1	2
<b>Total peso, g</b>			<b>166</b>

	Helio 90%	Helio 100%
<b>Carga disponible, g</b>	179,1	231,5
<b>Carga libre, g</b>	<b>13,1</b>	<b>65,5</b>

Tabla 12 Pesos del dirigible

Como se comentó en el punto 2.6, se busca la flotabilidad neutra del conjunto. Por lo tanto, si dicha carga libre no se emplea será necesario el uso de algún lastre. La masa final del conjunto será de **612 g**.

Según los cálculos más conservadores, la carga libre es de tan solo de **13 g**. Y de **66 g** si el helio empleado es de calidad. Aun así, es muy probable que eliminando las carcasas de los componentes electrónicos (controladora y GPS) y ajustando la longitud de los cables, la carga libre final mejore.

A la vista de estos datos **se decidió prescindir de las superficies de cola** horizontales que venían de serie con el globo de para ahorrar unos 20g de peso. Estas son simples planos de cartón pluma sin superficies de control. Esta decisión deberá ser discutida en las pruebas de vuelo que se realicen con el modelo.

La matriz de inercia, **J**, se ha obtenido gracias al modelado 3D en Catia. Para calcularla se ha asignado una densidad ficticia a cada pieza generada en ordenador. Las densidades se han estimado a partir de los volúmenes, proporcionados por el programa, y los datos de masa conocidos. Para modelar la carga en cabina se sitúa un bloque con el peso conjunto de toda la electrónica menos los motores y las hélices, situados en su posición. La matriz resultante, expresada en los ejes cuerpo, queda:



$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,068 & 0 & 0,00095 \\ 0 & 0,12 & 0 \\ 0,00095 & 0 & 0,098 \end{bmatrix} \text{kg m}^2 \quad (51)$$

Y la posición del centro de gravedad:

$$\mathbf{r}_G = \begin{pmatrix} 0,008 \\ 0 \\ 0,119 \end{pmatrix} \text{m} \quad (52)$$

La posición ligeramente adelantada del centro de gravedad respecto del centro de flotación es intencionada. Así, el peso del dirigible creará un momento que contrarresta efectivamente el momento de cabeceo debido a la propulsión y permitirá un vuelo equilibrado con valores de  $\theta$  cercanos a cero cuando se vuela entorno al punto de funcionamiento. Este valor en concreto ha sido determinado a partir de las ecuaciones del modelo matemático para un vuelo horizontal equilibrado,  $\theta = 0$ , a un  $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

En el siguiente gráfico se adjunta el valor de la coordenada en x que equilibraría el dirigible en  $\theta$  igual a cero según la velocidad  $u$ .

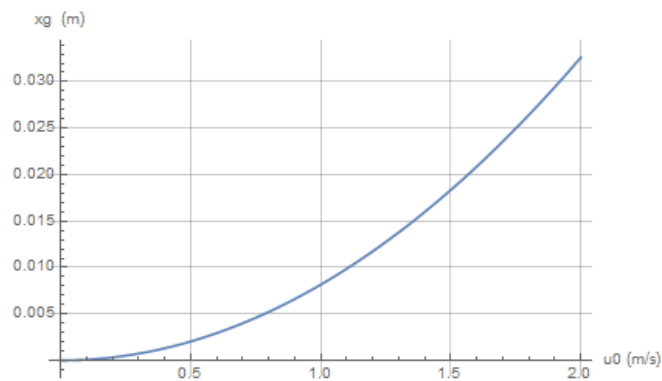


Figura 21 Posición del CDG en función de  $u$  para que  $\theta$  sea cero

En los dirigibles comerciales y de gran tamaño la posición del centro de gravedad se modifica empleando dos o más *ballonets*. Estos dispositivos consisten en bolsas de aire situadas estratégicamente en el interior del globo que se hinchan o deshinchán para controlar la distribución de masas y controlar el ángulo  $\theta$  deseado.

### 3.6 Términos de control

Los términos de control mediante la propulsión se introducen en el modelo matemático siguiendo el esquema de la Figura 22. Los motores eléctricos se regulan con un voltaje o señal  $k_v$ . El motor izquierdo se etiqueta con el subíndice 1 y el derecho con el 2. Y a cada uno de ellos se le asigna una fuerza  $F_i(k_{v_i})$ .

El servo que controla la inclinación se modela como un ángulo sobre la horizontal,  $\delta$ , definido positivo en contra de  $\theta_o$ . De esta forma el vector  $\mathbf{F}_C$  de los motores quedaría:

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_{C1} + \mathbf{F}_{C2} = \begin{bmatrix} (F_1(k_{v_1}) + F_2(k_{v_2})) \cos \delta \\ 0 \\ (F_1(k_{v_1}) + F_2(k_{v_2})) \sin \delta \end{bmatrix} \quad (53)$$

Cada motor introducirá un momento respecto al origen del sistema de ejes cuerpo. Gracias a la simetría del conjunto las coordenadas de cada motor serán iguales excepto en el eje  $Y_o$ , que en el motor izquierdo será de signo contrario. Teniendo esto en cuenta, el término del momento quedaría de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_{C1} + \mathbf{M}_{C2} = \mathbf{r}_{C1}^x \mathbf{F}_{C1} + \mathbf{r}_{C2}^x \mathbf{F}_{C2} = \begin{bmatrix} y_C (F_2(k_{v_2}) - F_1(k_{v_1})) \sin \delta \\ (F_1(k_{v_1}) + F_2(k_{v_2})) (z_C \cos \delta - x_C \sin \delta) \\ y_C (F_1(k_{v_1}) - F_2(k_{v_2})) \cos \delta \end{bmatrix} \quad (54)$$

Recurriendo al modelado 3D en Catia, se obtienen las coordenadas de la posición de los dos motores:

$$\mathbf{r}_{C2} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0,16 \\ 0,402 \end{pmatrix} \text{ m}; \quad \mathbf{r}_{C1} = \begin{pmatrix} -0,01 \\ -0,16 \\ 0,402 \end{pmatrix} \text{ m} \quad (55)$$

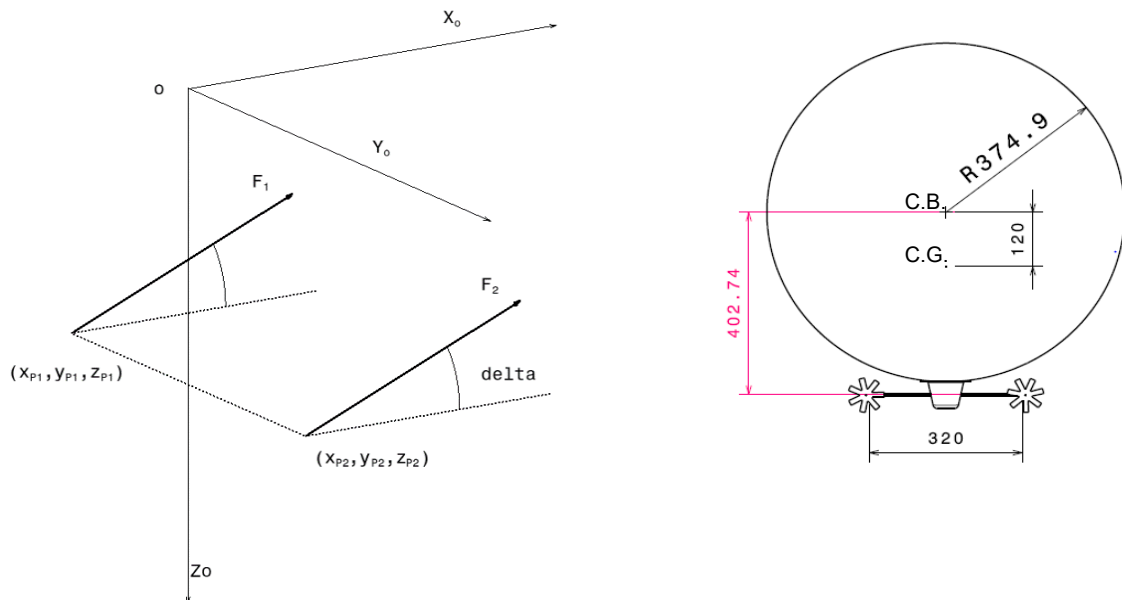


Figura 22 Esquema geométrico de la posición y ángulo de la propulsión y en el contexto del globo

## 4. Diseño e implementación del control

### 4.1 Introducción

Una vez completado el modelo dinámico del dirigible se procede al diseño del control. Primero se implementarán las ecuaciones y se validará a través de la respuesta a distintas entradas de los controles. Después, se obtendrá el modelo lineal en espacio de estados y se diseñará un control por realimentación de los estados basado en el algoritmo LQR.

Antes de comenzar a detallar la implementación es necesario comentar que en la mecánica de vuelo clásica se suele hacer distinción entre los parámetros que rigen la dinámica longitudinal y aquellos que afectan a la dinámica lateral-direccional. La dinámica longitudinal es la que contiene los movimientos en el plano  $XoZ$  y está constituida por  $u$ ,  $w$ ,  $q$  y  $\theta$ . La dinámica lateral-direccional recogería el resto de movimientos y estaría definida por  $v$ ,  $p$ ,  $r$  y  $\phi$ .

Cada variable será un estado del sistema. Estos estados, reordenados de esta manera y recogidos en un vector,  $\mathbf{X}$ , servirán, junto al vector de entradas o de control,  $\mathbf{U}$ , para expresar el modelo linealizado en espacio de estados.

$$\mathbf{X} = [u_o \quad w_o \quad q_o \quad \theta_o \quad v_o \quad p_o \quad r_o \quad \phi_o]^T \quad (56)$$

$$\mathbf{U} = [F_1 \quad F_2 \quad \delta]^T \quad (57)$$

El modelo matemático desarrollado se puede escribir, despejando la matriz de masas, como un conjunto de 8 ecuaciones diferenciales de primer orden fuertemente acopladas entre si,  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = [f_1, f_2, \dots, f_8]^T$ :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \quad (58)$$

Donde se han incluido las ecuaciones de  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\phi}$ , (45) y (46) respectivamente.

### 4.2 Implementación de las ecuaciones

Las ecuaciones se han implementado en dos programas con la intención de sacar partido a las ventajas que ofrecía cada uno. Primero se programaron con *Wolfram Mathematica* con la idea de desarrollar las ecuaciones, estudiarlas, realizar simulaciones comparativas y ayudar con el diseño del dirigible calculando puntos de funcionamiento. Además, se obtuvo un modelo linealizado analítico con las matrices en espacio de estados. Dicho modelo se desechó tras cambios en el modelo matemático, lo costoso de volver obtenerla y llegar a la conclusión de su nula utilidad práctica. Debido a un problema con el otro *software*, al final sí se empleó *Mathematica* para calcular estas matrices pero de forma numérica, como se comentará más adelante.

Los resultados obtenidos con este programa se trasladaron después a *Matlab Simulink* para así poder aprovecharse de las funciones de Matlab y diseñar el control de la aeronave.

#### 4.2.1 Mathematica

La programación de las ecuación (58) en *Mathematica* es bastante sencilla gracias a su flexibilidad para trabajar de modo simbólico con las expresiones. El trabajo en este punto consistió, básicamente, en programar todos los términos de la ecuación (49), calcular la inversa de matriz de masas (50) para despejar el sistema, e incluir las ecuaciones (45) y (46).

El código desarrollado se encuentra en el Manual de Programación del proyecto.

Una vez introducidas todas las contribuciones, se despeja el sistema y se asignan las ecuaciones a cada estado reordenándolas según se ha mencionado en la Introducción:

El modelo se completa con las ecuaciones cinemáticas (48) y la del ratio de cambio del ángulo de rumbo,  $\dot{\psi}$ , (47) haciendo un total de doce.

Introduciendo los datos del proyecto y las condiciones iniciales se podrá simular la respuesta del dirigible ante las entradas de los controles.

#### 4.2.2 Simulink

El modelo en Simulink ha sido programado con la ayuda de *Mathematica* y el paquete **ToMatlab.m** [35] que permite la conversión de las expresiones en *Mathematica* a *Matlab* en forma de cadenas de caracteres o *strings*. Para dicho cometido se desarrolló otro cuaderno en *Mathematica*, el cual se puede consultar en el Manual de Programación del proyecto.

Para la implementación se ha creado un subsistema en *Simulink* con las doce ecuaciones. Este bloque tiene una entrada para el vector de control y cuatro salidas: un vector con los ocho estados, otro con los estados escogidos para el seguimiento de las referencias, la posición en el espacio y un vector con los ángulos de Euler.

Los *strings* generados con las ecuaciones son modificados para introducirlas en los bloques **Fcn** de *Simulink*, como se detallará a continuación.

Para empezar, la entrada de estos bloques Fcn trabaja con un vector **u**. Este vector tendrá quince elementos: los ocho estados, el rumbo, la posición en el espacio y las tres componentes del vector de control. En la Tabla 13 se adjunta su estructura.

Din. Longitudinal				Din. Lateral-Direccional				Rumbo	Posición			Entradas control		
u(1)	u(2)	u(3)	u(4)	u(5)	u(6)	u(7)	u(8)	u(9)	u(10)	u(11)	u(12)	u(13)	u(14)	u(15)
$u_o$	$w_o$	$q_o$	$\theta_o$	$v_o$	$p_o$	$r_o$	$\phi_o$	$\psi_o$	$x'$	$y'$	$z'$	$F_1$	$F_2$	$\delta$

Tabla 13 Estructura del vector entradas **u** para el bloque Fcn de Simulink

Las ecuaciones cinemáticas se han incluido por comodidad. En el interior del subsistema, mostrado en la Figura 23, se distinguen, destacados en colores, los 4 bloques del modelo: la dinámica longitudinal, la dinámica lateral-direccional, el rumbo y las ecuaciones cinemáticas y las entradas del control. Las expresiones de las velocidades lineales y angulares se han introducido separando sus numeradores y denominadores. Los distintos numeradores de cada estado se han introducido separando por

contribuciones al modelo, ver Figura 24, en bloques *Subsystem*. Y los denominadores, uno para la dinámica longitudinal y otro para la lateral-direccional, se han implementado como bloques *Gain* ya que son constantes. Finalmente, en el bloque integrador se han especificado las condiciones iniciales de cada estado.

