TESIS DOCTORAL

PROBLEMAS DE COMPLETACIÓN DE MATRICES PARCIALES

Ramadan Khalil Hassan el-Ghamry

D. JUAN RAMÓN TORREGROSA SÁNCHEZ y Dña. CRISTINA JORDÁN LLUCH, profesores de la Universidad Politécnica de Valencia

CERTIFICAN:

Que la presente memoria

"PROBLEMAS DE COMPLETACIÓN DE MATRICES PARCIALES"

ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, por el licenciado

D. RAMADÁN KHALIL HASSAN EL-GHAMRY

y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, autorizan la presentación de la referida tesis doctoral ante la Comisión de Doctorado de la Universidad Politécnica de Valencia, firmando el presente certificado.

Valencia, 20 de febrero de 2009

Fdo. Juan R. Torregrosa   Fdo. Cristina Jordán

Dedicatoria.

a mis padres, a mis hermanos, y a mi patria Palestina.

Agradecimientos.

a mis directores Cristina Jordán y Juan Ramón Torregrosa por su tiempo y atención,

a los revisores externos por sus notas y observaciones,

a la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo por haber sido uno de sus becarios,

al Colegio Mayor La Coma, y en especial a su director Alfonso García por mis años de colegial,

a las personas que de algún modo han sido una influencia positiva en el desarrollo de esta memoria: a Tatiana Montoya, a Mohamed Chekrad, a Suhail Sharadqah, a Vicky Zomot, a Jauad Elkharraz, y a Anas Saadeddin,

a todos los que he conocido en estos años y me han dado su apoyo.

Resumen

La presente memoria aborda algunos problemas de completación de matrices parciales, concretamente analizamos las matrices parciales totalmente no negativas, las matrices parciales totalmente no positivas y las R y TR-matrices parciales. El objetivo es dar a conocer la situación actual de los citados problemas y proporcionar condiciones necesarias y suficientes que nos permitan cerrar diversos casos abiertos.

En la primera parte introducimos los conceptos necesarios para entender y manejar los problemas objeto de estudio. Mostramos además las herramientas utilizadas a lo largo de este trabajo, haciendo hincapié en la teoría de grafos que juega un papel importante en el análisis de las matrices parciales puesto que cada matriz parcial puede ser representada mediante un grafo dirigido o no dirigido.

La segunda parte está dedicada al problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas. Trás una presentación del estado actual del problema analizamos el caso de matrices con la diagonal principal parcialmente especificada, si bien los resultados principales los vamos a obtener en el caso de matrices parciales con diagonal principal especificada. Generalizamos algunos resultados conocidos para el caso de matrices parciales posicionalmente simétricas y obtenemos nuevos resultados, en algunos casos cerrando problemas abiertos, para matrices parciales no posicionalmente simétricas. Asimismo, en el último capítulo presentamos algunas cuestiones que hasta el momento siguen abiertas.

Finalmente, dedicamos la tercera parte de esta memoria a analizar los problemas de completación de matrices parciales totalmente no positivas, el de R-matrices y el de TR-matrices. Con los resultados obtenidos conseguimos cerrar los dos últimos problemas mencionados.

Resum

La present memòria aborda alguns problemes de completació de matrius parcials, concretament analitzem les matrius parcials totalment no negatives, les matrius parcials totalment no positives i les R i TR-matrius parcials. L'objectiu és donar a conèixer la situació actual dels citats problemes i proporcionar condicions necessàries i suficients que ens permetin tancar diversos casos oberts.

En la primera part introduïm els conceptes necessaris per a entendre i manejar els problemes objecte d'estudi. Vam mostrar a més les eines utilitzades al llarg d'aquest treball, posant l'accent en la teoria de grafs que juga un paper important en l'anàlisi de les matrius parcials ja que cada matriu parcial pot ser representada mitjançant un grafo dirigit o no dirigit.

La segona part està dedicada al problema de completació de matrius parcials totalment no negatives. Trás una presentació de l'estat actual del problema analitzem el cas de matrius amb la diagonal principal parcialment especificada, si bé els resultats principals els anem a obtenir en el cas de matrius parcials amb diagonal principal especificada. Generalitzem alguns resultats coneguts per al cas de matrius parcials posicionalmente simètriques i obtenim nous resultats, en alguns casos tancant problemes oberts, per a matrius parcials no posicionalmente simètriques. Així mateix, en l'últim capítol presentem algunes qüestions que fins al moment segueixen oberts.

Finalment, vam dedicar la tercera part d'aquesta memòria a analitzar els problemes de completació de matrius parcials totalment no positives, el de R-matrius i el de TR-matrius. Amb els resultats obtinguts aconseguim tancar els dos últims problemes esmentats.

Abstract

The following report deals with some completion problems of partial matrices; specifically, we shall analyze totally nonnegative partial matrices, totally nonpositive partial matrices, R and TR-partial matrices. The aim is to know the current status of these problems and provide necessary and sufficient conditions to enable us to close several open cases.

In the first part, we introduce the essential concepts to understand and handle the problems under study. Additionally, we also show the tools used throughout this work, with emphasis on Graph Theory, which plays an important role in the analysis of partial matrices since partial matrices can be represented by directed or undirected graphs.

The second part is devoted to the totally nonnegative completion problem. After a presentation of the current state of the problem, we analyze the case of matrices with the main diagonal that are partially specified. The main results, however, we will obtain when the main diagonal is to be specified. We will generalize some known results for the case of positionally symmetric partial matrices and obtain new results, in some cases closing problems, for partial matrices that are not positionally symmetric. The last chapter also presents some of the issues that are still open.

Finally, we dedicate the third part of this report to analyze the totally nonpositive completion problem, and the R-matrices as well as the TR-matrices completion problem. With the achieved results, we managed to resolve the last two mentioned problems.

Índice general

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Teoría de completación

En nuestros problemas de Matemáticas, Economía, Estadística, Biología, etc, modelizados mediantes técnicas matriciales, la resolución del problema consiste en determinar algunos elementos de una matriz dada, de manera que la matriz obtenida verifique ciertas propiedades. La rama de las matemáticas que engloba este tipo de problemas recibe el nombre de *teoría de completación.* Aunque este nombre aparece en la historia en la segunda mitad del siglo XX, en esta teoría podemos incluir algunos problemas clásicos tales como:

(I) La clasificación de un sistema de ecuaciones lineales con parametros.
La resolución del sencillo sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} \alpha & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ \gamma & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

es un problema que podemos incluir dentro de la teoría de completación, ya que en realidad estamos buscando valores de las posiciones $(1, 1)$, $(2, 3)$ y $(3, 1)$ de la matriz de coeficientes, de manera que el sistema tenga solución única, infinitas soluciones o sea incompatible.

(II) El cálculo de los valores propios de una matriz cuadrada A.

En este caso estamos buscando valores de λ para que la matriz $B = \lambda I - A$ tenga determinante nulo.

(III) La clasificación de los puntos críticos de una función de varias variables, dependiente de un parámetro.

En estos problemas necesitamos determinar algunos elementos de la matriz hessiana, evaluada en cada punto crítico, para que la forma cuadrática que esta matriz define sea definida positiva, definida negativa o indefinida.

Otros tipos de problemas que podemos englobar dentro de la teoría de completación son los llamados problemas de escalamiento (ver [4]), problemas de complementariedad lineal o problemas de índole económica.

(IV) Problema de distribución del presupuesto.

Una empresa multinacional, con sucursales S_1, S_2, S_3 en tres países europeos distintos, tiene el presupuesto para el próximo año fiscal, el cual debe ser distribuido entre categorías distintas: investigación, administración y técnicos. El consejo de administración fija la cantidad total que debe ser distribuida entre cada una de las sucursales de la empresa en las tres categorías, el problema consiste en cómo modificar la actual distribución del presupuesto para obtener la nueva distribución de manera que cumpla con las estipulaciones que marca el consejo de administración. Por ejemplo, supongamos que en la matriz A tenemos la distribución actual en millones de euros:

Matriz A

	Técnicos	Administración	Investigación
S_1	200	75	15
S_2	135	165	12
S_3	175	160	25

El objetivo es fijar los elementos de la siguiente matriz B, de manera que sean no negativos y verifiquen las restricciones fijadas respecto de la distribución del presupuesto:

Matriz B

	Técnicos	Administración	Investigación	Presupuesto
S_1	*	*	*	400
S_2	*	*	*	350
S_3	*	*	*	370
	—	—	—	—
Total	700	320	100	1120

Evidentemente, podemos encontrar matrices que verifiquen las condiciones impuestas (suma de las filas y columnas fijada), pero muchas de éstas están bastante alejadas de la matriz original A. Por ejemplo, la siguiente matriz C:

Matriz C

	Técnicos	Administración	Investigación
S_1	0	320	80
S_2	330	0	20
S_3	370	0	0

satisface las restricciones, pero una decisión de este tipo daría lugar a serios problemas, incluyendo el que se crearía por la necesaria reubicación del personal. Por tanto, necesitamos encontrar una matriz que no sólo verifique las restricciones dadas para la suma de las filas y columnas, sino que además esté cercana a la matriz original para algún tipo apropidado de medida de proximidad, que vendrá fijada en función de los resultados económicos del presente ejercicio.

Observamos que todos estos problemas tienen en común que hay que determinar los elementos, o parte de ellos, de una o varias matrices, con el objetivo de conseguir una matriz que verifique algunas propiedades establecidas. La teoría de completación es la encargada de estudiar esta clase de problemas.

1.1. Clases de matrices

En esta sección introducimos distintas clases de matrices, en el conjunto de los números reales. La mayoría de ellas están relacionadas con las P-matrices, que juegan un papel importante en la teoría de completación. Una característica común de todas ellas es que cualquier submatriz principal es una matriz del mismo tipo que la matriz original, lo cual nos va a permitir, como veremos mas adelante, trasladar de forma natural los diferentes conceptos al contexto de matrices parciales. Vamos a representar por $A[\alpha]$, $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, la submatriz principal de A formada por los elementos que ocupan las filas y columnas α.

Una clase de matrices que extiende, al campo de matrices no simétricas, el concepto de matriz definida positiva es la de P-matrices.

Definición 1.1.1 *Una matriz A, de tamaño $n \times n$, se dice que es una P-matriz si el determinante de cualquier submatriz principal es positivo.*

La matriz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es una P-matriz ya que $\det A[\alpha] > 0$, $\forall \alpha \subseteq \{1,2,3,4\}$.

Entre las propiedades más interesantes de esta clase de matrices destacamos las siguientes:

Proposición 1.1.1 *Sea A una P-matriz de tamaño $n \times n$. Se verifican las siguientes propiedades.*

(i) *A^T es una P-matriz.*

(ii) *A^{-1} es una P-matriz.*

(iii) *Si $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, con $d_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces AD y DA son P-matrices.*

(iv) *Si $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, entonces DAD^{-1} es una P-matriz.*

(v) *Si P es una matriz permutación, entonces PAP^T es una P-matriz.*

(vi) *$A[\alpha]$ es una P-matriz, $\forall \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Las matrices que son a la vez P-matrices y simétricas reciben el nombre de definidas positivas (DP).

La matriz

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & -0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

es definida positiva.

Podemos ampliar la clase de P-matrices a partir de la siguiente generalización:

Definición 1.1.2 *Una matriz A, de tamaño $n \times n$, se dice que es una P_0-matriz si el determinante de cualquier submatriz principal es no negativo.*

La matriz

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

es P_0-matriz.

Introducimos a continuación dos nuevas clases de matrices no negativas que generalizan las P-matrices.

Definición 1.1.3 *Una matriz no negativa A, de tamaño $n \times n$, se dice que es totalmente positiva, TP (totalmente no negativa, TNN) si todos sus menores son positivos (no negativos).*

La matriz

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es totalmente no negativa.

Entre las numerosas propiedades que tienen estas matrices destacamos las siguientes:

Proposición 1.1.2 *Sea A una matriz totalmente no negativa de tamaño $n \times n$. Se verifican las siguientes propiedades:*

(i) Si $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, con $d_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces AD, DA y DAD^{-1} son matrices totalmente no negativas.

(ii) *Si P es una matriz permutación $P = [n, n-1, \ldots, 1]$, entonces PAP^T es totalmente no negativa. El concepto no se hereda, en general, por semejanza de permutación.*

(iii) *Cualquier submatriz de A es totalmente no negativa.*

(iv) *Si B es una matriz totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, entonces AB y BA son totalmente no negativas.*

(v) *Si B es una matriz totalmente no negativa, entonces $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ es totalmente no negativa.*

Podemos trasladar el concepto de matriz totalmente no negativa al campo de las matrices no positivas obteniendo una nueva clase de matrices.

Definición 1.1.4 *Una matriz no positiva A, de tamaño $n \times n$, se dice que es totalmente no positiva si todos sus menores son no positivos.*

La matriz

$$A_5 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ -0{,}5 & -1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -1{,}5 & -3 & -1 & -1 \\ -1{,}5 & -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

es totalmente no positiva.

Esta clase de matrices satisface las mismas propiedades que las matrices totalmente no negativas.

Numerosos problemas en Biología, Física y ciencias sociales vienen descritos por matrices cuadradas con ciertas restricciones en su patrón de signos. Una de las estructuras más comunes corresponde a matrices con elementos no positivos fuera de la diagonal. Una notación clásica para este tipo de matrices es la siguiente:

$$Z_n = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} : a_{ij} \leq 0, i \neq j\}$$

Definición 1.1.5 *Una matriz $A \in Z_n$ se dice que es una M-matriz si todos sus menores principales son positivos. Es pues una P-matriz con una estructura particular de signos.*

La matriz

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -0{,}25 & -0{,}5 & -1 \end{bmatrix}$$

es una M-matriz.

Siguiendo dentro de la clase de las P-matrices, otra familia de matrices no negativas, relacionadas con las M-matrices, son las llamadas inversas M-matrices.

Definición 1.1.6 *Una matriz no singular A, de tamaño $n \times n$, se dice que es una inversa M-matriz (iM-matriz) si A^{-1} es M-matriz.*

La matriz

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 2/5 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 1/5 \\ 2/5 & 1/2 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

es una inversa M-matriz.

Finalmente, introducimos dos nuevas clases de matrices que serán objeto de estudio en los capítulos 6 y 7 de esta memoria.

Definición 1.1.7 *Una matriz A se dice que es una R-matriz si todos sus menores principales son no nulos.*

La matriz

$$A_8 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -0{,}5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es una R-matriz.

Definición 1.1.8 *Una matriz A, de tamaño $n \times n$, se dice que es una totalmente R-matriz (TR-matriz) si todos sus menores son no nulos.*

La matriz

$$A_9 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0{,}5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -0{,}5 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0{,}5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es una TR-matriz.

Entre las propiedades mas importantes de estas dos últimas clases de matrices cabe destacar las siguientes:

Proposición 1.1.3 *Sea A una R-matriz (TR-matriz) de tamaño $n \times n$.*

(i) Si P es una matriz permutación, entonces PAP^T es R-matriz (TR-matriz).

(i) Si D es una matriz diagonal positiva, entonces DA y AD son R-matrices (TR-matrices).

(iii) Si D es una matriz diagonal no singular, entonces DAD^{-1} es una R-matriz (TR-matriz).

(iv) Cualquier submatriz principal de una R-matriz es una R-matriz.

(v) Cualquier submatriz (principal o no) de una TR-matriz es una TR-matriz.

En el siguiente diagrama recogemos algunas de las relaciones existentes entre las clases de matrices que acabamos de introducir.

$$
\begin{tikzcd}
TNN \arrow[d] & TP \arrow[l] \arrow[d] & TNP \\
P_0 & P \arrow[l] \arrow[dl] & iM \arrow[l] \\
\mathrm{R} & & \\
TR \arrow[u] & M \arrow[uu] & DP \arrow[uul]
\end{tikzcd}
$$

1.2. Matrices parciales

Como ya hemos comentado, en los problemas que aborda la teoría de completación las matrices de partida suelen tener elementos desconocidos o no especificados, fruto de la propia naturaleza del problema. Estas matrices reciben el nombre de matrices parciales.

Definición 1.2.1 *Dada una matriz real A, de tamaño $m \times n$, se dice que A es una matriz parcial si parte de sus elementos son conocidos y el resto están por especificar, pudiendo considerarse como variables independientes.*

Se llama *patrón* de A, y se representa por Γ_A, al conjunto de pares $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que el elemento que ocupa la posición (i, j) de A es especificado.

Ejemplo 1.2.1 *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & ? & 5 & 3 \\ 2 & -1/2 & 4 & ? \\ ? & 0 & 3 & 0 \\ ? & ? & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

donde ? representa elementos no especificados, es una matriz parcial cuyo patrón es el conjunto de pares

$$\{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$$

Cuando damos valores a los elementos no especificados de una matriz parcial A, obtenemos una matriz convencional, que representamos por A_c y que recibe el nombre de *completación* de A.

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & -1/2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es una completación de la matriz parcial del ejemplo anterior.

Cuando todos los elementos no especificados de la matriz parcial son reemplazados por ceros, se obtiene la denominada *completación nula* y se representa por A_0.

En numerosos problemas de completación es habitual introducir restricciones sobre los elementos especificados de la matriz parcial, entre los que cabe destacar:

(a) Positividad de la matriz parcial, es decir todos los elementos especificados son positivos.

(b) Simetría de signos, es decir los elementos especificados de una matriz parcial cuadrada situados en posiciones simétricas tienen el mismo signo,

ó resticciones de tipo simétrico sobre el patrón:

(c) Diremos que una matriz parcial cuadrada $A = (a_{ij})$ es posicionalmente simétrica cuando el elemento (i, j) está especificado si y sólo si el elemento (j, i) lo está. En caso contrario diremos que A es no posicionalmente simétrica.

Ejemplo 1.2.2 *Consideramos las matrices parciales*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}25 & ? & ? \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ ? & 3 & 1 & 0{,}5 \\ ? & 0{,}5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ? & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ ? & 0{,}5 & 3 & ? \\ ? & ? & ? & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que A es una matriz parcial posicionalmente simétrica mientras que B no lo es, ya que, por ejemplo, la posición $(2, 4)$ está especificada mientras que $(4, 2)$ no lo está.

1.3. Problema de completación

En los problemas de completación se estudia, como hemos mencionado, la existencia de completaciones de una matriz parcial verificando determinadas propiedades previamente fijadas. El planteamiento general de un problema de completación es el siguiente: Sea A una matriz parcial. Si Π representa una determinada propiedad, ¿existe una completación A_c de A cumpliendo la propiedad Π?

Se trata, por tanto, de un tipo de problema muy amplio ya que depende de:

(a) El patrón de la matriz parcial, es decir, las posiciones que ocupan sus elementos especificados. Por ejemplo, una fila, una banda, la parte triangular superior, etc.

(b) El concepto prescrito que se desea obtener. Por ejemplo, la no singularidad, una determinada estructura de Jordán, el tener menores no negativos, etc.

A continuación presentamos una breve descripción de algunos de los problemas de completación en los que numerosos investigadores están trabajando actualmente. Parte de estos problemas serán objeto de estudio a lo largo de la presente memoria.

- El problema de completación de valores propios, en el que se desea obtener una completación de una matriz parcial cuadrada con un determinado espectro. Este problema ha sido uno de los primeros problemas de completación estudiados, siendo Mirsky, en 1958 (ver [40]), quien obtuvo el primer resultado para matrices con todos sus elementos situados fuera de la diagonal principal no especificados. Posteriormente, Friedland [16] y Silva [45] resuelven este problema para matrices parciales con patrón complementario al anterior.

Otros autores han abordado este problema para matrices parciales cuyo patrón constituye una submatriz principal o un bloque diagonal. En el primer caso la solución del problema fue dado por Thompson en [47] y Sá en [39], y en el segundo caso por De Oliveira en [8] y Silva en [46]. Cuando el patrón de la matriz parcial es un número de filas y columnas completas el problema ha sido resuelto por Zaballa en [48]. Todos estos resultados, incluyendo conexiones con la teoría de sistemas, aparece descritos de forma sistemática en [21].
En la actualidad, investigadores como Gohberg, Rodman, Shalom, Krupnik, etc., están estudiando este problema para distintos patrones de la matriz parcial.

- El problema de completación de P-matrices parciales. El objetivo es obtener una completación P-matriz de una P-matriz parcial.
  El estudio de este problema se inició en 1996 por Johnson y Kroschel (ver [30]), quienes cerraron el problema en el caso de matrices parciales posicionalmente simétricas. De Alba y Hogben en [7] continuaron el estudio de este problema para el caso de matrices no posicionalmente simétricas, obteniendo resultados parciales para matrices de pequeño tamaño. Posteriormente, Fallat, Johnson, Torregrosa y Urbano en [11] iniciaron el análisis de este problema añadiendo condiciones sobre los elementos especificados de la P-matriz parcial, tales como positividad, simetría de signo, etc, o sobre el patrón de dicha matriz.
  Este problema tiene todavía numerosas cuestiones abiertas.

- El problema de completación de matrices parciales definidas positivas. En este problema se analiza bajo qué condiciones una matriz parcial simétrica definida positiva admite una completación definida positiva. El problema está resuelto por Grone y otros en [22] para matrices parciales cuyo grafo asociado es cordal (en la siguiente sección definiremos con detalle este concepto). Cuando el grafo asociado no es cordal la matriz parcial no admite, en general, completación definida positiva. Actualmente se están estudiando, para este caso, condiciones que garanticen la existencia de la completación deseada. Para más información sobre este problema de completación ver [28] y [22].

- El problema de completación de M-matrices parciales. En este caso se pretende obtener una completación M-matriz de una M-matriz parcial. Este tipo de matrices aparece con frecuencia en el estudio de la convergencia de los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, en modelos de crecimiento económico, etc.
  En 1996, Johnson y Smith, en [33], estudiaron este problema dando una caracterización implícita del mismo, independiente de la estuctura de la matriz parcial. Posteriormente Hogben en [26], analiza el caso no posicionalmente simétrico para determinados tipos de patrones.

- El problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas. Al igual que en los casos precedentes, en este problema se analiza bajo qué condiciones una matriz parcial totalmente no negativa admite una completación del mismo tipo. Estas matrices están teniendo una importancia creciente en teoría de aproximación, Estadística, diseño gráfico asistido por ordenador, Economía, etc, lo cual explica la atención que se les está prestando desde hace unos años dentro del Algebra Lineal.
  El problema es analizado por primera vez por Johnson, Kroschel y Lundquist, en [31], para matrices parciales posicionalmente simétricas. Los autores demuestran que existe la completación deseada cuando el grafo asociado a la matriz parcial es 1-cordal, monótonamente etiquetado. Para otros tipos de grafos no dirigidos, la matriz parcial no admite,

en general, una completación totalmente no negativa, y para estos casos se están estudiando condiciones necesarias y suficientes que garanticen la existencia de la completación deseada.

Recientemente, Fallat, Johnson y Smith han abordado este problema (ver [12]) para matrices no posicionalmente simétricas, obteniendo resultados parciales para matrices con pocos elementos no especificados. Quedan numerosas cuestiones abiertas, tanto en el caso posicional como no posicionalmente simétrico, así como la extensión del problema a matrices totalmente positivas y totalmente no positivas.

El análisis de este problema de completación constituye el contenido de la segunda parte de esta memoria.

Capítulo 2

Teoría de grafos

En el estudio de la mayor parte de los problemas planteados en el anterior capítulo juega un papel importante la teoría de grafos, ya que facilita el análisis de la completación de una matriz al poder ser ésta representada mediante un grafo.

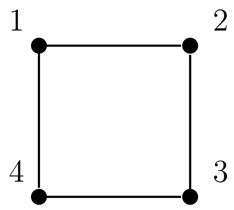
2.1. Grafo asociado a una matriz parcial

Dada una matriz parcial $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, se llama *grafo asociado* a la matriz A al grafo $G_A = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de vértices y existe un arco del vértice i al vértice j si el elemento a_{ij} de la matriz A es especificado. Teniendo en cuenta que vamos a trabajar con matrices parciales cuya diagonal principal está especificada, excepto en la primera sección del cuarto capítulo, omitiremos los bucles de su grafo asociado.

Si la matriz A es posicionalmente simétrica, su grafo asociado G_A es no dirigido y hablaremos de arista (i, j) entre los vértices i y j. En caso contrario, su grafo asociado es dirigido.

Ejemplo 2.1.1 *Las siguientes matrices son posicionalmente simétricas y sus respectivos grafos asociados son no dirigidos.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ? & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ? \\ ? & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & ? & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ? & ? \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & ? \\ ? & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ ? & ? & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

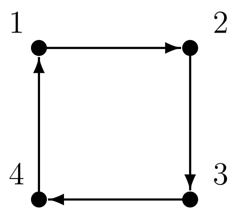


G_A

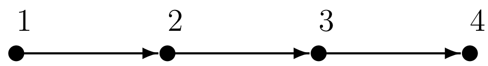
G_B

Ejemplo 2.1.2 *Las siguientes matrices son no posicionalmente simétricas y sus respectivos grafos asociados son dirigidos.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ? & ? \\ ? & a_{22} & a_{23} & ? \\ ? & ? & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & ? & ? & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ? & ? \\ ? & b_{22} & b_{23} & ? \\ ? & ? & b_{33} & b_{34} \\ ? & ? & ? & b_{44} \end{bmatrix}$$



G_A

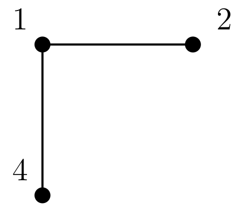


G_B

Un *grafo subyacente*, $\overline{G}$ de un grafo dirigido $G = (V, E)$ es el resultado de cambiar cualquier arco en E por una arista.

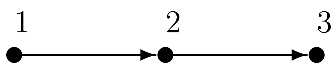
Ejemplo 2.1.3 *Observamos que los grafos G_A y G_B del ejemplo 2.1.1 son grafos subyacente de G_A y G_B del ejemplo 2.1.2 respectivamente.*

Dado $G = (V, E)$, se llama *subgrafo inducido* por un conjunto de vértices S, $G[S]$, a un subgrafo de G cuyo conjunto de vértices es S y es maximal respecto al conjunto de aristas (arcos). En el ejemplo 2.1.1, $G_A[S] = (\{1, 2, 4\}, \{(1, 2), (1, 4)\})$ es un subgrafo de G_A inducido por el conjunto de vértices $S = \{1, 2, 4\}$.

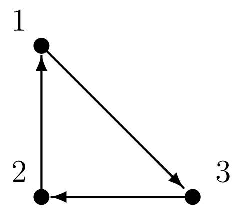


$G_B[S]$

Una sucesión finita de vértices distintos, $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k\}$, tal que $(i_j, i_{j+1}) \in E$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$, recibe el nombre de *camino*, siendo *ciclo* si el primer y último vértice coinciden.

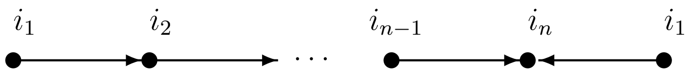


camino



ciclo

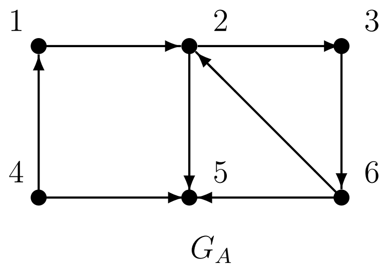
Por otro lado, si el grafo $G = (V, E)$ es dirigido y $E = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{k-1}, i_k), (i_1, i_k)\}$, se dice que G es un *camino totalmente especificado.*



camino totalmente especificado

Ejemplo 2.1.4 *El grafo G_A asociado a la siguiente matriz parcial*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ? & ? & ? & ? \\ ? & a_{22} & a_{23} & ? & a_{25} & ? \\ ? & ? & a_{33} & ? & ? & a_{36} \\ a_{41} & ? & ? & a_{44} & a_{45} & ? \\ ? & ? & ? & ? & a_{55} & ? \\ ? & a_{62} & ? & ? & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix},$$



tiene los siguientes caminos totalmente especificados:

$$(\{4,1,2,5\},\{(4,1),(1,2),(2,5),(4,5)\})$$

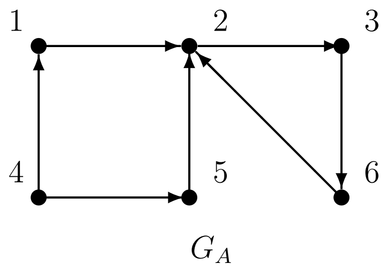
$$(\{4,1,2,3,6,5\},\{(4,1),(1,2),(2,3),(3,6),(6,5),(4,5)\})$$

$$(\{2,3,6,5\},\{(2,3),(3,6),(6,5),(2,5)\})$$

$$(\{6,2,5\},\{(6,2),(2,5),(6,5)\})$$

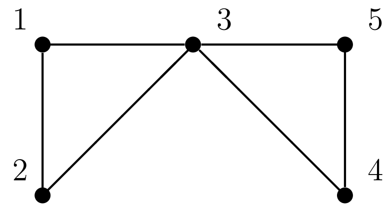
Ejemplo 2.1.5 *Sin embargo, el grafo G_A asociado a la matriz parcial*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ? & ? & ? & ? \\ ? & a_{22} & a_{23} & ? & ? & ? \\ ? & ? & a_{33} & ? & ? & a_{36} \\ a_{41} & ? & ? & a_{44} & a_{45} & ? \\ ? & a_{52} & ? & ? & a_{55} & ? \\ ? & a_{62} & ? & ? & ? & a_{66} \end{bmatrix},$$

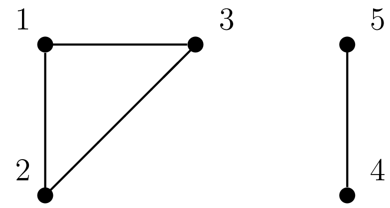


no tiene caminos totalmente especificados.

