



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE VALENCIA



ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS DE LOS GENERADORES TERMOELÉCTRICOS Y SUS APLICACIONES AEROESPACIALES

Autor

Ángel González de la Vara

Director

José Luis Pérez Aparicio

Codirector

Pablo Moreno Navarro

Universidad Politécnica de Valencia
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Valencia - Septiembre 2017

ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS DE LOS
GENERADORES TERMOELÉCTRICOS Y SUS
APLICACIONES AEROESPACIALES

Ángel González de la Vara

Universidad Politécnica de Valencia
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Septiembre 2017

“The only limit is the one you set yourself”

Felix Baumgartner

Índice general

Contenidos	III
Lista de Figuras	VII
Lista de Tablas	VIII
Lista de Símbolos	IX
1. Introducción	1
1.1. Los efectos termoeléctricos	2
1.2. Efectos termogalvanomagnéticos	3
1.3. Aplicaciones de los dispositivos termoeléctricos	4
1.4. Aplicaciones en el sector aeronáutico y aeroespacial	7
2. Formulación Electromagnética	11
2.1. Campos electromagnéticos	11
2.1.1. Introducción	11
2.1.2. Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell	11
2.1.3. Forma integral de las ecuaciones de Maxwell	13
2.1.4. Condiciones de continuidad	13
2.2. Propiedades eléctricas de la materia	16
2.2.1. Dieléctricos, polarización y permitividad	16
2.2.2. Materiales magnéticos, magnetización y permeabilidad	18
2.2.3. Conductores y conductividad	20
2.2.4. Semiconductores	21
3. Teoría de Termoelectricidad Aplicada a Generación de Energía	24
3.1. Teoría termodinámica de la termoelectricidad	24
3.2. Generalización de las relaciones de <i>Thomson</i>	26
3.2.1. Nueva forma de la primera relación de <i>Thomson</i>	26
3.2.2. Nueva forma de la segunda relación de <i>Thomson</i>	27
3.3. Eficiencia de los materiales termoeléctricos	27
3.4. Eficiencia de los generadores termoeléctricos	29
3.4.1. Variables reducidas	30
3.4.2. Eficiencia y prestaciones de los generadores	33
3.5. Estudio paramétrico de la eficiencia y las prestaciones de los generadores	37
3.5.1. Termoelemento con propiedades constantes	37
3.5.2. Termoelemento con propiedades dependientes de la temperatura	41
4. Validaciones	47
4.1. Validaciones del transitorio termoeléctrico	47
4.1.1. Malla y material	48
4.1.2. Caso I: Seebeck lineal	50
4.1.3. Caso II: Seebeck y Joule, no lineal	54
4.1.4. Caso III: Joule, Seebeck y Thomson no lineal	58

4.2. Validación termogalvanomagnética	62
4.2.1. Ecuación del calor	64
4.2.2. Ecuación del voltaje	65
4.2.3. Resultados	66
4.3. Validación mecánica. Placa vibratoria.	68
4.3.1. Resultados	69
5. Modelado de un Generador Termoeléctrico	72
5.1. Presentación del modelo	73
5.2. Materiales y propiedades	74
5.3. Estudio de la malla	78
5.3.1. Estudio de convergencia	78
6. Análisis del generador eMMRTG	82
6.1. Influencia de longitud de termoelementos y condiciones de contorno mecánicas	82
6.1.1. Distribuciones de temperatura y voltaje	86
6.1.2. Desplazamientos mecánicos	86
6.1.3. Distribución de tensiones	87
6.1.4. Tensiones de Tresca y malla deformada	89
6.1.5. Distribuciones de los flujos de calor y eléctricos	90
6.2. Estudio de la influencia del ratio de áreas transversales de los termoelementos	92
6.2.1. Análisis de la eficiencia y la potencia	93
6.2.2. Análisis de las tensiones	94
6.2.3. Distribuciones de temperatura y voltaje	96
6.2.4. Desplazamientos mecánicos	96
6.2.5. Distribuciones de los flujos de calor y eléctricos	97
6.2.6. Tensiones de Tresca y malla deformada	98
6.3. Estudio de la influencia de un campo magnético	99
6.3.1. Análisis de la eficiencia y la potencia	100
6.3.2. Análisis de las tensiones	103
6.3.3. Distribuciones de temperatura y voltaje	104
6.3.4. Tensiones de Tresca y malla deformada	105
6.3.5. Distribuciones de los flujos de calor y eléctricos	105
6.4. Nuevo diseño: generador segmentado	107
6.4.1. Estudio de materiales	107
6.4.2. Estudio analítico de la eficiencia	110
6.4.3. Análisis de la eficiencia y la potencia	112
6.4.4. Análisis de las tensiones	113
6.4.5. Distribuciones de temperatura y voltaje	114
6.4.6. Desplazamientos mecánicos	115
6.4.7. Distribuciones de los flujos de calor y eléctricos	116
6.4.8. Tensiones de Tresca y malla deformada	116
6.5. Nuevo diseño: generador en cascada	118
6.5.1. Análisis de la eficiencia y la potencia	119
6.5.2. Análisis de las tensiones	119

ÍNDICE GENERAL

6.5.3. Distribuciones de temperatura y voltaje	120
6.5.4. Distribuciones de los flujos de calor y eléctricos	121
6.5.5. Tensiones de Tresca y malla deformada	122
6.6. Comparación final	123
7. Conclusiones	125
7.1. Presupuesto	125
7.2. Conclusiones	126
7.3. Futuros proyectos	128
Bibliografía	129

Índice de figuras

1.1. Sonda Cassini enviada a Saturno que utiliza dispositivos termoelectricos para generar energía, [3].	1
1.2. Thomas Johann Seebeck, descubridor del efecto termoelectrico que lleva su nombre.	2
1.3. Los cuatro principales efectos termogalvanomagnéticos; esquina superior izquierda: efecto <i>Hall</i> , esquina superior derecha: efecto <i>Ettingshausen</i> , esquina inferior derecha: efecto <i>Righi-Leduc</i> , esquina inferior izquierda: efecto <i>Nernst</i> . Dentro de los rectángulos se muestra la causa y dentro de los círculos los efectos.	4
1.4. Imagen de una célula Peltier. Estos dispositivos son utilizados como refrigeradores termoelectricos.	5
1.5. Las altas temperaturas de la turbina o el post-quemador podrían ser aprovechadas por los dispositivos termoelectricos para generar potencia eléctrica, [8].	7
1.6. RTG instalado en sonda Cassini durante un test de radiación con un contador Geiger, [9].	8
1.7. La sonda no tripulada Ulysses utilizaba RTGs para obtener energía, [7].	9
2.1. Condiciones de continuidad del campo magnético.	14
2.2. Condiciones de continuidad de la inducción magnética.	15
2.3. Representación de un dipolo eléctrico.	16
2.4. Representación del proceso de polarización magnética.	18
2.5. Niveles energéticos para: conductores a la izquierda, semiconductores en el centro, dieléctricos a la derecha.	22
3.1. Diferencial de volumen cilíndrico dV de un material termoelectrico considerado en condiciones de termodinámica de no-equilibrio.	28
3.2. Esquema de funcionamiento de un termopar.	36
3.3. Variación de la eficiencia del termoelemento con la temperatura del foco caliente.	39
3.4. Variación de corriente reducida u comparada con el factor de compatibilidad s en función de temperatura. Termoelemento con propiedades constantes.	39
3.5. Comparación entre los resultados analíticos y numéricos de las prestaciones del termoelemento con propiedades constantes, para diferentes longitudes de termoelemento.	40
3.6. Distribuciones de j y q a lo largo del termoelemento con propiedades constantes para dos valores de l . Izquierda: $l = 0,25$ mm, derecha: $l = 2$ mm.	41
3.7. Variación de la eficiencia máxima del termoelemento con la condición inicial u_h	42
3.8. Variación de la corriente reducida u y el factor de compatibilidad s a lo largo del termoelemento.	43
3.9. Comparación entre los resultados analíticos y numéricos de las prestaciones del termoelemento con propiedades variables.	44

ÍNDICE DE FIGURAS

3.10. Distribuciones de j y q a lo largo del termoelemento con propiedades variables para dos valores de l . Izquierda: $l = 0,25$ mm, derecha: $l = 2$ mm.	45
3.11. Variación de la eficiencia con T_c y T_h , propiedades variables.	46
4.1. Geometría y vista frontal de la malla utilizada para resolver las validaciones termoeléctricas con FEAP.	49
4.2. Geometría y condiciones de contorno del Caso I.	50
4.3. Variación de temperatura, voltaje y flujo de calor versus tiempo en el centro del termoelemento $x = L_x/2$ para el Caso I.	52
4.4. Caso I: Distribuciones a lo largo del termoelemento de temperatura, voltaje y flujo de calor. Columna izquierda: $t = 0,05$ s; derecha: $t = 0,25$ s.	53
4.5. Geometría y condiciones de contorno del Caso II.	54
4.6. Variación de temperatura, voltaje y flujo de calor versus tiempo en el centro del termoelemento $x = L_x/2$ para el Caso II.	56
4.7. Caso II: Distribuciones a lo largo del termoelemento de temperatura, voltaje y flujo de calor. Columna izquierda: $t = 0,05$ s; derecha: $t = 0,25$ s.	57
4.8. Geometría y condiciones de contorno del Caso III.	58
4.9. Caso III: Distribuciones a lo largo del termoelemento de temperatura, voltaje y flujo de calor. Columna izquierda: $t = 0,05$ s; derecha: $t = 0,25$ s.	61
4.10. Variación de temperatura, voltaje y flujo de calor con el tiempo en el centro del termoelemento $x = L_x/2$ para el Caso III.	62
4.11. Geometría y condiciones de contorno de la validación termogalvanomagnética.	63
4.12. Comparación entre los resultados obtenidos analíticamente y con FEAP de la validación termogalvanomagnética.	67
4.13. Distribuciones de flujos eléctricos y de calor obtenidos con FEAP para la validación termogalvanomagnética.	68
4.14. Placa sometida a carga variable en el tiempo.	69
4.15. Resultados obtenidos de la flecha $w(a/2, b/2, t)$ en el centro de la placa articulada.	70
5.1. Representación de un <i>eMMRTG</i>	72
5.2. Sección del alzado (arriba) y planta (abajo) del GPHS.	73
5.3. Dimensiones [mm] y materiales del termopar a estudiar.	74
5.4. Propiedades termoeléctricas y termogalvanomagnéticas de <i>Skutterudite</i> en función de la temperatura. Comparación entre los datos experimentales y el ajuste de los polinomios.	77
5.5. Malla generada para simular el termopar con FEAP. A la izquierda vista en alzado, a la derecha vista en perspectiva.	78
5.6. Estudio de convergencia de malla sin campo magnético. Izquierda: convergencia de variables termoeléctricas. Derecha: convergencia de variables mecánicas.	79
5.7. Convergencia de los flujos eléctrico y térmico en presencia de un campo magnético.	80
5.8. Convergencia de los desplazamientos mecánicos en presencia de un campo magnético.	80

5.9. Resultados de los flujos de calor y eléctricos en dirección x obtenidos con FEAP para el caso de la Sección 4.2 con $B_z = 0,5$ T.	81
6.1. Condiciones de contorno del termopar. Izquierda: articulado, centro: libre en el foco caliente, derecha: libre en el foco frío.	83
6.2. Prestaciones del generador en función de l_{TE} para tres condiciones de contorno mecánicas distintas.	84
6.3. Tensiones de Tresca en los diferentes materiales que forman el termopar para tres condiciones de contorno distintas.	85
6.4. Distribuciones de temperatura y voltaje en el termopar con $l_{TE} = 5$ mm.	86
6.5. Desplazamientos mecánicos u y v en el termopar con $l_{TE} = 5$ mm.	87
6.6. Componentes del tensor tensiones en el termopar con $l_{TE} = 5$ mm.	88
6.7. Tensiones de Tresca y malla deformada en el termopar con $l_{TE} = 5$ mm con factor de escala $\times 100$	90
6.8. Distribuciones de los flujos eléctricos j_x y j_y y térmicos q_x y q_y en el termopar con $l_{TE} = 5$ mm.	91
6.9. Geometría y parámetros de la malla utilizada para estudiar la influencia del ratio de áreas transversales de los termoelementos.	92
6.10. Potencia producida y eficiencia del generador termoelectrico en función del ratio de áreas transversales de los termoelementos.	93
6.11. Intensidad eléctrica y potencia calorífica producidas en el generador termoelectrico en función del ratio de áreas transversales de los termoelementos.	94
6.12. Tensiones de Tresca en los diferentes materiales que forman el termopar en función del ratio de áreas transversales de los termoelementos.	95
6.13. Distribuciones de temperatura y voltaje en el termopar con $AR = 1,4$	96
6.14. Desplazamientos mecánicos u y v en el termopar con $AR = 1,4$	97
6.15. Distribuciones de los flujos eléctricos j_x y j_y y térmicos q_x y q_y en el termopar con $AR = 1,4$	98
6.16. Tensiones de Tresca y malla deformada en el termopar con $AR = 1,4$ con factor de escala $\times 100$	99
6.17. Vista de perfil del dominio de la malla y las condiciones de contorno magnéticas necesarias.	100
6.18. Potencia producida y eficiencia del generador termoelectrico en función de B_z	101
6.19. Intensidad eléctrica y potencia calorífica total del generador termoelectrico en función de B_z	101
6.20. Tensiones de Tresca en los diferentes materiales que forman el termopar en función de B_z	103
6.21. Distribuciones de temperatura y voltaje en el termopar con $B_z = 0,2$ T.	104
6.22. Tensiones de Tresca y malla deformada con factor de escala $\times 100$ en el termopar con $B_z = 0,2$ T.	105
6.23. Distribuciones de los flujos eléctricos j_x , j_y y térmicos q_x , q_y en el termopar con $B_z = 0,2$ T.	106
6.24. Representación de la geometría de un termopar segmentado con dos materiales.	107

ÍNDICE DE FIGURAS

6.25. Ajuste de las propiedades termoeléctricas de <i>BiSbTe</i> tipo-p. Línea a trazos extrapolada.	108
6.26. Factor de mérito adimensional ZT en función de la temperatura para los materiales <i>Skutterudite</i> y <i>BiSbTe</i>	109
6.27. Densidad de corriente reducida u y factor de compatibilidad s analíticas versus temperatura en un termoelemento segmentado. Hasta 259°C: <i>BiSbTe</i> ; a partir 259°C: <i>Skutterudite</i>	111
6.28. Potencia eléctrica y eficiencia del generador termoeléctrico en función de la longitud de termoelemento y el porcentaje que ocupa <i>BiSbTe</i>	112
6.29. Tensiones de Tresca máximas [GPa] en cada uno de los materiales que forman el termopar en función de la longitud de termoelemento y el porcentaje que ocupa <i>BiSbTe</i>	114
6.30. Distribuciones de temperatura y voltaje en el termopar con $\lambda_{TE} = 0,12$	115
6.31. Desplazamientos mecánicos u, v en el termopar con $\lambda_{TE} = 0,12$	115
6.32. Distribuciones de los flujos eléctricos j_x, j_y y térmicos q_x, q_y en el termopar con $\lambda_{TE} = 0,12$	117
6.33. Tensiones de Tresca y malla deformada con factor de escala $\times 100$ en el termopar con $\lambda_{TE} = 0,12$	117
6.34. Configuración del generador termoeléctrico en cascada.	118
6.35. Potencia eléctrica y eficiencia del generador termoeléctrico en función de las longitudes de los dos niveles.	119
6.36. Tensiones de Tresca máximas [GPa] en cada uno de los materiales que forman el termopar en cascada en función de las longitudes de los dos niveles.	120
6.37. Distribuciones de temperatura y voltaje en el termopar en cascada con $l_{Bi} = 5$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm.	121
6.38. Distribuciones de los flujos eléctricos j_x, j_y y térmicos q_x, q_y en el termopar en cascada con $l_{Bi} = 5$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm.	122
6.39. Tensiones de Tresca y malla deformada con factor de escala $\times 100$ en el termopar en cascada con $l_{Bi} = 5$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm.	123

Índice de tablas

2.1. Clasificación de los materiales magnéticos.	19
3.1. Potenciales termoeléctricos en los extremos del termoelemento y voltaje producido con propiedades constantes.	40
3.2. Potenciales termoeléctricos en los extremos del termoelemento y voltaje producido con propiedades variables.	43
4.1. Casos a estudiar e hipótesis asumidas.	49
4.2. Propiedades que determinan la inercia térmica del <i>Skutterudite</i>	49
4.3. Propiedades de la placa a articulada.	70
4.4. Frecuencias propias de la placa articulada [rad/s].	70
5.1. Propiedades mecánicas y termoeléctricas de materiales: <i>Skutterudite</i> , cobre, estaño-plomo y alúmina.	75
6.1. Propiedades mecánicas del <i>BiSbTe</i>	108
6.2. Prestaciones óptimas de un generador termoeléctrico de <i>Skutterudite</i> segmentado con <i>BiSbTe</i> calculadas analíticamente.	110
6.3. Comparación de las prestaciones y las tensiones obtenidas en cada caso para el generador estudiado.	124

Lista de Símbolos

Símbolo	SI	Descripción
α	[V/K]	Coefficiente de <i>Seebeck</i>
$\boldsymbol{\alpha}$	[V/K]	Tensor de coeficientes de <i>Seebeck</i>
α_c	[V/K]	Coefficiente de <i>Seebeck</i> en el foco frío
α_h	[V/K]	Coefficiente de <i>Seebeck</i> en el foco caliente
α_l	[V/K]	Coefficiente de <i>Seebeck</i> local
α_n	[V/K]	Coefficiente de <i>Seebeck</i> del TE tipo-n
α_p	[V/K]	Coefficiente de <i>Seebeck</i> del TE tipo-p
α_T	[1/K]	Coefficiente de expansión térmica
β	[m ² /s]	Difusividad térmica
Γ	[m ²]	Superficie del dominio
γ	[A/mV]	Conductividad eléctrica
$\boldsymbol{\gamma}$	[A/mV]	Tensor de conductividades eléctricas
γ_s	[A/mV]	Conductividad estática
γ_{se}	[A/mV]	Conductividad estática debida a los electrones
γ_{sh}	[A/mV]	Conductividad estática debida a los huecos
γ_{xy}	[-]	Distorsión angular
γ_{yz}	[-]	Distorsión angular
δ	[-]	Efecto <i>Umkehr</i> adimensional
ϵ	[As/Vm]	Permitividad eléctrica
ϵ_0	[As/Vm]	Permitividad del vacío
ϵ_s	[As/Vm]	Permitividad estática
ϵ_z	[-]	Deformación en dirección z
η	[-]	Eficiencia
η_1	[1/m]	Término de potencia de <i>Thomson</i> estacionaria
η_2	[K/m ²]	Término de potencia de <i>Joule</i> estacionaria
η_{mx}	[-]	Eficiencia máxima
η_{ct}	[-]	Eficiencia de Carnot
η_{lc}	[-]	Eficiencia local
η_{lc}^{mx}	[-]	Eficiencia local máxima
η_p	[-]	Eficiencia de procesos en paralelo
η_r	[-]	Eficiencia reducida
η_r^{mx}	[-]	Eficiencia reducida máxima
η_s	[-]	Eficiencia de procesos en serie
η_{TE}	[-]	Eficiencia de un termoelemento
η_{TP}	[-]	Eficiencia de un termopar
θ	[K/m]	Módulo del vector gradiente de temperaturas
ι	[-]	Corriente eléctrica adimensional
ι_{op}	[-]	Corriente eléctrica adimensional óptima
κ	[WK/m]	Conductividad térmica

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	SI	Descripción
κ	[WK/m]	Tensor de conductividades térmicas
κ_{av}	[WK/m]	Conductividad térmica promedio
κ_{Bi}	[WK/m]	Conductividad térmica del <i>BiSbTe</i>
κ_l	[WK/m]	Conductividad térmica local
κ_n	[WK/m]	Conductividad térmica del termoelemento tipo-n
κ_p	[WK/m]	Conductividad térmica del termoelemento tipo-p
κ_{Sk}	[WK/m]	Conductividad térmica del <i>Skutterudite</i>
λ	[Pa]	Primer parámetro de Lamé
λ_{TE}	[-]	Proporción de <i>BiSbTe</i> en el TE
μ	[Vs/Am]	Permeabilidad magnética
μ_0	[Vs/Am]	Permeabilidad del vacío
μ_e	[m ² /V s]	Movilidad de los electrones
μ_h	[m ² /V s]	Movilidad de los huecos
μ_l	[Pa]	Segundo parámetro de Lamé
μ_s	[Vs/Am]	Permeabilidad estática
μ_{sr}	[-]	Permeabilidad relativa
ν	[-]	Coefficiente de Poisson
Π	[V]	Coefficiente de <i>Peltier</i>
$\mathbf{\Pi}$	[V]	Tensor de coeficientes de <i>Peltier</i>
Π_l	[V]	Coefficiente de <i>Peltier</i> local
Π_p	[-]	Plano horizontal
ρ	[Ω m]	Resistividad eléctrica
$\boldsymbol{\rho}$	[Ω m]	Tensor de resistividades eléctricas
ρ_{av}	[Ω m]	Resistividad eléctrica promedio
ρ_l	[Ω m]	Resistividad local
ρ_m	[Kg/m ³]	Densidad másica
ρ_q	[As/m ³]	Densidad de carga eléctrica
ρ_{qe}	[As/m ³]	Densidad de carga de los electrones
$\sigma_{m_x}^{Al}$	[Pa]	Tensión de Tresca máxima en alúmina
$\sigma_{m_x}^{Bi}$	[Pa]	Tensión de Tresca máxima en <i>BiSbTe</i>
$\sigma_{m_x}^{Cu}$	[Pa]	Tensión de Tresca máxima en cobre
$\sigma_{m_x}^{Sk}$	[Pa]	Tensión de Tresca máxima en <i>Skutterudite</i>
$\sigma_{m_x}^{Sn}$	[Pa]	Tensión de Tresca máxima en Sn-Pb
σ_s	[W/T]	Producción de entropía
σ_{tr}	[Pa]	Tensión de Tresca
$\sigma_{tr}^{m_x}$	[Pa]	Tensión de Tresca máxima
σ_x	[Pa]	Tensión normal en dirección x
σ_y	[Pa]	Tensión normal en dirección y
σ_Y	[Pa]	Límite elástico
σ_z	[Pa]	Tensión normal en dirección z
τ	[V/K]	Coefficiente de <i>Thomson</i>
τ_l	[V/K]	Coefficiente de <i>Thomson</i> local
τ_{xy}	[Pa]	Tensión cortante

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	SI	Descripción
τ_{xz}	[Pa]	Tensión cortante
τ_{yz}	[Pa]	Tensión cortante
Φ	[V]	Potencial termoeléctrico
Φ_c	[V]	Potencial termoeléctrico en el foco frío
Φ_h	[V]	Potencial termoeléctrico en el foco caliente
φ	[A/m ²]	Potencial magnético escalar
χ_e	[-]	Susceptibilidad eléctrica
χ_m	[-]	Susceptibilidad magnética
Ω	[rad/s]	Frecuencia de excitación
ω	[rad/s]	Frecuencia natural
A	[m ²]	Área transversal
A_n	[m ²]	Área transversal del termoelemento tipo-n
A_p	[m ²]	Área transversal del termoelemento tipo-p
A_t	[m ²]	Área transversal total
AR	[-]	Ratio de áreas transversales de los TEs
a	[m]	Longitud de la placa
a_n	[m]	Anchura del TE tipo-n
a_p	[m]	Anchura del TE tipo-p
\mathbf{B}	[T]	Inducción magnética o densidad de flujo magnético
B_n	[T]	Componente normal de la inducción magnética
B_z	[T]	Inducción magnética en dirección z
b	[m]	Anchura de la placa
C_0	[m]	Perímetro
c_p	[J/K]	Capacidad calorífica
D	[N m]	Rigidez a flexión de una placa
\mathbf{D}	[As/m ²]	Desplazamiento eléctrico
D_n	[As/m ²]	Componente normal del desplazamiento eléctrico
E	[V/m]	Campo eléctrico unidimensional
\mathbf{E}	[V/m]	Campo eléctrico
E_g	[J]	Salto de energía en la banda prohibida
E_n	[V/m]	Componente normal del campo eléctrico
E_t	[V/m]	Componente tangencial del campo eléctrico
f	[-]	Función
\mathbf{H}	[A/m]	Campo magnético
H_t	[A/m]	Componente tangencial del campo magnético
H_n	[A/m]	Componente normal del campo magnético
h	[m]	Altura
I	[A]	Intensidad de corriente eléctrica
I_n	[A]	Intensidad eléctrica en el TE tipo-n
I_{out}	[A]	Intensidad eléctrica producida
I_p	[A]	Intensidad eléctrica en el TE tipo-p
j	[A/m ²]	Módulo del vector densidad de corriente
\mathbf{j}	[A/m ²]	Corriente eléctrica por unidad de superficie

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	SI	Descripción
\hat{j}_0	[-]	Vector unitario de densidad de corriente eléctrica
\hat{j}_c	[A/m ²]	Densidad de corriente por conducción
\hat{j}_n	[A/m ²]	Densidad de corriente en el TE tipo-n
\hat{j}_p	[A/m ²]	Densidad de corriente en el TE tipo-p
\hat{j}_x	[A/m ²]	Densidad de corriente en dirección x
\hat{j}_y	[A/m ²]	Densidad de corriente en dirección y
\mathbf{L}	[-]	Tensor de coeficientes cinemáticos
L_x	[m]	Longitud en dirección x
L_y	[m]	Longitud en dirección y
L_z	[m]	Longitud en dirección z
l	[m]	Longitud
l_i	[m]	Distancia entre cargas en un dipolo
l_{TE}	[m]	Longitud del termoelemento
M	[m ² /Ks]	Coefficiente de <i>Ettingshausen</i> o <i>Righi-Leduc</i>
\mathbf{M}	[A/m]	Magnetización
\mathbf{m}_t	[J/T]	Momento magnético total
N	[m ² /Ks]	Coefficiente de <i>Hall</i>
N_n	[m ² /Ks]	Coefficiente de <i>Hall</i> del TE tipo-n
N_p	[m ² /Ks]	Coefficiente de <i>Hall</i> del TE tipo-p
n	[-]	Primer parámetro de malla
\mathbf{n}_x	[-]	Vector normal en dirección x
\mathbf{n}_y	[-]	Vector normal en dirección y
n_z	[-]	Segundo parámetro de malla
P	[W/m ³]	Densidad de potencia eléctrica
\mathbf{P}	[Cm ²]	Polarización eléctrica
P_J	[K/s]	Término de potencia de <i>Joule</i>
p	[Pa]	Carga o presión
p_0	[Pa]	Amplitud de la carga
\mathbf{p}_i	[Cm]	Momento dipolar
\mathbf{p}_t	[Cm]	Momento dipolar total
Q	[W]	Potencia calorífica
Q_c	[W]	Potencia calorífica en el foco frío
Q_{ch}	[C]	Carga de una partícula
Q_h	[W]	Potencia calorífica en el foco caliente
Q_t	[W]	Potencia calorífica total
q	[W/m ²]	Flujo de calor unidimensional
\mathbf{q}	[W/m ²]	Flujo de calor por unidad de superficie
\mathbf{q}_c	[W/m ²]	Flujo de calor en el foco frío
q_{ch}	[C]	Carga eléctrica total
\mathbf{q}_h	[W/m ²]	Flujo de calor en el foco caliente
q_s	[C/m ²]	Densidad de carga superficial
q_{v0}	[C]	Carga libre
q_x	[W/m ²]	Flujo de calor en dirección x

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	SI	Descripción
q_y	[W/m ²]	Flujo de calor en dirección y
R	[m ² /Ks]	Coefficiente de <i>Nernst</i>
R_l	[Ω]	Resistencia de la carga
S	[m ²]	Superficie
s	[1/V]	Factor de compatibilidad termoeléctrico
\dot{s}	[W/T]	Cambio de entropía local por unidad de volumen
T	[K]	Temperatura
\dot{T}	[K/s]	Variación temporal de la temperatura
T_{av}	[K]	Temperatura promedio
T_{av}^{Bi}	[K]	Temperatura media en el <i>BiSbTe</i>
T_{av}^{Sk}	[K]	Temperatura media en el <i>Skutterudite</i>
T_c	[K]	Temperatura en el foco frío
T_e	[K]	Temperatura en régimen estacionario
T_h	[K]	Temperatura en el foco caliente
T_j	[K]	Temperatura en la unión
T_t	[K]	Temperatura en régimen transitorio
t	[s]	Tiempo
\mathbf{t}_0	[-]	Vector unitario de gradiente de temperatura
t_r	[s]	Constante de relajación de tiempo
u	[m]	Desplazamiento mecánico en dirección x
u	[1/V]	Densidad de corriente reducida
u_c	[1/V]	Densidad de corriente reducida en el foco frío
u_h	[1/V]	Densidad de corriente reducida en el foco caliente
u_n	[1/V]	Densidad de corriente reducida en el TE tipo-n
u_p	[1/V]	Densidad de corriente reducida en el TE tipo-p
V	[V]	Voltaje o potencial eléctrico
\bar{V}	[V]	Voltaje prescrito
V_c	[V]	Voltaje en el foco frío
V_h	[V]	Voltaje en el foco caliente
v	[m]	Desplazamiento mecánico en dirección y
\mathbf{v}_{de}	[m/s]	Velocidad de desplazamiento de los electrones
\mathbf{v}_{dh}	[m/s]	Velocidad de desplazamiento de los huecos
W	[W]	Potencia eléctrica
w	[m]	Desplazamiento mecánico en dirección z
Y	[Pa]	Módulo de Young
Z	[1/K]	Figura de mérito
Ze^*	[-]	Criterio de Zener generalizado
ZT	[-]	Figura de mérito adimensional
Z^*T	[-]	Figura de mérito adimensional generalizada

1

Introducción

La tecnología experimenta un continuo desarrollo que se manifiesta sobre todo en el sector aeroespacial a través de mejoras en la aerodinámica de las aeronaves, los materiales empleados, los avances en los sistemas de control y la optimización de la circulación aérea, entre otros. Actualmente, todos estos avances persiguen alcanzar dos objetivos de vital importancia: minimizar las emisiones contaminantes de las aeronaves y aumentar su eficiencia.

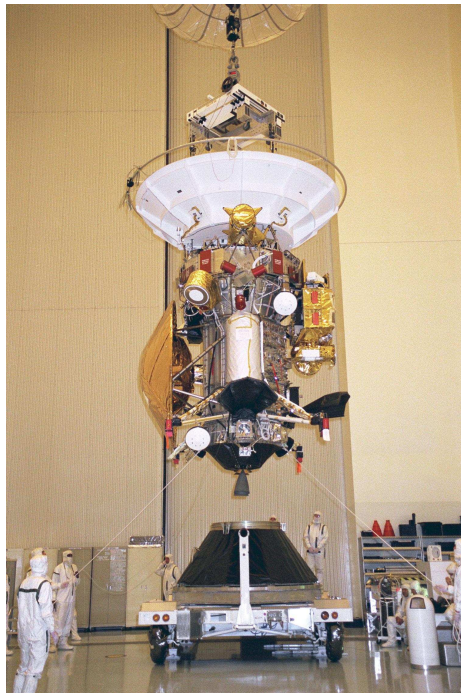


Figura 1.1: Sonda Cassini enviada a Saturno que utiliza dispositivos termoeléctricos para generar energía, [3].

Para alcanzar estos objetivos proponemos el empleo de los dispositivos termoeléctricos. A lo largo del presente trabajo se explicarán los distintos efectos termoeléctricos y sus aplicaciones prácticas. También se estudiarán los efectos que tienen lugar en los dispositivos termoeléctricos cuando se aplica un campo magnético y cómo esta aplicación puede aumentar su eficiencia. Finalmente se realizará el estudio de los efectos termoeléctricos, termomagnéticos y galvanomagnéticos y sus interacciones, así como sus aplicaciones prácticas en el sector aeronáutico y aeroespacial.

1.1. Los efectos termoeléctricos

El efecto termoeléctrico, presente en algunos materiales, es la conversión directa de un gradiente de temperatura T en un gradiente de potencial eléctrico V y viceversa. Un dispositivo termoeléctrico crea un potencial eléctrico cuando se le impone una diferencia de temperatura entre sus extremos. Por el contrario cuando se le aplica un voltaje, crea una diferencia de temperatura.

En 1821 el físico alemán Thomas Johann Seebeck descubrió el primer efecto termoeléctrico. Seebeck descubrió que la aguja de una brújula se desviaba cuando se formaba un circuito cerrado de dos metales unidos en dos puntos con una diferencia de temperatura entre las uniones. Esto se debe a que los metales responden de forma diferente a la diferencia de temperatura, creando una corriente de circuito que produce un campo magnético. El efecto consiste pues en la aparición de una diferencia de potencial, conocida como la FEM termoeléctrica, en presencia de una diferencia de temperatura entre dos metales o semiconductores diferentes. Esto ocasiona una corriente continua en los conductores si estos forman un circuito completo, conociéndose este fenómeno como efecto *Seebeck*. Su aplicación práctica más extendida es la medida de temperaturas mediante termopares.



Figura 1.2: Thomas Johann Seebeck, descubridor del efecto termoeléctrico que lleva su nombre.

En 1834 el físico francés Jean-Charles Peltier descubrió el segundo efecto termoeléctrico. El efecto *Peltier* provoca la creación de una diferencia de temperatura debida a una diferencia de potencial eléctrico y aparece al circular una corriente eléctrica a través de la unión de dos metales o semiconductores diferentes, produciéndose la absorción o liberación de calor en la unión entre los dos materiales, dependiendo del sentido de la corriente y del signo del coeficiente de acoplamiento.

Unos años más tarde, en 1851, el físico inglés William Thomson, también conocido como lord Kelvin, demuestra que los efectos *Seebeck* y *Peltier* están relacionados. Según el efecto *Thomson*, se emite o absorbe calor bajo una corriente eléctrica en un material termoeléctrico en el que existe un gradiente de temperatura. La cantidad de calor emitida

o absorbida es proporcional a la corriente eléctrica y al gradiente de temperaturas a través del coeficiente *Thomson*. El fenómeno ocurre porque las propiedades del material son función de la temperatura y por lo tanto, gradientes de temperatura conllevan diferentes valores de las propiedades del material en cada punto.

Por último, el efecto *Joule* es el cuarto observado. En 1841, James Prescott Joule sumergió un trozo de alambre en una masa fija de agua y midió el aumento de temperatura causada por el paso de una corriente conocida que fluyó a través del alambre durante 30 minutos. Mediante la variación de la corriente y la longitud del alambre dedujo que el calor producido era proporcional al cuadrado de la corriente multiplicado por la resistencia eléctrica del alambre. Al circular una corriente eléctrica por un conductor, parte de la energía cinética de los electrones se transforma en calor debido a los choques que sufren con los átomos del material por el que circulan, aumentando la temperatura del mismo. Normalmente no es considerado un efecto termoeléctrico debido a su naturaleza irreversible. Sin embargo, también será estudiado en el presente trabajo debido a su importancia en las aplicaciones prácticas.

1.2. Efectos termogalvanomagnéticos

El estudio de los campos magnéticos es de vital importancia ya que tienen la capacidad de modificar las propiedades de la materia que se encuentra en su campo de influencia. Por lo tanto, es de gran interés comprender los distintos efectos que los campos magnéticos producen y cómo podemos aprovecharlos en favor de la ciencia y la ingeniería.

La aplicación de un campo magnético a un semiconductor termoeléctrico modifica aquellas propiedades que están relacionadas con la conversión de energía termoeléctrica: los coeficientes termoeléctricos α , la conductividad eléctrica γ y la conductividad térmica κ . Además introduce una serie de nuevos fenómenos que pueden ser utilizados para refrigeración o generación de energía. Al conjunto de estos fenómenos se les conoce como efectos termogalvanomagnéticos. Estos efectos son transversales, ya que los gradientes de temperatura y voltaje que producen son perpendiculares al campo magnético existente y a la corriente eléctrica o flujo de calor iniciales que había en el material.

Aunque se realizará un estudio en profundidad de estos efectos en los siguientes capítulos del presente trabajo, a continuación se introducen brevemente (Figura 1.3):

- Efecto *Hall*: aparece un campo eléctrico transversal producido por una corriente eléctrica longitudinal bajo el efecto de un campo magnético perpendicular a ambos.
- Efecto *Righi-Leduc*: aparece un gradiente de temperatura transversal producido por un flujo de calor longitudinal bajo el efecto de un campo magnético perpendicular a ambos.
- Efecto *Nernst*: aparece un campo eléctrico transversal producido por un flujo de calor longitudinal bajo el efecto de un campo magnético perpendicular a ambos.

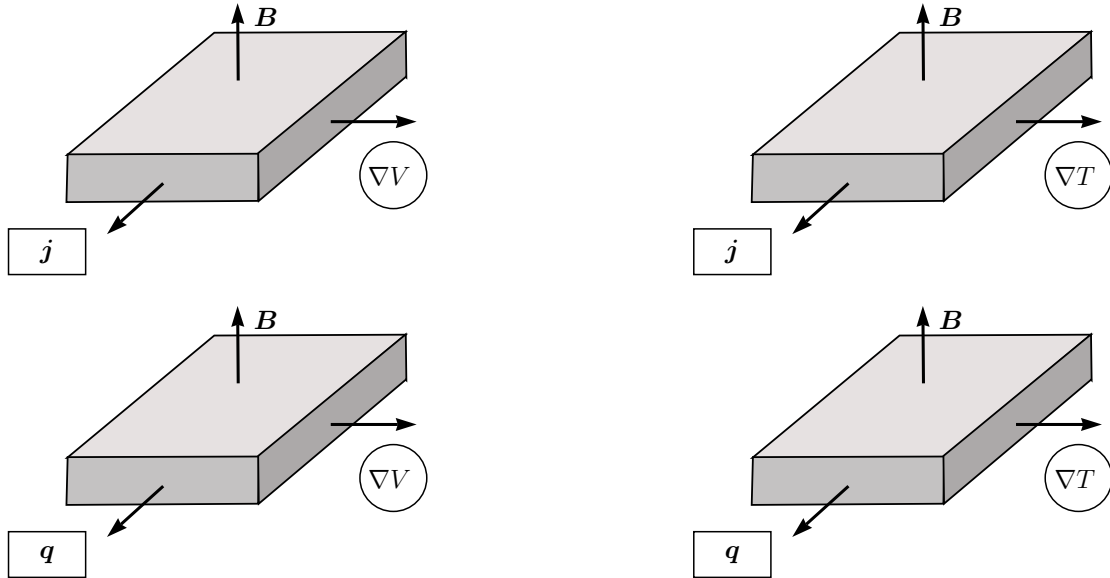


Figura 1.3: Los cuatro principales efectos termogalvanomagnéticos; esquina superior izquierda: efecto *Hall*, esquina superior derecha: efecto *Ettingshausen*, esquina inferior derecha: efecto *Righi-Leduc*, esquina inferior izquierda: efecto *Nernst*. Dentro de los rectángulos se muestra la causa y dentro de los círculos los efectos.

- Efecto *Ettingshausen*: aparece un gradiente de temperatura transversal producido por una corriente eléctrica longitudinal bajo el efecto de un campo magnético perpendicular a ambos.

Los dos primeros son de menor importancia, sin embargo, los dos segundos son los equivalentes a los efectos termoeléctricos *Seebeck* y *Peltier* respectivamente. En la Figura 1.3, \mathbf{q} es el flujo de calor, \mathbf{j} la corriente eléctrica, ∇T el gradiente de temperatura, ∇V el gradiente de potencial eléctrico y \mathbf{B} el campo magnético.

1.3. Aplicaciones de los dispositivos termoeléctricos

La comprensión de los distintos efectos termoeléctricos y termogalvanomagnéticos permite utilizarlos y encontrarles una aplicación práctica. Las dos principales aplicaciones en las que los efectos termoeléctricos y termogalvanomagnéticos pueden ser aprovechados son: sistemas de refrigeración y sistemas de generación de potencia eléctrica.

Sistemas de refrigeración

Aprovechando adecuadamente el efecto *Peltier*, y adicionalmente el efecto *Ettingshausen* en algunas ocasiones, se pueden diseñar dispositivos refrigeradores, conocidos como refrigeradores termoeléctricos o refrigeradores Peltier. Los refrigeradores termoeléctricos

utilizan el efecto *Peltier* para crear un flujo de calor a través de la unión de dos semiconductores, uno de ellos tipo-p y otro tipo-n, transfiriendo el calor de un lado del dispositivo a otro, oponiéndose al gradiente de temperatura y consumiendo para ello potencia eléctrica. La efectividad del refrigerador Peltier para transmitir el calor del lado frío al lado caliente depende de la intensidad de corriente proporcionada y de cómo se evacúe el calor del lado caliente, por lo que se suelen utilizar junto a disipadores.

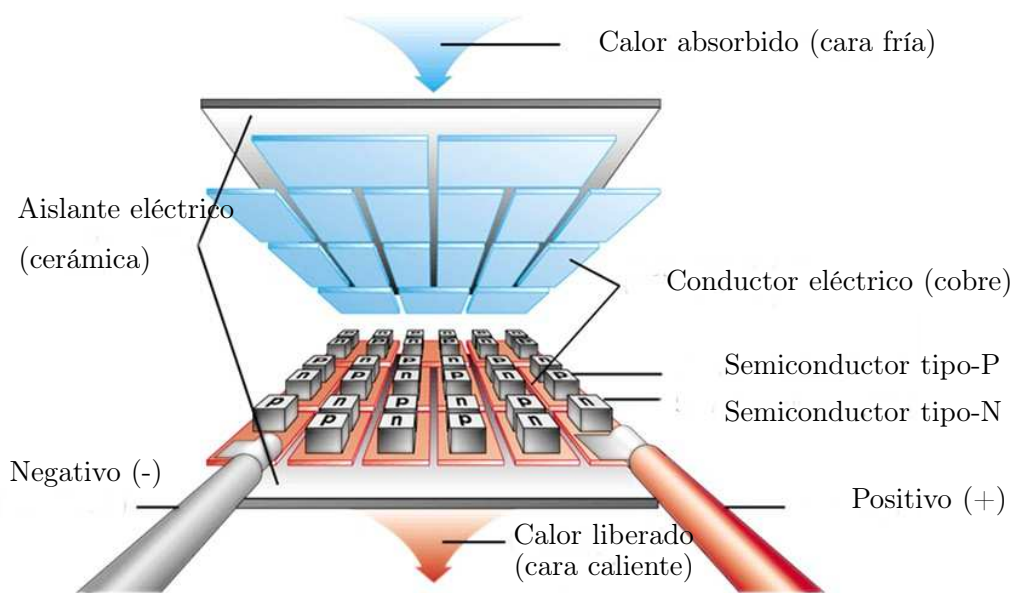


Figura 1.4: Imagen de una célula Peltier. Estos dispositivos son utilizados como refrigeradores termoelectricos.

Los refrigeradores termoelectricos presentan varias ventajas frente a los sistemas de refrigeración tradicionales basados en la compresión y expansión de gases. Las más significativas son:

- Al carecer de partes móviles y fluidos circulantes, los refrigeradores termoelectricos son más fiables y producen menos ruido que los sistemas de refrigeración tradicionales.
- Los refrigeradores termoelectricos son muy utilizados en aplicaciones en las que el control de la temperatura debe ser muy preciso y fiable, por ejemplo, en los contenedores utilizados para el transporte de órganos.
- Los refrigeradores termoelectricos son también muy empleados en aplicaciones donde las vibraciones suponen un gran inconveniente, como en la refrigeración de componentes electrónicos y circuitos integrados.
- En general son de pequeño tamaño, bajo peso y bajo coste. Además pueden tener diversas formas, por lo que se pueden adecuar a distintas geometrías.
- Carecen de fluidos refrigerantes u otros químicos que son altamente perjudiciales para el medio ambiente.

Sin embargo, la principal desventaja de los refrigeradores termoelectricos es que no pueden tener alta eficiencia. Los refrigeradores termoelectricos presentan por lo general una eficiencia del 5-10% frente al 40-50% conseguido por los sistemas refrigeradores basados en el ciclo de compresión. Este es el principal motivo por el que todavía no han sustituido a los sistemas de refrigeración clásicos en la industria.

Generación de potencia eléctrica

Un generador termoelectrico, o TEG por sus siglas en inglés, es un dispositivo que aprovecha el efecto *Seebeck* para transformar flujos de calor en energía eléctrica.

Actualmente, uno de los principales objetivos de la investigación tecnológica es desarrollar fuentes de energía limpias y sostenibles, y que además tengan una alta eficiencia. Por esto último y en contradicción a lo anterior, la mayor parte de la energía eléctrica es producida a partir de la conversión de la energía térmica (obtenida principalmente a partir de la combustión de combustibles fósiles) en electricidad. Además de producir cerca del 20% del total de los gases de efecto invernadero, el proceso de transformación de energía térmica en energía eléctrica tiene un rendimiento del 30-40%. Este nivel de eficiencia implica que una gran cantidad de energía es desperdiciada y podría ser aprovechada por los TEGs para ser transformada en electricidad y poder ser utilizada con otros propósitos.

Algunos ejemplos de aplicación en los que los dispositivos termoelectricos pueden usarse como generadores de potencia eléctrica son los siguientes:

- Generadores termoelectricos son utilizados en los escapes de los vehículos para generar electricidad a partir del calor desaprovechado. Esto permite reducir el tamaño del alternador con la consecuente reducción de peso del automóvil, lográndose una disminución del consumo de combustible que ronda el 10%.
- Existen generadores solares-TEG híbridos donde el generador termoelectrico da apoyo al generador fotovoltaico en caso de que el flujo solar sea insuficiente.
- Pueden ser utilizados en cualquier lugar en el que se disponga de calor residual, como en muchos procesos industriales.
- La Corporación Marítima de Física Aplicada de Baltimore [4] instaló en 2013 un TEG para producir energía eléctrica en el fondo marino aprovechando la diferencia de temperatura entre el agua fría del mar y los fluidos calientes liberados por depósitos geotérmicos o respiraderos hidrotérmicos.
- Al igual que anteriormente se ha mencionado el uso de los dispositivos termoelectricos como refrigeradores de componentes electrónicos, también pueden utilizarse para generar electricidad que alimente los sistemas a partir del calor que estos desprenden.
- La referencia [5] ha desarrollado varios dispositivos utilizando células Peltier que, aprovechando el calor liberado a través de la piel de la mano o la frente, generan energía eléctrica suficiente para alimentar un LED o cargar un dispositivo móvil.



Figura 1.5: Las altas temperaturas de la turbina o el post-quemador podrían ser aprovechadas por los dispositivos termoelectricos para generar potencia eléctrica, [8].

- Una de las principales aplicaciones de los generadores termoelectricos es su utilización como fuentes de alimentación de balizas en zonas remotas donde el mantenimiento sería difícil o imposible. Son de gran utilidad en estos casos debido a que carecen de partes móviles que necesiten mantenimiento, pueden funcionar sin el apoyo de baterías y son operativos bajo cualquier condición atmosférica tanto de día como de noche.

Todas estas aplicaciones están limitadas por la mencionada baja eficiencia de los dispositivos termoelectricos.

1.4. Aplicaciones en el sector aeronáutico y aeroespacial

La tecnología termoelectrica es un importante foco de investigación en el sector militar y aeroespacial debido a sus potenciales aplicaciones y a la cantidad de beneficios que pueden aportar. Los dispositivos termoelectricos, al transformar el calor residual de los motores en energía eléctrica, podrían alimentar sensores, los equipos electrónicos y otros sistemas de las aeronaves, reduciendo de forma significativa el peso de las mismas. Esto disminuiría los costes de la misión, o lo que es lo mismo, aumentaría los beneficios en una aplicación comercial.

Como se ha mencionado anteriormente, los dispositivos termoelectricos son muy empleados en el sector aeroespacial, sobre todo en aquellas misiones en las que otras fuentes de alimentación no son prácticas. Por ejemplo, los generadores termoelectricos de radioisótopos (RTG por sus siglas en inglés) se utilizan habitualmente en misiones espaciales más allá del planeta Marte debido a que el flujo de luz solar no es suficiente para que los paneles solares convencionales funcionen adecuadamente. El satélite Galileo enviado a Júpiter, la New Horizons enviada a Plutón, la sonda Cassini enviada a Saturno (Figura 1.6), la sonda Ulysses enviada a estudiar el Sol y la Curiosity en Marte son algunas de las naves que utilizan RTG para producir energía. Sin embargo, el peligro de radiación es el principal motivo por el que estos dispositivos solo se utilicen en lugares aislados.



Figura 1.6: RTG instalado en sonda Cassini durante un test de radiación con un contador Geiger, [9].

Actualmente la NASA está desarrollando un nuevo modelo de RTG llamado eMMRTG (Enhanced Multi-Mission Radioisotope Thermoelectric Generator) el cual se espera que esté listo dentro de 5 años para ser usado en futuras misiones [6]. Las principales diferencias con los RTG convencionales son:

- Sustitución de los termopares tradicionales de PbTe/TAGS por unos termopares contruidos a partir de un nuevo material desarrollado por la NASA llamado *Skutterudite*.
- Adición de una capa de óxido en la superficie de la cara caliente que permite alcanzar mayores temperaturas.
- Un 25% más de potencia al principio de su vida útil y un 50% más a partir de los 14 años de misión.

Los dispositivos termoeléctricos también podrían instalarse en los motores de las aeronaves para producir energía eléctrica a partir del calor residual. Esta energía podría servir para alimentar cualquier sistema de la aeronave.

De igual forma, los dispositivos termoeléctricos pueden utilizarse como refrigeradores termoeléctricos (TEC por sus siglas en inglés) usando el efecto *Peltier*. Aplicando un voltaje en el TEC se produce un gradiente de temperaturas que puede ser usado para refrigerar el componente de la aeronave que lo necesite. Por ejemplo, los TECs podrían instalarse en zonas de alta temperatura como la salida de la cámara de combustión o la turbina de un motor para refrigerar y así disminuir esta temperatura.

No existe ninguna diferencia conceptual entre los módulos utilizados para refrigeración o generación de potencia, sin embargo, el modo en el que se usan y la forma de construir el circuito eléctrico pueden cambiar de una aplicación a otra.

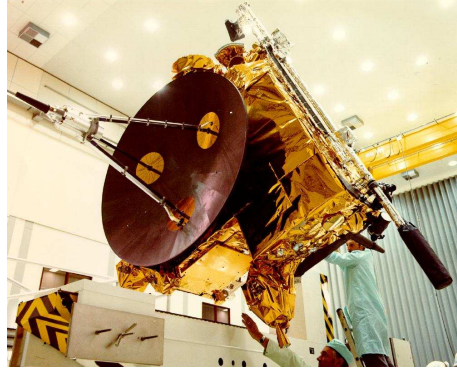


Figura 1.7: La sonda no tripulada Ulysses utilizaba RTGs para obtener energía, [7].