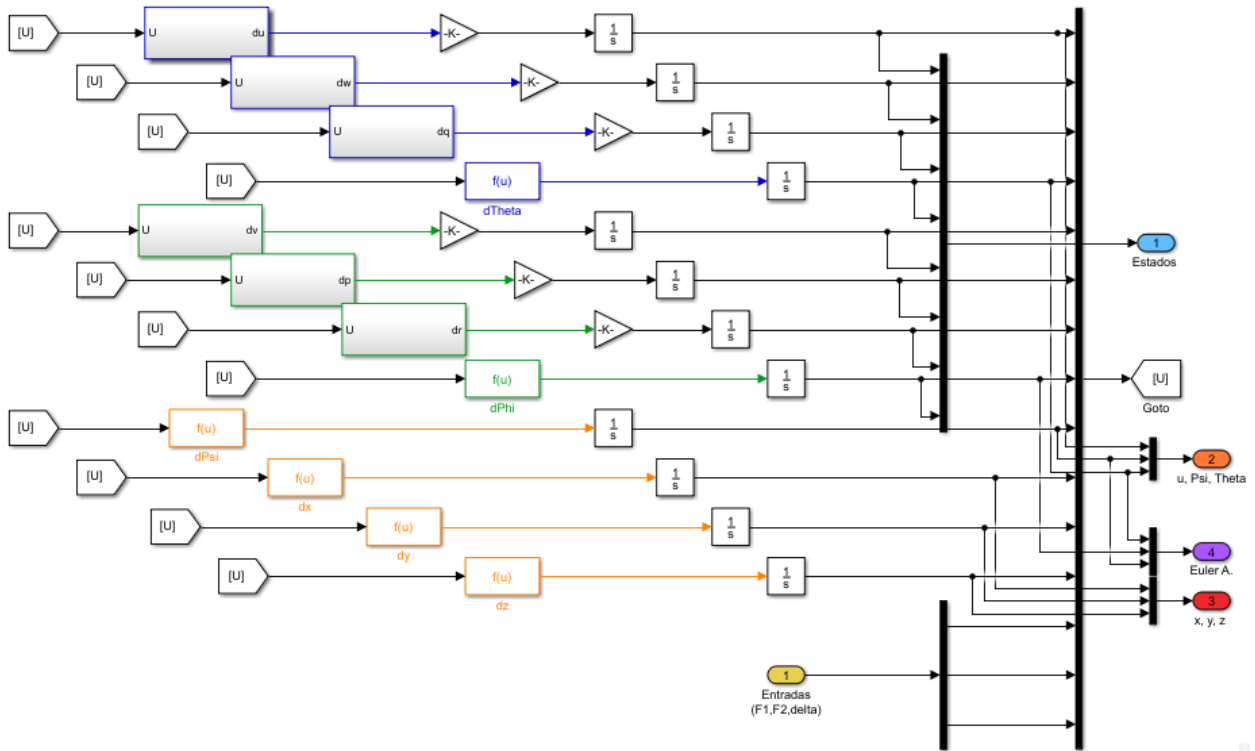


Figura 23 Interior del subsistema del modelo no lineal

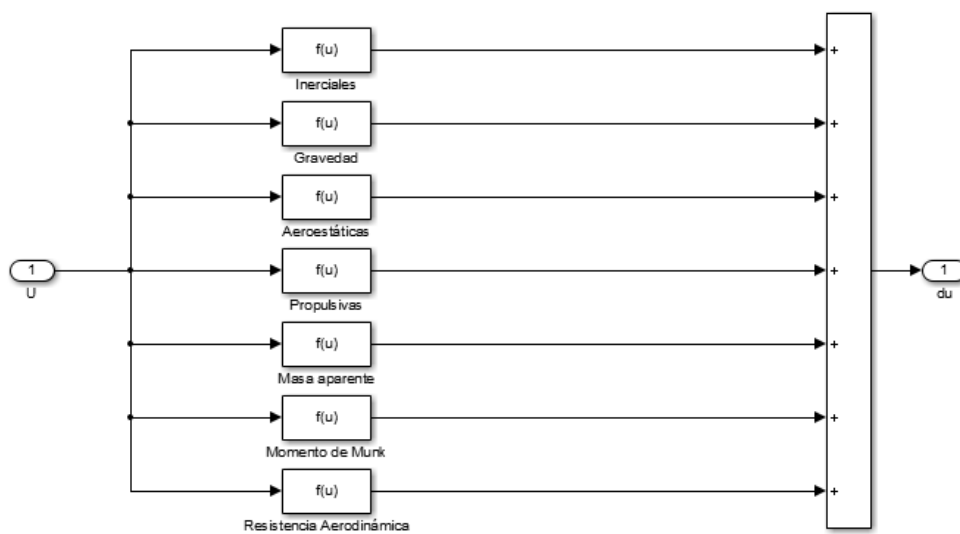


Figura 24 Esquema interno en Simulink del bloque subsystem que contiene el numerador de una de las aceleraciones del sistema,  $du$ .

### 4.3 Linealización del modelo

#### 4.3.1 Punto de funcionamiento

Una vez se tiene el modelo completo implementado en los dos programas se procede a obtener el modelo dinámico lineal. El primer paso necesario es calcular e introducir un punto de funcionamiento en equilibrio. Para que el dirigible lleve un vuelo equilibrado y estacionario el vector de estados debe ser  $\mathbf{X}_{eq} = [u_{eq}, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ , donde  $u_{eq}$  es la velocidad de equilibrio, y se debe obtener el vector de entradas que proporciona dicho equilibrio,  $\mathbf{U}_{eq}$ . Además, como en el equilibrio los valores son constantes sus derivadas serán cero.

Para calcular dicho punto y el valor del vector de entradas que proporciona dicho equilibrio se emplea *Mathematica*. De estos cálculos recordar que, primero, se calculó la coordenada  $x_G$  del centro de gravedad que proporciona un ángulo  $\theta$  igual a cero para una velocidad de vuelo de  $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , como se mencionó en el apartado de diseño 3.5.

$$\mathbf{X}_{eq} = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (59)$$

$$\mathbf{U}_{eq} = [0,061 \quad 0,061 \quad 0]^T \quad (60)$$

En la Figura 25 se han adjuntado dos gráficas con el valor de la propulsión necesaria y del ángulo  $\theta$  que se obtendría en un rango de velocidades comprendido entre 0 y  $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

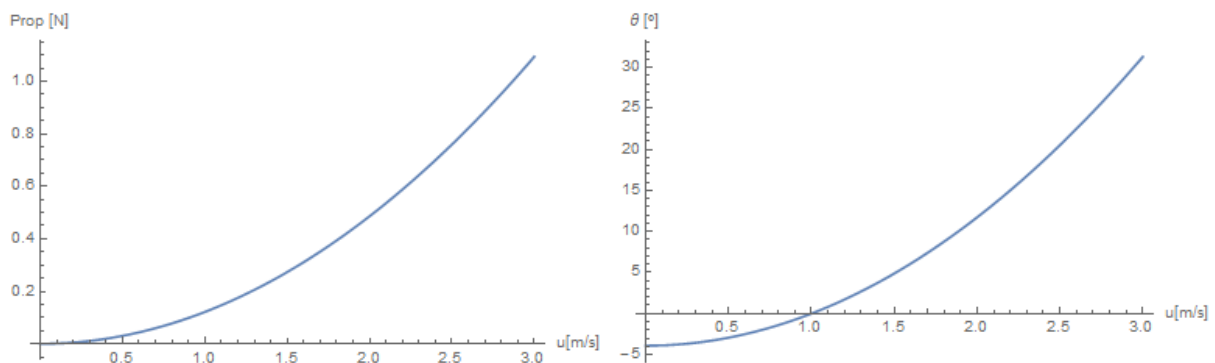


Figura 25 Variación de la propulsión y  $\theta$  en un rango de velocidades

Los valores de la propulsión ya se han mostrado en la Tabla 5. Por otra parte, los grandes valores de  $\theta$  se explican porque el centro de gravedad está muy cerca del centro de flotación y la propulsión muy alejada, como se aprecia en la Figura 22. Además, a partir de 20 grados la hipótesis de ángulos pequeños, aplicada para resolver el sistema, deja de tener sentido y se pierde precisión por lo que se obtienen valores más grandes de lo que realmente sucedería. Pero el resultado es importante porque para volar equilibradamente  $\delta$  debe adoptar ese valor para contrarrestar la inclinación y no ascender o descender, aunque con el punto de equilibrio escogido su valor de referencia será cero.

### 4.3.2 Comportamiento del sistema

Una vez calculado el punto de funcionamiento y los parámetros del diseño que se han derivado de éste es posible realizar simulaciones de respuesta del sistema ante entradas. En este caso, partiendo desde el punto de equilibrio se ha introducido un incremento de **0,01 N** en forma de escalón en ambos motores simultáneamente, en total 0,02 N, en el segundo 10. La respuesta en el plano longitudinal (la dinámica lateral-direccional permanece en cero) obtenida se muestra en la Figura 26.

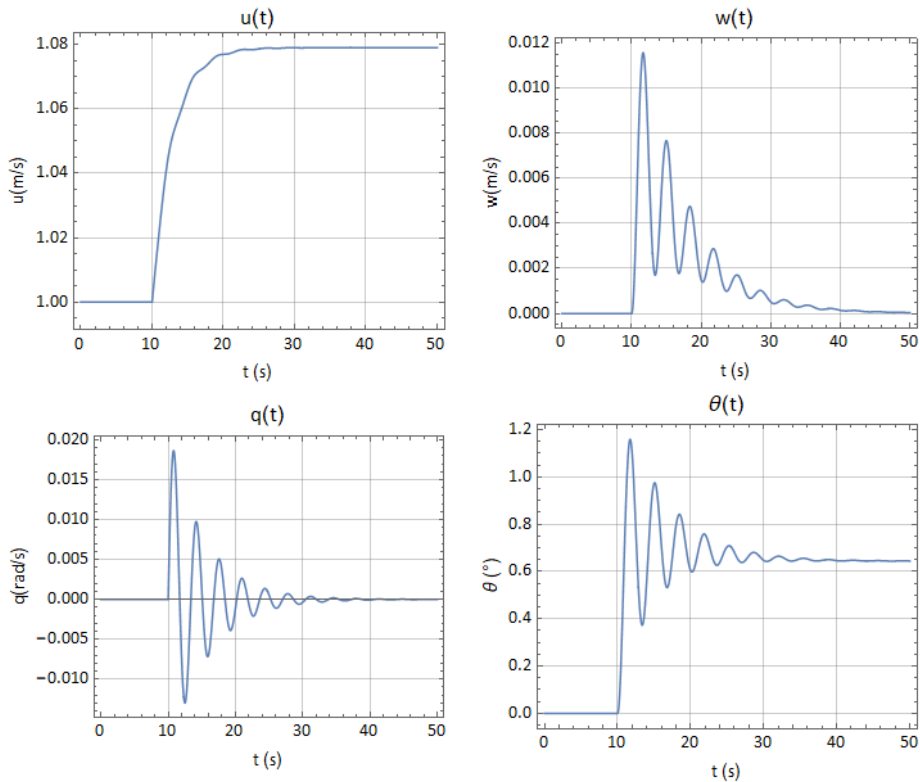


Figura 26 Respuesta de la dinámica longitudinal del dirigible a un escalón de 0,01 N en cada motor simultáneamente

La respuesta del conjunto en esta simulación es la esperada. A simple vista se observa un pequeño incremento en la velocidad  $u$  y en  $\theta$  y como  $w$  y  $q$  tienden a cero hasta que el conjunto alcanza un estado estacionario. En este punto la aeronave está ascendiendo ligeramente ya que  $\theta$  no es cero.

La lentitud en la disipación se explica tanto por la ausencia de superficies en cola que amortigüen estos movimientos como por los pequeños valores de las constantes de efectos viscosos que se traducen en valores de resistencia aerodinámica transversales muy pequeños en comparación con la propia resistencia longitudinal del modelo estimada, como se recoge en la Tabla 6. Estos valores deberán ser ajustados en las pruebas de vuelo.

En otra prueba realizada se modificaron ligeramente las condiciones iniciales del sistema introduciendo un valor mínimo en las condiciones iniciales de las variables de la dinámica lateral direccional, igual a  $10^{-7}$ , y se mantuvo la misma entrada. El resultado se muestra en la Figura 27.

Diseño, modelado y control del sistema de propulsión para un vehículo aéreo no tripulado basado en globo aerostático dirigible

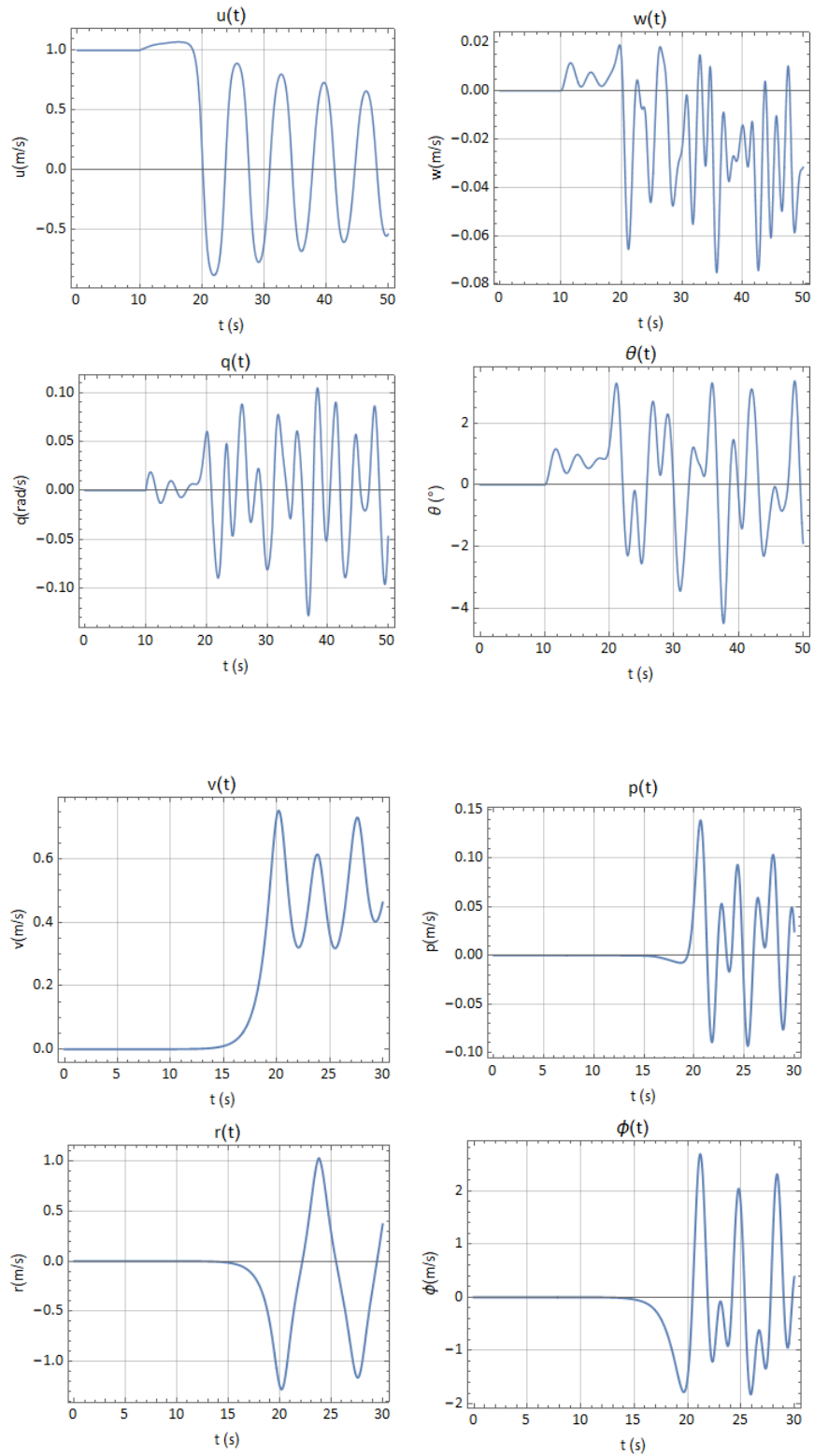


Figura 27 Respuesta de la dinámica completa del dirigible a un escalón de 0,01 N en cada motor simultáneamente. Cambio en las condiciones iniciales



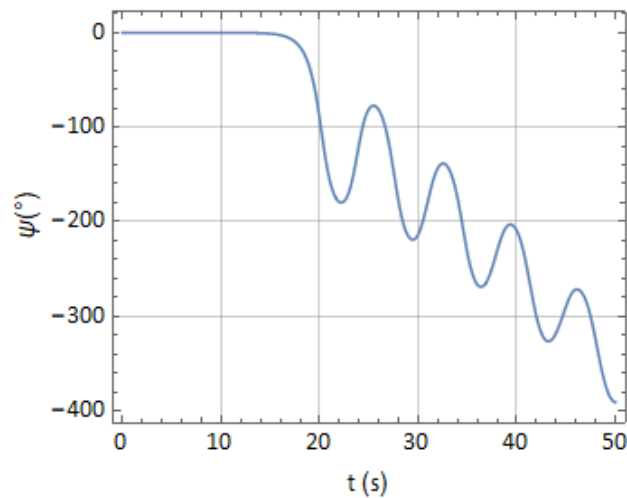


Figura 28 Evolución del ángulo  $\psi$  en el tiempo

Para describir en mayor detalle el comportamiento es conveniente fijarse en la Figura 28 dónde se ha incluido la variación del ángulo  $\psi$ . Aquí se observa cual es el efecto del momento desestabilizante de Munk sobre la dinámica del dirigible: la tendencia del globo a desviarse y colocarse transversalmente.