Decimos que un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es *conexo* si para cualquier par de vértices $i, j \in V$ podemos encontrar un camino desde i hasta j. En caso contrario decimos que es *no conexo*.



grafo conexo



grafo no conexo

La numeración de los vértices de los grafos asociados a una matriz parcial A tiene gran importancia debido a que algunas clases de matrices como las totalmente no negativas y totalmente no positivas no se conservan, en general, por semejanza de permutación, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.6 *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz totalmente no negativa. Sin embargo, aplicando la permutación $P = [1, 3, 2, 4]$*, el resultado*

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

no es una matriz totalmente no negativa ya que tiene algunos menores de valor negativo, como es el caso de $\det(PAP^T[\{1, 2\}|\{2, 3\}]) < 0$.

El anterior comentario nos lleva a definir grafos monótona y no monótonamente etiquetados. Definimos concretamente este concepto, en cada una de las estructuras que introducimos. Así en primer lugar decimos que un camino es *monótonamente etiquetado* si está numerado de forma consecutiva. Es decir, dado un camino, $G = (V, E)$, cuyo conjunto de aristas (arcos) es $E = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n)\}$, decimos que G es monótonamente etiquetado si $i_j = i_{j-1} + 1$ para todo $j = 2, \ldots, n$, y es *no monótonamente etiquetado* en cualquier otro caso. De forma análoga un camino totalmente especificado decimos que es monótonamente etiquetado si el conjunto de arcos es $E = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_1, i_n)\}$ con $i_j = i_{j-1} + 1$, $j = 2, \ldots, n$, y es no monótonamente etiquetado en cualquier otro caso.

El concepto de camino totalmente especificado es un caso particular del *doble-camino*, definido como un grafo dirigido formado por dos caminos internamente disjuntos, C_1 y C_2, cuyos extremos inicial y final coinciden.
Sea G un doble-camino formado por los caminos $C_1 = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{k-1}, i_k)\}$ y $C_2 = \{(i_1, i_{k+2}), (i_{k+2}, i_{k+3}), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_k)\}$. Es fácil observar que uno de los caminos puede estar monótonamente etiquetado y el otro no, o los dos caminos no están monótonamente etiquetados.

Ejemplo 2.1.7 *En el cuarto capítulo de esta memoria, en el ejemplo 4.3.15, tenemos un grafo doble-camino que tiene un camino monótonamente etiquetado y el otro no, mientras que el grafo doble-camino del ejemplo 4.3.16 tiene dos caminos no nonótonamente etiquetado.*

De forma análoga un ciclo $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}$, está monótonamente etiquetado si $i_k = k$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

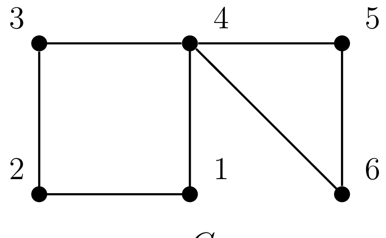
Combinando ciclos de distintas longitudes podemos generar nuevos tipos de grafos. Describimos a continuación los que aparecen a lo largo de la presente memoria.

Como primer ejemplo consideramos una generalización del concepto de ciclo a lo que llamamos block-ciclo. Un grafo se dice que es un *block-ciclo* si es una sucesión de ciclos $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ tal que, para cualesquiera i, j, $i \neq j$, los ciclos C_i y C_j tienen un vértice en común, p arcos o aristas en común, $p \geq 1$, o tienen intersección vacía. Como hemos visto en otros casos, podemos extender el concepto de monótonamente etiquetados a este tipo de grafos.

Ejemplo 2.1.8 *Consideramos la matriz parcial*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ? & a_{14} & ? & ? \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ? & ? & ? \\ ? & a_{32} & a_{33} & a_{34} & ? & ? \\ a_{41} & ? & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ ? & ? & ? & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ ? & ? & ? & a_{64} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix}$$

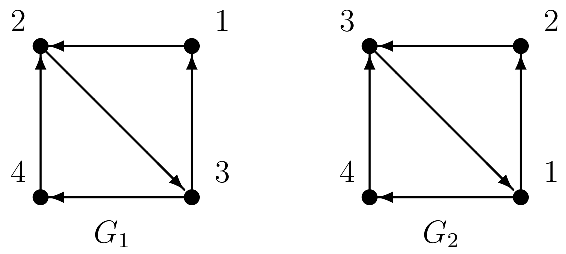
cuyo grafo asociado monótonamente etiquetado, G_A, es un block-ciclo formado por dos ciclos.



G_A

Un grafo se dice que es un doble ciclo si esta formado por dos ciclos intersectados en un vértice, un arco o más de un arco en común.
Definimos que un doble ciclo está monótonamente etiquetado si ambos ciclos están monótonamente etiquetados.

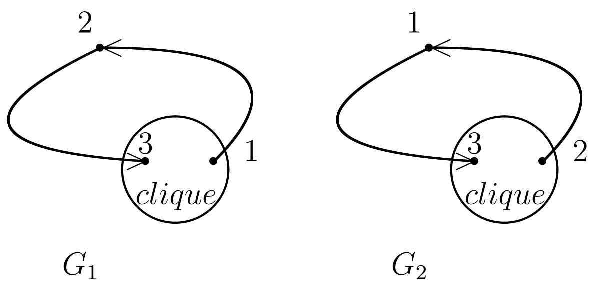
Ejemplo 2.1.9 *Los siguientes grafos,*



son doble ciclos, G_1 está formado por dos ciclos monótonamente etiquetados mientras que G_2 está formado por un ciclo monótonamente etiquetado y el otro no.

Llamamos *clique con un camino adjunto* al grafo formado por un clique (ver la próxima subsección) de un conjunto de vértices, $K = (V_k, E_k)$, y un camino con vértices inicial y final que pertenecen a V_k.
En este caso el etiquetado puede ser muy diverso como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.10 *En los siguientes grafos, cliques con caminos adjuntos,*



podemos observar que el camino adjunto es monótonamente etiquetado en G_1 y es no monótonamente etiquetado en G_2.

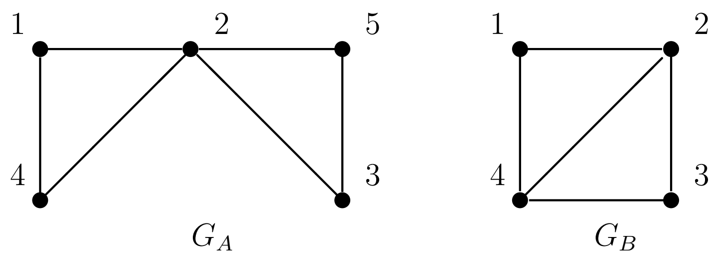
Finalmente dedicamos la siguiente sección al estudio de los grafos cordales por su relevancia a lo largo de este trabajo. Para ampliar conocimientos sobre este tipo de grafos podemos consultar el texto de Blair y Peyton [5].

2.2. Grafos cordales

Un grafo no dirigido se dice que es *cordal* si no tiene ciclos minimales de longitud mayor o igual que 4.

Ejemplo 2.2.1 *Los grafos asociados a las siguientes matrices parciales son grafos cordales.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ? & a_{14} & ? \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ ? & a_{32} & a_{33} & ? & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & ? & a_{44} & ? \\ ? & a_{52} & a_{53} & ? & a_{55} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ? & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ ? & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$



Un *clique*, en un grafo no dirigido $G = (V, E)$, es un subgrafo completo, es decir, un grafo cuyo conjunto de vértices es un subconjunto S de V y cuyo conjunto de aristas son todas las posibles aristas entre los vértices de S. Representamos por K_p un clique con p vértices. En ocasiones se usa clique en el contexto de grafos dirigidos. El significado será entonces el mismo, aunque con distinta terminología, es decir, $G_1 \subset G$ es un clique en el grafo dirigido G si para $i, j \in V(G_1)$, (i, j) pertenece al conjunto de arcos de G_1.

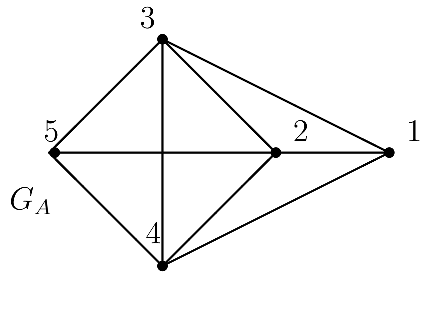
Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ el clique K_r y $G_2 = (V_2, E_2)$ el clique K_q. Supongamos que el subgrafo inducido por el conjunto de vértices $V_1 \cap V_2$ es el clique K_p y que no existen aristas entre los vértices $V_1 \setminus V_1 \cap V_2$ y $V_2 \setminus V_1 \cap V_2$. El grafo $G(V, E)$, donde $V = V_1 \cup V_2$ y $E = E_1 \cup E_2$, recibe el nombre de *clique suma* de los cliques K_r y K_q, y al clique K_p se le llama *vértice separador*. Como podemos ver en el ejemplo 2.2.1, G_A es un clique suma donde el vértice separador es un clique de un sólo vértice, en cambio G_B es un clique suma cuyo vértice separador es de 2 vértices.

Un grafo cordal diremos que es *p-cordal* si es una sucesión de cliques suma y el cardinal del mayor vértice separador es p. (Una sucesión de cliques suma también recibe el nombre de *block-clique*). Otra vez en el ejemplo 2.2.1 observamos que G_A es un 1-cordal mientras que G_B es un 2-cordal.

Podemos observar que todo grafo cordal es un p-cordal, con $p \geq 1$. Por otra parte, todo grafo p-cordal, con $p \geq 2$, contiene como subgrafo el 2-cordal conocido por *doble triángulo*, ver [9].

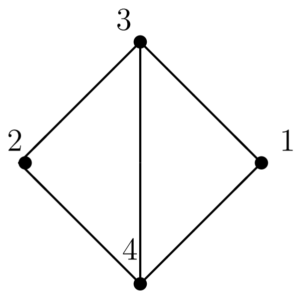
Ejemplo 2.2.2 *El grafo asociado a la siguiente matriz parcial*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & ? \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ ? & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix},$$



es un grafo 3-cordal. Es fácil observar que el subgrafo $(\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 3), (1, 4),$

$(2,3),(2,4)\})$ *es 2-cordal.*



doble-triángulo

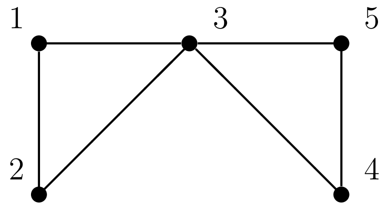
Al igual que en casos anteriores distinguimos entre grafos p-cordal monótonamente etiquetados y no monótonamente etiquetados. Un grafo p-cordal con una sucesión de cliques maximales etiquetados de forma consecutiva, $C_1, C_2, \ldots$, es *monótonamente etiquetado* si para cualquier par de cliques maximales C_i y C_j siendo $i < j$ y $C_i \cap C_j = U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, la numeración de los vértices de los dos cliques es tal que la numeración de los vértices de U es mayor que la del conjunto $\{v : v \in C_i - \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}\}$ y es menor que la numeración de los vértices de $\{w : w \in C_j - \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}\}$, verificando en todo caso que cada vértice separador no pertenece a más de dos cliques. En caso contrario, decimos que el grafo es no monótonamente etiquetado.

En el siguiente ejemplo mostramos el concepto de monotonía en la numeración de los grafos 1-cordal.

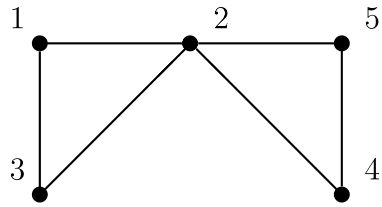
Ejemplo 2.2.3 *Consideramos las siguientes matrices parciales,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ? & ? \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ? & ? \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ ? & ? & a_{53} & a_{44} & a_{45} \\ ? & ? & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & ? & ? \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & ? & ? \\ ? & b_{42} & ? & b_{44} & b_{45} \\ ? & b_{52} & ? & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}$$

con sus respectivos grafos asociados,



G_A



G_B

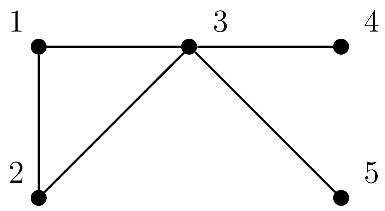
Ambas matrices tienen grafo asociado 1-cordal. No obstante, mientras G_A es monótonamente etiquetado, G_B es no monótonamente etiquetado.

Observamos que G_B en el ejemplo anterior es isomorfo al grafo G_A y que con una matriz permutación adecuada P, se puede transformar B en la matriz parcial A. Sin embargo, esta transformación no es posible cuando existe un vértice separador perteneciente a más de dos cliques.

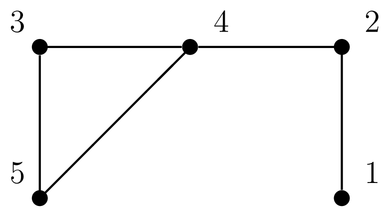
Ejemplo 2.2.4 *Consideramos las siguientes matrices parciales,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ? & ? \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ? & ? \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ ? & ? & a_{53} & a_{44} & ? \\ ? & ? & a_{53} & ? & a_{55} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ? & ? & ? \\ b_{21} & b_{22} & ? & b_{24} & ? \\ ? & ? & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ ? & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ ? & ? & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}$$

con sus respectivos grafos asociados,



G_A



G_B

Ambos grafos asociados son 1-cordal no monótonamente etiquetados.
Con la matriz permutación $P = [1, 2, 4, 3, 5]$ *conseguimos transformar la matriz* B *en otra matriz cuyo grafo asociado es 1-cordal monótonamente etiquetado. Sin embargo, no podemos hacer lo mismo con la matriz* A *ya que el vértice separador pertenece a tres cliques.*

Parte II

Matrices totalmente no negativas

Capítulo 3

Introducción y antecedentes

3.1. Antecedentes

Una matriz real $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$ se dice que es una matriz totalmente no negativa si cada submatriz cuadrada (sea principal o no) de A tiene determinante no negativo. En particular, cada elemento de una matriz totalmente no negativa es no negativo. De aquí en adelante, las matrices a considerar van a ser cuadradas, es decir, $m = n$.

F. R. Gantmacher y M. G. Krein, ver [17], [18] y [19] inician el estudio de estas matrices en los años treinta del siglo XX. Más tarde, aparecen en trabajos sobre ceros de polinomios [3], procesos estocásticos [35] y matroides [37]. En 1987, T. Ando, ver [1], presentó una lista de resultados obtenidos hasta la fecha, desde el punto de vista algebraico.

Recientemente, las matrices totalmente no negativas aparecen en contextos de diversas áreas científicas. Por una parte, en temas puramente matemáticos, como ecuaciones diferenciales, procesos estadísticos, probabilidades, biología matemática, teoría de aproximación, ecuaciones integrales,$\ldots$, por ejemplo, aparecen dichas matrices en grupos de Lie [38], geometría algebraica [14], [15] y [41], y conjuntos parcialmente ordenables [43] y [44]. Por otra parte, encontramos las aplicaciones de las matrices totalmente no negativas en Ecomonía [35], en Química [42] y en Ingeniería Eléctrica, tal como podemos ver en [6], donde las matrices totalmente no negativas caracterizan ciertas redes electrónicas invertibles estudiadas por E. B. Curtis y J. A. Morrow. Por lo tanto, la total no negatividad es un área muy activa en la investigación científica. Para ver más aplicaciones podemos consultar el texto de S. Karlin, [36].

Otras clases de matrices como las matrices definidas positivas, las P-matrices y las M-matrices entre otras, ver [28], tienen muchas propiedades en común con las matrices totalmente no negativas.

En esta parte de la tesis abordamos el problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas. Analizamos matrices con diferentes grafos asociados y resolvemos ciertos aspectos del problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas, cuyo planteamiento general es el siguiente: Dada A una matriz parcial totalmente no negativa, ¿existe una matriz completación totalmente no negativa de A? Diversos autores han estudiado este problema. Podemos citar, por ejemplo, a S. M. Fallat, C. R. Johnson y R. L. Smith, que en [12] trataron dicha clase de matrices parciales en el caso de matrices rectangulares, y a C. R. Johnson, B. K. Kroschel y M. Lundquist, y C. Jordán y J. R. Torregrosa que proporcionaron en [31] y [34] respectivamente diversos resultados para matrices parciales posicionalmente simétricas.

En este trabajo, analizamos los resultados obtenidos hasta la fecha y aportamos nuevos resultados del problema, principalmente en el caso de matrices no posicionalmente simétricas.

3.2. Resultados previos

En algunas investigaciones sobre el problema de completación de matrices totalmente no negativas, ver [34], podemos observar que dichas matrices pueden aparecer nombradas como matrices totalmente positivas.

Definición 3.2.1 *Dada una matriz real $A = (a_{ij})$, se dice que A es una matriz totalmente no negativa (TNN) si todas sus submatrices tienen determinante no negativo.*

Vemos a continuación un ejemplo del anterior concepto.

Ejemplo 3.2.1 *Consideramos las matrices,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 & 2/9 \\ 2 & 1 & 2 & 2/3 \\ 1 & 1/2 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 3/2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 & 2/9 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 3/2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denotamos por $M_k(A) = (m_{ij})$, con $k = 1, 2, 3, 4$, la matriz obtenida a partir de A cuyos elementos son todos los menores posibles en A de grado k. Describimos los elementos de $M_k(A)$ de la siguiente forma: si $k = 1$, entonces $M_k(A) = A$. Para $k = 2$, $m_{ij} = \det A[\alpha_i|\beta_j]$,

$$\begin{array}{c|c} i,j & \alpha_i, \beta_j \\ \hline 1 & \{1,2\} \\ 2 & \{1,3\} \\ 3 & \{1,4\} \\ 4 & \{2,3\} \\ 5 & \{2,4\} \\ 6 & \{3,4\} \end{array} \quad y \quad M_2(A) = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/9 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 25/18 & 25/9 & 25/27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8/3 & 16/3 & 16/9 & 0 & 0 & 0 \\ 4/3 & 8/3 & 8/9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mientras en el caso $k = 3$

$$\begin{array}{r|l} i,j & \alpha_i, \beta_j \\ \hline 1 & \{1,2,3\} \\ 2 & \{1,2,4\} \\ 3 & \{1,3,4\} \\ 4 & \{2,3,4\} \end{array} \quad y \quad M_3(A) = 0$$

Observamos que $M_4(A) = \det A = 0$.
Ahora es fácil ver que todos los menores en A de órdenes $1, 2, 3$ y 4 son no negativos, por lo que A es una matriz totalmente no negativa.
Calculando los menores de la matriz B de forma análoga, obtenemos $M_4(B) = \det B = 0$. Sin embargo,

$$M_3(B) = \begin{bmatrix} 0 & -1/18 & -1/9 & 0 \\ 0 & -25/54 & -25/27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/9 & 8/9 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$M_2(B) = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 5/9 & 0 & 1/9 & 2/9 \\ 1/6 & 1/3 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 25/18 & 25/9 & 25/27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/30 & 0 & -1/6 & -1/3 \\ 8/3 & 16/3 & 5/3 & 0 & -1/2 & -1 \\ 4/3 & 8/3 & 8/9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así pues, podemos encontrar submatrices de B con determinante negativo con lo que B no es una matriz totalmente no negativa.

A continuación destacamos las propiedades más utilizadas en este trabajo de las matrices totalmente no negativas. Para más información ver [36].

Proposición 3.2.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz totalmente no negativa de tamaño $n \times n$. Entonces:*

1. *Si D es una matriz diagonal positiva, entonces DA y AD son matrices totalmente no negativas.*

2. *Si D es una matriz diagonal positiva, entonces DAD^{-1} es una matriz totalmente no negativa.*

3. *La total no negatividad, en general, no se mantiene por la semejanza de permutación. Como caso especial, si $P = [n, n-1, \ldots, 2, 1]$, entonces PAP^T es una matriz totalmente no negativa.*

4. *Si B es una matriz totalmente no negativa de tamaño $m \times m$, entonces la matriz*
$$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$
es una matriz totalmente no negativa.

5. *Cualquier submatriz de A (principal y no principal) es totalmente no negativa.*

El primer apartado de esta proposición nos permite asumir, sin pérdida de generalidad, que los elementos diagonales especificados y no nulos tienen el valor 1.

Teniendo en cuenta la última propiedad y llevando el concepto de matrices totalmente no negativas al contexto de matrices parciales podemos dar la siguiente definición.

Definición 3.2.2 *Se dice que una matriz parcial A es una matriz parcial totalmente no negativa si toda submatriz completamente especificada de A tiene determinante no negativo.*

Ejemplo 3.2.2 *Es fácil comprobar que la matriz parcial,*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 & x_{14} \\ 2 & 1 & 2 & 2/3 \\ 1 & x_{32} & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 3/2 & x_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz parcial totalmente no negativa. Observamos que la matriz A del ejemplo 3.2.1 es una completación totalmente no negativa de B.

Abordamos a continuación el problema de completación para este tipo de matrices, es decir, dada una matriz parcial totalmente no negativa A, ¿existe una completación totalmente no negativa A_c de A?

En general no existe la completación deseada tanto en caso de matrices posicional como no posicionalmente simétricas. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.2.3 *Consideramos la matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 & 1 & x_{24} \\ x_{31} & 0{,}2 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & x_{42} & 0{,}2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A es una matriz parcial totalmente no negativa posicionalmente simétrica. A partir de $\det A[\{1,2\}|\{2,4\}] \geq 0$ y $\det A[\{2,3\}|\{3,4\}] \geq 0$ tenemos $x_{24} \geq 0{,}8$ y $x_{24} \leq 0{,}7$, respectivamente. Por lo tanto, A no tiene completación totalmente no negativa.

Ejemplo 3.2.4 *Consideramos la matriz parcial totalmente no negativa, no posicionalmente simétrica,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 0{,}8 \\ 1 & 1 & x_{23} \\ x_{31} & 1 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

A partir de los determinantes $\det A[\{1,2\}|\{1,3\}] \geq 0$ *y* $\det A[\{2,3\}] \geq 0$ *obtenemos* $x_{23} \geq 0{,}8$ *y* $x_{23} \leq 0{,}7$*, respectivamente, lo que nos permite afirmar que* A *no tiene completación totalmente no negativa.*

Para los próximos resultados, es necesario introducir la siguiente definición.

Definición 3.2.3 *Decimos que una matriz parcial totalmente no negativa* A*, de tamaño* $n \times n$*, es regular si cada submatriz principal maximal es no singular y para cada par de submatrices principales maximales* $A[\alpha]$ *y* $A[\beta]$*, tal que* $\alpha \cap \beta \neq \phi$*,* $\alpha, \beta \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$*,* $A[\alpha \cap \beta]$ *es también no singular.*

C. R. Johnson, B. K. Kroschel, M. Lundquist han estudiado el problema de completación para matrices parciales totalmente no negativas en el caso de grafos asociados cordales, ver [31], obteniendo entre otros el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1 *Sea* G *un grafo conexo de* n *vértices. Sea* A *una matriz parcial totalmente no negativa regular cuyo grafo asociado es* G*. Si* G *es* 1*-cordal monótonamente etiquetado entonces existe completación totalmente no negativa de* A*.*

Observamos que los mencionados autores comentan que la regularidad no es una condición necesaria en el teorema. Por otra parte, el problema se puede reducir al estudio de grafos asociados conexos, como se pone de manifiesto en el siguiente resultado.

Lema 3.2.1 *Sea* A *una matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño* $n \times n$*, cuyo grafo asociado* G *es un grafo no conexo monótonamente etiquetado.* A *tiene completación totalmente no negativa, si y sólo si cada submatriz principal que tenga asociado un subgrafo conexo de* G*, tiene completación del mismo tipo.*

Demostración: Supongamos, sin pérdida de generalidad, que A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & ? & \cdots & ? \\ ? & A_{22} & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix},$$

donde A_{ii} con $i = 1, 2, \ldots, k$ son las submatrices principales asociadas a los subgrafos conexos y ? indica un bloque de elementos no especificados. Si A tiene completación totalmente no negativa, entonces cada submatriz principal de A la tiene por definición. Por lo tanto, la condición es necesaria.

Para demostrar la suficiencia, obtenemos una nueva matriz parcial totalmente no negativa $\overline{A}$ al sustituir las submatrices $A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{kk}$ por las completaciones correspondientes, y obtenemos una completación totalmente no negativa de $\overline{A}$ al completar los elementos no especificados de esta por elementos nulos. El resultado es una completación totalmente no negativa de A. $\square$

Por lo tanto, por una parte en el actual trabajo podemos considerar, sin pérdida de generalidad, sólo grafos conexos y por otra podemos enunciar el teorema 3.2.1 de la siguiente manera.

Teorema 3.2.2 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa cuyo grafo asociado es G. Si G es 1-cordal monótonamente etiquetado entonces existe una completación totalmente no negativa de A.*

En cambio, una matriz parcial que tenga asociado un grafo k-cordal, $k \geq 2$, monótonamente etiquetado no admite necesariamente una completación del mismo tipo, como los autores C. R. Johnson, B. K. Kroschel, M. Lundquist, ver [31], ponen de manifiesto mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.5 *Consideramos la matriz parcial totalmente no negativa*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0{,}4 & x \\ 0{,}4 & 1 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 1 & 1 \\ y & 0{,}2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyo grafo asociado es un 2*-cordal monótonamente etiquetado. Podemos verificar que* A *no tiene completación totalmente no negativa ya que*

$$\det A = -0{,}0016 - 0{,}008x - 0{,}328y - 0{,}2xy < 0$$

para todos los valores de los elementos desconocidos.

Como vamos a ver en el próximo capítulo, en general, en el caso de grafos asociados cordales no monótonamente etiquetados, y grafos no cordales, tampoco existe la completación deseada.

Capítulo 4

Resultados obtenidos

En este capítulo abordamos las cuestiones abiertas dentro del problema de completación de matrices TNN, presentando los resultados conseguidos. Iniciamos el estudio trabajando con matrices parciales con diagonal total o parcialmente no especificada. Observamos que, salvo para tamaños y patrones concretos, el problema en general no tiene solución.

En caso de diagonal principal totalmente especificada es asímismo un problema abierto al que dedicamos el resto de secciones de este capítulo. Estudiamos en cada sección la existencia de completaciones de matrices parciales con diferentes tipos de grafos asociados: grafos cordales, ciclos, caminos, etc. Como consecuencia del apartado 3 de la proposición 3.2.1, analizamos dichos casos según la numeración de los vértices, es decir, distinguiendo entre grafos monótona y no monótonamente etiquetados.

4.1. Diagonal principal parcialmente especificada

A continuación analizamos el problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas cuya diagonal principal tiene elementos no especificados. Empezamos por el caso de matrices de tamaño 3×3, en el que existe una completación totalmente no negativa siempre que los elementos de fuera de la diagonal estén especificados y no nulos.

Lema 4.1.1 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño 3×3 con elementos diagonales no especificados. Si todos los elementos de fuera de la diagonal son especificados y no nulos entonces existe una completación TNN.*

Demostración: Analizamos los diferentes casos en función del número de elementos diagonales no especificados.
(i) Todos los elementos diagonales no están especificados. La matriz A tiene la forma,

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & x_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

Sea A_c la matriz obtenida al reemplazar x_{11}, x_{22}, x_{33} en A por c_{11}, c_{22}, c_{33}, respectivamente, tal que, $c_{11} = \max\{\frac{a_{31}a_{12}}{a_{32}}, \frac{a_{21}a_{13}}{a_{23}}\}$, $c_{22} = \min\{\frac{a_{32}a_{21}}{a_{31}}, \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\}$ y $c_{33} = \max\{\frac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}, \frac{a_{23}a_{31}}{a_{21}}\}$.

Podemos verificar que,

$$\det A_c = \begin{cases} \dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{31}}[(c_{11} - \dfrac{a_{31}a_{12}}{a_{32}})(c_{33} - \dfrac{a_{23}a_{31}}{a_{21}})], & \text{si} \quad c_{22} = \dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{31}} \\ \\ \dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}[(c_{11} - \dfrac{a_{21}a_{13}}{a_{23}})(c_{33} - \dfrac{a_{13}a_{32}}{a_{12}})], & \text{si} \quad c_{22} = \dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} \end{cases}$$

no es negativo para los valores de c_{11} y c_{33}.