Como hemos visto, los dispositivos termoeléctricos, usados como generadores o como refrigeradores, tienen un gran número de aplicaciones en el sector aeronáutico y aeroespacial y se prevé un importante desarrollo de esta tecnología en el futuro cercano, siendo las aplicaciones militares y aeroespaciales las que dominarán el mercado.

El principal objetivo de la investigación en dispositivos termoeléctricos es aumentar su eficiencia mediante el desarrollo de nuevos materiales termoeléctricos. Sin embargo, en este trabajo se plantean otras alternativas: se realizan diversos estudios paramétricos variando la geometría de los termopares, se estudia cómo la presencia de un campo magnético modifica el comportamiento de los dispositivos termoeléctricos y, por último, se plantean dos nuevos diseños.

Este trabajo está dividido en varios capítulos:

- *Capítulo 2: Formulación Electromagnética:* se presenta la formulación electromagnética, incluyendo las ecuaciones de *Maxwell* y las ecuaciones constitutivas y de equilibrio del electromagnetismo. Además, se introducen las propiedades electromagnéticas de la materia, presentando los conceptos de polarización eléctrica y magnetización. Este capítulo es importante para comprender cómo se comporta la materia bajo la acción de campos electromagnéticos, presentes en los análisis realizados en este trabajo.
- *Capítulo 3: Teoría de Termoelectricidad Aplicada a Generación de Energía:* se obtienen las ecuaciones constitutivas y de equilibrio de los materiales termoeléctricos partiendo de la termodinámica de los procesos irreversibles. También se presentan los conceptos necesarios para realizar estudios analíticos sobre las prestaciones de los generadores termoeléctricos. Finalmente, se resuelven casos sencillos analíticamente y numéricamente con el fin de validar la teoría desarrollada en el capítulo.
- *Capítulo 4: Validaciones:* se presenta el programa de elementos finitos utilizado en este trabajo, FEAP. Además, se resuelven una serie de problemas termoeléctricos, termogalvanomagnéticos y mecánicos analíticamente y con FEAP, con el objetivo de validar el correcto funcionamiento de los elementos programados por el usuario utilizados en el trabajo.

- *Capítulo 5: Modelado de un Generador Termoeléctrico:* se presenta el generador estudiado en este trabajo y se realiza el modelado de su geometría y las propiedades de los materiales que lo componen. Además, se realiza un estudio de convergencia de malla para asegurar la fiabilidad de los resultados obtenidos.
- *Capítulo 6: Análisis del eMMRTG:* se realizan diversas simulaciones del generador termoeléctrico eMMRTG y se analizan sus prestaciones y las tensiones que se producen. Particularmente, se realizan análisis paramétricos variando la geometría de los termopares, se realiza un estudio sobre la influencia en su comportamiento de la presencia de un campo magnético y, finalmente, se presentan dos nuevos diseños.
- *Capítulo 7: Conclusiones:* se presentan las principales conclusiones obtenidas tras la realización del trabajo y se plantean posibles nuevos proyectos e ideas en base al análisis de los resultados obtenidos en el trabajo.

2

Formulación Electromagnética

2.1. Campos electromagnéticos

2.1.1. Introducción

El electromagnetismo es la disciplina que se encarga del estudio de las cargas eléctricas estáticas y en movimiento. Son estas cargas en movimiento las que originan las corrientes eléctricas o los campos electromagnéticos que se estudian ampliamente en física e ingeniería y que forman la base de gran parte de la tecnología utilizada actualmente en sectores como las telecomunicaciones, la generación y distribución de energía, la electrónica y el diseño y fabricación de numerosos dispositivos entre los que se encuentran los dispositivos termoelectrónicos.

Los conceptos teóricos del electromagnetismo se encuentran definidos por leyes básicas formuladas tras la realización de una serie de experimentos llevados a cabo durante el siglo XIX por científicos de renombre tales como Faraday, Gauss, Galvani, Ampère, Coulomb y Volta entre otros. Sin embargo, estas leyes básicas consideraban los fenómenos eléctricos y electromagnéticos independientes. Es en 1861 cuando el físico británico James Clerk Maxwell unifica estas leyes presentándolas como un conjunto de ecuaciones que describen ambos fenómenos como uno solo, el fenómeno electromagnético, y que pasarían a ser conocidas como las ecuaciones de *Maxwell*.

El electromagnetismo es una teoría de campos, por lo que los campos eléctricos y magnéticos son magnitudes vectoriales que poseen magnitud y dirección dependientes de la posición en el espacio y el tiempo. Las ecuaciones de *Maxwell*, que gobiernan las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos así como su comportamiento, pueden ser escritas en su forma diferencial o en su forma integral, siendo de utilidad una forma u otra dependiendo del problema.

Este capítulo es un resumen del segundo del libro *Advanced Engineering Electromagnetics* del autor A. Balanis [2].

2.1.2. Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

La forma diferencial de las ecuaciones de *Maxwell* es la representación más utilizada para resolver problemas electromagnéticos. Permite obtener los vectores de campo, las densidades de corriente y las densidades de carga en cualquier punto del espacio y del tiempo. Para que estas expresiones sean válidas se asume que los vectores de campo son una función de valor único, continua en el espacio y el tiempo y con derivadas continuas. Estas características se cumplen excepto donde existen cambios bruscos en la densidad de carga y corriente como las interfaces entre dos medios distintos. Por lo tanto, una descripción completa del problema en cualquier punto requiere tanto las ecuaciones de *Maxwell* como las condiciones de contorno (C.C.) asociadas. Estas ecuaciones en su forma

diferencial para un medio material son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_q \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

La tercera y cuarta ecuaciones Ecs. (2.3) y (2.4) son las ecuaciones de equilibrio eléctrica y magnética, respectivamente. Todos los campos, flujos y parámetros que intervienen se asumen como variables en el tiempo y cada uno es función de las coordenadas espaciales y el tiempo. Las definiciones de los parámetros son:

- \mathbf{E} : Intensidad del campo eléctrico
- \mathbf{H} : Intensidad del campo magnético
- \mathbf{D} : Desplazamiento eléctrico
- \mathbf{B} : Inducción magnética o densidad de flujo magnético
- \mathbf{j} : Densidad de corriente eléctrica
- ρ_q : Densidad de carga eléctrica

La Ec.(2.1) describe el acoplamiento entre el campo magnético y el campo eléctrico: una variación temporal de la inducción magnética $\partial \mathbf{B} / \partial t$ provoca circulaciones del campo eléctrico $\nabla \times \mathbf{E}$ a lo largo de líneas cerradas. Esta ecuación recibe el nombre de ley de Faraday-Lenz.

La Ec. (2.2) es la forma diferencial de la ley de Ampère generalizada tras ser corregida para adaptarla a campos no estacionarios. Expresa la relación entre el rotacional de un campo magnético, la corriente eléctrica y la variación temporal del desplazamiento eléctrico.

La Ec. (2.3), conocida como la ley de Gauss para el campo eléctrico, afirma que la divergencia del campo eléctrico es proporcional a la densidad de carga eléctrica dividida por la permitividad del vacío.

Finalmente, la Ec. (2.4) se denomina ley de Gauss para el campo magnético y define que la divergencia de la inducción magnética es nula. Consecuentemente no existen sumideros ni fuentes del campo, lo que físicamente implica la inexistencia de monopolos magnéticos e indica que las líneas de los campos magnéticos son cerradas.

Además de las cuatro ecuaciones de *Maxwell* existe otra ecuación conocida como la ecuación de continuidad que relaciona el flujo de corriente total abandonando un volumen diferencial con el ratio de disminución de carga.

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho_q}{\partial t} \quad (2.5)$$

2.1.3. Forma integral de las ecuaciones de Maxwell

La forma integral de las ecuaciones de *Maxwell* describe las relaciones entre los campos vectoriales, densidades de carga y densidades de corriente sobre una región extendida del espacio. Sus aplicaciones son muy limitadas y suelen ser utilizadas para resolver problemas de condición de contorno con simetría total. Sin embargo, con estas ecuaciones los campos y sus derivadas no tienen por qué ser continuos. La forma integral de las ecuaciones de *Maxwell* puede ser obtenida a partir de su forma diferencial utilizando los teoremas de Stokes y de la divergencia, y para un medio material presentan la siguiente forma:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.6)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.7)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = q_{ch} \quad (2.8)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.9)$$

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_q dv = -\frac{\partial q_{ch}}{\partial t} \quad (2.10)$$

Siendo estas ecuaciones derivadas de las Ecs. (2.1) a (2.5). En la Ec. (2.8), q es la carga eléctrica total.

2.1.4. Condiciones de continuidad

Inicialmente se considera una interfaz, representada por un plano horizontal Π_p , entre dos medios denominados medio 1 y medio 2, que pueden ser magnéticos o diamagnéticos y sobre los cuales no existen cargas, dado que ninguno de los dos medios es un conductor perfecto. Los medios 1 y 2 están caracterizados respectivamente por los parámetros constitutivos $\epsilon_1, \mu_1, \gamma_1$ y $\epsilon_2, \mu_2, \gamma_2$ respectivamente, que representan, por orden de aparición, la permitividad eléctrica, la permeabilidad magnética y la conductividad de los dos medios.

A continuación se considera una trayectoria rectangular cerrada centrada en la intersección de ambos medios, cuya superficie encerrada se denota como Γ y su perímetro C_0 , como se muestra en la Figura 2.1. Aplicando la Ec. (2.6) en el rectángulo a lo largo de C_0 y sobre Γ se obtiene:

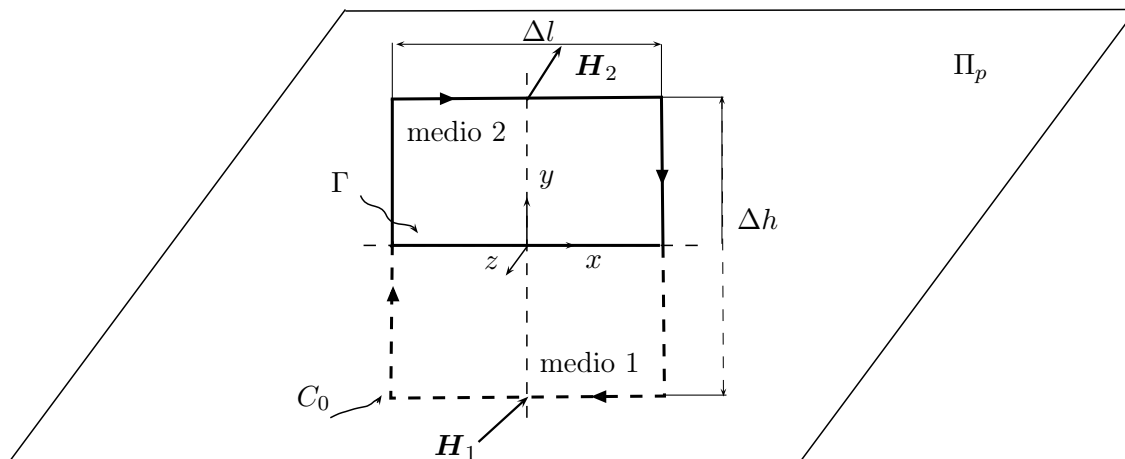


Figura 2.1: Condiciones de continuidad del campo magnético.

$$\oint_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.11)$$

A medida que la altura Δh del rectángulo decrece progresivamente, el área Γ también se reduce hasta el punto en el que la contribución de la integral de superficie es despreciable. Además, la contribución de la integral de línea a lo largo de Δh también es mínima, por lo que en el caso límite en el que Δh tiende a cero, la Ec. (2.11) se reduce a:

$$E_1 \mathbf{n}_x \Delta l - E_2 \mathbf{n}_x \Delta l = 0 \quad (2.12)$$

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{1t} = E_{2t} \quad (2.13)$$

donde \mathbf{n}_x es un vector normal en la dirección x . En la Ec. (2.13), E_{1t} y E_{2t} representan respectivamente las componentes tangenciales del campo eléctrico en los medios 1 y 2 a lo largo de la interfaz Π_p . Esta ecuación establece que las componentes tangenciales del campo eléctrico son continuas a través de una interfaz entre dos medios sin flujo magnético inducido a lo largo de su contorno.

Utilizando un procedimiento similar sobre el mismo rectángulo pero para la Ec. (2.7), asumiendo que $\mathbf{j} = 0$, se puede escribir:

$$H_{1t} - H_{2t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{1t} = H_{2t} \quad (2.14)$$

Las componentes tangenciales del campo magnético a través de la interfaz entre dos medios, sin ser ninguno de ellos un conductor perfecto, son continuas.

Además de las condiciones de contorno en las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético a través de una interfaz, es necesario establecer las relacionadas con

las componentes normales de los campos.

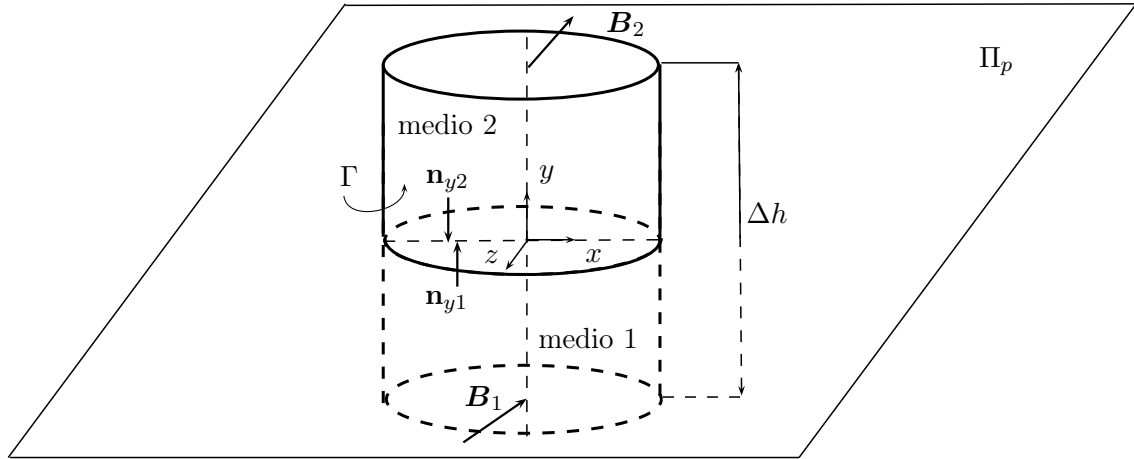


Figura 2.2: Condiciones de continuidad de la inducción magnética.

Para obtener estas relaciones se considera un elemento diferencial con forma de cilindro encerrando un punto dado contenido en Π_p (Figura 2.2) cuya superficie completa (cilindro y tapas) es Γ . Si no hay cargas sobre la interfaz, la Ec. (2.8) se reduce a:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.15)$$

A medida que la altura Δh del cilindro decrece progresivamente, el área del cilindro se reduce también hasta que la contribución de la integral de superficie es despreciable. Por lo tanto, solo se tendrá en cuenta la componente normal del vector \mathbf{D} y la Ec. (2.15) se puede reescribir como:

$$D_2 \mathbf{n}_y \Gamma - D_1 \mathbf{n}_y \Gamma = 0 \quad (2.16)$$

donde \mathbf{n}_y es un vector normal en la dirección y . Reordenando, se obtiene:

$$D_{2n} - D_{1n} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{2n} = D_{1n} \quad (2.17)$$

En la Ec. (2.17), D_{1n} y D_{2n} representan las componentes normales del desplazamiento eléctrico en los medios 1 y 2 respectivamente sobre la interfaz. La Ec. (2.17) establece que las componentes normales del desplazamiento eléctrico a través de una interfaz entre dos medios (conductores no perfectos) y en los cuales no hay fuentes, son continuas.

En cuanto a las intensidades del campo eléctrico, la Ec. (2.17) puede escribirse como:

$$\epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} \quad \Rightarrow \quad E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n} \quad \Rightarrow \quad E_{1n} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_{2n} \quad (2.18)$$

la cual establece que las componentes normales de la intensidad del campo eléctrico a través de una interfaz son discontinuas.

Utilizando un procedimiento similar sobre el mismo cilindro pero para la Ec. (2.9) sin cargas sobre la interfaz, se puede escribir:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{2n} = B_{1n} \quad (2.19)$$

por lo que las componentes normales de la inducción magnética a través de la interfaz entre dos medios donde no existen fuentes son continuas. En términos de las intensidades del campo magnético, la Ec. (2.19) puede escribirse como:

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n} \quad \Rightarrow \quad H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n} \quad \Rightarrow \quad H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{2n} \quad (2.20)$$

la cual establece que las componentes normales de la intensidad del campo magnético a través de una interfaz son discontinuas.

2.2. Propiedades eléctricas de la materia

2.2.1. Dieléctricos, polarización y permitividad

Los materiales dieléctricos (aislantes) son aquellos que no contienen ninguna carga libre, siendo macroscópicamente neutros. Sin embargo, cuando se aplica un campo externo, las cargas negativas y positivas que se encuentran fijas no se mueven a la superficie del material como ocurre en los conductores, sino que sus centroides cambian de posición infinitesimalmente creando dipolos eléctricos. El efecto de cada dipolo eléctrico puede ser representado por un momento dipolar $d\mathbf{p}_i = Q_{ch} \mathbf{l}_i$, donde Q_{ch} es la magnitud de cada una de las cargas positivas y negativas cuyos centroides se han desplazado una distancia \mathbf{l}_i .

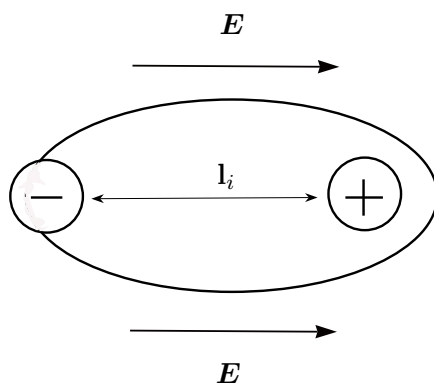


Figura 2.3: Representación de un dipolo eléctrico.

Cuando un material es expuesto a un campo eléctrico los dipolos de polarización del material interactúan con dicho campo. En los materiales dieléctricos esta interacción le proporciona al material la capacidad de almacenar energía eléctrica en forma de energía potencial.

La polarización eléctrica, que expresa la densidad de los momentos eléctricos dipolares permanentes o inducidos en un material dieléctrico, se puede producir por los siguientes mecanismos:

- Dipolo o polarización orientacional (Figura 2.3): Esta polarización es propia de materiales que en ausencia de un campo aplicado poseen momentos dipolares permanentes orientados aleatoriamente debido a su propia estructura. Sin embargo, cuando se aplica un campo eléctrico los dipolos tienden a alinearse con el campo aplicado. Tales materiales se conocen como materiales polares y un ejemplo es el agua.
- Iónico o polarización molecular: Esta polarización es propia de materiales que poseen iones positivos y negativos que tienden a desplazarse cuando se aplica el campo eléctrico.
- Polarización electrónica: Esta polarización aparece en la mayoría de los materiales cuando un campo eléctrico aplicado desplaza el centro de la nube eléctrica de un átomo respecto del centro del núcleo.

Por otro lado, dependiendo de cómo se organizan los dipolos en el material y cómo se comportan cuando se aplica un campo eléctrico, los materiales pueden clasificarse en:

- No-polar: en ausencia de un campo eléctrico, las cargas positivas y negativas se cancelan entre ellas en todo el material, por lo que no se forman dipolos individuales y el momento dipolar total y el vector de polarización eléctrica \mathbf{P} son nulos. Sin embargo, cuando se aplica un campo eléctrico el material muestra \mathbf{P} no nula.
- Polar: los materiales polares son aquellos que en ausencia de un campo eléctrico aplicado \mathbf{E} presentan cargas distribuidas de manera que forman dipolos individuales, cada uno con un momento dipolar \mathbf{p}_i pero con un momento dipolar total $\mathbf{p}_t = 0$ y con $\mathbf{P} = 0$ debido a la orientación aleatoria de los dipolos.
- Electrets: materiales que en ausencia de \mathbf{E} poseen un momento dipolar total y \mathbf{P} no nulos. Son el equivalente a un imán permanente.
- Ferroeléctricos: materiales que exhiben histéresis de \mathbf{P} frente a \mathbf{E} , por lo que poseen polarización y campo eléctrico residuales cuando se retira el campo eléctrico aplicado. A una determinada temperatura crítica llamada temperatura ferroeléctrica de Curie, la polarización desaparece.

En un condensador formado por dos placas paralelas entre las cuales se encuentra un material dieléctrico con un campo eléctrico aplicado hay un \mathbf{P} en la misma dirección que \mathbf{E} . Mientras que el campo eléctrico mantiene su valor, el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} es:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.21)$$

siendo ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío. De la Ec. (2.21) se deduce que \mathbf{P} está relacionado con \mathbf{E} y se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} ; \quad \chi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{|\mathbf{P}|}{|\mathbf{E}|} \quad (2.22)$$

donde χ_e es la susceptibilidad eléctrica (adimensional). Sustituyendo la Ec. (2.22) en la Ec. (2.21) se obtiene la ecuación constitutiva de los materiales dieléctricos:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} := \epsilon_s \mathbf{E} \quad (2.23)$$

donde $\epsilon_s = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ es la permitividad estática del medio.

2.2.2. Materiales magnéticos, magnetización y permeabilidad

Los materiales magnéticos son aquellos que exhiben polarización magnética cuando son expuestos a un campo magnético \mathbf{H} . Son representados por un número de dipolos magnéticos y por lo tanto por el correspondiente número de momentos magnéticos. En ausencia de \mathbf{H} los dipolos magnéticos se encuentran orientados de forma aleatoria, por lo que de forma macroscópica la suma vectorial de los momentos magnéticos y la polarización magnética son iguales a cero. Cuando el material magnético se expone a un \mathbf{H} con densidad de flujo magnético \mathbf{B} , los dipolos magnéticos del material tienden a alinearse en la dirección de \mathbf{B} (ver Figura 2.4).

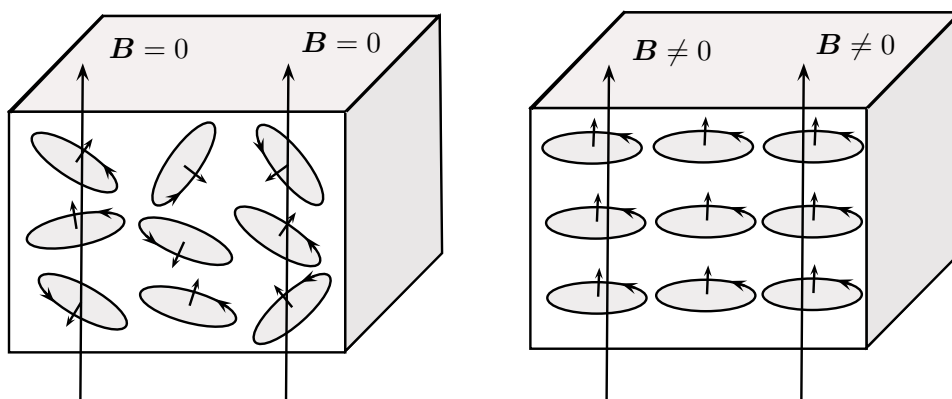


Figura 2.4: Representación del proceso de polarización magnética.

En un material \mathbf{B} aumenta por la presencia del vector de magnetización \mathbf{M} resultante de la reorganización de los dipolos magnéticos, por lo que la densidad de flujo magnético neta en cualquier punto del material es:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.24)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. \mathbf{M} está relacionado con \mathbf{H} por la expresión:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (2.25)$$

donde χ_m es la susceptibilidad magnética. Sustituyendo la Ec. (2.25) en Ec. (2.24) se obtiene la ecuación constitutiva de los materiales magnéticos.

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) := \mu_s \mathbf{H} \quad (2.26)$$

donde $\mu_s = \mu_0(1 + \chi_m)$ es la permeabilidad estática del medio cuya permeabilidad relativa (comparada con μ_0) viene dada por:

$$\mu_{sr} = \frac{\mu_s}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (2.27)$$

Cuando los campos aplicados son estáticos o cuasiestáticos la permeabilidad relativa μ_{sr} es muy cercana a la unidad en la mayoría de materiales excepto para los ferromagnéticos, por lo que en problemas de ingeniería casi siempre se toma el valor unidad.

Dependiendo de la dirección del vector magnetización \mathbf{M} los materiales se clasifican en dos grupos, el grupo A y el grupo B, como se muestra en la Tabla 2.1:

Grupo A	Grupo B
Diamagnéticos	Paramagnéticos
	Ferromagnéticos
	Antiferromagnéticos
	Ferrimagnéticos

Tabla 2.1: Clasificación de los materiales magnéticos.

En general, para materiales en el grupo A el vector magnetización se opone al campo magnético aplicado, resultando una permeabilidad relativa un poco menor que la unidad. Para materiales en el grupo B el vector magnetización tiene la dirección del campo magnético, resultando en permeabilidades relativas mayores que la unidad. A continuación se explican detalladamente las características de los diferentes materiales magnéticos de ambos grupos:

- **Diamagnéticos:** En ausencia de \mathbf{H} , los momentos asociados con el spin de los electrones son opuestos entre sí al igual que son opuestos a los momentos asociados a los electrones orbitando por lo que un momento magnético neto \mathbf{m}_t igual a cero se produce en escala macroscópica. En presencia de un campo magnético aplicado cada átomo tiene un momento magnético no nulo y a escala macroscópica existe un momento magnético total para todos los átomos que resulta en un vector magnetización

\mathbf{M} , que es muy pequeño y se opone a \mathbf{H} , resultando valores de μ_{sr} algo menores a la unidad.

- **Paramagnéticos:** Los momentos magnéticos asociados con el spin y la traslación de los electrones de un átomo no se cancelan unos a otros en ausencia de \mathbf{H} , por lo que cada átomo posee un pequeño momento magnético. Sin embargo, debido a que la orientación del momento magnético de cada átomo es aleatoria, \mathbf{M} es nulo cuando no hay campo magnético aplicado. Cuando el material paramagnético es expuesto a un campo magnético los dipolos magnéticos se alinean con el campo aplicado produciendo un pequeño \mathbf{M} no nulo con su dirección. Por lo tanto, la permeabilidad relativa del material es algo mayor a la unidad. Un ejemplo de material paramagnético es el aluminio.
- **Ferromagnéticos:** En ausencia de \mathbf{H} , los átomos individuales de los materiales ferromagnéticos poseen momentos magnéticos muy fuertes debido principalmente a los momentos no compensados asociados al spin de los electrones. Sin embargo, a escala macroscópica el vector magnetización neto \mathbf{M} es nulo debido a la orientación aleatoria de los momentos magnéticos de los átomos. Cuando un material ferromagnético es expuesto a un campo magnético aplicado, la suma vectorial de todos los momentos magnéticos y el vector magnetización \mathbf{M} asociado son muy grandes, dando lugar a valores extremos de χ_m y μ_{sr} . Cuando el campo aplicado es retirado los momentos magnéticos de los átomos no toman una orientación aleatoria de nuevo, por lo que aparece un momento magnético residual no nulo y un bucle de histéresis magnética.
- **Antiferromagnéticos:** En ausencia de \mathbf{H} , los átomos de los materiales antiferromagnéticos poseen fuertes momentos magnéticos, pero los átomos adyacentes los cancelan resultando en un \mathbf{M} total nulo. La presencia de un campo aplicado tiene menor efecto que en los materiales ferromagnéticos, dando lugar a permeabilidades relativas poco mayores que la unidad.
- **Ferrimagnéticos:** La presencia de \mathbf{H} tiene un gran efecto en el material y da lugar a grandes permeabilidades, aunque no tan grandes como las de los materiales ferromagnéticos. Un ejemplo de materiales ferrimagnéticos son las ferritas.

2.2.3. Conductores y conductividad

Conductores son aquellos materiales cuyos electrones de valencia pueden migrar desde un átomo a otro produciendo corriente eléctrica. Estos electrones se conocen como electrones libres y son muy numerosos en el caso de los conductores metálicos. En ausencia de campo externo aplicado los electrones libres se mueven con diferentes velocidades en direcciones aleatorias produciendo una corriente neta nula en la superficie del conductor.

Cuando una carga libre q_{v0} se encuentra en el interior de un conductor expuesto a un campo estático, la densidad de carga en ese punto decae exponencialmente como:

$$\rho_q(t) = q_{v0} e^{-t/t_r} = q_{v0} e^{-(\gamma/\epsilon)t} \quad (2.28)$$

debido a que la carga migra hacia la superficie del conductor. El tiempo t que esta migración conlleva depende de la conductividad del material. Por otra parte, el tiempo t_r que tarda la densidad de carga libre del interior del conductor en decaer a $e^{-1} = 0,368$, o el 36,8% de su valor inicial, se conoce como constante de relajación de tiempo. Matemáticamente se representa como:

$$t_r = \frac{\epsilon}{\gamma} \quad (2.29)$$

Las cargas libres en un buen conductor (cuya conductividad tiende a infinito) expuesto a un campo eléctrico, migran muy rápidamente y se distribuyen como densidad de carga superficial q_s en la superficie del conductor durante un periodo de tiempo muy corto (t_r muy pequeñas). La densidad de carga superficial q_s induce en el conductor una intensidad de campo eléctrico \mathbf{E}_i de forma que el campo eléctrico total \mathbf{E}_t en el interior del conductor $\mathbf{E}_i + \mathbf{E} = \mathbf{E}_t$ es esencialmente igual a cero (\mathbf{E} es el campo eléctrico aplicado).

Cuando un conductor es expuesto a un campo eléctrico, los electrones siguen moviéndose en direcciones aleatorias pero se deslizan lentamente en la dirección negativa del campo eléctrico aplicado con una velocidad de desplazamiento \mathbf{v}_{de} , creando una corriente de conducción en el conductor. \mathbf{E} y la velocidad de desplazamiento \mathbf{v}_{de} de los electrones están relacionados por:

$$\mathbf{v}_{de} = -\mu_e \mathbf{E} \quad (2.30)$$

donde μ_e es la movilidad de los electrones. Se parte de la expresión:

$$\mathbf{j} = \rho_{qe} \mathbf{v}_{de} = -\rho_{qe} \mu_e \mathbf{E} \quad (2.31)$$

donde ρ_{qe} es la densidad de carga de electrones. Se puede reescribir esta ecuación de forma que se obtenga la ecuación constitutiva de los materiales conductores:

$$\mathbf{j} = \gamma_s \mathbf{E} \quad (2.32)$$

donde se ha definido la conductividad estática del conductor como:

$$\gamma_s = -\rho_{qe} \mu_e \quad (2.33)$$

Cuando la temperatura T aumenta se produce una disminución de conductividad del conductor.

2.2.4. Semiconductores

Aquellos materiales cuyas conductividades se encuentran entre las propias de los dieléctricos y los conductores se conocen como semiconductores. Dos de estos materiales con especial interés en ingeniería son el *germanio* y el *silicio*. En los semiconductores existen dos tipos de portadores de carga: los electrones libres y los huecos.

Cuando T aumenta, la movilidad de los electrones del material semiconductor decrece pero su densidad de carga aumenta de forma más rápida, resultando en un incremento general de γ con T . Esta es una de las principales diferencias entre los semiconductores y los conductores metálicos. La conductividad también puede incrementarse añadiendo impurezas a la microestructura del material, proceso conocido como dopaje. Algunas impurezas se llaman *donantes* porque añaden más electrones y forman semiconductores tipo-n, en los cuales los electrones son los portadores mayoritarios. Otro tipo de impurezas son los llamados *aceptantes* porque añaden más huecos formando semiconductores tipo-p. En estos, los huecos son los portadores principales. La unión entre un semiconductor tipo-n y otro del tipo-p es el principio de funcionamiento de los dispositivos termoeléctricos.

Para T cercanas al cero absoluto, los electrones de valencia del semiconductor están sujetos firmemente y no son libres para viajar, por lo que el material se comporta como un aislante. Sin embargo, cuando T aumenta, la vibración térmica de la estructura reticular en un semiconductor se incrementa y algunos de los electrones ganan suficiente energía térmica para escapar de su átomo y convertirse en electrones libres como los de un conductor metálico. Los electrones de valencia de un semiconductor deben ganar suficiente energía para viajar desde la banda de valencia hasta la banda de conducción atravesando la banda prohibida (ver Figura 2.5). Para todos los semiconductores el salto de energía de la banda prohibida es cercano a $E_g = 1,43 \text{ eV} = 2,29 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

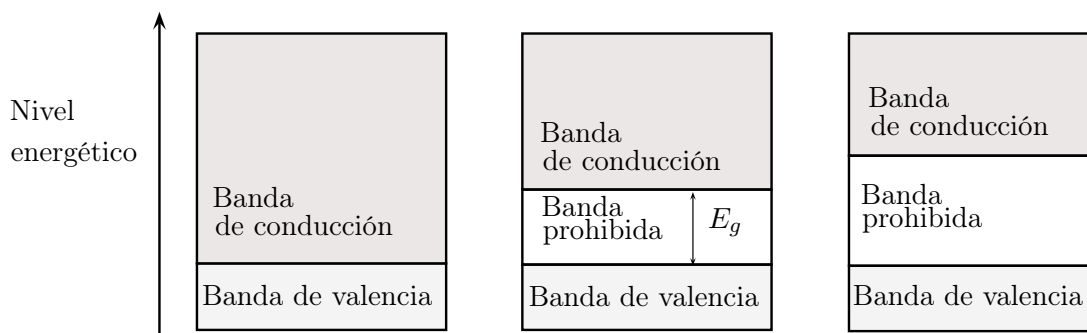


Figura 2.5: Niveles energéticos para: conductores a la izquierda, semiconductores en el centro, dieléctricos a la derecha.

Los electrones que ganan energía suficiente para escapar de sus átomos crean vacantes en la capa conocidos como huecos, los cuales también se mueven de forma aleatoria. Cuando el material semiconductor no se encuentra expuesto a un campo eléctrico, la corriente neta producida por los electrones libres que han escapado de sus átomos y los huecos es nula, debido a que la velocidad de desplazamiento neta de cada tipo de portador es nula debido a su movimiento aleatorio. Cuando se aplica un campo eléctrico, los electrones se mueven con una velocidad de desplazamiento $\mathbf{v}_{de} \neq 0$ en la dirección opuesta al campo eléctrico, mientras que los huecos se mueven con una velocidad de desplazamiento $\mathbf{v}_{dh} \neq 0$ en la misma dirección del campo, produciendo una corriente total no nula. Por lo tanto, se

puede escribir la densidad de corriente de conducción de los dos portadores (electrones y huecos) como:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_c &= \rho_{qe}\mathbf{v}_{de} + \rho_{qh}\mathbf{v}_{dh} = \rho_{qe}(-\mu_e\mathbf{E}) + \rho_{qh}(+\mu_h\mathbf{E}) \\ &= (\gamma_{se} + \gamma_{sh})\mathbf{E} = \gamma_s\mathbf{E}\end{aligned}\tag{2.34}$$

donde μ_h es la movilidad de los huecos, γ_{se} la conductividad estática debida a los electrones y γ_{sh} la conductividad estática debida a los huecos. La Ec. (2.34) es la ecuación constitutiva de los materiales semiconductores.

3

Teoría de Termoelectricidad Aplicada a Generación de Energía

Los efectos termoeléctricos y galvanomagnéticos que aparecen en los generadores termoeléctricos son, por naturaleza, procesos de no-equilibrio, ya que implican transporte de energía a través de flujos de calor y corrientes eléctricas. Además, debido a la presencia de campos magnéticos y a la variación de las propiedades de los materiales con la temperatura, estos pasan a ser anisótropos y por lo tanto la formulación clásica utilizada para el estudio de la termoelectricidad deja de ser la más apropiada.

En el presente capítulo se realizará una descripción de la teoría de la termoelectricidad desde el punto de vista de la termodinámica de no-equilibrio. Además, se presentarán los diferentes índices de eficiencia tanto de los materiales termoeléctricos como de los generadores con el fin de identificar los parámetros más influyentes que permiten obtener una actuación óptima.

El contenido teórico de este capítulo se basa en los capítulos 2 y 9 de la referencia [1] y en los artículos [26] y [27].

3.1. Teoría termodinámica de la termoelectricidad

Para construir una teoría de termoelectricidad rigurosa es necesario aplicar una teoría general de los procesos de no-equilibrio denominada termodinámica de no-equilibrio o termodinámica de los procesos irreversibles. Para hallar esta actualizada teoría de los termoeléctricos se parte de las dos relaciones de *Thomson*, las cuales relacionan los tres principales efectos termoeléctricos utilizando la termodinámica de equilibrio:

$$\frac{d\Pi}{dT} - \alpha - \tau = 0 ; \quad \frac{d\Pi}{dT} - \frac{\Pi}{T} - \tau = 0 \quad (3.1)$$

donde α es el coeficiente de *Seebeck*, Π es el coeficiente de *Peltier* y τ es el coeficiente de *Thomson*. Las Ecs. (3.1) implican dos relaciones de gran importancia en termoelectricidad:

$$\Pi = \alpha T ; \quad \tau = T \frac{\partial \alpha}{\partial T} \quad (3.2)$$

siendo las Ecs. (3.2) la primera y la segunda relación de *Thomson* respectivamente.

Una vez definidas las relaciones anteriores se pueden obtener las ecuaciones básicas de la termoelectricidad. Aplicando las conocidas leyes de *Fourier* y de *Ohm* a los procesos de disipación de calor y corriente eléctrica y añadiendo los términos relacionados con las aportaciones de los efectos termoeléctricos se obtienen las dos siguientes ecuaciones de transporte:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \gamma \mathbf{E} - \gamma \boldsymbol{\alpha} \nabla T \\ \mathbf{q} &= \boldsymbol{\Pi} \mathbf{j} - \boldsymbol{\kappa} \nabla T \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde γ , $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\Pi}$ son los tensores de conductividad eléctrica, conductividad térmica, coeficientes de *Seebeck* y coeficientes de *Peltier* respectivamente. Es necesario expresar las propiedades del material en forma de tensores, ya que, debido a la presencia de campo magnético y a la dependencia de las propiedades del material con T , el material se considera anisótropo y sus propiedades varían según la posición en el espacio.

Para continuar con el desarrollo es necesario definir primero el principio de simetría de *Onsager*, según el cual, si los flujos y fuerzas termodinámicas se seleccionan de forma que el ratio de producción de entropía σ_s sea mayor que cero (lo que implica un estado de no-equilibrio termodinámico), los tensores cinemáticos \mathbf{L} deben ser simétricos:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^\top \quad (3.4)$$

donde el superíndice \top indica transposición del tensor. En el caso de que los tensores \mathbf{L} exhiban fuerte dependencia con un campo magnético \mathbf{B} existente, se cumple la siguiente relación más general:

$$\mathbf{L}(\mathbf{B}) = \mathbf{L}^\top(-\mathbf{B}) \quad (3.5)$$

Por lo tanto, en presencia de \mathbf{B} los tensores cinemáticos son antisimétricos. Aplicando este principio a las propiedades del material se obtienen las siguientes relaciones:

$$\gamma(\mathbf{B}) = \gamma^\top(-\mathbf{B}); \quad \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{B}) = \boldsymbol{\kappa}^\top(-\mathbf{B}); \quad T\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{B}) = \boldsymbol{\Pi}^\top(-\mathbf{B}) \quad (3.6)$$

Partiendo de las ecuaciones de transporte de los materiales termoeléctricos y añadiendo los términos correspondientes a los efectos galvanomagnéticos se obtienen los siguientes tensores de las propiedades del material [13]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \begin{bmatrix} \alpha & -NB_z & NB_y \\ NB_z & \alpha & -NB_x \\ -NB_y & NB_x & \alpha \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\rho} &= \begin{bmatrix} \rho & -RB_z & RB_y \\ RB_z & \rho & -RB_x \\ -RB_y & RB_x & \rho \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\kappa} &= \begin{bmatrix} \kappa & MB_z & -MB_y \\ -MB_z & \kappa & MB_x \\ MB_y & -MB_x & \kappa \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde N , R , y M son los coeficientes de *Hall*, *Nernst* y *Ettingshausen* respectivamente, los cuales modelan la importancia de los efectos galvanomagnéticos. El tensor de conductividad eléctrica γ se obtiene calculando la inversa de $\boldsymbol{\rho}$, mientras que la resistividad eléctrica es $\rho = 1/\gamma$.

3.2. Generalización de las relaciones de *Thomson*

La formulación de las relaciones de *Thomson* ha experimentado una evolución desde que, en un inicio, William Thomson (Lord Kelvin) las definió basándose en la termodinámica clásica de los procesos reversibles y en equilibrio, estableciendo una relación entre los coeficientes de *Seebeck*, *Peltier* y *Thomson*. Posteriormente, en [10] se realizó un estudio de las relaciones de *Thomson* partiendo de la termodinámica de los procesos irreversibles. Sin embargo, este nuevo enfoque no cambió la forma de estas relaciones debido a que estos efectos pueden ser considerados de cuasi-equilibrio o cuasireversibles en un medio isótropo en estado estacionario, ya que en estas condiciones su contribución al cambio de entropía local por unidad de volumen \dot{s} es nula.

Los autores de [11] reformularon las relaciones generales de *Thomson* para un medio anisótropo en presencia de \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}(\mathbf{B}) &= T \left[\boldsymbol{\alpha}(-\mathbf{B}) \right]^\top \\ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{B})|_{T=cte} &= T \frac{\partial}{\partial T} \left[\boldsymbol{\alpha}(-\mathbf{B}) \right]^\top\end{aligned}\quad (3.8)$$

En las Ecs. (3.8) los tensores a ambos lados de las igualdades difieren en la transposición y el signo del vector \mathbf{B} , por lo tanto, estas ecuaciones hacen referencia a dos estados físicos del medio completamente diferentes. El primer estado, correspondiente al miembro de la izquierda de cada ecuación, se caracteriza por una cierta orientación de los vectores \mathbf{q} , \mathbf{j} y \mathbf{B} superpuestos en el medio. El segundo estado, correspondiente al miembro de la derecha, se diferencia del anterior en que el vector \mathbf{j} tiene la orientación del vector \mathbf{q} del primer estado y viceversa, y \mathbf{B} cambia de sentido. Por lo tanto, las Ecs. (3.8) no establecen una relación entre los coeficientes termoeléctricos para un mismo estado físico del medio.

A continuación se introducen los coeficientes locales de *Seebeck*, *Peltier*, *Thomson*, resistividad eléctrica y conductividad térmica para una orientación arbitraria de los vectores \mathbf{j} , \mathbf{q} y \mathbf{B} , con el fin de reformular las relaciones de *Thomson* en función de estos términos. Los coeficientes locales tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\rho_l &= \mathbf{j}_0 \boldsymbol{\rho} \mathbf{j}_0; & \kappa_l &= \mathbf{t}_0 \boldsymbol{\kappa} \mathbf{t}_0; \\ \tau_l &= \mathbf{j}_0 \boldsymbol{\tau} \mathbf{t}_0; & \alpha_l &= \mathbf{t}_0 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{j}_0; & \Pi_l &= \mathbf{t}_0 \boldsymbol{\Pi} \mathbf{j}_0\end{aligned}\quad (3.9)$$

donde \mathbf{t}_0 y \mathbf{j}_0 son vectores unitarios de gradiente de temperatura y densidad de corriente eléctrica.

3.2.1. Nueva forma de la primera relación de *Thomson*

Una vez definidos los coeficientes locales se procede a encontrar la nueva forma de la primera relación de *Thomson*. Considerando el coeficiente Π_l relacionado con $\alpha_l T$, se tiene la siguiente expresión:

$$\alpha_l T = T \mathbf{t}_0 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{j}_0 = \Pi_l \delta \quad (3.10)$$

donde el parámetro adimensional δ puede ser representado como:

$$\delta(\mathbf{j}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{B}) = \frac{\alpha_l(\mathbf{B})}{\alpha_l(-\mathbf{B})} = \frac{\mathbf{j}_0 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{B}) \mathbf{t}_0}{\mathbf{j}_0 \boldsymbol{\alpha}(-\mathbf{B}) \mathbf{t}_0} \quad (3.11)$$

Se puede observar que en ausencia de campo magnético se cumple que $\delta(\mathbf{j}_0, \mathbf{t}_0, 0) = 1$, mientras que en su presencia, δ solo puede tomar un valor distinto a la unidad en caso de que $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{B}) \neq \boldsymbol{\alpha}(-\mathbf{B})$. Esto es posible si una inversión del campo magnético provoca cambios en los coeficientes de *Seebeck*, lo que se conoce como efecto *Umkehr*. Los valores que puede tomar δ pertenecen al intervalo $-1 < \delta \leq 1$, y por lo tanto, de la Ec. (3.10) se obtiene la siguiente relación:

$$\Pi_l \geq \alpha_l T \quad (3.12)$$

La Ec. (3.12) es la nueva forma de la primera relación de *Thomson*, Ec. (3.2). En el caso de medio isótropo ($\delta = 1$), la Ec. (3.12) adopta la forma de la igualdad.

3.2.2. Nueva forma de la segunda relación de *Thomson*

Para obtener esta nueva forma, se utilizan los coeficientes locales de forma análoga a la de la sección anterior.

Dividiendo los tensores de *Thomson* y *Seebeck* en sus componentes simétricas y antisimétricas, así como en sus componentes pares e impares con superíndices + y - respectivamente, de la segunda Ec. (3.8) se obtiene:

$$\pi_l = T \frac{\partial \alpha_l^+}{\partial T} - T \frac{\partial \alpha_l^-}{\partial T} - 2\alpha_l^- \quad (3.13)$$

Además:

$$\alpha_l^+ = \mathbf{t}_0(\boldsymbol{\alpha}^+ \mathbf{j}_0); \quad \alpha_l^- = \mathbf{t}_0(\boldsymbol{\alpha}^- \mathbf{j}_0) \quad (3.14)$$

La Ec. (3.13) es la nueva forma de la segunda relación de *Thomson*. En contraste con su forma clásica Ec. (3.2), la nueva forma incluye dos términos impares con respecto al campo magnético. Además, la presencia del término $-2\alpha_l^-$ implica la presencia de un efecto *Thomson* impar en un medio donde la fuerza electromotriz termoeléctrica es independiente de T .

3.3. Eficiencia de los materiales termoeléctricos

Existen dos posibles aproximaciones para realizar la descripción de los ensamblajes de materiales termoeléctricos, llamados termoelementos (TE).

La primera es la aproximación integral que emplea modelos concretos de TEs como conversores de potencia termoeléctrica basados en variantes de intercambio de calor entre fuentes y sumideros. Esta aproximación solo permite obtener expresiones de la eficiencia para algunos casos de máxima simplicidad debido a la dependencia de las propiedades del material con T , otras peculiaridades de los TEs y sus condiciones de operación.

La segunda aproximación, mucho más conveniente que la primera ya que no es necesario conocer la geometría de los TEs, es la aproximación local, en la que los parámetros y propiedades del proceso de conversión de energía termoeléctrica son determinados para un volumen de TE infinitesimal. Esta aproximación se utiliza para crear un modelo general de TE que sea válido para materiales anisótropos en presencia de un campo magnético y deformaciones.

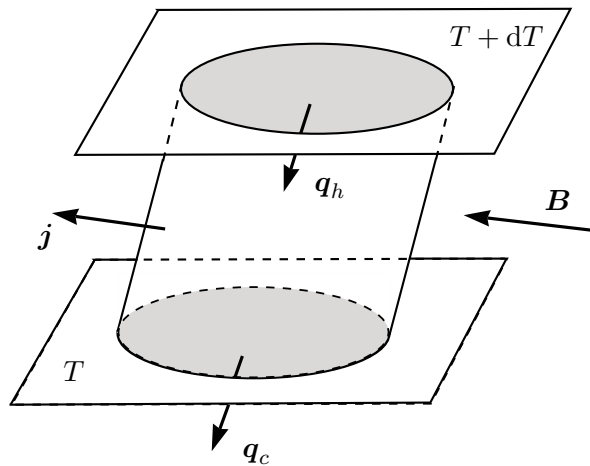


Figura 3.1: Diferencial de volumen cilíndrico dV de un material termoeléctrico considerado en condiciones de termodinámica de no-equilibrio.

La Figura 3.1 muestra un diferencial cilíndrico con volumen dV de material termoeléctrico, que se encuentra entre dos superficies isotérmicas con temperaturas T y $T + dT$; la pared lateral del volumen está aislada adiabáticamente. Una cantidad de calor dQ_h fluye a través de la intersección del cilindro con la superficie $T + dT$ hacia el interior del volumen; la densidad de flujo de calor en esta superficie es q_h . En el volumen se produce una conversión de energía térmica en energía eléctrica, resultando en la generación de una densidad de corriente j . Una cantidad de calor dQ_c abandona el volumen a través de la superficie bajo T ; la densidad de flujo de calor en esta superficie es q_c . Por lo tanto, la energía eléctrica resultante de acuerdo a la ley de conservación de energía es $dQ_h - dQ_c$. Una vez definidos los parámetros anteriores, se puede definir la eficiencia local de conversión de energía termoeléctrica como:

$$\eta_{lc} = \frac{dQ_h - dQ_c}{dQ_h} \quad (3.15)$$

Para poder calcular la eficiencia local de forma más sencilla se introduce la corriente adimensional ι :

$$\iota = \frac{\Pi_l j}{\kappa_l \theta} \quad (3.16)$$

donde θ y j son los módulos de los vectores ∇T y \mathbf{j} respectivamente. Adimensionalizando ambos flujos (ver [1]), se puede ahora expresar la eficiencia local como:

$$\eta_{lc} = \eta_{ct} \frac{\rho_l j^2 + \alpha_l j \theta}{\Pi_l \theta j - \theta^2} = \eta_{ct} \frac{1}{\delta} \frac{1 + \frac{\iota}{Z^*T}}{\iota - 1} \quad (3.17)$$

donde η_{ct} es la eficiencia de *Carnot* del modelo local. En la Ec. (3.17) se ha obtenido un nuevo parámetro de gran importancia:

$$Z^*T = \frac{\alpha_l \Pi_l}{\kappa_l \rho_l} \quad (3.18)$$

El parámetro Z^*T es la figura de mérito adimensional de los materiales termoeléctricos generalizada para un medio anisótropo. Depende de T , de las propiedades del material y a través de ellas de \mathbf{B} , y es un indicador que permite apreciar si un material posee buenas propiedades termoeléctricas.

En la Ec. (3.17) se puede observar que η_{lc} depende de la corriente adimensional, y es máxima η_{lc}^{mx} cuando:

$$\iota = \iota_{op} = \sqrt{1 + Z^*T} - 1 \quad (3.19)$$

El correspondiente valor de eficiencia máxima es:

$$\eta_{lc}^{mx} = \eta_{ct} Z e^* \quad (3.20)$$

donde aparece un nuevo parámetro también de gran relevancia:

$$Z e^* = \delta \frac{\sqrt{1 + Z^*T} - 1}{\sqrt{1 + Z^*T} + 1} \quad (3.21)$$

La Ec. (3.21) es el llamado criterio de *Zener* generalizado, el cual indica el porcentaje de la eficiencia de *Carnot* que puede ser obtenido en eficiencia local para un determinado material termoeléctrico. Es función de la figura de mérito adimensional del material, y se cumple que cuando $Z^*T \rightarrow \infty$ la eficiencia del generador termoeléctrico tiende a la del ciclo de *Carnot*.