El hecho de que sea tan agresivo también se debe a los dos factores anteriormente mencionados. Por una parte, la ausencia de planos estabilizadores en cola hace que el centro aerodinámico del dirigible esté situado por delante del centro de gravedad y por tanto sea direccionalmente inestable y, además, tampoco se tiene su efecto amortiguador por masa aparente. Esto, junto con los pequeños valores de los términos de disipación viscosa, podría explicar esta respuesta.

Al diseñar el control, como se detallará en las próximas secciones, y realizar varias simulaciones en distintas condiciones, se observó que el efecto era demasiado fuerte como para estar modelando de forma realista el comportamiento del dirigible. Por esta razón, **se decidió no incluir el Momento de Munk en el modelo** desconectándolo en el modelo implementado en *Simulink*, ver Figura 24. Pero no eliminándolo, para poder incluirlo de nuevo fácilmente.

#### 4.3.1 Modelo lineal en espacio de estados

Existen diseños de control sobre modelos no lineales, pero son, en general, muy complicados [36]. La gran mayoría se basan en modelos lineales, linealizados, del modelo original.

El modelo lineal se obtiene escribiendo las ecuaciones como pequeñas perturbaciones entorno a un punto de equilibrio y aproximando los valores cercanos mediante el desarrollo en serie de Taylor truncado en la primera derivada evaluada sobre dicho punto bajo la hipótesis de que las variaciones serán pequeñas.

De forma matricial se puede expresar así:

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{\text{eq}} + \Delta \mathbf{X}, \mathbf{U}_{\text{eq}} + \Delta \mathbf{U}) \approx \mathbf{A}(\mathbf{X}_{\text{eq}}, \mathbf{U}_{\text{eq}}) \cdot \Delta \mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{X}_{\text{eq}}, \mathbf{U}_{\text{eq}}) \cdot \Delta \mathbf{U} \quad (61)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \quad (62)$$

Donde  $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{X}$  es la matriz de espacio de estados, el Jacobiano de  $\mathbf{F}$  respecto de  $\mathbf{X}$  evaluada en el punto de equilibrio. Y de manera similar pero con el vector de entradas  $\mathbf{B} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_{\text{eq}}, \mathbf{U}_{\text{eq}}) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right|_{\substack{\mathbf{X}_{\text{eq}} \\ \mathbf{U}_{\text{eq}}}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \right|_{\substack{\mathbf{X}_{\text{eq}} \\ \mathbf{U}_{\text{eq}}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial X_1} \right|_{\substack{\mathbf{X}_{\text{eq}} \\ \mathbf{U}_{\text{eq}}}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \right|_{\substack{\mathbf{X}_{\text{eq}} \\ \mathbf{U}_{\text{eq}}}} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{X}_{\text{eq}}, \mathbf{U}_{\text{eq}}) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial U_1} \right|_{\substack{\mathbf{X}_{\text{eq}} \\ \mathbf{U}_{\text{eq}}}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial U_i} \right|_{\substack{\mathbf{X}_{\text{eq}} \\ \mathbf{U}_{\text{eq}}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial U_1} \right|_{\substack{\mathbf{X}_{\text{eq}} \\ \mathbf{U}_{\text{eq}}}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial U_i} \right|_{\substack{\mathbf{X}_{\text{eq}} \\ \mathbf{U}_{\text{eq}}}} \end{pmatrix} \quad (63)$$

Como  $\mathbf{X}$  define los estados del sistema, las salidas o medidas tomadas del sistema deben ser función de  $\mathbf{X}$ . De forma general se tiene:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \quad (64)$$

Donde  $\mathbf{C}$  es la matriz de salidas y  $\mathbf{D}$  es la matriz de transmisión directa, que ha sido incluida por generalidad pero que, como en la mayoría de sistemas físicos, es nula. En la Figura 29 se muestra un esquema del sistema en espacio de estados:

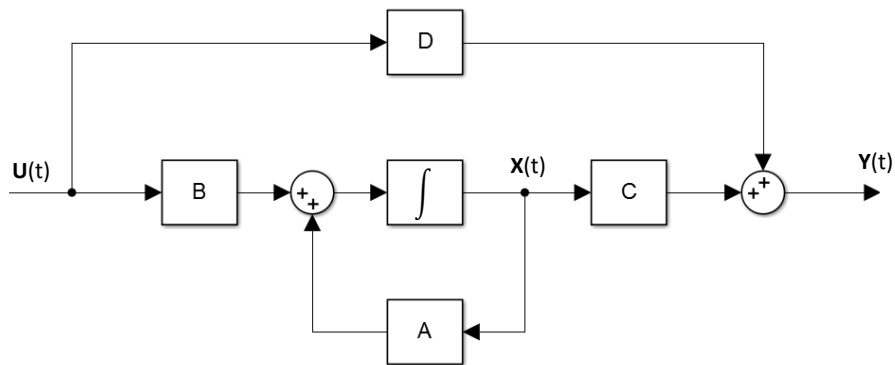


Figura 29 Esquema del sistema lineal en espacio de estados

Como se ha comentado al principio del apartado 4.2, se trató de obtener las matrices del sistema de forma analítica al estilo de mecánica de vuelo. Pero el resultado obtenido; aunque correcto al compararlo con las matrices obtenidas de forma numérica con *Matlab*, era muy farragoso y de poca utilidad práctica. Tras unos cambios en el modelo se desechó volver a calcularla y emplearla. Aun así, en el Manual de Programación se encuentra el código en *Mathematica* para obtenerla, aunque sería necesario antes realizar simplificaciones en el término de efectos viscosos para que el resultado fuera satisfactorio.

Por esto, se decidió emplear el comando *linmod('sys')* de Matlab. Este comando permite calcular estas matrices entorno al punto de funcionamiento con gran facilidad y rapidez. Pero debido a algún motivo desconocido, la columna del control  $\delta$  en la matriz **B** era nula.

Primero se optó por cambiar el punto de funcionamiento y el diseño, pero el resultado fue siempre el mismo. Tras comprobar que la matriz **B** analítica calculada con *Mathematica* sí tenía valores en dicha columna y que la respuesta del sistema completo y el lineal era la adecuada empleando dicha matriz se optó por una tercera vía: se calcularon con *Mathematica* las matrices pero de forma numérica y el resultado se trasladó a *Matlab* empleando la función *ToMatlab.m*. Las matrices resultado, idénticas a las anteriores pero con la columna mencionada corregida, son:

<b>A =</b>	<b>B =</b>
-0,354    0,0534    0,0378    0,474    0    0    0    0	1,19    1,19    -0,00118
0,000756    -0,1    0,609    -0,0219    0    0    0    0	0,0092    0,0092    0,114
0,161    -0,526    -0,373    -4,671    0    0    0    0	1,96    1,96    0,0117
0    0    1    0    0    0    0    0	0    0    0
0    0    0    0    -0,109    0    -0,577    -0,785	-0,0075    0,0075    0
0    0    0    0    -0,126    0    0,461    -11,383	-0,0253    0,0253    0
0    0    0    0    0,619    0    -0,442    0,487	1,224    -1,224    0
0    0    0    0    0    1    0    0	0    0    0

**C = I(8)** es una matriz identidad de ocho por ocho. Todos los estados se corresponden a magnitudes físicas y reales y se dispondrá de sensores que los medirán directamente. **D**, como ya se ha comentado, es nula.

#### 4.4 Análisis dinámico

Una vez calculadas las matrices del sistema se puede realizar un estudio detallado de su comportamiento.

##### 4.4.1 Análisis de estabilidad

Se entiende por estabilidad aquella respuesta del sistema que está acotada al ser excitado por una entrada también acotada [37]. Para analizarla es necesario conocer los polos del sistema, es decir, obtener los valores propios de la matriz **A** del sistema. Como resultado se obtiene:

$-0,0141 \pm 3,37 i$
$-0,199 \pm 2,224 i$
$-0,261 \pm 0,59 i$
-0,338
-0,0915

*Tabla 14 Polos del sistema*

Todos los polos del sistema; tres polos complejos conjugados y dos simples, son negativos y, por tanto, el sistema es estable. Como se acaba de mencionar, esto es debido a la eliminación del Momento de Munk del modelo. Si se incluyese dicho momento, el resultado sería el siguiente, apareciendo un polo inestable:

$-0,0122 \pm 3,382 i$
$-0,176 \pm 1,894 i$
$-1,371$
<b>0,859</b>
$-0,338$
$-0,126$

Tabla 15 Polos del sistema incluyendo el Momento de Munk

#### 4.4.2 Controlabilidad y observabilidad

Un sistema se dice controlable si la señal de control permite llevar los estados del sistema desde una posición inicial al estado final deseado. La controlabilidad del sistema se puede estudiar de dos maneras: vía la forma modal del sistema en espacio de estados o a través de la matriz de controlabilidad. Por comodidad se elegirá esta última. Esta matriz se define así:

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (65)$$

Si la matriz resultante de esta operación tiene el mismo rango que el número de variables del estado del sistema se puede afirmar que el sistema es controlable.

Esto se puede obtener fácilmente con *Matlab* empleando el comando **ctrb**:

```
Co = ctrb(A, B);
rank(Co)
```

De donde se obtiene que **el rango es 8** y, por tanto, **el sistema es controlable**.

La controlabilidad también se puede estudiar por entrada realizando un estudio similar pero con cada columna de la matriz **B**:

$$C_i = [B_i \ AB_i \ A^2B_i \ \dots \ A^{n-1}B_i] \quad (66)$$

Los resultados por entrada han sido los siguientes:

- **Motor izquierdo,  $F_1$ .** Se ha obtenido rango ocho, por lo que se puede afirmar que todos los estados son controlables, a priori, con esta entrada.
- **Motor derecho,  $F_2$ .** Al igual que la anterior entrada, se ha obtenido rango ocho.
- **Entrada 3,  $\delta$ .** Se ha obtenido rango cuatro.

También se pueden determinar los **índices de controlabilidad** de cada entrada. Esto se realiza con la siguiente matriz:

$$W = [B_1 \quad AB_1 \quad A^2B_1 \quad \dots \quad A^{\mu_1-1}B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad A^{\mu_2-1}B_2 \quad \dots \quad B_m \quad \dots \quad A^{\mu_m-1}B_m] \quad (67)$$

Donde la suma de los índices de controlabilidad,  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ , debe ser igual al número de variables,  $n$ . Y, por tanto, la matriz  $W$  será cuadrada.

Esta matriz debe contener  $n$  columnas linealmente independientes. Tras varias pruebas la única forma de lograr una matriz de rango completo fue con estas dos selecciones de índices, ver Tabla 16.

	$\mu_i$	$\mu_i$
$F_1$	4	3
$F_1$	3	4
$\delta$	1	1

Tabla 16 Selección de índices de controlabilidad del sistema

Estos índices determinan el número de variables que cada entrada va a controlar. El mayor de estos índices marcará el índice de controlabilidad del sistema,  $\mu_C$ , que en los dos casos es 4. Este índice determina el tiempo mínimo en el cual se puede controlar el sistema.

**El esfuerzo de control**, o controlabilidad relativa, se obtiene como el determinante de la matriz  $W$ . Para esta elección de índices<sup>7</sup> el valor obtenido, en global, es **-81,104**. Si se realiza este mismo estudio para las dos entradas de los motores se obtiene, en ambos, **58092**. Y con delta se obtiene **-3,704e-7**.

**Respecto a la observabilidad** se comprueba que el vector de estados se corresponde a magnitudes físicas reales, por tanto, es posible reconstruirlo completamente mediante la utilización de sensores apropiados. Como consecuencia, no es necesario implementar un observador completo ni parcial.

#### 4.5 Diseño del control

Para dotar al dirigible de la capacidad de navegación autónoma por los puntos, *waypoints*, de una ruta se ha programado en *Simulink* un control dividido en dos etapas. El esquema simplificado de control se muestra en la Figura 30.

<sup>7</sup> Son índices simétricos, la elección de unos u otros da el mismo valor para el esfuerzo de control.

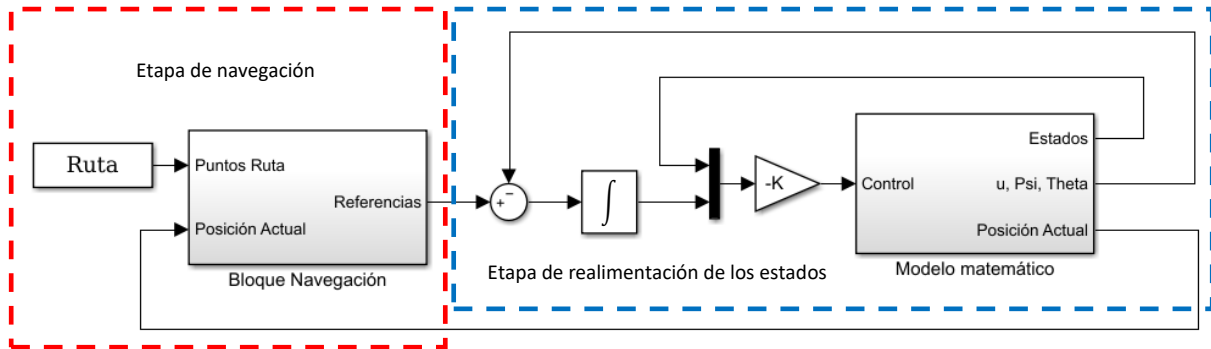


Figura 30 Esquema del control

La primera etapa calcula las referencias que debe seguir el sistema para alcanzar el punto objetivo. La segunda etapa es el control por realimentación de los estados, el cual se realizará sobre un sistema ampliado que incluye el seguimiento de dichas referencias. En esta sección se explicará en detalle ambas.

En la Figura 31 se ha incluido el esquema completo en Simulink.

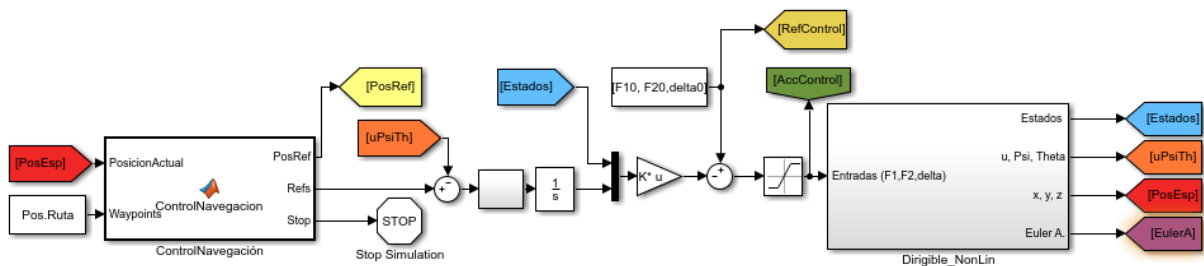


Figura 31 Programa del control en Simulink.