Desarrollamos los determinantes de las submatrices de tamaño 2×2.

$$\det A_c[\{1,2\}] = \begin{cases} \dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{31}}[c_{11} - \dfrac{a_{31}a_{12}}{a_{32}}], & \text{si} \quad c_{22} = \dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{31}} \\ \\ \dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}[c_{11} - \dfrac{a_{21}a_{13}}{a_{23}}], & \text{si} \quad c_{22} = \dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} \end{cases}$$

entonces $\det A[\{1,2\}] \geq 0$ para los dos valores de c_{11}.

$$\det A[\{1,2\}|\{2,3\}] = \begin{cases} 0 \ , & \text{si} \quad c_{22} = \dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} \\ \\ a_{12}a_{23} - \dfrac{a_{13}a_{32}a_{21}}{a_{31}} \geq a_{12}a_{23} - \dfrac{a_{13}a_{12}a_{23}}{a_{13}} = 0 \ , & \text{si} \quad c_{22} = \dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{31}} \end{cases}$$

$\det A[\{2,3\}|\{1,2\}] = a_{21}a_{32} - c_{22}a_{31} \geq 0$, para los valores de c_{22}.

De manera análoga podemos demostrar que $\det A[\{2,3\}]$ es no negativo. Por lo tanto, A_c es una completación TNN de A.
(ii) En el caso de que A tenga uno o dos elementos diagonales especificados encontramos las siguientes posibilidades.

(ii_1) La posición $(2,2)$ es la única no especificada. A partir de la proposición 3.2.1, podemos suponer que A tiene la forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & x_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

De $\det A[\{1,3\}|\{1,2\}] \geq 0$ y $\det A[\{1,2\}|\{1,3\}] \geq 0$ obtenemos $a_{12} \leq \dfrac{a_{32}}{a_{31}}$ y $a_{21} \leq \dfrac{a_{23}}{a_{13}}$, respectivamente. Multiplicando a_{21} por la primera desigualdad y a_{12} por la segunda, concluimos $a_{12}a_{21} \leq \text{mín}\{\dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{31}}, \dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\}$.
De manera análoga tenemos, $a_{32}a_{23} \leq \text{mín}\{\dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{31}}, \dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\}$.
Para que todos los menores de tamaño 2×2 sean no negativos, de

$\det A[\{1,\ 2\}|\{2,3\}] \geq 0$ y $\det A[\{2,3\}|\{1,2\}] \geq 0$ obtenemos $x_{22} \leq \text{mín}\{\frac{a_{32}a_{21}}{a_{31}},\ \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\}$, y de $\det A[\{1,2\}] \geq 0$ y $\det A[\{2,3\}] \geq 0$ que $x_{22} \geq \text{máx}\{a_{12}a_{21},\ a_{23}a_{32}\}$.
Por otra parte, $\det A \geq 0$ si $x_{22} \leq \frac{a_{12}(a_{21} - a_{23}a_{31}) + a_{32}(a_{23} - a_{21}a_{13})}{(1 - a_{13}a_{31})}$.
Es fácil verificar que

$$\text{máx}\{a_{12}a_{21}, a_{23}a_{32}\} \leq \frac{a_{12}(a_{21} - a_{23}a_{31}) + a_{32}(a_{23} - a_{21}a_{13})}{(1 - a_{13}a_{31})}.$$

Por lo tanto, al completar la posición $(2,2)$ por c_{22} tal que

$$\text{máx}\{a_{12}a_{21}, a_{23}a_{32}\} \leq c_{22} \leq$$
$$\leq \text{mín}\{\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}, \frac{a_{32}a_{21}}{a_{31}}, \frac{a_{12}(a_{21} - a_{23}a_{31}) + a_{32}(a_{23} - a_{21}a_{13})}{(1 - a_{13}a_{31})}\},$$

la matriz resultante es una completación TNN de A.

(ii_2) Si las posiciones $(1,1)$ y $(2,2)$ ó $(2,2)$ y $(3,3)$ son las únicas posiciones no especificadas, completamos la $(1,1)$ ó $(3,3)$ respectivamente por un valor suficientemente grande y la posición $(2,2)$ como en (ii_1).

(ii_3) Si alguna de las posiciones $(1,1)$ ó $(3,3)$, o las dos, no están especificadas, siendo la $(2,2)$ especificada, las completamos por valores suficientemente grandes.

Por lo tanto, A tiene completación TNN. □

Si una matriz parcial de tamaño 3×3, con elementos especificados no nulos, tiene toda la diagonal no especificada y además tiene elementos no especificados fuera de la diagonal, entonces podemos completar estos últimos por valores reales cualesquiera y seguir los pasos de la demostración del lema anterior. En cambio, el resultado no es cierto en general si algunos elementos diagonales están especificados y otros no, siendo no especificados algunos elementos de fuera de la diagonal.

Ejemplo 4.1.1 *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & x_{23} \\ 1 & x_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

A es una matriz parcial TNN con una posición diagonal $(1,1)$ y dos posiciones de fuera de la diagonal $(2,3)$ y $(3,2)$ no especificadas. Observamos que $\det A[\{1,2\}|\{2,3\}] \geq 0$ *y* $\det A[\{2,3\}|\{1,3\}] \geq 0$ *implican que* $x_{23} \geq 1$ *y* $x_{23} \leq 0{,}5$ *respectivamente. Por lo tanto, A no tiene completación TNN.*

A partir del último ejemplo y la proposición 3.2.1, podemos asegurar que en general no existe la completación deseada cuando la posición $(3,3)$ no esta especificada siendo otras posiciones de fuera de la diagonal no especificadas. En cambio, podemos afirmar que A tiene completación TNN cuando la posición $(2,2)$ no esta especificada completando adecuadamente las demás posiciones y aplicando el lema 4.1.1.

Sin embargo, el resultado no es cierto cuando se trata de matrices parciales, de tamaño 3×3, con algunos elementos especificados nulos, como lo ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.2 *Consideramos la siguiente matriz*

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & 2 & 1 \\ 1 & x_{22} & 0 \\ 3 & 2 & x_{33} \end{bmatrix}.$$

A es una matriz parcial TNN con la diagonal principal no especificada. Sin embargo, $\det A[\{1,2\}|\{1,3\}]$ *es negativo para todo valor de x_{11}. Por lo tanto, A no tiene completación TNN.*

Al intentar extender el lema 4.1.1 a matrices de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, obtenemos que, en general, no existe completación totalmente no negativa, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.3 *Consideramos la siguiente matriz parcial TNN con diagonal principal no especificada*

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & x_{22} & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & x_{33} & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & x_{44} \end{bmatrix}.$$

A no tiene completación TNN, ya que, $\det A[\{2,3\}|\{2,4\}] = \frac{x_{22}}{2} - 1 \geq 0$, *implica $x_{22} \geq 2$. En cambio,* $\det A[\{1,2\}|\{2,3\}] = 1 - x_{22}$, *es no negativo si $x_{22} \leq 1$. Por lo tanto, A no tiene completación TNN.*

Dicho ejemplo puede ser generalizado para matrices de tamaño mayor, puesto que, cualquier matriz parcial totalmente no negativa con la diagonal no especificada que contenga a la matriz del ejemplo anterior como submatriz principal no tendrá completación del mismo tipo. Por lo tanto, podemos obtener el siguiente resultado.

Proposición 4.1.1 *Para cualquier $n \geq 4$, existe una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, con diagonal principal no especificada, que no tiene completación TNN.*

En general, para el caso de matrices parciales de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, no existe completación totalmente no negativa si la diagonal contiene algunos elementos especificados y otros no.

Ejemplo 4.1.4 *Consideramos la siguiente matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & x_{22} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x_{44} \end{bmatrix}.$$

A es una matriz parcial TNN, en la que $\det A[\{2,3\}|\{1,2\}] \geq 0$ *implica que* $x_{22} \leq 1$, *y* $\det A[\{2,3\}] \geq 0$ *implica que* $x_{22} \geq 2$. *Por lo tanto, A no tiene completación TNN.*

Este ejemplo también puede ser generalizado, de forma análoga al ejemplo 4.1.3, para el caso de matrices de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$. Dichos ejemplos nos permiten obtener el siguiente resultado.

Proposición 4.1.2 *Para cualquier $n \geq 4$, existe una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, cuya diagonal principal contiene tanto elementos especificados como no especificados, que no tiene completación TNN.*

4.2. Grafos no dirigidos

4.2.1. 1-Cordal

Tratamos, a continuación, el problema de completación de las matrices parciales totalmente no negativas con posiciones diagonales especificadas, completando los resultados conocidos para el caso de grafo asociado 1-cordal.

En general, para dicha clase de grafos no existe una completación totalmente no negativa, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.1 *La matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 2 \\ x_{21} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es un 1*-cordal, concretamente un camino no dirigido. Por una parte, para que A tenga completación TNN es necesario que*

$$\det A[\{1,2\}|\{2,3\}] = x_{12} - 2 \geq 0,$$

y

$$\det A[\{2,3\}|\{1,2\}] = x_{21} - 1 \geq 0$$

De estas desigualdades obtenemos $x_{12}x_{21} \geq 2$.
Por otra parte, por la desigualdad $\det A[\{1,2\}] = 1 - x_{12}x_{21} \geq 0$ *obtenemos $x_{12}x_{21} \leq 1$, lo cual es una contradición. Por lo tanto, A no tiene completación TNN.*

Recordamos que según el teorema 3.2.2 la monotonía en la numeración de los vértices es una condición suficiente para la existencia de una completación TNN, condición que no se cumple en el anterior ejemplo. Comenzamos por tanto analizando el caso de caminos no monótonamente etiquetados, proporcionando una condición necesaria y suficiente para la existencia de dicha completación. También veremos que la misma condición es necesaria y suficiente para que exista la completación deseada en otros casos particulares de 1-cordal.

En primer lugar, analizamos las matrices parciales de tamaño 3×3 cuyos grafos asociados son caminos no dirigidos no monótonamente etiquetados. Para ello consideramos, sin pérdida de generalidad, las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} \\ x_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & x_{23} \\ a_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

cuyos grafos asociados son

G_{A_1} G_{A_2}

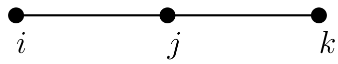
Las matrices

$$A_{1_c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}/a_{23} & a_{13} \\ a_{31}/a_{32} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad A_{2_c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{13}/a_{12} \\ a_{31} & a_{31}/a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

son completaciones TNN de A_1 y A_2 respectivamente si se verifica $a_{13}a_{31} \leq a_{23}a_{32}$ en el primer caso y $a_{12}a_{21} \leq a_{13}a_{31}$ en el segundo caso.

Observando la relación de índices y condición introducimos la siguiente definición.

Definición 4.2.1 *Dado G un camino no monótonamente etiquetado de tres vértices,*



decimos que una matriz parcial A, cuyo grafo asociado es G, cumple la P-condición si cuando

a) $j < i < k \quad (k < i < j)$ *se verifica* $a_{jk}a_{kj} \leq (a_{kk}/a_{ii})a_{ij}a_{ji}$

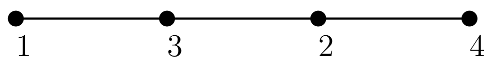
b) $i < k < j \quad (j < k < i)$ *se verifica* $a_{ij}a_{ji} \leq (a_{ii}/a_{kk})a_{kj}a_{jk}$

En general, decimos que una matriz parcial A de tamaño $n \times n$, $n \geq 3$, cuyo grafo asociado es no monótonamente etiquetado, cumple la *P-condición* si cada submatriz de tamaño 3×3 cuyo grafo asociado es un camino no monótonamente etiquetado cumple las desigualdades de dicha condición. Veamos un ejemplo de este tipo de matrices, de tamaño 4×4.

Ejemplo 4.2.2 *Consideramos la matriz parcial TNN*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 0{,}5 & x_{14} \\ x_{21} & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & x_{34} \\ x_{41} & 0{,}5 & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado, G_A, es un camino no dirigido no monótonamente etiquetado.



G_A

Consideramos las submatrices de tamaño 3×3*, cuyos grafos asociados son los caminos no monótonamente etiquetados* $G_{A[\{1,2,3\}]}$ *y* $G_{A[\{2,3,4\}]}$*,*

$G_{A[\{1,2,3\}]}$ $\qquad$ $G_{A[\{2,3,4\}]}$

Como $a_{13}a_{31} = 0{,}25 \leq 0{,}5 = a_{23}a_{32}$*,* $A[\{1,2,3\}]$ *cumple la* P*-condición. Por otro lado, la submatriz* $A[\{2,3,4\}]$*, cuyo grafo asociado es* $G_{A[\{2,3,4\}]}$*, también cumple la* P*-condición ya que* $a_{24}a_{42} = 0{,}25 \leq 0{,}5 = a_{23}a_{32}$*. Por lo tanto,* A *cumple la* P*-condición.*

Para las matrices parciales totalmente no negativas de tamaño 3×3, cuyos grafos asociados son caminos no monótonamente etiquetados, la P-condición es necesaria y suficiente para la existencia de completaciones totalmente no negativas.

Proposición 4.2.1 *Sea* A *una matriz parcial* TNN *de tamaño* 3×3 *con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un camino no dirigido no monótonamente etiquetado. Entonces* A *tiene completación* TNN *si y sólo si* A *satisface la* P*-condición.*

Demostración: Tenemos, sin pérdida de generalidad, teniendo en cuenta la proposición 3.2.1, únicamente dos posibilidades de grafos asociados a la matriz A,

$$G_1 = (\{1,2,3\}, \{(1,3),(3,2)\}) \quad y \quad G_2 = (\{1,2,3\}, \{(2,1),(1,3)\})$$

G_1 $\qquad$ G_2

Analizamos con detalle sólo el primer caso, ya que el segundo se justifica de forma análoga.
Supongamos pues que A tiene la siguiente forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} \\ x_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix},$$

y que se verifica la P-condición, es decir, $a_{13}a_{31} \leq a_{23}a_{32}$.
Dada

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}/a_{23} & a_{13} \\ a_{31}/a_{23} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

podemos comprobar fácilmente que las submatrices de tamaño 2×2 tienen el determinante no negativo y que $\det A_c = (1 - \frac{a_{13}a_{31}}{a_{23}a_{32}}) \det A[\{2,3\}] \geq 0$. Por lo tanto, A tiene completación TNN.
Para demostrar que la condición mencionada es necesaria, supongamos que A tiene una completación TNN, A_c,

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & a_{13} \\ c_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

i) $\det A_c[\{1,2\}|\{2,3\}] = c_{12}a_{23} - a_{13} \geq 0$ implica $c_{12}a_{23} \geq a_{13}$

y

ii) $\det A_c[\{1,3\}|\{1,2\}] = a_{32} - a_{31}c_{12} \geq 0$ implica $a_{32} \geq a_{31}c_{12}$

Obtenemos $a_{13}a_{31} \leq a_{23}a_{32}$ al reemplazar c_{12} de la segunda desigualdad en la primera. □

En general, las matrices parciales totalmente no negativas que contienen elementos nulos, cuyos grafos asociados son caminos no dirigidos no monótonamente etiquetados, no tienen completación totalmente no negativa aunque cumplan la P-condición, como ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.3 *La siguiente matriz,*

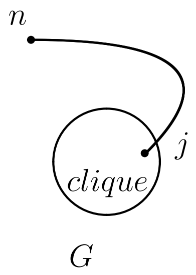
$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 2 \\ x_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

es una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es un camino no monótonamente etiquetado y cumple la P-condición. Sin embargo, A no tiene completación TNN, ya que $\det A[\{1,2\}|\{2,3\}] = -2$ *para todos los valores de* x_{12}.

Antes de ampliar nuestro estudio a matrices de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, analizamos algunos casos particulares de grafos 1-cordal no monótonamente etiquetados en el que la P-condición es necesaria y suficiente para la existencia de la completación buscada.

Lema 4.2.1 *Sea G un grafo que contiene un clique sobre el conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ y un vértice n adyacente a uno de los vértices $\{1, 2, \ldots, n-2\}$. Cada matriz parcial TNN A, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es G, tiene completación TNN si y sólo si A cumple la P-condición.*

Demostración: Supongamos que el vértice n es adyacente al vértice j, siendo j un elemento de $\{1, 2, \ldots, n-2\}$.



Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que la matriz A tiene la forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1,n-1} & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2,n-1} & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & 1 & \dots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,j} & \dots & 1 & x_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Como la submatriz principal asociada al camino $\{(n-1,j),(j,n)\}$ satisface la P-condición, obtenemos la desigualdad $a_{nj}a_{jn} \leq a_{n-1,j}a_{j,n-1}$. Sea A_c la completación obtenida de A reemplazando las posiciones no especificadas de A por los valores que se detallan a continuación:

$$x_{n-1,n} = a_{jn}/a_{j,n-1}$$

$$x_{n,n-1} = a_{nj}/a_{n-1,j}$$

$$x_{kn} = \tfrac{a_{k,n-1}a_{jn}}{a_{j,n-1}},\ k = 1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,n-2$$

$$x_{nk} = \tfrac{a_{n-1,k}a_{nj}}{a_{n-1,j}},\ k = 1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,n-2$$

Para demostrar que A_c es una completación TNN necesitamos verificar que $\det A_c[\alpha|\beta] \geq 0$ para toda $\alpha, \beta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ con $|\alpha| = |\beta|$ y $n \in \alpha$ ó $n \in \beta$. Consideramos los siguientes casos:

(a) Si $n \notin \alpha$ y $n \in \beta$, $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, n\}$, entonces $\det A_c[\alpha|\beta] = \frac{a_{jn}}{a_{j,n-1}} \det A_c[\alpha|\{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, n-1\}] \geq 0$.

(b) Si $n \in \alpha$, $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, n\}$ y $n \notin \beta$, entonces $\det A_c[\alpha|\beta] = \frac{a_{nj}}{a_{n-1,j}} \det A_c[\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, n-1\}|\beta] \geq 0$.

(c) Si $n \in \alpha, \alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, n\}$ y $n \in \beta, \beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, n\}$, entonces $\det A_c[\alpha|\beta] = \frac{a_{nj}a_{jn}}{a_{n-1,j}a_{j,n-1}} \det A_c[\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, n-1\}|\{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, n-1\}] + \det A_c[\{n-1, n\}] \det A_c[\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}|\{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}\}] \geq 0$.

Ahora, para demostrar que la condición es necesaria supongamos que existe una completación TNN, $A_c = (c_{ij})$ de A. De los determinantes:

$$\det A_c[\{j, n-1\}|\{n-1, n\}] \geq 0 \quad y \quad \det A_c[\{n-1, n\}|\{j, n\}] \geq 0,$$

obtenemos la desigualdad $a_{nj}a_{jn} \leq a_{n-1,j}a_{j,n-1}$.
De forma análoga obtenemos el resto de las desigualdades de la P-condición, por lo que dicha condición es necesaria. □

Observamos que si el vértice n es adyacente al vértice $n-1$, G es un grafo 1-cordal monótonamente etiquetado.

Podemos extender el resultado anterior de la siguiente manera.

Teorema 4.2.1 *Sea G un grafo 1-cordal que contiene un clique sobre los vértices $\{1, 2, \ldots, k\}$ y un conjunto de vértices $\{k+1, k+2, \ldots, n\}$ adyacentes a uno de los vértices $\{1, 2, \ldots, k\}$. Cada matriz parcial TNN, A, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es G, tiene completación TNN si y sólo si A cumple la P-condición.*

Demostración: Supongamos que los vértices $\{k+1, k+2, \ldots, n\}$ son adyacentes al vértice j, siendo j un elemento de $\{1, 2, \ldots, k\}$. Podemos asumir que A tiene la forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1k} & x_{1,k+1} & \ldots & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2k} & x_{2,k+1} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & 1 & \ldots & a_{jk} & a_{j,k+1} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kj} & \ldots & 1 & x_{k,k+1} & \ldots & x_{kn} \\ x_{k+1,1} & x_{k+1,2} & \ldots & a_{k+1,j} & \ldots & x_{k+1,k} & 1 & \ldots & x_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & x_{nk} & x_{n,k+1} & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponemos que A satisface la P-condición. Realizamos la prueba por inducción sobre el número de vértices p, adyacentes al vértice j. Si $p = 1$, aplicamos el lema anterior. Supongamos ahora que podemos obtener una completación TNN, A_{1c} de $A_1 = A[\{1, 2, \ldots, n-1\}]$. Denotamos por $\overline{A}$ la matriz obtenida de A al reemplazar A_1 por A_{1c}. Aplicando otra vez el lema 4.2.1 sobre la matriz $\overline{A}$, obtenemos una completación TNN, A_c de A.
De manera análoga a la demostración del lema 4.2.1, se verifica que la P-condición es necesaria. $\square$

Como caso particular del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.2.1 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$ que contiene únicamente una fila y una columna totalmente especificadas y el resto de elementos no diagonales son desconocidos. Entonces existe una completación TNN de A si y sólo si A cumple la P-condición.*

Demostración: Supongamos que la fila y columna con índice k están totalmente especificadas y la matriz A satisface la P-condición. Si aplicamos el teorema 4.2.1 sobre la submatriz $A[\{k, k+1, \ldots, n\}]$, obtenemos una completación TNN $A[\{k, k+1, \ldots, n\}]_c$. Análogamente, aplicamos el teorema mencionado también sobre la matriz $PA[\{1, 2, \ldots, k\}]P^T$, donde P es la matriz permutación $P = [k, k-1, \ldots, 1]$, para obtener una completación TNN, $A[\{1, 2, \ldots, k\}]_c$ de $A[\{1, 2, \ldots, k\}]$. Sea $\overline{A}$ una nueva matriz parcial TNN obtenida de A al reemplazar las submatrices $A[\{1, 2, \ldots, k\}]$ y $A[\{k, k+1, \ldots, n\}]$ por sus completaciones correspondientes. El teorema 3.2.2 aplicado a la matriz $\overline{A}$ nos permite obtener una completación TNN de A. De forma análoga al desarrollo de la demostración del teorema 4.2.1, podemos demostrar que la P-condición es necesaria. □

Volviendo a las matrices parciales TNN cuyos grafos asociados son caminos no monótonamente etiquetados, recordamos que, según la proposición 4.2.1 la P-condición es condición necesaria y suficiente cuando la matriz es de tamaño 3×3 con elementos especificados no nulos. Para obtener una condición necesaria y suficiente con el fin de encontrar la completación deseada en el caso de matrices parciales de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, extendemos la idea del teorema 3.2.2.

Sea A una matriz parcial de tamaño $n \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & A_{13} \\ a_{21}^T & 1 & a_{23}^T \\ A_{31} & a_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

donde los bloques A_{11} y A_{33} son totalmente especificados y el resto de bloques pueden contener elementos no especificados. Llamamos *C-completación* de A a cualquier completación de A obtenida tras reemplazar los elementos desconocidos de manera que,

$$A_{13} = a_{12}a_{23}^T \quad \text{y} \quad A_{31} = a_{32}a_{21}^T$$

Observamos que cualquier matriz parcial cuyo grafo asociado es un camino no dirigido no monótonamente etiquetado tiene C-completación.

Definición 4.2.2 *Sea A una matriz parcial de tamaño $n \times n$ cuyo grafo asociado es un camino no monótonamente etiquetado $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n)\}$. Definimos la CP-condición de la siguiente manera:*

a) Para $n = 3$, la CP-condición coincide con la P-condición.

b) Para $n \geq 4$, consideramos la matriz parcial $\overline{A}_3$ obtenida al reemplazar en A la submatriz $A[\{i_1, i_2, i_3\}]$ por su C-completación. Sea $\overline{A}_k$, $k = 4, 5, \ldots, n$, la matriz obtenida de $\overline{A}_{k-1}$ recursivamente al reemplazar la submatriz $\overline{A}_{k-1}[\{i_1,\ i_2, \ldots, i_k\}]$ por su C-completación. Decimos que la matriz A cumple la CP-condición si las submatrices asociadas con los caminos no monótonamente etiquetados $\{(i_j, i_{k-1}), (i_{k-1}, i_k)\}$, $j = 1, 2, \ldots, k-2$, $k = 3, 4, \ldots, n$, de $G_{\overline{A}_k}$ cumplen la P-condición.

Observamos que la C-completación de una matriz dada es única.

Ejemplo 4.2.4 *Consideramos la matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} & a_{14} & x_{15} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} & a_{25} \\ a_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} & a_{35} \\ a_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 & x_{45} \\ x_{51} & a_{52} & a_{53} & x_{54} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es el camino no monótonamente etiquetado $\{(4, 1), (1, 3), (3, 5), (5, 2)\}$. Veremos ahora qué desigualdades constituyen la CP-condición para esta matriz.

Primero, consideramos la C-completación de la submatriz $A[\{1, 3, 4\}]$ para obtener $\overline{A}_3$.

$$\overline{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} & a_{14} & x_{15} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} & a_{25} \\ a_{31} & x_{32} & 1 & a_{14}/a_{13} & a_{35} \\ a_{41} & x_{42} & a_{41}/a_{31} & 1 & x_{45} \\ x_{51} & a_{52} & a_{53} & x_{54} & 1 \end{bmatrix}$$

La submatriz de $\overline{A}_3$ *asociada al camino* $\{(4,1),(1,3)\}$ *cumple la* P*-condición si* $a_{14}a_{41} \leq a_{13}a_{31}$.
Sea $k = 4$. *Obtenemos* $\overline{A}_4$ *reemplazando la submatriz* $\overline{A}_3[\{1,3,4,5\}]$ *por su* C*-completación.*

$$\overline{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{13}a_{35} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} & a_{25} \\ a_{31} & x_{32} & 1 & a_{14}/a_{13} & a_{35} \\ a_{41} & x_{42} & a_{41}/a_{31} & 1 & a_{13}a_{35}/a_{14} \\ a_{53}a_{31} & a_{52} & a_{53} & a_{53}a_{31}/a_{41} & 1 \end{bmatrix}$$

Si $a_{35}a_{53}a_{13}a_{13} \leq a_{14}a_{41}$, *las submatrices de* $\overline{A}_4$ *asociadas a los caminos* $\{(4,3),(3,5)\}$ *y* $\{(1,3),(3,5)\}$ *cumplen la* P*-condición.*
Finalmente, obtenemos la completación $\overline{A}_5$ *de* $\overline{A}_4$ *al reemplazar la submatriz* $\overline{A}_4[\{1,2,3,4,5\}]$ *por su* C*-completación:*

$$\overline{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}a_{35}/a_{25} & a_{13} & a_{14} & a_{13}a_{35} \\ a_{53}a_{31}/a_{52} & 1 & a_{25}/a_{35} & a_{14}a_{25}/a_{13}a_{35} & a_{25} \\ a_{31} & a_{52}/a_{53} & 1 & a_{14}/a_{13} & a_{35} \\ a_{41} & a_{41}a_{52}/a_{53}a_{31} & a_{41}/a_{31} & 1 & a_{13}a_{35}/a_{14} \\ a_{53}a_{31} & a_{52} & a_{53} & a_{53}a_{31}/a_{41} & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso, de los caminos $\{(4,5),(5,2)\}$, $\{(1,5),(5,2)\}$ *y* $\{(3,5),(5,2)\}$, *se obtienen las desigualdades:* $a_{14}a_{41}a_{25}a_{52} \leq a_{35}a_{53}a_{13}a_{31}$, $a_{35}a_{53}a_{13}a_{31} \leq a_{25}a_{52}$ *y* $a_{25}a_{52} \leq a_{35}a_{53}$.
Por lo tanto, la CP*-condición es el conjunto de las desigualdades:*

i) $a_{14}a_{41} \leq a_{13}a_{31}$

ii) $a_{35}a_{53}a_{13}a_{31} \leq a_{14}a_{41}$

iii) $a_{14}a_{41}a_{25}a_{52} \leq a_{35}a_{53}a_{13}a_{31}$

iv) $a_{35}a_{53}a_{13}a_{31} \leq a_{25}a_{52}$

v) $a_{25}a_{52} \leq a_{35}a_{53}$

Como veremos a continuación, $\overline{A}_5$ *es una completación* TNN*.*
Consideramos la matriz,

$$\overline{A}_{5x} = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}a_{35}/a_{25} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ a_{53}a_{31}/a_{52} & 1 & a_{25}/a_{35} & a_{14}a_{25}/a_{13}a_{35} & a_{25} \\ x_{31} & a_{52}/a_{53} & 1 & a_{14}/a_{13} & a_{35} \\ x_{41} & a_{41}a_{52}/a_{53}a_{31} & a_{41}/a_{31} & 1 & a_{13}a_{35}/a_{14} \\ x_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{53}a_{31}/a_{41} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un 1-cordal monótonamente etiquetado.