3.4. Eficiencia de los generadores termoeléctricos

La eficiencia de los dispositivos termoeléctricos se describe tradicionalmente en función de las propiedades extensivas del material y los parámetros del sistema, como las temperaturas de los focos caliente y frío T_h , T_c , la longitud l , el área transversal A del TE, el

voltaje aplicado \bar{V} o la resistencia de la carga R_l . Esta eficiencia solo puede ser calculada analíticamente en los casos más simples, como con propiedades de material independientes de T , siendo la figura de mérito del material $Z = \frac{\alpha^2}{\kappa \rho}$ la propiedad más influyente.

Para realizar el desarrollo teórico de las expresiones que permiten calcular la eficiencia se tendrán en cuenta las siguientes hipótesis:

- Problema unidimensional, por lo que $\nabla \equiv \frac{d}{dx}$.
- Problema estacionario.
- Las propiedades del material varían con T .

Para continuar con el desarrollo se parte de las ecuaciones de transporte de los materiales termoelectricos isótropos; de la Ec. (3.3) en una dimensión:

$$\begin{aligned} E &= \alpha \nabla T + \rho j \\ q &= \alpha T j - \kappa \nabla T \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como se desarrollará en el Capítulo 4, el flujo de calor irreversible está restringido por la ecuación del calor estacionaria:

$$\nabla(\kappa \nabla T) = -T \frac{d\alpha}{dT} j \nabla T - \rho j^2 \quad (3.23)$$

Por otro lado, la densidad de potencia eléctrica P (potencia producida por unidad de volumen) es el producto del campo eléctrico y la densidad de corriente:

$$P = E j \quad (3.24)$$

Debido a la conservación de la energía, la divergencia del flujo de calor debe ser compensado por las fuentes o sumideros de generación de potencia eléctrica:

$$\nabla q = P \quad (3.25)$$

Finalmente, sustituyendo las Ecs. (3.22) y (3.24) en la Ec. (3.25) se obtiene la ecuación de equilibrio para el problema unidimensional:

$$\nabla j = 0 \quad (3.26)$$

que se cumple automáticamente ya que en estado estacionario no hay variación de la densidad de corriente.

3.4.1. Variables reducidas

Para calcular analíticamente la eficiencia de un generador termoelectrico, más sencillo que el procedimiento anterior es utilizar variables reducidas, ya que separan las propiedades y variables intensivas, como ∇T , \mathbf{j} y \mathbf{q} , de las extensivas, como V , ΔT , l y A .

Densidad de corriente reducida

En un TE operando como generador, la densidad de corriente óptima y ∇T son inversamente proporcionales a A y a l respectivamente. Con el objetivo de eliminar la necesidad de conocer las dimensiones del TE, se define la densidad de corriente reducida u como:

$$u = \frac{j}{\kappa \nabla T} \quad (3.27)$$

que es un ratio entre la densidad de corriente y el flujo de calor por conducción. De las Ecs. (3.24) y la primera (3.22), P se puede expresar ahora en función de u , obteniendo la expresión:

$$P = \kappa (\nabla T)^2 u (\alpha - u \rho \kappa) \quad (3.28)$$

y de la segunda Ec. (3.22), la densidad de flujo de calor expresada en función de variables reducidas es:

$$q = \kappa \nabla T (\alpha u T + 1) \quad (3.29)$$

La variación de u con T se puede deducir de la Ec. (3.23). Para el problema unidimensional con A constante se puede hallar su expresión combinando las Ecs. (3.23) y (3.26), obteniendo:

$$\frac{du}{dT} = u^2 T \frac{d\alpha}{dT} + u^3 \rho \kappa \quad (3.30)$$

donde se puede observar que la dependencia de u con la coordenada espacial x introducida por el gradiente ∇ ha desaparecido, por lo que esta u puede considerarse únicamente función de T .

Eficiencia reducida

La eficiencia η se define como el ratio entre la potencia producida y la suministrada al sistema. Por lo tanto, la eficiencia a lo largo de una distancia infinitesimal dx del TE es la potencia producida por unidad de área dividida por el flujo de calor que la atraviesa:

$$\eta = \frac{P dx}{q} \quad (3.31)$$

En la Ec. (3.31), dx está en la dirección del gradiente de temperatura, por lo que $dx = \frac{dT}{\nabla T}$. Sustituyendo esta igualdad, además de las Ecs. (3.28) y (3.29) se obtiene:

$$\eta = \frac{dT}{T_h} u \frac{\alpha - u \rho \kappa}{u \alpha + \frac{1}{T}} \quad (3.32)$$

donde el primer término es la eficiencia de *Carnot* infinitesimal η_{ct} . La eficiencia reducida, definida por $\eta = \eta_C \eta_r$ no resulta ser una cantidad infinitesimal y se define como:

$$\eta_r = u \frac{\alpha - u \rho \kappa}{u \alpha + \frac{1}{T}} \quad (3.33)$$

Se puede observar que η_r es el equivalente al criterio de *Zener* definido en la Sección 3.3 para materiales isótropos. Finalmente, η_r puede ser expresada en función de la figura de mérito Z como:

$$\eta_r = \frac{1 - u \frac{\alpha}{Z}}{1 + \frac{1}{u \alpha T}} \quad (3.34)$$

Factor de compatibilidad

Tanto en el modo de generación de energía como en el de refrigerador, los efectos termoeléctricos reversibles compiten con el efecto *Joule* irreversible. Debido a que los efectos lineales son directamente proporcionales a \mathbf{j} y el calentamiento de *Joule* lo es cuadráticamente, existe una \mathbf{j} óptima que permite obtener la mayor eficiencia. La variación de η_r con u es análoga a la variación de la potencia generada con la corriente: cuando $u = 0$ existe V pero no se puede definir potencia ni eficiencia. Cuando u aumenta, la eficiencia también aumenta hasta alcanzar un máximo para después decrecer hasta tomar valores negativos. Pasado el punto en el que $\eta_r = 0$ y consecuentemente $u = Z/\alpha$, la caída de voltaje debida a la ley de *Ohm* es mayor que el voltaje producido por el efecto *Seebeck*, y por lo tanto la potencia y la eficiencia son negativas.

El valor de u que permite obtener la mayor eficiencia reducida es el llamado factor de compatibilidad termoeléctrico s :

$$s = \frac{\sqrt{1 + ZT} - 1}{\alpha T} \quad (3.35)$$

siendo entonces $\eta_r(u = s)$:

$$\eta_r^{mx} = \frac{\sqrt{1 + ZT} - 1}{\sqrt{1 + ZT} + 1} \quad (3.36)$$

De la Ec. (3.35) se puede observar que s es una propiedad del material dependiente de T y por lo tanto no puede ser modificado alterando la geometría de la pieza o los flujos eléctricos y térmicos. Si $u \neq s$ la eficiencia obtenida será menor que la máxima dada por la Ec. (3.36). Dado que u depende de j , esta u se puede modificar variando la resistencia de la carga; sin embargo, una vez que se selecciona una u en un punto, este no puede ser ajustado para que siga la variación de s con T en el TE porque la variación de u está determinada por la ecuación del calor, y por lo tanto, η_r siempre será menor que η_r^{mx} , siendo cada vez menor conforme mayor es la diferencia entre u y s .

Normalmente la variación de u en un TE es pequeña. Los generadores termoeléctricos operando en modo de máxima eficiencia tienen típicamente valores de u que varían menos

del 20 % dentro de todos los materiales termoeléctricos que forman el TE. Por lo tanto, se suele considerar que u permanece constante a lo largo de este TE.

Potencial termoeléctrico

Para simplificar muchas expresiones y cálculos, es conveniente utilizar el potencial termoeléctrico Φ , que viene dado por la siguiente expresión:

$$\Phi := \alpha T + \frac{\kappa \nabla T}{j} = \alpha T + \frac{1}{u} \quad (3.37)$$

Gracias a este parámetro, el flujo de calor q que contiene tanto la aportación de *Fourier* como la del efecto *Peltier* se puede expresar simplemente como:

$$q = j \Phi \quad (3.38)$$

Multiplicando por A se obtiene el flujo de calor en función de la corriente $I = j A$:

$$Q = I \Phi \quad (3.39)$$

El campo eléctrico considerando los efectos *Seebeck* y *Ohm* y por lo tanto la densidad de potencia producida son:

$$E = \nabla \Phi \quad \rightarrow \quad P = j \nabla \Phi \quad (3.40)$$

3.4.2. Eficiencia y prestaciones de los generadores

Una vez que se conoce la eficiencia reducida en cada punto del TE se puede calcular la eficiencia total del sistema. Para ello es necesario calcular primero la eficiencia integral del TE y posteriormente la eficiencia de los dos TEs en paralelo. Para un proceso de conversión de energía, la eficiencia se define como:

$$\eta = \frac{W}{Q} \quad (3.41)$$

donde W es el trabajo obtenido o consumido por el proceso.

Eficiencia de un termoelemento

Un generador termoeléctrico está compuesto en general por un elemento tipo-n y otro tipo-p, conectados térmicamente en paralelo y eléctricamente en serie. A menudo es más sencillo comparar la eficiencia de TEs individuales en lugar de parejas n-p, sobre todo a la hora de seleccionar los materiales.

La eficiencia de dos procesos en serie se calcula con la siguiente expresión:

$$\eta_s = \frac{W_1 + W_2}{Q_1} \quad (3.42)$$

Teniendo en cuenta que para estos dos procesos en serie el calor que abandona el sistema 1 es el que entra en el sistema 2, $Q_2 = Q_1 - W_1$, e introduciendo esta expresión en la Ec. (3.42) se obtiene la ley de eficiencias en serie:

$$1 - \eta_s = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \quad (3.43)$$

que para muchos procesos en serie se convierte en:

$$1 - \eta_s = \prod_i (1 - \eta_i) \quad (3.44)$$

La eficiencia total del TE se puede considerar como la eficiencia en serie de los diferenciales de TE, cada uno con una η_c (ver Ec. (3.17)). Por lo tanto, tomando logaritmos a ambos lados de la Ec. (3.44), cambiando el productorio por una integral y operando se obtiene la expresión de la eficiencia del TE:

$$\eta_{TE} = 1 - \exp \left[- \int \eta_c \right] \quad (3.45)$$

que expresada en función de la eficiencia reducida y utilizando T como variable de integración queda como:

$$\eta_{TE} = 1 - \exp \left[- \int_{T_c}^{T_h} \frac{\eta_r}{T} dT \right] \quad (3.46)$$

Para poder resolver la integral de la Ec. (3.45) es conveniente expresarla en función del potencial termoelectrico. Expresando η_c en función de P y q obtenidas en las Ecs. (3.40) y (3.38) se obtiene:

$$\int_{T_c}^{T_h} \frac{P}{q} dx = \int_{T_c}^{T_h} \frac{\nabla \Phi}{\Phi} dx = \int_{T_c}^{T_h} \frac{d\Phi}{\Phi} = \int_{T_c}^{T_h} d \log \Phi = \log \left(\frac{\Phi_h}{\Phi_c} \right) \quad (3.47)$$

donde Φ_h y Φ_c son los potenciales termoelectricos evaluados en los focos caliente y frío respectivamente. Esta expresión permite escribir la eficiencia del TE de forma muy simple:

$$\eta_{TE} = 1 - \frac{\Phi_c}{\Phi_h} = \frac{\Delta \Phi}{\Phi_h} \quad (3.48)$$

que, expresada en función de u y T queda como:

$$\boxed{\eta_{TE} = 1 - \frac{\alpha_c T_c + \frac{1}{u_c}}{\alpha_h T_h + \frac{1}{u_h}}} \quad (3.49)$$

Para encontrar la eficiencia máxima del TE es necesario encontrar la u inicial que maximiza la Ec. (3.49) para el rango entre T_h y T_c . Una vez que se ha establecido esta u

inicial, el campo de $u(T)$ a lo largo del TE viene definido por la solución de la Ec. (3.30).

Eficiencia de un termopar

Como se ha comentado, un termopar de un generador termoeléctrico consiste en dos TEs. Al estar conectados térmicamente en paralelo, la eficiencia de conversión de energía del termopar no será la suma de las eficiencias de cada uno por separado, sino que sigue la siguiente expresión:

$$\eta_p = \frac{W_1 + W_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{\eta_1 Q_1 + \eta_2 Q_2}{Q_1 + Q_2} \quad (3.50)$$

La eficiencia η_p se puede expresar en función del potencial termoeléctrico, y dado que en el TE tipo-n la corriente fluye en el sentido contrario al del tipo-p ($I_n = -I_p$), se obtiene la expresión:

$$\eta_{TP} = \frac{\Delta\Phi_p - \Delta\Phi_n}{\Phi_p - \Phi_n} \quad (3.51)$$

que en función de u y T toma la forma:

$$\eta_{TP} = 1 - \frac{\alpha_{pc} T_c + \frac{1}{u_{pc}} - \alpha_{nc} T_c - \frac{1}{u_{nc}}}{\alpha_{pc} T_h + \frac{1}{u_{ph}} - \alpha_{nh} T_h - \frac{1}{u_{nh}}} \quad (3.52)$$

donde los subíndices n , p , c y h indican elemento tipo-n, tipo-p, foco frío y foco caliente respectivamente. Obtener el máximo de la Ec. (3.52) requiere optimizar las condiciones iniciales tanto para el TE tipo-p como el tipo-n, como por ejemplo u_{ph} y u_{nh} .

Prestaciones de los generadores

En esta sección se muestran las expresiones analíticas que definen las prestaciones de los generadores termoeléctricos, como el voltaje, la intensidad y la potencia, teniendo en cuenta las hipótesis asumidas para el desarrollo analítico. Además, también se presentan las expresiones de las propiedades extensivas del generador, como l o A (ver Figura 3.2), que permiten optimizar su eficiencia.

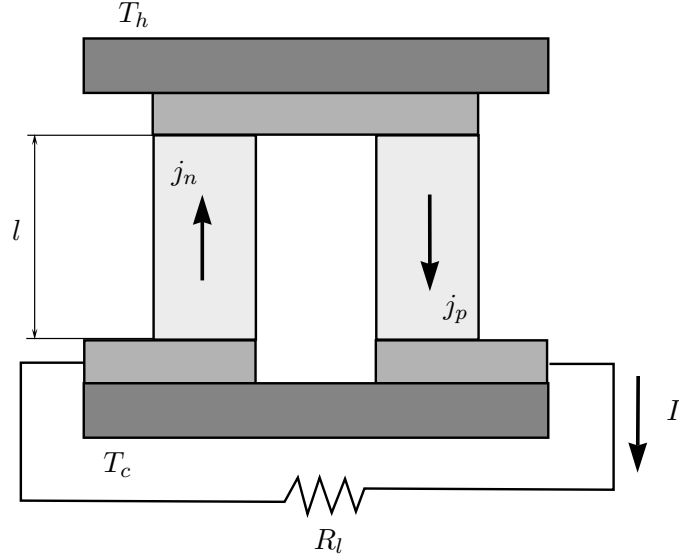


Figura 3.2: Esquema de funcionamiento de un termopar.

Partiendo de la primera Ec. (3.40) se obtiene el voltaje de salida de un TE:

$$V = \Delta\Phi \quad (3.53)$$

En un termopar, al estar los TEs conectados eléctricamente en serie, el voltaje de salida será la suma del voltaje producido en cada elemento:

$$V = \Delta\Phi_p - \Delta\Phi_n \quad (3.54)$$

Por otro lado, partiendo de la definición de u (Ec. (3.27)) e integrando a lo largo del TE, si se asume que el área transversal es constante se obtiene la expresión de la densidad de corriente:

$$j = \frac{1}{l} \int_{T_c}^{T_h} \kappa u \, dT \quad (3.55)$$

En generadores termoeléctricos reales, las áreas transversales de los TEs no suelen ser iguales si, para mejorar el funcionamiento, los materiales son diferentes. Asumiendo que los dos TEs tienen la misma longitud, el ratio de áreas transversales se puede calcular igualando las corrientes de cada uno de ellos teniendo en cuenta que tienen signo contrario:

$$I = j_p A_p = -j_n A_n \quad (3.56)$$

Combinando esta ecuación con la Ec. (3.55) se obtiene:

$$\frac{A_p}{A_n} = \frac{-j_n}{j_p} = \frac{-\int_{T_c}^{T_h} u_n \kappa_n \, dT}{\int_{T_c}^{T_h} u_p \kappa_p \, dT} \quad (3.57)$$

siendo el ratio de áreas óptimo el obtenido de sustituir en la Ec. (3.57) los valores más eficientes de u_n y u_p (ver Ec. (3.64)).

La intensidad total I se puede expresar en función del ratio entre el área transversal total A_t , definida como la suma de las áreas transversales de cada TE, $A_t = A_p + A_n$, y la longitud de los TEs:

$$I = \frac{A_t}{l} \frac{- \int_{T_c}^{T_h} u_p \kappa_p dT - \int_{T_c}^{T_h} u_n \kappa_n dT}{\int_{T_c}^{T_h} u_p \kappa_p dT - \int_{T_c}^{T_h} u_n \kappa_n dT} \quad (3.58)$$

La resistencia de la carga R_l normalmente se utiliza para ajustar la corriente y, para una u dada, se calcula como:

$$R_l = \frac{\Delta\Phi_p - \Delta\Phi_n}{I} \quad (3.59)$$

La intensidad puede utilizarse para hallar el flujo de calor total y la potencia producida por el termopar. El flujo de calor total $Q_t = q_t A_t$ es la suma del flujo de calor de cada TE, obteniéndose la expresión:

$$Q_t = I (\Phi_p - \Phi_n) \quad (3.60)$$

Finalmente, la potencia total generada por el termopar es simplemente:

$$W = I V = I (\Delta\Phi_p - \Delta\Phi_n) \quad (3.61)$$

3.5. Estudio paramétrico de la eficiencia y las prestaciones de los generadores

En esta sección se realiza un estudio paramétrico de la eficiencia y las prestaciones de los generadores termoeléctricos fijando T_c y variando T_h , así como l , con el fin de encontrar el régimen óptimo de operación. El material utilizado para realizar los cálculos es *Skutterudite* tipo-p, cuyas propiedades se encuentran en la Tabla 5.1. Se estudiarán dos casos: propiedades termoeléctricas constantes y variables.

3.5.1. Termoelemento con propiedades constantes

Cuando las propiedades termoeléctricas α , κ , ρ , y por tanto la figura de mérito Z , son constantes con respecto a T , se pueden calcular analíticamente las prestaciones de un generador operando en régimen de máxima eficiencia. Usando el método de variables separables, la solución de la Ec. (3.30) en este caso es:

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{u_c^2} - 2(T - T_c) \kappa \rho \quad (3.62)$$

donde $u_c = u(T_c)$ es usada como la condición inicial, aunque no sea necesariamente la más eficiente.

Con $T = T_h$ en la Ec. (3.62), la eficiencia puede maximizarse con respecto a la condición inicial u para encontrar la distribución $u(T)$ más eficiente:

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{s(T_{av})^2} + 2(T_{av} - T) \kappa \rho + \left(\frac{\Delta T}{2} \kappa \rho s(T_{av}) \right)^2 \quad (3.63)$$

donde $T_{av} = \frac{T_h + T_c}{2}$ es la temperatura promedio y $\Delta T = T_h - T_c$. Nótese que cuando α , κ , ρ son constantes con T , Z también lo es, pero sin embargo s no lo es (ver Ec. (3.35)). Evaluando la Ec. (3.63) para u_h y u_c se obtiene:

$$\frac{1}{u_h} = \frac{1}{s(T_{av})} - \frac{\Delta T}{2} \kappa \rho s(T_{av}); \quad \frac{1}{u_c} = \frac{1}{s(T_{av})} + \frac{\Delta T}{2} \kappa \rho s(T_{av}) \quad (3.64)$$

Una vez que se han impuesto las corrientes reducidas u_h y u_c óptimas, la eficiencia resultante toma la siguiente expresión:

$$\boxed{\eta_{mx} = \frac{\Delta T}{T_h} \frac{\sqrt{1 + ZT_{av}} - 1}{\sqrt{1 + ZT_{av}} + \frac{T_c}{T_h}}} \quad (3.65)$$

Para realizar cálculos relacionados se impone una $T_c = 3$ K a fin de simular las condiciones en el espacio exterior. Una vez fijada T_c , se realiza un análisis paramétrico variando T_h entre 3 y 800 K con el objetivo de determinar qué T_h proporciona la eficiencia máxima. Se realiza el análisis hasta estos 800 K dado que es el último valor para el que se dispone de las propiedades del material. La eficiencia obtenida se muestra en la Figura 3.3.

La máxima eficiencia se consigue para $T_h = 800$ K ya que cuanto mayor es la diferencia de T entre los dos focos, mayor es η_{et} , que es el término que más importancia tiene en cuanto a la limitación de la eficiencia máxima. Por lo tanto, esta será la temperatura con la que se calcularán las prestaciones del TE.

En primer lugar, una vez definidas las condiciones de contorno se calcula la distribución de la corriente reducida u y del factor de compatibilidad s a lo largo del TE, utilizando las Ecs. (3.63) y (3.35). Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3.4.

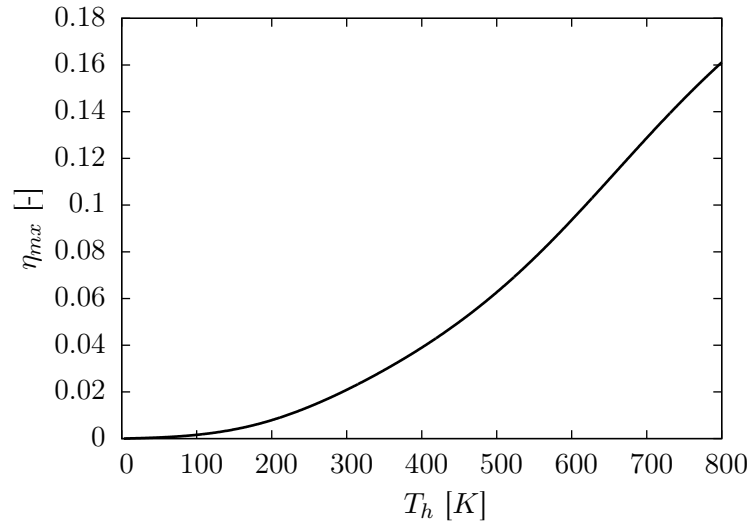


Figura 3.3: Variación de la eficiencia del termoelemento con la temperatura del foco caliente.

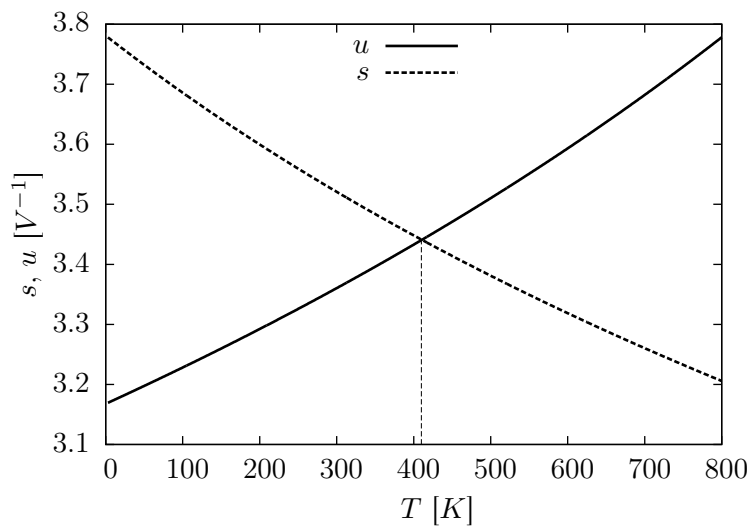


Figura 3.4: Variación de corriente reducida u comparada con el factor de compatibilidad s en función de temperatura. Termoelemento con propiedades constantes.

Como se explicó anteriormente, la eficiencia es máxima en un TE cuando la corriente reducida es igual al factor de compatibilidad. En la Figura 3.4 se puede observar que $u = s$ para 401 K, que coincide con T_{av} en el TE y para la cual han sido calculadas las propiedades termoeléctricas del material.

Una vez que se conoce la distribución de u en el TE se pueden calcular sus prestaciones. A partir de las Ecs. (3.37) y (3.53) se obtienen los potenciales termoeléctricos en los

extremos del TE y el voltaje producido, y los resultados se muestran en la Tabla 3.1.

Φ_h	Φ_c	V
0,3766	0,3159	0,0607

Tabla 3.1: Potenciales termoelectricos en los extremos del termoelemento y voltaje producido con propiedades constantes.

Conocido V se pueden calcular la densidad de corriente j , el flujo de calor por unidad de superficie q y la densidad de potencia P a partir de las Ecs. (3.55), (3.38) y (3.40) respectivamente. Se realiza un estudio paramétrico variando la longitud del TE con el fin de determinar su valor óptimo y se comparan los resultados analíticos y los obtenidos con FEAP, [12]. Los resultados se muestran en la Figura 3.5.

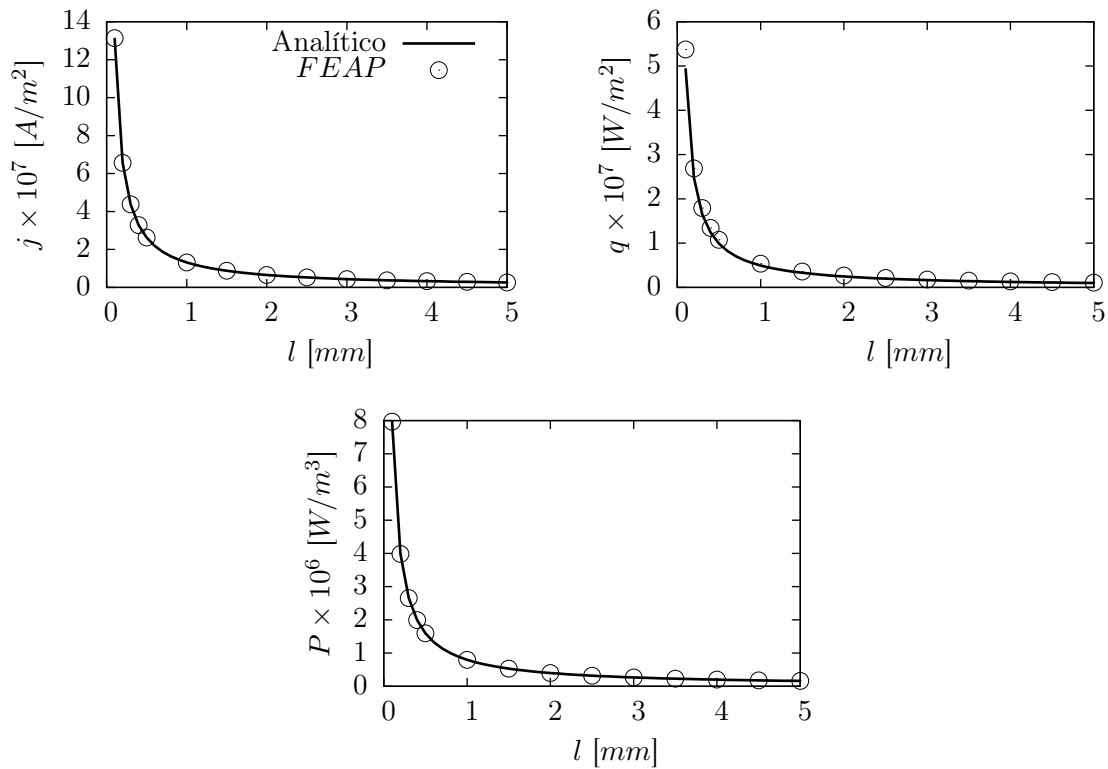


Figura 3.5: Comparación entre los resultados analíticos y numéricos de las prestaciones del termoelemento con propiedades constantes, para diferentes longitudes de termoelemento.

Se observa que los resultados obtenidos analítica y numéricamente coinciden, por lo que se verifica la utilidad de la teoría desarrollada para realizar un análisis preliminar (solo para el TE) de las prestaciones de los generadores termoelectricos. Por otro lado, manteniendo las condiciones de máxima eficiencia, la potencia producida por el generador es mayor cuanto más corto es el TE y por lo tanto es interesante que estos sean pequeños,

aunque debiendo prestarse atención a las tensiones térmicas que se producen y que podrían llevar al fallo mecánico del dispositivo.

En la Figura 3.6 se muestran las distribuciones de j y q obtenidas con FEAP a lo largo del TE para dos valores de l distintos: $l = 0,25$ mm y $l = 2$ mm. Se puede observar que las distribuciones de j son constantes en ambos casos, mientras que q varía de forma lineal al ser el flujo de calor por *Fourier* mucho mayor que el calentamiento producido por el efecto *Joule*. En cuanto a los valores obtenidos, si se comparan con los mostrados en la Figura 3.5 se puede observar que coinciden perfectamente.

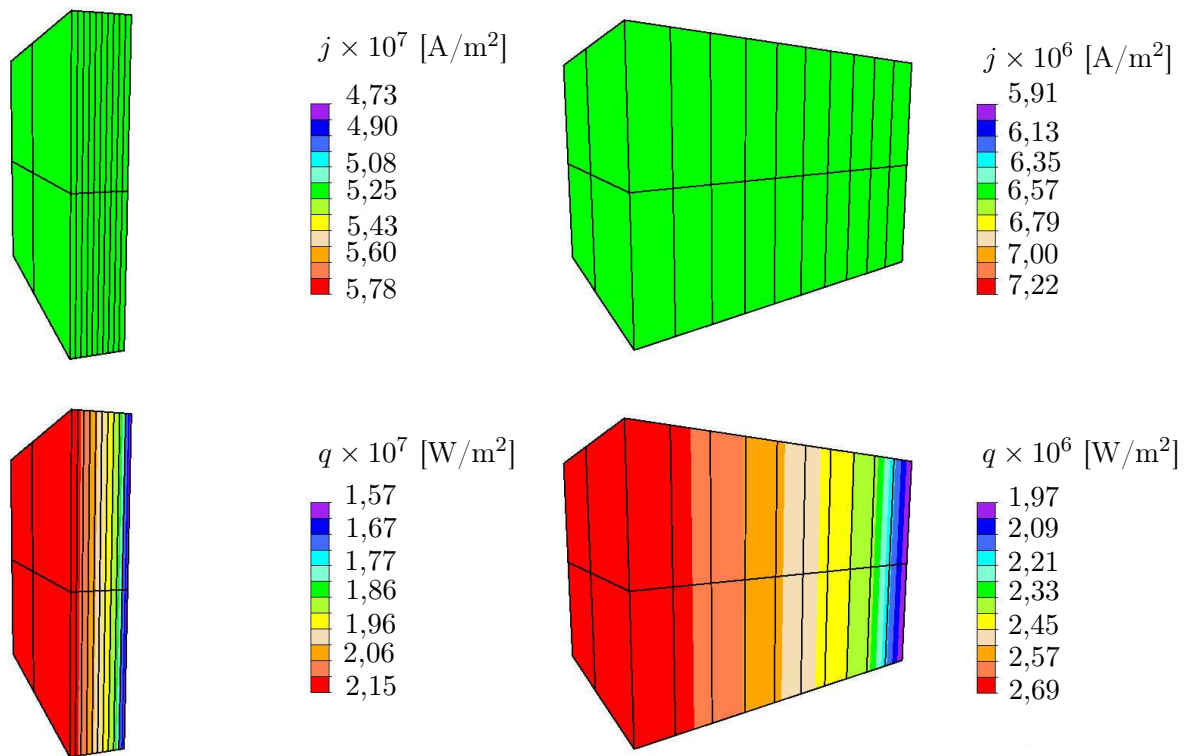


Figura 3.6: Distribuciones de j y q a lo largo del termoelemento con propiedades constantes para dos valores de l . Izquierda: $l = 0,25$ mm, derecha: $l = 2$ mm.

3.5.2. Termoelemento con propiedades dependientes de la temperatura

Los métodos utilizados para calcular de forma exacta la eficiencia de los generadores son complejos, siendo necesario normalmente el empleo de programas de elementos finitos. Sin embargo, utilizando las variables reducidas introducidas anteriormente, el cálculo y la optimización de la eficiencia y las prestaciones de los generadores se pueden realizar con una simple hoja de cálculo o un sencillo algoritmo en *Matlab*.

Las propiedades termoeléctricas α , κ , ρ son en realidad siempre función de T . En

principio solo es necesario conocer el salto de temperaturas entre los extremos del TE y no su longitud, que será calculada posteriormente en función de las especificaciones de diseño. Igual que en el caso con propiedades constantes, se calcula una $T_h = 800$ K óptima. En primer lugar es necesario conocer la distribución de u en el TE. Para realizar el cálculo, se discretiza el dominio l del TE en n puntos y se denomina T_n a la temperatura correspondiente en cada uno; la densidad de corriente reducida en cada uno de estos puntos es u_n . La Ec. (3.30) puede ser ahora discretizada combinando la solución sin efecto *Thomson* $d\alpha/dT = 0$ con la solución de resistencia nula $\rho \kappa = 0$, obteniéndose:

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} \sqrt{1 - 2 u_{n-1}^2 \rho_{av} \kappa_{av} \Delta T_n - T_{av} \Delta \alpha} \quad (3.66)$$

donde $\Delta \alpha = \alpha(T_n) - \alpha(T_{n-1})$ y $\rho_{av} \kappa_{av}$ es el valor medio de $\rho \kappa$ entre T_n y T_{n-1} . La diferencia de estos dos valores de temperatura es ΔT_n .

Utilizando la Ec. (3.66) se puede calcular $u(T)$ a partir de una condición inicial, siendo u_h la que se ha elegido en esta sección. Variando el valor de la condición inicial u_h y calculando la eficiencia con la Ec. (3.49) se puede obtener la eficiencia máxima del TE y la u_h que la hace posible. El empleo de la Ec. (3.49) es equivalente a utilizar la Ec. (3.65) debido a que los parámetros de entrada son los que proporcionan la eficiencia máxima. En la Figura 3.7 se muestra como varía la esta η_{mx} con la condición inicial u_h .

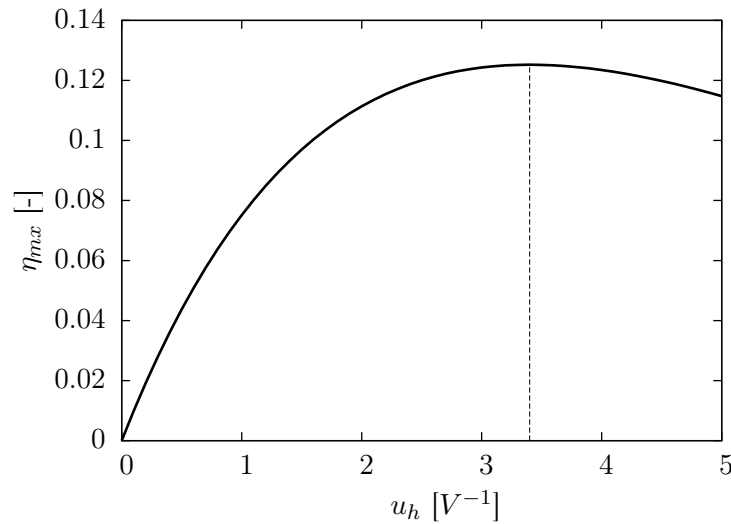


Figura 3.7: Variación de la eficiencia máxima del termoelemento con la condición inicial u_h .

Se observa que la eficiencia alcanza su valor máximo cuando $u_h = 3,4 V^{-1}$, por lo tanto, este será el valor otorgado a la condición inicial para realizar el resto de cálculos. A partir de la Ec. (3.66) se calcula la distribución de $u(T)$ y se compara con la del factor de compatibilidad s , mostrándose los resultados en la Figura 3.8. El cálculo de s es discretizado y similar al de u_n pero utilizando la Ec. (3.35).

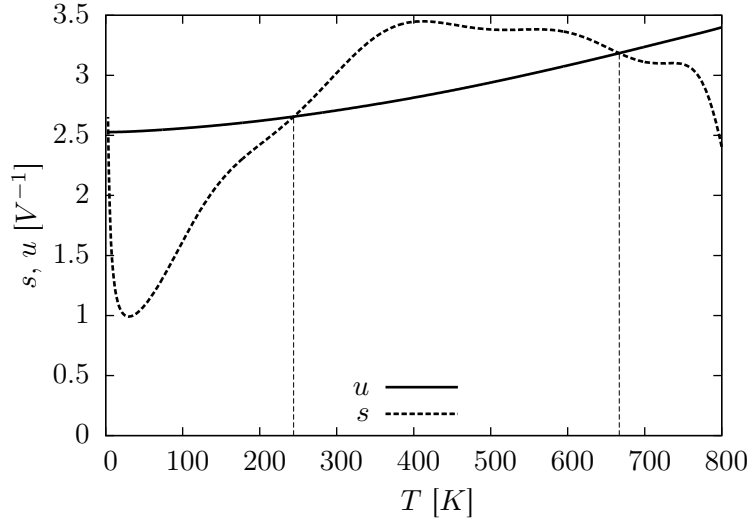


Figura 3.8: Variación de la corriente reducida u y el factor de compatibilidad s a lo largo del termoelemento.

Se puede observar que, al contrario que en el caso con propiedades constantes, los valores de u y de s son muy diferentes en casi todos los puntos del TE. Esto produce una menor η_r que lleva a una menor total a pesar de que la η_{ct} sea la misma en los dos casos. Por ello, con propiedades variables se obtiene una eficiencia máxima del 12,52 % frente al 16,11 % obtenido con propiedades constantes. Esta reducción se debe a que al ser las propiedades del material dependientes de T no se pueden imponer unas condiciones de contorno que permitan que todo el material trabaje en condiciones óptimas.

Nótese que la función s es altamente no lineal debido a la irregularidad de κ con T , como se verá en el Capítulo 5.

Una vez conocidas las condiciones de contorno óptimas $T_h = 800$ K, $T_c = 3$ K (los extremos del rango estudiado) y la distribución de u se procede a calcular las prestaciones del generador. Hay que tener en cuenta que para otros materiales las C.C. óptimas podrían no ser los extremos del rango. El potencial termoelectrico Φ en cada punto se calcula a partir de la Ec. (3.37), y el voltaje producido por el generador será la diferencia de potencial termoelectrico en ambos extremos del TE. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 3.2.

Φ_h	Φ_c	V
0,4524	0,3957	0,0567

Tabla 3.2: Potenciales termoelectricos en los extremos del termoelemento y voltaje producido con propiedades variables.

Por otro lado, se puede calcular la densidad de corriente en función de la longitud del

TE a partir de la Ec. (3.55), en la que discretizando el integrando, se tiene:

$$(u \kappa dT)_n = \frac{u_n \kappa_n + u_{n-1} \kappa_{n-1}}{2} (T_{n-1} - T_n) \quad (3.67)$$

Finalmente, el flujo de calor y la potencia producida se calculan de nuevo a partir de las Ecs. (3.38) y (3.40). De nuevo se realiza un análisis paramétrico variando la longitud del TE y en la Figura 3.9 se comparan los resultados analíticos y los obtenidos con FEAP.

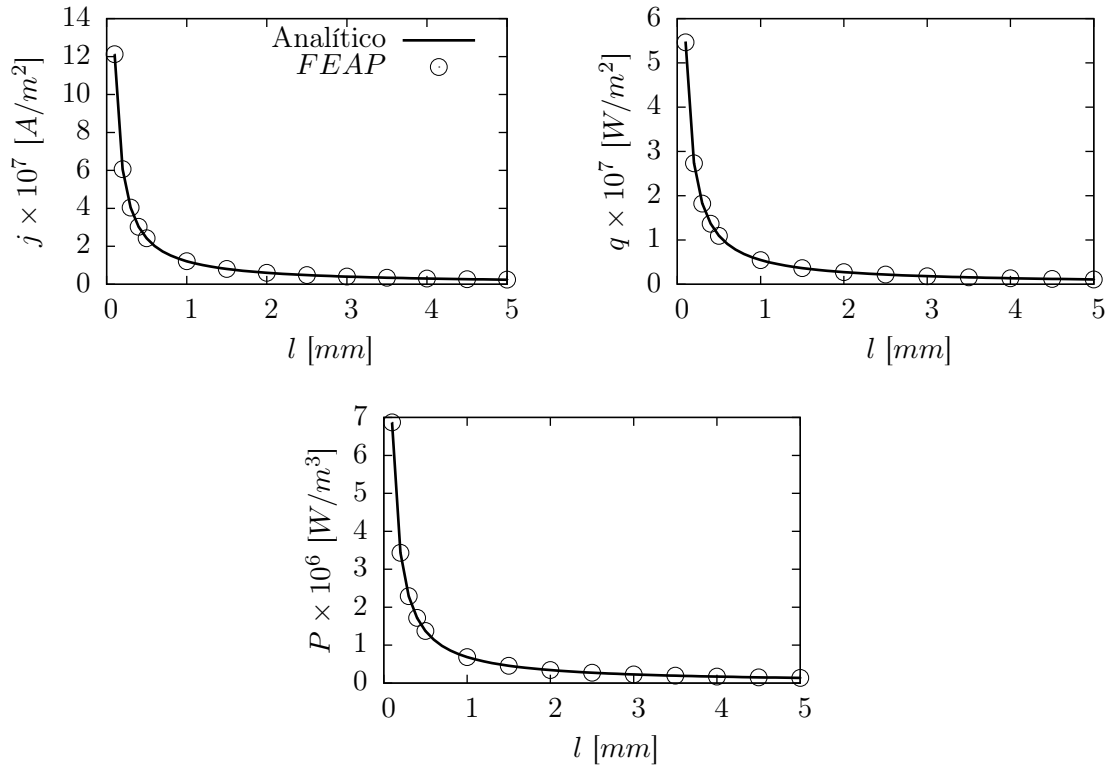


Figura 3.9: Comparación entre los resultados analíticos y numéricos de las prestaciones del termoelemento con propiedades variables.

En esta figura se puede observar que, una vez más, los resultados obtenidos analíticamente y con FEAP coinciden perfectamente, verificando la validez del método analítico para calcular las prestaciones y la eficiencia de los generadores cuando las propiedades del material son dependientes de T . Hay que destacar que en este caso, j y P son algo menores que con propiedades constantes (Figura 3.5), mientras que q es igual. Esto se debe a la gran diferencia entre u y s a lo largo del termoelemento y explica la disminución de su eficiencia. Nótese que cuanto más corto es el TE mayores son la densidad de corriente y la potencia producidas, siguiéndose la misma tendencia que en el caso con propiedades constantes. Por lo tanto, se elegirá la longitud de los TEs en función de las especificaciones de diseño: en un generador termoelectrico real, la eficiencia no se mantiene constante con

l y es necesario alcanzar un compromiso entre potencia y eficiencia.

En la Figura 3.10 se muestran de nuevo las distribuciones de j y q obtenidas con FEAP a lo largo del TE para dos valores de l distintos: $l = 0,25$ mm y $l = 2$ mm. Se puede observar que las distribuciones de j son constantes en la mayor parte del TE en ambos casos, sin embargo, presentan un gradiente muy pronunciado en la zona próxima a T_c . Esto se debe a los acusados gradientes de κ que se producen en esta región (ver Figura 5.4) y que generan corriente eléctrica. Por otro lado, q varía de forma prácticamente lineal al ser el flujo de calor por *Fourier* mucho mayor que el calentamiento producido por el efecto *Joule*. En cuanto a los valores obtenidos, si se comparan con los mostrados en la Figura 3.9 se puede observar que también coinciden a la perfección.

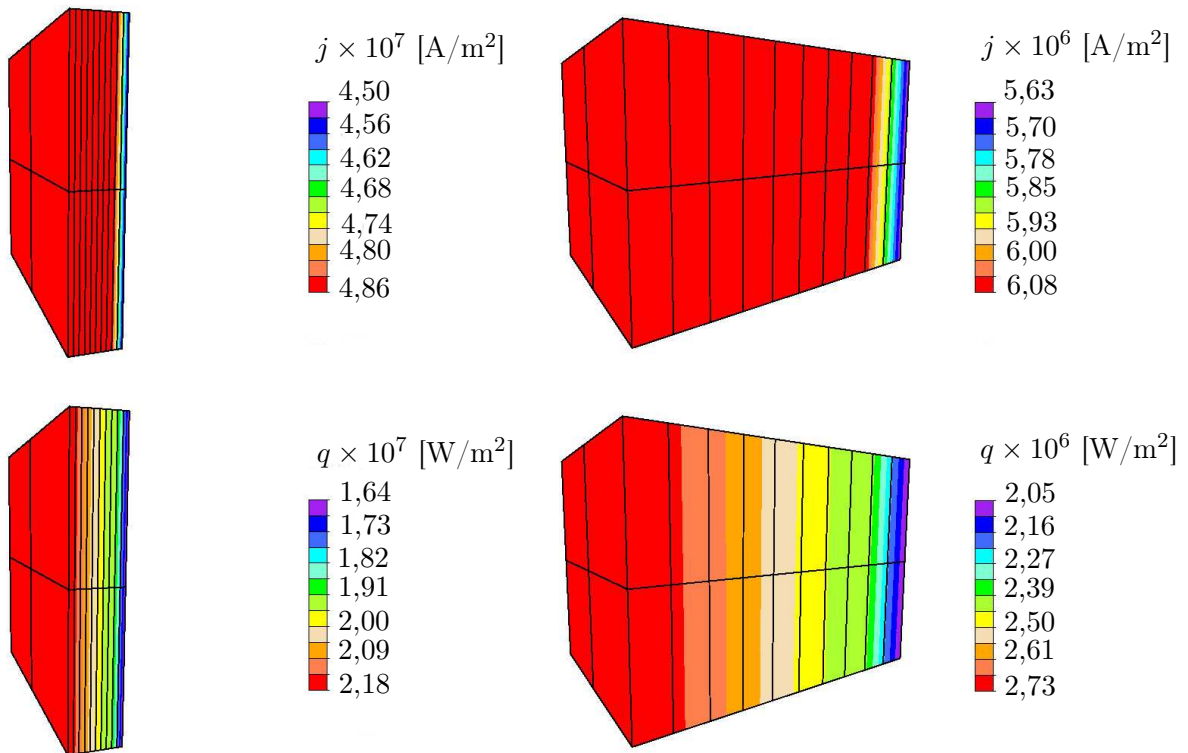


Figura 3.10: Distribuciones de j y q a lo largo del termoelemento con propiedades variables para dos valores de l . Izquierda: $l = 0,25$ mm, derecha: $l = 2$ mm.

Finalmente, se repite el cálculo de la eficiencia variando también T_c con el fin de analizar su efecto. Los resultados se muestran en la Figura 3.11. Se observa que para $T_h < T_c$ la eficiencia es nula debido a que el TE no genera energía. Además, para gradientes de temperatura muy elevados la pendiente de la superficie es menor debido a que q aumenta más que j , sin embargo, η_{mx} sigue aumentando porque η_{ct} domina frente a η_r .

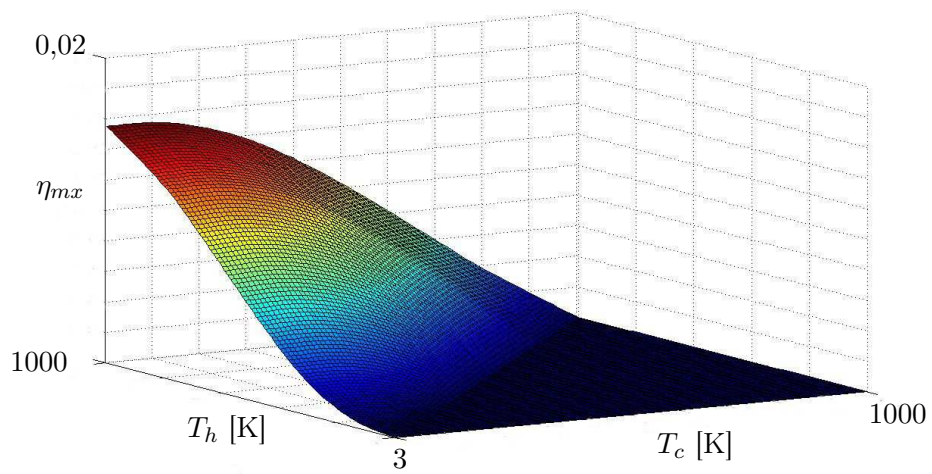


Figura 3.11: Variación de la eficiencia con T_c y T_h , propiedades variables.

4

Validaciones

Los cálculos del presente proyecto se van a realizar con el programa de elementos finitos FEAP, desarrollado en Fortran por Robert L. Taylor de la Universidad de Berkeley, California [12]. Para su realización es necesario utilizar elementos programados por el usuario ya que en la biblioteca de este programa no existe ninguno capaz de simular los fenómenos termoeléctricos.

El *elmt02.f* tiene introducidas todas las matrices y ecuaciones necesarias para los cálculos de los fenómenos termoeléctricos totalmente acoplados. También se incluyen una serie de parámetros que aproximan el problema a la realidad, como distribuciones polinómicas dependientes de la temperatura de los coeficientes de *Seebeck* α , resistividad eléctrica ρ y conductividad térmica κ , además de los coeficientes termogalvanomagnéticos de *Hall* N , *Nernst* R y *Ettingshausen* M . Hay que destacar que el elemento original ha sido modificado para incluir una distribución de κ que siga un polinomio de 9º grado debido a las necesidades del estudio, así como unas distribuciones de R y N ajustadas a polinomios de 7º grado.

El *elmt05.f* es un elemento interfaz que permite introducir flujos eléctricos, magnéticos y de calor, así como simular condiciones de frontera de convección y radiación.

El hecho de utilizar elementos de usuario implica la verificación de que estos han sido correctamente programados. Por ello, en este capítulo se resuelven algunos problemas con solución analítica para posteriormente compararla con la proporcionada por FEAP.