#### 4.5.1 Etapa de navegación

La primera etapa del sistema de control es un bloque programado en Matlab que se encarga de la navegación del sistema. Todo este bloque trabaja con coordenadas cartesianas en el espacio bajo el supuesto simplificado de tierra plana.

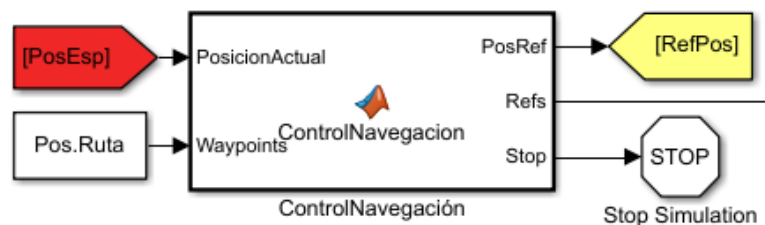


Figura 32 Etapa de Navegación

Como se ve en la Figura 32, este bloque programado en *Matlab* tiene dos entradas y tres salidas. En la Tabla 17 se recoge su descripción.

Entradas	Descripción	Estructura
PosEsp	Vector con la posición actual del dirigible en el espacio. Calculado en el bloque del modelo matemático.	[1x3]
Pos.Ruta	Matriz con las $m$ coordenadas de la ruta en el espacio. Cargado desde el <i>workspace</i> .	[mx3]
Salidas	Descripción	Estructura
RefPos	Vector con las coordenadas del punto de referencia actual. Opcional. Empleado para visualización en los <i>Scopes</i> del programa <i>Simulink</i> .	[1x3]
Refs	Vector con las referencias escogidas que debe seguir del sistema: la velocidad $u$ y los ángulos $\psi_{ref}$ y $\theta_{ref}$ .	[1x3]
Stop	Esta salida envía una señal al bloque <i>Stop</i> de <i>Simulink</i> cuando se alcanza el último punto de la ruta para terminar la simulación del sistema	[1x1]

Tabla 17 Descripción de las entradas y salidas del bloque de navegación

El control de la navegación comienza cargando el primer punto de la ruta y calculando la diferencia con respecto a la posición actual del dirigible, a la que se denominará error en la posición (68). Calculado el error de cada coordenada se pueden establecer los ángulos de referencia, azimut y elevación, a seguir.

$$x_e = x_{ref} - x'; y_e = y_{ref} - y'; z_e = z_{ref} - z' \quad (68)$$

$$\psi_{ref} = \arctan2(x_e, y_e) \quad (69)$$

$$\theta_{ref} = \arctan2\left(-z_e, \sqrt{x_e^2 + y_e^2}\right) \quad (70)$$

Estos ángulos tienen como marco de referencia el fijo-inercial. La función *arctan2* calcula el ángulo en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano y tiene un rango comprendido entre  $[-180^\circ, 180^\circ]$ . En la elevación no es problema porque no se solicitarán nunca grandes ángulos. Pero en el caso del ángulo  $\psi_{ref}$ , al volar con rumbos cercanos a  $180^\circ$  es posible que se dé el caso ilustrado en la Figura 33. En este caso la referencia puede cambiar bruscamente de valores positivos a negativos.

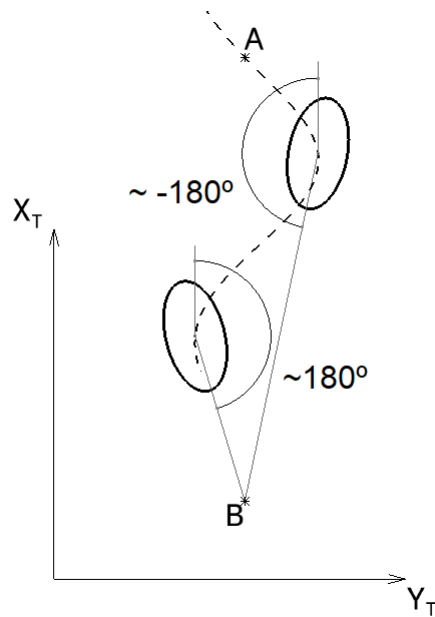


Figura 33 Una posible situación del dirigible volando de A a B en rumbo 180°

Para solucionar este problema y evitar solicitar al dirigible que dé una vuelta sobre sí mismo se ha programado un código en *Matlab*, mostrado en la Figura 34.

Este código detecta si se ha producido un salto al comparar con el dato anterior y añade o resta una vuelta, según proceda, modificando el contador de vueltas  $n$ . Acto seguido se corrige el ángulo de referencia, se guarda para el siguiente paso, y se asigna a la referencia.

En el caso de  $\theta_{ref}$  se ha incluido una condición que marca a cero esta referencia cuando el error en la altura es, en valor absoluto, de un metro. Esto se ha incluido porque al estar cerca del punto objetivo la función trigonométrica calculaba grandes ángulos.

```
%% Yaw Ref

YN=atan2(yE,xE);      % Se calcula el nuevo Yaw

if      ((YN + (n)*2*pi)- YA) < (-350*G2R)
    n=n+1;
elseif ((YN + (n)*2*pi)- YA) > (350*G2R)
    n=n-1;
end

YN=YN+n*2*pi;        % Se corrige
YA=YN;                % Se guarda el dato para comparar

YawRef=YA;
```

Figura 34 Código en *Matlab* para corregir la referencia



La velocidad de referencia se mantendrá constante en todo momento para exigirle al dirigible que vuele en el punto de funcionamiento,  $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , a modo de acción integral en la realimentación de estado.

Este bloque se ha programado para que al situarse a menos de un metro del punto de referencia el sistema se dirija al siguiente y que detenga la simulación al alcanzar el último punto.

#### 4.5.2 Control por realimentación de los estados

Cuando se trabaja en espacio de estados una de las formas más simples de control es la realimentación de los estados. Este control presenta la siguiente ley [38]:

$$\mathbf{U} = \mathbf{w} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{X} \quad (71)$$

Donde  $\mathbf{w}$  sería el vector con la referencia de las entradas de control en el punto de funcionamiento y  $\mathbf{K}$  la matriz de ganancias para realimentar el sistema

Este control tiene el siguiente esquema, conocido como bucle cerrado:

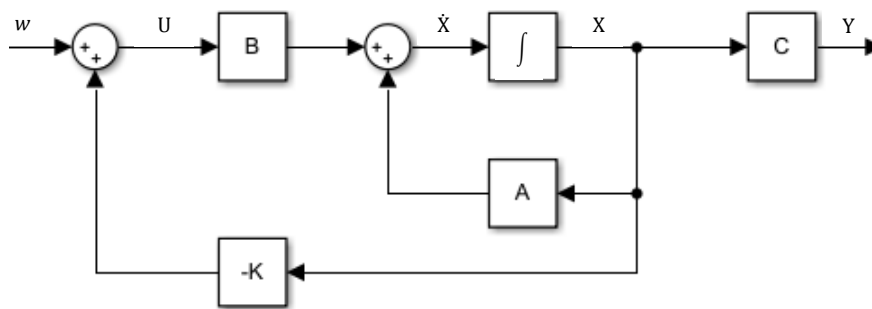


Figura 35 Esquema de un sistema en espacio de estados realimentado

Si se introduce en la ecuación (62) se tiene:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{w} \quad (72)$$

Planteando ahora el problema de autovalores del sistema realimentado:

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} - \lambda_c \cdot \mathbf{I}| = 0 \quad (73)$$

Se puede observar que el valor de los polos del sistema pueden ser modificados con la matriz  $\mathbf{K}$  y con ello cambiar la dinámica del sistema. El problema ahora es el diseño de esta matriz, que ahora se detallará.

Antes, es necesario modificar el sistema para dotarle de la posibilidad de seguir las referencias: la velocidad  $u_o$  y los ángulos  $\psi_o$  y  $\theta_o$ . Esto se logra ampliando el sistema para incorporar la acción integral sobre los errores para minimizarlos y llevarlos a cero [37]. Entendiendo por error la diferencia entre los valores de referencia y el valor de dichas variables en un instante dado. El sistema ampliado tiene la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{I} \cdot ref \quad (74)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot ref \quad (75)$$

Que, esquematizado, tiene la siguiente forma:

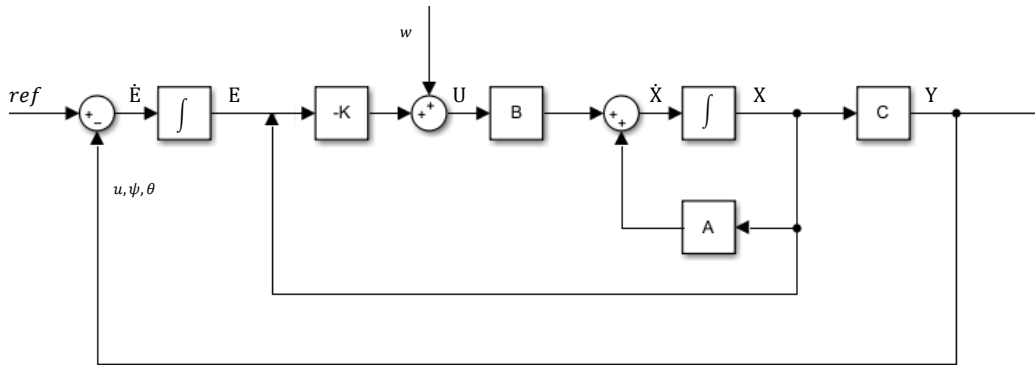


Figura 36 Esquema de la realimentación de estado con seguimiento de las referencias

Las matrices ampliadas serían:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -0,354 & 0,0534 & 0,0378 & 0,474 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,00075 & -0,1 & 0,609 & -0,0219 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,161 & -0,526 & -0,373 & -4,671 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,109 & 0 & -0,577 & -0,785 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,126 & 0 & 0,461 & -11,383 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,619 & 0 & -0,442 & 0,487 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1,19 & 1,19 & -0,00118 \\ 0,0092 & 0,0092 & 0,114 \\ 1,96 & 1,96 & 0,0117 \\ 0 & 0 & 0 \\ - & 0,0075 & 0 \\ - & 0,0253 & 0 \\ 1,224 & -1,224 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 4.5.3 Diseño de la matriz de realimentación de los estados

Para el diseño de la matriz de realimentación  $\mathbf{K}$  se ha empleado la técnica de control óptimo LQR, *linear quadratic regulator*. Este algoritmo proporciona automáticamente un resultado para la matriz de realimentación tal que minimiza la función de coste  $\mathbf{J}$  (76). Este índice cuadrático está sujeto a la dinámica del modelo.

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{X}^T(t) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}(t)) dt \tag{76}$$

Donde  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son las matrices de coste de los estados y del control, la primera definida simétrica no negativa y la otra simétrica definida positiva. Estas matrices ponderan el valor de los estados y las acciones de control. En el caso de  $\mathbf{Q}$  los valores grandes llevan los estados al equilibrio con mayor rapidez. Y al contrario con  $\mathbf{R}$ : unos valores grandes conllevarán acciones de control pequeñas ya que al tratar de minimizar el índice los valores dicho vector deberá ser pequeño. Deben ser ajustadas a mano para lograr la dinámica requerida, para lo cual se han llevado a cabo numerosas simulaciones y pruebas. Las pruebas principales se detallarán en la sección 5 de resultados.

*Matlab* incorpora un comando, *lqr()*, que permite diseñar el regulador buscado. Tras las pruebas, las matrices que ofrecían, en conjunto, una buena respuesta del sistema son las siguientes:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}$$

Dando como resultado la siguiente matriz  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} 1,300 & 0,246 & 1,243 & 2,270 & -3,636 & 1,429 & 1,720 & -0,259 & -0,765 & -1,581 & -0,402 \\ 1,300 & 0,246 & 1,243 & 2,270 & 3,636 & -1,429 & -1,720 & 0,259 & -0,765 & 1,581 & -0,402 \\ 2,716 & 10,055 & -1,276 & -3,655 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & -1,272 & 0,000 & 9,671 \end{vmatrix}$$

#### 4.5.4 Etapa de realimentación de los estados

Finalmente, la implementación en Simulink de la segunda etapa de control se muestra en detalle en la Figura 37.

En el esquema se han incluido tres bloques de saturación. Los dos primeros, situados en el bloque gris antes de la integral del error, limitan los errores del seguimiento tanto de  $\psi_{ref}$  como de  $\theta_{ref}$  para no solicitar un gran esfuerzo al control y conseguir un seguimiento más suave de las referencias. El tercero se sitúa antes de la entrada al modelo matemático para simular las limitaciones físicas de los motores y acotar su rango de actuación.

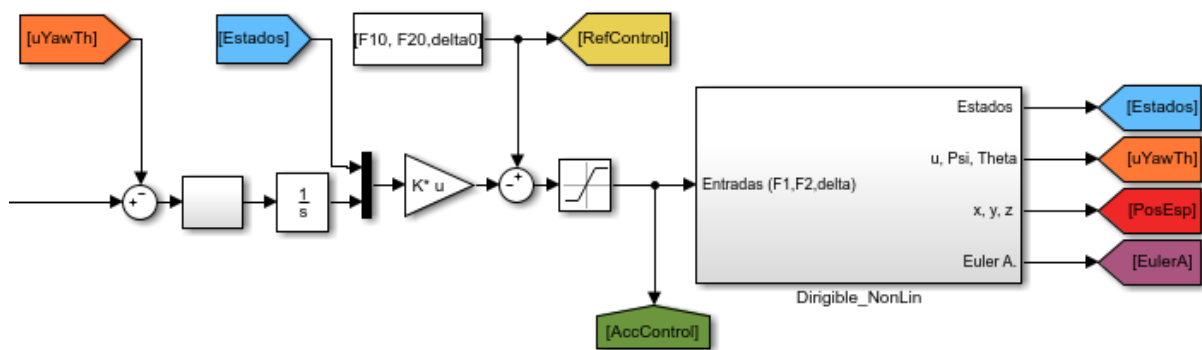


Figura 37 Etapa de realimentación de los estados

Es importante señalar que para llevar a cabo las simulaciones en *Simulink* es necesario configurar los parámetros del documento para emplear el *solver ode15s* y bajar la tolerancia relativa a  $1e-6$ .

#### 4.5.5 Visualización 3D

Para terminar la implementación del control se ha incluido en el archivo *Simulink* un bloque de comunicación con el software *FlightGear*. La conexión con este simulador de vuelo no es indispensable, pero facilita la comprensión del comportamiento de la aeronave de una forma visual y más intuitiva.

Para la visualización se ha empleado un modelo CAD de un dirigible comercial que venía de serie con el simulador, el *Zeppelin NT* ilustrado en la Figura 40, ya que no fue posible emplear el modelo creado con *Catia*.