De la desigualdad (iv) se deduce que la submatriz $\overline{A}_{5x}[\{1,2\}]$ *es una matriz* TNN*, al tiempo que el lema 4.2.1 nos permite asegurar que la submatriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{23} & x_{24} & a_{25} \\ x_{32} & 1 & a_{14}/a_{13} & a_{35} \\ x_{42} & a_{41}/a_{31} & 1 & a_{13}a_{35}/a_{14} \\ a_{52} & a_{53} & a_{53}a_{31}/a_{41} & 1 \end{bmatrix},$$

tiene completación TNN*, que es concretamente la submatriz* $\overline{A}_{5x}[\{2,3,4,5\}]$*. Por tanto, aplicando el teorema 3.2.2 vemos que* $\overline{A}_5$ *es una completación* TNN *de* A*.*

Teorema 4.2.2 *Sea* A *una matriz parcial* TNN*, de tamaño* $n \times n$*, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un camino no monótonamente etiquetado* $\{\{1,2,\ldots,n\},\{(i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_{n-1},i_n)\}\}$*. Entonces* A *tiene completación* TNN *si cumple la* CP*-condición.*

Demostración: La demostración se hace por inducción matemática sobre n. Si $n = 3$ aplicamos la proposición 4.2.1. Supongamos que el resultado es cierto para $A_{n-1} = A[\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\}]$. Entonces la completación $\overline{A}_{n-1}$ de A_{n-1} obtenida siguiendo el proceso de la CP-condición es una completación

TNN, y por consiguiente las submatrices $T_1 = \overline{A}_{n-1}[\{1, 2, \ldots, i_n - 1\}]$ y $T_2 = \overline{A}_{n-1}[\{i_n + 1, i_n + 2, \ldots, n\}]$ son también matrices TNN. Consideramos las matrices:

$$B = \begin{bmatrix} T_1 & A[\{1, 2, \ldots, i_n - 1\}|\{i_n\}] \\ A[\{i_n\}|\{1, 2, \ldots, i_n - 1\}] & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 1 & A[\{i_n\}|\{i_n + 1, i_n + 2, \ldots, n\}] \\ A[\{i_n + 1, i_n + 2, \ldots, n\}]|\{i_n\}] & T_2 \end{bmatrix}$$

Observamos que si $i_n = 1$ tenemos $B = [1]$ y si $i_n = n$ entonces $C = [1]$.
Al aplicar el lema 4.2.1 sobre las matrices B y C, obtenemos la completación TNN:

$$B_c = \overline{A}_n[\{1, 2, \ldots, i_n - 1, i_n\}] = \begin{bmatrix} T_1 & B_{12} \\ B_{21}^T & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$C_c = \overline{A}_n[\{i_n, i_n + 1, i_n + 2 \ldots, n\}] = \begin{bmatrix} 1 & C_{12}^T \\ C_{21} & T_2 \end{bmatrix},$$

respectivamente.
Consideramos ahora la matriz

$$D = \begin{bmatrix} T_1 & B_{12} & X \\ B_{21}^T & 1 & C_{12}^T \\ Y & C_{21} & T_2 \end{bmatrix},$$

donde X e Y son matrices completamente no especificadas. D es una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es un 1-cordal. Entonces, al completar $X = B_{12}C_{12}^T$ e $Y = C_{21}B_{21}^T$, obtenemos la completación TNN $D_c = \overline{A}_n$ de A. □

4.2.2. Ciclos no dirigidos

A continuación analizamos el problema de completación en el caso de matrices parciales cuyos grafos asociados son ciclos no dirigidos. En general, no existen completaciones totalmente no negativas para dichas matrices en el caso de ciclos monótona y no monótonamente etiquetados, como podemos ver en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.2.5 *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 & 1 & x_{24} \\ x_{31} & 0{,}2 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & x_{42} & 0{,}2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A es una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es un ciclo no dirigido monótonamente etiquetado. Vemos que no existe completación TNN de A ya que $\det A[\{1,2\}|\{2,4\}] \geq 0$ *y* $\det A[\{2,3\}|\{3,4\}] \geq 0$ *si* $x_{24} \geq 0{,}8$ *y* $x_{24} \leq 0{,}7$, *respectivamente.*

Ejemplo 4.2.6 *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0{,}01 & x_{14} \\ 1 & 1 & x_{23} & 0{,}02 \\ 0{,}01 & x_{32} & 1 & 1 \\ x_{41} & 0{,}02 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A es una matriz parcial TNN, cuyo grafo asociado es un ciclo no dirigido no monótonamente etiquetado. A no tiene completación TNN debido a que, por una parte, de las desigualdades $\det A[\{1,2\}|\{3,4\}] \geq 0$ *y* $\det A\{2,3\}|\{3,4\}] \geq 0$ *tenemos* $x_{14} \leq 0{,}01$, *y por otra parte,* $\det A[\{3,4\}|\{1,4\}] \geq 0$ *implica* $x_{41} \leq 0{,}01$. *Reemplazando los valores obtenidos de* x_{14} *y* x_{41} *en* $\det A[\{1,2,4\}]$ *el resultado es negativo siempre.*

A continuación, abordamos exclusivamente el caso de ciclos no dirigidos monótonamente etiquetados.

Observamos que las matrices de tamaño 3×3, cuyo grafo asociado es un ciclo, son completas, por lo que nos centramos en las matrices parciales de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$. Para dichas matrices, podemos generalizar el ejemplo 4.2.5 de la siguiente manera.

Ejemplo 4.2.7 *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & \cdots & x_{1,n-1} & 0{,}8 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & 1 & 1 & \cdots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & 1 & 0{,}7 \\ 1 & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A es una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, cuyo grafo asociado es un ciclo no dirigido monótonamente etiquetado.
Sin embargo, A no puede tener completación TNN debido a que cualquier completación TNN de A tiene $\det A[\{1,k\}|\{k,k+1\}]$ *no negativo, por lo que $x_{1i} \leq 1$ para todo $i = 3, 4, \ldots, n-1$, y por tanto,* $\det A[\{1,n-1\}|\{n-1,n\}] = 0{,}7x_{1,n-1} - 0{,}8$ *es negativo.*

Como podemos observar en el ejemplo 4.2.5, en general la P-condición no es suficiente para la existencia de la completación deseada en el caso de ciclos no dirigidos monótonamente etiquetados, y visto el anterior ejemplo, vamos a desarrollar, a continuación, una condición necesaria y suficiente para la existencia de las completaciones deseadas.

Definición 4.2.3 *Dada $A = (a_{ij})$ una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos diagonales no nulos ($a_{ii} = 1$) y cuyo grafo asociado es* *un ciclo no dirigido monótonamente etiquetado, decimos que A satisface la condición SS-diagonal si cumple las siguientes desigualdades:*

$$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n} \geq a_{1n} \quad y \quad a_{n,n-1}a_{n-1,n-2}\cdots a_{21} \geq a_{n1}$$

Ejemplo 4.2.8 *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x_{13} & 2 \\ 0{,}5 & 1 & 1 & x_{24} \\ x_{31} & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0{,}25 & x_{42} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A es una matriz parcial TNN, cuyo grafo asociado es un ciclo no dirigido monótonamente etiquetado. Es fácil observar que A cumple la SS-diagonal, y que

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0{,}5 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es una completación TNN de A.

Observamos que en la definición de la SS-diagonal se exije que la matriz A tenga elementos diagonales no nulos. En el siguiente ejemplo ponemos de manifiesto que, en general, no existe la completación si la matriz parcial contiene elementos diagonales nulos.

Ejemplo 4.2.9 *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & x_{13} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x_{24} \\ x_{31} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_{42} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $\det A[\{2,3\}|\{3,4\}] \geq 0$, *y* $\det A[\{1,2\}|\{2,4\}] \geq 0$, *obtenemos* $x_{24} \leq 1$ *y* $x_{24} \geq 2$ *respectivamente, por lo que A no tiene completación TNN.*

Como vemos a continuación, la condición SS-diagonal es necesaria y suficiente para la existencia de completaciones totalmente no negativas.

Lema 4.2.2 *Sea A una matriz parcial TNN, de tamaño 4×4, con elementos diagonales no nulos, cuyo grafo asociado es un ciclo no dirigido monótonamente etiquetado. Existe una completación TNN A_c de A si y sólo si A satisface la condición SS-diagonal.*

Demostración: En primer lugar, supongamos que la matriz A no contiene elementos nulos. Para demostrar la suficiencia de la condición, consideramos la completación,

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{23} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{14}/a_{12} \\ a_{41}/a_{43} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{43}a_{32} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por hipótesis tenemos los menores $\det A_c[\{1,2\}]$, $\det A_c[\{1,3\}]$, $\det A_c[\{1,4\}]$, $\det A_c[\{2,3\}]$, $\det A_c[\{2,4\}]$ y $\det A_c[\{3,4\}]$ no negativos. Teniendo en cuenta la SS-diagonal, obtenemos el valor del resto de menores.

$\det A_c[\{1,2\}|\{1,3\}] = a_{23}(1 - a_{12}a_{21}) \geq 0$

$\det A_c[\{1,2\}|\{1,4\}] = a_{14}(\frac{1}{a_{12}} - a_{21}) \geq 0$

$\det A_c[\{1,2\}|\{2,3\}] = 0$

$\det A_c[\{1,2\}|\{2,4\}] = 0$

$\det A_c[\{1,2\}|\{3,4\}] = 0$

$\det A_c[\{1,3\}|\{1,2\}] = a_{32} - \frac{a_{41}a_{12}}{a_{43}} \geq a_{32} - \frac{a_{41}}{a_{43}a_{21}} \geq 0$

$\det A_c[\{1,3\}|\{1,4\}] = a_{34} - \frac{a_{14}a_{41}}{a_{43}} \geq a_{34}(1 - a_{14}a_{41}) \geq 0$

$\det A_c[\{1,3\}|\{2,3\}] = a_{12}(1 - a_{23}a_{32}) \geq 0$

$\det A_c[\{1,3\}|\{2,4\}] = a_{12}a_{34} - a_{14}a_{32} \geq a_{12}a_{34} - \frac{a_{14}}{a_{23}} \geq 0$

$\det A_c[\{1,3\}|\{3,4\}] = a_{12}a_{23}a_{34} - a_{14} \geq 0$

$$\det A_c[\{1,4\}|\{1,2\}] = a_{43}a_{32} - a_{41}a_{12} \geq a_{43}a_{32} - \frac{a_{41}}{a_{21}} \geq 0$$
$$\det A_c[\{1,4\}|\{1,3\}] = a_{43} - a_{41}a_{12}a_{23} \geq a_{43} - \frac{a_{41}}{a_{32}a_{21}} \geq 0$$
$$\det A_c[\{1,4\}|\{2,3\}] = a_{12}a_{43}(1 - a_{23}a_{32}) \geq 0$$
$$\det A_c[\{1,4\}|\{2,4\}] = a_{12} - a_{14}a_{43}a_{32} \geq a_{12} - \frac{a_{14}}{a_{23}a_{34}} \geq 0$$
$$\det A_c[\{1,4\}|\{3,4\}] = a_{12}a_{23} - a_{14}a_{43} \geq a_{12}a_{23} - \frac{a_{14}}{a_{34}} \geq 0$$

$$\det A_c[\{2,3\}|\{1,2\}] = a_{32}a_{21} - \frac{a_{41}}{a_{43}} \geq 0$$
$$\det A_c[\{2,3\}|\{1,3\}] = a_{21} - \frac{a_{41}a_{23}}{a_{43}} \geq a_{21} - \frac{a_{41}}{a_{43}a_{32}} \geq 0$$
$$\det A_c[\{2,3\}|\{1,4\}] = a_{21}a_{34} - \frac{a_{14}a_{41}}{a_{43}a_{12}} \geq a_{21}a_{34}(1 - a_{14}a_{41}) \geq 0$$
$$\det A_c[\{2,3\}|\{2,4\}] = a_{34} - \frac{a_{14}a_{32}}{a_{12}} \geq a_{34} - \frac{a_{14}}{a_{12}a_{23}} \geq 0$$
$$\det A_c[\{2,3\}|\{3,4\}] = a_{23}a_{34} - \frac{a_{14}}{a_{12}} \geq 0$$

$$\det A_c[\{2,4\}|\{1,2\}] = a_{43}a_{32}a_{21} - a_{41} \geq 0$$
$$\det A_c[\{2,4\}|\{1,3\}] = a_{43}a_{21} - a_{23}a_{41} \geq a_{43}a_{21} - \frac{a_{41}}{a_{32}} \geq 0$$
$$\det A_c[\{2,4\}|\{1,4\}] = a_{21} - \frac{a_{41}a_{14}}{a_{12}} \geq a_{21}(1 - a_{14}a_{41}) \geq 0$$
$$\det A_c[\{2,4\}|\{2,3\}] = a_{43} - a_{23}a_{32}a_{43} = a_{43}(1 - a_{23}a_{32}) \geq 0$$
$$\det A_c[\{2,4\}|\{3,4\}] = a_{23} - \frac{a_{14}a_{43}}{a_{12}} \geq a_{23} - \frac{a_{14}}{a_{34}a_{12}} \geq 0$$

$$\det A_c[\{3,4\}|\{1,2\}] = 0$$
$$\det A_c[\{3,4\}|\{1,3\}] = 0$$
$$\det A_c[\{3,4\}|\{1,4\}] = \frac{a_{41}}{a_{43}}(1 - a_{34}a_{43}) \geq 0$$
$$\det A_c[\{3,4\}|\{2,3\}] = 0$$
$$\det A_c[\{3,4\}|\{2,4\}] = a_{32}(1 - a_{34}a_{43}) \geq 0$$

$$\det A_c[\{1,2,3\}] = (1 - a_{12}a_{21})(1 - a_{23}a_{32}) \geq 0$$
$$\det A_c[\{1,2,3\}|\{1,2,4\}] = (1 - a_{12}a_{21})(a_{34} - \frac{a_{14}a_{32}}{a_{12}}) \geq 0$$

$\det A_c[\{1,2,3\}|\{1,3,4\}] = (1 - a_{12}a_{21})(a_{23}a_{34} - \dfrac{a_{14}}{a_{12}}) \geq 0$
$\det A_c[\{1,2,3\}|\{2,3,4\}] = 0$

$\det A_c[\{1,2,4\}|\{1,2,3\}] = a_{43}(1 - a_{12}a_{21})(1 - a_{23}a_{32}) \geq 0$
$\det A_c[\{1,2,4\}] = (1 - a_{12}a_{21})(1 - \dfrac{a_{14}a_{43}a_{32}}{a_{12}}) \geq 0$
$\det A_c[\{1,2,4\}|\{1,3,4\}] = (1 - a_{12}a_{21})(a_{23} - \dfrac{a_{14}a_{43}}{a_{12}}) \geq 0$
$\det A_c[\{1,2,4\}|\{2,3,4\}] = 0$

$\det A_c[\{2,3,4\}|\{1,2,3\}] = 0$
$\det A_c[\{2,3,4\}|\{1,2,4\}] = (1 - a_{34}a_{43})(a_{32}a_{21} - \dfrac{a_{41}}{a_{43}}) \geq 0$
$\det A_c[\{2,3,4\}|\{1,3,4\}] = (a_{21} - \dfrac{a_{41}a_{23}}{a_{43}})(1 - a_{34}a_{43}) \geq 0$
$\det A_c[\{2,3,4\}] = (1 - a_{23}a_{32})(1 - a_{34}a_{43}) \geq 0$
Además, $\det A_c = \det A[\{1,2\}].\det A[\{2,3\}].\det A[\{3,4\}] \geq 0$. Por lo tanto A_c es una completación TNN de A.
Ahora, si A contiene elementos nulos, consideramos únicamente dos casos, siendo que la condición SS-diagonal nos permite afirmar que si a_{14} y a_{41} son no nulos, entonces el resto de elementos especificados son también no nulos.

i) $a_{14} = a_{41} = 0$. La matriz

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{23} & 0 \\ a_{21} & 1 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & a_{34} \\ 0 & a_{43}a_{32} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

es una completación TNN de A.

ii) $a_{14} = 0$ y $a_{41} \neq 0$. En este caso, la condición SS-diagonal, implica que los elementos subdiagonales son de valor positivo. Observamos que

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{23} & 0 \\ a_{21} & 1 & a_{23} & 0 \\ a_{41}/a_{43} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{43}a_{32} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

es una completación TNN de A. (El caso $a_{41} = 0$ y $a_{14} \neq 0$ es análogo).

Para demostrar la necesidad de la condición, supongamos que existe una completación TNN, A_c de A,

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & c_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & c_{24} \\ c_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & c_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

A partir de

$$\det A[\{1,2\}|\{2,3\}] \geq 0 \quad \text{y} \quad \det A[\{1,3\}|\{3,4\}] \geq 0$$

obtenemos las desigualdades:

$$a_{12}a_{23} \geq c_{13}a_{22} \quad \text{y} \quad c_{13}a_{34} \geq a_{14}a_{33}$$

Al combinarlas obtenemos $a_{12}a_{23}a_{34} \geq a_{14}$.
Análogamente:

$$\det A[\{2,3\}|\{1,2\}] \geq 0 \quad \text{y} \quad \det A[\{3,4\}|\{1,3\}] \geq 0,$$

proporcionan la condición $a_{43}a_{32}a_{21} \geq a_{41}$.
La condición SS-diagonal es, por tanto, necesaria para la existencia de una completación totalmente no negativa. $\square$

Extendemos a continuación el resultado anterior al caso general.

Teorema 4.2.3 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos diagonales no nulos, cuyo grafo asociado es un ciclo no dirigido monótonamente etiquetado. Existe una completación TNN, A_c de A, si y sólo si A satisface la condición SS-diagonal.*

Demostración: Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la matriz parcial A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Demostramos la suficiencia de la condición SS-diagonal por inducción sobre el tamaño de la matriz parcial. Si $n = 4$, aplicamos el lema anterior. Supongamos que el resultado es cierto cuando el tamaño de la matriz es $(n-1) \times (n-1)$. Consideramos una nueva matriz parcial TNN, B,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

siendo

$$b_{1,n-1} = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \; a_{1n} = 0 \\ \dfrac{a_{1n}}{a_{n-1,n}}, & \text{si } \; a_{1n} \neq 0 \end{cases}$$

y

$$b_{n-1,1} = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \; a_{n1} = 0 \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{n,n-1}}, & \text{si } \; a_{n1} \neq 0 \end{cases}$$

La submatriz principal $B[\{1, 2, \cdots, n-1\}]$ es una matriz parcial TNN de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ que satisface la condición SS-diagonal y cuyo grafo asociado es un ciclo no dirigido monótonamente etiquetado. Por hipótesis, existe una completación TNN, $B[\{1, 2, \ldots, n-1\}]_c$.

Sea $\overline{B}$ la matriz parcial TNN obtenida de B al reemplazar la submatriz $B[\{1, 2, \ldots, n-1\}]$ por $B[\{1, 2, \ldots, n-1\}]_c$,

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & c_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & c_{2,n-1} & x_{2n} \\ c_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & c_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & c_{n-1,2} & c_{n-1,3} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que el grafo asociado a la matriz $\overline{B}$ es 1-cordal monótonamente etiquetado. Entonces, por el teorema 3.2.2, $\overline{B}$ tiene completación TNN, $\overline{B}_c$, cuyas posiciones $(1, n)$ y $(n, 1)$ contienen (ver [30]) los siguientes elementos, respectivametne.

$$b_{1n} = b_{1,n-1}a_{n-1,n} \begin{cases} 0\ , & \text{si} \quad a_{1n} = 0 \\ \dfrac{a_{1n}}{a_{n-1,n}} a_{n-1,n}, & \text{si} \quad a_{1n} \neq 0 \end{cases}$$

y

$$b_{n1} = a_{n,n-1}b_{n-1,1} \begin{cases} 0\ , & \text{si} \quad a_{n1} = 0 \\ a_{n,n-1}\dfrac{a_{n1}}{a_{n,n-1}}, & \text{si} \quad a_{n1} \neq 0 \end{cases}$$

Por tanto, $\overline{B}_c$ es una completación TNN de A.

Demostramos a continuación que la condición es necesaria.

A partir de las desigualdades $\det A[\{1, i\}|\{i, i+1\}] \geq 0$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$, obtenemos la condición $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n} \geq a_{1n}$.

De manera análoga, las desigualdades $\det A[\{i, i+1\}|\{1, i\}] \geq 0$, $i = 2, 3, \ldots,$ $n-1$, implican la desigualdad $a_{n,n-1}a_{n-1,n-2}\cdots a_{21} \geq a_{n1}$. $\square$

4.3. Grafos dirigidos

A partir de esta sección, y salvo que digamos lo contrario, vamos a trabajar con matrices parciales cuyos elementos diagonales son no nulos.

4.3.1. Caminos dirigidos

En esta subsección cerramos el problema de completación de una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es un camino dirigido, tanto en el caso de camino monótonamente etiquetado como de no monótonamente etiquetado.

Comenzamos analizando el caso de caminos dirigidos monótonamente etiquetados. Podemos considerar sin pérdida de generalidad, a partir de la proposición 3.2.1, que la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & \cdots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposición 4.3.1 *Toda matriz parcial TNN A, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un camino dirigido monótonamente etiquetado tiene completación TNN.*

Demostración: Sea $\overline{A}$ el resultado de reemplazar los elementos desconocidos en la subdiagonal de A por valores suficientemente pequeños. Se observa que $\overline{A}$ es una matriz parcial TNN, cuyo grafo asociado es un camino no dirigido monótonamente etiquetado. Entonces, por el teorema 3.2.2, A tiene completación TNN. □

Sin embargo, en el caso de caminos no monótonamente etiquetados, la metodología para encontrar completaciones será diferente. Empezamos por matrices parciales de tamaño 3×3.

Proposición 4.3.2 *Toda matriz parcial TNN de tamaño 3×3 con diagonal especificada no nula, cuyo grafo asociado es un camino dirigido no monótonamente etiquetado, tiene completación TNN.*

Demostración: El problema se reduce a analizar las dos posibilidades siguientes.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} \\ x_{21} & 1 & x_{23} \\ x_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{G_{A_1}}{1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2} \qquad\qquad \underset{G_{A_2}}{2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3}$$

Consideramos la matriz A_1, siendo el otro caso análogo.
En primer lugar, supongamos que A_1 no contiene elementos nulos. Por tanto, completamos x_{23} y x_{31} con $c_{23} = 1/a_{32}$ y $c_{31} = \epsilon$ suficientemente pequeño, respectivamente. El resultado es una matriz parcial TNN, cuyo grafo asociado es un camino no dirigido no monótonamente etiquetado que cumple la P-condición. Entonces, por proposición 4.3.1, A_1 tiene completación TNN,

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}a_{32} & a_{13} \\ \epsilon/a_{32} & 1 & 1/a_{32} \\ \epsilon & a_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, si A_1 contiene elementos nulas, entonces consideramos dos casos.

Si $a_{32} = 0$,

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 1 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde c_{23} es suficientemente grande, es una completación TNN.

Si $a_{13} = 0$, elegimos la completación,

$$A_{c3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, A_1 tiene completación TNN. □

Podemos verificar que el resultado es cierto también para el caso $n \times n$, $n \geq 4$ con matrices parciales cuyos elementos especificados no son nulos.

Teorema 4.3.1 *Toda matriz parcial TNN, de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un camino dirigido no monótonamente etiquetado tiene completación TNN.*

Demostración: Supongamos que $G_A = (V, E)$ es el grafo asociado a la matriz parcial TNN, A, con el conjunto de vertices $V = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ y el conjunto de arcos $E = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n)\}$.
Consideramos la completación TNN, $A_c = (c_{ij})$, definida como sigue.

$$c_{i_k i_m} = \begin{cases} a_{i_k, i_m}, & \text{si} \quad k = m-1 \\ a_{i_k, i_{k+1}} a_{i_{k+1}, i_{k+2}} \ldots a_{i_{m-1}, i_m}, & \text{si} \quad k < m-1 \\ 1/a_{i_m, i_{m+1}} a_{i_{m+1}, i_{m+2}} \ldots a_{i_{k-1}, i_k}, & \text{si} \quad k \geq m+1 \end{cases}$$

Es fácil ver que las columnas de A_c son linealmente dependientes dos a dos, y por lo tanto, todos los menores de A_c son nulos. □

El siguiente ejemplo nos permite afirmar que, en general, no existe la completación deseada si la matriz parcial contiene elementos nulos.

Ejemplo 4.3.1 *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 1 & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & 0 & 1 & x_{34} \\ 1 & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un camino dirigido no monótonamente etiquetado no posee completación TNN, puesto que si,

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & 1 & c_{14} \\ c_{21} & 1 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & 0 & 1 & c_{34} \\ 1 & c_{42} & c_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

fuera una completación de dicha matriz parcial obtendríamos a partir de $\det A[\{2,3\}|\{1,2\}] \geq 0$ *y* $\det A[\{1,4\}|\{1,3\}] \geq 0$ *que* $c_{31} \leq 0$ *y* $c_{43} \geq 1$, *respectivamente. Sustituyendo dichos valores en la desigualdad* $\det A[\{3,4\}|\{1,3\}] = c_{31}c_{43} - 1 \geq 0$ *llegamos a una contradicción.*

4.3.2. Ciclos dirigidos

Abordamos a continuación el problema de completación de matrices parciales TNN, $A = (a_{ij})$, cuando el grafo asociado es un ciclo dirigido. Supondremos que $a_{ii} \neq 0$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ por lo que, a partir de la proposición 3.2.1, podemos suponer que A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & \cdots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

En general, el problema de completación tiene en este caso respuesta negativa para ciclos dirigidos monótonamente etiquetados o no monótonamente etiquetados, como los siguientes ejemplos ponen de manifiesto.

Ejemplo 4.3.2 *Consideramos la siguiente matriz parcial*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & 1 & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & 1 \\ 2 & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido monótonamente etiquetado. Si la matriz A tiene completación TNN, $A_c = (c_{ij})$, entonces $\det A_c[\{i, i+1\}] \geq 0$*, implica que $c_{i+1,i} \leq 1$ para i=1,2,3. Por otra parte, los determinantes* $\det A_c[\{j, j+1\}|\{1, j\}] \geq 0$ *con $j = 2, 3$, implican la desigualdad $c_{43}c_{32}c_{21} \geq 2$. Por lo tanto, A no tiene completación TNN.*

Ejemplo 4.3.3 *Sea la matriz parcial*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 1 & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & 2 \\ x_{31} & 1 & 1 & x_{34} \\ 1 & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es el ciclo dirigido no monótonamente etiquetado

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 1$$

Si A tiene completación TNN, $A_c = (c_{ij})$, entonces $\det A_c[\{1,3\}|\{2,3\}] \geq 0$, *implica que* $c_{12} \geq 1$, *y* $\det A_c[\{2,4\}|\{1,4\}] \geq 0$ *implica la desigualdad* $c_{21} \geq 2$, *por lo que* $\det A_c[\{1,2\}] < 0$. *Así pues, A no tiene completación TNN.*

Los ejemplos que acabamos de mencionar pueden ser generalizados para matrices parciales de tamaño $n \times n$, $n > 4$. Para el caso monótono, asignamos 1's a todos los elementos especificados de la matriz parcial excepto a_{n1}, al que damos el valor 2. Con un procedimiento similar al del ejemplo 4.3.2, podemos justificar que la completación deseada no existe.
Para el caso no monótono, consideramos la matriz parcial totalmente no negativa, A, cuyo grafo asociado es

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow \cdots \quad n-1 \longrightarrow n \longrightarrow 1$$

Supongamos que todos los elementos especificados de A son 1's, excepto el elemento $(2,4)$ al que asignamos el valor 2. Si A tiene completación totalmente no negativa, $A_c = (c_{ij})$, entonces, combinando las desigualdades

$$\begin{aligned} \det A_c[\{4,5\}|\{5,6\}] &\geq 0 \\ \det A_c[\{4,6\}|\{6,7\}] &\geq 0 \\ &\vdots \\ \det A_c[\{4,n-1\}|\{n-1,n\}] &\geq 0 \end{aligned}$$

vemos que $c_{4n} \leq 1$, y con la desigualdad $\det A_c[\{1,4\}|\{1,n\}] \geq 0$ obtenemos

$$c_{41} \leq c_{4n} \leq 1 \qquad (1)$$

Por otra parte, los menores,

$$\begin{aligned} \det A_c[\{4,5\}|\{1,5\}] &\geq 0 \\ \det A_c[\{4,6\}|\{1,6\}] &\geq 0 \\ &\vdots \\ \det A_c[\{n-1,n\}|\{1,n\}] &\geq 0 \end{aligned}$$

implican respectivamente

$$\begin{aligned} c_{41} &\geq c_{51} \\ c_{51} &\geq c_{61} \\ &\vdots \\ c_{n-1,1} &\geq c_{n1} \end{aligned}$$

por lo que

$$c_{41} \geq c_{n1} = 1 \qquad (2)$$

De (1) y (2), el elemento c_{41} tiene el valor 1. Aplicando los resultados del ejemplo 4.3.3 a la matriz $\overline{A}_c[\{1,2,3,4\}]$ obtenida de $A_c[\{1,2,3,4\}]$ al asignar 1 a la posición $(4,1)$ obtenemos que no hay completación totalmente no negativa para dicho caso.

Podemos afirmar por lo tanto el siguiente resultado.

Proposición 4.3.3 *Para cualquier $n \geq 4$ existe una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido, que no tiene completación TNN.*

A fin de resolver el problema de completación para este tipo de matrices parciales introducimos la siguiente definición.