4.1. Validaciones del transitorio termoeléctrico

Las ecuaciones que gobiernan el problema transitorio termoeléctrico son:

$$\text{Equilibrio} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \\ \rho_m c_p \dot{T} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\text{Constitutivas} \quad \begin{cases} \mathbf{j} = -\gamma \nabla V - \alpha \gamma \nabla T \\ \mathbf{q} = -\kappa \nabla T + \alpha T \mathbf{j} \end{cases} \quad (4.2)$$

Al tratarse de un problema acoplado, la forma fuerte será un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. En primer lugar se resuelve el problema eléctrico. Sustituyendo la primera de Ec. (4.2) en la primera de Ec. (4.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \nabla(-\gamma \nabla V - \alpha \gamma \nabla T) &= 0 \\
 \nabla \gamma \nabla V + \gamma \nabla^2 V &= -\gamma \nabla \alpha \nabla T - \alpha \nabla \gamma \nabla T - \alpha \gamma \nabla^2 T \\
 \frac{\partial \gamma}{\partial T} \nabla T \nabla V + \gamma \nabla^2 V &= -\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial T} (\nabla T)^2 - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial T} (\nabla T)^2 - \alpha \gamma \nabla^2 T
 \end{aligned}$$

Finalmente, agrupando términos se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} \nabla T \nabla V + \gamma \nabla^2 V = -\left(\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial T}\right) (\nabla T)^2 - \alpha \gamma \nabla^2 T \quad (4.3)$$

Considerando las propiedades del material constantes se tiene:

$$\nabla^2 V = -\alpha \nabla^2 T \quad (4.4)$$

que es una ecuación de Poisson donde las fuentes son la energía térmica convertida en energía eléctrica mediante el efecto *Seebeck*. Si $\alpha = 0$ se recupera la ecuación de Laplace.

A continuación se obtiene la ecuación que domina los fenómenos térmicos. Sustituyendo $\mathbf{E} = -\nabla V$ y \mathbf{j} de la Ec. (4.2) e introduciéndolo en la segunda Ec. (4.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \rho_m c_p \dot{T} &= -\nabla(-\kappa \nabla T + \alpha T \mathbf{j}) - \mathbf{j} \nabla V \\
 &= \kappa \nabla^2 T + \nabla \kappa \nabla T - T \nabla \alpha \mathbf{j} + \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}{\gamma} \\
 &= \kappa \nabla^2 T + \frac{\partial \kappa}{\partial T} (\nabla T)^2 - T \frac{\partial \alpha}{\partial T} \nabla T \mathbf{j} + \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}{\gamma} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Las Ecs. (4.3) y (4.5) que dominan el problema termoelectrico son ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes no constantes cuya solución analítica exacta es difícil de obtener, y por lo tanto, solo pueden ser resueltas de forma numérica. Por ello, se plantean una serie de hipótesis para cada uno de los casos estudiados a fin de poder obtener soluciones analíticas. Los diferentes casos a estudiar y sus hipótesis se muestran en la Tabla 4.1.

4.1.1. Malla y material

Para realizar las validaciones del transitorio termoelectrico y obtener la solución con FEAP se ha construido una malla en forma de prisma rectangular compuesta por 20 elementos de 8 nodos, simulando la geometría de un TE (ver Figura 4.1). Sus dimensiones son las resultantes del estudio paramétrico realizado en la Sección 3.5, que proporcionan la mejor relación posible entre eficiencia y potencia obtenida, siendo $L_x = 1,5$ mm y $L_y = L_z = 1,4$ mm.

Caso	Condiciones	Efectos
I	$j = 0$ $\kappa, \gamma, \alpha = \text{cte}$	Lineal Conducción de calor Efecto <i>Seebeck</i>
II	$j \neq 0$ $\kappa, \gamma, \alpha = \text{cte}$	No lineal Conducción de calor Efecto <i>Seebeck</i> Efecto <i>Joule</i>
III	$j \neq 0$ $\kappa, \gamma = \text{cte}$ $\alpha(T)$	No lineal Conducción de calor Efecto <i>Seebeck</i> Efecto <i>Joule</i> Efecto <i>Thomson</i> parcial

Tabla 4.1: Casos a estudiar e hipótesis asumidas.

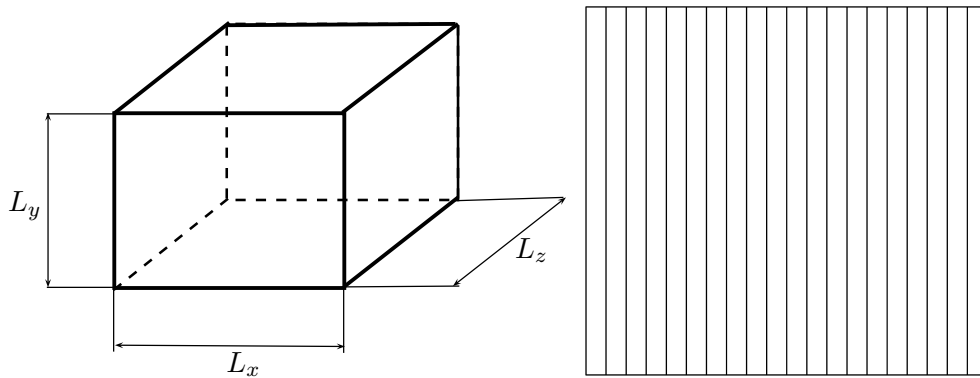


Figura 4.1: Geometría y vista frontal de la malla utilizada para resolver las validaciones termoeléctricas con FEAP.

Por otro lado, se ha escogido *Skutterudite* como material para realizar las validaciones, ya que es el mismo que se utilizará en el análisis del termopar completo además de que sus propiedades termoeléctricas se pueden encontrar en la literatura, las cuales se muestran en la Tabla 5.1. Además de las propiedades que aparecen en esta tabla, es necesario conocer las que determinan la inercia térmica del material para poder resolver problemas transitorios. Estas se muestran en la Tabla 4.2, siendo ρ_m la densidad másica y c_p la capacidad calorífica del material.

ρ_m [Kg/m ³]	c_p [J/K]
6500	225

Tabla 4.2: Propiedades que determinan la inercia térmica del *Skutterudite*.

Se debe destacar que debido a la geometría y las condiciones de contorno, los problemas

que van a ser resueltos pueden considerarse unidimensionales y, por lo tanto, los operadores ∇ y ∇^2 de las Ecs. (4.5) y (4.3) se convierten en $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ respectivamente, simplificando enormemente el problema.

4.1.2. Caso I: Seebeck lineal

El primer problema de validación consiste en el estudio de las variables térmicas y eléctricas en el interior de la geometría sometida a las condiciones de contorno que se muestran en la Figura 4.2, las cuales simulan las condiciones de operación del generador *1-GPHS Small RTG* [16].

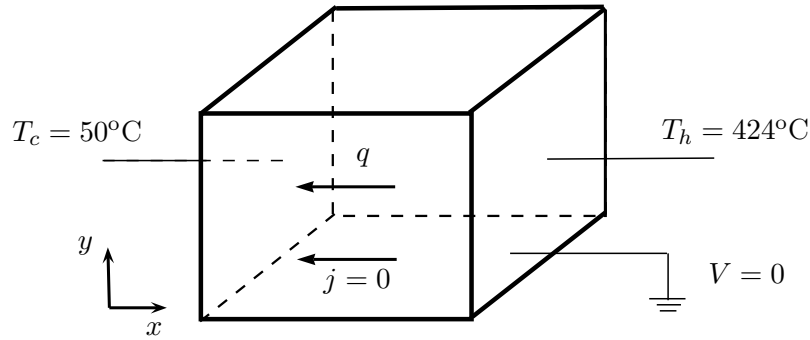


Figura 4.2: Geometría y condiciones de contorno del Caso I.

Las condiciones de contorno fuerzan a anular el flujo eléctrico $j = 0$, por lo que el problema podría interpretarse como un TE trabajando en régimen de generador con el circuito abierto. Imponiendo $j = 0$ y teniendo en cuenta las hipótesis de unidimensionalidad y propiedades del material constantes, evaluadas para la temperatura media $T_{av} = 237$ °C, se obtienen las siguientes expresiones de las Ecs. (4.4) y (4.5):

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho_m c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \end{cases} \quad (4.6)$$

Ahora es necesario estudiar por separado cada una de las ecuaciones que gobiernan el problema.

Ecuación transitoria del calor

La ecuación transitoria del flujo de calor se puede reescribir como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho_m c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} := \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.7)$$

por lo tanto, el problema queda finalmente definido como:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & ; \quad 0 < x < L_x ; \quad t > 0 \\ T(0, t) = T_c & ; \quad T(L_x, t) = T_h \\ T(x, 0) = f(x) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases} \quad (4.8)$$

donde la condición inicial de la tercera ecuación se ha impuesto arbitrariamente. La solución del problema se encuentra descomponiéndola en su parte estacionaria y su parte transitoria (ver la referencia [14]), obteniéndose finalmente para la temperatura la siguiente expresión:

$$T(x, t) = T_c + \frac{(T_h - T_c)}{L_x} x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) S(x) \quad (4.9)$$

$$C_n = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} \left[f(x) - T_c - \frac{(T_h - T_c)}{L_x} x \right] S(x) dx$$

donde:

$$E(t) = \exp \left[-\beta \left(\frac{n \pi}{L_x} \right)^2 t \right] ; \quad S(x) = \sin \left(\frac{n \pi x}{L_x} \right) ; \quad C(x) = \cos \left(\frac{n \pi x}{L_x} \right)$$

Una vez conocida la distribución de temperaturas se puede obtener el flujo de calor a a partir de la ley de *Fourier*, ya que el flujo debido al efecto *Peltier* es nulo porque también lo es la corriente eléctrica.

$$q(x, t) = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = -\kappa \frac{T_h - T_c}{L_x} - \kappa \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) C(x) \frac{n \pi}{L_x} \quad (4.10)$$

Estudio del efecto Seebeck

En el problema a estudiar existe un acoplamiento entre los campos térmicos y eléctricos debido al efecto *Seebeck*, y por lo tanto, se producirá un voltaje debido a la diferencia de temperaturas en el TE. Teniendo en cuenta la condición de contorno del problema $V(L_x, t) = 0$, de la segunda Ec. (4.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= -\alpha \int \frac{\partial T}{\partial x} dx = -\alpha \left[\frac{T_h - T_c}{L_x} x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) S(x) + \text{Cte} \right] \\ V(L_x, t) &= 0 \quad \rightarrow \quad \text{Cte} = T_c - T_h \end{aligned}$$

Sustituyendo la constante en la expresión anterior se obtiene la ecuación que gobierna la distribución de voltajes a lo largo del TE:

$$V(x, t) = -\alpha \left(\frac{T_h - T_c}{L_x} \right) x - \alpha (T_c - T_h) - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) S(x) \quad (4.11)$$

Resultados

En primer lugar se muestran los resultados obtenidos al evaluar las expresiones anteriores y utilizar FEAP en el centro del termoelemento $x = L_x/2$.

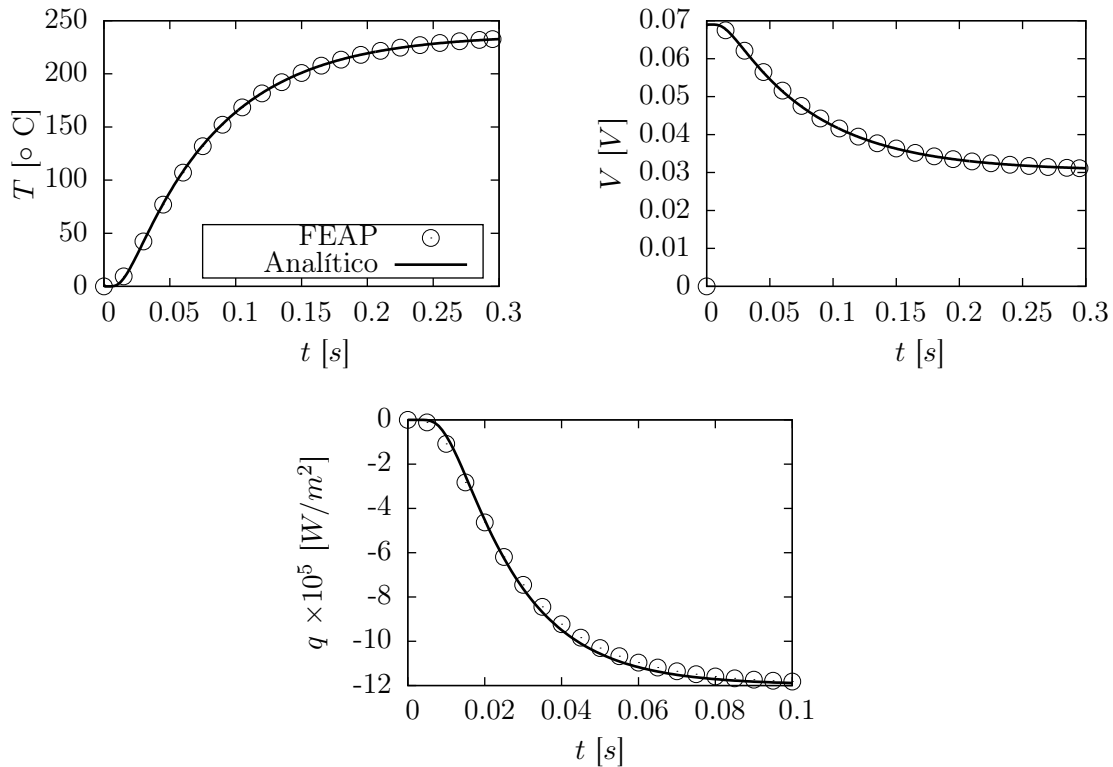


Figura 4.3: Variación de temperatura, voltaje y flujo de calor versus tiempo en el centro del termoelemento $x = L_x/2$ para el Caso I.

Se puede observar que los resultados obtenidos con FEAP se ajustan a la perfección a los obtenidos analíticamente. Además, en el instante inicial, FEAP proporciona un valor nulo de voltaje que no coincide con el obtenido analíticamente. Esto es debido a que en el programa de elementos finitos no se impone una condición inicial para la distribución de voltajes, pudiendo considerarse como una limitación del método de los elementos finitos (MEF).

A continuación se muestran los resultados obtenidos a lo largo de la longitud del TE para dos instantes diferentes de tiempo:

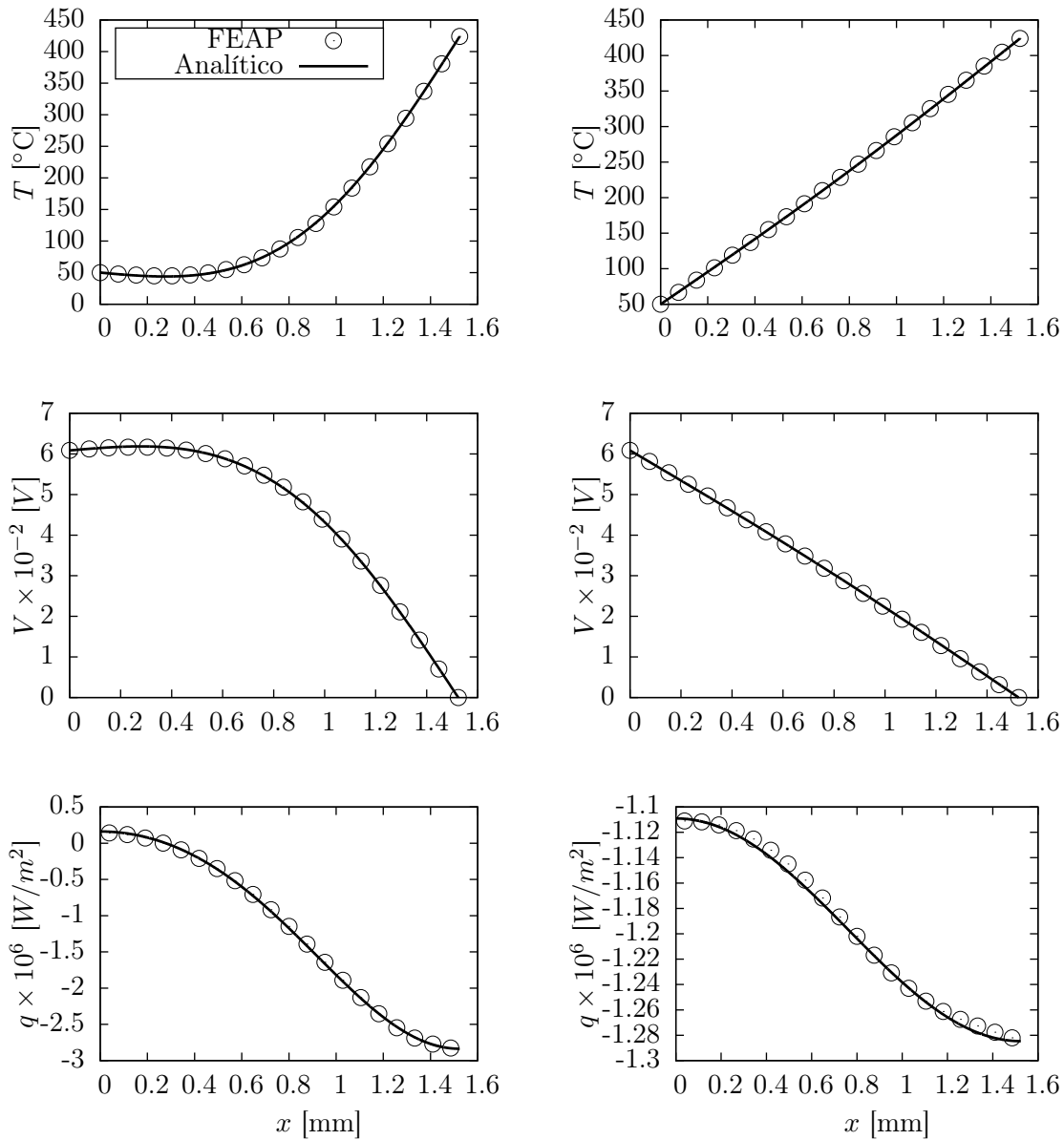


Figura 4.4: Caso I: Distribuciones a lo largo del termoelemento de temperatura, voltaje y flujo de calor. Columna izquierda: $t = 0,05$ s; derecha: $t = 0,25$ s.

En la Figura 4.4 se observa que las distribuciones espaciales obtenidas con FEAP y analíticamente coinciden perfectamente. Nótese que en la primera columna, correspondiente a $t = 0,05$ s, las distribuciones no son nada lineales, debido a que en este instante de tiempo el problema se encuentra al principio del transitorio. Sin embargo, en la segunda columna,

correspondiente a $t = 0,25$ s, casi se ha alcanzado el régimen estacionario y las distribuciones son prácticamente lineales, excepto para $q(x)$. El motivo es que $q(x)$ depende de un factor coseno que toma especial relevancia en el régimen estacionario, y por ello este flujo tiene una forma aproximadamente armónica.

4.1.3. Caso II: Seebeck y Joule, no lineal

El segundo problema de validación consiste en el estudio del mismo TE que en el Caso I pero variando las condiciones de contorno, como se muestra en la Figura 4.5. En este caso, las condiciones de contorno son las temperaturas y los voltajes en ambos extremos del TE, y han sido impuestas según los datos de operación proporcionados en la referencia [16].

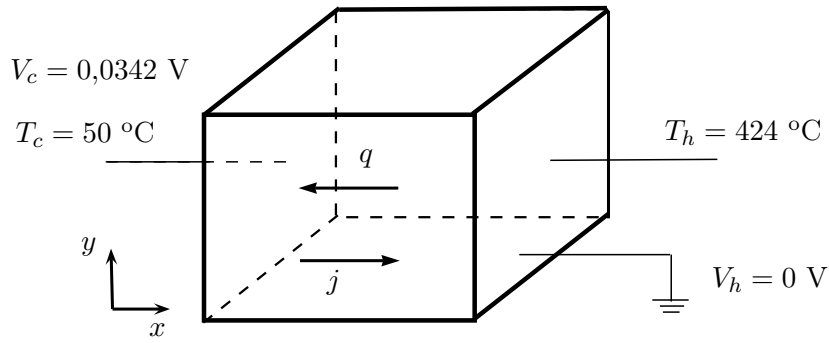


Figura 4.5: Geometría y condiciones de contorno del Caso II.

Partiendo de las Ecs. (4.5) y (4.3) y aceptando las hipótesis de unidimensionalidad y propiedades del material constantes, evaluadas en T_{av} como en el Caso I, se obtienen las siguientes dos ecuaciones que gobiernan este problema:

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{j^2}{\gamma} = \rho_m c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{cases} \quad (4.12)$$

La distribución de voltajes también se puede estudiar a partir de la ecuación constitutiva Ec. (4.2). A continuación se estudian cada una de las ecuaciones por separado, de forma análoga al Caso I.

Ecuación transitoria del calor

La expresión transitoria del calor Ec. (4.5) se puede derivar como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho_m c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{j^2}{\rho_m c_p \gamma} := \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + P_J \quad (4.13)$$

Por lo tanto, el problema queda finalmente definido como:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + P_J & ; \quad 0 < x < L_x ; \quad t > 0 \\ T(0, t) = T_c & ; \quad T(L_x, t) = T_h \\ T(x, 0) = f(x) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases} \quad (4.14)$$

De nuevo, la solución se encuentra dividiendo la solución en su parte estacionaria y transitoria (ver referencia [14]):

$$\begin{cases} T(x, t) = T_e(x) + T_t(x, t) \\ T_e(x) = \left(T_h - T_c + \frac{P_J}{2\beta} L_x^2 \right) \frac{x}{L_x} + T_c - \frac{P_J}{2\beta} x^2 \\ T_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) S(x) \\ C_n = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} [f(x) - T_e(x)] S(x) dx \end{cases} \quad (4.15)$$

Una vez conocida la distribución de temperaturas en el TE se puede obtener la de flujos de calor a partir de la expresión constitutiva segunda Ec. (4.2) en una dimensión. Sustituyendo se obtiene:

$$\begin{aligned} q = & -\frac{\kappa}{L_x} \left(T_h - T_c + \frac{P_J}{2\beta} L_x^2 \right) + \kappa \frac{P_J}{\beta} x - \kappa \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) C(x) \frac{n \pi}{L_x} + \\ & + \alpha j \left[\left(T_h - T_c + \frac{P_J}{2\beta} L_x^2 \right) \frac{x}{L_x} + T_c - \frac{P_J}{2\beta} x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) S(x) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Cálculo del voltaje

Para obtener la distribución de voltajes debida al efecto *Seebeck* se parte de la expresión constitutiva Ec. (4.2):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{j}{\gamma} - \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad \rightarrow \quad V(x, t) = \int \left[-\frac{j}{\gamma} - \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx \quad (4.17)$$

Sustituyendo la derivada de la temperatura respecto a x e integrando se obtiene:

$$V(x, t) = -\frac{j}{\gamma} x - \alpha \left[\left(T_h - T_c + \frac{P_J}{2\beta} L_x^2 \right) \frac{x}{L_x} - \frac{P_J}{2\beta} x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) S(x) \right] + \text{Cte} \quad (4.18)$$

Imponiendo la condición de contorno $V(L_x, t) = 0$ se obtiene la constante:

$$\text{Cte} = \frac{j}{\gamma} L_x + \alpha \left[\left(T_h - T_c + \frac{P_J L_x^2}{2\beta} \right) \frac{P_J}{2\beta} L_x^2 \right] \quad (4.19)$$

Resultados

En primer lugar se mostrarán los resultados obtenidos al aplicar las expresiones anteriores y los proporcionados por FEAP en el centro del termoelemento $x = L_x/2$:

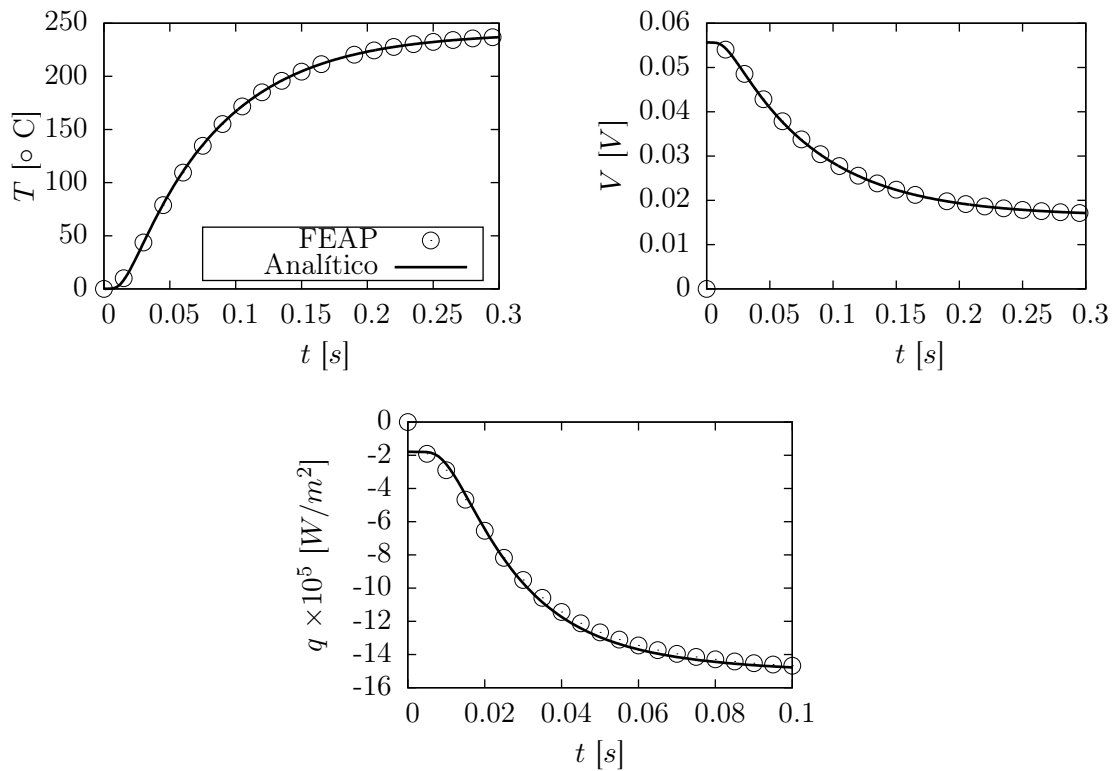


Figura 4.6: Variación de temperatura, voltaje y flujo de calor versus tiempo en el centro del termoelemento $x = L_x/2$ para el Caso II.

De nuevo, se puede observar que los resultados obtenidos con FEAP y analíticamente coinciden perfectamente y que en el instante inicial el programa de elementos finitos otorga valores nulos al voltaje y al flujo de calor. Por otro lado, se aprecia que el módulo del flujo de calor es mayor en este caso que en el Caso I. Esto se debe al calor producido por el

efecto *Joule*, que aparece al existir una corriente eléctrica en el TE.

A continuación se muestran los resultados obtenidos a lo largo de la longitud del TE para dos instantes de tiempo diferentes:

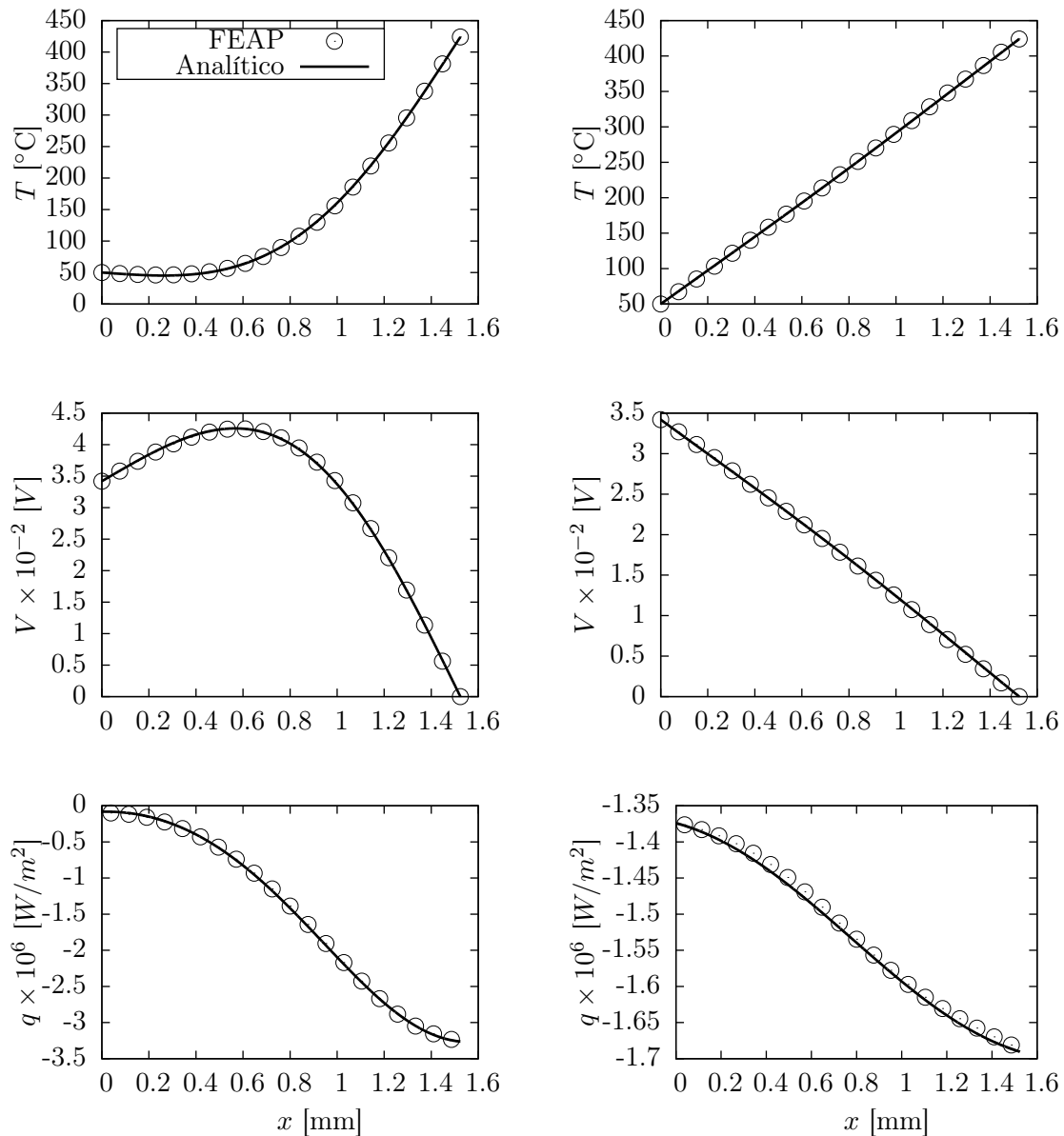


Figura 4.7: Caso II: Distribuciones a lo largo del termoelemento de temperatura, voltaje y flujo de calor. Columna izquierda: $t = 0,05$ s; derecha: $t = 0,25$ s.

En la Figura 4.7 se observa que los resultados obtenidos analíticamente y con FEAP coinciden perfectamente. De nuevo, se observa que en el instante $t = 0,05$ s las distribucio-

nes no son lineales en absoluto, mientras que en $t = 0,25$ s, una vez alcanzado el régimen estacionario, sí que lo son. Nótese que el voltaje presenta un máximo que no estaba presente en el Caso I, debiéndose principalmente al efecto *Seebeck*. Este efecto produce una diferencia de potencial extra durante los primeros instantes del transitorio, a causa de los elevados gradientes de temperatura.

4.1.4. Caso III: Joule, Seebeck y Thomson no lineal

El tercer problema de validación termoelectrica consiste en el estudio de la misma geometría que en los casos anteriores con las siguientes condiciones de contorno:

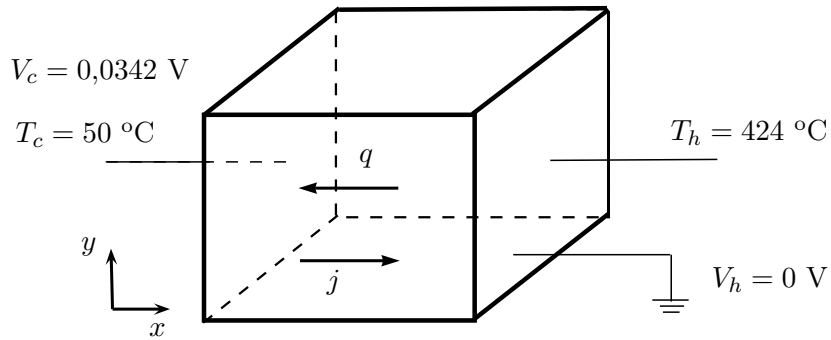


Figura 4.8: Geometría y condiciones de contorno del Caso III.

Partiendo de las Ecs. (4.5) y (4.2), y teniendo en cuenta las hipótesis de unidimensionalidad y de propiedades del material constantes, salvo por el coeficiente de *Seebeck* que en principio sí es dependiente de T , la ecuación en derivadas parciales a resolver en este problema, de la Ec. (4.5), es:

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - T \frac{\partial \alpha}{\partial T} j \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{j^2}{\gamma} = \rho_m c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.20)$$

donde aparecen los efectos *Joule*, *Seebeck* y *Thomson*, el último debido a que α no es constante.

Ecuación transitoria del calor

La solución a la Ec. (4.20) se divide en la solución estacionaria y transitoria y puede resolverse empleando transformadas de Laplace. Para el problema estacionario, la Ec. (4.20) y las condiciones de contorno son:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \eta_2 = 0 & ; \quad 0 < x < L_x ; \quad t > 0 \\ T(0, t) = T_c & ; \quad T(L_x, t) = T_h \\ T(x, 0) = f(x) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases} \quad (4.21)$$

donde:

$$\eta_1 = T \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{j}{\kappa} ; \quad \eta_2 = \frac{j^2}{\gamma \kappa} \quad (4.22)$$

En las expresiones anteriores, $T \frac{\partial \alpha}{\partial T}$ es el coeficiente de *Thomson*; se deberá considerar constante, evaluándolo para la temperatura media con el fin de encontrar la solución analítica de la ecuación, ya que no se puede resolver analíticamente esta EDP con coeficientes no constantes.

La solución de esta ecuación estacionaria, obtenida de [28], es la siguiente:

$$\begin{cases} T_e(x) = C_1 \exp(\eta_1 x) + C_2 + \frac{\eta_2}{\eta_1} x \\ C_1 = \frac{\eta_2 L_x - \eta_1 (T_h - T_c)}{\eta_1 [1 - \exp(\eta_1 L_x)]} \\ C_2 = \frac{\eta_2 L_x - \eta_1 [T_h - T_c \exp(\eta_1 L_x)]}{\eta_1 [\exp(\eta_1 L_x) - 1]} \end{cases} \quad (4.23)$$

Finalmente, la solución total se halla sumando la solución transitoria, obteniéndose:

$$\begin{cases} T(x, t) = C_1 \exp(\eta_1 x) + C_2 + \frac{\eta_2}{\eta_1} x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) S(x) \\ C_n = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} [f(x) - T_e(x)] S(x) dx \end{cases} \quad (4.24)$$

Por otro lado, el flujo de calor se obtiene a partir de la expresión constitutiva segunda Ec. (4.2) en una dimensión, obteniéndose finalmente:

$$q(x, t) = -\kappa C_1 \eta_1 \exp(\eta_1 x) - \kappa \frac{\eta_2}{\eta_1} - \kappa \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) C(x) \frac{n \pi}{L_x} + \alpha T(x, t) j \quad (4.25)$$

Cálculo del voltaje

La distribución de voltajes se puede obtener de nuevo a partir de la primera Ec. (4.2). Derivando la Ec. (4.24) respecto a x e integrando se obtiene:

$$V(x, t) = -\frac{j}{\gamma} x - \alpha \left[C_1 \exp(\eta_1 x) + \frac{\eta_2}{\eta_1} x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) S(x) \right] + \text{Cte} \quad (4.26)$$

Imponiendo la condición de contorno $V(L_x, t) = 0$ se obtiene la constante:

$$\text{Cte} = \frac{j}{\gamma} L_x + \alpha C_1 \exp(\eta_1 L_x) + \alpha \frac{\eta_2}{\eta_1} L_x \quad (4.27)$$

Sustituyendo la constante en la expresión anterior se obtiene finalmente la distribución de voltajes en el TE:

$$V(x, t) = \frac{j}{\gamma} (L_x - x) + \alpha C_1 [\exp(\eta_1 L_x) - \exp(\eta_1 x)] + \alpha \frac{\eta_2}{\eta_1} (L_x - x) - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} C_n E(t) S(x) \quad (4.28)$$

Resultados

En la Figura 4.9 se muestran las distribuciones de temperatura, voltaje y flujo de calor a lo largo del TE para dos instantes diferentes. La primera columna corresponde al instante $t = 0,05$ s y la segunda a $t = 0,25$ s. Se puede observar que los resultados obtenidos analíticamente y con FEAP coinciden perfectamente para la temperatura y el voltaje. Sin embargo, la distribución de voltaje obtenida con FEAP presenta diferencias significativas respecto a la solución analítica cerca de $x = 0$, mientras que coinciden cerca de $x = L_x$. Esto se debe a que en la solución analítica solo se impone la condición de contorno en $x = L_x$, quedando la solución libre en el extremo contrario del TE. Por lo tanto, debido a que la solución analítica utiliza el coeficiente de *Thomson* aproximado, la solución se desvía de su valor real.

En segundo lugar, en la Figura 4.10 se muestran los resultados obtenidos analíticamente y con FEAP en el centro del termoelemento $x = L_x/2$:

Se puede observar que los resultados de la temperatura coinciden perfectamente, sin embargo, las evoluciones temporales del voltaje y el flujo de calor son algo diferentes en los primeros instantes de tiempo. Esto es debido a que la solución analítica ha sido calculada considerando el coeficiente de *Thomson* constante, evaluándolo para la temperatura media, mientras que FEAP realiza los cálculos con el coeficiente de *Thomson* con dependencia total de T . A pesar de que en el transitorio las dos soluciones no coinciden, una vez que se alcanza el régimen estacionario la diferencia entre ellas es mucho menor, debido a

SECCIÓN 4.1. Validaciones del transitorio termoeléctrico

que el coeficiente de *Thomson* es evaluado a una T muy próxima a las calculadas por FEAP.

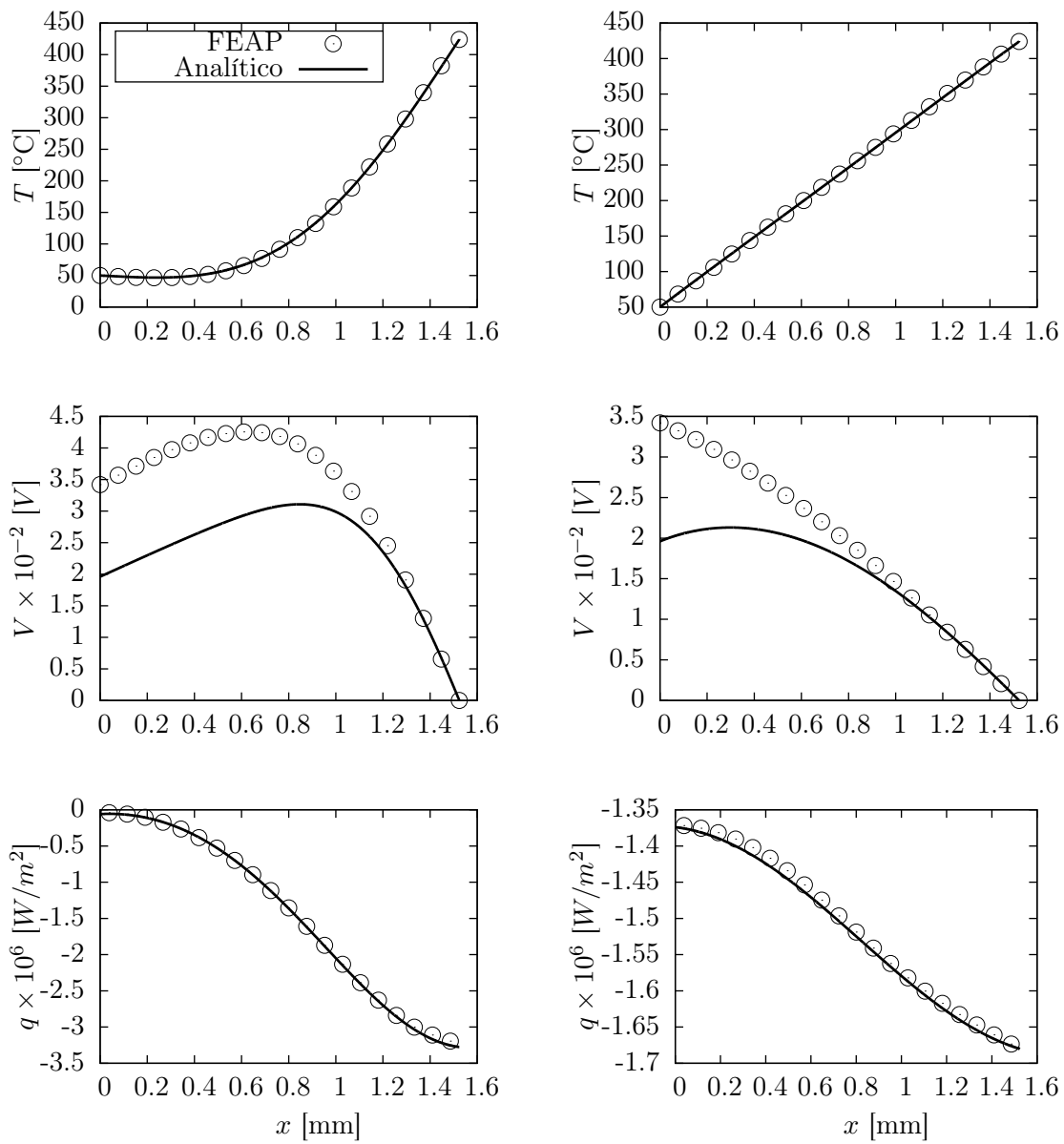


Figura 4.9: Caso III: Distribuciones a lo largo del termoelemento de temperatura, voltaje y flujo de calor. Columna izquierda: $t = 0,05$ s; derecha: $t = 0,25$ s.

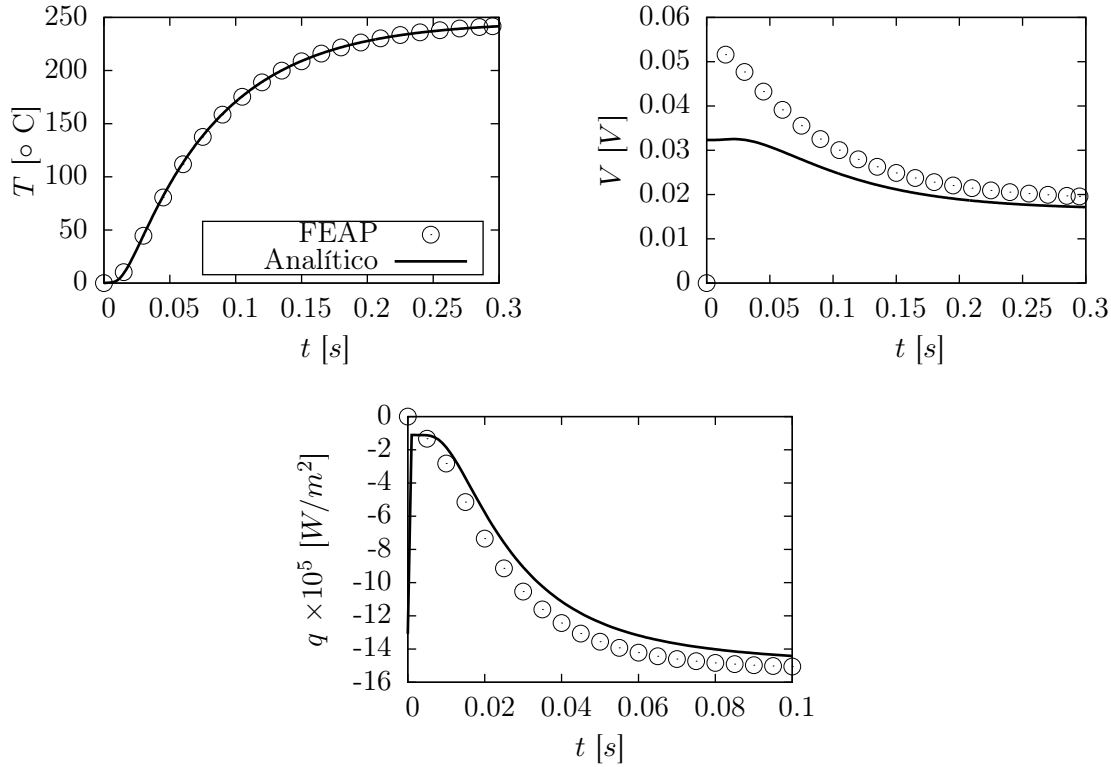


Figura 4.10: Variación de temperatura, voltaje y flujo de calor con el tiempo en el centro del termoelemento $x = L_x/2$ para el Caso III.

4.2. Validación termogalvanomagnética

La realización de una validación de los efectos termogalvanomagnéticos es necesaria en este trabajo dado que en la posterior Sección 6 se realizará un estudio de la influencia de los campos magnéticos en el comportamiento de los generadores termoeléctricos. Por ello, se plantea un caso de validación en el que aparecen los cuatro efectos termogalvanomagnéticos y se resuelve de forma analítica y con FEAP, con el objetivo de comparar los resultados obtenidos y analizar las ventajas y las limitaciones de ambos métodos.

El problema consiste en un termoelemento *Skutterudite* tipo-p de $L_x = 5$ mm al que se le imponen las temperaturas T_h y T_c y una diferencia de potencial V entre sus dos extremos, además de un flujo magnético $B_z = 10 \mu\text{T}$ en la dirección z . Se ha elegido este valor de B_z porque para valores mayores aparecen fuertes efectos tridimensionales que no permiten realizar una comparación adecuada entre las soluciones analíticas y numéricas, como se mostrará en el Capítulo 5. Las propiedades del material se consideran constantes con T y la geometría y las C.C. se pueden observar en la Figura 4.11.

A diferencia del resto de problemas de validación resueltos en esta sección, los cuales

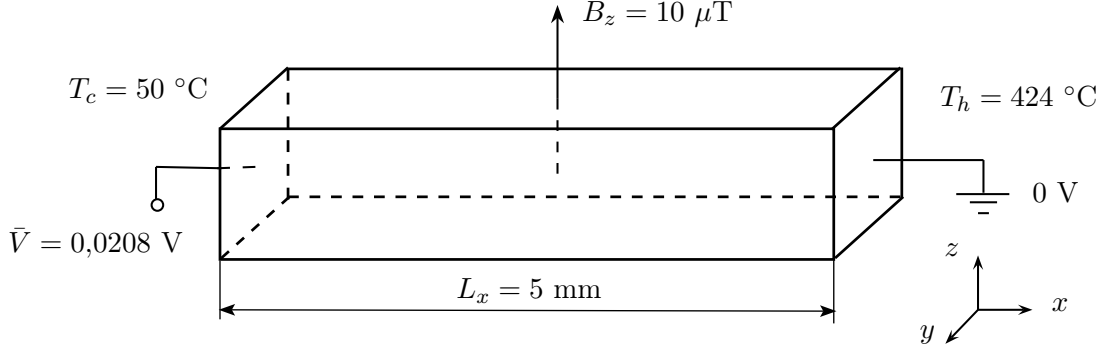


Figura 4.11: Geometría y condiciones de contorno de la validación termogalvanomagnética.

eran unidimensionales, este problema se convierte en bidimensional debido a los efectos producidos por B_z . Por ello, para poder resolverlo es necesario acudir a las ecuaciones de transporte en forma tensorial, Ecs. (3.3). Introduciendo las propiedades del material en forma tensorial, mostradas en la Ec. (3.7), y despreciando las componentes de los flujos y los gradientes en la dirección z , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix} = -\frac{R}{|\boldsymbol{\rho}|} \begin{bmatrix} \frac{\rho^2}{R} & \rho B_z \\ -\rho B_z & \frac{\rho^2}{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{Bmatrix} - \frac{R}{|\boldsymbol{\rho}|} \begin{bmatrix} \frac{\rho^2}{R} & \rho B_z \\ -\rho B_z & \frac{\rho^2}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -NB_z \\ NB_z & \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

donde $|\boldsymbol{\rho}| = |B|^2 R^2 \rho + \rho^3$ y es calculado de realizar la inversa de $\boldsymbol{\rho}$ para obtener $\boldsymbol{\gamma}$. Operando se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix} = \underbrace{-\frac{R}{|\boldsymbol{\rho}|} \begin{bmatrix} \frac{\rho^2}{R} & \rho B_z \\ -\rho B_z & \frac{\rho^2}{R} \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{Bmatrix} - \underbrace{\frac{R}{|\boldsymbol{\rho}|} \begin{bmatrix} \alpha \frac{\rho^2}{R} + N\rho B_z^2 & \alpha \rho B_z - NB_z \frac{\rho^2}{R} \\ -\alpha \rho B_z + NB_z \frac{\rho^2}{R} & \alpha \frac{\rho^2}{R} + N\rho B_z^2 \end{bmatrix}}_{[B]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Las matrices $[A]$ y $[B]$ están formadas por parámetros conocidos ya que contienen las propiedades termogalvanomagnéticas del material y la intensidad del campo magnético.

Nótese que si $B_z = 0$ la ecuación anterior se convierte en la de transporte primera Ec. (4.2) unidimensional utilizada para resolver las validaciones termoeléctricas anteriores. Sin embargo, en este problema, los gradientes de T y V así como las dos componentes de la corriente son parte de la solución buscada. Por lo tanto, debido al carácter bidimensional del problema, se dispone de un sistema de dos ecuaciones con seis incógnitas, imposible de resolver analíticamente de forma exacta.

En consecuencia, para poder obtener una solución aproximada del problema es necesario asumir las siguientes hipótesis:

- Las distribuciones de V y T son lineales a lo largo de la dirección x del TE, debido a que las contribuciones de *Fourier* y *Ohm* a los flujos térmico y eléctrico respectivamente son más importantes que las de los efectos termogalvanomagnéticos. Por lo tanto, los gradientes en esta dirección son constantes y conocidos:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_h - T_c}{L_x}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{-\bar{V}}{L_x} \quad (4.32)$$

- Los gradientes de T y V en la dirección y son despreciables frente a los presentes en dirección x , debido a que no se impone ninguna diferencia de T y V en la dirección y , y por lo tanto, los gradientes en esta dirección son producidos únicamente por los efectos termogalvanomagnéticos, de segundo orden:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \ll \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} \ll \frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.33)$$

Aplicando estas hipótesis a las Ecs. (4.31), estas se convierten en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y se puede obtener una aproximación de los flujos eléctricos j_x y j_y :

$$\boxed{\begin{aligned} j_x &= A_{11} \frac{-\bar{V}}{L_x} + B_{11} \frac{T_h - T_c}{L_x} \\ j_y &= A_{21} \frac{-\bar{V}}{L_x} + B_{21} \frac{T_h - T_c}{L_x} \end{aligned}} \quad (4.34)$$

4.2.1. Ecuación del calor

Una vez conocidos los flujos eléctricos j_x y j_y es posible resolver la ecuación del calor; teniendo en cuenta las hipótesis anteriores, la Ec. (4.5) toma la siguiente forma:

$$\kappa \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} + \frac{j_x^2 + j_y^2}{\gamma} = 0 \quad (4.35)$$

donde el primer término se corresponde a la potencia producida por *Fourier* mientras que el segundo a la producida por el efecto *Joule*. Definiendo $f := -\frac{j_x^2 + j_y^2}{\kappa \gamma}$, la Ec.(4.35) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = f \quad (4.36)$$

La Ec. (4.36) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que puede ser resuelta fácilmente por el método de separación de variables. Integrando la ecuación dos veces y aplicando las condiciones de contorno $T(0) = T_c$ y $T(L_x) = T_h$, se obtiene la distribución de temperaturas en el termoelemento:

$$T(x) = T_c + f \frac{x^2}{2} + \frac{x}{L_x} \left[T_h - T_c - f \frac{L_x^2}{2} \right] \quad (4.37)$$

Una vez conocida la distribución de temperaturas a lo largo del TE se pueden obtener las distribuciones de los flujos de calor en las dos direcciones. De nuevo, se parte de las ecuaciones de transporte, Ecs. (3.3), y aplicando las hipótesis asumidas se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} q_x(x) &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} + [\alpha j_x - N B_z j_y] T(x) \\ q_y(x) &= M B_z \frac{\partial T}{\partial x} + [N B_z j_x + \alpha j_y] T(x) \end{aligned} \quad (4.38)$$

4.2.2. Ecuación del voltaje

Para hallar la distribución de V a lo largo del termoelemento es necesario encontrar una ecuación diferencial de segundo orden, de modo que sea posible introducir las dos condiciones de contorno de voltaje impuestas por el problema.