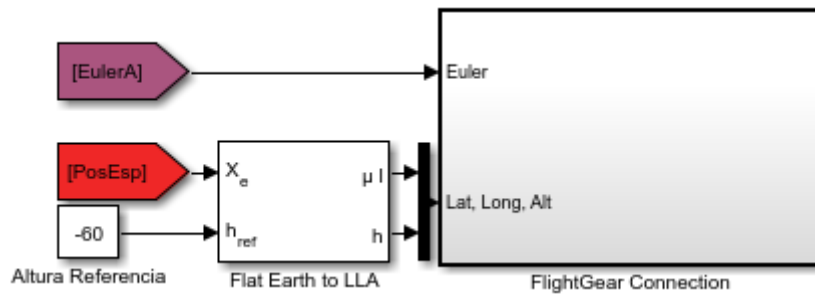


Figura 38 Conexión Simulink con FlightGear

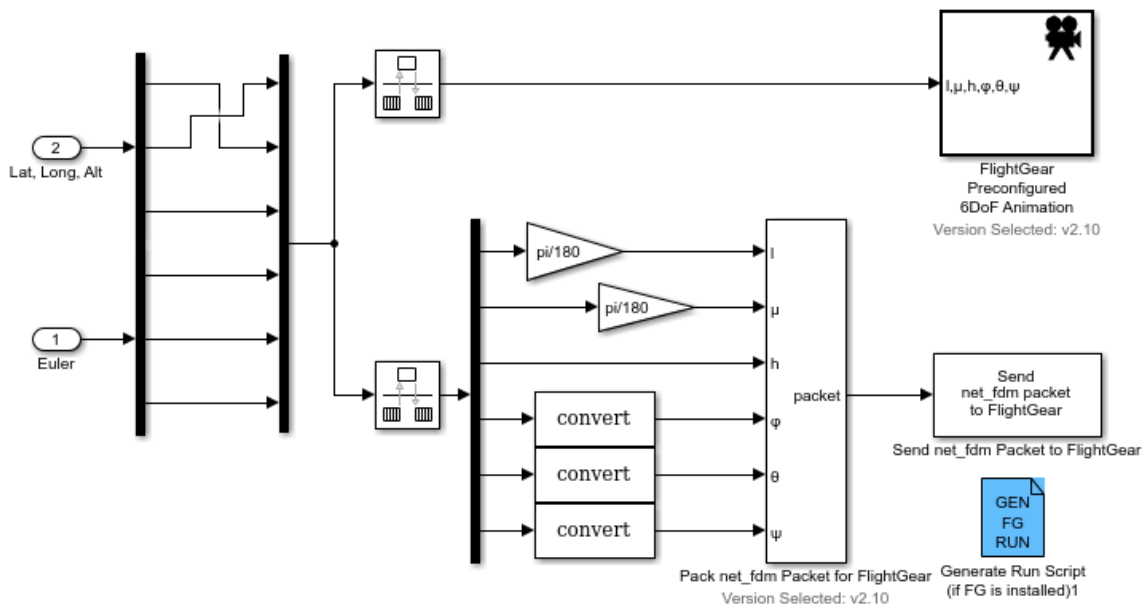


Figura 39 Bloque de conexión con FlightGear

Diseño, modelado y control del sistema de propulsión para un vehículo aéreo no tripulado basado en globo aerostático dirigible

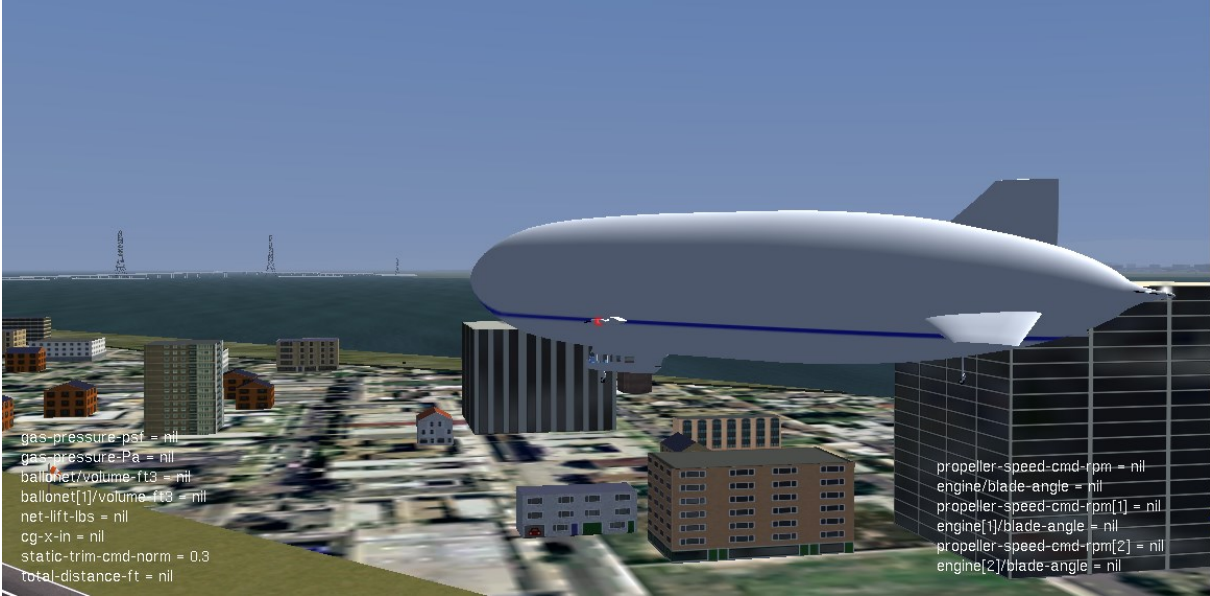


Figura 40 Captura de pantalla con el Zeppelin NT en el entorno FlightGear

## 5. Resultados

En esta apartado se van a mostrar los resultados de dos pruebas de vuelo llevadas a cabo en el programa *Simulink* implementado. Estas pruebas cumplen una doble función. Por una parte, mostrar la efectividad del control diseñado y, por otra, han sido base para el ajuste de los índices de las matrices **Q** y **R** del apartado 4.5.3.

Las pruebas consisten en el seguimiento de unas rutas programadas y serán descritas a continuación. En las dos el dirigible parte del reposo en unas coordenadas y orientación iniciales. Se ha dado la vuelta al eje z y se ha representado la variación de altura,  $h$ , para que las explicaciones sean más intuitivas.

En el Anexo A se puede encontrar la evolución temporal de los estados y de la acción de control completas de las dos pruebas.

### 5.1 Primera prueba

#### 5.1.1 Explicación de la ruta

En la Figura 41 se muestra la primera ruta diseñada para las pruebas de vuelo. Esta ruta está compuesta por dieciséis puntos, o *waypoints*. La primera parte, con el punto de inicio marcado en verde, consiste en dos vueltas a derechas en descenso. Entre estos puntos hay cinco metros de diferencia en altura y cien metros en el plano horizontal. La segunda parte consiste, tras un tramo a altura constante, en dos vueltas ascendiendo hasta la meta, marcada en rojo. La distancia horizontal se mantiene pero la diferencia de altura entre puntos es el doble. Es importante señalar que la línea discontinua se ha añadido sólo por claridad. Las referencias irán marcadas por las coordenadas de los *waypoints*.

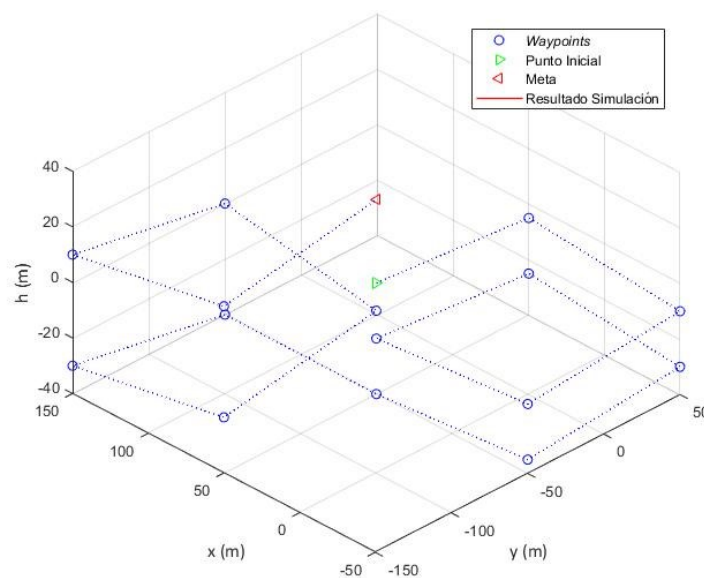


Figura 41 Ruta de la primera prueba de vuelo

### 5.1.2 Resultados de la simulación

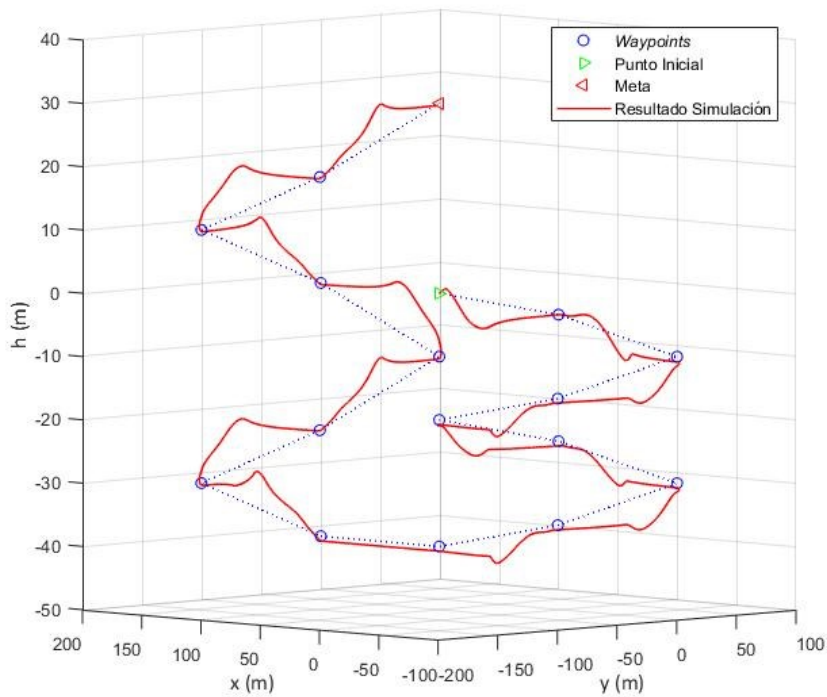
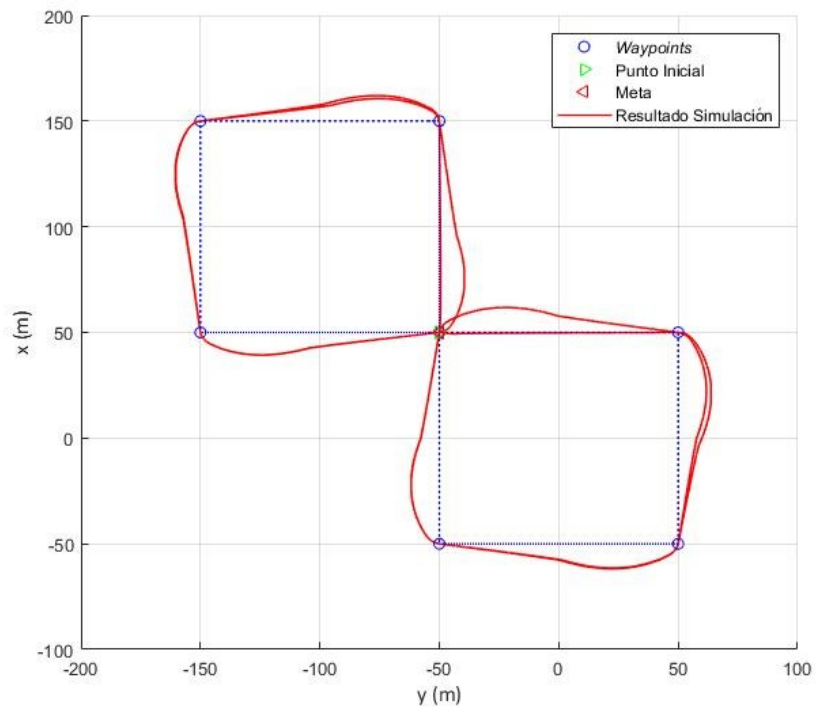


Figura 42 Resultados de la primera prueba de vuelo



En la Figura 42 se muestran dos vistas de los resultados de esta primera prueba de vuelo. En la primera se puede observar la *planta* del trazado y en la segunda una vista en perspectiva para poder apreciar los cambios de altura.

Se observa como el dirigible sigue la ruta marcada. Es necesario recalcar que la línea discontinua sólo está para ayudar a la visualización de la ruta que marcan los *waypoints* porque puede aparentar que el dirigible asciende y desciende bruscamente pero lo que está haciendo realmente es alcanzar la referencia en altura que le marca el *waypoint* objetivo y después volar horizontalmente, en el punto de funcionamiento establecido, hasta llegar a él, luego dirigirse al siguiente punto y así sucesivamente hasta alcanzar la meta de la ruta.

Como se ha mencionado, en el Anexo A se ha recogido la acción de control y la respuesta del sistema a lo largo de esta primera prueba. En la acción de control se distinguen las dos etapas de esta prueba y de ésta cabe destacar que nunca alcanza valores extremos y presenta una actuación razonable, como se puede ver con más detalle en la Figura 43, donde se ha cogido un segmento temporal que abarca dos *waypoints* iniciales.

Es cierto que para la escala del proyecto puede parecer que tarda mucho en corregir y establecer el rumbo constante al nuevo punto. Pero hay que apuntar que el control está corrigiendo simultáneamente el rumbo y la altura mientras trata de mantener una respuesta dinámica controlada. Por otra parte, el dirigible completa los tramos en un tiempo acorde a la velocidad marcada y la distancia horizontal establecida entre puntos.

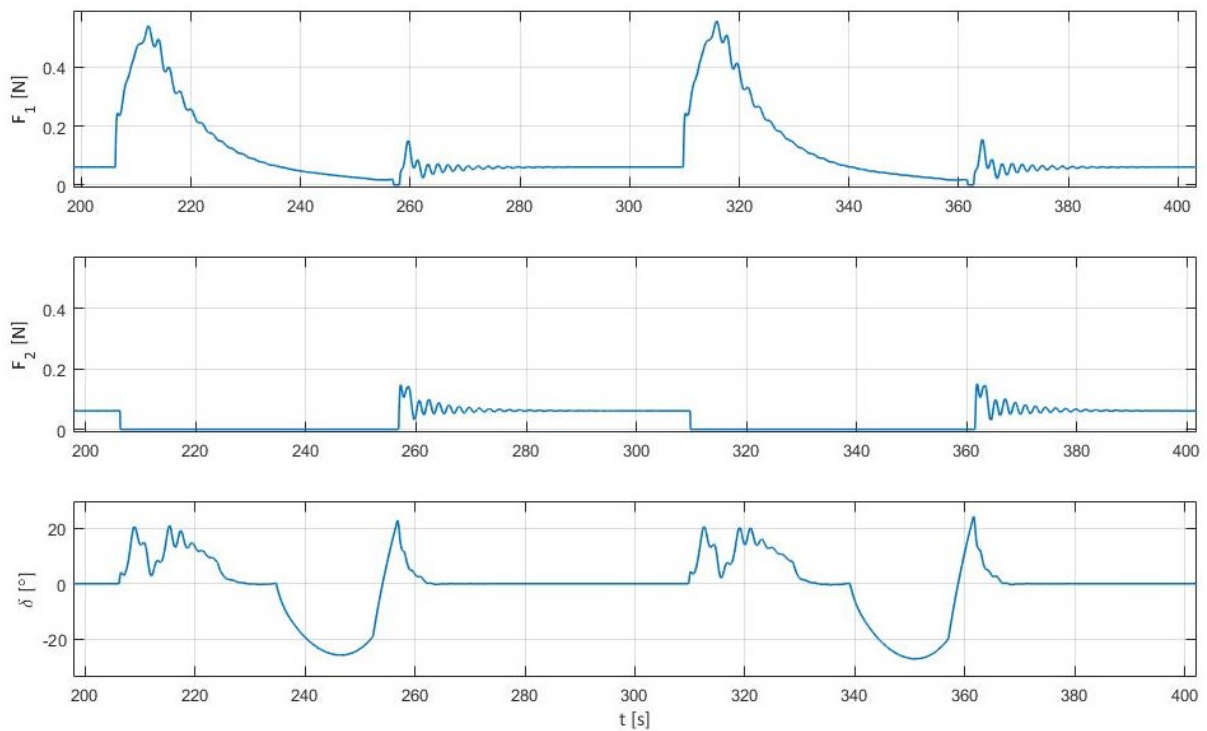


Figura 43 Detalle de la acción de control de la primera prueba

## 5.2 Segunda prueba

### 5.2.1 Explicación de la ruta

Para la segunda prueba de vuelo se ha programado una espiral levógira ascendente de 50 m de radio y 0,02 rad de pendiente como la mostrada en la Figura 44. Los objetivos de esta segunda prueba son, por una parte, comprobar que el control puede realizar un seguimiento suave de las referencias en constante cambio y, por otra, comparar los resultados de esta simulación con otra en la que se han fijado los controles y calculado el punto de establecimiento de los estados para poder realizar esta espiral.