Definición 4.3.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz parcial, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}$. Decimos que A satisface la C-condición si*

$$\frac{a_{i_1,i_2} a_{i_2,i_3} \cdots a_{i_{n-1},i_n} a_{i_n,i_1}}{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}} \leq 1.$$

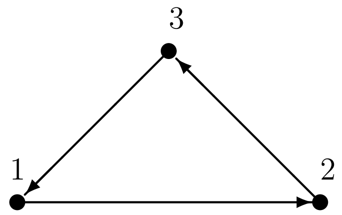
Es fácil observar que las matrices parciales de los ejemplos 4.3.2 y 4.3.3 no cumplen la C-condición.

Demostramos, a continuación, que dicha condición es necesaria y suficiente para la existencia de la completación deseada tanto en el caso de ciclos dirigidos monótona como no monótonamente etiquetados. Empezamos por el caso monótonamente etiquetado para las matrices de tamaño 3×3.

Lema 4.3.1 *Toda matriz parcial TNN, A, de tamaño 3×3, cuyo grafo asociado G_A es un ciclo dirigido monótonamente etiquetado, tiene completación TNN, A_c, si y sólo si A cumple la C-condición.*

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A tiene la forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$



G_A

Si la matriz A satisface la C-condición, las siguientes matrices son completaciones TNN de A.

i) Si $a_{12} \neq 0$, consideramos $A_{c1} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{23} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{31}a_{12} & 1 \end{bmatrix}$.

Vemos que $\det A_{c1}[\{1,3\}|\{2,3\}]$, $\det A_{c1}[\{2,3\}|\{1,3\}]$ y $\det A_{c1}[\{2,3\}]$ son no negativos por la C-condición, mientras que el resto de menores de A_{c1} son nulos. Por lo tanto, A_{c1} es una matriz TNN.

ii) Si $a_{12} = 0$, tenemos dos posibilidades:

ii₁) Si $a_{23} \neq 0$, elegimos $A_{c2} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{23} \\ a_{23}a_{31} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 1/a_{23} & 1 \end{bmatrix}$,

cuyas submatrices $A_{c2}[\{1,2\}]$, $A_{c1}[\{1,2\}|\{1,3\}]$ y $A_{c1}[\{1,3\}|\{1,2\}]$ tienen el determinante no negativo por la C-condición, y del resto de las submatrices el determinante es igual a cero. Así que, A_{c2} es una matriz TNN.

ii₂) Si $a_{23} = 0$, es fácil comprobar que $A_{c3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{31} & 1 \end{bmatrix}$,

es una matriz TNN.

Para demostrar la necesidad de la condición, supongamos que

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & c_{32} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad c_{13}, c_{21}, c_{32} \geq 0,$$

es una completación TNN de A.

Combinando las dos desigualdades:

$$\det A[\{2,3\}|\{1,3\}] = c_{21} - a_{23}a_{31} \geq 0 \quad y \quad \det A[\{1,2\}] = 1 - c_{21}a_{12} \geq 0$$

obtenemos $1 - a_{12}a_{23}a_{31} \geq 0$ □

Sin embargo, si algunos elementos diagonales son cero, el resultado anterior no se conserva, como lo ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.4 *Consideramos la matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix},$$

con a_{12} y a_{31} positivos. Aunque la matriz cumple la C-condición, A no tiene completación TNN ya que $\det A[\{1,3\}|\{1,2\}]$ es negativo siempre.

Ahora generalizamos el resultado anterior para matrices parciales de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$.

Teorema 4.3.2 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido monótonamente etiquetado. Existe una completación TNN de A si y sólo si A satisface la C-condición.*

Demostración: Podemos suponer, como comentamos al principio de la sección, que A tiene la forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & \cdots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Analizamos los siguientes casos:

a) A no tiene elementos especificados nulos. Sea $\overline{A}$ la matriz obtenida de A al reemplazar $x_{i+1,i}$ por $c_{i+1,i} = 1/a_{i,i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y x_{1n}

por $c_{1n} = a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n}$.
Por la C-condición, obtenemos $a_{n1} \leq \dfrac{1}{a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n}}$.

b) Algún elemento $a_{i,i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, es nulo. Reemplazamos $x_{i+1,i}$ por valores reales cualesquiera, $c_{i+1,i}$, de tal manera que $c_{i+1,i}a_{i+1,i} \leq 1$ y $a_{n1} \leq c_{n,n-1}c_{n-1,n-2}\dots c_{21}$, también asignamos $x_{1n} = 0$ obteniendo una nueva matriz TNN, $\overline{A}$.

Es fácil observar que $\overline{A}$, en ambos casos, cumple la condición SS-diagonal. Entonces, por teorema 4.2.3, $\overline{A}$ y por tanto A tiene completación TNN.
Recíprocamente, para demostrar que la C-condición es necesaria, consideramos

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & 1 & \cdots & c_{3,n-1} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & c_{n-1,3} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

como completación TNN de A.
De los menores de tamaño 2×2, $\det A[\{i, i+1\}], i = 1, 2, \dots, n-1$, obtenemos $a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n}c_{21}c_{32}\dots c_{n,n-1} \leq 1$. Además, de los menores

$$\begin{gathered} \det A_c[\{2,3\}|\{1,2\}] \geq 0 \\ \det A_c[\{3,4\}|\{1,3\}] \geq 0 \\ \vdots \\ \det A_c[\{n-1,n\}|\{1,n-1\}] \geq 0, \end{gathered}$$

obtenemos $a_{n1} \leq c_{21}c_{32}\dots c_{n,n-1}$.
Combinando dichas desigualdades obtenemos $a_{12}a_{23}\dots a_{n1} \leq 1$ $\square$

A continuación, analizamos las matrices parciales cuyos grafos asociados son ciclos dirigidos no monótonamente etiquetados. Si dichas matrices son de tamaño 3×3, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, utilizando la semejanza de permutación por la matriz $P = [3, 2, 1]$, que el grafo asociado es monótonamente etiquetado. Por lo tanto, trabajaremos con matrices de tamaño 4×4, demostrando que la C-condición es también condición necesaria y suficiente para la existencia de una completación totalmente no negativa.

Definición 4.3.2 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$ con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado, $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}$. Llamamos C^*-completación a la completación definida de la siguiente forma:*

$$c_{i_k,i_m} = \begin{cases} a_{i_k,i_{k+1}} a_{i_{k+1},i_{k+2}} \ldots a_{i_{m-1},i_m}, & k < m - 1 \\ a_{i_k,i_{k+1}} a_{i_{k+1},i_{k+2}} \ldots a_{i_{n-1},i_n} a_{i_n,i_1}, & k \geq m + 1, \quad \textit{if} \ \ m = 1 \\ 1/(a_{i_m,i_{m+1}} a_{i_{m+1},i_{m+2}} \ldots a_{i_{k-1},i_k}), & k \geq m + 1, \quad \textit{if} \ \ m \neq 1 \end{cases}$$

Veamos a continuación dos ejemplos de la anterior definición en los que se observa que la C^*-completación de una matriz parcial totalmente no negativa puede ser o no una matriz totalmente no negativa.

Ejemplo 4.3.5 *La C^*-completación de la matriz parcial TNN*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & 1 \\ 1 & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado, es la matriz TNN

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si consideramos la siguiente matriz parcial TNN

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & 1 \\ 1 & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

observamos que la C^*-completación

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 2 & 0{,}5 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0{,}25 & 1 & 0{,}25 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

no es una matriz TNN.

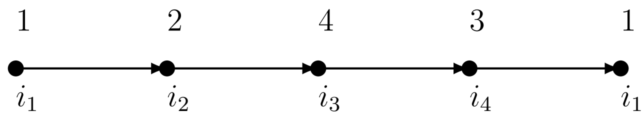
En los siguientes resultados establecemos que, bajo las hipótesis indicadas, la C^*-completación es una completación totalmente no negativa si y sólo si se verifica la C-condición.

Lema 4.3.2 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño 4×4 con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado G_A es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado. Existe una completación TNN de A, A_c, si y sólo si A verifica la C-condición.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad, teniendo en cuenta que la semejanza por la matriz permutación $P = [4, 3, 2, 1]$ conserva la clase totalmente no negativa, podemos reducir todos los casos de G_A a tres: $\{(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1)\}$, $\{(1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)\}$ y $\{(1, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 1)\}$. Estudiaremos el primer caso, mientras que el análisis de los otros dos casos es análogo. Supongamos en primer lugar que A cumple la C-condición. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & a_{24} \\ a_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

y cuyo grafo asociado G_A es



Consideramos la C^*-completación de A

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{24}a_{43} & a_{12}a_{24} \\ a_{24}a_{43}a_{31} & 1 & a_{24}a_{43} & a_{24} \\ a_{31} & 1/a_{24}a_{43} & 1 & 1/a_{43} \\ a_{43}a_{31} & 1/a_{24} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

Todos los menores de la submatriz $A_c[\{2,3,4\}]$ son nulos, por lo que dicha submatriz es TNN. Observamos también que por la C-condición el siguiente menor,

$$\det A_c[\{1,2\}] = 1 - a_{12}a_{24}a_{43}a_{31},$$

es no negativo, y por tanto $A_c[\{1,2\}]$ es también una matriz TNN. Ahora, aplicando el teorema 3.2.2 sobre la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & x_{14} \\ a_{24}a_{43}a_{31} & 1 & a_{24}a_{43} & a_{24} \\ x_{31} & 1/a_{24}a_{43} & 1 & 1/a_{43} \\ x_{41} & 1/a_{24} & a_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

obtenemos una completación TNN, B_c de B, que coincide con la C^*-completación. Por tanto, A_c es una completación TNN de A.
Para demostrar que la C-condición es necesaria, supongamos que

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 1 & c_{23} & a_{24} \\ a_{31} & c_{32} & 1 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

es una completación TNN de A. Combinando las siguientes desigualdades,

$$\det A_c[\{1,2\}] = 1 - a_{12}c_{21} \geq 0$$

$$\det A_c[\{2,3\}|\{1,4\}] = c_{21}c_{34} - a_{24}a_{31} \geq 0$$

$$\det A_c[\{3,4\}] = 1 - a_{43}c_{34} \geq 0$$

obtenemos $a_{12}a_{23}a_{34}a_{31} \leq 1$ como queríamos demostrar. □

Si algún elemento especificado es nulo el resultado anterior, en general, no es cierto como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.6 *Consideramos la matriz,*

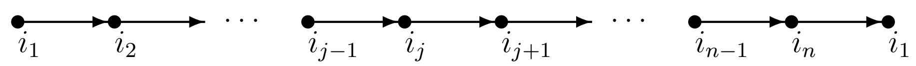
$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & a_{14} \\ x_{21} & 1 & 0 & x_{24} \\ a_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & a_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

con todos los elementos a_{ij} positivos, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado, y que verifica la C-condición.
A no tiene completación TNN ya que $\det A[\{1,2\}|\{1,3\}] \geq 0$ *si y sólo si* $x_{13} = 0$ *o* $x_{21} = 0$. *Sin embargo, si* $x_{13} = 0$ *entonces* $\det A[\{1,3\}|\{3,4\}] = -a_{14} < 0$, *y por otra parte, si* $x_{21} = 0$ *entonces* $\det A[\{2,3\}|\{1,2\}] = -a_{31} < 0$.

Podemos extender el resultado anterior de la siguiente forma.

Teorema 4.3.3 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{j-1}, i_j), (i_j, i_{j+1}), \dots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}$, es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado. Entonces existe una completación TNN A_c de A si y sólo si A cumple la C-condición.*

Demostración: El grafo G_A asociado con la matriz A puede ser representado de la siguiente forma,



con $i_1 = 1$ y $i_j = n$.
Vamos a demostrar, por inducción matemática sobre n, que si la C-condición se cumple entonces la C^*-completación es una completación TNN de A. Para $n = 4$ aplicamos el lema 4.3.2. Suponemos que el resultado es cierto para matrices de tamaño $(n-1) \times (n-1)$.
Sea $\overline{A}$ una nueva matriz parcial TNN obtenida al reemplazar $x_{i_{j-1},i_{j+1}}$ por $c_{i_{j-1},i_{j+1}} = a_{i_{j-1},i_j} a_{i_j,i_{j+1}}$. Ahora, $\overline{A}_{n-1} = \overline{A}[\{1, 2, \dots, n-1\}]$ es una matriz parcial TNN que satisface la C-condición y cuyo grafo asociado es un ciclo no monótonamente etiquetado. Entonces, por la hipótesis de la inducción, la C^*-completación $\overline{A}_{n-1_c}$ de $\overline{A}_{n-1}$ es una completación TNN de $\overline{A}_{n-1}$ y por tanto de $A[\{1, 2, \dots, n-1\}]$.
Si $i_{j-1} \neq n-1$ y $i_{j+1} \neq n-1$ reemplazamos $x_{n-1,n}$ por $c_{n-1,n} = a_{i_{j-1},i_j}/c_{i_{j-1},n-1}$ y $x_{n,n-1}$ por $c_{n,n-1} = a_{i_j,i_{j+1}}/c_{n-1,i_{j+1}}$.
Al reemplazar $\overline{A}_{n-1}$ y $\overline{A}[\{n-1, n\}]$ por sus completaciones correspondientes,

tenemos la nueva matriz parcial B_1, con la siguiente forma,

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{n-1_c}[\{1,2,\ldots,n-2\}] & \overline{A}_{n-1_c}[\{1,2,\ldots,n-2\}|\{n-1\}] & X_1 \\ \bar{A}_{n-1_c}[\{n-1\}|\{1,2,\ldots,n-2\}] & 1 & c_{n-1,n} \\ Y_1 & c_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$X_1 = [x_{1n}, x_{2n}, \ldots, a_{i_{j-1},i_j}, \ldots, x_{n-2,n}]^T$$

y

$$Y_1 = [x_{n1}, x_{n2}, \ldots, a_{i_j,i_{j+1}}, \ldots, x_{n,n-2}].$$

Sea h el índice tal que $n-1 = i_h$. Este índice tiene dos posibilidades: $h > j+1$ ó $h < j-1$. En los dos casos, por la C^*-completación, tenemos $\det \overline{A}_{n-1}[\{n-1, n\}] = 1 - a_{i_{j-1},i_j} a_{i_j,i_{j-1}} / c_{i_{j-1},n-1} c_{n-1,i_{j+1}} = 0$. Por lo tanto, la siguiente matriz B,

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_{n-1_c}[\{1,2,\ldots,n-2\}] & \overline{A}_{n-1_c}[\{1,2,\ldots,n-2\}|\{n-1\}] & X \\ \overline{A}_{n-1_c}[\{n-1\}|\{1,2,\ldots,n-2\}] & 1 & c_{n-1,n} \\ Y & c_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

donde X y Y son matrices completamente no especificadas, es una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es un grafo 1-cordal monótonamente etiquetado. Entonces, aplicando el teorema 3.2.2, obtenemos una completación TNN, B_c de B, que es también una completación de A. Nos queda por demostrar, que B_c coincide con la C^*-completación de B. Dado k un elemento de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $i_k \neq i_{j-1}$ y $i_h = n-1$, analizamos los siguientes casos relacionados con el orden de los vértices.

i) $i_1 \ldots i_k \ldots i_h \ldots i_{j-1} i_j \ldots i_n$

ii) $i_1 \ldots i_k \ldots i_{j-1} i_j \ldots i_h \ldots i_n$

iii) $i_1 \dots i_{j-1} i_j \dots i_k \dots i_h \dots i_n$

iv) $i_1 \dots i_h \dots i_k \dots i_{j-1} i_j \dots i_n$

v) $i_1 \dots i_h \dots i_{j-1} i_j \dots i_k \dots i_n$

vi) $i_1 \dots i_{j-1} i_j \dots i_h \dots i_k \dots i_n$

Estudiaremos el caso i). Los demás son análogos.
Por una parte, aplicando el teorema 3.2.2, obtenemos $c_{i_k,i_j} = c_{i_k,i_h} a_{i_{j-1},i_j} / c_{i_{j-1},i_h}$.
Por otra parte, de la C^*-completación tenemos las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} c_{i_k,i_j} &= a_{i_k,i_{k+1}} a_{i_{k+1},i_{k+2}} \dots a_{i_h,i_{h+1}} \dots a_{i_{j-1},i_j}, \\ c_{i_{j-1},i_m} &= 1/a_{i_h,i_{h+1}} a_{i_{h+1},i_{h+2}} \dots a_{i_{j-2},i_{j-1}}, \\ c_{i_k,i_m} &= a_{i_k,i_{k+1}} a_{i_{k+1},i_{k+2}} \dots a_{i_{h-1},i_h}. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que el valor de c_{i_k,i_j} es el mismo aplicando el teorema 3.2.2 que la C^*-completación. De la misma manera para los elementos c_{i_j,i_k}, obtenemos los mismos valores cuando aplicamos el teorema 3.2.2 y la C^*-completación. Observamos que, si $i_{j-1} = n-1$ (respectivamente $i_{j+1} = n-1$), entonces realizamos una demostración similar teniendo en cuenta que la positión $(n-1, n)$ (respectivamente $(n, n-1)$) está especificada.
Ahora, para demostrar que C-condición es una condición necesaria volvemos a utilizar la inducción sobre n. Para $n = 4$ aplicamos el lema 4.3.2. Supongamos que la C-condición es necesaria para matrices de tamaño $(n-1)\times(n-1)$. Sea $A_c = (c_{ij})$ una completación TNN de A. Ya que $A_c[\{1, 2, \dots, n-1\}]$ es una matriz TNN, entonces por hipótesis de inducción tenemos,

$$a_{i_1,i_2} a_{i_2,i_3} \cdots a_{i_{j-2},i_{j-1}} c_{i_{j-1},i_{j+1}} a_{i_{j+1},i_{j+2}} \cdots a_{i_{n-1},i_n} a_{i_n,i_1} \leq 1.$$

Por otra parte, $\det A_c[\{i_{j-1}, i_j\}|\{i_{j+1}, i_j\}] \geq 0$, por lo que

$$c_{i_{j-1},i_{j+1}} \geq a_{i_{j-1},i_j} a_{i_j,i_{j+1}}.$$

A partir de estas desigualdades obtenemos la C-condición. $\square$

4.3.3. Caminos totalmente especificados

Abordamos a continuación el problema de completación de las matrices parciales totalmente no negativas cuyos grafos asociados son caminos totalmente especificados. Concretamente, en esta parte cerramos el problema para el caso de grafos monótonamente etiquetados con elementos especificados no nulos, siendo afirmativa en todo caso la respuesta para matrices de tamaño $n \times n$, $n = 3$. Sin embargo, hace falta una condición necesaria y suficiente para el caso $n \geq 4$. Por otra parte, en el caso de grafos no monótonamente etiquetados, obtenemos una condición necesaria y suficiente para las matrices parciales totalmente no negativas de tamaño 3×3 con elementos especificados no nulos, aunque dicha condición es sólo suficiente en el caso general.

El problema de completación de matrices parciales TNN, cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado, tiene en general respuesta negativa, tanto en el caso de monótona como no monótonamente etiquetado, como podemos ver en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.3.7 *La matriz*

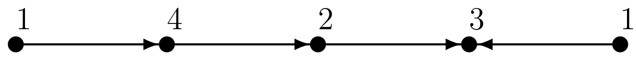
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & 7 \\ x_{21} & 1 & 2 & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & 3 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado monótonamente etiquetado. Para que el determinante de la submatriz $A[\{1,2\}|\{2,4\}]$ sea no negativo, es necesario que x_{24} sea mayor o igual que 7. Sin embargo, $\det A[\{2,3\}|\{3,4\}] \geq 0$ *implica que $x_{24} \leq 6$, por tanto A no tiene completación TNN.*

Ejemplo 4.3.8 *Sea la matriz parcial* TNN,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 1 & 1 \\ x_{21} & 1 & 1 & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & 4 & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es el camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado,



G_A

Se comprueba sin dificultad que $\det A[\{1,2\}|\{3,4\}] \geq 0$ *y* $\det A[\{2,4\}] \geq 0$ *si* $x_{24} \geq 1$ *y* $x_{24} \leq 1/4$, *respectivamente. Por tanto, es imposible completar* A *de manera que obtengamos una completación* TNN.

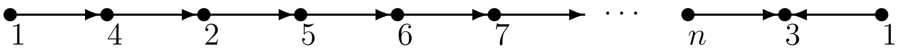
A partir de los dos ejemplos anteriores podemos obtener sendas matrices parciales TNN de tamaño $n \times n$, cuyos grafos asociados sean caminos totalmente especificados monótona y no monótonamente etiquetados respectivamente que no posean completación TNN.

Ejemplo 4.3.9 *La matriz parcial* TNN

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & \cdots & x_{1,n-2} & x_{1,n-1} & 2 \\ x_{21} & 1 & 1 & \cdots & x_{2,n-2} & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & \cdots & x_{3,n-2} & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2,1} & x_{n-2,2} & x_{n-2,3} & \cdots & 1 & 1 & x_{n-2,n} \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & x_{n-1,n-2} & 1 & 1 \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{n,n-2} & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}, n \geq 4,$$

cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado monótonamente etiquetado no posee completación TNN ya que, por una parte, el determinante de la submatriz $A[\{1,2\}|\{2,n\}]$ debe ser no negativo, por lo que es necesario que x_{2n} sea mayor o igual que 2. *Además de* $\det A[\{n-2,n-1\}|\{n-1,n\}] \geq 0$ *se deduce que $x_{n-2,n} \leq 1$. Por lo tanto, $x_{n-2,n} < x_{2n}$. Por otra parte, para que las submatrices $A[\{i,i+1\}|\{i+1,n\}]$, $i = 2,3,\ldots,n-3$, tengan determinantes no negativos es necesario que $x_{2n} \leq x_{3n} \leq \ldots \leq x_{n-2,n}$. Por lo tanto A no tiene completación TNN.*

Ejemplo 4.3.10 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es el camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado*



con $a_{42} = 4$ y el resto de elementos especificados son 1´s. Vamos a suponer que A tiene cumpletación $A_c = (c_{ij})$ totalmente no negativa.
Si $n = 5$, es fácil observar que a partir de las submatrices $A_c[\{1,4\}|\{3,4\}]$ y $A_c[\{2,4\}|\{2,5\}]$ obtenemos $c_{43} \leq 1$ y $c_{45} \geq 4$ respectivamente. En cambio, a partir del menor $\det A_c[\{4,5\}|\{3,5\}] \geq 0$ *obtenemos $c_{43} \geq c_{45}$ con lo que es imposible y por tanto no existe la completación deseada.*
Si $n > 5$, a partir de las submatrices $A_c[\{1,4\}|\{3,4\}]$, $A_c[\{2,4\}|\{2,5\}]$ y $A_c[\{n-1,n\}|\{3,n\}]$ obtenemos $c_{43} \leq 1$, $c_{45} \geq 4$ y $c_{n-1,3} \geq 1$ respectivamente. Por otra parte, combinar las desigualdades $\det A_c[\{i-1,i\}|\{5,i\}] \geq 0$, *$i = 6,7,\ldots,n-1$ implica que $c_{n-1,5} \leq c_{n-2,5} \leq \cdots \leq c_{75} \leq c_{65} \leq 1$, es decir, $c_{n-1,5} \leq 1$. Teniendo en cuenta los valores conseguidos observamos que el menor* $\det A_c[\{4,n-1\}|\{3,5\}]$ *es siempre negative y por tanto A no tiene completación TNN.*

Estos últimos ejemplos nos permiten establecer el siguiente resultado.

Proposición 4.3.4 *Para cualquier $n \geq 4$ existe una matriz parcial TNN, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado, que no tiene completación TNN.*

Nos centramos en primer lugar en el caso de matrices parciales TNN cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado, monótonamente etiquetado. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la matriz A tiene la siguiente forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1,n-1} & a_{1n} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & \cdots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Como vemos en la siguiente proposición, para matrices de tamaño 3×3 siempre existe la completación deseada.

Proposición 4.3.5 *Sea A una matriz parcial TNN, de tamaño 3×3, cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado monótonamente etiquetado. Entonces A tiene completación TNN.*
Demostración: *La matriz A tiene la forma*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ x_{21} & 1 & a_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Es fácil observar que la completación nula A_0 es una completación TNN de A. $\square$

En el siguiente resultado analizamos la existencia de completaciones TNN en el caso de que existan elementos nulos fuera de la diagonal.

Proposición 4.3.6 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado monótonamente etiquetado. Si A contiene elementos especificados nulos entonces A tiene completación TNN si y sólo si $a_{1n} = 0$.*

Demostración: Supongamos que la posición $(1, n)$ contiene el elemento nulo, $a_{1n} = 0$. Es fácil ver que A_0 es una completación TNN, y por tanto, obtenemos la suficiencia de la condición.
Supongamos a continuación que existe completación TNN, $A_c = (c_{ij})$. Si a_{1n} fuera no nulo, tendríamos dos casos:

1) $a_{12} = 0$ ó $a_{n-1,n} = 0$. En este caso tenemos respectivamente $\det A_c[\{1, 2\}|\{2, n\}] < 0$ y $\det A_c[\{1, n-1\}|\{n-1, n\}] < 0$.

2) $a_{12}, a_{n-1,n} \neq 0$. Para que $A_c[\{1, j\}|\{j, n\}]$ tenga el determinante no negativo es necesario que $c_{1j}c_{jn} \geq a_{1n} > 0$ por lo que, $c_{jn} \neq 0$ para $j = 2, 3, \ldots, n-2$. Sin embargo, por la hipótesis de la existencia de elementos nulos, existe algún elemento $a_{k,k+1} = 0$ con $k \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$, y por tanto $\det A_c[\{k, k+1\}|\{k+1, n\}] = -c_{kn} < 0$.

En los dos casos incurrimos en contradicción con el hecho de que A_c es totalmente no negativa, por lo que $a_{1n} = 0$. □

A fin de obtener una caracterización de la existencia de completación TNN en el caso que nos ocupa, introducimos la siguiente definición.

Definición 4.3.3 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz parcial cuyo grafo asociado, $G_A = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_1, i_n)\})$, es un camino totalmente especificado. Se dice que A cumple la C_1-condición si se verifica $\dfrac{a_{i_1,i_2}a_{i_2,i_3}\cdots a_{i_{n-1},i_n}}{a_{i_2,i_2}a_{i_3,i_3}\cdots a_{i_{n-1},i_{n-1}}} \geq a_{i_1,i_n}$.*

Teorema 4.3.4 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado monótonamente* *etiquetado. Entonces A tiene completación TNN si y sólo si cumple la C_1-condición.*

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1,n-1} & a_{1n} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & \cdots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Si $a_{1n} = 0$ aplicamos la proposición 4.3.6. Si $a_{1n} \neq 0$, la C_1-condición nos permite afirmar que $a_{j,j+1} \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Sea $\overline{A}$ la matriz obtenida de A al reemplazar x_{n1} por $\frac{1}{a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}}$ y $x_{i+1,i}$ por $\frac{1}{a_{i,i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Es fácil observar que $\overline{A}$ es una matriz parcial TNN, cuyo grafo asociado es un ciclo no dirigido monótonamente etiquetado, que cumple la condición SS-diagonal, por lo que, por teorema 4.2.3, $\overline{A}$ tiene completación TNN que es también completación TNN de A.

Demostramos ahora que la condición es necesaria. Supongamos que tenemos la siguiente completación TNN,

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1,n-1} & a_{1n} \\ c_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & 1 & \cdots & c_{3,n-1} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & c_{n-1,3} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos obtener las siguientes desigualdades:

(1) $\det A[\{1,2\}|\{2,n\}] = a_{12}c_{2n} - a_{1n} \geq 0$

(2) $\det A[\{k, k+1\}|\{k+1, n\}] = a_{k,k+1}c_{k+1,n} - c_{kn} \geq 0$, $k = 2, 3, \ldots, n-3$

(3) $\det A[\{n-2, n-1\}|\{n-1, n\}] = a_{n-2,n-1}a_{n-1,n} - c_{n-2,n} \geq 0$

A partir de la tercera desigualdad obtenemos $a_{n-2,n-1}a_{n-1,n} \geq c_{n-2,n}$, que cuando $k = n-3$, la desigualdad (2) nos permite deducir

$$a_{n-3,n-2}a_{n-2,n-1}a_{n-1,n} \geq c_{n-3,n}.$$

Combinando esta última desigualdad con la (2) cuando $k = n-4$ obtenemos

$$a_{n-4,n-3}a_{n-3,n-2}a_{n-2,n-1}a_{n-1,n} \geq c_{n-4,n}.$$

Así sucesivamente, de forma análoga, combinamos cada desigualdad obtenida

$$a_{l,l+1}a_{l+1,l+2}\ldots a_{n-1,n} \geq c_{ln}, \quad l = n-4, n-5, \ldots, 3$$

con la (2) cuando $k = l-1$ hasta llegar a concluir con

$$a_{23}a_{34}\ldots a_{n-1,n} \geq c_{2n}$$

que al combinar con la (1) obtenemos la C_1-condición, y por lo tanto, la necesidad de la misma. □

Para el caso de caminos totalmente especificados no monótonamente etiquetados, empezamos confirmando la existencia de la completación deseada en el caso de matrices parciales de tamaño 3×3.