Dado que las expresiones de los flujos eléctricos son conocidas (Ec. (4.34)), se puede utilizar la ecuación de equilibrio $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ con el objetivo de obtener la ecuación diferencial. Derivando las Ecs. (4.34) e introduciéndolas en esta ecuación de equilibrio se obtiene:

$$A_{11} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (4.39)$$

El valor de la segunda derivada de T respecto a x es conocido y viene dado por la Ec. (4.36). Definiendo $\frac{B_{11}}{A_{11}} \equiv K$ y reordenando la Ec. (4.39) se obtiene la expresión:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -K f \quad (4.40)$$

Integrando esta ecuación y despejando las constantes de integración tras imponer las condiciones de contorno $V(0) = \bar{V}$ y $V(L_x) = 0$ de forma análoga a como se ha procedido con la ecuación del calor, se obtiene la distribución de voltaje a lo largo de la dirección x del termoelemento, cuya expresión es:

$$V(x) = \bar{V} - K f \frac{x^2}{2} - \frac{x}{L_x} \left[\bar{V} - K f \frac{L_x^2}{2} \right] \quad (4.41)$$

4.2.3. Resultados

Aplicando las ecuaciones obtenidas a lo largo del desarrollo anterior se obtiene una aproximación analítica a la solución del problema. Por otro lado, también se ha hallado su solución con FEAP. En la Figura 4.12 se muestran los resultados obtenidos con ambos métodos.

Se puede observar que las distribuciones de T , V , q_x , j_x calculadas analíticamente coinciden casi a la perfección con las proporcionadas por FEAP. Sin embargo, las distribuciones de los flujos q_y y j_y , obtenidas analíticamente, difieren sustancialmente de las calculadas numéricamente. Se observa que los resultados analíticos de estos flujos se aproximan a los que FEAP proporciona para los extremos del TE, mientras que en el centro los valores son muy diferentes.

Esto se debe a que en la solución analítica se ha considerado que j_x y j_y son constantes en todo el TE, siendo esta hipótesis aceptable en el caso de j_x pero no en el caso de j_y . Los efectos termogalvanomagnéticos tienen especial importancia en los extremos del TE, produciendo gradientes de V no despreciables en la dirección y cerca de esta zona. Por otro lado, el error producido en el cálculo analítico de q_y se debe a que este depende de forma directamente proporcional de j_y , y por lo tanto, al no disponer de una buena aproximación de j_y el error cometido se transmite al cálculo del calor. Sin embargo, se puede observar que los valores que adquieren estos flujos son tres órdenes de magnitud inferiores a los de los flujos en dirección x , y por lo tanto, el error cometido analíticamente no es demasiado grave.

A pesar de que algunos de los resultados obtenidos analíticamente no se ajustan correctamente a los proporcionados por FEAP, los resultados que se muestran en esta sección sirven para mostrar las limitaciones de los cálculos analíticos cuando se aplica un campo magnético que convierte el problema 1-D en un problema 3-D, destacando la importancia del MEF para poder realizar un análisis preciso del problema.

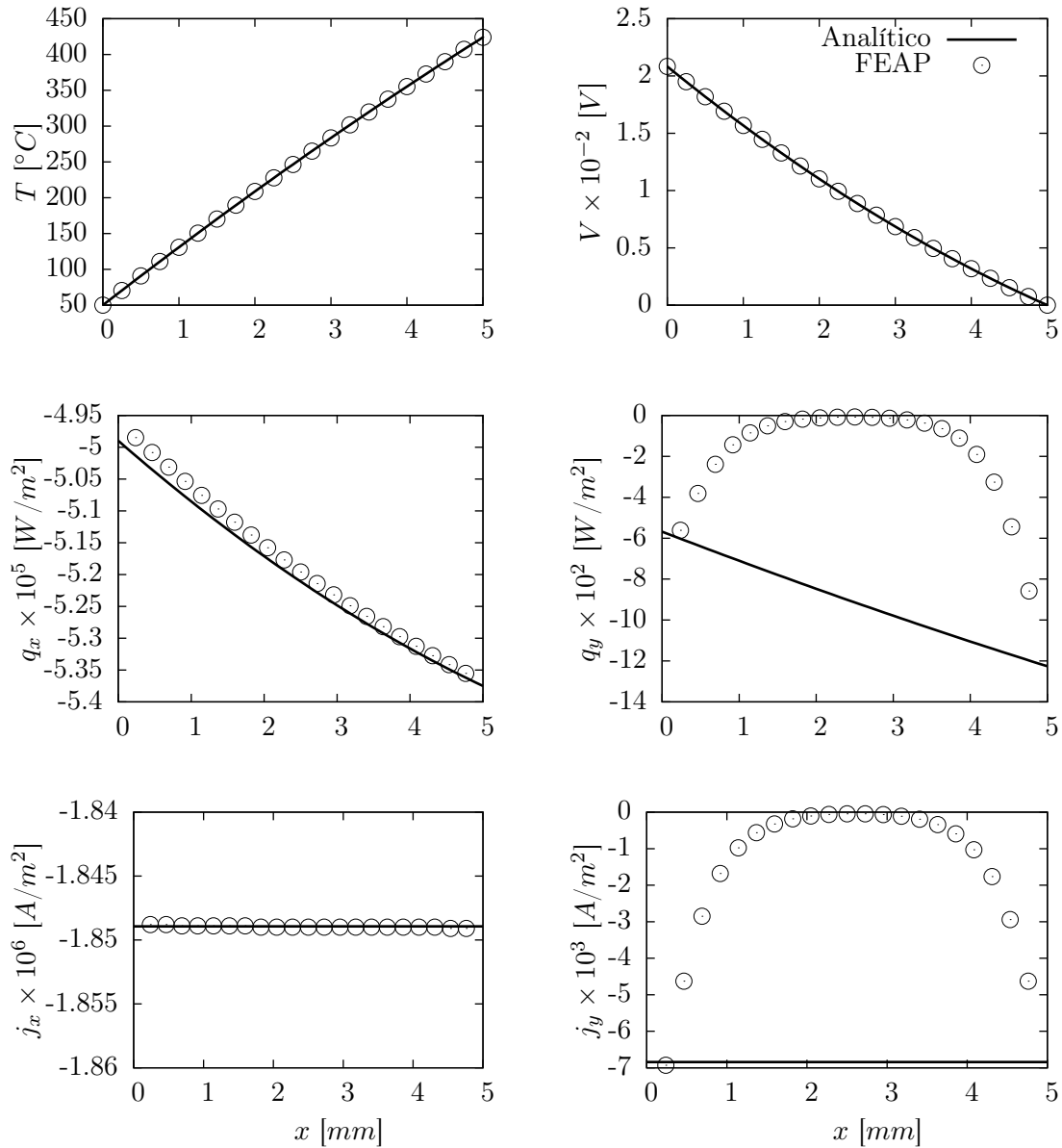


Figura 4.12: Comparación entre los resultados obtenidos analíticamente y con FEAP de la validación termogalvanomagnética.

Finalmente, en la Figura 4.13 se muestran las distribuciones de j_x , q_x , j_y , q_y proporcionadas por FEAP. Se puede observar que, como se ha dicho anteriormente, los efectos termogalvanomagnéticos tienen especial importancia en las esquinas del TE debido a los efectos rotacionales provocados por B_z , que originan importantes flujos en dirección y en esta zona.

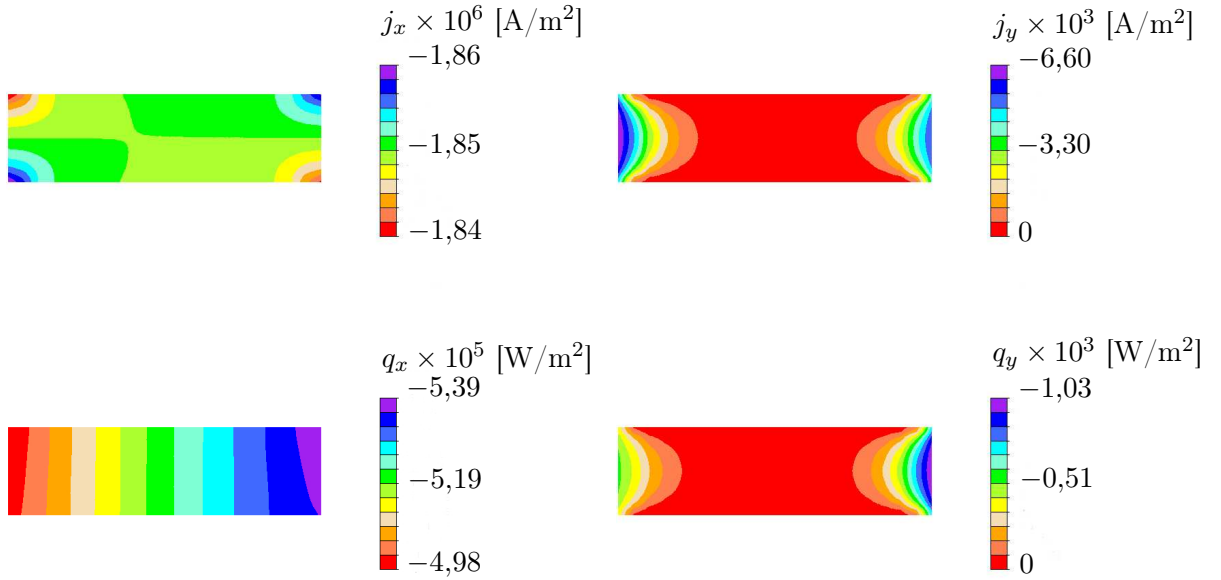


Figura 4.13: Distribuciones de flujos eléctricos y de calor obtenidos con FEAP para la validación termogalvanomagnética.

4.3. Validación mecánica. Placa vibratoria.

Para llevar a cabo la validación mecánica del *elmt02.f* se realizará el análisis de vibraciones forzadas de una placa articulada de longitud a , anchura b y espesor h sometida a una carga variable en el tiempo $p(t)$ que oscila con una frecuencia Ω de la forma:

$$p(t) = p_0 \sin(\Omega t) \quad (4.42)$$

Para hallar la solución analítica se aceptan las hipótesis de Kirchoff (ver [15]). La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de la placa se encuentra en la misma referencia y es la siguiente:

$$D \nabla^4 w(x, y, t) = p(x, y, t) - \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.43)$$

donde D es la rigidez a flexión de la placa y está definida como:

$$D = \frac{Y h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (4.44)$$

donde Y es el módulo de Young. Para resolver el problema de vibraciones forzadas es necesario resolver primero el de vibraciones libres. Para hallar la solución analítica se empleará el método de Galerkin, el cual emplea desarrollos en serie de Fourier y funciones de prueba que cumplan las condiciones de contorno propias de una placa articulada.

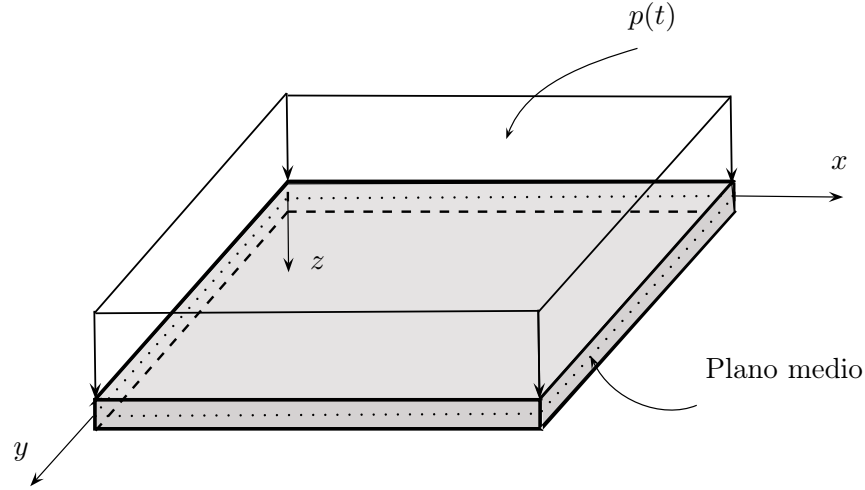


Figura 4.14: Placa sometida a carga variable en el tiempo.

4.3.1. Resultados

La solución a la Ec. (4.43) se encuentra en la referencia [15] y tiene la siguiente expresión:

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^N \left[A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t) + F_j^p(t) \right] W_j(x, y) \quad (4.45)$$

Las constantes A_j y B_j que aparecen en la solución se calculan a partir de las condiciones iniciales $w(x, y, 0)$ y $\dot{w}(x, y, 0)$.

Dada la geometría de la placa y las condiciones de contorno, las funciones de prueba elegidas para resolver el problema analíticamente son las siguientes:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \text{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\ f_2(x, y) &= \text{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \pi y}{b} \right) \\ f_3(x, y) &= \text{sen} \left(\frac{2 \pi x}{a} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\ f_4(x, y) &= \text{sen} \left(\frac{2 \pi x}{a} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \pi y}{b} \right) \\ f_5(x, y) &= \text{sen} \left(\frac{3 \pi x}{a} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Por otro lado, las características de la placa a estudiar se muestran en la Tabla 4.3.

h [m]	Y [GPa]	p_0 [Pa]	a [m]	b [m]	Ω [rad/s]	ρ_m [Kg/m ³]	ν [-]
0.005	70	1000	0.25	0.25	20	2700	0.3

Tabla 4.3: Propiedades de la placa a articulada.

Una vez definidas las características del problema se puede hallar su solución. En primer lugar se calculan las frecuencias naturales, que se muestran en la Tabla 4.4.

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
2433,19	6082,97	6082,97	9732,75	12165,9

Tabla 4.4: Frecuencias propias de la placa articulada [rad/s].

Una vez resuelto el problema de vibraciones libres es posible resolver el problema de vibraciones forzadas utilizando la Ec. (4.45). En la Figura 4.15 se muestran los resultados obtenidos analíticamente y con FEAP para la flecha en el centro de la placa $w(a/2, b/2, t)$.

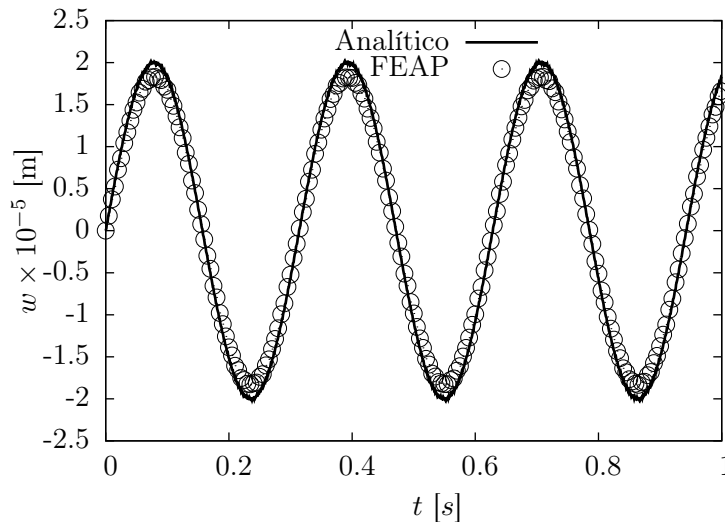


Figura 4.15: Resultados obtenidos de la flecha $w(a/2, b/2, t)$ en el centro de la placa articulada.

Se puede observar que los resultados obtenidos analíticamente y con el programa de elementos finitos coinciden casi a la perfección, siendo la única diferencia el valor máximo que llega a tomar la flecha. Esta pequeña diferencia puede deberse a que las hipótesis aceptadas para el cálculo analítico no son del todo ciertas o, por otro lado, a que la malla debería ser más fina para obtener unos resultados más precisos. Sin embargo, se toma este resultado como válido dado que el error cometido es muy pequeño y que un aumento en el número de elementos utilizados para realizar el cálculo con FEAP supondría un gran incremento del tiempo de computación. Por otro lado, se observa que domina la solución forzada frente a la de vibraciones libres, ya que w tiene una distribución prácticamente

SECCIÓN 4.3. *Validación mecánica. Placa vibratoria.*

senoidal perfecta al igual que la excitación. Por lo tanto, la influencia de la solución homogénea es despreciable, lo que previene la aparición del fenómeno de batimiento en la placa.

Modelado de un Generador Termoeléctrico

En este capítulo se realizará el modelado del generador termoeléctrico *Enhanced Multi-Mission Radioisotope Thermoelectric Generator*, conocido como *eMMRTG*, el cual es el sucesor del tradicional *MMRTG* utilizado en pasadas misiones espaciales. Se trata de un generador en desarrollo por el *Jet Propulsion Laboratory* de la NASA [16], capaz de operar en el vacío y en atmósferas planetarias, estando su diseño optimizado para operar en el planeta Marte. Es apropiado para misiones en las que la vida útil del generador sea de máxima importancia, como sondas de exploración del espacio profundo o sistemas de movilidad en la superficie de los planetas como el *Mars rover*.

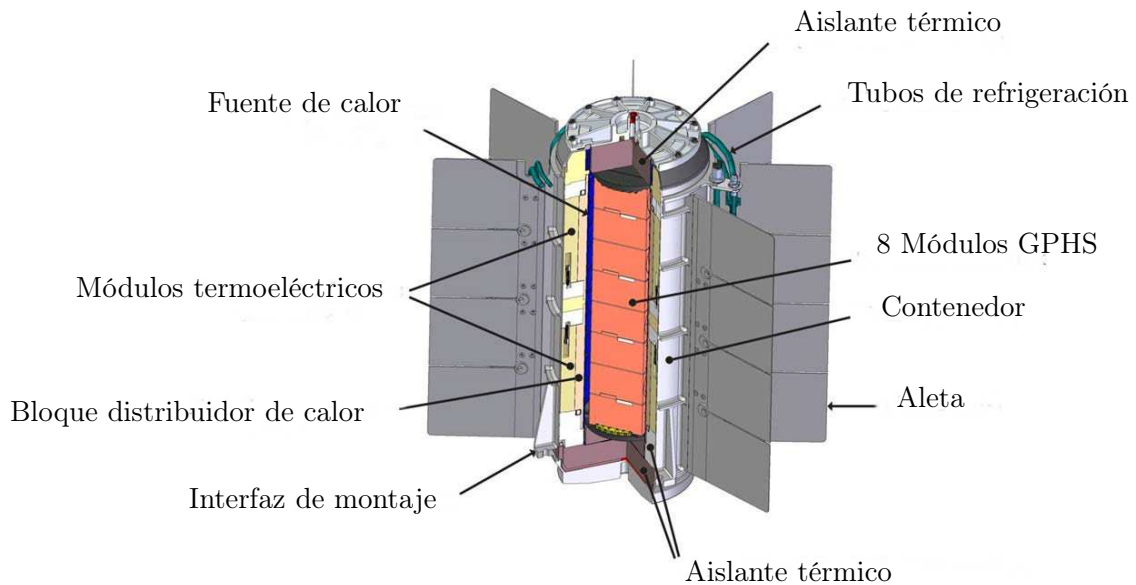


Figura 5.1: Representación de un *eMMRTG*.

El *eMMRTG* utiliza Plutonio-238 como combustible y requiere menos cantidad para producir la misma potencia que sus antecesores debido a que está diseñado con los materiales termoeléctricos más avanzados. Posee 768 termopares de *Skutterudite* que proporcionan 146 W de potencia eléctrica y una eficiencia del 7,3% al comienzo de misión. Este generador opera con $T_c = 35\text{ }^\circ\text{C}$ y $T_h = 500\text{ }^\circ\text{C}$, imponiéndose el voltaje producido $V = 32\text{ V}$ como especificación de diseño.

En las siguientes secciones se presentará la geometría y las características del dominio a estudiar en secciones posteriores, así como la descripción de los materiales que intervienen en el modelo y sus principales propiedades termoeléctricas y termogalvanomagnéticas. Por último se presenta la malla que será utilizada con el programa de elementos finitos FEAP y un estudio de convergencia de esta malla.

5.1. Presentación del modelo

En la Figura 5.2 se muestran los diferentes componentes que forman el sistema de generación de energía del RTG y la disposición de los termopares en su interior.

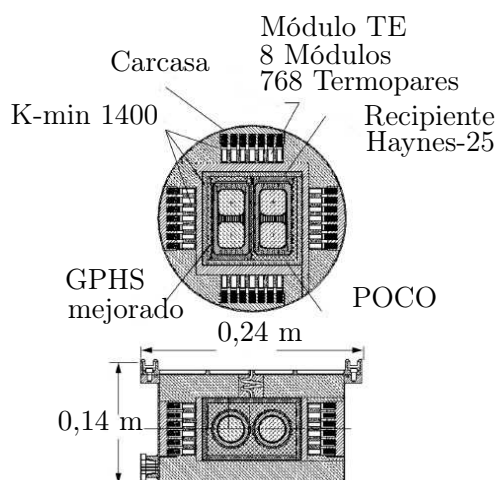


Figura 5.2: Sección del alzado (arriba) y planta (abajo) del GPHS.

El GPHS, siglas en inglés de General Purpose Heat Source, es el componente del RTG encargado de proporcionar potencia térmica al generador. Está cubierto por módulos POCO, compuestos de grafito, que proporcionan restricciones inerciales para reducir los efectos de los impactos. El combustible nuclear se encuentra dentro de recipientes fabricados con la superaleación Haynes-25, que protege los pellets de combustible de los impactos, y posee muy buenas propiedades mecánicas a altas temperaturas.

El módulo termoeléctrico está formado por 768 termopares en total, divididos en 8 módulos de 96 termopares. Cada uno de ellos está compuesto de dos TEs (uno tipo-p y otro tipo-n) conectados eléctricamente en serie con dos características destacables: periodicidad y simetría. Aprovechando estas dos características solo se estudiará la mitad del termopar, con el fin de reducir el coste computacional.

En la Figura 5.3 se muestra la geometría de un termopar aislado y los materiales de los que está compuesto. La simetría está representada por las banderas y la periodicidad por los bordes dentados. Debido a la falta de información en [16], la longitud de los termoelementos l_{TE} es desconocida a priori y será estimada en el Capítulo 6 tras la realización del análisis correspondiente. Por otro lado, el resto de dimensiones son las proporcionadas por la referencia [17], pertenecientes a una célula Peltier comercial del fabricante *Melcor*.

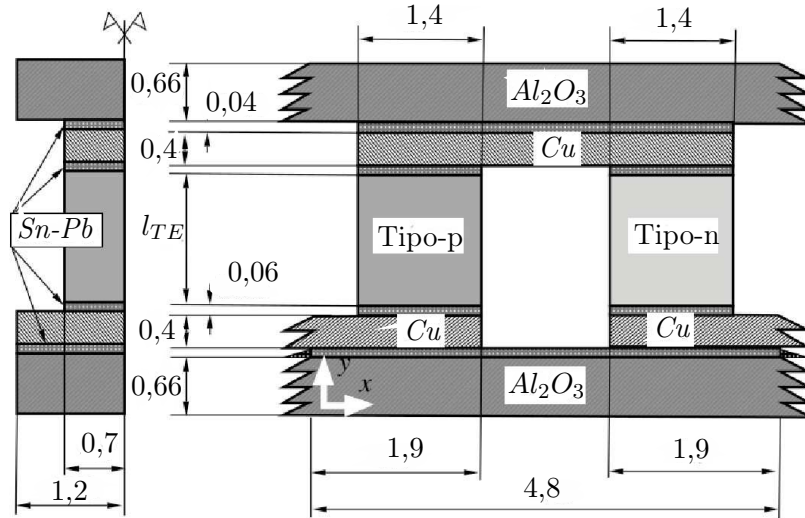


Figura 5.3: Dimensiones [mm] y materiales del termopar a estudiar.

5.2. Materiales y propiedades

Los materiales de los que está compuesto un termopar del *eMMRTG* se muestran en la Figura 5.3 y sus características son las siguientes:

- Al_2O_3 : material cerámico con una alta conductividad térmica y baja conductividad eléctrica localizado en los extremos del módulo. En la parte superior se encuentra en contacto con el foco frío y en la parte inferior con el foco caliente. Su principal función es aislar eléctricamente el módulo y recoger el flujo de calor producido por el combustible radiactivo que permite la generación de potencia eléctrica.
- Cu : su principal función es conectar eléctricamente en serie los TEs que forman el módulo y transmitir la corriente eléctrica a la carga conectada al generador.
- *Skutterudite*: material del que están formados los TEs. Sus propiedades termoeléctricas permiten la creación de corriente eléctrica a partir del flujo de calor gracias al efecto *Seebeck*. Para el correcto funcionamiento del módulo es necesario que uno de los TEs del termopar sea tipo-p y el otro tipo-n, cuya principal diferencia es el tipo de dopaje al que han sido sometidos, el cual cambia de signo el coeficiente de *Seebeck*. En concreto, para este estudio se ha elegido la variedad $Ca_{0,07}Ba_{0,23}Co_{3,95}Ni_{0,05}Sb_{12}$ debido a que sus propiedades termoeléctricas son buenas y se encuentran en la literatura.
- $Sn-Pb$: material utilizado para soldar el resto de materiales. Tiene un papel de gran importancia en el termopar debido a que las imperfecciones en la soldadura pueden reducir la eficiencia del generador y causar concentración de las tensiones por estrangulamiento de las líneas de flujo y la diferencia entre los coeficientes de expansión térmica.

SECCIÓN 5.2. *Materiales y propiedades*

Las propiedades de los materiales utilizados en el termopar se muestran en la Tabla 5.1. Las propiedades termoeléctricas son κ , ρ , α ; α_T es el coeficiente de expansión térmica, λ y μ_l son los coeficientes de Lamé, que caracterizan el comportamiento elástico del material, y σ_Y es el límite elástico. En la realidad, varias de estas propiedades son dependientes de T ; sin embargo, esta dependencia solo se tiene en cuenta para las de *Skutterudite*, material en el que los efectos termogalvanomagnéticos son relevantes.

	<i>Skutterudite</i>	<i>Cu</i>	<i>Sn-Pb</i>	<i>Al₂O₃</i>
λ [GPa]	37.5	71.6	32.5	163.3
μ_l [GPa]	55	43.9	16.9	150.8
σ_Y [MPa]	115	250	41	330
$\alpha_T \times 10^{-6}$ [K ⁻¹]	9.14	17	27	5
κ [W/mK]	(5.1)	386	48	35.3
$\rho \times 10^{-8}$ [Ω m]	(5.1)	1.7	21.2	10 ²¹
α [V/K]	(5.1)	-	-	-

Tabla 5.1: Propiedades mecánicas y termoeléctricas de materiales: *Skutterudite*, cobre, estaño-plomo y alúmina.

Debido a la dificultad para encontrar todas las propiedades de una única variedad de *Skutterudite* en la literatura, se han tomado algunas de las propiedades del material con distintos dopajes. Las propiedades mecánicas han sido obtenidas de [20] y [21] y que el coeficiente de expansión térmica de [19]. Por otro lado, las propiedades termoeléctricas de *Skutterudite* se encuentran en [18] y son proporcionadas en forma de gráficas. Para poder introducir los datos en FEAP es necesario tener las propiedades en forma de polinomio. Por ello, utilizando el programa *DataThief* [22] se obtienen los datos de las gráficas para posteriormente realizar un ajuste con el fin de obtener los polinomios necesarios. Las expresiones obtenidas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \alpha(T) &= -1,06 \times 10^{-4} - 2,92 \times 10^{-7} T + 2,24 \times 10^{-10} T^2 ; \\
 \rho(T) &= 3,25 \times 10^{-6} + 5,19 \times 10^{-9} T - 2,61 \times 10^{-12} T^2 ;
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\kappa(T) = & 5,53 - 0,009 T - 2,45 \times 10^{-5} T^2 + 3,99 \times 10^{-7} T^3 \\ & + 1,05 \times 10^{-9} T^4 - 1,4 \times 10^{-11} T^5 + 1,04 \times 10^{-14} T^6 \\ & + 1,36 \times 10^{-16} T^7 - 3,66 \times 10^{-19} T^8 + 2,74 \times 10^{-22} T^9 ;\end{aligned}$$

donde T se introduce en °C. Para α y ρ , se consigue un buen ajuste con polinomios de segundo grado, sin embargo, en el caso de κ ha sido necesario el empleo de un polinomio interpolador de noveno grado para que el ajuste sea lo suficientemente bueno. Mientras que los coeficientes de los dos polinomios de segundo grado se introducen en FEAP a través del fichero de entrada (input), el polinomio de noveno grado ha sido programado en el elemento de usuario *elmt02.f*, con el fin de reducir el número de campos a completar en el fichero.

En cuanto a las propiedades termogalvanomagnéticas de *Skutterudite*, ha resultado imposible encontrar datos que permitan obtener los polinomios necesarios para utilizar el programa de elementos finitos. Por lo tanto, se han tomado las propiedades termogalvanomagnéticas del antimoniuro de indio, otro material comúnmente utilizado en dispositivos termoeléctricos y cuya fórmula química es *InSb*. A pesar de que no sea el material objeto de estudio, sus propiedades son similares y nos permiten hacer una estimación de cómo se comporta el dispositivo cuando se encuentra bajo el efecto de campos magnéticos. Las propiedades se encuentran en [13] en forma de gráficos y ecuaciones. Una vez realizado el ajuste se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}R(T) = & -6,63 \times 10^{-4} + 1,88 \times 10^{-5} T - 2,66 \times 10^{-7} T^2 \\ & + 2 \times 10^{-9} T^3 - 8,56 \times 10^{-12} T^4 + 2,06 \times 10^{-14} T^5 \\ & - 2,61 \times 10^{-17} T^6 + 1,34 \times 10^{-20} T^7 ; \\ N(T) = & -8,9 \times 10^{-5} + 8,76 \times 10^{-7} T - 6,59 \times 10^{-9} T^2 \\ & + 3,1 \times 10^{-11} T^3 - 9,49 \times 10^{-14} T^4 + 1,82 \times 10^{-16} T^5 \\ & - 1,97 \times 10^{-16} T^6 + 9,12 \times 10^{-23} T^7 ; \\ M(T) = & 5 \times 10^{-2}\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde R es el coeficiente de *Hall*, M el de *Righi-Leduc* y N el de *Nernst-Ettingshausen*; de nuevo, la temperatura se introduce en °C. Nótese que las propiedades mostradas en las Ecs. (5.1) y (5.2) son las propias de un TE tipo-n, siendo las de un tipo-p iguales excepto porque los coeficientes de *Seebeck* y *Nernst* cambian de signo, $\alpha_p = -\alpha_n$ y $N_p = -N_n$.

En la Figura 5.4 se muestra la evolución de las propiedades termogalvanomagnéticas con la T . Se puede observar que la variación de ρ con T es prácticamente lineal, y que la del coeficiente de *Righi-Leduc* es constante. Por otro lado, R y N siguen una distribución exponencial, mientras que α sigue una distribución parabólica y κ una distribución muy irregular.

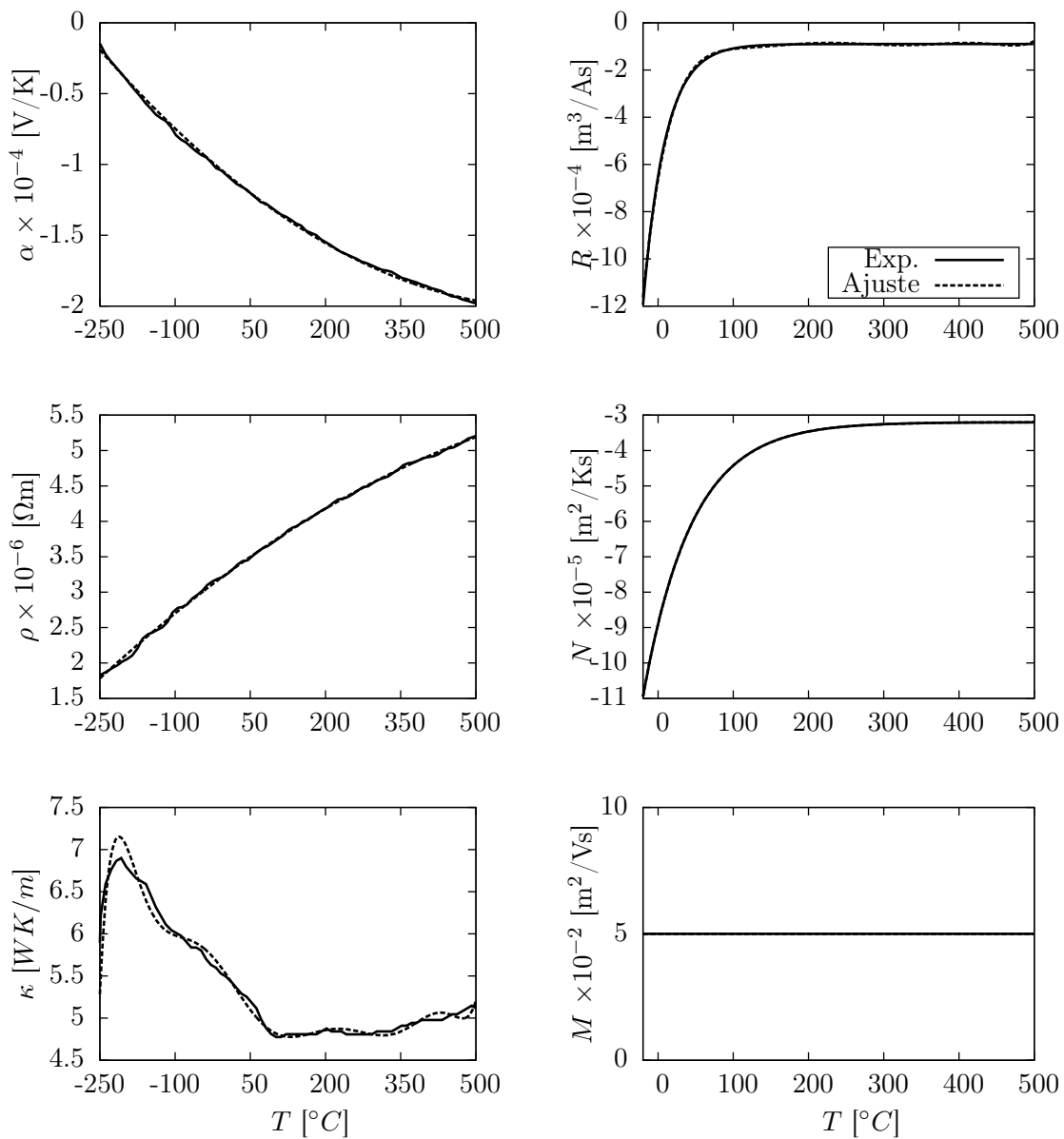


Figura 5.4: Propiedades termoeléctricas y termogalvanomagnéticas de *Skutterudite* en función de la temperatura. Comparación entre los datos experimentales y el ajuste de los polinomios.

Se debe destacar que las propiedades termoeléctricas han sido ajustadas para el rango entre -250 y 500 °C, mientras que las termogalvanomagnéticas lo han sido entre -20 y 500 °C, debido a la falta de información en la literatura.

5.3. Estudio de la malla

En la Figura 5.5 se presenta la malla utilizada para realizar las simulaciones con FEAP. Todas las figuras que aparecen en esta sección han sido obtenidas utilizando $l_{TE} = 5$ mm.

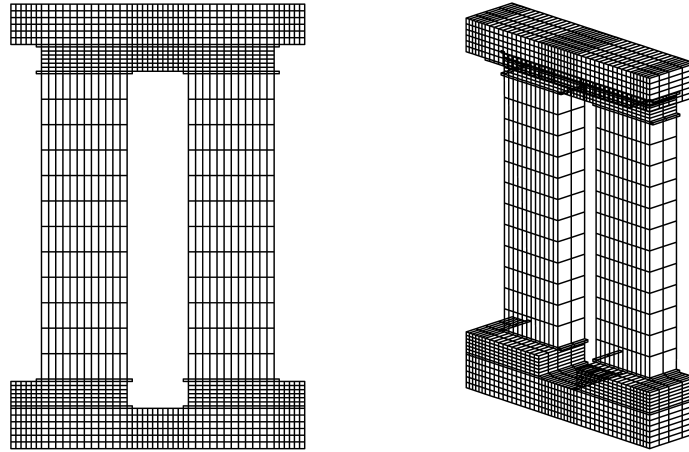


Figura 5.5: Malla generada para simular el termopar con FEAP. A la izquierda vista en alzado, a la derecha vista en perspectiva.

Nótese la presencia de elementos que sobresalen por los laterales en cada una de las filas correspondientes al *Sn-Pb*. Estos elementos tienen el objetivo de simular las rebabas resultantes del proceso de soldadura y tienen gran importancia debido a que alivian las tensiones que aparecen en la esquina de la soldadura. El *Sn-Pb* se modela con un único elemento en la dirección vertical y las rebabas con un único elemento en la dirección horizontal. El resto de la malla está controlada por dos parámetros:

- n : controla el número de elementos a lo largo de las direcciones horizontal y vertical correspondientes a los ejes x , y (ver Figura 5.3) respectivamente. Su valor se obtiene a partir del estudio de convergencia de la malla realizado en la siguiente subsección.
- n_z : controla el número de elementos en la dirección transversal correspondiente al eje z . Debido a la simetría de la geometría y al hecho de que los efectos en esta dirección no tienen importancia, para este trabajo su valor se fija en $n_z = 2$.

5.3.1. Estudio de convergencia

Para garantizar que los resultados obtenidos con el programa de elementos finitos son suficientemente fiables, se realiza un estudio de convergencia de la malla variando el número

de elementos que la forman. Para ello, se ejecuta FEAP desde el software *Matlab* variando el parámetro n y se presentan los resultados de corriente producida I_{out} , flujo de calor en el foco caliente Q_h , desplazamientos en la dirección horizontal u , vertical v y transversal w , adimensionalizados con el valor máximo obtenido para cada uno de ellos. Debido a la presencia de campos magnéticos en algunos de los casos a analizar en la Sección 6, es necesario realizar dos estudios de convergencia de malla: con y sin campo magnético aplicado.

Sin campo magnético

Los resultados del estudio de convergencia de malla sin campo magnético se presentan en la Figura 5.6.

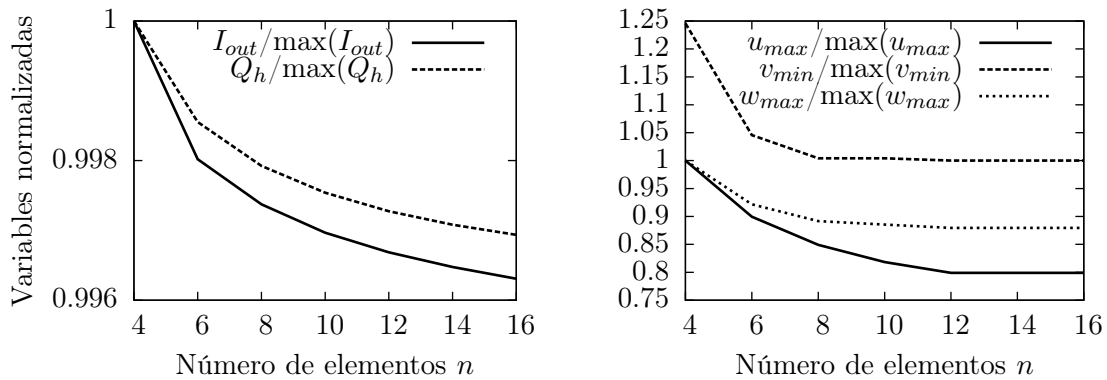


Figura 5.6: Estudio de convergencia de malla sin campo magnético. Izquierda: convergencia de variables termoeléctricas. Derecha: convergencia de variables mecánicas.

Se puede observar que las variables termoeléctricas no se ven apenas afectadas por la variación del número de elementos n , mientras que los desplazamientos mecánicos varían sus valores entre un 10 y un 20%. Hay que destacar que se muestra v_{min} en lugar de v_{max} porque este desplazamiento es máximo en sentido contrario a y , tomando valores negativos. En base a los resultados obtenidos, se elige el valor $n = 12$ para realizar las simulaciones del termopar cuando no hay B_z aplicado, ya que se puede considerar que las variables han convergido y el tiempo de computación necesario es mucho menor que utilizando un número mayor de elementos.

Con los valores de n y de n_z establecidos, el número total de elementos de la malla es de 4588 y el número de nodos es 9510.

Con campo magnético

Los resultados del estudio de convergencia de malla con campo magnético aplicado se presentan en las Figuras 5.7 y 5.8. En la primera se muestra la convergencia de los

flujos eléctrico y térmico, mientras que en la segunda se observa la convergencia de los desplazamientos mecánicos u , v , w . Los cálculos han sido realizados para tres valores de flujo magnético, $B_z = 0$, $B_z = 0,5$ y $B_z = 1$ T.

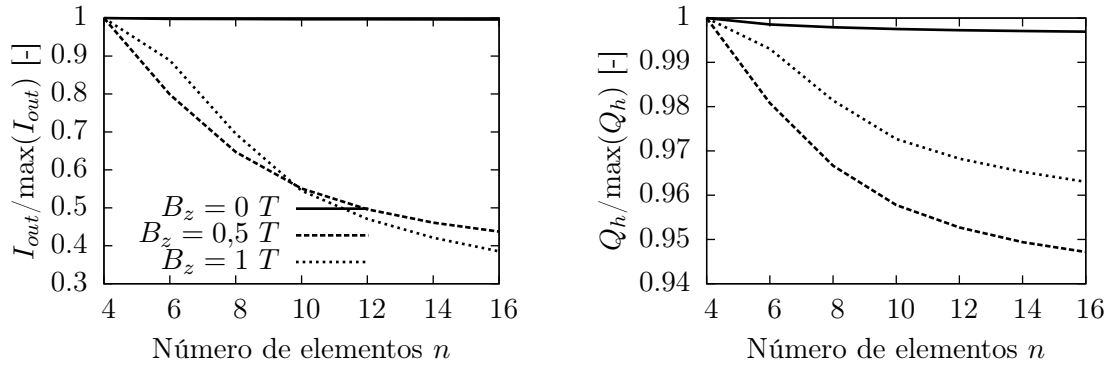


Figura 5.7: Convergencia de los flujos eléctrico y térmico en presencia de un campo magnético.

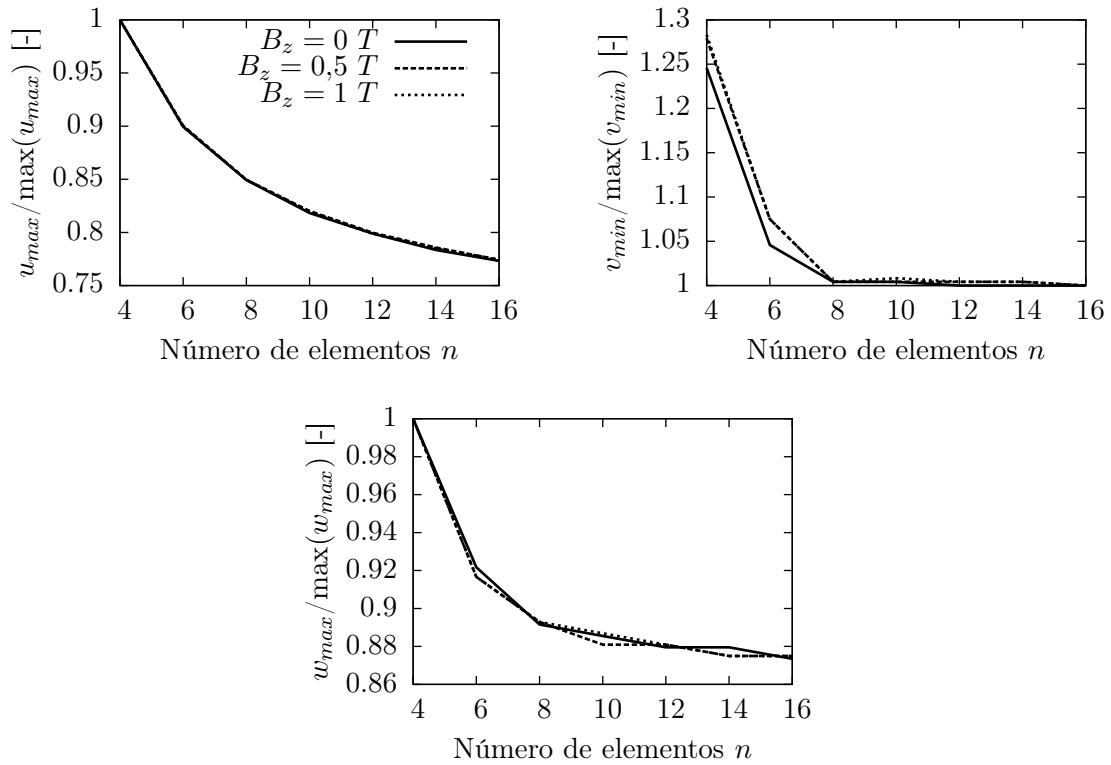


Figura 5.8: Convergencia de los desplazamientos mecánicos en presencia de un campo magnético.

En la Figura 5.7 se puede observar que los flujos eléctrico y térmico se ven muy afectados por la presencia de un campo magnético, ya que cuando $B_z = 1$ T es necesario utilizar al menos $n = 14$ para poder considerar que el cálculo ha convergido, mientras que cuando $B_z = 0$ el cálculo converge con $n = 8$.

Por otro lado, en la Figura 5.8 se observa que la convergencia de los desplazamientos mecánicos no se ve alterada por la presencia de B_z , ya que independientemente de su valor, se puede considerar que el problema ha convergido con $n = 12$. En base a estos resultados, se utilizará $n = 14$ para realizar el análisis de los casos en presencia de B_z . Por lo tanto, el número total de elementos de la malla es de 4964 y el número de nodos es 15330.

Finalmente, en la Figura 5.9 se muestran los resultados de j_x y q_x obtenidos con FEAP para el problema de la Sección 4.2 con $B_z = 0,5$ T.

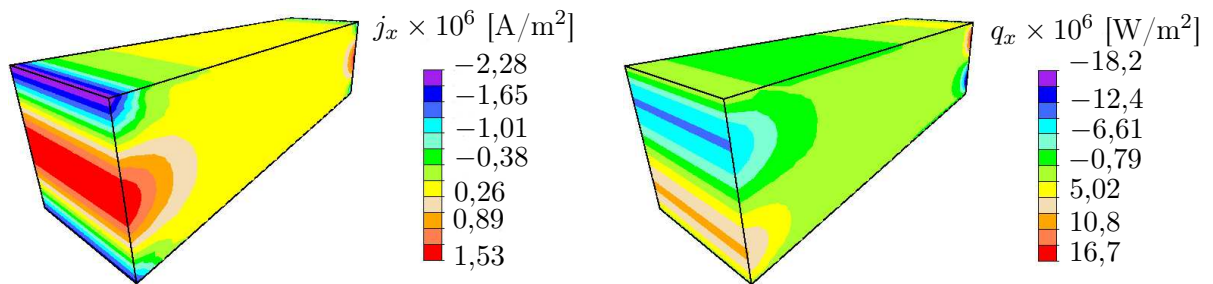


Figura 5.9: Resultados de los flujos de calor y eléctricos en dirección x obtenidos con FEAP para el caso de la Sección 4.2 con $B_z = 0,5$ T.

Se pueden observar puntos de concentración de los flujos en las caras superior e inferior del TE, debidos a los fuertes efectos tridimensionales que provoca la presencia de B_z . Además, las hipótesis asumidas para realizar el cálculo analítico dejan de ser válidas, ya que la distribución de T deja de ser lineal. Es por esto que no se ha utilizado un campo magnético de mayor intensidad en la Sección 4.2, ya que estas distorsiones de los flujos hacen casi imposible obtener una solución analítica precisa, siendo incluso necesario en empleo de una malla muy fina en FEAP para que los resultados sean fiables.

En conclusión, en presencia de B_z es necesario emplear una malla más refinada, debido a los acusados efectos rotacionales que este provoca en los flujos termoelectricos a pesar de que su valor pueda parecer pequeño.

6

Análisis del generador eMMRTG

En este capítulo se realiza un análisis completo del generador eMMRTG, obteniéndose sus prestaciones, como la eficiencia η y la potencia W , en función de distintos parámetros. También se realiza el análisis de las tensiones que se producen en los diferentes materiales que forman el termopar, con el fin de comprobar que este opera en un régimen seguro lejos de la tensión de rotura.

En primer lugar se realiza un estudio paramétrico del generador en función de la longitud de los termoelementos l_{TE} variando las condiciones de contorno mecánicas, con el fin de establecer la l_{TE} que se utilizará en el resto de análisis y comprobar qué condiciones de contorno producen menos tensiones.

Una vez establecida l_{TE} y las condiciones de contorno más favorables, se realiza un estudio paramétrico en función del ratio de áreas transversales de los termoelementos AR , con el objetivo de comprobar si existe algún AR que mejore las prestaciones del generador.

A continuación se realiza un análisis del comportamiento del generador cuando se encuentra bajo la acción de un campo magnético. Este estudio tiene dos objetivos principales: por un lado, comprobar si es posible mejorar las prestaciones del generador aplicando un campo magnético de forma intencionada y, por otro lado, analizar la influencia del ruido electromagnético producido por los equipos electrónicos en el comportamiento del generador.

Finalmente, se proponen dos nuevos diseños: el generador segmentado y el generador en cascada, y se estudian sus prestaciones comparándolas con las del generador clásico.

Es conveniente recordar que los ejes x , y , z tienen las direcciones que se muestran en la Figura 5.3.