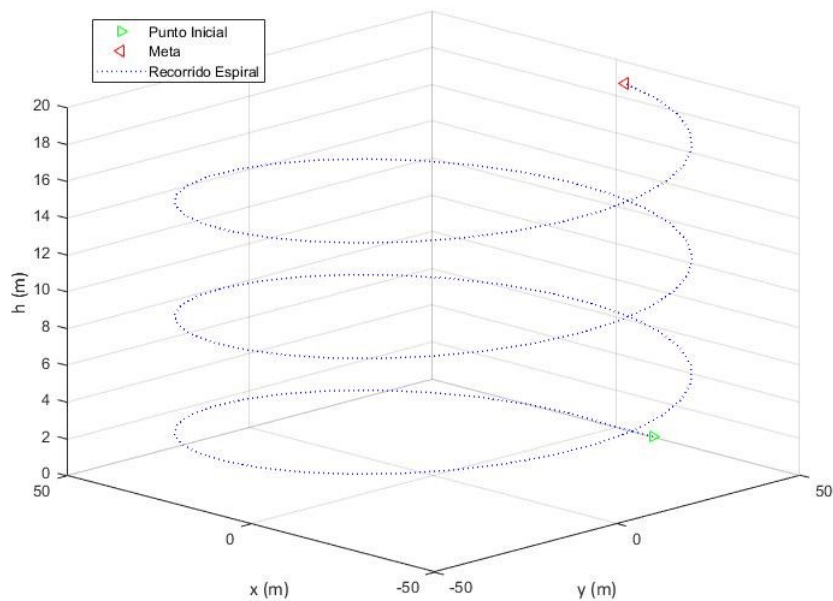


Figura 44 Ruta espiral de la segunda prueba de vuelo

### 5.2.2 Resultados de la simulación

Los resultados de esta simulación se muestran en la Figura 45. En la vista en *planta* se observa como el dirigible traza la circunferencia en el plano horizontal. Y en la vista en *alzado* se aprecia como se activa el seguimiento de altura cuando el error es mayor al programado. Este error está fijado actualmente en  $\pm 1$  m.

Como se ha comentado al inicio, este trazado está realizado sin cambiar el control. Y es importante recordar que está calculado en base a un punto de funcionamiento de vuelo horizontal recto estacionario.

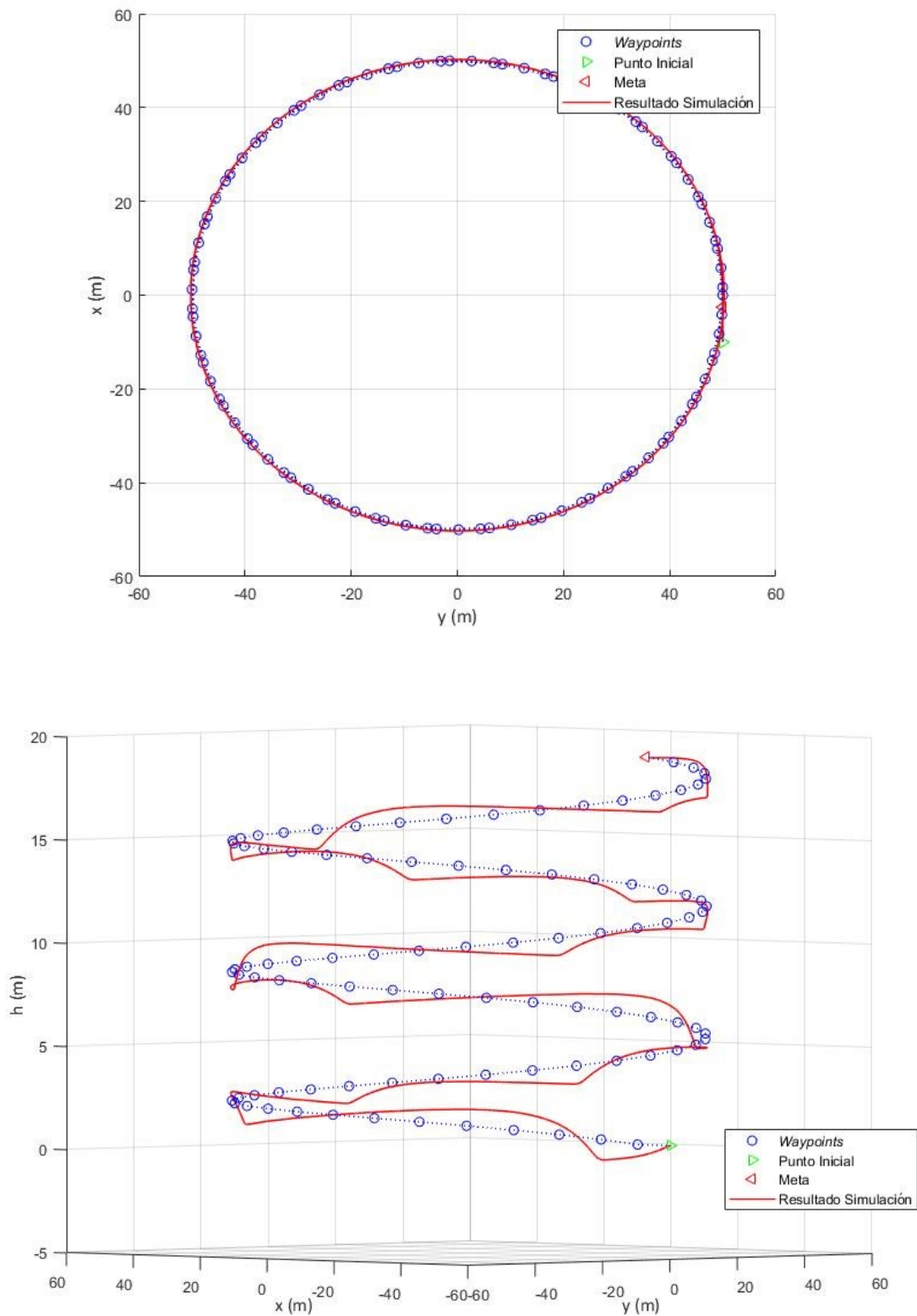


Figura 45 Vistas de los resultados de la segunda prueba de vuelo

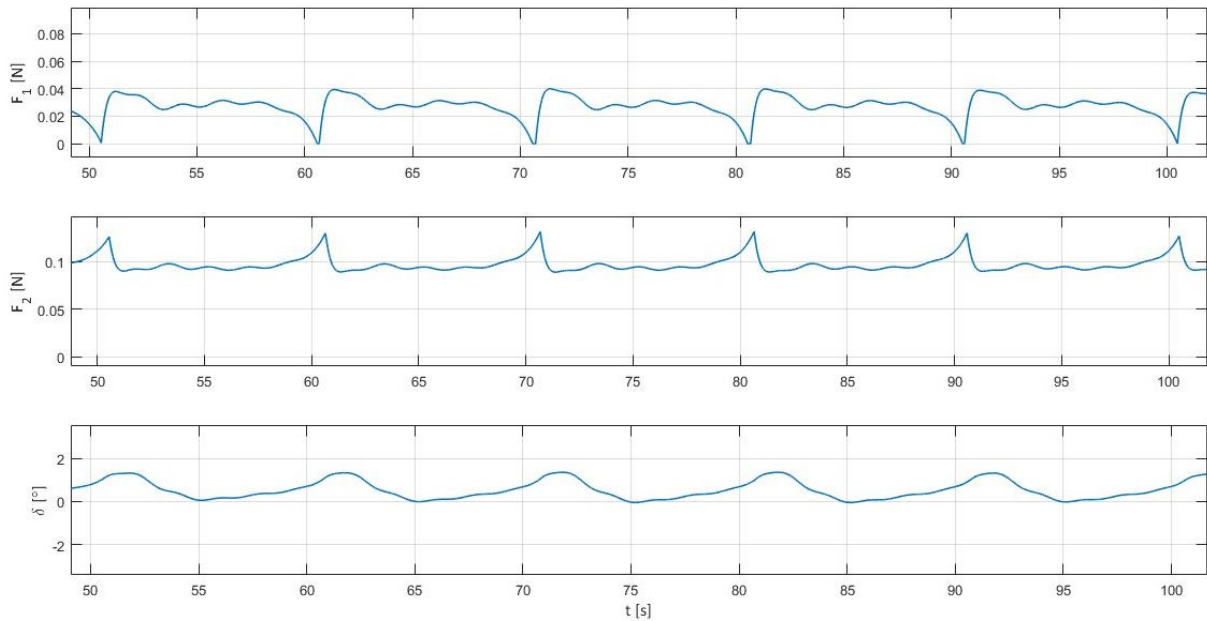


Figura 46 Detalle de la actuación de los motores durante la segunda prueba

En la Figura 46 se recoge un segmento temporal de la actuación de los controles durante esta segunda prueba. En general es mucho más suave y constante, acorde a una ruta establecida con muchos más puntos.

Con las ecuaciones es posible calcular el punto de funcionamiento necesario para realizar dicha espiral sin necesidad de un control. Los resultados de dicho cálculo se recogen en la Tabla 18 y en la Figura 47 se puede comparar las trayectorias de las dos simulaciones. La simulación del punto de funcionamiento no está controlada para seguir las referencias.

Datos trayectoria espiral		Valores estados	
Velocidad de vuelo, $u$ (m/s)	1	$u$ (m/s)	1
radio (m)	50	$w$ (m/s)	-0,02
Pendiente, $\gamma$ (rad)	0,02	$q$ (rad/s)	0,0000453
		$\theta$ (rad)	0,003
		$v$ (m/s)	0,123
		$p$ (rad/s)	0,0000621
		$r$ (rad/s)	0,02
		$\phi$ (rad)	-0,0023
Datos controles			
Motor izquierdo, $F_1$ (N)	0,0274		
Motor derecho, $F_2$ (N)	0,0968		
$\delta$ (rad)	-0,0146		

Tabla 18 Datos del punto de funcionamiento para la trayectoria espiral

Algunos valores de esta tabla coinciden, o están muy cerca, de los valores de las gráficas de la simulación con el control.

De los datos del punto de funcionamiento cabe señalar que para lograr la pendiente de ascenso es más sencillo establecer la velocidad vertical  $w$  que el ángulo  $\theta$ . Esto se debe al diseño de la aeronave porque al volar a 1 m/s de velocidad se estableció en el apartado 3.5 que  $\theta$  fuese 0.

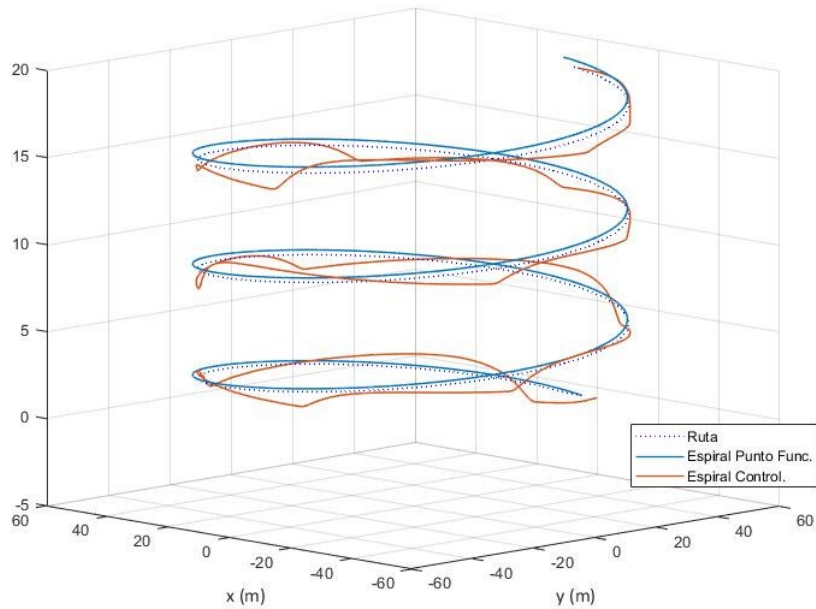


Figura 47 Comparativa de las trayectorias realizadas por dirigible con control y en el punto de funcionamiento

En cuanto a la trayectoria seguida, el trazado realizado por el dirigible en el punto de funcionamiento es suave y realiza sin problemas la espiral de esta prueba de vuelo.

## 6. Conclusiones

El objetivo final del proyecto era desarrollar un sistema con la capacidad de vuelo autónomo en base a un dirigible. A la vista de los resultados obtenidos se puede concluir que el proyecto ha resultado ser un éxito parcial. Todos los objetivos fijados han sido abordados y trabajos. Pero hay un margen de mejora en algunos puntos, como se comentará a continuación.

Para comenzar, destacar el nuevo modelo dinámico desarrollado y aplicado, punto crucial para el diseño del conjunto propulsivo. Sobre éste comentar que las estimaciones realizadas sobre las constantes aerodinámicas empleando métodos semi-empíricos han proporcionado unos resultados parcialmente admisibles, ya que los valores de resistencia lateral son muy pequeños en comparación<sup>8</sup> con el valor de la resistencia longitudinal. Por tanto, sería recomendable incluir pruebas de vuelo reales para el ajuste de todas las constantes del sistema y del modelo matemático en sí. Por otra parte, dentro del ajuste sería importante estudiar la necesidad de incorporar los efectos debidos al momento de Munk.

El diseño del conjunto propulsivo es satisfactorio. Se ha logrado un diseño que cumple con el objetivo propuesto de lograr una aeronave con flotabilidad neutra a un bajo coste. Aun así, es necesario comprobar cuanta carga libre se dispone realmente, ya que los cálculos han sido muy conservadores en este aspecto.

Se ha logrado implementar un control de vuelo en dos fases. La primera de ellas calcula las referencias a seguir que marcan los puntos de la ruta. La segunda etapa es un control basado en realimentación de los estados que incluye la acción integral sobre los errores de las referencias y cuya matriz de realimentación se ha calculado mediante la técnica de control óptimo LQR.