Proposición 4.3.7 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño 3×3, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado. Entonces, A tiene completación TNN.*

Demostración: A partir de que la semejanza por la matriz permutación $P = [n, n-1, \ldots, 1]$ conserva la total no negatividad, ver proposicón 3.2.1, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la matriz A tiene una de las siguientes formas:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ x_{21} & 1 & x_{23} \\ x_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Elegimos las siguientes completaciones,

$$A_{1c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}/a_{23} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{21}/a_{23} & 1/a_{23} & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad A_{2c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1/a_{12} & 1 & 1/a_{32} \\ a_{32}/a_{12} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que A_{1c}, $A_{1c}[\{1,2\}|\{2,3\}]$, $A_{1c}[\{1,3\}|\{2,3\}]$, $A_{1c}[\{2,3\}|\{1,2\}]$, $A_{1c}[\{2,3\}|\{1,3\}]$ y $A_{1c}[\{2,3\}]$ tienen determinante nulo, mientras que las submatrices $A_{1c}[\{1,\ 2\}]$, $A_{1c}[\{1,2\}|\{1,3\}]$, $A_{1c}[\{1,3\}|\{1,2\}]$ y $A_{1c}[\{1,3\}]$ tienen determinante no negativo siendo A una matriz parcial TNN. Por lo tanto A_{1c} es una completación TNN. De manera análoga, podemos comprobar que A_{2c} es también una completación TNN. □

Cuando la matriz parcial contiene algún elemento especificado con valor nulo, en general el resultado anterior no es cierto, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.11 *Consideramos la matriz parcial TNN,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix},$$

con $a_{23} = a_{21} = 0$ y $a_{13} \neq 0$. El grafo asociado es un camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado. Sin embargo, para cualquier completación A_c, $\det A_c[\{1,2\}|\{2,3\}] < 0$ y por tanto, A no tiene completación TNN.

Analizamos a continuación la validez de la proposición 4.3.7 en el caso de admitir elementos especificados nulos. Estudiamos con detalle el primer caso, matriz A_1, siendo el otro caso análogo.

(1) A_1 tiene un único elemento especificado nulo: si $a_{13} = 0$ ó $a_{21} = 0$, vemos que A_{1c} es una completación TNN de A_1.

(2) A_1 contiene exactamente dos elementos especificados nulos: si $a_{13} = a_{21} = 0$ entonces A_{1_0} es una completación TNN de A_1, mientras que si $a_{23} = a_{21} = 0$, hemos visto, ejemplo 4.3.11, que A_1 no tiene completación TNN.

(3) Si todos los elementos especificados son nulos (excepto los elementos diagonales), entonces A_{1_0} es la completación deseada.

Como hemos comprobado, para el caso de caminos totalmente especificados monótonamente etiquetados, la C_1-condición es necesaria y suficiente. Sin embargo, la proposición 4.3.7 no se puede generalizar a matrices de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, como ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.12 *Consideramos la matriz A del ejemplo 4.3.8.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 1 & 1 \\ x_{21} & 1 & 1 & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & 4 & x_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

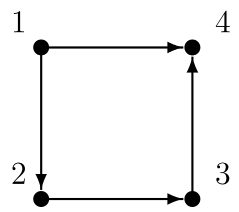
A no tiene completación TNN, aunque se comprueba sin dificultad que A es una matriz parcial TNN que satisface la C_1-condición.

Observamos en las matrices A_1 y A_2 de la proposición 4.3.7, que para ser matrices parciales totalmente no negativas es necesario que se cumpla $a_{23} \geq a_{21}a_{13}$ y $a_{12} \geq a_{13}a_{32}$ respectivamente, por lo que nos lleva a introducir una nueva condición.

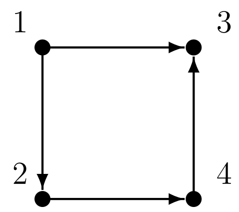
Definición 4.3.4 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz parcial cuyo grafo asociado, $G_A = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_1, i_n)\})$, es un camino totalmente especificado. Se dice que A cumple la C_2-condición si se verifica la desigualdad $\dfrac{a_{i_1,i_2} a_{i_2,i_3} \ldots a_{i_{n-1},i_n}}{a_{i_2,i_2} a_{i_3,i_3} \ldots a_{i_{n-1},i_{n-1}}} \leq a_{i_1,i_n}$.*

La C_2-condición es una condición suficiente para la existencia de completaciones totalmente no negativas, de una matriz parcial TNN de tamaño 4×4, con elementos especificados no nulos.

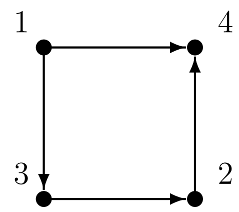
A continuación mostramos todos los caminos totalmente especificados posibles con un conjunto de cuatro vértices.



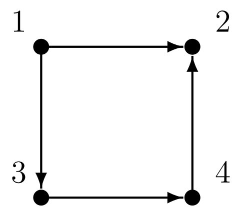
G_1



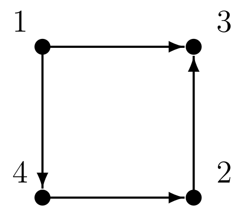
G_2



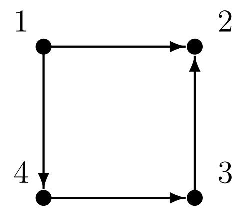
G_3



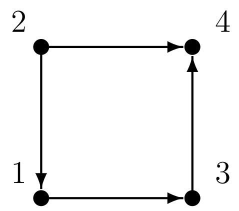
G_4



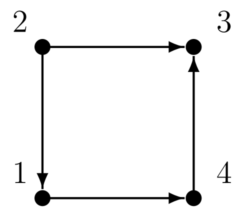
G_5



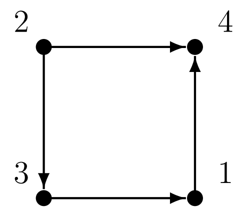
G_6



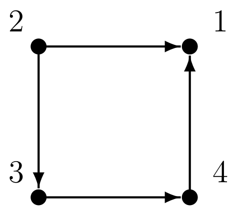
G_7



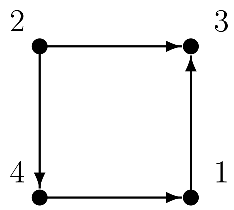
G_8



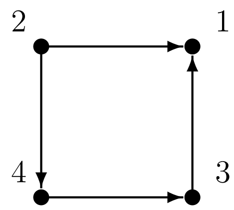
G_9



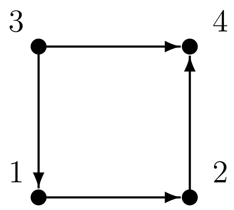
G_{10}



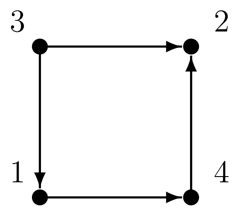
G_{11}



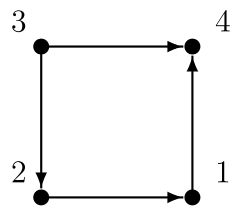
G_{12}



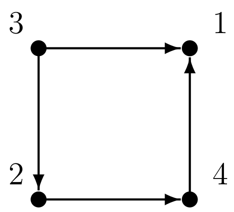
G_{13}



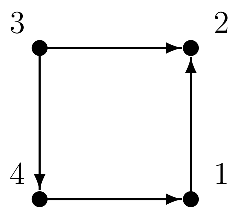
G_{14}



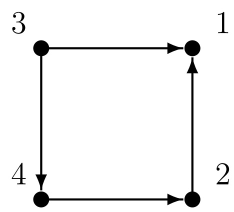
G_{15}



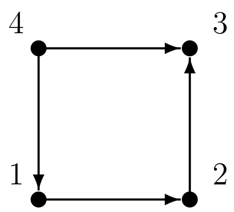
G_{16}



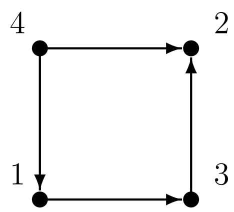
G_{17}



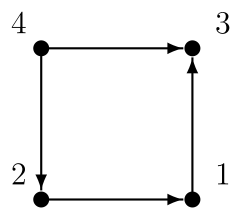
G_{18}



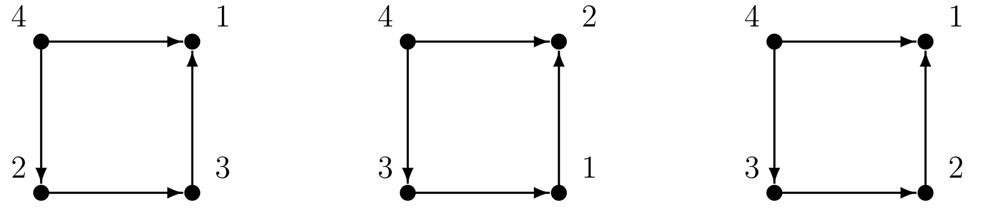
G_{19}



G_{20}



G_{21}



G_{22} G_{23} G_{24}

El siguiente resultado hace referencia únicamente a los caminos totalmente especificados no monótonamente etiquetados.

Proposición 4.3.8 *Toda matriz parcial TNN, de tamaño 4×4, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado tiene completación TNN si cumple la C_2-condición.*

Demostración: Tendiendo en cuenta la semejanza por la matriz permutación $P = [n, n-1, \ldots, 1]$, ver proposición 3.2.1, los casos a analizar se reducen a las matrices asociadas a G_i, $i = 2, 3, \ldots, 12$. Vamos a estudiar el grafo G_2, mientras que el resto se hace de forma análoga. Podemos suponer que la matriz asociada a G_2 tiene la forma

$$A_{G_2} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & a_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que la completación

$$A_{C_2} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{12}a_{24} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{13}/a_{12} & a_{24} \\ 1/a_{13} & a_{12}/a_{13} & 1 & a_{12}a_{24}/a_{13} \\ a_{43}/a_{13} & a_{12}a_{43}/a_{13} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

es TNN. Podemos observar, por un lado, que las filas de la submatriz $A_{C_2}[\{1,2,3\}]$ son linealmente dependientes dos a dos, por lo que $A_{C_2}[\{1,2,3\}]$ es una submatriz TNN. Por otro lado, $\det A_{C_2}[\{3,4\}]$ es no negativo por la C_2-condición.
Sea $\overline{A}$ una nueva matriz parcial TNN

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & x_{14} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{13}/a_{12} & x_{24} \\ 1/a_{13} & a_{12}/a_{13} & 1 & a_{12}a_{24}/a_{13} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por el teorema 3.2.1, A_{C_2} es una completación TNN.
Damos a continuación completaciones TNN para el resto de casos a estudiar. Su comprobación se realiza de forma análoga al caso A_{G_2}.

$$A_{G_2} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & a_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{14} = a_{12}a_{24} & & \\ x_{21} = \frac{1}{a_{12}} & x_{23} = \frac{a_{13}}{a_{12}} & \\ x_{31} = \frac{1}{a_{13}} & x_{32} = \frac{a_{12}}{a_{13}} & x_{34} = \frac{a_{12}a_{24}}{a_{13}} \\ x_{41} = \frac{a_{43}}{a_{13}} & x_{42} = \frac{a_{12}a_{43}}{a_{13}} & \end{array}$$

$$A_{G_3} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & a_{24} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{12} = \frac{a_{14}}{a_{24}} & & \\ x_{21} = \frac{a_{24}}{a_{14}} & x_{23} = \frac{a_{24}a_{13}}{a_{14}} & \\ x_{31} = \frac{a_{32}a_{24}}{a_{14}} & x_{34} = \frac{a_{14}}{a_{13}} & \\ x_{41} = \frac{a_{13}a_{32}a_{24}}{a_{14}^2} & x_{42} = \frac{a_{13}a_{32}}{a_{14}} & x_{43} = \frac{a_{13}}{a_{14}} \end{array}$$

$$A_{G_4} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & a_{34} \\ x_{41} & a_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{14} = a_{13}a_{34} & & \\ x_{21} = \frac{1}{a_{12}} & x_{23} = \frac{a_{13}}{a_{12}} & x_{24} = \frac{a_{13}a_{34}}{a_{12}} \\ x_{31} = \frac{1}{a_{13}} & x_{32} = \frac{a_{12}}{a_{13}} & \\ x_{41} = a_{42}a_{12} & x_{43} = \frac{a_{13}a_{42}}{a_{12}} & \end{array}$$

$$A_{G_5} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & a_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{12} = \frac{a_{13}}{a_{32}} & & \\ x_{21} = \frac{a_{32}}{a_{13}} & x_{24} = \frac{a_{23}a_{14}}{a_{13}} & \\ x_{31} = \frac{1}{a_{13}} & x_{32} = \frac{1}{a_{23}} & x_{34} = \frac{a_{14}}{a_{13}} \\ x_{41} = \frac{a_{42}a_{23}}{a_{23}} & x_{43} = a_{42}a_{23} & \end{array}$$

$$A_{G_6} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & a_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{13} = \frac{a_{12}}{a_{23}} & & \\ x_{21} = \frac{1}{a_{12}} & x_{23} = \frac{1}{a_{32}} & x_{24} = \frac{a_{14}}{a_{12}} \\ x_{31} = a_{32}a_{12} & x_{34} = \frac{a_{41}a_{23}}{a_{12}} & \\ x_{41} = \frac{a_{43}a_{32}}{a_{12}} & x_{42} = a_{43}a_{32} & \end{array}$$

$$A_{G_7} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} & x_{14} \\ a_{21} & 1 & x_{23} & a_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & a_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{12} = \frac{a_{13}a_{34}}{a_{24}} & x_{14} = a_{13}a_{34} & \\ x_{23} = \frac{a_{24}}{a_{34}} & & \\ x_{31} = \frac{a_{21}a_{34}}{a_{24}} & x_{32} = \frac{a_{34}}{a_{24}} & \\ x_{41} = \frac{a_{21}}{a_{24}} & x_{42} = \frac{1}{a_{24}} & x_{43} = \frac{1}{a_{34}} \end{array}$$

$$A_{G_8} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{12} = \frac{a_{14}a_{43}}{a_{23}} & x_{13} = a_{14}a_{43} & \\ x_{24} = \frac{a_{23}}{a_{43}} & & \\ x_{31} = \frac{a_{21}}{a_{23}} & x_{32} = \frac{1}{a_{23}} & x_{34} = \frac{1}{a_{43}} \\ x_{41} = \frac{a_{21}a_{43}}{a_{23}} & x_{42} = \frac{a_{43}}{a_{23}} & \end{array}$$

$$A_{G_9} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & a_{14} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{12} = \frac{a_{14}}{a_{24}} & x_{13} = \frac{a_{14}a_{23}}{a_{24}} & \\ x_{21} = a_{23}a_{31} & & \\ x_{32} = \frac{1}{a_{23}} & x_{34} = \frac{a_{24}}{a_{23}} & \\ x_{41} = \frac{a_{23}a_{31}}{a_{24}} & x_{42} = \frac{1}{a_{24}} & x_{43} = \frac{a_{23}}{a_{24}} \end{array}$$

$$A_{G_{10}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{12} = \frac{1}{a_{21}} & x_{13} = \frac{a_{23}}{a_{21}} & x_{14} = \frac{a_{23}a_{34}}{a_{21}} \\ x_{24} = a_{23}a_{43} & & \\ x_{31} = a_{34}a_{41} & x_{32} = \frac{a_{34}a_{41}}{a_{21}} & \\ x_{42} = \frac{a_{41}}{a_{21}} & x_{43} = \frac{1}{a_{34}} & \end{array}$$

$$A_{G_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ a_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{12} = \frac{a_{13}}{a_{23}} & x_{14} = \frac{a_{13}a_{24}}{a_{23}} & \\ x_{21} = a_{24}a_{41} & & \\ x_{31} = \frac{a_{24}a_{41}}{a_{23}} & x_{32} = \frac{1}{a_{23}} & x_{34} = \frac{a_{24}}{a_{23}} \\ x_{42} = \frac{1}{a_{24}} & x_{43} = \frac{a_{23}}{a_{24}} & \end{array}$$

$$A_{G_{12}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ a_{21} & 1 & x_{23} & a_{24} \\ a_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{lll} x_{12} = \frac{1}{a_{21}} & x_{13} = \frac{a_{24}a_{43}}{a_{21}} & x_{14} = \frac{a_{24}}{a_{21}} \\ x_{23} = a_{24}a_{43} & & \\ x_{32} = \frac{a_{31}}{a_{21}} & x_{34} = \frac{1}{a_{43}} & \\ x_{41} = a_{43}a_{31} & x_{42} = \frac{a_{43}a_{31}}{a_{21}} & \end{array}$$

□

Sin embargo, en el caso de matrices parciales de tamaño 4×4, la C_2-condición no es necesaria para la existencia de completaciones totalmente no negativas. Lo ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.13 *Consideramos la matriz parcial TNN*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 1 & 1 \\ x_{21} & 1 & x_{23} & 1 \\ x_{31} & 2 & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado. La siguiente matriz A_c es una completación TNN de A,

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, A no cumple la C_2-condición ya que $a_{13}a_{32}a_{24} = 2 > a_{14} = 1$.

Podemos generalizar el ejemplo anterior para matrices de tamaño $n \times n$, $n > 4$.

Ejemplo 4.3.14 *Consideramos la matriz parcial* TNN*,* $B = (b_{ij})$*, de tamaño* $n \times n$*, tal que* $b_{1n} = 1$*, la submatriz* $B[\{1,2,3,4\}]$ *es la matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 1 & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & 1 \\ x_{31} & 2 & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

y la submatriz $B[\{4,5,\ldots,n\}]$ *tiene la forma*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{43} & \cdots & x_{4,n-1} & x_{4n} \\ x_{54} & 1 & 1 & \cdots & x_{5,n-1} & x_{5n} \\ x_{64} & x_{65} & 1 & \cdots & x_{6,n-1} & x_{6n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,4} & x_{n-1,5} & x_{n-1,6} & \cdots & 1 & 1 \\ x_{n4} & x_{n5} & x_{n6} & \cdots & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

y el resto de elementos son no especificados.
Observamos que B *es una matriz parcial* TNN *cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado. Podemos ver también que dicha matriz no cumple la* C_2*-condición ya que* $a_{13}a_{32}a_{24}a_{45}a_{56}\ldots a_{n-1,n} = 2 > a_{1n} = 1$*. Vamos a demostrar ahora que* B *tiene completación* TNN*.*
Sea $\overline{B} = (\bar{b}_{ij})$ *una nueva matriz parcial* TNN*, siendo,*

$$\bar{b}_{ij} = \begin{cases} no \quad especificado & si \quad i = 1, j = n \\ 1 & si \quad i = 1, j = 4 \\ b_{ij} & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

La matriz parcial $\overline{\overline{B}}$ *resultante de sustituir en* $\overline{B}$*,* $\overline{B}[\{1,2,3,4\}]$ *por la matriz*

A_c *del ejemplo 4.3.13 y* $\overline{B}[\{4,5,\ldots,n\}]$ *por la matriz* C,

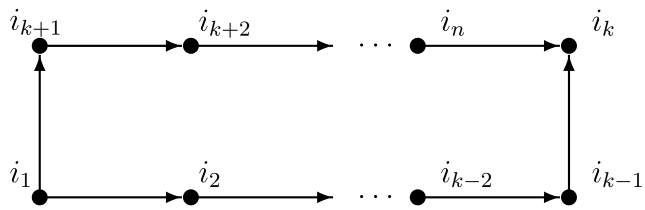
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

es una matriz parcial TNN. *Por el teorema 3.2.1 y ser* $G_{\overline{\overline{B}}}$ 1-*cordal, existe* $\overline{\overline{B}}_c$ *completación* TNN. *Es sencillo comprobar que* $\overline{\overline{B}}_c$ *es también una completación de la matriz* B.

4.3.4. Doble-caminos

Analizamos a continuación el caso de doble-caminos generalizando las ideas vistas anteriormente, puesto que un doble-camino cuando uno de los dos caminos tiene un único arco no es más que un camino totalmente especificado, concepto al que dedicamos la subsección anterior.

Recordamos (capítulo 2) que un doble-camino es un grafo dirigido formado por dos caminos totalmente disjuntos cuyos extremos inicial y final coinciden.



Como sabemos, según proposición 3.2.1, la total no negatividad no se mantiene por la semejanza de permutación, por lo que como en otras ocasiones, distinguiremos entre grafos monótonamente etiquetados y no monótonamente etiquetados, concretamente entre doble-caminos con uno de los caminos monótonamente etiquetado y el otro no y los doble-caminos con dos caminos no monótonamente etiquetados.

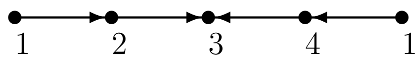
Teniendo en cuenta los resultados de las proposiciones 4.3.5 y 4.3.7 podemos afirmar que toda matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño 3×3, cuyo grafo asociado es un doble-camino tiene completación totalmente no negativa.

En general, una matriz parcial totalmente no negativa cuyo grafo asociado es del tipo antes comentado no tiene completación totalmente no negativa, como podemos ver en los siguiente ejemplos.

Ejemplo 4.3.15 *Consideramos la siguiente matriz parcial* TNN,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & x_{13} & 0{,}5 \\ x_{21} & 1 & 0{,}5 & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble-camino (uno es monótonamente etiquetado y el otro no).

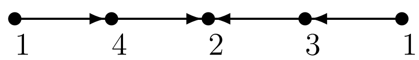


Al exigir $\det A[\{1,2\}|\{2,4\}] \geq 0$ *y* $\det A[\{2,4\}|\{3,4\}] \geq 0$ *obtenemos* $x_{24} \geq 1$ *y* $x_{24} \leq 0{,}5$ *respectivamente, lo cual es una contradicción. Por tanto,* A *no tiene completación* TNN.

Ejemplo 4.3.16 *Consideramos la siguiente matriz parcial* TNN,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 0{,}5 & 1 \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & 1 & 1 & x_{34} \\ x_{41} & 1 & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble-camino (con dos caminos no monótonamente etiquetados).



De manera análoga, para que $\det A[\{1,3\}|\{3,4\}]$ *y* $\det A[\{3,4\}|\{2,4\}]$ *sean no negativos, es necesario que* $x_{34} \geq 2$ *y* $x_{34} \leq 1$ *respectivamente. Por tanto,* A *no tiene completación* TNN.

Para matrices de tamaño $n \times n$ con $n \geq 4$ abordamos, en primer lugar, el caso de doble-camino en el que uno de los caminos es monótonamente etiquetado y el otro no lo es.

Si denotamos por P_c el producto de los valores que corresponden a los arcos de un determinado camino C, entonces podemos establecer el siguiente resultado.

Lema 4.3.3 *Sea A una matriz parcial TNN, de tamaño 4×4, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un doble-camino formado por los caminos C_1 monótonamente etiquetado, y C_2 no monótonamente etiquetado, ambos con el vértice inicial etiquetado con* 1. *Entonces, A tiene completación TNN si y sólo si $P_{c_1} \geq P_{c_2}$.*

Demostración: Consideramos los siguientes casos:

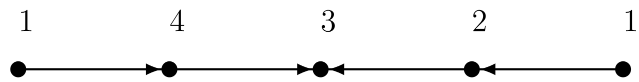
1) $C_1 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2),(2,3)\})$ y $C_2 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,4),(4,3)\})$

2) $C_1 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2),(2,3),(3,4)\})$ y $C_2 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,4)\})$

3) $C_1 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2)\})$ y $C_2 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,4),(4,3),(3,2)\})$

4) $C_1 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2)\})$ y $C_2 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,3),(3,4),(4,2)\})$

Comprobamos que la condición es suficiente en el primer caso.



G_A

Podemos suponer, como en otras ocasiones, que A tiene la forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & a_{14} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideramos la matriz

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{14}a_{43} & a_{14} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & a_{23}/a_{43} \\ 1/a_{12}a_{23} & 1/a_{23} & 1 & 1/a_{43} \\ a_{43}/a_{12}a_{23} & a_{43}/a_{23} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

A_c es una completación TNN de A, ya que:

$\det A_c[\{1,2\}] = 0$
$\det A_c[\{1,2\}|\{1,3\}] = a_{23} - \dfrac{a_{14}a_{43}}{a_{12}} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,2\}|\{1,4\}] = \dfrac{a_{23}}{a_{43}} - \dfrac{a_{14}}{a_{12}} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,2\}|\{2,3\}] = a_{12}a_{23} - a_{14}a_{43} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,2\}|\{2,4\}] = \dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{43}} - a_{14} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,2\}|\{3,4\}] = 0$

$\det A_c[\{1,3\}|\{1,2\}] = 0$
$\det A_c[\{1,3\}] = 1 - \dfrac{a_{14}a_{43}}{a_{12}a_{23}} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,3\}|\{1,4\}] = \dfrac{1}{a_{43}} - \dfrac{a_{14}}{a_{12}a_{23}} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,3\}|\{2,3\}] = a_{12} - \dfrac{a_{14}a_{43}}{a_{23}} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,3\}|\{2,4\}] = \dfrac{a_{12}}{a_{43}} - \dfrac{a_{14}}{a_{23}} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,3\}|\{3,4\}] = 0$

$\det A_c[\{1,4\}|\{1,2\}] = 0$
$\det A_c[\{1,4\}|\{1,3\}] = a_{43}(1 - \dfrac{a_{14}a_{43}}{a_{12}a_{23}}) \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,4\}] = 1 - \dfrac{a_{14}a_{43}}{a_{12}a_{23}} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,4\}|\{2,3\}] = a_{43}(a_{12} - \dfrac{a_{14}a_{43}}{a_{23}}) \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$
$\det A_c[\{1,4\}|\{2,4\}] = a_{12} - \dfrac{a_{14}a_{43}}{a_{23}} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$

$\det A_c[\{1,4\}|\{3,4\}] = 0$,
y es fácil de comprobar que el resto de menores son nulos.
En el segundo caso la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$ coincide con la C_1-condición y por el teorema 4.3.4 el resultado es cierto. Por otro lado, en los dos últimos casos la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$ es la C_2-condición y por la proposición 4.3.8 podemos comprobar que es suficiente para la existencia de completaciones TNN.
Podemos afirmar que la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$ es también necesaria comprobando el primer caso mientras que los demás casos son análogos.
Supongamos que

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & c_{13} & a_{14} \\ c_{21} & 1 & a_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 1 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

es una completación totalmente no negativa.
A partir de $\det A_c[\{1,2\}|\{2,3\}] \geq 0$ y de $\det A_c[\{1,4\}|\{3,4\}] \geq 0$ obtenemos $a_{12}a_{23} \geq a_{14}a_{43}$. □

Con el fin de extender el resultado anterior, vamos a asociar a una matriz parcial A, una nueva matriz parcial a la que denominamos C_A.

Definición 4.3.5 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz parcial, de tamaño $n \times n$, $n > 4$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un doble-camino, $G_A = (V, E)$, formado por un camino monótonamente etiquetado de k vértices y otro no monótonamente etiquetado, ambos con vértice inicial $i_1 = 1$. En otras palabras, $E = \{(1,2),(2,3),\ldots,(k-1,k),(1,i_{k+1}),(i_{k+1},i_{k+2}),\ldots,(i_{n-1},\ i_n),(i_n,k)\}$. Llamamos C_A a la matriz parcial $C_A = (c_{ij})$ obtenida a partir de las submatrices $A[\{1,2,\ldots,k\}]$ y $A[\{k,i_{k+1},\ldots,i_n\}]$ conservando los elementos especificados, completando las posiciones no especificadas* *como sigue:*

$$c_{i_l,i_m} = \begin{cases} a_{i_l,i_{l+1}} a_{i_{l+1},i_{l+2}} \dots a_{i_{m-1},i_m}, & l < m, \quad l,m \in \{2,3,\dots,k\} \\ P_{c_2}/c_{i_m,i_k}, & l = 1, \quad m \in \{2,3,\dots,k\} \\ 1/a_{i_m,i_{m+1}} a_{i_{m+1},i_{m+2}} \dots a_{i_{l-1},i_l}, & l > m, \quad l,m \in \{1,2,\dots,k\} \\ a_{i_l,i_{l+1}} a_{i_{l+1},i_{l+2}} \dots a_{i_{m-1},i_m}, & l < m, \quad l,m \in \{k+1,\dots,n\} \\ c_{i_l,i_n} a_{i_n,i_k}, & m = k, \quad l \in \{k+1,\dots,n\} \\ 1/c_{i_m,i_l}, & l \in \{k,t\}, t > m, \quad m \in \{k+1,\dots,n\} \end{cases}$$

y reemplazando $a_{1,i_{k+1}}$ por un elemento no especificado.

Ejemplo 4.3.17 *Consideramos la matriz parcial,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & 2 & x_{15} \\ x_{21} & 1 & 2 & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 & 0{,}5 \\ x_{51} & x_{52} & 1 & x_{54} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por la definición 4.3.5 la matriz C_A tiene la siguiente forma,

$$C_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x_{14} & x_{15} \\ 1 & 1 & 2 & x_{24} & x_{25} \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 2 & 1 \\ x_{41} & x_{42} & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ x_{51} & x_{52} & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar que A y C_A son matrices parciales TNN y que la siguiente matriz A_c es una completación TNN de C_A y de A.