6.1. Influencia de longitud de termoelementos y condiciones de contorno mecánicas

Debido a la falta de información proporcionada por la referencia [16], la longitud l_{TE} no es conocida a priori. De igual forma, tampoco se tiene ninguna información acerca de las condiciones de contorno mecánicas del generador, siendo estas de gran importancia ya que tienen una gran influencia sobre las tensiones mecánicas que se producen en el termopar.

A pesar de no conocer estos datos del generador, las prestaciones nominales η y W sí que son conocidas. Con el fin de caracterizar totalmente el termopar, se realiza un estudio paramétrico variando l_{TE} y las condiciones de contorno, de forma que se pueda inferir las condiciones que proporcionan las prestaciones nominales.

SECCIÓN 6.1. *Influencia de longitud de termoelementos y condiciones de contorno mecánicas*

Se estudian tres condiciones de contorno mecánicas del termopar diferentes: biarticulado, libre en el foco frío y libre en el foco caliente. Se representan estas C.C. en la Figura 6.1.

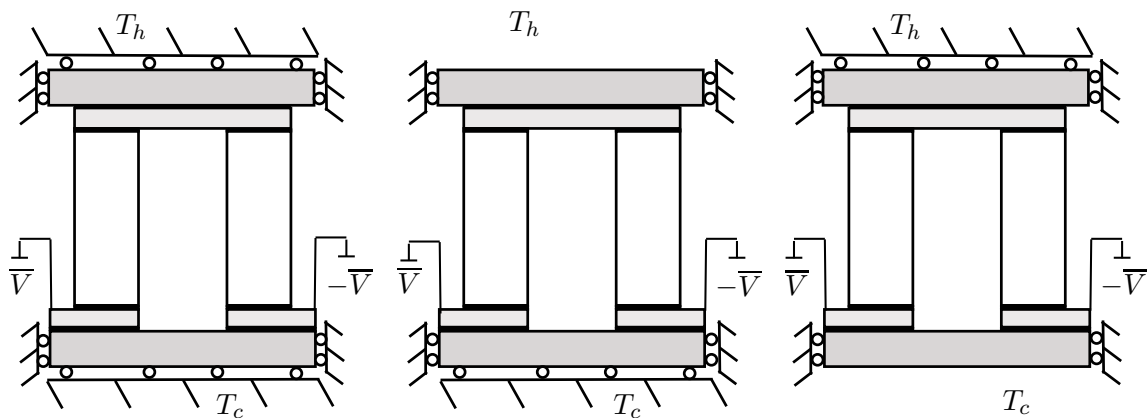


Figura 6.1: Condiciones de contorno del termopar. Izquierda: articulado, centro: libre en el foco caliente, derecha: libre en el foco frío.

Se ha elegido estudiar estas C.C. con el objetivo de comprobar cómo afectan cada una de ellas a las tensiones térmicas que aparecen en el termopar. En una primera aproximación se estima que las mayores tensiones se producirán en el caso articulado, debido a que la expansión del termopar en la dirección vertical está restringida. Por otro lado, se espera que las tensiones sean mínimas en el caso libre en el foco caliente, debido a que se permite la expansión libre del termopar en la zona donde la diferencia de T es mayor.

Los resultados de las prestaciones obtenidas con FEAP se muestran en la Figura 6.2.

En primer lugar se puede observar que las líneas correspondientes a cada una de las C.C. se encuentran totalmente superpuestas. Esto se debe a que las C.C. mecánicas no tienen efecto apreciable en los flujos eléctrico y térmico que se producen en el interior del termopar, por lo que se puede afirmar que estas C.C. no tendrían relevancia si el objetivo del estudio fuese únicamente optimizar la eficiencia o la potencia del generador.

Por otro lado, se puede observar que tanto I_{out} (y por lo tanto W) como Q_h disminuyen con l_{TE} . El motivo es que cuanto más largos son los termoelementos, mayores son tanto su resistencia eléctrica total como su resistencia térmica equivalente. Sin embargo, a pesar de que los dos flujos disminuyen con l_{TE} , la eficiencia del generador aumenta hasta alcanzar un valor constante de $\eta = 7,15$. Esto ocurre debido a que I_{out} decrece más lentamente con l_{TE} que Q_h , y ambas convergen a un valor constante cuando $l_{TE} = 5$ mm.

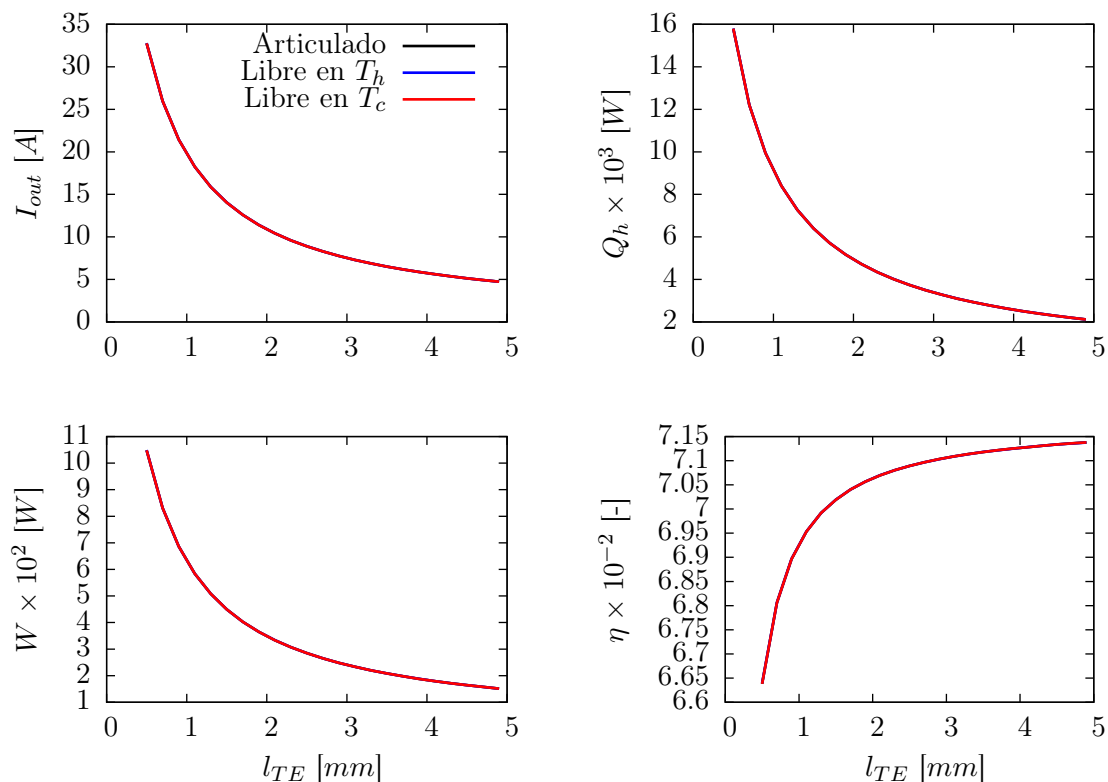


Figura 6.2: Prestaciones del generador en función de l_{TE} para tres condiciones de contorno mecánicas distintas.

Las tensiones de Tresca máximas [29] obtenidas con FEAP para cada una de las configuraciones se muestran en la Figura 6.3.

En primer lugar se puede observar que las mayores tensiones de Tresca se alcanzan en Al_2O_3 , seguida de Cu , $Sn-Pb$ y finalmente *Skutterudite*. Las tensiones son siempre máximas en Al_2O_3 , y contrariamente a lo que se esperaba, para la configuración de borde libre en el foco caliente, aunque esta configuración también minimiza las tensiones en $Sn-Pb$ y en Cu . Analizando el límite elástico σ_Y de cada uno de los materiales (ver Tabla 5.1), se puede observar que $Sn-Pb$ es el material con σ_Y más bajo y, consecuentemente, el más crítico. Por lo tanto y para estar en el lado de la seguridad, se establece esta C.C. mecánica como configuración a utilizar en el resto de simulaciones.

Por otro lado, se puede observar que las tensiones aumentan con l_{TE} en Al_2O_3 , $Sn-Pb$ y Cu , mientras que en *Skutterudite* disminuyen. Esto se debe a que cuanto mayor es l_{TE} menor es el gradiente térmico, reduciéndose las tensiones térmicas en *Skutterudite*.

Finalmente, nótese que todo el termopar trabaja en régimen plástico, ya que la gran diferencia de T entre el foco frío y el caliente produce tensiones superiores al límite elástico

SECCIÓN 6.1. *Influencia de longitud de termoelementos y condiciones de contorno mecánicas*

en todos los materiales independientemente del valor de l_{TE} .

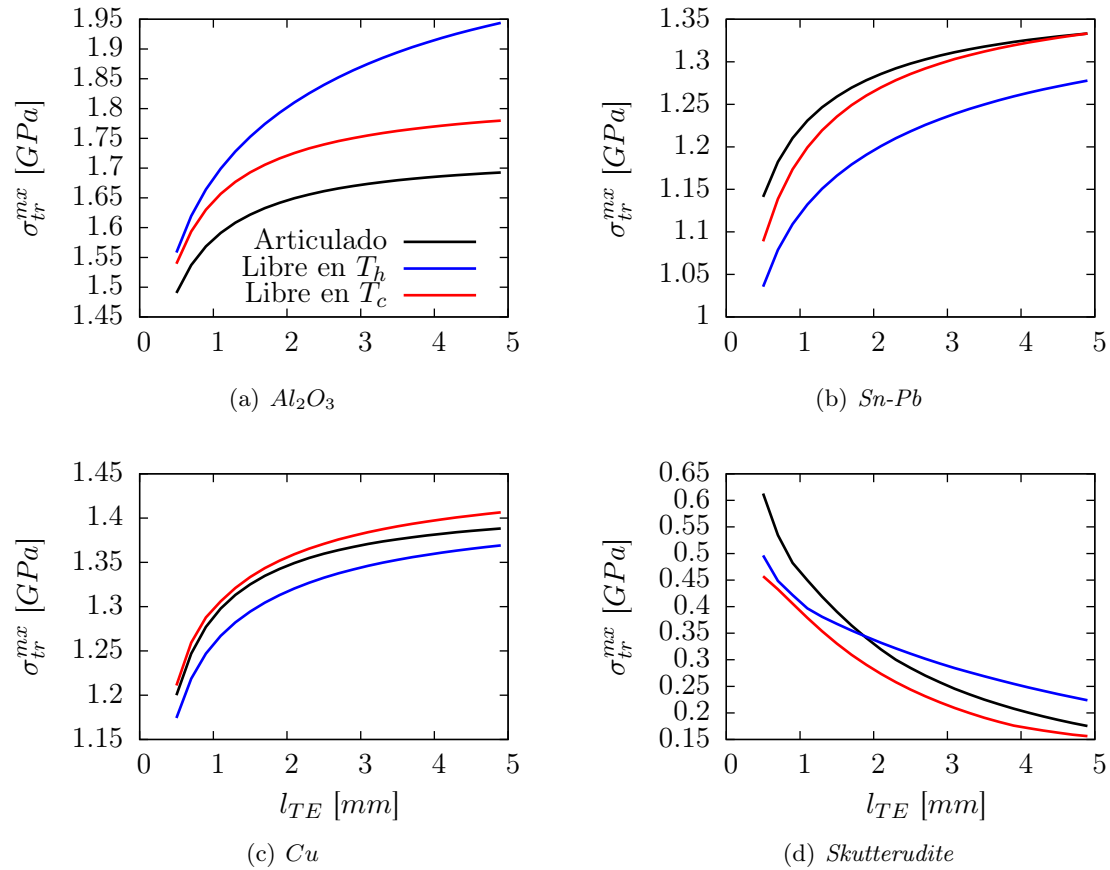


Figura 6.3: Tensiones de Tresca en los diferentes materiales que forman el termopar para tres condiciones de contorno distintas.

En base a los resultados del análisis paramétrico se llega a las siguientes conclusiones:

- La eficiencia máxima se obtiene con $l_{TE} = 5$ mm, mientras que para este valor la potencia eléctrica producida es mínima. Además, los valores de η y W obtenidos con $l_{TE} = 5$ mm se corresponden con los proporcionados por [16].
- Se elige el borde libre en el foco caliente como configuración para realizar el resto de simulaciones, ya que de este modo se minimizan las tensiones de Tresca en $Sn-Pb$, el material más crítico.
- Todo el termopar trabaja en régimen de plasticidad independientemente de l_{TE} .
- Por todo lo anterior, se establece $l_{TE} = 5$ mm para realizar el resto de simulaciones.

6.1.1. Distribuciones de temperatura y voltaje

Las distribuciones de T y V en el termopar se muestran en la Figura 6.4.

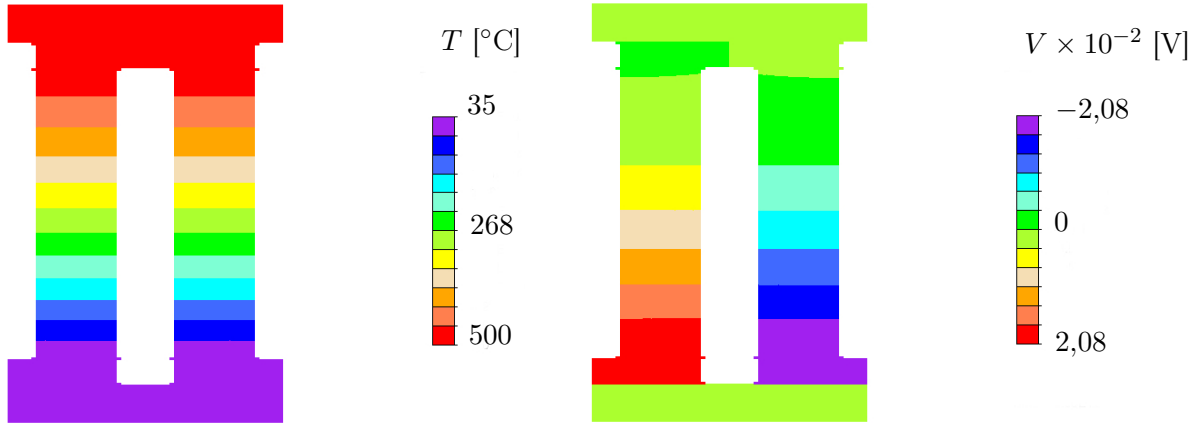


Figura 6.4: Distribuciones de temperatura y voltaje en el termopar con $l_{TE} = 5$ mm.

En primer lugar, se puede observar que tanto la distribución de T como la de V son simétricas.

Por un lado, se observa que la distribución de T a lo largo de los TEs es prácticamente lineal, debido a que el flujo de calor producido por *Fourier* tiene más importancia que el producido por el efecto *Joule*, y que el salto de T es casi nulo en Al_2O_3 y Cu debido a la alta conductividad térmica de estos dos materiales.

Por otro lado, se observa que la distribución de V es parabólica a lo largo de los TEs, debido a que la resistividad ρ de *Skutterudite* varía de forma cuadrática con T . Además, se observa que V es nulo en Al_2O_3 debido a su alta resistividad que impide el paso de la corriente eléctrica.

6.1.2. Desplazamientos mecánicos

En la Figura 6.5 se muestran los desplazamientos mecánicos u , v en las direcciones x , y respectivamente.

Se puede observar que u es máximo en la parte superior del TE, ya que la T de esa zona es muy elevadas en comparación con la T de referencia, produciéndose la expansión del material. Nótese que este máximo u no se produce en Al_2O_3 superior debido a que se cumplen las condiciones de contorno mecánicas.

Por otro lado, se observa que v es máximo en las esquinas de Al_2O_3 superior, debido también a la expansión producida en esa zona causada por las altas T . Nótese que v es

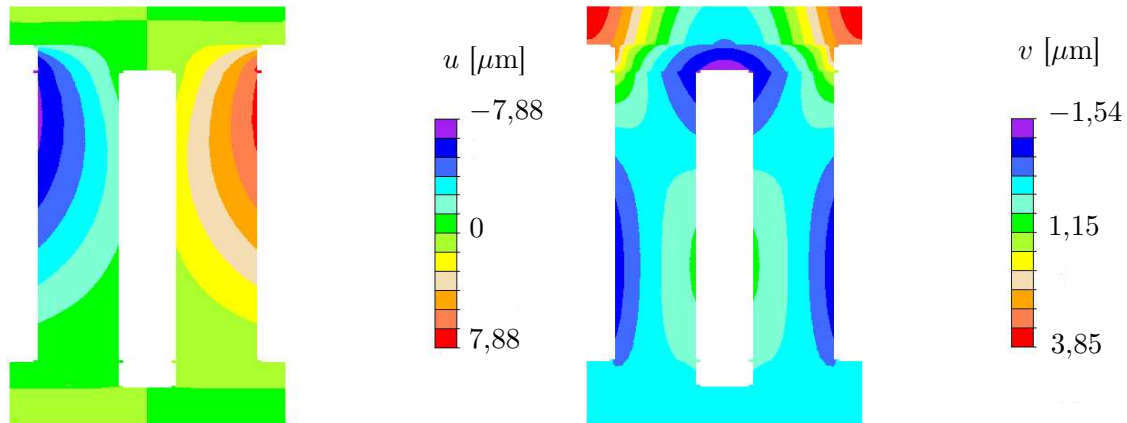


Figura 6.5: Desplazamientos mecánicos u y v en el termopar con $l_{TE} = 5$ mm.

nulo en Al_2O_3 inferior al cumplirse las C.C.

6.1.3. Distribución de tensiones

En la Figura 6.6 se muestran las seis componentes del tensor de tensiones, las cuales serán analizadas con el objetivo de estudiar cómo afectan a las tensiones de Tresca y cuales son los principales mecanismos que las producen.

En primer lugar se estudiarán los motivos por los que se producen tensiones en el termopar:

- Condiciones de contorno: aparecen tensiones elevadas en las zonas donde los movimientos se encuentran restringidos por las condiciones de contorno.
- Uniones entre materiales: dado que T se puede considerar uniforme en las uniones entre materiales, y sus coeficientes de expansión térmica son diferentes, un material tenderá a expandirse más que el otro, produciéndose las tensiones debido a la mutua restricción.
- Elevadas temperaturas: los elevados valores de T cerca del foco caliente producen una expansión del material mucho mayor en esta zona que en el foco frío. En todos los casos estudiados en este trabajo se producirá expansión del material dado que las T en el interior del termopar son siempre mayores que la T de referencia.

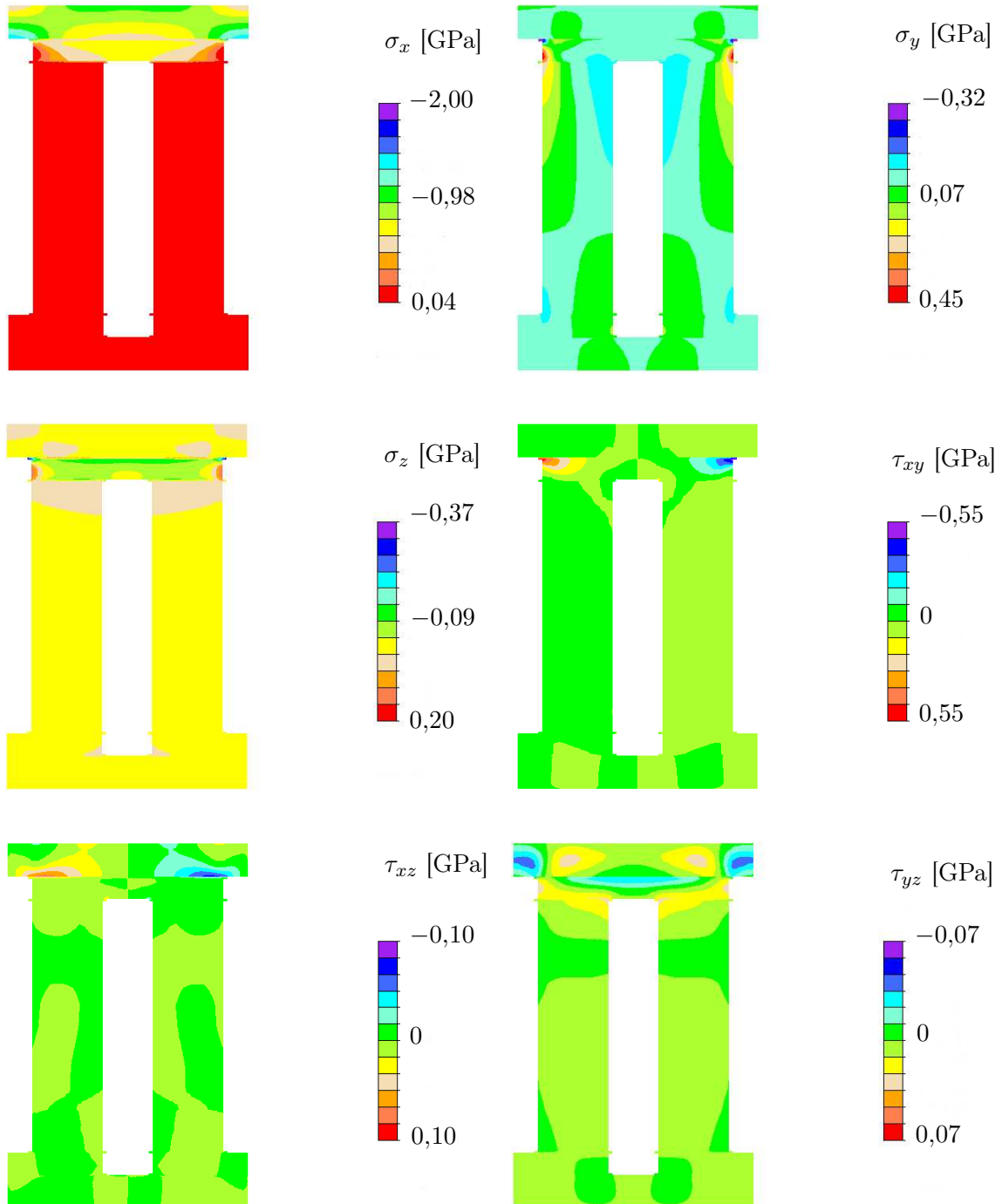


Figura 6.6: Componentes del tensor tensiones en el termopar con $l_{TE} = 5$ mm.

A continuación se analiza cada una de las tensiones individualmente:

Se puede observar que σ_x toma valores muy pequeños cerca del foco frío y en los TEs en comparación con sus valores en la zona cercana al foco caliente. Esto se debe a que, a pesar de la C.C. que no permite el desplazamiento en la dirección x simulando la presencia de los termopares contiguos, la elevada diferencia de T entre el foco frío y el foco caliente hace que T sea el factor más influyente en la aparición de las tensiones. Por ello, se producen elevadas tensiones de compresión en esta zona, cercanas a la tensión de rotura por compresión de Al_2O_3 , cuyo valor es 2,1 GPa. Hay que destacar que el hecho de que el color sea uniforme en la mayor parte del termopar no significa que el valor de la tensión también lo sea, sino que su variación es mucho menor en esta zona que en el foco caliente. Nótese que esta tensión es la más elevada.

En cuanto a σ_y , alcanza los mayores valores de tracción y compresión en Cu y $Sn-Pb$ del foco caliente respectivamente. Esto se debe a los diferentes valores de α_T de ambos materiales que provoca que uno de ellos tienda a expandirse más que el otro. Nótese que σ_y es prácticamente nula en el resto del termopar, debido a que el desplazamiento en la dirección y está permitido en el foco caliente, lo que reduce sustancialmente las tensiones.

Las tensiones σ_z son producidas también en la unión entre distintos materiales debido a la alta T y los diferentes coeficientes de expansión térmica. Sin embargo, en este caso también influye la condición de contorno impuesta para simular la simetría del termopar, produciéndose tensiones en el centro del termopar mientras que disminuyen hasta hacerse nulas en sus extremos libres.

τ_{xy} es la tensión cortante que aparece en un plano de z constante. Es prácticamente nulo en todo el termopar menos en la unión entre Cu y $Sn-Pb$ en el foco caliente, debido una vez más a los diferentes valores de α_T y a que son los materiales más deformados. El hecho de que tenga valores tan bajos en los TEs se debe a que el desplazamiento no está restringido, reduciendo las tensiones.

τ_{xz} es la tensión cortante que aparece en un plano de y constante. Es máxima en la unión entre $Sn-Pb$ y Al_2O_3 del foco caliente debido a la diferencia de α_T y a las condiciones de contorno mecánicas. Nótese que es aproximadamente la quinta parte de τ_{xy} , por lo que la deformación que aparece en un plano de y constante será despreciable.

τ_{yz} es la tensión cortante que aparece en un plano de x constante. Se produce por los mismos mecanismos que τ_{xz} y se puede observar que sus valores son incluso inferiores, siendo la deformación en este plano también despreciable.

6.1.4. Tensiones de Tresca y malla deformada

En la Figura 6.7 se muestran las tensiones de Tresca que aparecen en el termopar así como la malla deformada a causa de estas tensiones utilizando un factor de escala $\times 100$ con el fin de apreciar mejor las deformaciones.

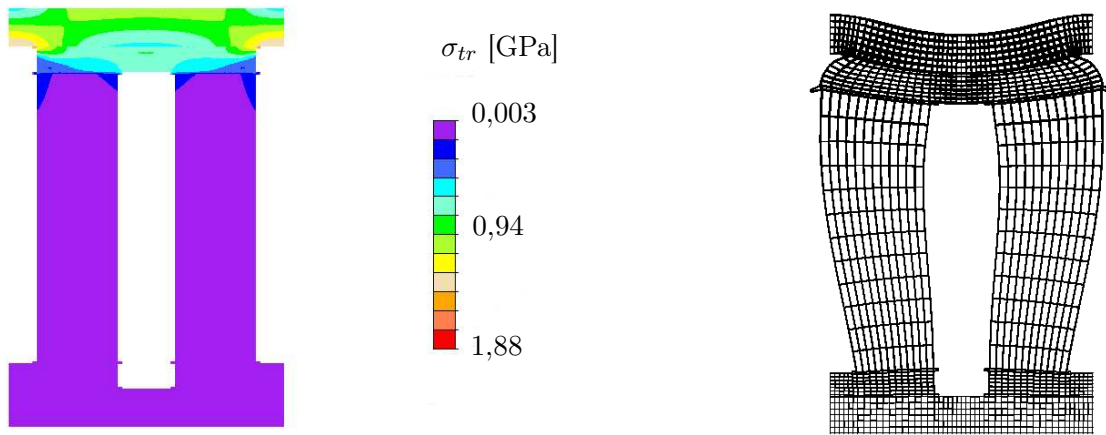


Figura 6.7: Tensiones de Tresca y malla deformada en el termopar con $l_{TE} = 5$ mm con factor de escala $\times 100$.

Se puede observar que las mayores tensiones se producen en los extremos de Al_2O_3 del foco caliente, debido principalmente a que el desplazamiento u en esta zona está restringido y las alta T producen tensiones muy elevadas. Por otro lado, se puede observar que σ_{tr} es mil veces menor en el foco frío que en el foco caliente y la deformación es prácticamente nula.

Nótese que las tensiones de Tresca producidas provocan que todo el termopar se encuentre trabajando en régimen de plasticidad, dado que los materiales no tienen un límite elástico lo suficientemente elevado para mantenerse en el régimen elástico. Por lo tanto, es importante controlar las tensiones que se producen debido a la alta T en este tipo de aplicaciones, ya que podrían producir la rotura de alguno de los elementos que forman el generador.

6.1.5. Distribuciones de los flujos de calor y eléctricos

Las distribuciones de j_x, j_y, q_x, q_y en el termopar se muestran en la Figura 6.8.

En cuanto a los flujos eléctricos, se puede observar que j_x alcanza sus valores máximos en los extremos exteriores de Cu del foco frío y en el centro de Cu del foco caliente, mientras que es nula en Al_2O_3 y los TEs.

En cuanto a j_y , alcanza su valor máximo en los TEs mientras que muestra una rápida variación cuando entra o sale de Cu . Esto se debe a la dirección de la corriente total, que es horizontal cuando entra y sale por Cu y vertical en los TEs, apareciendo los gradientes debido al cambio de dirección en las uniones entre los materiales.

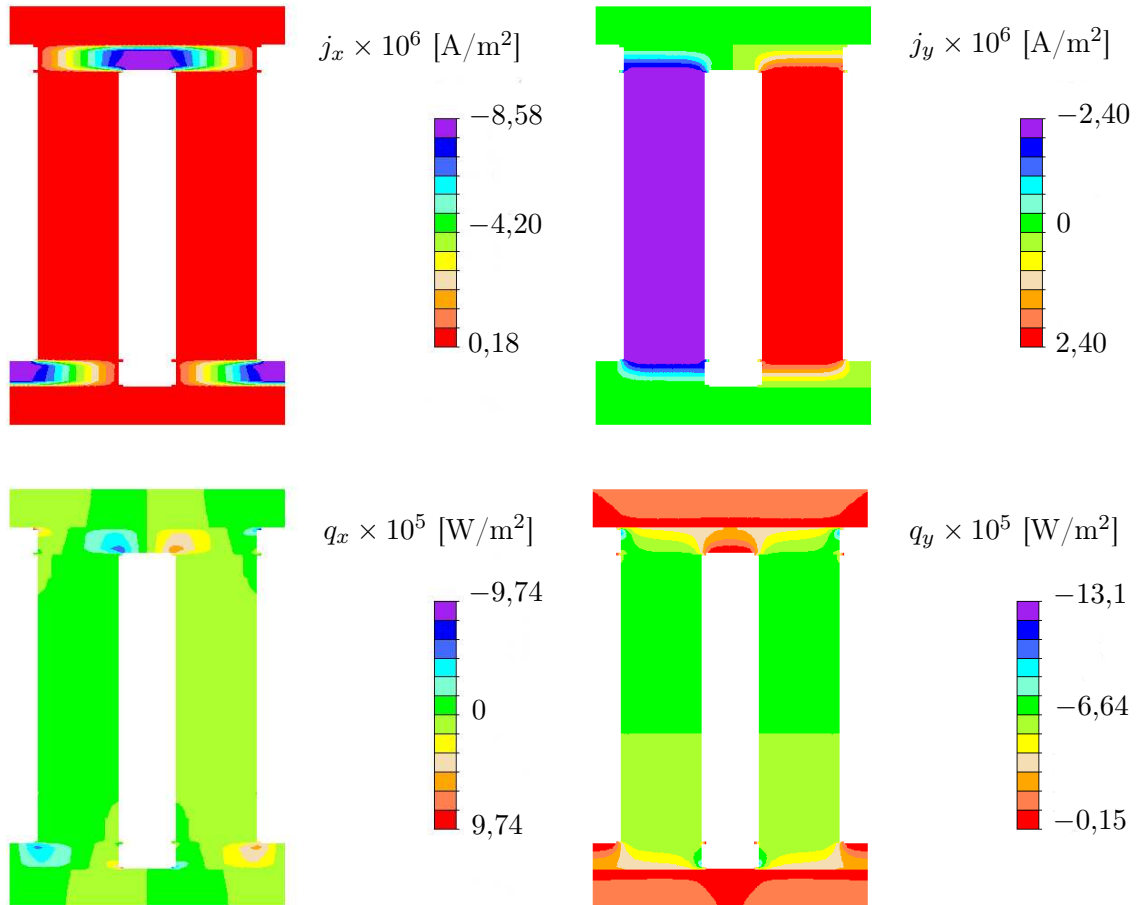


Figura 6.8: Distribuciones de los flujos eléctricos j_x y j_y y térmicos q_x y q_y en el termopar con $l_{TE} = 5$ mm.

Por otro lado, q_x es nulo en todo el termopar excepto en las esquinas de las uniones entre dos materiales donde se produce un aumento o una reducción de área transversal, debido a la recirculación vertical-horizontal del flujo

A su vez, q_y es mínimo en Al_2O_3 porque tienen una mayor superficie transversal, mientras que su valor aumenta en los TEs por la reducción de área. Se debe destacar que q_y es negativo porque siempre se dirige desde el foco caliente al foco frío, y la gran diferencia de T entre ambos focos provoca que el flujo de calor producido por *Fourier* domine frente al producido por el efecto *Peltier*.

6.2. Estudio de la influencia del ratio de áreas transversales de los termoelementos

En esta sección se realiza un estudio paramétrico sobre la influencia del ratio de áreas transversales de los TEs en las prestaciones y tensiones que se producen en el generador. Para ello, se diseña una nueva malla parametrizada en función de un factor denominado “Aspect Ratio” AR , el cual nos permite modificar las dimensiones de uno de los TEs. Se mantiene constante el espesor en la dirección z de ambos TEs y la superficie transversal del TE tipo-p, mientras que se modifica la del tipo-n utilizando el AR a partir de la siguiente relación:

$$AR = \frac{A_n}{A_p} = \frac{a_n}{a_p} \quad \rightarrow \quad a_n = a_p AR \quad (6.1)$$

donde a_n y a_p son las anchuras de los TEs tipo-n y tipo-p respectivamente, manteniéndose constante el valor $a_p = 1,4$ mm. La nueva geometría y los parámetros que intervienen se pueden observar en la Figura 6.9.

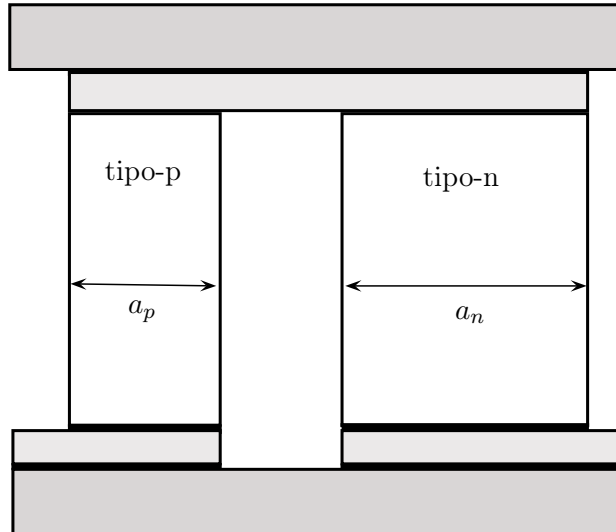


Figura 6.9: Geometría y parámetros de la malla utilizada para estudiar la influencia del ratio de áreas transversales de los termoelementos.

En primer lugar, se realizará un análisis de la eficiencia y la potencia producida por un generador termoeléctrico formado por TEs con este tipo de geometría, variando el parámetro AR con el objetivo de maximizar las prestaciones. En segundo lugar, se realizará el mismo tipo de estudio con el objetivo de analizar cómo varían las tensiones de Tresca en cada uno de los materiales que forman el termopar. Finalmente se mostrarán los resultados obtenidos con FEAP para la configuración elegida como óptima.

6.2.1. Análisis de la eficiencia y la potencia

El análisis se ha realizado para $0,6 \leq AR \leq 1,4$ por dos motivos: primero, este rango permite obtener conclusiones generalizables, y segundo, un rango más amplio supone tamaños de TEs que no tienen sentido en cuanto a fabricación. Nótese que cuando $AR < 1$ el TE tipo-n es más pequeño que el tipo-p, mientras que cuando $AR > 1$ el tipo-n es mayor.

En la Figura 6.10 se muestran los resultados de potencia producida y eficiencia proporcionados por FEAP.

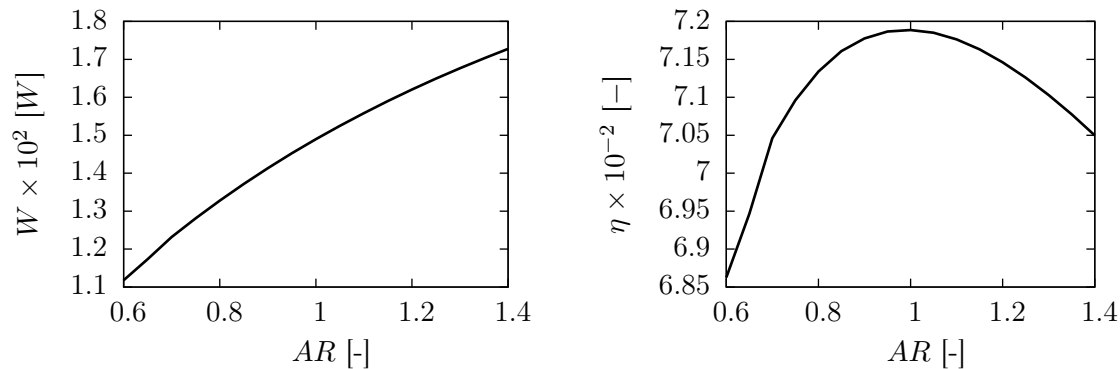


Figura 6.10: Potencia producida y eficiencia del generador termoelectrico en función del ratio de áreas transversales de los termoelementos.

Se puede observar que cuando $AR = 1$ los resultados obtenidos son los mismos que los presentados en la Sección 6.1 con $l_{TE} = 5$ mm, ya que se trata exactamente del mismo caso.

Analizando el comportamiento de W en función de AR , se puede observar que tiene una tendencia parabólica, aunque en realidad es prácticamente lineal ya que la curvatura es muy baja. Siempre es creciente con AR , tomando su valor mínimo $W = 99,47$ W cuando $AR = 0,6$ y alcanzando el máximo $W = 181$ W cuando $AR = 1,4$.

En cuanto al comportamiento de η , se observa que tiene una tendencia aproximadamente parabólica, alcanzando su valor máximo $\eta = 7,19\%$ cuando $AR = 1$. Por otro lado, se observa que cuando $AR < 1$ la eficiencia disminuye con una pendiente mucho más pronunciada que cuando $AR > 1$, siendo $\eta = 6,62\%$ para $AR = 0,6$ y $\eta = 7,08\%$ cuando $AR = 1,4$.

El motivo por el que W siempre es creciente con AR es que una mayor A_n permite el paso de una mayor cantidad de corriente eléctrica, que manteniendo V constante produce un aumento de W . Por otro lado, la eficiencia disminuye dado que a mayor área transversal también aumenta el flujo de calor que atraviesa los TEs, y lo hace en mayor proporción que la corriente. En la Figura 6.11 se puede ver como varían I_{out} y Q_h en función de AR .

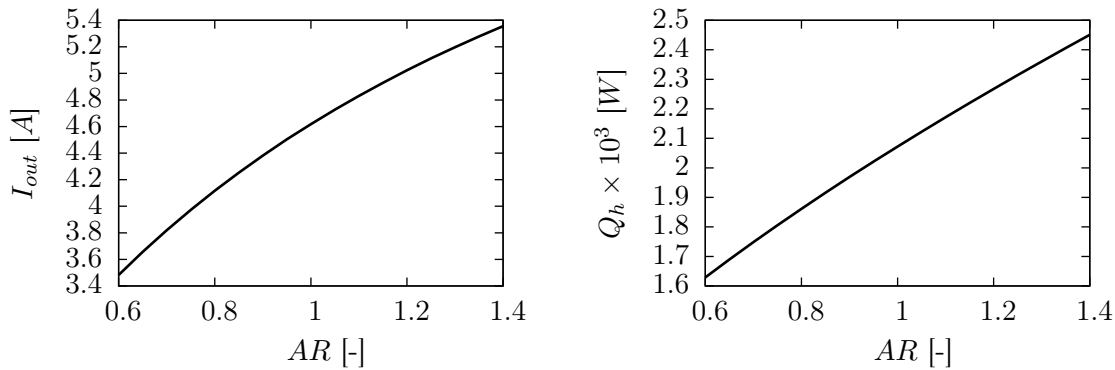


Figura 6.11: Intensidad eléctrica y potencia calorífica producidas en el generador termoeléctrico en función del ratio de áreas transversales de los termoelementos.

Por lo tanto, en base a los resultados obtenidos existen dos posibles configuraciones óptimas dependiendo de los requerimientos de la aplicación:

- Alta eficiencia: en misiones en las que la eficiencia de generación de energía sea el parámetro de mayor importancia, la configuración óptima se consigue con $AR = 1$, ya que proporciona la η más elevada. Un ejemplo serían misiones espaciales en las que la reducción del combustible necesario para producir una determinada potencia supone una gran reducción de los costes, gracias al ahorro económico derivado de la compra del propio combustible y a la reducción de costes asociados conseguida al reducir el peso de la nave.
- Alta potencia: en aplicaciones en las que la eficiencia no es tan crítica y la potencia producida es el parámetro más relevante, la configuración óptima se consigue con $AR = 1,4$, ya que proporciona la W máxima. Un ejemplo de este tipo de aplicaciones podría ser el empleo de los generadores termoeléctricos en procesos industriales aprovechando el calor residual, o bien en la turbina o la tobera de los motores de las aeronaves.

6.2.2. Análisis de las tensiones

De forma análoga al estudio de las prestaciones del generador, se realiza ahora el estudio de las tensiones de Tresca que se producen en los diferentes materiales que forma el termopar en función del parámetro AR . Este estudio permitirá determinar si las configuraciones óptimas establecidas en la Sección 6.2.1 son fiables mecánicamente hablando o si las tensiones aumentan de forma incontrolada produciendo el fallo del termopar.

Los resultados obtenidos con FEAP se muestran en la Figura 6.12.

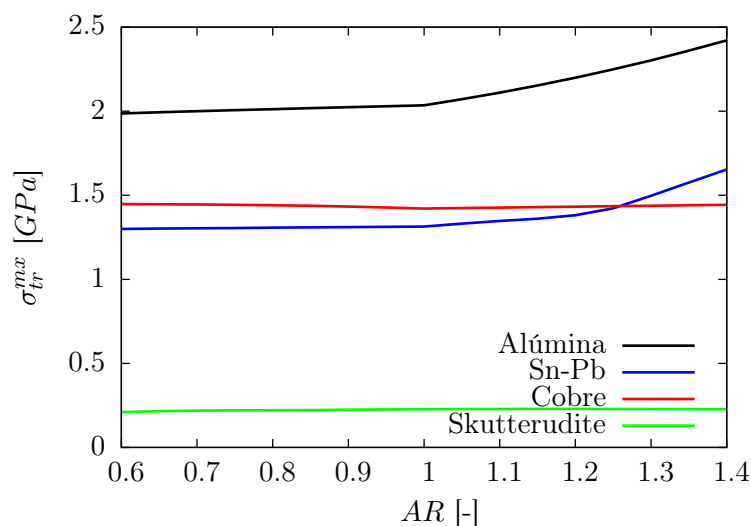


Figura 6.12: Tensiones de Tresca en los diferentes materiales que forman el termopar en función del ratio de áreas transversales de los termoelementos.

Se puede observar que las tensiones de Tresca máximas no varían de forma significativa en *Cu* y *Skutterudite* para todo el rango de *AR*. Sin embargo, a partir de $AR = 1$ las tensiones comienzan a aumentar en Al_2O_3 y *Sn-Pb*, produciéndose las tensiones máximas cuando $AR = 1,4$.

El motivo por el que las tensiones aumentan en Al_2O_3 y *Sn-Pb* al aumentar *AR* es principalmente que se restringe su capacidad de deformación. Con este aumento, el lateral del TE tipo-n se acerca al extremo derecho del termopar, reduciendo la superficie de las placas de Al_2O_3 que se encuentran en voladizo. Por lo tanto, el espesor que ocupan todos los materiales en esa zona es mucho mayor que antes (desde el foco caliente hasta el foco frío), reduciendo la deformación posible en la dirección *y* y en consecuencia aumentando las tensiones producidas. También hay que tener en cuenta que la deformación en dirección *x* en la zona cercana al foco caliente se encuentra restringida por las C.C. mecánicas (ver Figura 6.1), contribuyendo al aumento de las tensiones.

Por otro lado, las tensiones no aumentan tan bruscamente en *Skutterudite* debido a que se le permite deformarse libremente, y en el caso de *Cu* debido a que el situado en el foco caliente también tiene permitida la deformación, mientras que el situado en el foco frío, aunque restringido por las C.C., no sufre tanto gracias a las bajas *T*.

Finalmente, dado que el aumento en las tensiones no es muy acusado, siendo de un 26,69% en Al_2O_3 y de un 36,84% en *Sn-Pb*, y que todo el termopar se encuentra trabajando en régimen plástico aún con las tensiones mínimas, se considera que las tensiones de Tresca no suponen un criterio limitante a la hora de establecer el diseño óptimo en función del *AR*. Por lo tanto, en las próximas subsecciones se mostrarán las distribuciones proporcionadas por FEAP para la configuración de máxima potencia.

6.2.3. Distribuciones de temperatura y voltaje

En la Figura 6.13 se muestran las distribuciones de T y V obtenidas con FEAP para el termopar con $AR = 1,4$.

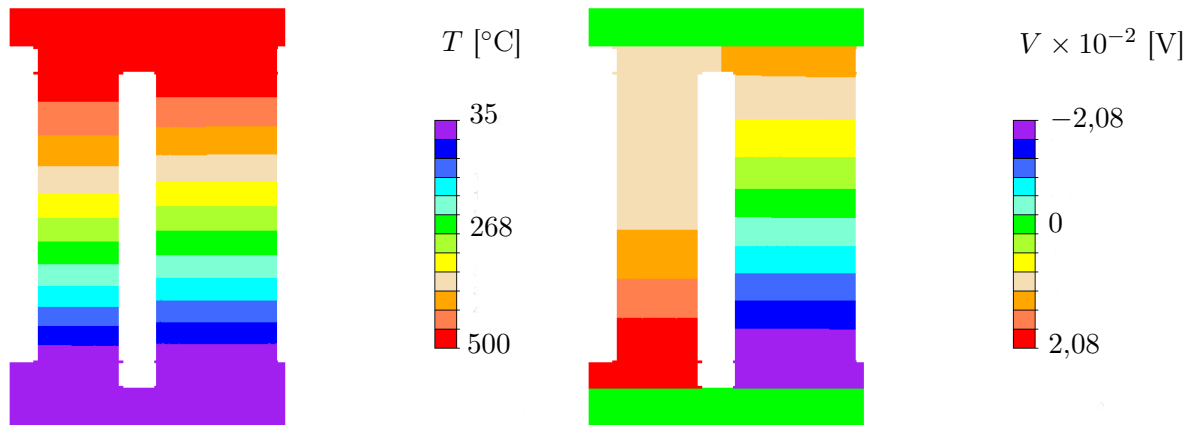


Figura 6.13: Distribuciones de temperatura y voltaje en el termopar con $AR = 1,4$.

Se observa que T varía de forma prácticamente lineal en los TEs como en el caso con $AR = 1$. Sin embargo, V presenta una distribución diferente, ya que disminuye lentamente en el TE tipo-p llegando a aumentar de nuevo en Cu , para finalmente decrecer de forma brusca en el TE tipo-p. Esto se debe a que el valor de \mathbf{j} cambia en cada TE, ya que el área transversal de ambos TEs es diferente y se debe cumplir la condición de conservación de la carga.

Finalmente, también se puede observar que se cumplen las condiciones de contorno de T y que V es nulo en Al_2O_3 debido a su alta resistividad.

6.2.4. Desplazamientos mecánicos

En la Figura 6.14 se muestran los desplazamientos mecánicos u , v para el termopar con $AR = 1,4$.

En primer lugar se puede observar que, a diferencia de la distribución de desplazamientos mecánicos obtenida en la Sección 6.1, en este caso no existe simetría de desplazamientos, debido a la asimetría del dominio de estudio.

Por otro lado, se puede observar que la distribución de u es similar a la de la Sección 6.1, aunque se produce un desplazamiento negativo en una pequeña región del TE tipo-n. En cuanto a la distribución de v , se observa que el desplazamiento en el TE tipo-n es considerablemente menor al que tiene lugar en el tipo-p. Además, como se predijo en la Sección 6.2.2, el desplazamiento vertical en Al_2O_3 del foco caliente es mucho menor en la

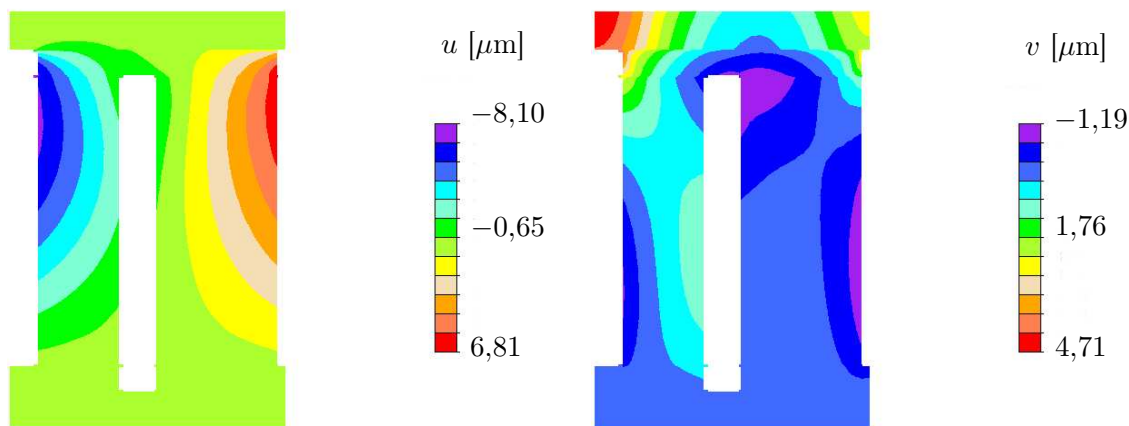


Figura 6.14: Desplazamientos mecánicos u y v en el termopar con $AR = 1,4$.

zona del TE tipo-n debido a la gran cantidad de masa concentrada en esa zona, resultando en un aumento de las tensiones en Al_2O_3 .

En cuanto a los valores obtenidos, se puede comprobar que el desplazamiento horizontal máximo u_{max} es superior en el caso original, mientras que el desplazamiento vertical máximo v_{max} es superior en el caso con $AR = 1,4$.

6.2.5. Distribuciones de los flujos de calor y eléctricos

Los flujos térmicos y eléctricos obtenidos con FEAP para el termopar con $AR = 1,4$ se muestran en la Figura 6.15.

En primer lugar, analizando los flujos eléctricos se puede observar que se ha perdido la simetría en j_y que existía en el caso $AR = 1$. Debido a que el área transversal de los TEs es diferente, j_y debe ser distinta en cada uno de ellos para que se cumpla la conservación de la carga, y la corriente total que circula por el termopar sea constante. Por otro lado, analizando la distribución de j_x se observa que es máxima en los extremos de Cu inferiores y en el centro de Cu superior, disminuyendo en el resto del material por el cambio de dirección de la corriente que se produce al entrar esta en los TEs.

En cuanto a las distribuciones del flujo de calor, se puede observar que q_x es nulo en la mayor parte del termopar, aunque aparecen unas burbujas de recirculación del flujo en las esquinas de los TEs con Cu y en la unión entre Al_2O_3 y Cu . Esto se debe al cambio de dirección del flujo de calor en estas zonas. Por otro lado, se observa que q_y es mínimo en Al_2O_3 debido a su gran área transversal, mientras que aumenta en los TEs a causa de su reducción. Nótese que q_y disminuye en el TE tipo-n, debido a que su área transversal es mayor que la del tipo-p.