Los resultados de las diferentes simulaciones de pruebas de vuelo validan los puntos anteriores y certifican que se ha cumplido el objetivo principal. Ahora bien, estos resultados presentan un margen de mejora. Empezando por el ajuste de la matriz de realimentación, que actualmente presenta una configuración más bien conservadora. Otras mejoras pueden ser introducidas en la etapa de navegación.

Finalmente, la conexión con el simulador de vuelo *FlightGear* ha proporcionado un visualizador a tiempo real de la respuesta del dirigible que ha servido para ajustar el control.

---

<sup>8</sup> Ver Tabla 5 Tabla 6 donde se recogen los valores de resistencia axial y transversal respectivamente.

## Bibliografía

- [1] «Ecuador reemplazará satélites con globos aerostáticos», *La Nación*, 2009. [En línea]. Disponible en: <http://www.lanacion.com.ar/1192474-ecuador-reemplazara-satelites-con-globos-aerostaticos>. [Accedido: 22-jun-2017].
- [2] «Proyecto Loon». [En línea]. Disponible en: [https://x.company/intl/es-419\\_es/loon/](https://x.company/intl/es-419_es/loon/). [Accedido: 22-jun-2017].
- [3] «Stratobus: Halfway between a drone and a satellite | Thales Group», *Thales Group*, 2014. [En línea]. Disponible en: <https://www.thalesgroup.com/en/worldwide/space/news/stratobus-halfway-between-drone-and-satellite>. [Accedido: 22-jun-2017].
- [4] G. C. Avenant, «Autonomous flight control system for an airship», University of Stellenbosch, 2010.
- [5] L. M. Nicolai y G. E. Carichner, *Fundamentals of Aircraft and Airship Design*. Reston ,VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010.
- [6] «Solar Ship». [En línea]. Disponible en: <https://www.solarship.com/>. [Accedido: 22-jun-2017].
- [7] D. Orient Martín, «Modelo dinámico y diseño del sistema de control para un zeppelin autónomo», Univesidad Politécnica de Valencia.
- [8] Y. Li y M. Nahon, «Modeling and Simulation of Airship Dynamics», *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 30, n.º 6, pp. 1691-1700, 2007.
- [9] Y. Li, «Dynamics Modeling and Simulation of Flexible Airships», McGill University, Montreal, 2008.
- [10] S. B. V. Gomes, «An Investigation of the Flight Dynamics of Airships with Application to the YEZ-2A.», Cranfield Institute of Technology, 1990.
- [11] D. A. Fourie, «The Dynamic Modelling and Control System of a Tethered Aerostat for Remote Sensing Applications by», University of Stellenbosch, 2009.
- [12] P. Peddiraju, T. Liesk, y M. Nahon, «Dynamics modeling for an unmanned, unstable, fin-less airship», *18th AIAA Light. Syst. Technol. Conf.*, 2009.
- [13] «Hybrid Airship · Lockheed Martin». [En línea]. Disponible en: <http://www.lockheedmartin.com/us/products/HybridAirship.html>. [Accedido: 23-jun-2017].
- [14] «Hybrid Air Vehicles - Airlander 10», *Hybrid Air Vehicles*. [En línea]. Disponible en: <https://www.hybridairvehicles.com/aircraft/airlander-10>. [Accedido: 23-jun-2017].
- [15] A. M. Stoll, E. V. Stilson, J. Bevirt, y P. P. Pei, «Conceptual Design of the Joby S2 Electric VTOL PAV», *14th AIAA Aviat. Technol. Integr. Oper. Conf.*, n.º June, pp. 16-20, 2014.
- [16] V. Mata, «Apuntes de Mecánica», 1.ª ed., Valencia: Universidad Politécnica de Valencia, 2013, pp. 1-42.
- [17] J. P. Magraner Rullán, «Apuntes de Mecánica de Vuelo II», Valencia: Universidad Politécnica de Valencia, 2016.
- [18] T. I. Fossen, *Guidance and control of ocean vehicles*. Chichester: John Wiley & Sons Inc, 1994.

- [19] R. A. de Ingeniería, «Aeroestática», *Diccionario*, 20d.C. [En línea]. Disponible en: <http://diccionario.raing.es/es/lema/aeroestática>. [Accedido: 15-jun-2017].
- [20] F. H. Imlay, «The complete expressions for added mass of a rigid body moving in an ideal fluid», Arlington, 1961.
- [21] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 1.<sup>a</sup> ed. Cambridge: University of Cambridge, 1895.
- [22] M. M. Munk, «The Aerodynamic Forces On Airship Hulls», Washington, 1924.
- [23] J. N. Nielsen, *Missile Aerodynamics*. Mountain View, CA: NASA Ames Research Center, 1988.
- [24] E. J. Hopkins, «A semiempirical method for calculating the pitching moment of bodies of revolution at low mach numbers», California, 1951.
- [25] L. H. Jorgensen, «Prediction of static aerodynamic characteristics for space-shuttle-like and other bodies at angles of attack from 0° to 180°», NASA Ames Research Center, Moffett Field, Calif., 1973.
- [26] S. . Hoerner, *Fluid-dynamic drag*. Bakersfield, CA: Hoerner Fluid Dynamics, 1992.
- [27] «Drag of Blunt Bodies and Streamlined Bodies», *Princeton.edu*. [En línea]. Disponible en: [https://www.princeton.edu/~asmits/Bicycle\\_web/blunt.html](https://www.princeton.edu/~asmits/Bicycle_web/blunt.html). [Accedido: 20-jun-2017].
- [28] M. Carter y S. Y. Jang, «Submarine buoyancy control», *Stanford.edu*. [En línea]. Disponible en: <http://charm.stanford.edu/ENGR1052016/MikeCarterSaeYongJang>. [Accedido: 20-jun-2017].
- [29] «PA-97 Helistat», 2009. [En línea]. Disponible en: [http://www.piasecki.com/heavylift\\_pa97.php](http://www.piasecki.com/heavylift_pa97.php). [Accedido: 26-jun-2017].
- [30] «RX 1105 4000kv Micro Brushless Motor», *ParagonUAV*, 2017. [En línea]. Disponible en: <http://www.paragonuav.com/rx-1105-4000kv-micro-brushless-motor/>. [Accedido: 27-jun-2017].
- [31] «Overview — LibrePilot/OpenPilot Wiki 0.1.4 documentation». .
- [32] «NEO-M8 series | u-blox», 2017. [En línea]. Disponible en: <https://www.u-blox.com/en/product/neo-m8-series>. [Accedido: 04-jul-2017].
- [33] «CopterControl / CC3D / Atom Hardware Setup — LibrePilot/OpenPilot Wiki 0.1.4 documentation». [En línea]. Disponible en: [http://opwiki.readthedocs.io/en/latest/user\\_manual/cc3d/cc3d.html?highlight=CC3D](http://opwiki.readthedocs.io/en/latest/user_manual/cc3d/cc3d.html?highlight=CC3D). [Accedido: 04-jul-2017].
- [34] «OpenPilot Revolution Flight Controller Guide - Guides - DroneTrest». [En línea]. Disponible en: <http://www.dronetrest.com/t/openpilot-revolution-flight-controller-guide/1361>. [Accedido: 03-jul-2017].
- [35] Harri Ojanen, «Mathematica Expression to Matlab m-file Converter -- from Wolfram Library Archive», 1999. [En línea]. Disponible en: <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/577/>. [Accedido: 07-jul-2017].
- [36] R. Blasco Giménez y G. M. Asher, *State Space Fundamentals*. 2011.
- [37] S. García-Nieto Rodríguez, «PROBLEMA 1. Sistema de Levitación Magnética.», Valencia.
- [38] C. G. F. Haber, «Modelling , Simulation and Control of a Twin Rotor MIMO-System», Valencia.



# Anexo A. Resultados de las simulaciones

## A.1 Prueba 1

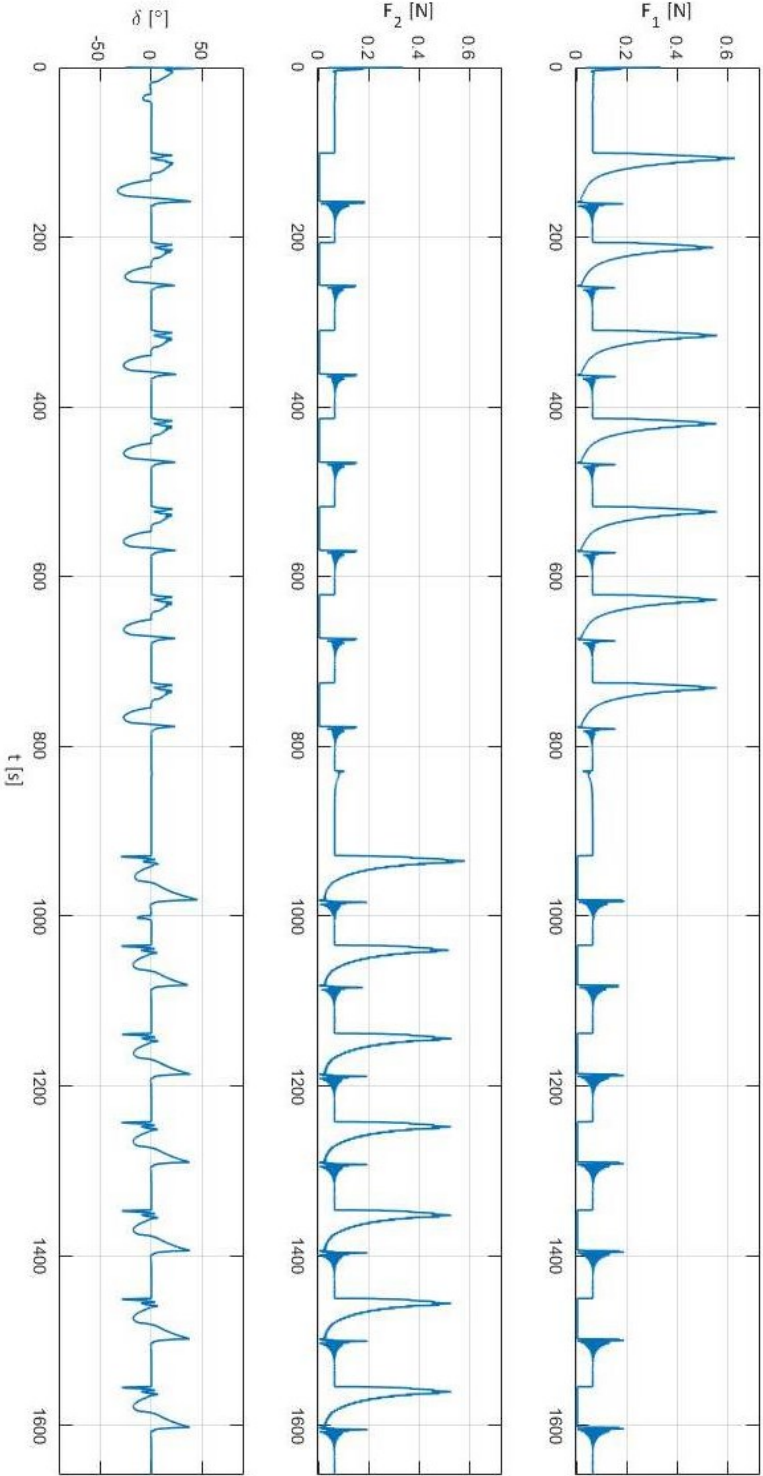


Figura 48 Actuadores del sistema en la primera prueba de vuelo

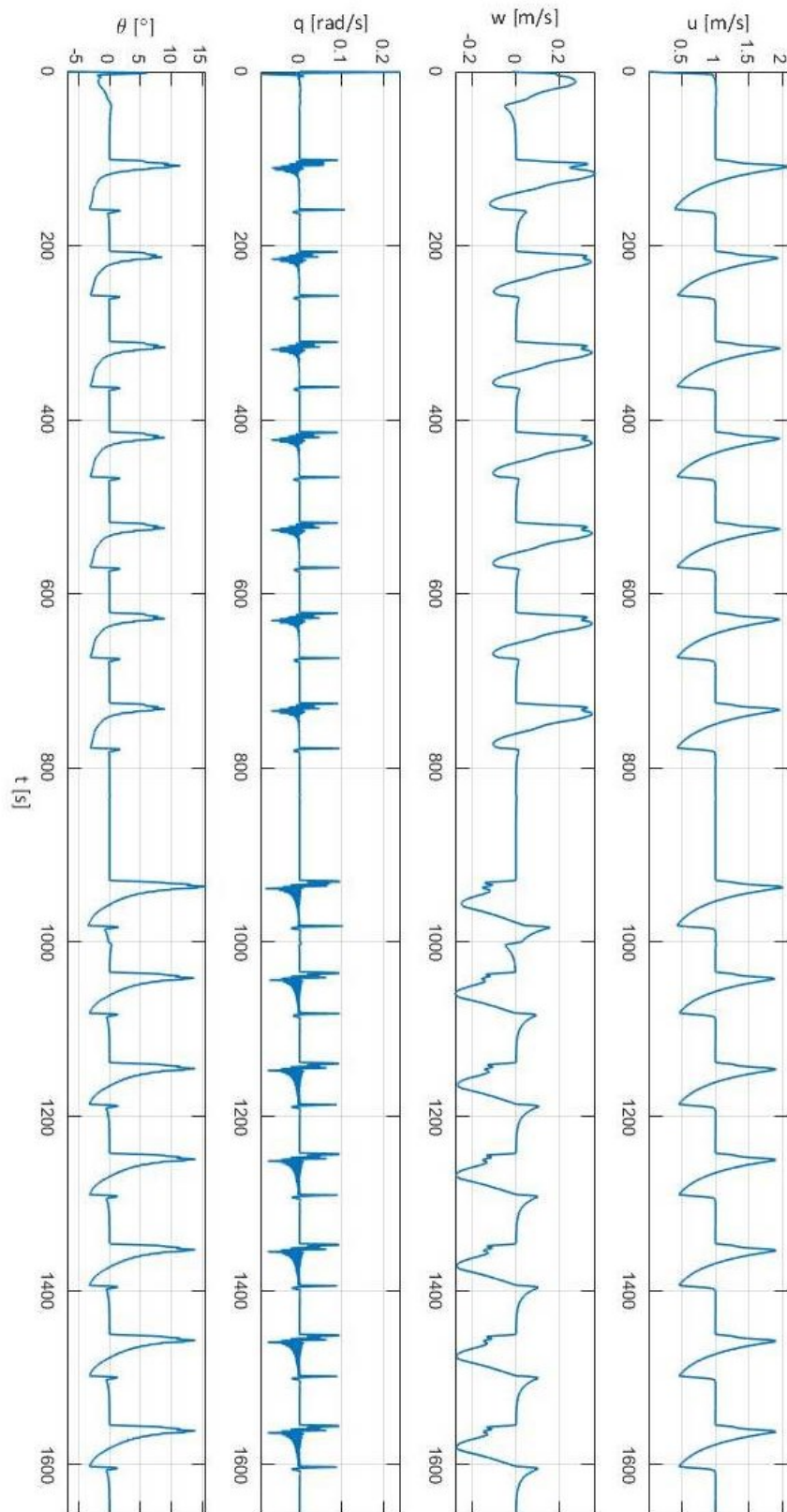


Figura 49 Respuesta de la dinámica longitudinal durante la primera prueba de vuelo