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 2 & 1 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos generalizar la idea del ejemplo anterior en el siguiente sentido.

Lema 4.3.4 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n > 4$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un doble-camino, con un camino C_1 monótonamente etiquetado de k vertices y otro no monótonamente etiquetado C_2, ambos con vértice inicial $i_1 = 1$. Entonces, la matriz C_A asociada a A es una matriz parcial TNN si $P_{c_1} \geq P_{c_2}$. Además, el grafo asociado a C_A es un 1-cordal monótonamente etiquetado.*

Demostración: Analizamos las submatrices $C_A[\{1, \ldots, k\}]$ y $C_A[\{k, \ldots, n\}]$. Observamos que en la submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \frac{P_{c_2}}{a_{34}\cdots a_{k-1,k}} & \frac{P_{c_2}}{a_{45}\cdots a_{k-1,k}} & \cdots & \frac{P_{c_2}}{a_{k-1,k}} & P_{c_2} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & a_{23} & a_{23}a_{34} & \cdots & a_{23}\cdots a_{k-2,k-1} & a_{23}\cdots a_{k-1,k} \\ \frac{1}{a_{12}a_{23}} & \frac{1}{a_{23}} & 1 & a_{34} & \cdots & a_{34}\cdots a_{k-2,k-1} & a_{34}\cdots a_{k-1,k} \\ \frac{1}{a_{12}a_{23}a_{34}} & \frac{1}{a_{23}a_{34}} & \frac{1}{a_{34}} & 1 & \cdots & a_{45}\cdots a_{k-2,k-1} & a_{45}\cdots a_{k-1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{12}\cdots a_{k-2,k-1}} & \frac{1}{a_{23}\cdots a_{k-2,k-1}} & \frac{1}{a_{34}\cdots a_{k-2,k-1}} & \frac{1}{a_{34}\cdots a_{k-2,k-1}} & \cdots & 1 & a_{k-1,k} \\ \frac{1}{a_{12}\cdots a_{k-1,k}} & \frac{1}{a_{23}\cdots a_{k-1,k}} & \frac{1}{a_{34}\cdots a_{k-1,k}} & \frac{1}{a_{34}\cdots a_{k-1,k}} & \cdots & \frac{1}{a_{k-1,k}} & 1 \end{bmatrix}$$

las filas de índice t, $t = 3, 4, \ldots, k$, cumplen la ecuación $f_t = \frac{1}{a_{23}\cdots a_{t-1,t}} f_2$, con lo cual todas las filas de la submatriz $C_A[\{2, 3, \ldots, k\}|\{1, 2, \ldots, k\}]$ son linealmente dependientes dos a dos y dicha submatriz es totalmente no negativa. También por dicha ecuación vemos que $\det C_A[\alpha|\beta] = 0$ para toda $\alpha, \beta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ con $|\alpha| = |\beta| > 2$ y $1 \in \alpha$.

Queda por demostrar, por tanto, que $\det C_A[\alpha|\beta] \geq 0$ para $|\alpha| = |\beta| = 2$ tal que $1 \in \alpha$:

$\det C_A[\{1, 2\}] = 0$,

$\det C_A[\alpha|\beta] \geq 0$, con $\beta \cap \{1, 2\} \neq \phi$, por el enunciado de la condición,

$\det C_A[\alpha|\beta] = 0$, con $\beta \cap \{1, 2\} = \phi$, ya que las columnas $C_3, C_4, \ldots, C_k$ de la matriz C_A son también linealmente dependientes dos a dos, de hecho, $C_t = a_{34} \cdots a_{t-1,t} C_3$, $t = 3, 4, \ldots, k$.

Por otro lado, la submariz $C_A[\{k, k+1, \ldots, n\}]$ coincide con la completación totalmente no negativa en el caso de camino dirigido no monótonamente etiquetado, ver teorema 4.3.1, por lo que dicha submatriz es totalmente no negativa y la matriz C_A es una matriz parcial totalmente no negativa cuyo grafo asociado, como es evidente, es un 1-cordal monótonamente etiquetado. $\square$

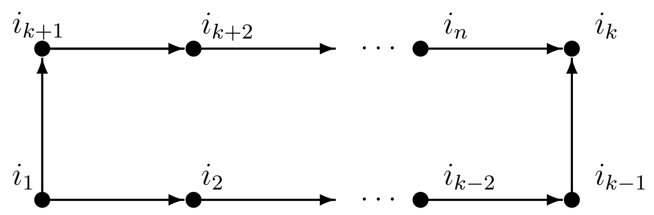
Este resultado nos permite establecer el siguiente teorema.

Teorema 4.3.5 *Sea G un doble-camino con C_1 monótonamente etiquetado y C_2 no monótonamente etiquetado. Entonces, toda matriz parcial TNN, $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, $n > 4$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es G tiene una completación TNN si y sólo si $P_{c_1} \geq P_{c_2}$.*

Demostración: Podemos asumir que C_1 tiene el conjunto de arcos $\{(i_1, i_2),$ $(i_2, i_3), \ldots, (i_{k-1}, i_k)\}$, con $i_j = i_1 + j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$, mientras que los arcos de C_2 son $\{(i_1, i_{k+1}), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_k)\}$.
Para comprobar la suficiencia de la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$ consideramos dos casos.

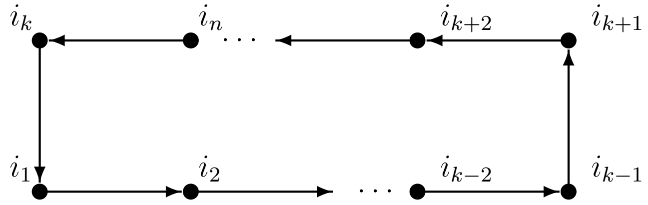
1) $i_1 = 1$.
   En este caso, $i_j = j$ para $j = 1, 2, \ldots, k$. Al aplicar el lema 4.3.4 la C_A-matriz de A es también una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es un 1-cordal, que por el teorema 3.2.1, C_A tiene una completación TNN.
   Observar que el elemento de la posición (i_1, i_{k+1}) es $c_{i_1,i_k} c_{i_k,i_{k+1}} = P_{c_2} a_{i_1,i_{k+1}} / P_{c_2} = a_{i_1,i_{k+1}}$. Por tanto, la mencionada completación es también una completación de A.

2) $i_1 \neq 1$.



G_A

Sea $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ la matriz obtenida de A al reemplazar $x_{i_{k-1},i_{k+1}}$ por $\bar{a}_{i_{k-1},i_{k+1}} = \dfrac{a_{i_1,i_{k+1}}}{a_{i_1,i_2}a_{i_2,i_3}\dots a_{i_{k-2},i_{k-1}}}$, x_{i_k,i_1} por $\bar{a}_{i_k,i_1} = \dfrac{1}{a_{i_1,i_2}a_{i_2,i_3}\dots a_{i_{k-1},i_k}}$ y tanto $a_{i_1,i_{k+1}}$ como a_{i_{k-1},i_k} por elementos no especificados. Es fácil ver que $\bar{A}$ es también una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado $G_{\bar{A}}$ es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado.



$G_{\overline{A}}$

Al reetiquetar los vértices de $G_{\bar{A}}$, de tal modo que $i_1 = 1$, podemos asegurar que $\bar{A}$ satisface la C-condición. Por lo tanto, Aplicando el teorema 4.3.3, existe una completación TNN, $\bar{A}_c = (c_{ij})$ de $\bar{A}$.
A partir de la definición 4.3.2, observamos que $c_{i_1,i_{k+1}} = a_{i_1,i_2}a_{i_2,i_3}\dots \bar{a}_{i_{k-1},i_{k+1}} = a_{i_1,i_{k+1}}$ y $c_{i_{k-1},i_k} = \dfrac{1}{\bar{a}_{i_k,i_1}a_{i_1,i_2}\dots a_{i_{k-2},i_{k-1}}} = a_{i_{k-1},i_k}$. Por tanto, $\bar{A}_c$ es también una completación TNN de A.

Ahora vamos a demostrar que la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$ es necesaria en el primer caso, siendo el segundo análogo.
Sea $A_c = (c_{ij})$ una completación TNN de A. De los determinantes de las submatrices $A_c[\{1,i\}|\{i,i+1\}]$, con $i = 2,\dots,k-1$, obtenemos la primera desigualdad $a_{12}a_{23}a_{34}\dots a_{k-1,k} \geq c_{1k}$. Vamos a probar a continuación que

$$c_{1k} \geq a_{1,i_{k+1}}a_{i_{k+1},i_{k+2}}a_{i_{k+2},i_{k+3}}\dots a_{i_{n-1},i_n}a_{i_n,k}.$$

Observamos que, dados los índices i_t, i_k, i_j, tal que, $i_t, i_k < i_j$, de la no negatividad del menor $\det A_c[\{i_t,i_j\}|\ \{i_k,i_j\}]$, obtenemos $c_{i_t,i_k} \geq c_{i_t,i_j}c_{i_j,i_k}$. (1)
Notamos que $k < i_j$, $\forall j \in \{k+1,k+2,\dots,n\}$ y existe un índice l_1 tal que $i_{l_1} = n$. Empezamos el proceso considerando el subcamino $i_{l_{11}} \longrightarrow i_{l_1} \longrightarrow i_{l_{21}}$,

donde l_{11} y l_{21} son respectivamente el índice anterior y posterior de l_1 en C_2. Como hemos comentado, podemos conseguir la desigualdad correspondiente $c_{i_{l_{11}},i_{l_{21}}} \geq a_{i_{l_{11}},i_{l_1}} a_{i_{l_1},i_{l_{21}}}$. Ahora, consideramos el siguiente camino

$$1 \longrightarrow i_1 \longrightarrow i_2 \longrightarrow \cdots i_{l_{11}} \longrightarrow i_{l_{21}} \cdots \longrightarrow i_{p-1} \longrightarrow i_p \longrightarrow k,$$

donde el índice i_{l_1} no aparece. Sea i_{l_2} el índice más grande de este nuevo camino. Procedemos de forma análoga considerando el subcamino formado por i_{l_2} y los vértices anterior y posterior, obtenemos la desigualdad correspondiente a partir de (1) y seleccionamos de nuevo el mayor índice i_{l_3} en el camino obtenido al suprimir i_{l_2}. Continuamos sucesivamente hasta obtener $1 \longrightarrow k+1 \longrightarrow k$, y la desigualdad correspondiente $c_{1k} \geq c_{1,k+1}c_{k+1,k}$. Observamos que el valor c_{ij} correspondiente a la posición no especificada (i,j) de A, que aparece en las diferentes desigualdades, se obtiene al reemplazar una cadena del tipo $i \longrightarrow h \longrightarrow j$ por $i \longrightarrow j$ y verifica las desigualdades tipo (1), es decir, $c_{ij} \geq c_{ih}c_{hj}$. A partir de las desigualdades conseguidas en el proceso, obtenemos la condición buscada. $\square$

Si algún elemento especificado en la matriz parcial es nulo, el último resultado no se cumple necesariamente, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.18 *Consideramos la siguiente matriz parcial TNN, A, cuyo grafo asociado es un doble-camino con $C_1 = (\{1,2,3\},\{(1,2),(2,3)\})$ monótonamente etiquetado, y $C_2 = (\{1,3,4\},\{(1,4),(4,3)\})$ no monótonamente etiquetado.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{13} & 1 \\ x_{21} & 1 & 1 & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz A satisface la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$. Sin embargo, observamos que $\det A[\{1,\ 2\}|\{2,3\}] \geq 0$ *implica $x_{13} = 0$, de donde obtenemos que el menor*

$\det A[\{1,2\}|\{3,4\}]$ *es negativo. Por lo tanto, A no tiene completación TNN.*

A continuación, estudiaremos el problema de completación para una matriz A, de tamaño 4×4, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un doble-camino con caminos C_1 y C_2, ambos no monótonamente etiquetados y con el vértice inicial $i_1 = 1$. Consideramos los siguientes casos:

1) $C_1 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,3),(3,2),(2,4)\})$ y $C_2 = (\{1,4\}, \{(1,4)\})$

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longleftarrow 1$$

$$G_A$$

Podemos suponer que A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & a_{24} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

Si $a_{13}a_{32}a_{24} \geq a_{14}$ elegimos la completación

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}a_{32} & a_{13} & a_{14} \\ 1/a_{13}a_{32} & 1 & 1/a_{32} & a_{24} \\ 1/a_{13} & a_{32} & 1 & a_{32}a_{24} \\ 1/a_{13}a_{32}a_{24} & 1/a_{24} & 1/a_{32}a_{24} & 1 \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que todos los menores son no negativos. Por lo tanto, A_c es una completación totalmente no negativa de A.

Si $a_{13}a_{32}a_{24} < a_{14}$, la matriz

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{14}/a_{24} & a_{13} & a_{14} \\ a_{24}/a_{14} & 1 & a_{13}a_{24}/a_{14} & a_{24} \\ a_{32}a_{24}/a_{14} & a_{32} & 1 & a_{14}/a_{13} \\ a_{13}a_{32}a_{24}/a_{14}^2 & a_{13}a_{32}/a_{14} & a_{13}/a_{14} & 1 \end{bmatrix},$$

es una completación de A totalmente no negativa.

2) $C_1 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,4),(4,2),(2,3)\})$ y $C_2 = (\{1,3\}, \{(1,3)\})$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 & 1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

G_A

Podemos suponer que A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & a_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

En este caso comprobamos que existe la completación deseada, A_c de A si y sólo si $a_{14}a_{42}a_{23} \leq a_{13}$.
Supongamos que $A_c = (c_{ij})$ es una completación totalmente no negativa de A. Del hecho que $\det A[\{1,2\}|\{3,4\}] \geq 0$ y $\det A[\{2,4\}] \geq 0$ obtenemos la desigualdad deseada.
Por otra parte, si $a_{14}a_{42}a_{23} \leq a_{13}$, es fácil ver que la matriz

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}/a_{23} & a_{13} & a_{14} \\ a_{23}/a_{13} & 1 & a_{23} & 1/a_{42} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & 1/a_{42}a_{23} \\ a_{42}a_{23}/a_{13} & a_{42} & a_{42}a_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

es una completación de A totalmente no negativa.

3) $C_1 = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2),(2,4),(4,3)\})$ y $C_2 = (\{1,3\}, \{(1,3)\})$

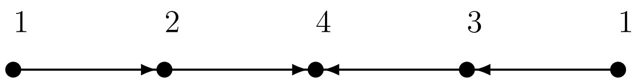
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 3 & 1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

G_A

En este caso, una completación totalmente no negativa es

$$A_c = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{12}a_{24} \\ a_{24}a_{43}/a_{13} & 1 & a_{13}/a_{12} & a_{24} \\ a_{12}a_{24}a_{43}/a_{13}^2 & a_{12}/a_{13} & 1 & 1/a_{43} \\ a_{12}a_{24}a_{43}^2/a_{13}^2 & a_{12}a_{43}/a_{13} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}, & \text{si} \quad a_{12}a_{24}a_{43} \leq a_{13} \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{13}/a_{43} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{24}a_{43} & a_{24} \\ 1/a_{12}a_{24}a_{43} & 1/a_{24}a_{43} & 1 & 1/a_{43} \\ 1/a_{12}a_{24} & 1/a_{24} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}, & \text{si} \quad a_{12}a_{24}a_{43} > a_{13} \end{cases}$$

4) $C_1 = (\{1,2,4\}, \{(1,2),(2,4)\})$ y $C_2 = (\{1,3,4\}, \{(1,3),(3,4)\}$

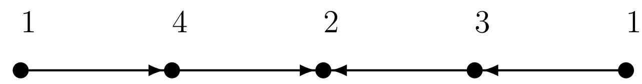


G_A

Una completación de A que sea totalmente no negativa es

$$A_c = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{12}a_{24} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{13}/a_{12} & a_{24} \\ 1/a_{13} & a_{12}/a_{13} & 1 & a_{34} \\ 1/a_{13}a_{34} & a_{12}/a_{13}a_{34} & 1/a_{34} & 1 \end{bmatrix}, & \text{si} \quad a_{13}a_{34} \geq a_{12}a_{24} \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{13}a_{34} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{24}/a_{34} & a_{24} \\ a_{34}/a_{12}a_{24} & a_{34}/a_{24} & 1 & a_{34} \\ 1/a_{12}a_{24} & 1/a_{24} & 1/a_{34} & 1 \end{bmatrix}, & \text{si} \quad a_{13}a_{34} < a_{12}a_{24} \end{cases}$$

5) $C_1 = (\{1,2,4\}, \{(1,4),(4,2)\})$ y $C_2 = (\{1,2,3\}, \{(1,3),(3,2)\})$



G_A

En este caso demostramos que existe una completación totalmente no negativa, A_c de A, si y sólo si $a_{13}a_{32} \geq a_{14}a_{42}$.
Sea $A_c = (c_{ij})$ una completación TNN de A. A partir de $\det A[\{3,4\}|\{2,3\}] \geq 0$ y $\det A[\{1,4\}|\{3,4\}] \geq 0$ obtenemos la desigualdad deseada.
Por otro lado, si $a_{13}a_{32} \geq a_{14}a_{42}$ es fácil comprobar que la completación

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}a_{32} & a_{13} & a_{14} \\ 1/a_{13}a_{32} & 1 & 1/a_{32} & 1/a_{42} \\ 1/a_{13} & a_{32} & 1 & a_{32}/a_{42} \\ a_{42}/a_{13}a_{32} & a_{42} & a_{42}/a_{32} & 1 \end{bmatrix},$$

es totalmente no negativa.

Como acabamos de ver, para las matrices parciales totalmente no negativas de tamaño 4×4, cuyos grafos asociados son doble-caminos, con caminos no monótonamente etiquetados y cuyo vértice inicial es $i_1 = 1$, obtenemos diferentes resultados, por lo que, seguimos trabajando en este tipo de grafos con el objetivo de generalizar dichos resultados a matrices de tamaño $n \times n$, $n > 4$.

En cambio, cuando el vértice de inicio no está etiquetado con 1, podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.3.6 *Sea G un doble-camino formado por caminos no monótonamente etiquetados $C_1 = (V_1, E_1)$ y $C_2 = (V_2, E_2)$, con vértices inicial y final distintos de 1. Toda matriz parcial totalmente no negativa A de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es G tiene una completación TNN si cumple la condición,*

$$P_{c_1} \leq P_{c_2} \quad si \quad 1 \in V_1 \qquad o \qquad P_{c_2} \leq P_{c_1} \quad si \quad 1 \in V_2$$

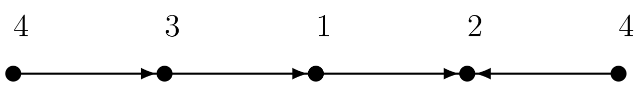
Demostración: Supongamos que $E_1 = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{k-1}, i_k)\}$ y $E_2 = \{(i_1, i_{k+1}), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_k)\}$ con $1 \in V_1$. El otro caso se demuestra de forma análoga.
Dados $i, j \in V_2$, tal que $(i, j) \in E_2$, completamos la posición (j, i) por $1/a_{ij}$, y sustituimos los elementos $a_{i_1,i_{k+1}}, a_{i_{k+1},i_{k+2}}, \ldots, a_{i_{n-1},i_n}, a_{i_n,i_k}$ por elementos no especificados. Es fácil ver que la nueva matriz obtenida $\bar{A}$ es una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado que satisface la C-condición. Al reetiquetar este ciclo, de manera que $i_1 = 1$, y aplicar el teorema 4.3.3, obtenemos una completación TNN $\bar{A}_c$ de $\bar{A}$.
Observamos que los elementos de $\bar{A}_c$ correspondientes a las posiciones (i_1, i_{k+1}), $(i_{k+1}, i_{k+2}), \ldots, (i_n, i_k)$ son $a_{i_1,i_{k+1}}, a_{i_{k+1},i_{k+2}}, \ldots, a_{i_{n-1},i_n}, a_{i_n,i_k}$ respectivamente. Por lo tanto, $\bar{A}_c$ es también una completación de A. $\square$

La condición del último teorema no es necesaria como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.19 *La siguiente matriz parcial TNN*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} \\ 2 & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble-camino con caminos C_1 y C_2, cuyos conjuntos de arcos son respectivamente $E_1 = \{(4,3), (3,1), (1,2)\}$ y $E_2 = \{(4,2)\}$,



G_A

no satisface la condición $P_{c_1} \leq P_{c_2}$. Sin embargo, A tiene una completación *totalmente no negativa,*

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 1/6 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comentamos finalmente que en el caso de existencia de elementos nulos en la matriz parcial, el teorema 4.3.6 no es cierto en general.

Ejemplo 4.3.20 *Consideramos la siguiente matriz parcial* TNN*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble-camino, con caminos C_1 *y* C_2*, cuyos conjuntos de arcos son respectivamente* $E_1 = \{(2,3)\}$ *y* $E_2 = \{(2,1),(1,4),(4,3)\}$*,*

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 3 & 2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

G_A

satisface la condición $P_{c_1} \leq P_{c_2}$*. En cambio,* A *no tiene una completación* TNN *ya que a partir de* $\det A[\{1,2\}|\{1,4\}] \geq 0$ *obtenemos* $x_{24} \geq 6$*, mientras que* $\det A[\{2,3\}|\{3,4\}] \geq 0$ *implica* $x_{24} = 0$*.*

4.3.5. Otros tipos de grafos asociados

En esta subsección vamos a abordar el problema de completación en el caso de ciertos grafos formados por la unión de subgrafos conocidos y estudiados anteriormente. Analizamos un clique con un camino adjunto, los grafos doble ciclos, generalizando finalmente los resultados obtenidos para el grafo block-ciclo.

Un clique con un camino adjunto

En general, *un clique con un camino adjunto* es un grafo formado por un clique sobre un conjunto de vértices, $K = (V_k, E_k)$, y un camino con vértices inicial y final que pertenecen a V_k.

Para este tipo de grafos, la respuesta al problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas es, en general, negativa, como podemos observar en el ejemplo 4.3.21.

Entre las muchas posibilidades existentes nos vamos a centrar en las dos que enunciamos a continuación.

i) $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, es el grafo formado por un clique con vértices $\{k, k+1, \ldots, n\}$ y un camino dirigido $\{(n, 1), (1, 2), \ldots, (k-1, k)\}$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$.

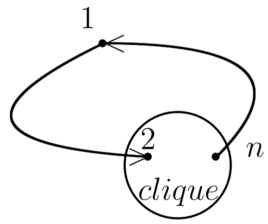
ii) $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, es el grafo formado por un clique con vértices $\{1, 2, \ldots, k\}$ y un camino dirigido $\{(k, k+1), (k+1, k+2), \ldots, (n-1, n), (n, m)\}$, $m = 1, 2, \ldots, k$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$.

Empezamos con el primer caso, demostrando la existencia de la completación deseada cuando el camino adjunto tiene 3 vértices, y necesitando introducir una condición necesaria y suficiente en el caso general.

Lema 4.3.5 *Sea $G_A = (V, E)$ un grafo no monótonamente etiquetado, con $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, formado por un clique sobre los vértices $\{2, 3, \ldots, n\}$ y un* *camino dirigido* $\{(n,1),(1,2)\}$. *Cada matriz parcial* TNN A *con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es* G_A *tiene completación* TNN.

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A tiene la siguiente forma,

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & \dots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & 1 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$



G_A

Sea $\overline{A}$ la matriz obtenida al completar x_{21} con $c_{21} = a_{n1}/a_{n2}$. De la desigualdad $\det A[\{1,n\}|\{1,2\}] \geq 0$, es fácil deducir que $\det \overline{A}[\{1,2\}] \geq 0$ y por tanto $\overline{A}$ es una matriz parcial TNN.

Sea B la siguiente matriz parcial TNN:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & X \\ c_{21} & 1 & A[\{2\}|\{3,4,\dots,n\}] \\ Y & A[\{3,4,\dots,n\}|\{2\}] & A[\{3,4,\dots,n\}] \end{bmatrix},$$

donde X e Y son completamente no especificadas. Podemos observar que el grafo asociado a la matriz B es un 1-cordal. Por tanto, y por el teorema 3.2.1, B tiene completación TNN, $B_c = (b_{ij})$, donde $b_{n1} = a_{n1}$, ver [31], y por tanto B_c es también una completación de A. $\square$

Sin embargo, el resultado no es cierto cuando el número de vértices de dicho camino es mayor o igual que 4, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.21 *La matriz parcial* TNN

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & 1 & 1 & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 & a_{45} \\ 2 & x_{52} & 1 & a_{54} & 1 \end{bmatrix}$$

no tiene completación TNN*, ya que las desigualdades* $\det A[\{1,5\}|\{1,2\}] \geq 0$ *y* $\det A[\{2,5\}|\{2,3\}] \geq 0$*, se verifican si* $x_{52} \geq 2$ *y* $x_{52} \leq 1$ *respectivamente, lo cual es una contradicción.*

Visto el ejemplo anterior, para el caso de un camino adjunto con más de tres vértices necesitamos una condición más. En el siguiente resultado damos una condición necesaria y suficiente para la existencia de completaciones totalmente no negativas cuando el camino adjunto sea de 4 vértices o más.

Lema 4.3.6 *Sea* A *una matriz parcial* TNN*, de tamaño* $n \times n$*, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es la unión de un clique sobre los vértices* $\{3, 4, \ldots, n\}$ *y un camino dirigido de 4 vértices con arcos* $\{(n,1), (1,2), (2,3)\}$*. Entonces existe completación* TNN *de* A *si y sólo si la submatriz de* A *cuyo grafo asociado es el camino totalmente especificado formado por los arcos* $\{(n,1), (1,2), (2,3), (n,3)\}$ *cumple la* C_2*-condición, es decir,* $\dfrac{a_{n1}a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}} \leq a_{n3}$.

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A tiene la forma,

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & a_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} & \dots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & a_{34} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 & \dots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \dots & 1 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & x_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{n,n-1} & 1 \end{array}\right].$$

Sea $\overline{A}$ la matriz obtenida al reemplazar x_{n2} por $c_{n2} = a_{n3}/a_{23}$.
De la desigualdad

$$\det \overline{A}[\{2,n\}|\{2,3\}] = a_{n3} - c_{n2}a_{23} = 0,$$

podemos afirmar que $\overline{A}$ es una matriz parcial TNN. Observamos que el grafo asociado a la matriz $\overline{A}[\{2,3,\dots,n\}]$ es un clique con un camino adjunto de tres vértices. Aplicando el lema 4.3.5 sobre la submatriz $\overline{A}[\{2,3,\dots,n\}]$ obtenemos una completación TNN, A_{1_c}. Consideramos ahora una nueva matriz parcial TNN:

$$\overline{\overline{A}} = \left[\begin{array}{cc} 1 & X \\ Y & A_{1_c} \end{array}\right],$$

donde $X = [a_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n}]$ e $Y = [x_{21}, x_{31}, \dots, a_{n1}]^T$. De nuevo $\overline{\overline{A}}$ es una matriz parcial TNN que cumple la hipótesis del lema 4.3.5, por lo que podemos obtener una completación TNN de $\overline{\overline{A}}$, y por tanto de A.
Para demostrar que la condición es necesaria, supongamos que $A_c = (c_{ij})$ es una completación TNN de A. Combinando las desigualdades

$$\det A[\{1,n\}|\{1,2\}] = c_{n2} - a_{n1}a_{12} \geq 0$$

y

$$\det A[\{2,n\}|\{2,3\}] = a_{n3} - c_{n2}a_{23} \geq 0,$$

obtenemos la condición $a_{n3} \geq a_{n1}a_{12}a_{23}$. $\square$

A continuación generalizamos el resultado anterior.