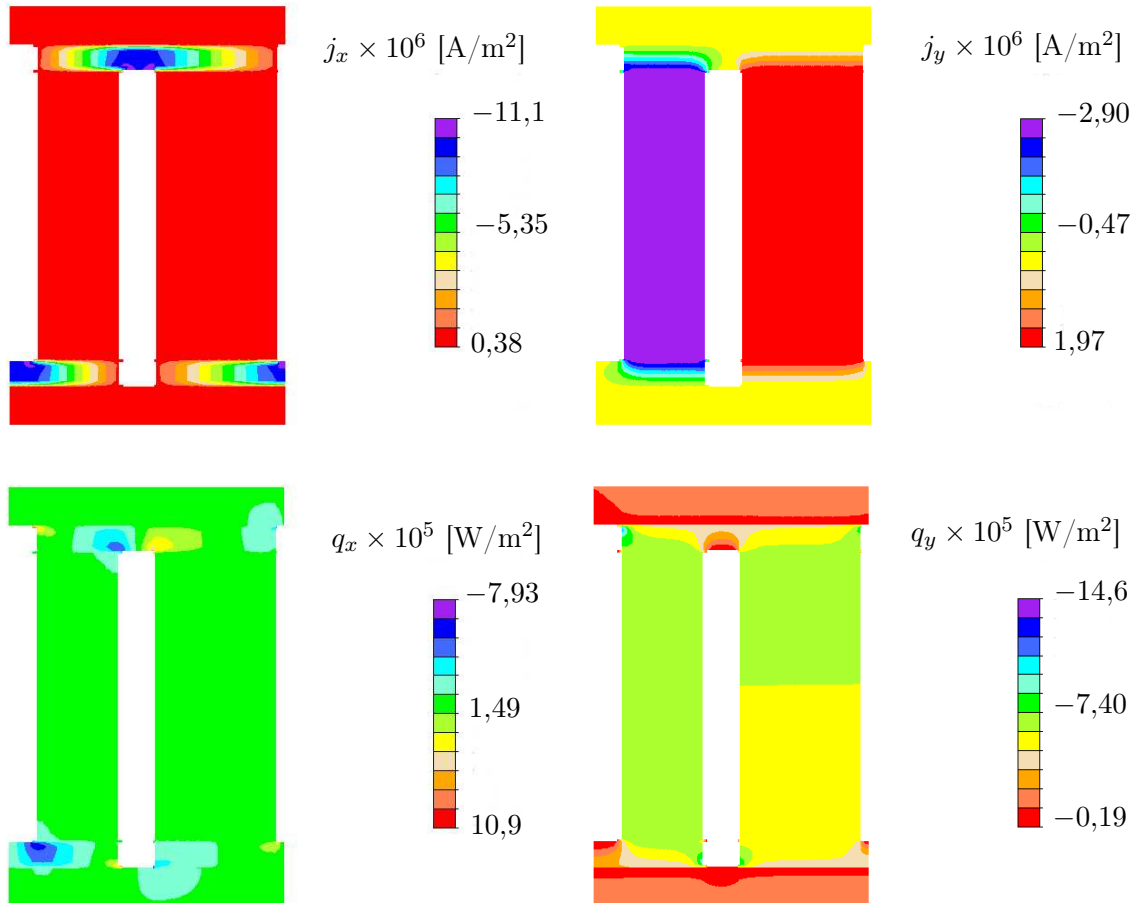


Figura 6.15: Distribuciones de los flujos eléctricos j_x y j_y y térmicos q_x y q_y en el termopar con $AR = 1,4$.

6.2.6. Tensiones de Tresca y malla deformada

En la Figura 6.16 se muestran las tensiones de Tresca obtenidas con FEAP para el termopar con $AR = 1,4$ y la malla deformada utilizando un factor de escala $\times 100$.

Se observa que las tensiones son muy pequeñas en los TEs y la zona cercana al foco frío en comparación con la zona del foco caliente. Esto se debe: (i) otra vez, a las altas T del foco caliente, que producen la expansión de los materiales, (ii) a la diferencia de α_T , ya que algunos materiales intentan expandirse más que otros, resultando en tensiones elevadas.

Por otro lado, se observa que el TE tipo-p se deforma mucho más que el tipo-n a pesar de que las tensiones son similares en ambos. Esto se debe a que el TE tipo-n tiene más masa que el otro. Nótese que Cu es el material que más se deforma, ya que tiene el α_T más elevado después de $Sn-Pb$.

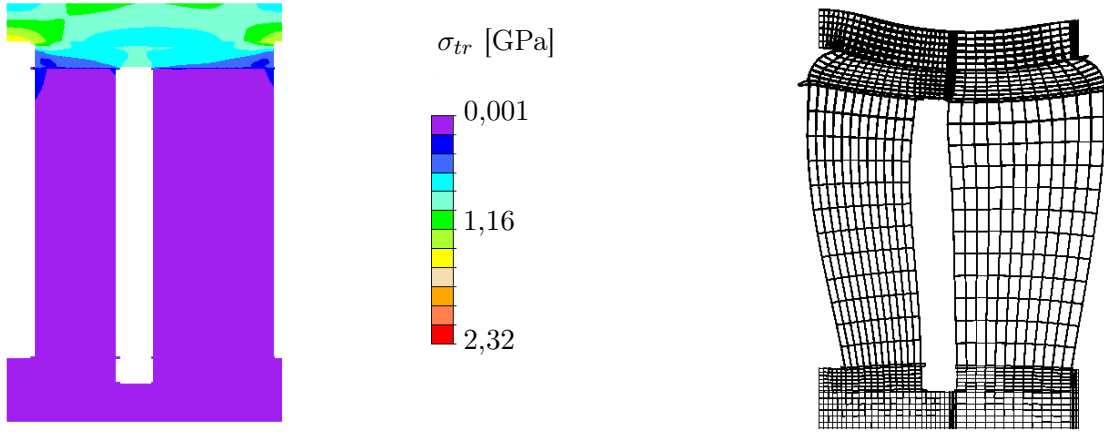


Figura 6.16: Tensiones de Tresca y malla deformada en el termopar con $AR = 1,4$ con factor de escala $\times 100$.

6.3. Estudio de la influencia de un campo magnético

En esta sección se realiza un estudio sobre cómo la presencia de un campo magnético puede alterar el comportamiento de un generador termoeléctrico. Este análisis ha sido realizado con dos objetivos principales:

- Comprobar si la aplicación de un campo magnético de forma deliberada permite mejorar la eficiencia o la potencia producida por el generador termoeléctrico.
- Comprobar los posibles efectos perjudiciales que el ruido electromagnético producido por los dispositivos electrónicos podría ocasionar en las prestaciones del generador. De acuerdo a la referencia [16], el campo magnético existente en el eMMRTG es de $B_z = 25 \text{ nT}$.

Para poder realizar los análisis de esta sección es necesario imponer el B_z deseado. Debido a que la geometría de la malla no es sencilla, B_z no se puede imponer de forma directa utilizando el *elmt05*, sino que es necesario utilizar un potencial magnético escalar φ como condición de contorno en la malla. φ se encuentra relacionado con \mathbf{H} a partir de la siguiente expresión:

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi \quad (6.2)$$

estando finalmente \mathbf{H} relacionado con B_z a partir de la Ec. (2.26). En este caso de estudio es necesario imponer tres valores de φ en tres planos distintos de la malla, ya que su geometría es compleja y se desea que B_z sea constante en todo el dominio. En la Figura 6.17 se muestra dónde se imponen estas C.C.

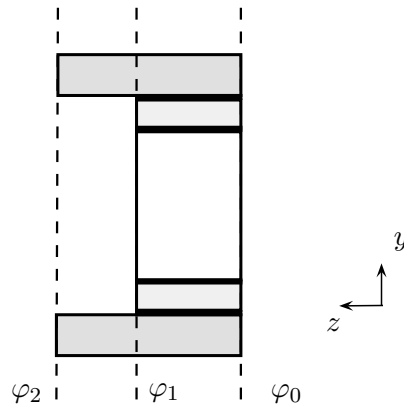


Figura 6.17: Vista de perfil del dominio de la malla y las condiciones de contorno magnéticas necesarias.

En las próximas subsecciones se realiza un estudio paramétrico para comprobar cómo varían con B_z las prestaciones del generador y las tensiones que se producen. También se realiza un estudio analítico para justificar por qué varían así las prestaciones y finalmente se muestran las distribuciones obtenidas con FEAP.

6.3.1. Análisis de la eficiencia y la potencia

Con el objetivo de comprobar cómo se comportan los generadores termoeléctricos ante la presencia de un campo magnético se ha realizado un estudio paramétrico con FEAP variando su intensidad en el intervalo $0 \leq B_z \leq 0,2$ T. Se ha elegido este intervalo para realizar el estudio por tres motivos principales:

- Dada la tendencia de los resultados, este rango permite obtener conclusiones generalizables sin necesidad de estudiar un rango mayor.
- El B_z indicado en la referencia [16] se encuentra dentro del rango estudiado.
- Aunque puedan conseguirse campos magnéticos de mayor intensidad, estos podrían resultar perjudiciales para los sistemas electrónicos presentes en el generador.

En la Figura 6.18 se muestran los resultados del análisis paramétrico obtenidos con FEAP.

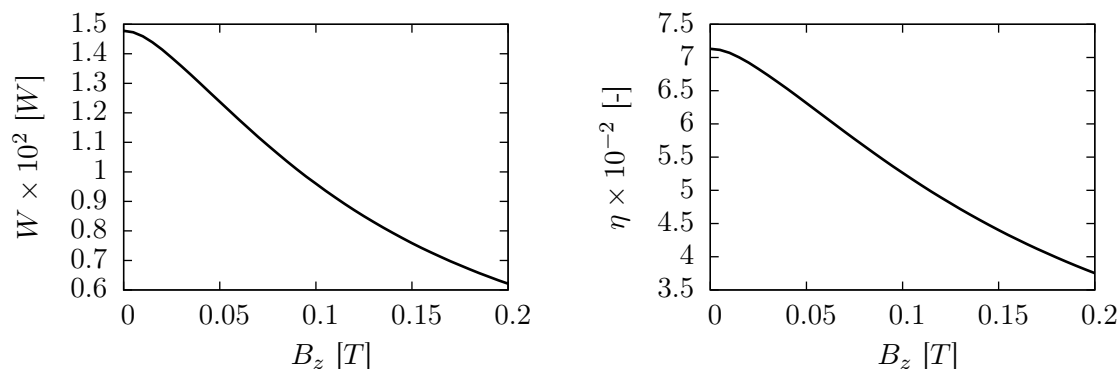


Figura 6.18: Potencia producida y eficiencia del generador termoeléctrico en función de B_z .

Se puede observar que en el rango estudiado tanto W como η disminuyen conforme B_z aumenta. Aunque el estudio solo se haya realizado hasta $B_z = 0,2$, la tendencia de las curvas indica que a mayor B_z estas seguirían disminuyendo. Nótese que cuando $B_z = 0$ se obtienen los valores correspondientes al primer caso estudiado en la Sección 6.1.

En la Figura 6.19 se muestra la variación de I_{out} y Q_h con B_z , que será útil para comprobar por qué disminuyen las prestaciones del generador.

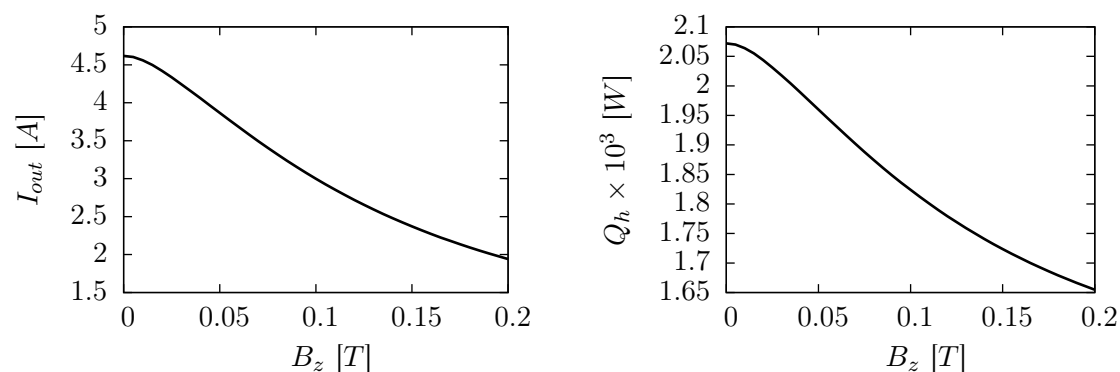


Figura 6.19: Intensidad eléctrica y potencia calorífica total del generador termoeléctrico en función de B_z .

Se puede observar que tanto I_{out} como Q_h disminuyen con B_z . Sin embargo, hay que destacar que I_{out} reduce su valor en más de la mitad cuando $B_z = 0,2$ T, mientras que Q_h solo disminuye un 25%. Por lo tanto, η disminuye al ser proporcional al ratio I_{out}/Q_h , sabiendo que I_{out} disminuye mucho más rápido que Q_h .

Estudio analítico de la eficiencia

Con el objetivo de alcanzar un mejor entendimiento de la disminución de W y η con B_z , se realiza un estudio analítico del comportamiento de estas variables en un TE a partir de las ecuaciones utilizadas en la Sección 4.2.

Partiendo de las Ecs. (4.34) y sustituyendo las expresiones de los coeficientes A_{11} , A_{21} , B_{11} y B_{21} para estudiar la influencia de cada uno de los parámetros, se obtienen las siguientes expresiones de los flujos eléctricos en función de B_z :

$$\begin{aligned} j_x(B_z) &= \frac{-R}{|B_z|^2 R^2 \rho + \rho^3} \left[\frac{\rho^2}{R} \frac{\partial V}{\partial x} + \left(\alpha \frac{\rho^2}{R} + N \rho B_z^2 \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \\ j_y(B_z) &= \frac{-R}{|B_z|^2 R^2 \rho + \rho^3} \left[-\rho B_z \frac{\partial V}{\partial x} + \left(-\alpha \rho B_z + N B_z \frac{\rho^2}{R} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

En estas expresiones las propiedades del material y los gradientes de T y V se consideran constantes, por lo que B_z es el único parámetro variable. Por otro lado, asumiendo las mismas hipótesis y partiendo de las Ecs. (4.38), las expresiones de los flujos de calor son las siguientes:

$$\begin{aligned} q_x(B_z, x) &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} + [\alpha j_x - N B_z j_y] T(x) \\ q_y(B_z, x) &= M B_z \frac{\partial T}{\partial x} + [N B_z j_x + \alpha j_y] T(x) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Se puede observar que, a diferencia de los flujos eléctricos, los flujos de calor también dependen de la posición x al ser dependientes de T . Sin embargo, dado que T nunca será nula ni cambiará de signo en esta aplicación, esto no influye en el análisis.

Como el objetivo de este estudio analítico es comprobar por qué disminuyen W y η al aumentar B_z , se estudiará cómo varían las variables de las que dependen cuando B_z crece; para ello se utilizarán los límites. En primer lugar se analiza el comportamiento de los flujos eléctricos. Partiendo de las Ecs. (6.3):

$$\lim_{B_z \rightarrow \infty} j_x(B_z) = \frac{-N}{R} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \lim_{B_z \rightarrow \infty} j_y(B_z) = 0 \quad (6.5)$$

El flujo j_y tiende a anularse conforme B_z aumenta. El motivo de que esto ocurra es que en las Ecs. (6.3) hay un término B_z^2 dividiendo toda la expresión. Por otro lado, analizando el comportamiento de los flujos de calor se tiene:

$$\lim_{B_z \rightarrow \infty} q_x(B_z, x) = \infty; \quad \lim_{B_z \rightarrow \infty} q_y(B_z) = \infty \quad (6.6)$$

Al contrario que con los flujos eléctricos, los flujos de calor tienen a infinito cuando B_z aumenta, ya que dependen proporcionalmente de este.

Finalmente, una vez que se conoce el comportamiento de los flujos eléctricos y térmicos se puede deducir el de W y η . Para ello se utilizan límites, y partiendo de sus definiciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{B_z \rightarrow \infty} W &= \lim_{B_z \rightarrow \infty} V A \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = V A \frac{N}{R} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \lim_{B_z \rightarrow \infty} \eta &= \lim_{B_z \rightarrow \infty} \frac{W}{A \sqrt{q_x^2 + q_y^2}} = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

por lo que W toma un valor constante que depende de las condiciones de operación, las propiedades del material y el gradiente de T , y η disminuye hasta anularse. Es interesante destacar que en un dispositivo termoeléctrico operando como refrigerador, la eficiencia de refrigeración (COP) aumenta con B_z , ya que $COP = Q_c/W$.

6.3.2. Análisis de las tensiones

En esta sección se realiza un estudio paramétrico variando B_z para analizar cómo se ven afectadas las tensiones de Tresca en cada uno de los materiales. Los resultados se muestran en la Figura 6.20.

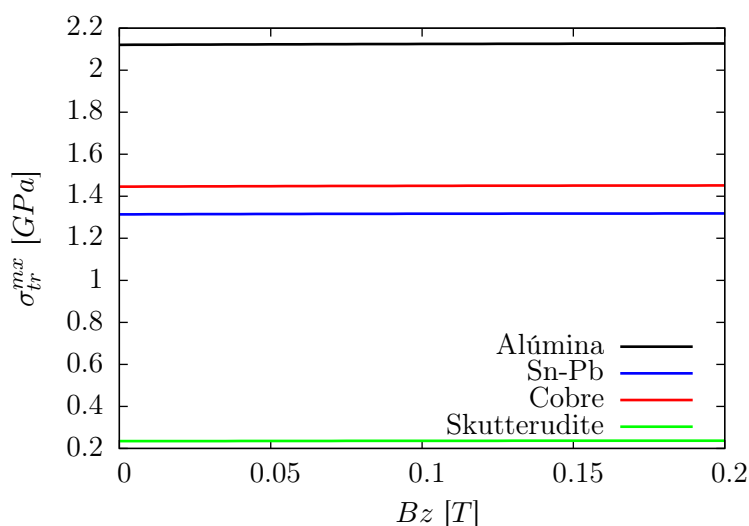


Figura 6.20: Tensiones de Tresca en los diferentes materiales que forman el termopar en función de B_z .

Se puede observar que estas tensiones se mantienen prácticamente constantes con B_z . Las tensiones de Tresca se deben principalmente a las tensiones térmicas producidas por la expansión del material con T ; sin embargo, la distribución de T no se ve seriamente

afectada por B_z , resultando en variaciones pequeñas de las tensiones.

En base a los resultados de las prestaciones y las tensiones obtenidos, se determina que la aplicación o presencia de un campo magnético B_z resulta perjudicial para el funcionamiento del generador eMMRTG, y por lo tanto, no se plantearán más análisis que lo incluyan. En las siguientes subsecciones se mostrarán las distribuciones de T , V , σ_{tr} y los flujos q , j cuando $B_z = 0,2$ T, ya que estas son las variables más afectadas por la presencia de un campo magnético.

6.3.3. Distribuciones de temperatura y voltaje

En la Figura 6.21 se muestran las distribuciones de T y V en el termopar obtenidas con FEAP cuando $B_z = 0,2$ T.

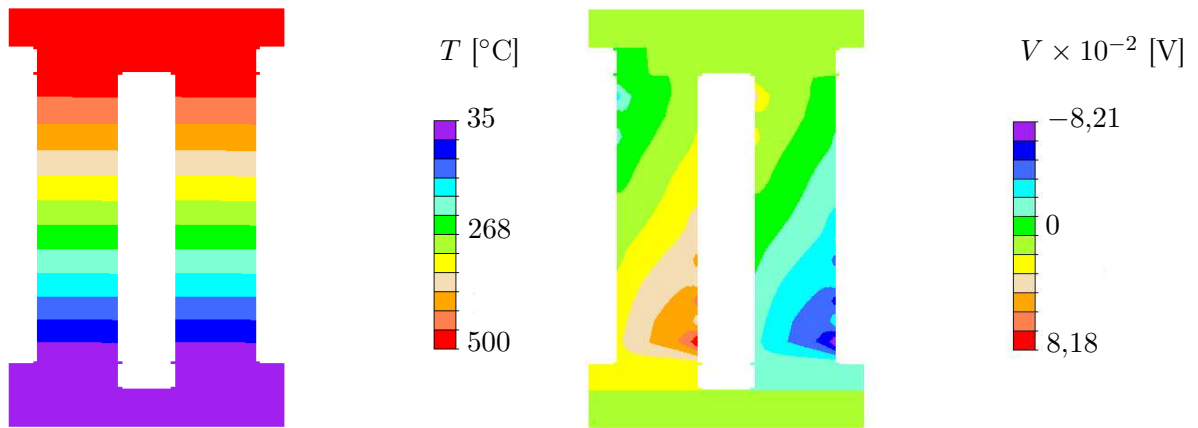


Figura 6.21: Distribuciones de temperatura y voltaje en el termopar con $B_z = 0,2$ T.

En cuanto a la distribución de T , a primera vista parece ser igual a la distribución propia del caso $B_z = 0$. Sin embargo, se puede observar que no es exactamente lineal en los TEs, sino que existe una pequeña inclinación de las líneas isotérmicas. Esto es debido a la acción de los efectos termomagnéticos *Ettingshausen* y *Righi-Leduc*, que crean gradientes de T en la dirección transversal a j , q . De todas formas, estos gradientes no son muy relevantes debido a que ∇T entre los focos frío y caliente es muy elevado.

Analizando la distribución de V , se puede observar que presenta una gran distorsión en comparación con el caso $B_z = 0$, apareciendo puntos cerca de las esquinas de los TEs en los que se concentra V . Esto se debe a la acción de los efectos galvanomagnéticos *Nernst* y *Hall*, que también crean gradientes de V en la dirección transversal a j , q . La distorsión de V es mucho mayor que la producida en T debido a que, por sus propiedades (ver Figura 5.4), el material *Skutterudite* es más sensible a los efectos galvanomagnéticos.

6.3.4. Tensiones de Tresca y malla deformada

En la Figura 6.22 se muestran las tensiones de Tresca y la deformación de la malla que estas causan, proporcionadas por FEAP con $B_z = 0,2$ T. La deformación de la malla se muestra utilizando un factor de escala $\times 100$.

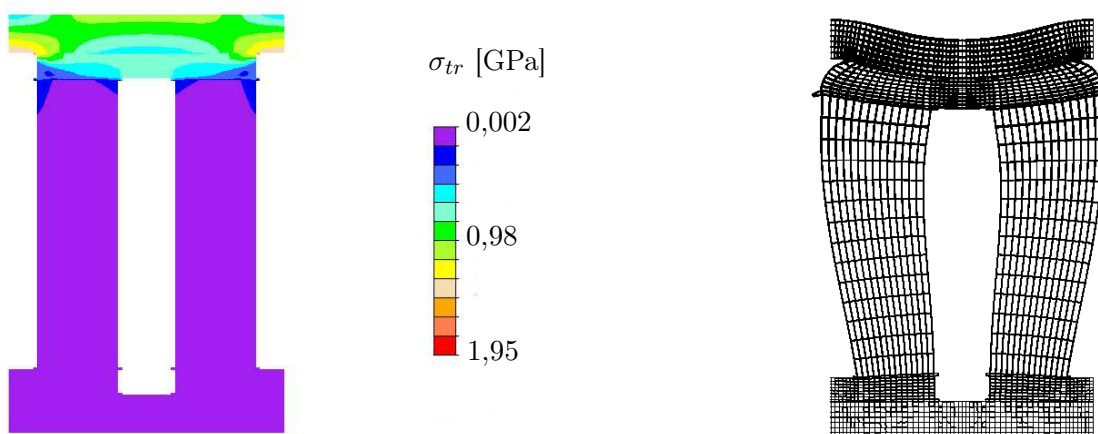


Figura 6.22: Tensiones de Tresca y malla deformada con factor de escala $\times 100$ en el termopar con $B_z = 0,2$ T.

Se puede observar que la distribución de las tensiones de Tresca es muy similar a la obtenida en caso con $B_z = 0$. Esto se debe a que la distribución de T con un B_z presente no ha sufrido grandes cambios, y al estar las tensiones causadas por la expansión térmica de los materiales, estas no varían sustancialmente.

Por otro lado, se puede observar que el termopar se deforma de forma simétrica y muy similar a como lo hace cuando $B_z = 0$. Los TEs flectan y se desplazan hacia el exterior, expandiéndose sobre todo en la zona del foco caliente. También se observa que Cu y Al_2O_3 de esta zona presentan importantes deformaciones, al contrario que los del foco frío, apenas deformados por las bajas tensiones que se producen en esta zona.

En base a los resultados mostrados en las Figuras 6.20 y 6.22, se puede determinar que las tensiones de Tresca no se ven gravemente afectadas por la presencia de un campo magnético en el rango estudiado.

6.3.5. Distribuciones de los flujos de calor y eléctricos

La presencia de B_z provoca importantes distorsiones en los flujos eléctricos y térmicos, por lo que es de interés mostrar cómo estos se ven afectados. En la Figura 6.23 se muestran los resultados obtenidos con FEAP para $B_z = 0,2$ T.

En primer lugar se analizará la distribución de los flujos eléctricos. Se puede observar

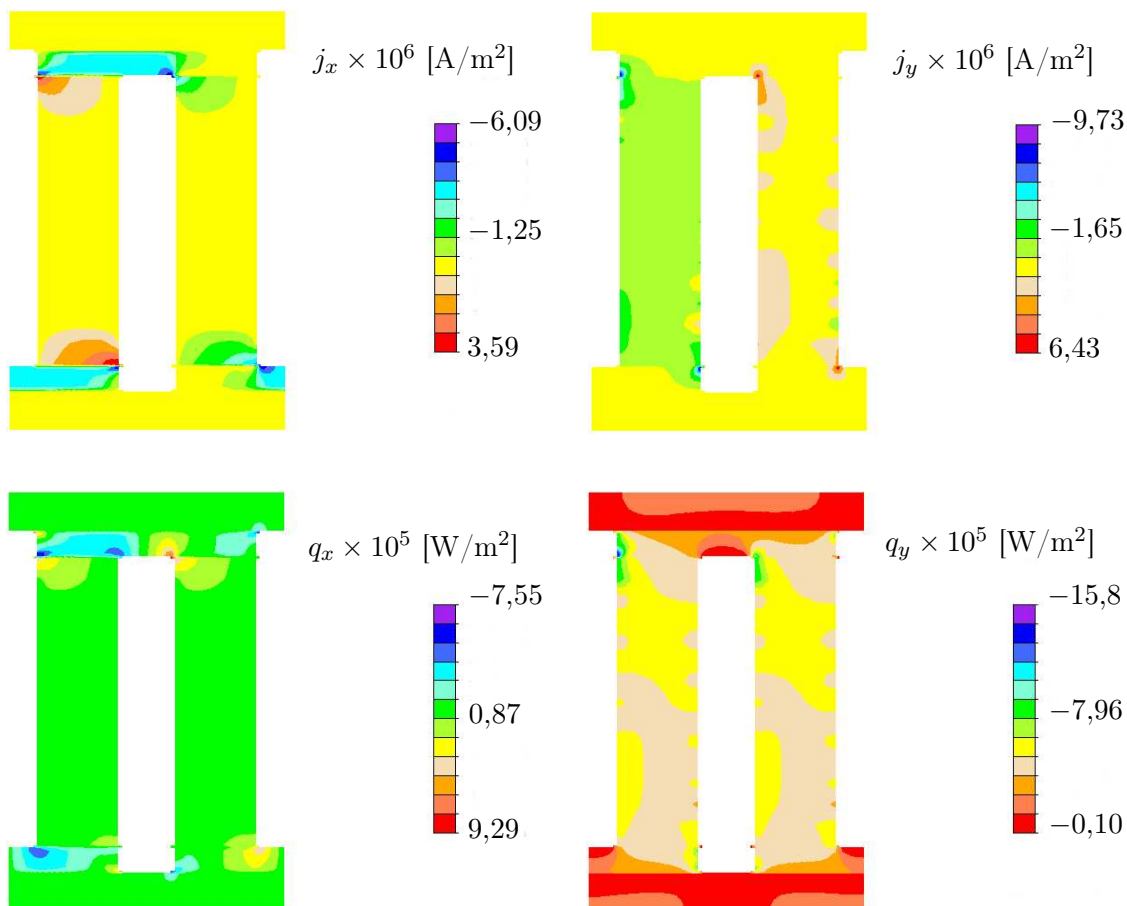


Figura 6.23: Distribuciones de los flujos eléctricos j_x , j_y y térmicos q_x , q_y en el termopar con $B_z = 0,2$ T.

que $j_x = 0$ en Al_2O_3 y en gran parte de los TEs. Sin embargo, en las esquinas superior izquierda e inferior derecha de los TEs aparecen j_x elevados, debido a que en estos puntos se producen los mayores gradientes de V (ver Figura 6.21). También se observa que existe j_x en Cu , aunque solo en los que están en contacto con el TE tipo-p y en la salida del tipo-n. Por otro lado, $j_y = 0$ en gran parte del TE tipo-n, y aparecen máximos y mínimos en las esquinas de las uniones de Cu con los TE. Estas distribuciones de j_x , j_y indican que el flujo eléctrico es prácticamente nulo en el TE tipo-n, y que se producen importantes fenómenos de recirculación del flujo en las esquinas de los TEs debido a la naturaleza rotacional de B_z .

En cuanto a la distribución de los flujos de calor, se observa que q_x es prácticamente nulo en Al_2O_3 y los TEs, aunque al igual que con los flujos eléctricos, se produce un aumento de su intensidad cerca de las esquinas. q_y es mínimo en Al_2O_3 debido a su gran área transversal, y aumenta en los TEs aunque no de forma lineal, sino que se producen grandes variaciones cerca de las esquinas; su distribución dentro de los TEs es muy irregular.

6.4. Nuevo diseño: generador segmentado

Con el objetivo de mejorar la eficiencia del eMMRTG estudiado en este trabajo se propone un nuevo diseño: el generador termoelectrico segmentado [1], cuya configuración se puede ver en la Figura 6.24.

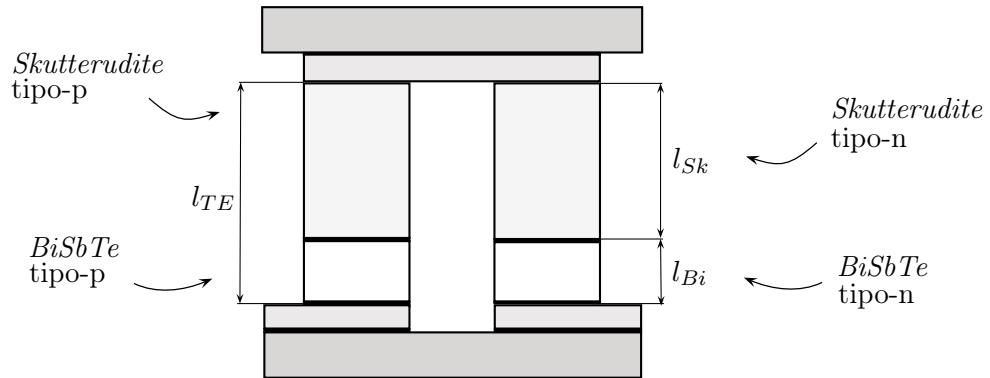


Figura 6.24: Representación de la geometría de un termopar segmentado con dos materiales.

Los generadores termoelectricos segmentados son especialmente útiles cuando el salto de T entre el foco frío y el caliente es muy elevado. Dado que las propiedades termoelectricas de los materiales varían con T , en aplicaciones reales no es conveniente utilizar el mismo material a lo largo de todo un TE para obtener altas eficiencias. Sin embargo, se pueden conseguir elevadas eficiencias combinando distintos materiales de forma que cada uno opere en su rango de T óptimo. Por ello, se ha elegido modelar dos TEs de *Skutterudite*, eficiente a alta T , segmentado con *BiSbTe*, eficiente a baja T .

En las siguientes subsecciones se mostrará el proceso seguido para elegir *BiSbTe* como material termoelectrico de baja T así como sus propiedades termoelectricas. También se realiza un estudio multiparamétrico en el que se analizan las prestaciones y las tensiones del generador variando la longitud de los TEs y la proporción que ocupa cada material en ellos, llamando a este parámetro $\lambda_{TE} = \frac{l_{Bi}}{l_{TE}}$, siendo l_{Bi} la longitud del segmento de *BiSbTe* y l_{Sk} la del segmento de *Skutterudite*.

6.4.1. Estudio de materiales

Después de una intensa búsqueda y tras rechazar numerosos candidatos, el material eficiente a baja T elegido es *BiSbTe*. Sus propiedades mecánicas han sido obtenidas de las referencias [23] y [24], y se muestran en la Tabla 6.1.

Debido a la falta de información en la literatura, ha resultado imposible encontrar el valor de α_T correspondiente a *BiSbTe*, por lo que se ha tomado el valor propio de *Skutterudite*.

	λ [GPa]	μ_l [GPa]	σ_Y [GPa]	$\alpha_T \times 10^{-6}$ [K ⁻¹]
<i>BiSbTe</i>	16.10	20	1.1	9.14

Tabla 6.1: Propiedades mecánicas del *BiSbTe*.

Por otro lado, las propiedades termoeléctricas de *BiSbTe* se han obtenido de la referencia [25], y tras realizar un ajuste con polinomios de segundo grado se han conseguido las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \alpha(T) &= 1,72 \times 10^{-4} + 5,88 \times 10^{-7} T - 1,87 \times 10^{-9} T^2 ; \\
 \rho(T) &= 6,65 \times 10^{-6} + 4,92 \times 10^{-8} T + 3,14 \times 10^{-11} T^2 ; \\
 \kappa(T) &= 1,21 - 3,71 \times 10^{-3} T + 1,60 \times 10^{-5} T^2 ;
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

Nótese que estas expresiones corresponden al *BiSbTe* tipo-p ya que α es positivo, cumpliéndose para el tipo-n $\alpha_n = -\alpha_p$. En la Figura 6.25 se muestran los polinomios ajustados de estas propiedades termoeléctricas así como los datos obtenidos de la referencia.

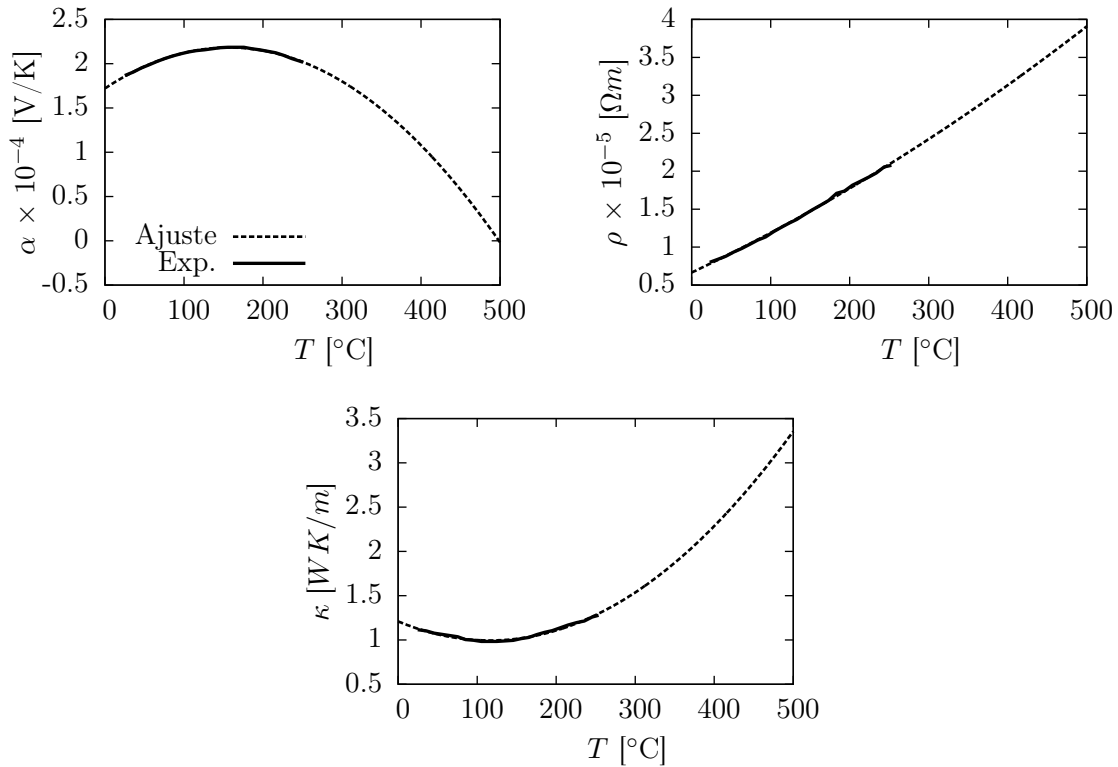


Figura 6.25: Ajuste de las propiedades termoeléctricas de *BiSbTe* tipo-p. Línea a trazos extrapolada.

En primer lugar se puede observar que el uso de polinomios de segundo grado es suficiente para lograr un buen ajuste. Por otro lado, hay que destacar que los datos proporcionados por la referencia solo están disponibles entre 25 y 250 °C. Por lo tanto, debido a que las T utilizadas en el estudio del termopar llegan a los 500 °C, se extrapolan los datos hasta este valor utilizando los polinomios ajustados.

En cuanto a los valores de las propiedades termoeléctricas, se puede observar que α tiene una tendencia parabólica y que alcanza valores elevados entre los 100 y los 200 °C. Hay que destacar que los valores de κ son relativamente bajos en todo el rango de estudio, a pesar de que crece rápidamente para T altas debido a que el polinomio ajustado es una parábola positiva.

Para comprobar que $BiSbTe$ es un material termoeléctrico de alta eficiencia cuando opera a baja T y que posee propiedades óptimas para la generación de energía se utiliza la figura de mérito adimensional ZT , introducida en la Sección 3.3. En la Figura 6.26 se muestra la variación de ZT con T para $BiSbTe$ y $Skutterudite$.

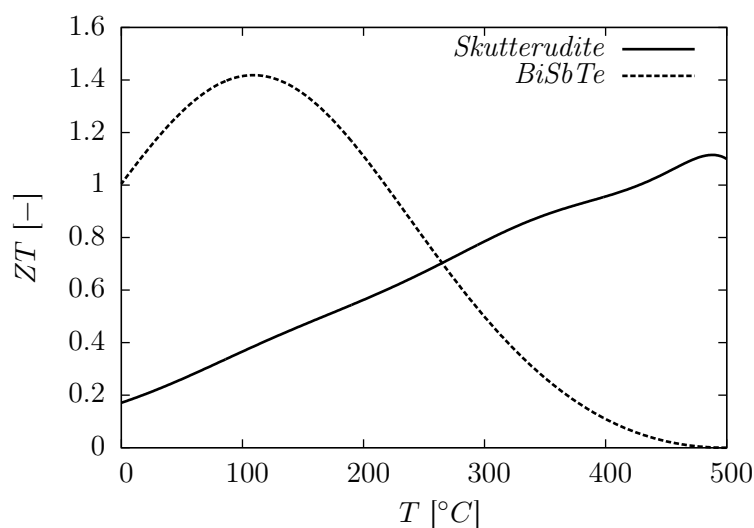


Figura 6.26: Factor de mérito adimensional ZT en función de la temperatura para los materiales *Skutterudite* y *BiSbTe*.

Se puede observar que *BiSbTe* alcanza valores de ZT muy elevados entre 0 y 200 °C, llegando a alcanzar un máximo $ZT = 1,42$ a 109 °C. Estos valores de ZT son especialmente altos, ya que generalmente los materiales termoeléctricos clásicos no superan el valor $ZT = 1$, por lo que se puede considerar que *BiSbTe* es muy eficiente en este rango de T .

Por otro lado, el material *Skutterudite* posee valores de ZT muy reducidos a baja T , aunque aumenta con T llegando a alcanzar valores superiores a la unidad cerca de los 500 °C, por lo que se considera de alta eficiencia para T elevadas.

Finalmente, se observa que las curvas correspondientes a cada material se cruzan a 265 °C, valor que define la frontera en la que es más eficiente utilizar un material u otro.

6.4.2. Estudio analítico de la eficiencia

En esta sección se realiza un estudio analítico de la eficiencia máxima proporcionada por un termopar de *Skutterudite* segmentado con *BiSbTe*. Para ello se fijan las C.C. de T correspondientes al caso del generador eMMRTG estudiado, $T_c = 35$ °C y $T_h = 500$ °C, y se sigue un procedimiento análogo al de la Sección 3.5.2. A diferencia del estudio realizado en la sección mencionada, en este caso se realiza un estudio paramétrico variando la T en la intersección entre *BiSbTe* y *Skutterudite*, llamada a partir de ahora T_j , y se guardan los datos con los que se consigue la máxima eficiencia.

Los resultados obtenidos indican que $T_j = 259$ °C, por lo que para valores de T menores, se utiliza *BiSbTe* y para valores mayores *Skutterudite*. En la Tabla 6.2 se muestran las prestaciones óptimas que proporcionaría un generador con esta configuración calculadas analíticamente.

V [V]	I_{out} [A]	W [W]	η_{mx} [-]
52.08	3.73	194.36	0.1420

Tabla 6.2: Prestaciones óptimas de un generador termoeléctrico de *Skutterudite* segmentado con *BiSbTe* calculadas analíticamente.

Hay que destacar que estos valores son los obtenidos para un generador completo formado por 768 termopares. Si se comparan estos resultados con los obtenidos para un generador clásico (ver Sección 6.1) se observa que las prestaciones han mejorado, consiguiéndose el doble de eficiencia y 50 W más de potencia. Sin embargo, hay que tener en cuenta dos aspectos: primero, que los resultados mostrados en esta sección son las prestaciones máximas, conseguidas tras imponer las condiciones de V e I_{op} en el generador, y segundo, que han sido calculados analíticamente para el caso ideal de un termopar formado únicamente por dos TEs de materiales *Skutterudite* y *BiSbTe*, sin tener en cuenta el resto de materiales. Por lo tanto, se espera que los resultados obtenidos con FEAP para el caso completo sean más precisos que los aquí mostrados.

En la Figura 6.27 se muestra la distribución de u , s a lo largo de los TEs en función de T .

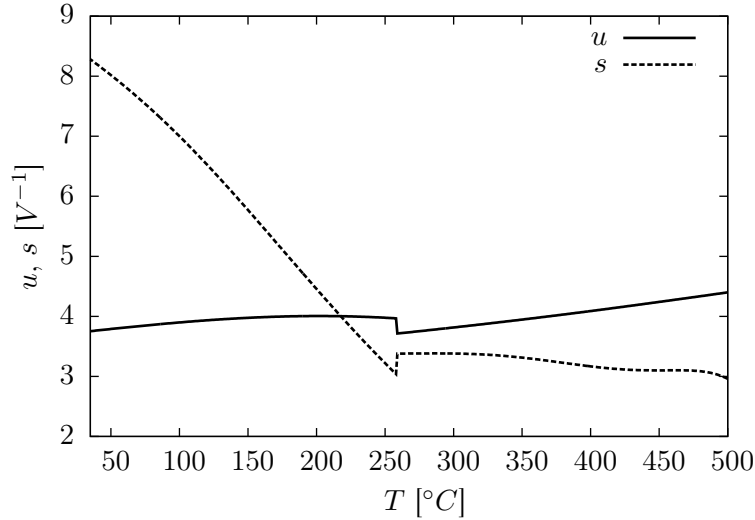


Figura 6.27: Densidad de corriente reducida u y factor de compatibilidad s analíticas versus temperatura en un termoelemento segmentado. Hasta 259°C : *BiSbTe*; a partir 259°C : *Skutterudite*.

Se puede observar que existe una discontinuidad en $T = 259^{\circ}\text{C}$ tanto para u como para s , debido a que esta T se corresponde con T_j . Nótese que s siempre es inferior a u en el rango de T correspondiente a *Skutterudite*, mientras que en el rango correspondiente a *BiSbTe* se produce el cruce de las dos curvas, tomando s valores muy elevados a T bajas. Se recuerda que la máxima eficiencia se consigue cuando $u = s$ en todo el TE, sin embargo, esto es imposible en la práctica debido a que las propiedades del material varían con T . Por lo tanto, los valores de u , s indican que el TE es principalmente eficiente a T elevadas, ya que es la zona en la que estos valores son más próximos.

Finalmente, se conocen las prestaciones del generador y T_j , pero no la longitud que debe tener cada segmento en el TE, por lo que se realizará una estimación analítica teniendo en cuenta las siguientes hipótesis:

- Se desprecia el flujo de calor producido por el efecto *Peltier* frente al producido por *Fourier*.
- El flujo de calor q que fluye por cada material es idéntico.
- La κ de los dos materiales se considera constante con T y es evaluada para la T_{av} en cada uno de ellos.
- Se considera que T varía de forma lineal en los TEs.

Una vez establecidas estas hipótesis se definen los siguientes parámetros:

- Temperatura media en *BiSbTe*: $T_{av}^{Bi} = \frac{T_c + T_j}{2}$.

- Temperatura media en *Skutterudite*: $T_{av}^{Sk} = \frac{T_h + T_j}{2}$.
- Conductividad térmica de *BiSbTe* evaluada con T_{av}^{Bi} : κ_{Bi} .
- Conductividad térmica de *Skutterudite* evaluada con T_{av}^{Sk} : κ_{Sk} .

A continuación, utilizando las hipótesis formuladas y partiendo de la segunda Ec. (3.3), se obtiene:

$$-\kappa_{Bi} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{BiSbTe} = -\kappa_{Sk} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{Sk} \Rightarrow \kappa_{Bi} \frac{T_j - T_c}{l_{Bi}} = \kappa_{Sk} \frac{T_h - T_j}{l_{Sk}} \quad (6.9)$$

Finalmente, reordenando la expresión anterior se puede obtener la expresión analítica para λ_{TE} , definido al comienzo de esta sección:

$$\lambda_{TE} = \frac{\kappa_{Bi}}{\kappa_{Sk}} \frac{T_j - T_c}{T_h - T_j} \quad (6.10)$$

El valor obtenido analíticamente aplicando las condiciones de este caso es $\lambda_{TE} = 0,19$. En las siguientes secciones se comprobará qué valor se obtiene tras realizar un estudio utilizando FEAP.

6.4.3. Análisis de la eficiencia y la potencia

Con el objetivo de hallar la configuración óptima del generador termoeléctrico segmentado se ha realizado un estudio multiparamétrico en el que se analiza la influencia de l_{TE} y λ_{TE} en sus prestaciones. En la Figura 6.28 se muestran los resultados obtenidos con FEAP.

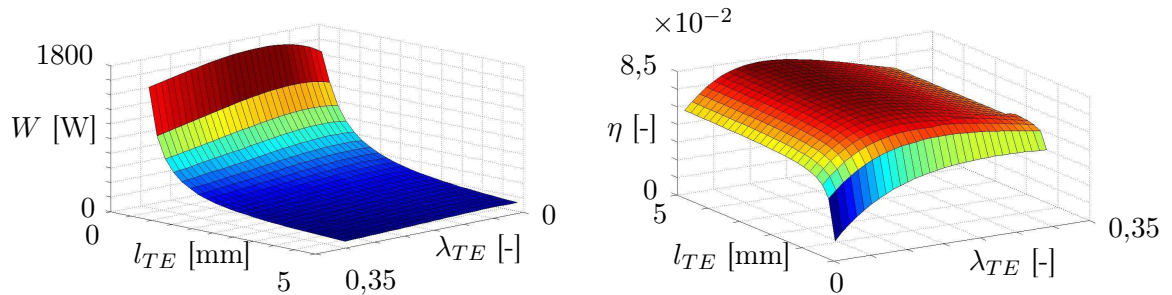


Figura 6.28: Potencia eléctrica y eficiencia del generador termoeléctrico en función de la longitud de termoelemento y el porcentaje que ocupa *BiSbTe*.

En primer lugar, se puede observar que W tiene una distribución hiperbólica con l_{TE} , alcanzando sus valores máximos cuando l_{TE} es cercano a cero y disminuyendo rápidamente conforme l_{TE} aumenta. También se puede observar que W aumenta ligeramente con λ_{TE} hasta alcanzar un máximo, a partir del cual comienza a decrecer de forma suave. Por

lo tanto, si el objetivo fuese maximizar W se buscarían TEs lo más cortos posible y que estuviesen segmentados con un λ_{TE} cercano al 12%.

Por otro lado, se puede observar que η aumenta con l_{TE} de forma asintótica hasta alcanzar un valor estable, mientras que su variación con λ_{TE} es diferente, aumentando hasta alcanzar un máximo a partir del cual decrece suavemente. Para el caso de estudio, el valor máximo de η se encuentra cuando $l_{TE} = 5$ mm y $\lambda_{TE} = 0,12$, siendo este máximo $\eta_{mx} = 0,0841$, correspondiente a una $W = 141$ W.

Si se comparan los valores obtenidos con FEAP en esta sección con los obtenidos analíticamente en la Sección 6.4.2 se puede observar que existen varias diferencias. Por un lado, el valor de λ_{TE} que proporciona la mayor η obtenido analíticamente es un 7% mayor que el obtenido con FEAP. Además, la η máxima obtenida analíticamente es casi el doble que la obtenida con FEAP y la W analítica es 50 W superior a la numérica. Estas diferencias son debidas a las simplificaciones que ha sido necesario asumir para realizar la estimación analítica, además de que el cálculo analítico supone la imposición de las condiciones de V e I_{out} que proporcionan las prestaciones óptimas, siendo las condiciones de operación del generador real diferentes.

Debido a que el principal objetivo de este trabajo es aumentar la eficiencia del eMMRTG, se establece $l_{TE} = 5$ mm y $\lambda_{TE} = 0,12$ como la configuración óptima, y en las siguientes secciones se mostrarán las distribuciones proporcionadas por FEAP para este caso.

6.4.4. Análisis de las tensiones

En la Figura 6.29 se muestran las tensiones de Tresca en cada uno de los materiales que forman el termopar, resultantes del estudio multiparamétrico realizado con FEAP.

Por un lado, se puede observar que Al_2O_3 , $Sn-Pb$ y Cu tienen tendencias similares, siendo las tensiones crecientes tanto con l_{TE} como con λ_{TE} . Nótese que las tensiones aumentan de forma asintótica con l_{TE} , creciendo rápidamente al principio hasta estabilizarse en un valor final, mientras que aumentan de forma menos pronunciada con λ_{TE} .

Por otro lado, *Skutterudite* y *BiSbTe* se comportan de forma similar al ser los materiales que conforman los TEs. Se observa que las tensiones disminuyen rápidamente con l_{TE} , mientras que con λ_{TE} aumentan en *Skutterudite* y disminuye con λ_{TE} en *BiSbTe*. El motivo por el que las tensiones disminuyen con l_{TE} es que cuanto más largos son los TEs, menor es el gradiente de T en su interior, reduciendo así las tensiones térmicas. De igual forma, las tensiones disminuyen en *BiSbTe* cuando λ_{TE} aumenta porque esto implica una mayor longitud del segmento de *BiSbTe*, reduciendo el gradiente térmico y en consecuencia las tensiones, ocurriendo lo contrario con *Skutterudite*.