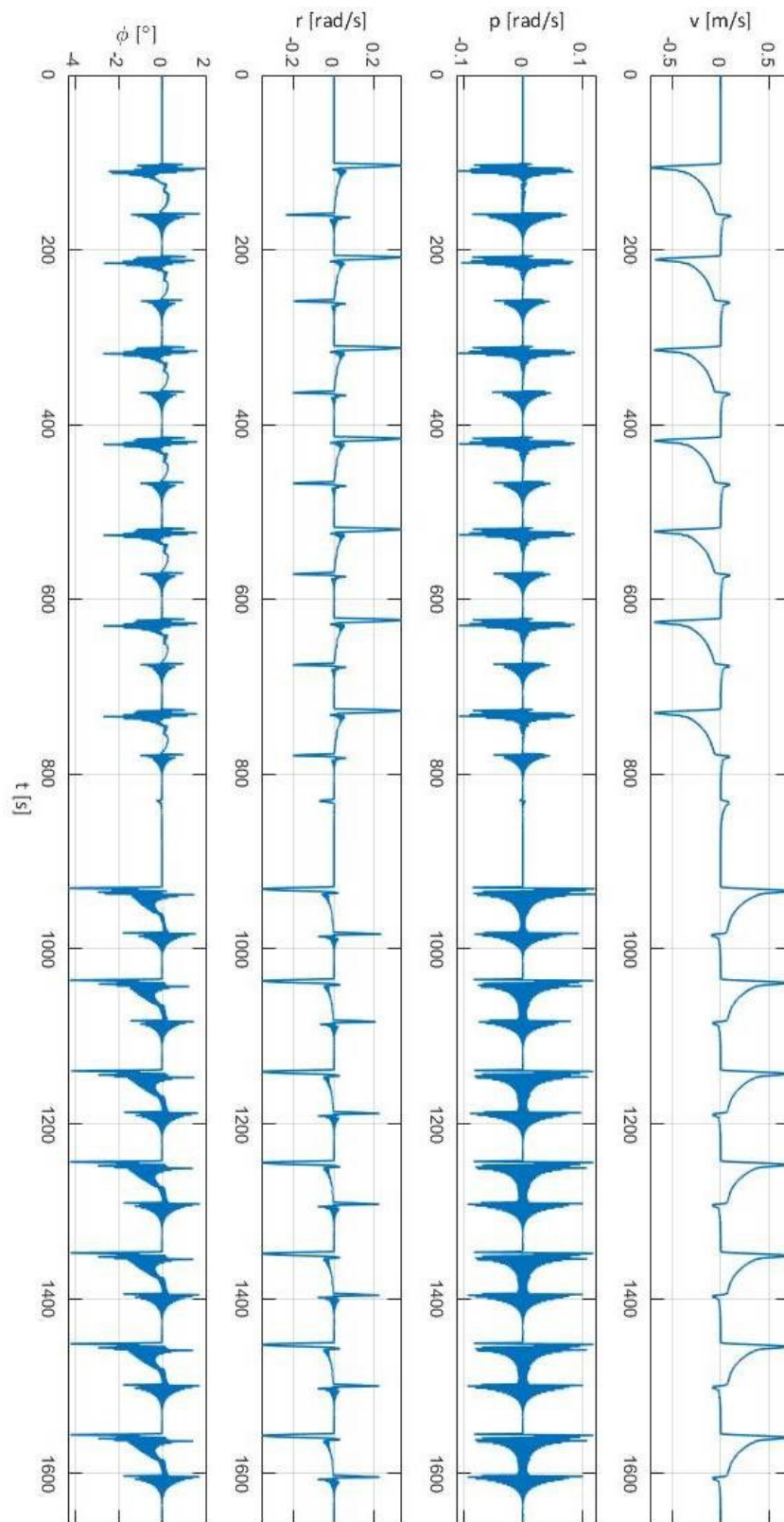


Figura 50 Respuesta de la dinámica longitudinal-lateral durante la primera prueba de vuelo

## A.2 Prueba 2

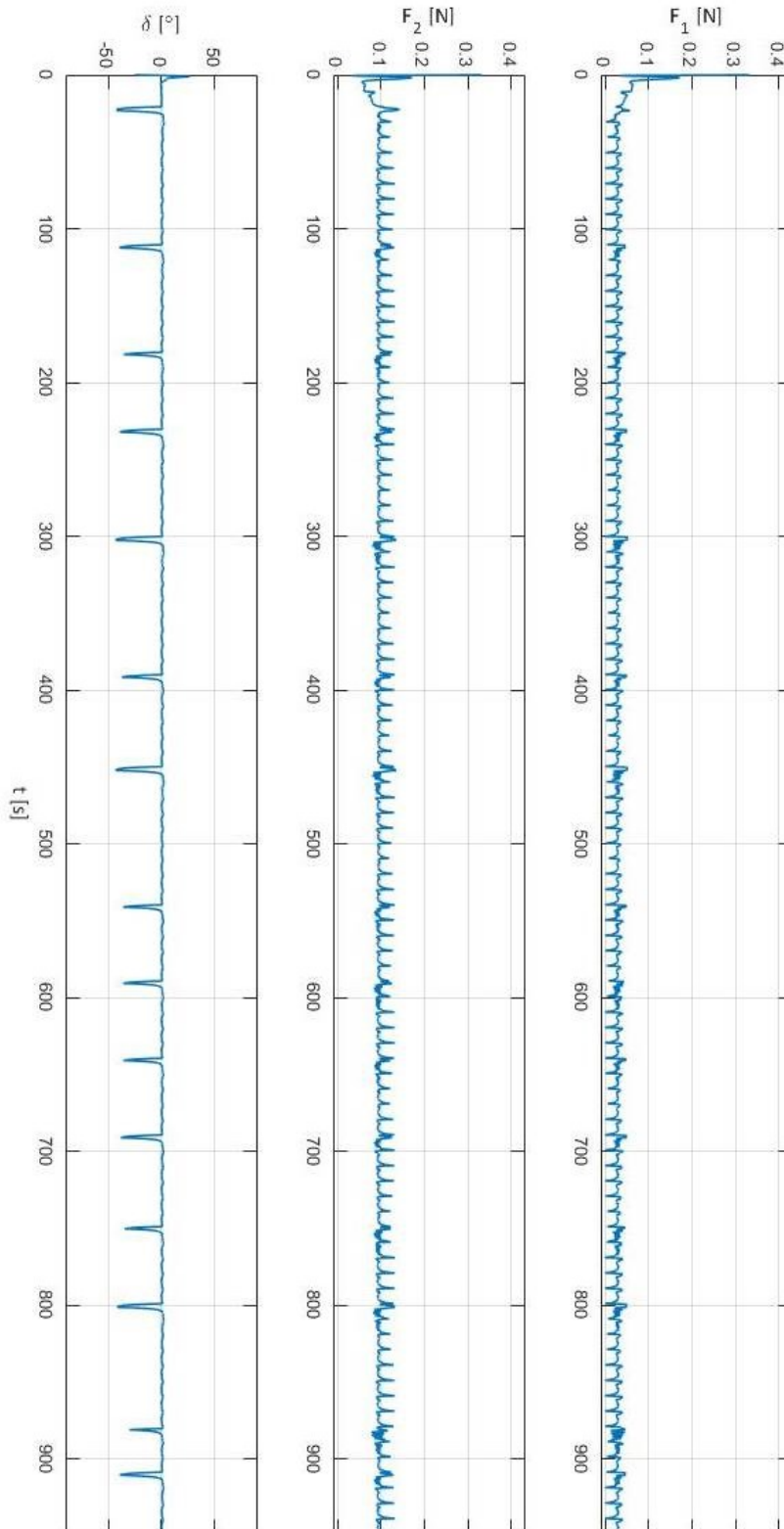


Figura 51 Actuadores del sistema durante la segunda prueba de vuelo

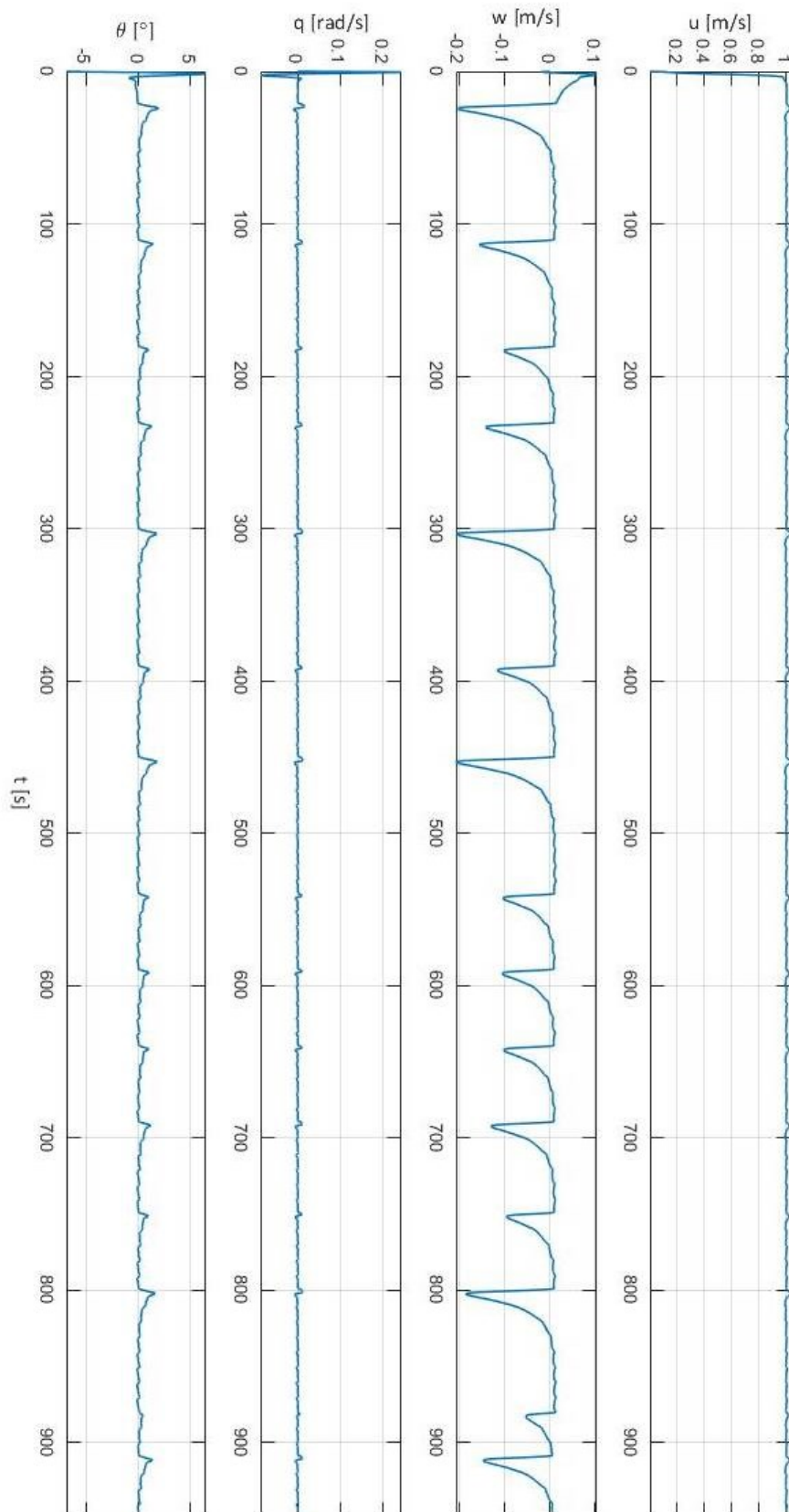


Figura 52 Respuesta de la dinámica longitudinal durante la segunda prueba

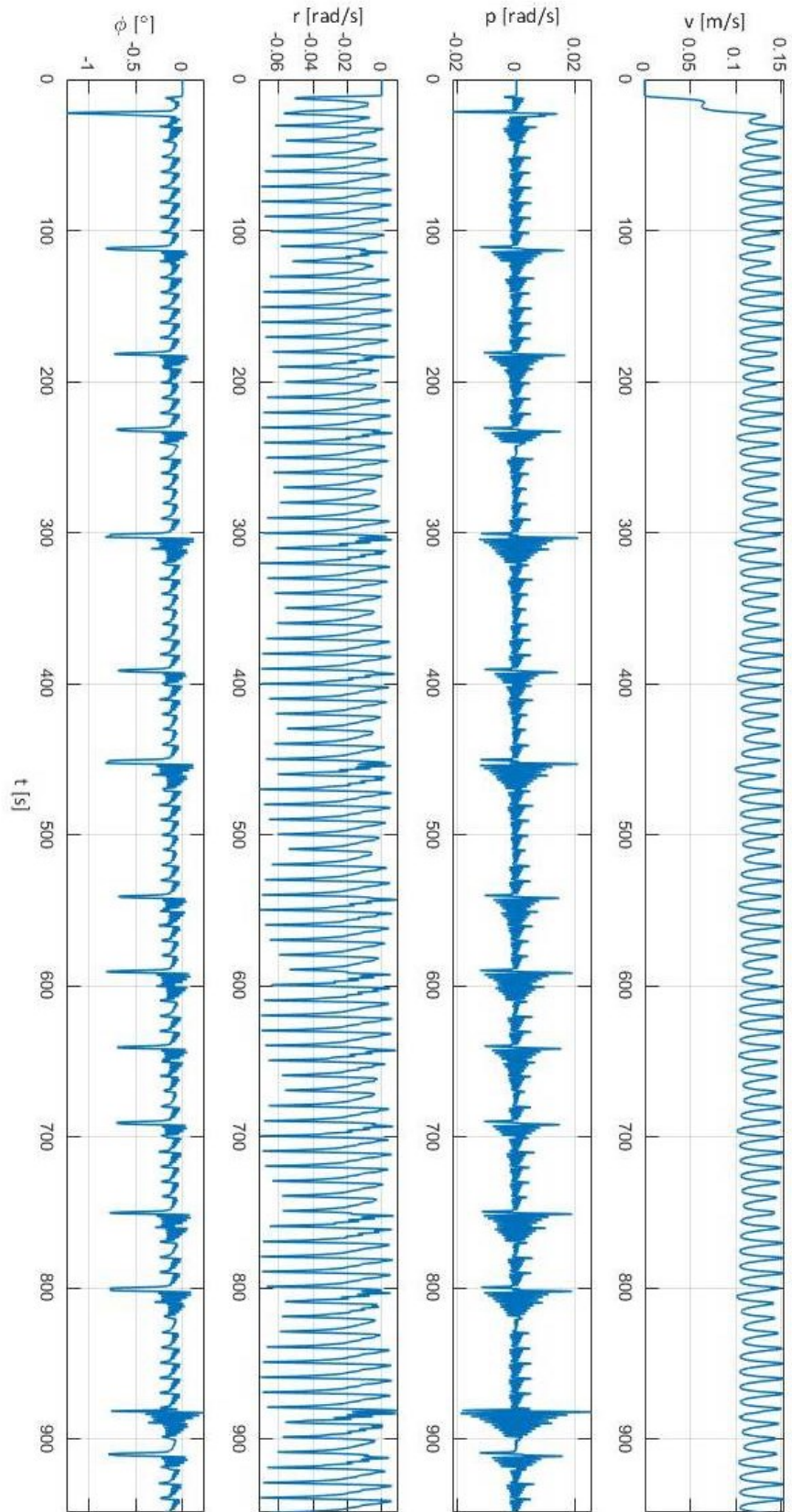


Figura 53 Respuesta de la dinámica lateral-direccional durante la segunda prueba