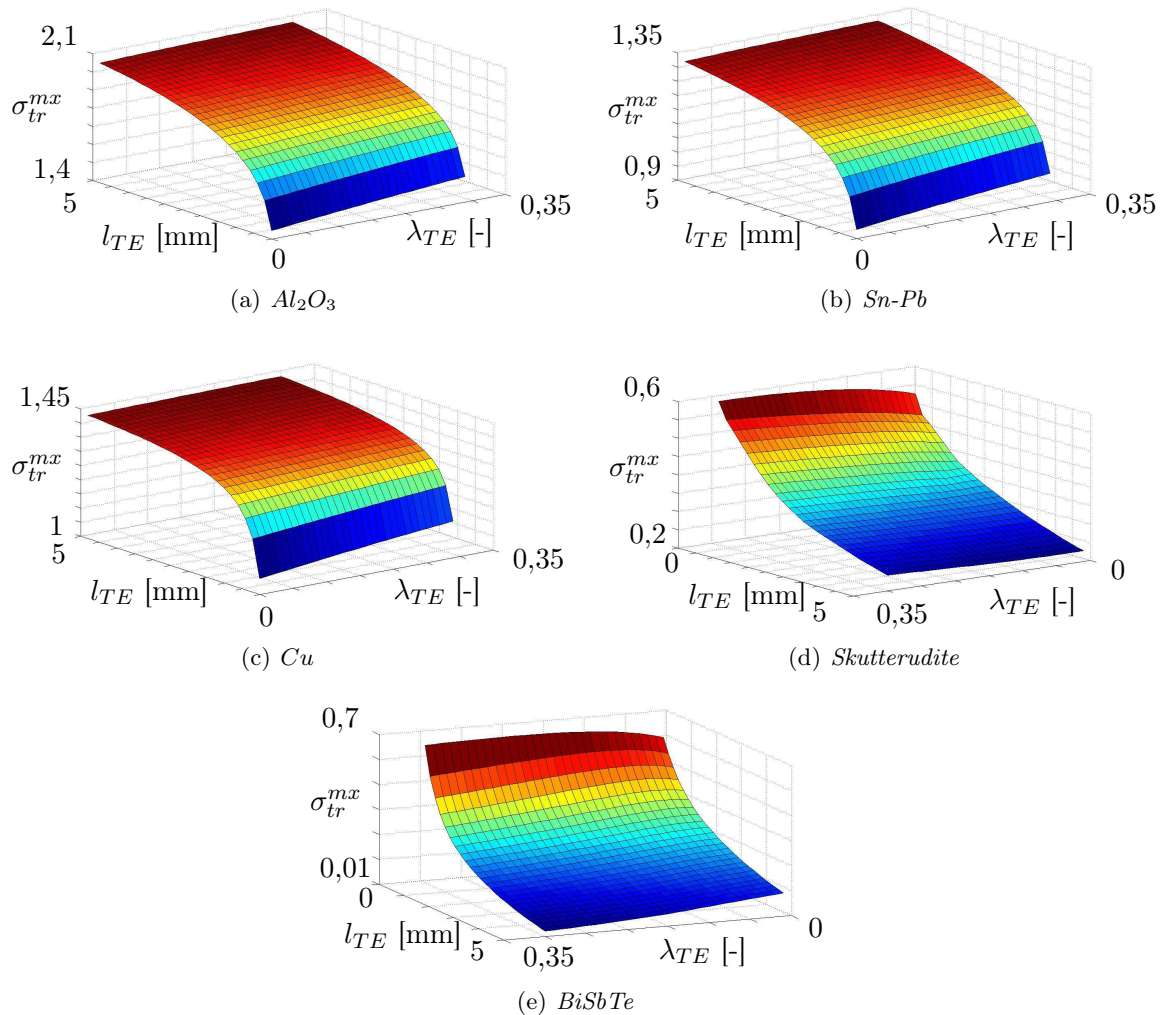


Figura 6.29: Tensiones de Tresca máximas [GPa] en cada uno de los materiales que forman el termopar en función de la longitud de termoelemento y el porcentaje que ocupa *BiSbTe*.

6.4.5. Distribuciones de temperatura y voltaje

En la Figura 6.30 se muestran las distribuciones de T y V obtenidas con FEAP para el termopar con ratio $\lambda_{TE} = 0,12$.

Por un lado, se puede observar que la distribución de T no es exactamente lineal a lo largo de todo el TE. Debido al cambio de material, y por lo tanto de κ , se produce un cambio en la pendiente del gradiente de T en el punto de unión de los dos materiales. Nótese que T varía de forma lineal dentro de cada material, siendo en la unión $T = 229\text{ }^\circ\text{C}$, un 11 % menor a la calculada analíticamente en la Sección 6.4.2.

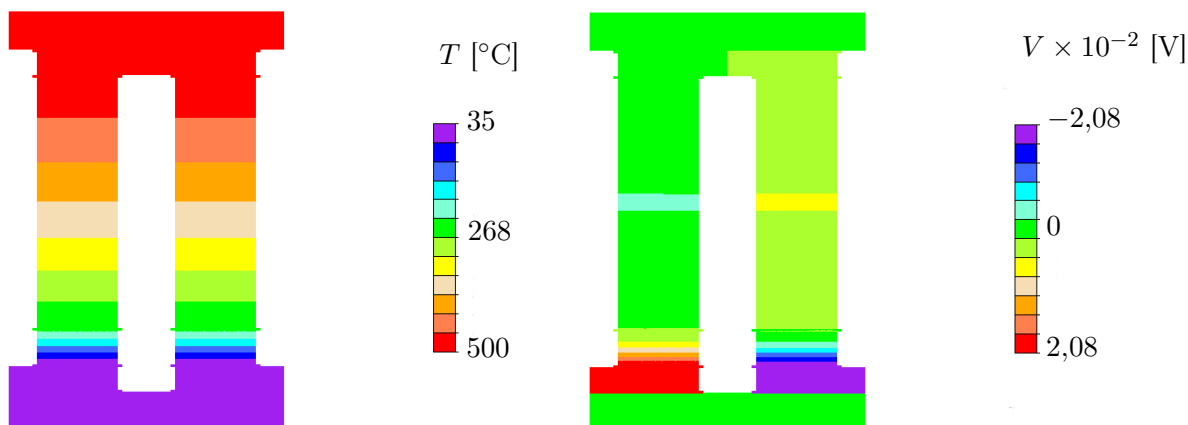


Figura 6.30: Distribuciones de temperatura y voltaje en el termopar con $\lambda_{TE} = 0,12$.

Por otro lado, se observa que prácticamente toda la caída de V se produce en $BiSbTe$, siendo V constante y prácticamente nulo en $Skutterudite$ salvo por una pequeña variación en el centro de los TEs. El motivo por el que toda la caída de V se produce en $BiSbTe$ es que este material posee una ρ 10 veces superior a la de $Skutterudite$, por lo que para que se cumpla la condición de conservación de la carga es necesaria una variación de V mayor.

6.4.6. Desplazamientos mecánicos

En la Figura 6.31 se muestran los desplazamientos mecánicos u, v .

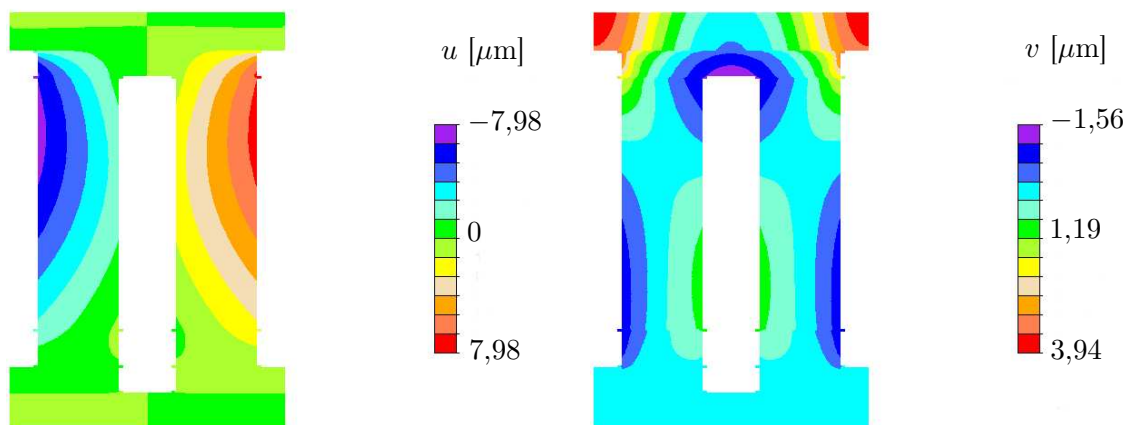


Figura 6.31: Desplazamientos mecánicos u, v en el termopar con $\lambda_{TE} = 0,12$.

Se puede observar que existe simetría vertical. El desplazamiento u es máximo en el exterior de la zona más próxima al foco caliente de los TEs, proporcionalmente a las ten-

siones térmicas producidas en esta zona son elevadas. Por otro lado, v es máximo en las esquinas de Al_2O_3 en el foco caliente, ya que en esta zona las tensiones son máximas.

6.4.7. Distribuciones de los flujos de calor y eléctricos

Los flujos térmicos y eléctricos obtenidos con FEAP se muestran en la Figura 6.32.

Se puede observar que la presencia de un segundo material en los TEs no altera significativamente la distribución de los flujos térmicos y eléctricos, debido a que se deben cumplir las condiciones de continuidad que establecen que si no se produce generación de energía los flujos deben ser constantes.

Por un lado, j_x es máxima en los extremos de Cu inferiores y en el centro de Cu superior, disminuyendo hasta anularse en los TEs debido al cambio de dirección de la corriente, mientras que j_y se hace máxima en los TEs y disminuye en Cu por el mismo motivo.

Por otro lado, q_x es prácticamente nula en todo el termopar, a excepción de las esquinas de las uniones de Cu con los TEs donde el flujo cambia de dirección debido al aumento o reducción de área transversal. El flujo q_y es mínimo en Al_2O_3 debido a su gran superficie, y aumenta progresivamente hasta que es constante en los TEs.

6.4.8. Tensiones de Tresca y malla deformada

En la Figura 6.33 se muestran las tensiones de Tresca y la deformación de la malla, proporcionadas por FEAP. La deformación de la malla se muestra utilizando un factor de escala $\times 100$.

Se puede observar que las tensiones de Tresca son máximas en la zona cercana al foco caliente debido a los grandes gradientes térmicos que se producen en esa zona y a que el desplazamiento en dirección x está restringido. Por otro lado, las tensiones en los TEs y en la zona próxima al foco frío son mucho menores que en foco caliente, ya que en los TEs se permite el desplazamiento y en Al_2O_3 la T es tan próxima a la de referencia que las tensiones son muy bajas.

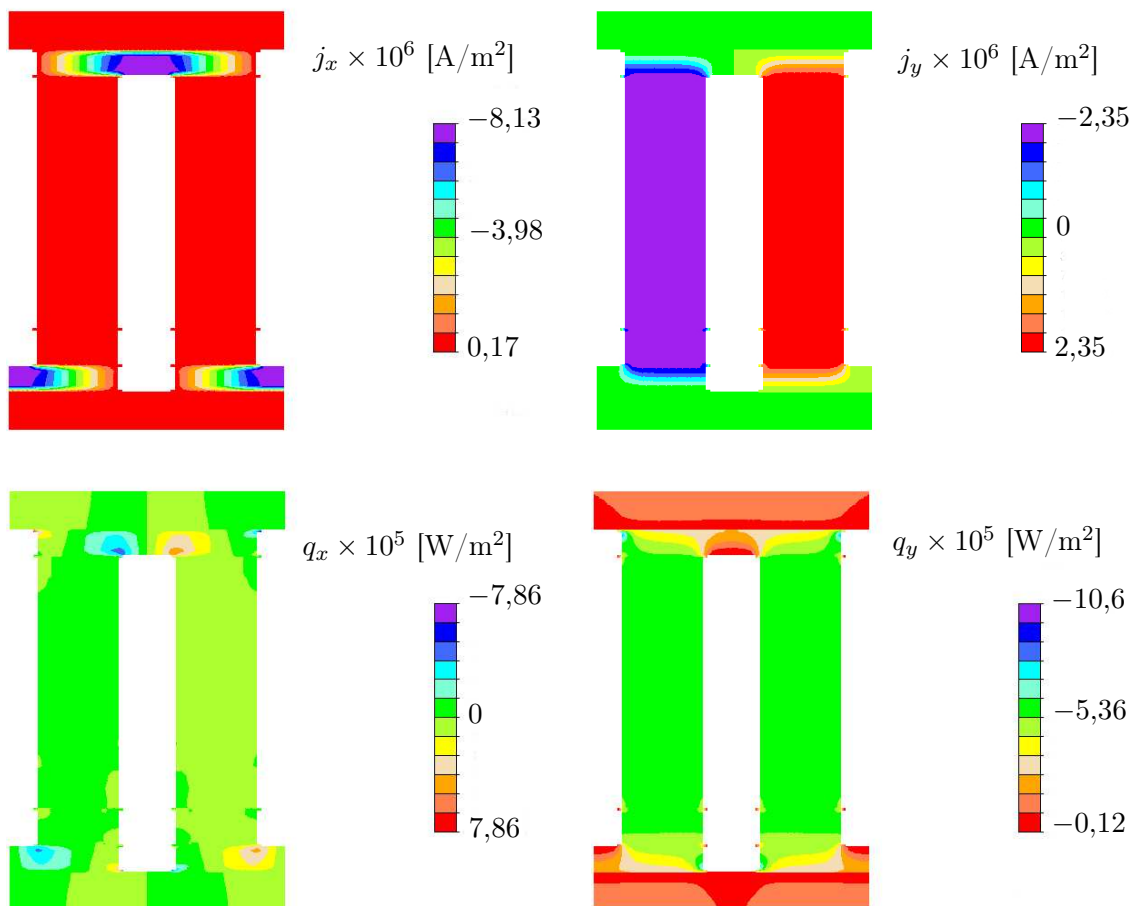


Figura 6.32: Distribuciones de los flujos eléctricos j_x , j_y y térmicos q_x , q_y en el termopar con $\lambda_{TE} = 0,12$.

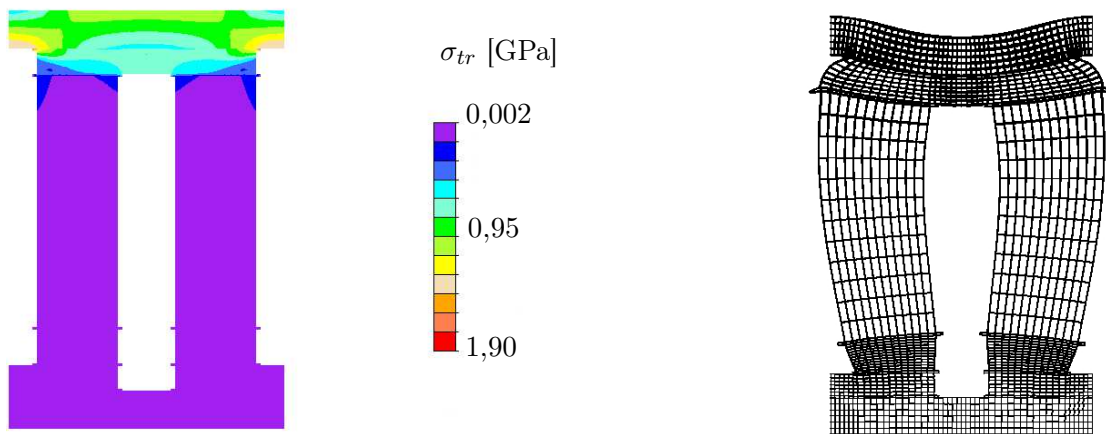


Figura 6.33: Tensiones de Tresca y malla deformada con factor de escala $\times 100$ en el termopar con $\lambda_{TE} = 0,12$.

En cuanto a la malla, se puede observar que las zonas que sufren mayor deformación son para Al_2O_3 y Cu en el foco caliente, debido a las grandes tensiones que se producen en esa zona. Los TEs también se deforman considerablemente, expandiéndose y flectando debido a las tensiones cortantes que se producen en su interior.

6.5. Nuevo diseño: generador en cascada

Con base del estudio de materiales realizado en la sección anterior, se propone otro diseño alternativo: el generador en cascada [1], cuya geometría se muestra en la Figura 6.34.

El generador en cascada basa su funcionamiento en un concepto parecido al del generador segmentado: al constar de dos niveles, el superior de alta T y el inferior de baja, se permite que cada material trabaje en su rango de T óptimo, maximizando la eficiencia. Sin embargo, a diferencia del generador segmentado, cada uno de los niveles puede configurarse de manera que constituyan circuitos eléctricos independientes. De esta forma, se podrían cubrir las necesidades de potencia de varios sistemas con distintas especificaciones de funcionamiento. Por otro lado, su principal inconveniente es la gran dificultad para fabricarlo, mucho mayor que para el generador segmentado.

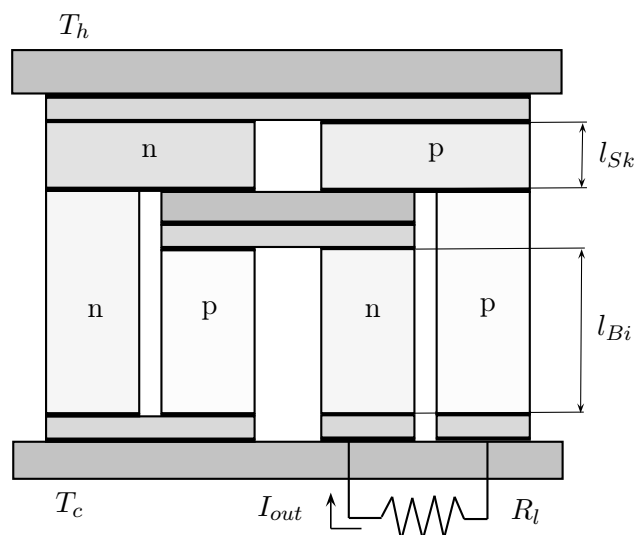


Figura 6.34: Configuración del generador termoelectrico en cascada.

A continuación se presentan los resultados de un estudio paramétrico en el que se varían las longitudes de ambos niveles, l_{Sk} , l_{Bi} .

6.5.1. Análisis de la eficiencia y la potencia

En la Figura 6.35 se muestran las prestaciones del generador en cascada obtenidas con el estudio paramétrico realizado con FEAP.

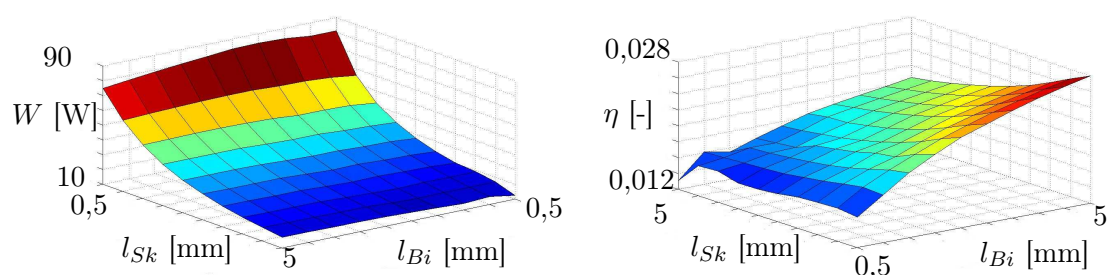


Figura 6.35: Potencia eléctrica y eficiencia del generador termoelectrico en función de las longitudes de los dos niveles.

En primer lugar, se observa que W no experimenta grandes cambios con la variación de l_{Bi} , mientras que disminuye rápidamente cuando l_{Sk} aumenta, alcanzándose el valor máximo $W = 83,67$ W cuando $l_{Bi} = 2$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm. Nótese que esta tendencia es similar a la del caso del generador segmentado. Por otro lado, η disminuye lentamente con l_{Sk} , mientras que aumenta con l_{Bi} , alcanzándose el valor máximo $\eta_{mx} = 0,028$ cuando $l_{Bi} = 5$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm.

En segundo lugar, se puede observar que los valores de W y η obtenidos son mucho menores que los del resto de casos analizados anteriormente. Por ello, y por la dificultad de su fabricación, se descarta el empleo de esta configuración en generadores termoelectricos a falta de realizar más análisis que involucren otras variables de diseño. En todo caso se continua con el estudio de esta configuración para alcanzar una mejor comprensión de su funcionamiento.

6.5.2. Análisis de las tensiones

En la Figura 6.36 se muestran las tensiones de Tresca en cada uno de los materiales que forman el termopar en cascada, resultantes del estudio multiparamétrico realizado con FEAP.

En primer lugar, se puede observar que las tensiones disminuyen con l_{Bi} en todos los materiales, menos en Cu . Por otro lado, las tensiones aumentan con l_{Sk} en $Sn-Pb$ y en Al_2O_3 , mientras que en Cu esta longitud no afecta significativamente y en $BiSbTe$ y $Skutterudite$ las tensiones aumentan.

En segundo lugar, se observa que las mayores tensiones tienen lugar en Al_2O_3 , al igual que en el resto de casos, ya que es el material expuesto a las mayores T y con rigidez

más alta. Hay que destacar que, al igual que en el resto de casos, todos los materiales se encuentran bajo tensiones superiores a sus límites elásticos, trabajando en régimen de plasticidad o daño distribuido.

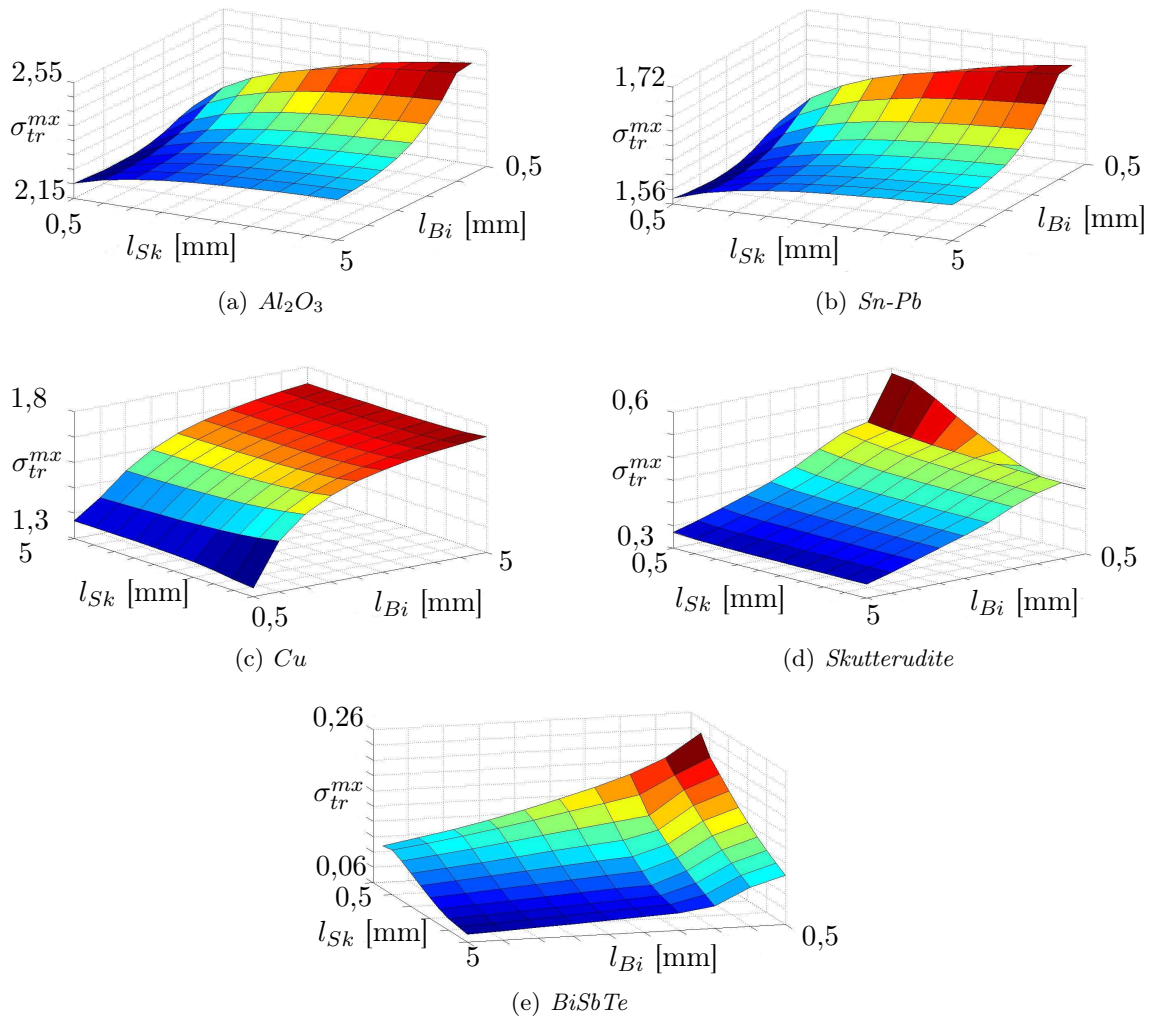


Figura 6.36: Tensiones de Tresca máximas [GPa] en cada uno de los materiales que forman el termopar en cascada en función de las longitudes de los dos niveles.

6.5.3. Distribuciones de temperatura y voltaje

En la Figura 6.37 se muestran las distribuciones de T y V obtenidas con FEAP con $l_{Bi} = 5$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm.

En primer lugar, se puede observar que la distribución de T es parabólica a lo largo de

los TEs, ya que en la zona del foco caliente disminuye más lentamente que en el foco frío; pero la distribución está muy cerca de ser lineal. Destaca una pequeña caída de T en los TEs superiores, en la zona en contacto con Al_2O_3 intermedia, debido a la alta κ de este óxido.

En segundo lugar, se observa que V es nulo en Al_2O_3 , ya que es un aislante. Además, disminuye a lo largo del recorrido de la corriente de forma irregular, debido a que la geometría no es sencilla y combina dos materiales con distintas propiedades. También hay que destacar las variaciones de V que aparecen en los TEs superiores, provocadas por el cambio de dirección de la corriente que tiene lugar en esta zona.

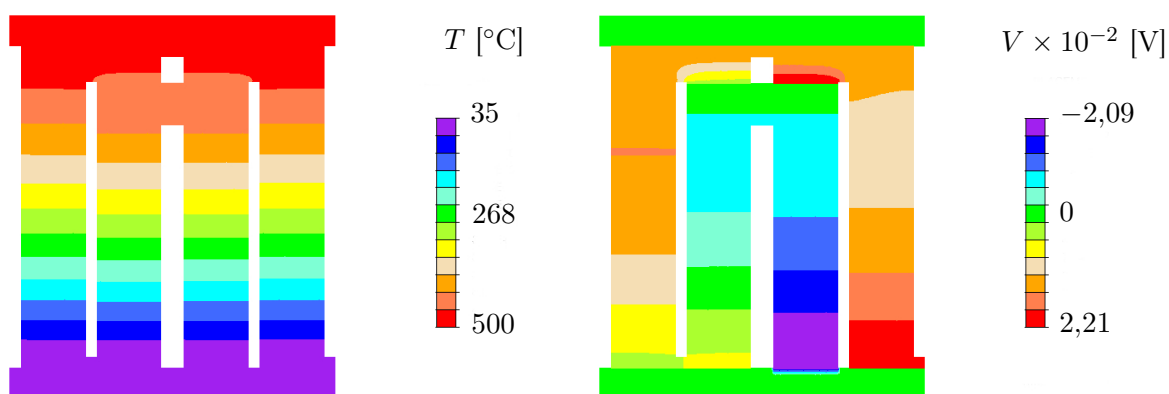


Figura 6.37: Distribuciones de temperatura y voltaje en el termopar en cascada con $l_{Bi} = 5$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm.

6.5.4. Distribuciones de los flujos de calor y eléctricos

En la Figura 6.38 se muestran los flujos térmicos y eléctricos obtenidos con FEAP para el termopar en cascada con $l_{Bi} = 5$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm

Analizando los flujos eléctricos, se observa que j_x aparece únicamente en Cu , siendo nulo en el resto del termopar. Por otro lado, j_y es máximo en los TEs, siendo nulo en Al_2O_3 . También se observa que existe una variación en Cu , debido al cambio de dirección de la corriente. Hay que destacar que j_y es prácticamente nula en la zona interior de los TEs superiores, debido a que la corriente pasa directamente de los TEs exteriores a Cu , por lo que esta zona de los TEs no está aportando nada a la generación de energía.

Para los flujos térmicos, se observa que q_x es prácticamente nulo en todo el termopar salvo en las esquinas de Cu , donde se produce una recirculación de flujo debido al cambio de área, similar a una expansión. En cuanto a q_y , se observa que es mínimo en Al_2O_3 debido a su gran superficie y a que el gradiente de T en este material es casi nulo, mientras que alcanza su valor máximo en los TEs, ya que el flujo es completamente vertical.

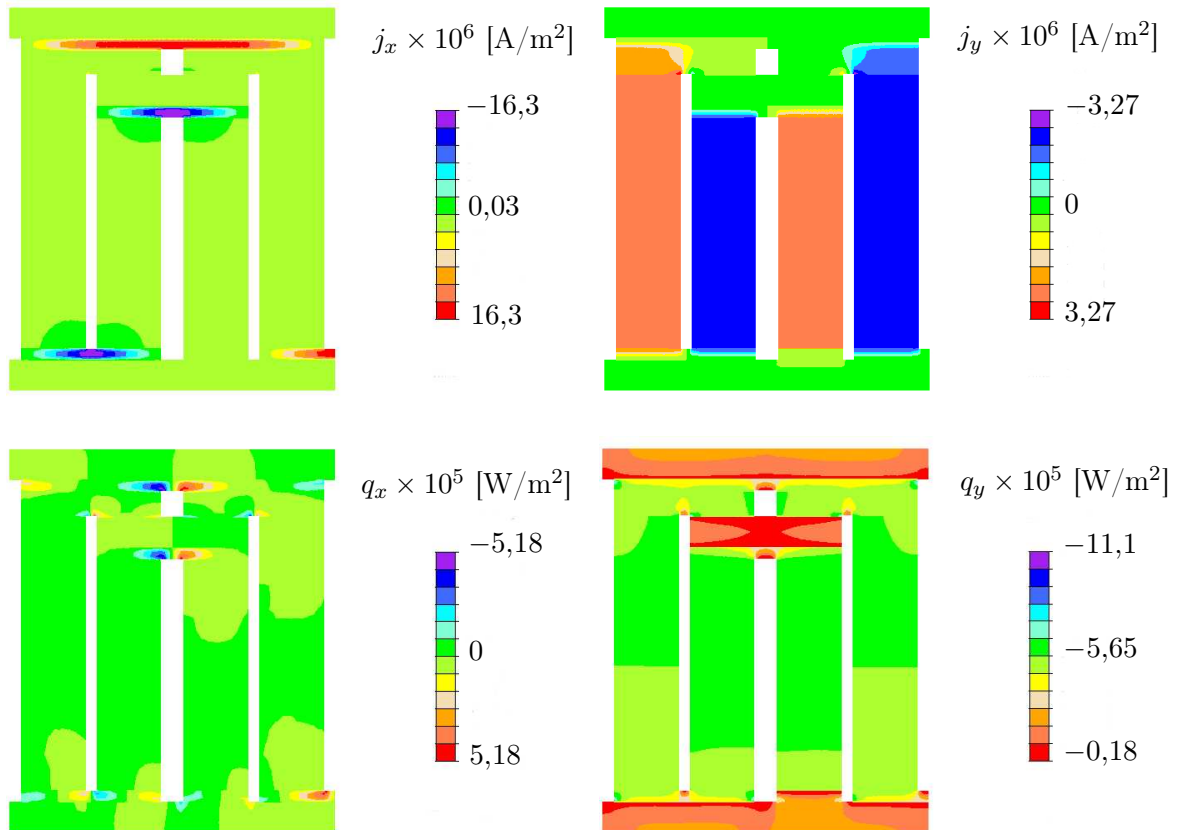


Figura 6.38: Distribuciones de los flujos eléctricos j_x , j_y y térmicos q_x , q_y en el termopar en cascada con $l_{Bi} = 5$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm.

6.5.5. Tensiones de Tresca y malla deformada

En la Figura 6.39 se muestran las tensiones de Tresca y la deformación de la malla, proporcionadas por FEAP con $l_{Bi} = 5$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm. La deformación de la malla se muestra utilizando un factor de escala $\times 100$.

En primer lugar, se observa que, al igual que en el resto de casos, las mayores tensiones se producen en las esquinas de Al_2O_3 del foco caliente, debido a la gran expansión que sufre el material por la alta T de esta zona y a que el desplazamiento horizontal está restringido por la C.C. de repetición.

Por otro lado, se observa que la máxima deformación de la malla se produce en Cu superior y en la parte superior de los TEs, ya que es la zona en la que las tensiones son mayores y el desplazamiento no se encuentra restringido. La proximidad entre las parejas de TEs verticales al deformarse, puede suponer un problema grave, ya que aparecerían

flujos eléctricos y térmicos entre sus paredes, inutilizando el generador. Por lo tanto, una posible solución para evitar potenciales problemas es encapsular los termopares con un material aislante de forma análoga a como se hace con ciertos dispositivos electrónicos, y de esta forma impedir los posibles flujos térmicos y eléctricos entre TEs.

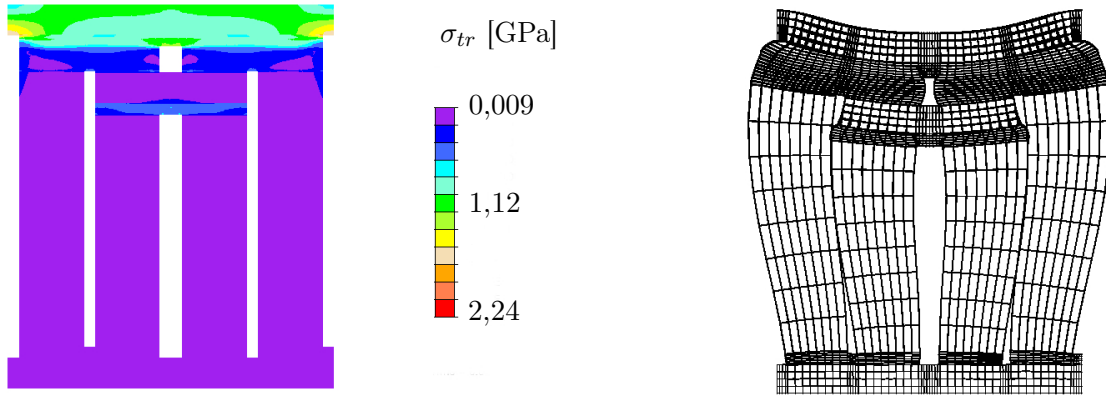


Figura 6.39: Tensiones de Tresca y malla deformada con factor de escala $\times 100$ en el termopar en cascada con $l_{Bi} = 5$ mm y $l_{Sk} = 0,5$ mm.

6.6. Comparación final

A lo largo de este capítulo se han realizado diversos estudios paramétricos variando la geometría del termopar y la intensidad del campo magnético presente, e incluso se han propuesto dos nuevos diseños. Para finalizar el trabajo, se va a realizar la comparación de las prestaciones óptimas y las tensiones producidas en cada uno de los casos estudiados.

Para realizar esta comparación, se recuerda que todos los casos han sido estudiados con el foco frío articulado y el foco caliente libre como C.C. mecánicas. Por otro lado, las C.C. de temperatura son $T_c = 35$ °C y $T_h = 500$ °C, y se impone una caída de potencial eléctrico de $V = 0,042$ V entre los dos extremos del termopar. Los resultados se muestran en la Tabla 6.3.

Se puede observar que η es máxima en el caso del generador segmentado con $\lambda = 0,12$, aumentando un 1,26% con respecto al generador clásico. Por otro lado, la configuración que proporciona la mayor W es el termopar con $AR = 1,4$, que genera 33 W de potencia eléctrica más que el generador clásico, disminuyendo su eficiencia tan solo en un 0,07%. En cuanto al caso con campo magnético, se observa que es totalmente perjudicial, ya que tanto η como W disminuyen mientras que las tensiones aumentan. El generador en cascada con $l_{Bi} = 5$ mm presenta una clara reducción de W y η , además de un aumento considerable de las tensiones, por lo que en principio se descarta como posible diseño operativo. Por último, hay que destacar que en todos los casos estudiados se producen tensiones por encima de la σ_Y en cada uno de los materiales, por lo que todo el generador se encontrará

trabajando en régimen de plasticidad o daño distribuido.

	$l_{TE} = 5 \text{ mm}$	$AR = 1,4$	$B_z = 0,2 \text{ T}$	$\lambda_{TE} = 0,12$	$l_{Bi} = 5 \text{ mm}$
η [-]	0,0715	0,0708	0,0375	0,0841	0,028
W [W]	148	181	62	141	83,67
σ_{mx}^{Al} [GPa]	1.78	2.56	2.13	2.05	2.53
σ_{mx}^{Sn} [GPa]	1.33	1.77	1.32	1.32	1.71
σ_{mx}^{Cu} [GPa]	1.41	1.45	1.45	1.43	1.76
σ_{mx}^{Sk} [GPa]	0.16	0.23	0.24	0.23	0.59
σ_{mx}^{Bi} [GPa]	-	-	-	0.16	0.24

Tabla 6.3: Comparación de las prestaciones y las tensiones obtenidas en cada caso para el generador estudiado.

7

Conclusiones

7.1. Presupuesto

En el siguiente desglose se presenta el presupuesto necesario para la realización del presente trabajo.

Cantidad	Concepto	Precio/ud.	Precio total
330	Horas totales de ingeniero	40,00 €	13.200,00 €
40	Búsqueda de información		
40	Formación en FEAP		
20	Modelo analítico en Mathematica [©]		
30	Definición de geometría y mallado		
50	Programación en FEAP		
50	Programación en MATLAB [©]		
20	Estudios paramétricos		
30	Análisis de los resultados		
50	Escribir el informe		
150	Horas totales del servidor (4 núcleos)	5,00 €	750,00 €
150	Estudios paramétricos		
1	Licencia de FEAP	1.000,00 €	1.000,00 €
1	Licencia de Mathematica [©] académica	1.515,00 €	1.515,00 €
1	Licencia de MATLAB [©] académica	500,00 €	500,00 €
Coste total (sin IVA)			16.965,00 €
IVA (21 %)			3.562,65 €
Total presupuestado			20.527,65 €

El presupuesto total del proyecto asciende a la cantidad de VEINTE MIL QUINIEN-TOS VEINTISIETE CON SESENTA Y CINCO EUROS.

7.2. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha realizado un profundo estudio sobre los principales efectos y materiales termoeléctricos, y cómo estos pueden ser utilizados en generadores termoeléctricos de forma eficiente. También se ha estudiado la influencia de la geometría y la presencia de un campo magnético en la eficiencia y las prestaciones de estos generadores, además de analizar dos nuevos diseños que mejoren estas prestaciones. Finalmente, en base a los resultados obtenidos se han alcanzado las siguientes conclusiones:

- Los generadores termoeléctricos se presentan como firmes candidatos para ser utilizados en multitud de aplicaciones aeroespaciales gracias a su versatilidad, su fiabilidad y su capacidad de operar en ambientes hostiles. Actualmente son utilizados en diversas misiones espaciales y suponen un importante nicho de investigación por parte de varias instituciones de todo el mundo, como el *Jet Propulsion Laboratory* de NASA.
- Los materiales termoeléctricos concentran actualmente la mayor parte del esfuerzo en investigación, ya que es en estos materiales donde se producen los efectos termoeléctricos que permiten la generación de energía. Para que los dispositivos puedan funcionar de forma eficiente es necesario emplear materiales sofisticados cuyas propiedades sean óptimas para la aplicación deseada, y por ello, diversos materiales, como *Skutterudite*, están siendo desarrollados actualmente.
- En este trabajo se han elegido *Skutterudite* y *BiSbTe* como materiales termoeléctricos para realizar las simulaciones; son materiales de última generación, óptimos para aplicaciones de generación de energía en su rango de operación correspondiente.
- La teoría presentada en este trabajo para los estudios analíticos de las prestaciones de los generadores termoeléctricos proporciona resultados muy fiables cuando el análisis se realiza sobre un único TE o sobre un termopar sencillo compuesto de un único material. Esta teoría es por lo tanto muy útil para realizar estimaciones en las etapas de diseño preliminar.
- Sin embargo, cuando se intenta realizar el análisis de un termopar real compuesto de los materiales correspondientes, los resultados obtenidos analíticamente son más optimistas que los obtenidos con elementos finitos (FEAP), prediciendo valores de eficiencia y potencia superiores a los reales. Esto se debe principalmente a las hipótesis del estudio analítico, que eliminan los efectos perjudiciales de la presencia de la alúmina y el cobre.
- La presencia de un campo magnético convierte el problema 1D en un problema 3D debido a la aparición de los efectos termogalvanomagnéticos, de naturaleza rotacional. Por lo tanto, el estudio analítico de los problemas con campo magnético es muy complicado, incluso para los casos más sencillos. Para poder obtener soluciones aproximadas es necesario asumir una serie de hipótesis que reducen la precisión de los resultados, por lo que es necesario realizar análisis numéricos con FEAP para obtener resultados fiables.

- En este trabajo se ha realizado el análisis de la influencia del campo magnético en las prestaciones de un generador eMMRTG. Los resultados muestran que cuanto mayor es la intensidad del campo, menores son tanto la eficiencia como la potencia generada, debido a la aparición de fenómenos de recirculación de los flujos en las esquinas de los TEs que bloquean el paso de la corriente eléctrica. También se ha realizado un estudio analítico sobre este fenómeno, confirmando los resultados obtenidos.
- Los resultados del análisis realizado con FEAP de la influencia de la longitud de los TEs en las prestaciones del generador, demuestran que la potencia producida disminuye con esta longitud mientras que la eficiencia aumenta. La tendencia de estos resultados coincide con la obtenida en el estudio analítico, verificando la validez de la teoría utilizada. Además, se ha encontrado la longitud con la que se reproducen las prestaciones del eMMRTG proporcionadas en sus especificaciones.
- Los resultados del análisis de la influencia del ratio de áreas transversales AR de los TEs, realizado con FEAP, demuestran que la eficiencia disminuye para cualquier $AR \neq 1$, mientras que la potencia generada aumenta cuanto mayor es AR .
- Uno de los nuevos diseños planteados, el generador segmentado, resulta ser una buena solución para mejorar las prestaciones sin modificar sustancialmente la geometría, ya que cada material que forma los TEs trabaja en su rango de temperaturas óptimo.
- El estudio paramétrico realizado para el generador segmentado determina que es posible aumentar la eficiencia del eMMRTG en un 1,26 % si se utilizan TEs de *Skutterudite* segmentado en un 12 % con *BiSbTe* en el foco frío, sin reducir significativamente la potencia producida.
- El estudio realizado sobre el generador en cascada desvela que, a pesar de las buenas expectativas iniciales, se produce una significativa reducción de W y η , mientras que las tensiones mecánicas aumentan. Debido a estos resultados y a la dificultad de implementación de esta configuración, se rechaza este diseño a falta de realizar nuevos estudios que consigan optimizarlo.
- Las tensiones que se producen en el termopar aumentan con la longitud del TE, salvo en el propio TE, para el que disminuyen debido a la reducción del gradiente térmico.
- En el resto de estudios paramétricos realizados, las tensiones no varían de forma significativa, manteniéndose aproximadamente constantes.
- En todos los casos estudiados, el termopar trabaja en régimen de plasticidad, ya que las tensiones de Tresca son superiores a los límites elásticos de todos los materiales que lo forman. La excepción es Al_2O_3 , que trabaja en régimen de daño distribuido.

7.3. Futuros proyectos

Tras la realización de este trabajo han surgido una serie de ideas interesantes acerca de posibles futuros proyectos relacionados con el estudio de los generadores termoeléctricos:

- Profundizar en el estudio de los materiales termoeléctricos con el fin de encontrar nuevos materiales que maximicen las prestaciones de los generadores termoeléctricos.
- Desarrollar un método analítico que permita estudiar de forma más precisa la influencia del campo magnético y los efectos termogalvanomagnéticos en la generación de energía termoeléctrica.
- Realizar experimentos con una célula termoeléctrica comercial y comparar los datos obtenidos con los resultados de un análisis con FEAP, con el objetivo de comprobar la fiabilidad de los resultados numéricos y alcanzar una mejor comprensión del funcionamiento de los dispositivos termoeléctricos.
- Profundizar en el diseño del generador en cascada, realizando nuevos estudios sobre la influencia de otras variables de forma que se consigan mejorar sus prestaciones y disminuir las tensiones que se producen.
- Realizar el análisis del generador incluyendo un modelo de plasticidad en FEAP para obtener resultados más precisos, ya que todo el termopar trabaja en régimen de plasticidad.
- Ampliar el método analítico utilizado en este trabajo, que permite estimar las prestaciones de los generadores termoeléctricos, de forma que se tenga en cuenta todos los materiales que forman el termopar y no solo los TEs.
- Desarrollar un algoritmo de optimización que permita encontrar la geometría de los TEs que maximiza la eficiencia del generador.
- Incluir un modelo de degradación de los TEs con el tiempo en FEAP y realizar un análisis de cómo varían las prestaciones del generador a lo largo de su vida útil.
- Realizar varios análisis numéricos variando las temperaturas de los dos focos y el voltaje aplicado con el fin de encontrar las condiciones de operación que maximizan la eficiencia.

Bibliografía

- [1] D. Rowe (Ed.), *CRC Handbook of Thermoelectrics*, CRC Press, 1995.
- [2] Constantine A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, 1989.
- [3] <http://hugopacilio.blogspot.com.es/2014/04/sonda-cassini-el-tour-final.html>
- [4] <http://www.mapcorp.com/?s=thermoelectric>
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Ann_\(Andini\)_Makosinski](https://en.wikipedia.org/wiki/Ann_(Andini)_Makosinski)
- [6] https://solarsystem.nasa.gov/rps/docs/eMMRTG_onepager_LPSC20140317.pdf
- [7] https://www2.jpl.nasa.gov/ulysses/images/gallery/b_estec_test.jpg
- [8] <http://www.keiththomsonbooks.com/blog/afterburners>
- [9] https://en.wikipedia.org/wiki/Radioisotope_thermoelectric_generator
- [10] Samoilovich, A.G. y Korenblit, L.L., *Modern state of the theory of thermoelectricity and thermomagnetic phenomena in semiconductors*, 1953.
- [11] Harman, T.C. y Honig, J.M., *Thermoelectric and Thermomagnetic Effects and Applications*. McGraw Hill, New York, 1967.
- [12] Robert L. Taylor, *FEAP A Finite Element Analysis Program: User Manual*, University of California, Berkeley, 2010. <http://www.ce.berkeley.edu/feap>
- [13] H. Okumura, S. Yamaguchi, H. Nakamura, K. Ikeda, K. Sawada, *Numerical computation of thermoelectric and thermomagnetic effects*, 17th International Conference on Thermoelectrics (1998)
- [14] R.K. Nagle, E.B. Saff, A.D. Snider, *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 2001.
- [15] E. Ventsel and T. Krauthammer. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*. CRC Press, 2001.
- [16] Jet Propulsion Laboratory. *Radioisotope Power Systems Reference Book for Mission Designers and Planners*. JPL Publication, 2015.
- [17] MELCOR, *Thermoelectric Handbook, Melcor, a unit of Laird Technologies*, <http://www.lairdtech.com>, 2000.
- [18] G. Rogl, A. Grytsiv, E. Bauer, P. Rogl, M.Zehetbauer. *Structural and physical properties of n-type skutterudite $Ca_{0,07}Ba_{0,23}Co_{3,95}Ni_{0,05}Sb_{12}$* . Elsevier, 2009.
- [19] G. Rogl, L. Zhang, P. Rogl, A. Grytsiv, M. Falmbigl, D. Rajs, M. Kriegisch, H. Muller, E. Bauer, J. Koppensteiner, W. Schranz, M. Zehetbauer, Z. Henkie, M. B. Maple. *Thermal expansion of skutterudites*. Journal of Applied Physics, 2010.
- [20] Andrew A. Wereszczak, Meredith E. Ragan, Kevin Strong, Patrick Ritt. *Strength of n- and p- type skutterudites*. 2010.

- [21] James R. Salvador, Jung Young Cho, Jihui Yang, Andrew A. Wereszczak, Hsin Wang. *Mechanical and Elastic Property Evaluation of n- and p- type Skutterudites*. General Motors.
- [22] Bas Tummens. *Data Thief III Manual*. 2005-2006.
- [23] G. Li, K.R. Gadelrab, T. Souier, P.L. Potapov, G. Chen, M. Chiesa. *Mechanical properties of $Bi_xSb_{2-x}Te_3$ nanostructured thermoelectric material*. IOPscience, 2011.
- [24] Yun Zheng, Qiang Zhang, Xianlu Su, Hongyao Xie, Shengcheng Shu, Tianle Chen, Gangjian Tan, Yonggao Yan, Xinfeng Tang, Ctirad Uher, G. Jeffrey Snyder. *Mechanically Robust BiSbTe Alloys with Superior Thermoelectric Performance: A Case Study of Stable Hierarchical Nanostructured Thermoelectric Materials*. Materials Views, 2014.
- [25] Bed Poudel, Qing Hao, Yi Ma, Yuncheng Lan, Austin Minnich, Bo Yu, Xiao Yan, Dezhi Wang, Andrew Muto, Daryoosh Vashaee, Xiaoyuan Chen, Junming Liu, Mildred S. Dreselhaus, Gang Chen, Zhifeng Ren. *High-Thermoelectric Performance of Nanostructured Bismuth Antimony Telluride Bulk Alloys*. Science Express, 2008.
- [26] J.L. Pérez Aparicio, R. Palma, R.L. Taylor. *Multiphysics and thermodynamic formulations for equilibrium and non-equilibrium interactions: non-linear finite elements applied to multi-coupled active materials*. Arch Comput Methods Eng, 2015.
- [27] R. Palma, E. Moliner, J.L. Pérez Aparicio. *Elasto-thermoelectric beam formulation for modeling thermoelectric devices*. Finite Elements in Analysis and Design (2017), v. 129, pp. 32-41.
- [28] M. Alata, M. Al-Nimr, M. Naji. *Transient behaviour of a thermoelectric device under the hyperbolic heat conduction model*. Int. J. Thermophys. 24 (6) (2003) 1753-1768.
- [29] J.M. Gere, S.P. Timoshenko. *Mecánica de Materiales*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1984.