Teorema 4.3.7 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es la unión de un clique sobre los vértices $\{k, k+1, \ldots, n\}$ y un camino dirigido de $l = k+1$ vértices con el conjunto de arcos $\{(n,1), (1,2), \ldots, (k-1,k)\}$. Entonces existe una completación TNN de A si y sólo si la submatriz de A cuyo grafo asociado es el camino totalmente especificado formado por el conjunto de arcos $\{(n,1), (1,2), \ldots, (k-1,k), (n,k)\}$ satisface la C_2-condición.*

Demostración: Desarrollamos la demostración por inducción sobre l. El caso $l = 4$ está estudiado en el lema 4.3.6. Supongamos la suficiencia de la C_2-condición cuando $l = k$ y veamos el caso $l = k+1$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A tiene la forma,

$$\begin{bmatrix}
1 & a_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1,k-1} & x_{1k} & x_{1,k+1} & \ldots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\
x_{21} & 1 & a_{23} & \ldots & x_{2,k-1} & x_{2k} & x_{2,k+1} & \ldots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\
x_{31} & x_{32} & 1 & \ldots & x_{3,k-1} & x_{2k} & x_{3,k+1} & \ldots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{k-1,1} & x_{k-1,2} & x_{k-1,3} & \ldots & 1 & a_{k-1,k} & x_{k-1,k+1} & \ldots & x_{k-1,n-1} & x_{k-1,n} \\
x_{k1} & x_{k2} & x_{k3} & \ldots & x_{k,k-1} & 1 & a_{k,k+1} & \ldots & a_{k,n-1} & a_{kn} \\
x_{k+1,1} & x_{k+1,2} & x_{k+1,3} & \ldots & x_{k+1,k-1} & a_{k+1,k} & 1 & \ldots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \ldots & x_{n-1,k-1} & a_{n-1,k} & a_{n-1,k+1} & \ldots & 1 & a_{n-1,n} \\
a_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \ldots & x_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n-1} & 1
\end{bmatrix}.$$

Sea $\overline{A}$ la matriz parcial TNN obtenida al sustituir el elemento no especificado $x_{n,k-1}$ por $c_{n,k-1} = a_{nk}/a_{k-1,k}$, $c_{k-1,j} = a_{k-1,k}a_{kj}$ con $j = k+1, \ldots, n$, $c_{k,k-1} =$

$1/a_{k-1,k}$ y $c_{i,k-1} = a_{ik}c_{k,k-1}$ con $i = k+1, \ldots, n-1$,

$$\begin{bmatrix}
1 & a_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1,k-1} & x_{1k} & x_{1,k+1} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\
x_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & x_{2,k-1} & x_{2k} & x_{2,k+1} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\
x_{31} & x_{32} & 1 & \cdots & x_{3,k-1} & x_{2k} & x_{3,k+1} & \cdots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{K-1,1} & x_{k-1,2} & x_{k-1,3} & \cdots & 1 & a_{k-1,k} & a_{k-1,k}a_{k,k+1} & \cdots & a_{k-1,k}a_{k,n-1} & a_{k-1,k}a_{kn} \\
x_{k1} & x_{k2} & x_{k3} & \cdots & 1/a_{k-1,k} & 1 & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n-1} & a_{kn} \\
x_{k+1,1} & x_{k+1,2} & x_{k+1,3} & \cdots & a_{k+1,k}/a_{k-1,k} & a_{k+1,k} & 1 & \cdots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,k}/a_{k-1,k} & a_{n-1,k} & a_{n-1,k+1} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\
a_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & a_{nk}/a_{k-1,k} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1
\end{bmatrix}.$$

Por hipótesis de inducción, la matriz $\overline{A}$ tiene completación TNN y, se comprueba fácilmente que, dicha completación lo es también de A.
Recíprocamente, Sea $\overline{A} = (c_{ij})$ una completación TNN de A. Combinando las desigualdades:

$$\det \overline{A}[\{1,n\}|\{1,2\}] = c_{n2} - a_{n1}a_{12} \geq 0,$$

$$\det \overline{A}[\{2,n\}|\{2,3\}] = c_{n3} - c_{n2}a_{23} \geq 0,$$

$$\det \overline{A}[\{3,n\}|\{3,4\}] = c_{n4} - c_{n3}a_{34} \geq 0,$$

$$\vdots$$

$$\det \overline{A}[\{k-2,n\}|\{k-2,k-1\}] = c_{n,k-1} - c_{n,k-2}a_{k-2,k-1} \geq 0,$$

$$\det \overline{A}[\{k-1,n\}|\{k-1,k\}] = a_{nk} - c_{n,k-1}a_{k-1,k} \geq 0,$$

obtenemos la condición buscada, $a_{nk} \geq a_{n1}a_{12}\ldots a_{k-1,k}$. □

En caso de que existan elementos especificados nulos, el resultado anterior no es cierto.

Ejemplo 4.3.22 *Consideramos la siguiente matriz parcial TNN, cuyo grafo* *asociado tiene la forma descrita en el teorema anterior,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & 1 & 1 & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & 1 & 1 \\ x_{41} & x_{42} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_{52} & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

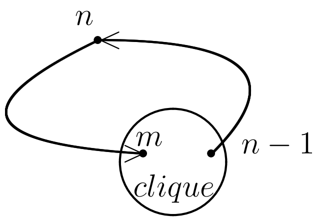
Suponiendo que $A_c = (c_{ij})$ *es una completación* TNN *de* A*, la desigualdad* $\det A_c[\{2,5\}|\{2,3\}] \geq 0$ *implica que* $c_{52} = 0$*. Sin embargo, con dicho valor de* c_{52}*, es fácil comprobar que* $\det A_c[\{2,5\}|\{1,2\}]$ *es siempre negativo, por lo que* A *no tiene completación* TNN*.*

Como hemos mencionado anteriormente, abordamos ahora el caso de un grafo G formado por un clique sobre los vértices $\{1, 2, \ldots, k\}$ y un camino dirigido, siendo $\{(k, k+1), (k+1, k+2), \ldots, (n-1, n), (n, m)\}$, $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, el conjunto de arcos de dicho camino.

Lema 4.3.7 *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo no monótonamente etiquetado, con* $V = \{1, 2, \ldots, n\}$*, formado por un clique sobre los vértices* $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ *y un camino dirigido* $\{(n-1, n), (n, m)\}$*,* $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$*. Cada matriz parcial* TNN A *con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es* G *tiene completación* TNN*.*

Demostración: Podemos suponer que A tiene la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1,m-1} & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n-1} & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2,m-1} & a_{2m} & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,n-1} & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & 1 & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \cdots & a_{m-1,n-1} & x_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,m-1} & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n-1} & x_{mn} \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,m-1} & a_{m+1,m} & 1 & \cdots & a_{m+1,n-1} & x_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m-1} & a_{n-1,m} & a_{n-1,m+1} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,m-1} & a_{nm} & x_{n,m+1} & \cdots & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$



G_A

Sea $\overline{A}$ la matriz obtenida al completar $x_{n,n-1}$ con $c_{n,n-1} = a_{nm}/a_{n-1,m}$. Observamos que $\det \overline{A}[\{n-1,n\}|\{m,n-1\}] = 0$, y a partir de la desigualdad $\det A[\{n-1,n\}|\{m,n\}] = a_{n-1,m} - a_{n-1,n}a_{nm} \geq 0$, es fácil verificar que $\det \overline{A}[\{n-1,n\}] = 1 - \dfrac{a_{n-1,n}a_{nm}}{a_{n-1,m}} \geq 0$, por tanto, $\overline{A}$ es una matriz parcial TNN.

Sea B la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} A[\{1,2,\ldots,n-2\}] & A[\{1,2,\ldots,n-2\}|\{n-1\}] & X \\ A[\{n-1\}|\{1,2,\ldots,n-2\}] & 1 & a_{n-1,n} \\ Y & c_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

donde X y Y son completamente no especificados. Podemos observar que el grafo asociado a la matriz B es un 1-cordal. Por tanto, y por el teorema 3.2.1,

B tiene completación TNN cuya posición (n,m) está ocupada por a_{nm}, ver [31], y dicha completación es también una completación TNN de A. $\square$

Si el camino tiene más de 3 vértices el resultado anterior no es necesariamente cierto como ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.23 *Consideramos la matriz parcial* TNN

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0{,}5 & x_{14} & x_{15} \\ 1 & 1 & 0{,}5 & x_{24} & x_{25} \\ 2 & 2 & 1 & 1 & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 & 1 \\ 3 & x_{52} & x_{53} & x_{53} & 1 \end{bmatrix}.$$

Vemos que A no tiene completación TNN, puesto que las desigualdades $\det A[\{3,4\}|\{1,4\}] \geq 0$ *y* $\det A[\{4,5\}|\{1,5\}] \geq 0$*, se verifican si* $x_{41} \leq 2$ *y* $x_{41} \geq 3$ *respectivamente, lo cual es una contradicción.*

En el siguiente resultado damos una condición necesaria y suficiente para la existencia de completaciones totalmente no negativas cuando el camino adjunto sea de 4 vértices o más.

Lema 4.3.8 *Sea A una matriz parcial TNN, de tamaño $n \times n$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es la unión de un clique con los vértices $\{1,2,\ldots,n-2\}$ y un camino dirigido de 4 vértices cuyos arcos son $\{(n-2,n-1),(n-1,n),(n,m)\}$, $m \in \{1,2,\ldots,n-2\}$. Entonces existe una completación TNN de A si y sólo si la submatriz de A cuyo grafo asociado es el camino totalmente especificado formado por los arcos $\{(n-2,n-1),(n-1,n),(n,m),(n-2,m)\}$ cumple la C_2-condición, es decir,* $\dfrac{a_{n-2,n-1}a_{n-1,n}a_{nm}}{a_{n-1,n-1}a_{nn}} \leq a_{n-2,m}$.

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A tiene la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2,n-3} & a_{2,n-2} & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & 1 & \dots & a_{m,n-3} & a_{m,n-2} & x_{m,n-1} & x_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-3,1} & a_{n-3,2} & \dots & a_{n-3,m} & \dots & 1 & a_{n-3,n-2} & x_{n-3,n-1} & x_{n-3,n} \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \dots & a_{n-2,m} & \dots & a_{n-2,n-3} & 1 & a_{n-2,n-1} & x_{n-2,n} \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \dots & x_{n-1,m} & \dots & x_{n-1,n-3} & x_{n-1,n-2} & 1 & a_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & a_{nm} & \dots & x_{n,n-3} & x_{n,n-2} & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\overline{A}$ la matriz obtenida al reemplazar $x_{n-1,m}$ por $c_{n-1,m} = a_{n-1,n}a_{nm}$.
A partir de la C_2-condición, obtenemos la desigualdad

$$\det \overline{A}[\{n-2, n-1\}|\{m, n-1\}] = a_{n-2,m} - c_{n-1,m}a_{n-2,n-1} \geq 0,$$

con lo que podemos afirmar que $\overline{A}$ es una matriz parcial TNN. Observamos que el grafo asociado a la matriz $\overline{A}[\{1, 2, \dots, n-1\}]$ es un clique con un camino adjunto de tres vértices. Aplicando el lema 4.3.7 a la submatriz $\overline{A}[\{1, 2, \dots, n-1\}]$ obtenemos una completación TNN, A_{1_c}. Consideramos ahora una nueva matriz parcial TNN:

$$\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} A_{1_c} & X \\ Y & 1 \end{bmatrix},$$

con $X = [x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn}, \dots, a_{n-1,n}]^T$ e $Y = [x_{n1}, x_{n2}, \dots, a_{nm}, \dots, x_{n,n-1}]$.
De nuevo $\overline{\overline{A}}$ es una matriz parcial TNN que cumple la hipótesis del lema 4.3.7, por lo que nos permite obtener una completación TNN de $\overline{\overline{A}}$, y por tanto de A.
Para demostrar que la condición es necesaria, supongamos que $A_c = (c_{ij})$ es una completación TNN de A. Combinando las desigualdades

$$\det A_c[\{n-1,n\}|\{m,n\}] = c_{n-1,m} - a_{n-1,n}a_{nm} \geq 0$$

y

$$\det A_c[\{n-2,n-1\}|\{m,n-1\}] = a_{n-2,m} - c_{n-1,m}a_{n-2,n-1} \geq 0,$$

obtenemos la condición $a_{n-2,m} \geq a_{n-2,n-1}a_{n-1,n}a_{nm}$. $\square$

A continuación generalizamos el resultado anterior.

Teorema 4.3.8 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es la unión de un clique con los vértices $\{1, 2, \ldots, k\}$ y un camino dirigido de $l = n-k+2$ vértices con conjunto de arcos $\{(k, k+1), (k+1, k+2), \ldots, (n-1, n), (n, m)\}$, $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Entonces existe una completación TNN de A si y sólo si la submatriz de A cuyo grafo asociado es el camino totalmente especificado formado por el conjunto de arcos $\{(k, k+1), (k+1, k+2), \ldots, (n-1, n), (n, m), (k, m)\}$ satisface la C_2-condición.*

Demostración: Comprobamos la suficiencia de la condición por inducción sobre l. El caso $l = 4$ está estudiado en el lema 4.3.8. Supongamos la suficiencia de la C_2-condición cuando $l = n-k+1$ y veamos el caso $l = n-k+2$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que A tiene la forma,

$$\begin{bmatrix}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1k} & x_{1,k+1} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\
a_{21} & 1 & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2k} & x_{2,k+1} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & 1 & \cdots & a_{mk} & x_{m,k+1} & \cdots & x_{m,n-1} & x_{mn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{km} & \cdots & 1 & a_{k,k+1} & \cdots & x_{k,n-1} & x_{kn} \\
x_{k+1,1} & x_{k+1,2} & \cdots & x_{k+1,m} & \cdots & x_{k+1,k} & 1 & \cdots & x_{k+1,n-1} & x_{k+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,m} & \cdots & x_{n-1,k} & x_{n-1,k+1} & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & a_{nm} & \cdots & x_{nk} & x_{n,k+1} & \cdots & x_{n,n-1} & 1
\end{bmatrix}.$$

Sea $\overline{A}$ la matriz parcial TNN obtenida al sustituir el elemento no especificado $x_{n-1,m}$ por $c_{n-1,m} = a_{n-1,n}a_{nm}$. Por hipótesis de inducción, la submatriz $\overline{A}[1, 2, \ldots, n-1]$ tiene completación TNN, $\overline{A_c}[1, 2, \ldots, n-1]$. Podemos ver que el grafo asociado a la nueva matriz obtenida

$$\overline{\overline{A}} = \left[\begin{array}{cc} \overline{A_c}[1, 2, \ldots, n-1] & X \\ Y & 1 \end{array} \right],$$

con $X = [x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}, \ldots, a_{n-1,n}]^T$ e $Y = [x_{n1}, x_{n2}, \ldots, a_{nm}, \ldots, x_{n,n-1}]$, está formado por un clique unido con el camino $\{(n-1, n), (n, m)\}$. Aplicando ahora el lema 4.3.7 a la matriz $\overline{\overline{A}}$ obtenemos una completación TNN de $\overline{A}$ y por tanto de A.

Recíprocamente, Sea A_c una completación TNN de A. Combinando las desigualdades:

$$\det A_c[\{n-1, n\}|\{m, n\}] = c_{n-1,m} - a_{n-1,n}a_{nm} \geq 0,$$

$$\det A_c[\{n-2, n-1\}|\{m, n-1\}] = c_{n-2,m} - a_{n-2,n-1}c_{n-1,m} \geq 0,$$

$$\det A_c[\{n-3, n-2\}|\{m, n-2\}] = c_{n-3,m} - a_{n-3,n-2}c_{n-2,m} \geq 0,$$

$$\vdots$$

$$\det A_c[\{k+1, k+2\}|\{m, k+2\}] = c_{k+1,m} - a_{k+1,k+2}c_{k+2,m} \geq 0,$$

$$\det A_c[\{k, k+1\}|\{m, k+1\}] = a_{km} - a_{k,k+1}c_{k+1,m} \geq 0,$$

obtenemos dicha condición, $a_{km} \geq a_{k,k+1}a_{k+1,k+2} \cdots a_{n-1,n}a_{nm}$. □

El resultado anterior no se cumple, en general, cuando la matriz parcial tiene algún elemento nulo.

Ejemplo 4.3.24 *Consideramos la siguiente matriz parcial* TNN*, cuyo grafo* *asociado tiene la forma descrita en el teorema anterior,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x_{14} & x_{15} \\ 1 & 1 & 1 & x_{24} & x_{25} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 & 1 \\ 1 & x_{52} & x_{53} & x_{53} & 1 \end{bmatrix}.$$

Si A tiene completación TNN, $A_c = (c_{ij})$, entonces $\det A_c[\{3,4\}|\{1,4\}] \geq 0$ *implica que $c_{41} = 0$. Sin embargo, con dicho valor de c_{41}, es fácil comprobar que* $\det A_c[\{4,5\}|\{1,4\}]$ *es siempre negativo. Por tanto, A no tiene completación TNN.*

Doble ciclos

A continuación aprovechamos los resultados mencionados anteriormente para analizar nuevos casos de grafos asociados, concretamente los grafos doble ciclos, es decir, los grafos cuyo conjunto de arcos está formado por dos ciclos que tienen un vértice, un arco o más de un arco en común.

Empezamos hablando del caso de un vértice en común, haciendo especial énfasis en los ciclos monótonamente etiquetables, es decir, los ciclos cuyo conjunto de vértices, V, cumple lo siguiente:

$$\forall i,j \in V, \quad si \quad i < j \quad \Rightarrow \quad i+1, i+2, \ldots, j-1 \in V$$

Teorema 4.3.9 *Sea $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ un doble ciclo formado por los ciclos monótonamente etiquetables $C_1 = (V_1, E_1)$ y $C_2 = (V_2, E_2)$, con un vértice en común. Toda matriz parcial TNN, A, de tamaño $n \times n$, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es G tiene completación TNN si y sólo si las submatrices asociadas a los mencionados ciclos cumplen la C-condición.*

Demostración: A partir de los teoremas 4.3.2 y 4.3.3, sustituimos las submatrices $A[V_1]$ y $A[V_2]$ por sus correspondientes completaciones TNN. La matriz obtenida $\overline{A}$ es una matriz parcial totalmente no negativa cuyo grafo asociado es un 1-cordal monótonamente etiquetado, por lo que el teorema 3.2.1 nos permite asegurar que $\overline{A}$ y por tanto A tiene completación TNN.
Por otro lado, si A tiene completación TNN, entonces por los teoremas 4.3.2 y 4.3.3 respectivamente, $A[V_1]$ y $A[V_2]$ cumplen la C-condición. □

A continuación, generalizamos el resultado anterior.

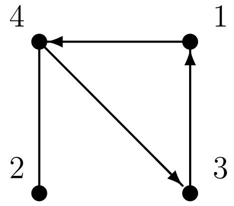
Corolario 4.3.1 *Sea G un block-ciclo formado por el conjunto de ciclos monótonamente etiquetables $\{C_1,\ C_2, \ldots, C_k\}$ e intersectados exactamente en un vértice. Entonces, toda matriz parcial TNN, A, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es G tiene completación TNN si y sólo si cada submatriz A_i de A, cuyo grafo asociado es C_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ cumple la C-condición.*

En general, si los ciclos no son monótonamente etiquetables, la matriz parcial no tiene completación totalmente no negativa, como ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.25 *Consideramos la matriz parcial TNN*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & 1 \\ x_{21} & 1 & x_{23} & 1 \\ 2 & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble ciclo con dos ciclos no monótonamente etiquetables.



G_A

Para que A tenga completación TNN es necesario que $\det A[\{3,4\}] \geq 0$ *y* $\det A[\{1,3\}|\{1,4\}] \geq 0$*, lo que implica* $x_{34} \leq 1$ *y* $x_{34} \geq 2$*. Por lo tanto, A no tiene completación TNN.*

A continuación, abordamos el problema cuando existe un arco o más en común.

Es fácil de observar que todo grafo doble ciclo, con un arco o más en común, contiene un subgrafo doble-camino. A partir de esta propiedad vamos a distinguir entre dos casos de doble ciclos.

i) Doble ciclo que contiene como subgrafo a un doble-camino que no es camino totalmente especificado.

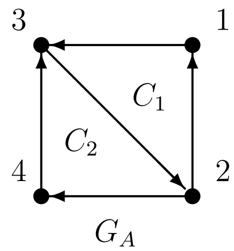
ii) Doble ciclo que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado.

En primer lugar, analizamos los doble ciclos monótonamente etiquetados. En general, una matriz parcial totalmente no negativa, cuyo grafo asociado es doble ciclo monótonamente etiquetado con un arco en común no tiene completación totalmente no negativa, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.26 *Consideramos la matriz parcial* TNN

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 0{,}8 & x_{14} \\ 1 & 1 & x_{23} & 1 \\ x_{31} & 1 & 0{,}7 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado G_A

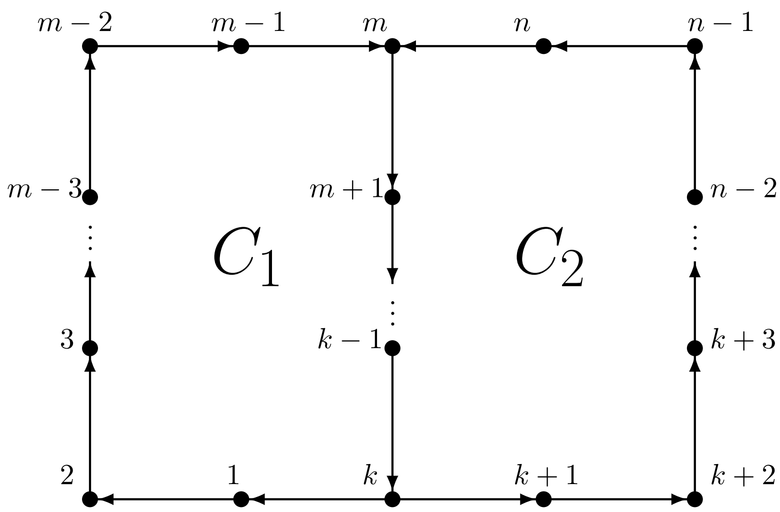


es un doble ciclo dirigido monótonamente etiquetado (por la matriz permutación $P = [4, 3, 2, 1]$*) con un arco en común.* A *no tiene completación* TNN *ya que* $A[\{1, 2, 3\}]$ *no la tiene, (ver ejemplo 3.2.4).*

Hemos visto que el grafo asociado a la matriz parcial en el ejemplo 4.3.26 es un doble ciclo que no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente especificado. Observamos en el citado ejemplo que uno de los dos ciclos no cumple la C-condición. El siguiente resultado muestra que la C-condición es necesaria y suficiente para la existencia de la completación requerida en el caso de doble ciclo monótonamente etiquetado que no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente especificado

Teorema 4.3.10 *Sea* A *una matriz parcial* TNN *de tamaño* $n \times n$*,* $n \geq 4$*, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es un doble ciclo monótonamente etiquetado con dos ciclos* C_1 *y* C_2 *y* $k - m$ *arcos en común,* $k = m + 1, m + 2, \ldots, m + n - 2$*, y que no contiene como subgrafo a ningún* *camino totalmente especificado. Existe una completación TNN de A si y sólo si cada una de las submatrices cuyos grafos asociados son los mencionados ciclos satisface la C-condición.*

Demostración: Sean los ciclos monótonamente etiquetados, $C_1 = \{\{1, 2, \ldots, k\}, \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (m, m+1), \ldots, (k, 1)\}\}$ y $C_2 = \{\{m, m+1, \ldots, n\}, \{(m, m + 1), \ldots, (k - 1, k), (k, k + 1), \ldots, (n - 1, n), (n, m)\}\}$.



G_A

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A tiene la forma,

$$\begin{bmatrix}
1 & a_{12} & \dots & x_{1m} & x_{1,m+1} & \dots & x_{1k} & x_{1,k+1} & \dots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\
x_{21} & 1 & \dots & x_{2m} & x_{2,m+1} & \dots & x_{2k} & x_{2,k+1} & \dots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{m-1,1} & x_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,m} & x_{m-1,m+1} & \dots & x_{m-1,k} & x_{m-1,k+1} & \dots & x_{m-1,n-1} & x_{m-1,n} \\
x_{m1} & x_{m2} & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & x_{mk} & x_{m,k+1} & \dots & x_{m,n-1} & x_{mn} \\
x_{m+1,1} & x_{m+1,2} & \dots & x_{m+1,m} & 1 & \dots & x_{m+1,k} & x_{m+1,k+1} & \dots & x_{m+1,n-1} & x_{m+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{k-1,1} & x_{k-1,2} & \dots & x_{k-1,m} & x_{k-1,m+1} & \dots & a_{k-1,k} & 1 & \dots & x_{k-1,n-1} & x_{k-1,n} \\
a_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{km} & x_{k,m+1} & \dots & 1 & a_{k,k+1} & \dots & x_{k,n-1} & x_{kn} \\
x_{k+1,1} & x_{k+1,2} & \dots & x_{k+1,m} & x_{k+1,m+1} & \dots & x_{k+1,k} & 1 & \dots & x_{k+1,n-1} & x_{k+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \dots & x_{n-1,m} & x_{n-1,m+1} & \dots & x_{n-1,k} & x_{n-1,k+1} & \dots & 1 & a_{n-1,n} \\
x_{n1} & x_{n2} & \dots & a_{nm} & x_{n,m+1} & \dots & x_{nk} & x_{n,k+1} & \dots & x_{n,n-1} & 1
\end{bmatrix}$$

Completamos el elemento desconocido x_{km} por $c_{km} = \text{máx}[P_{c_1}, P_{c_2}]$ siendo $P_{c_1} = a_{k1}a_{12}\dots a_{m-2,m-1}a_{m-1,m}$ y $P_{c_2} = a_{k,k+1}a_{k+1,k+2}\dots a_{n-1,n}a_{nm}$. Denotamos por $\overline{A}$ la matriz parcial obtenida.
Vamos a suponer que $P_{c_1} \leq P_{c_2}$. El caso $P_{c_1} \geq P_{c_2}$ es análogo.
Podemos observar que el subgrafo $\{\{m, m+1, \dots, k\}, \{(m, m+1), (m+1, m+2), \dots, (k, m)\}\}$ asociado a la submatriz $\overline{A}[\{m, m+1, \dots, k\}]$ es un ciclo. Dicha submatriz cumple la C-condición:

$$a_{m,m+1}a_{m+1,m+2}\cdots a_{k-1,k}c_{km} = a_{m,m+1}a_{m+1,m+2}\cdots a_{k-1,k}a_{k,k+1}\cdots a_{n-1,n}a_{nm} \leq 1$$

Por lo tanto y por el teorema 4.3.3, $\overline{A}[\{m, m+1, \dots, k-1, k\}]$ tiene completación TNN. Sea $\overline{\overline{A}}$ la matriz parcial TNN obtenida de $\overline{A}$ al reemplazar $\overline{A}[\{m, m+1, \dots, k-1, k\}]$ por su correspondiente completación.
$\overline{\overline{A}}[\{1, 2, \dots, k-1, k\}]$ es una submatriz, cuyo grafo asociado es un clique con un camino adjunto, que satisface la hipótesis del teorema 4.3.7, por lo que al sustituir dicha submatriz por su correspondiente completación TNN obtenemos una nueva matriz parcial TNN, $\overline{\overline{\overline{A}}}$.
Como la matriz $\overline{\overline{\overline{A}}}$ cumple lo descrito en el teorema 4.3.8, dicho teorema nos permite asegurar la existencia de una completación TNN de $\overline{\overline{\overline{A}}}$ y por tanto

de A.
Para comprobar la necesidad de la condición dada seguimos la demostración del teorema 4.3.2. □

En general, en caso de que un doble ciclo tenga como subgrafo a un camino totalmente especificado, el resultado del teorema 4.3.10 no se cumple aunque las submatrices que especifican los ciclos cumplen la C-condición, como ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.27 *Consideramos la matriz parcial totalmente no negativa*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & 1 & \frac{1}{6} & x_{24} & x_{25} \\ 2 & x_{32} & 1 & 1 & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 & 1 \\ 3 & x_{52} & x_{53} & x_{54} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble ciclo monótonamente etiquetado que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado. Observamos que $\det A[\{3,5\}|\{1,4\}] \geq 0$ *implica que* $x_{54} \geq 1{,}5$*, mientras que con dicho valor el* $\det A[\{4,5\}]$ *es negativo siempre. Por tanto A no tiene completación totalmente no negativa.*

Para este tipo de grafos asociados, doble ciclo monótonamente etiquetado que contiene como subgrafo a un camino totalmente espcificado obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.11 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es un doble ciclo monótonamente etiquetado con uno o más arcos en común, y que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado. Existe una completación TNN de A si y sólo si cada una de las submatrices cuyos grafos asociados son los mencionados ciclos satisface la C-condición, y además la submatriz* *principal de A cuyo grafo asociado es dicho camino totalmente especificado satisface la C_2-condición.*

Demostración: Podemos analizar, sin pérdida de generalidad, exactamente dos tipos de este caso de doble ciclos:

i) G con dos ciclos: $C_1 = \{\{1, 2, \ldots, k\}, \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (k-1, k), (k, 1)\}\}$ y $C_2 = \{\{1, 2, \ldots, n\}, \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (k-1, k), (k, k+1), \ldots, (n-1, n), (n, 1)\}\}$,

ii) $\bar{G}$ que está formado por los ciclos: $\bar{C}_1 = \{\{k, k+1 \ldots, n\}, \{(k, k+1), (k+1, k+2), \ldots, (n-1, n), (n, k)\}\}$ y $\bar{C}_2 = \{\{1, 2, \ldots, n\}, \{(k, k+1), (k+1, k+2), \ldots, (n-1, n), (n, 1), (1, 2) \ldots, (k-1, k)\}\}$.

Analizamos el primer caso mientras que el segundo es análogo. Supongamos que A tiene completación totalmente no negativa A_c. Combinando las desigualdades:

$$\det A_c[\{n-1, n\}|\{1, n\}] = c_{n-1,1} - a_{n-1,n}a_{n1} \geq 0,$$

$$\det A_c[\{n-2, n-1\}|\{1, n-1\}] = c_{n-2,1} - a_{n-2,n-1}c_{n-1,1} \geq 0,$$

$$\det A_c[\{n-3, n-2\}|\{1, n-2\}] = c_{n-3,1} - a_{n-3,n-2}c_{n-2,1} \geq 0,$$

$$\vdots$$

$$\det A_c[\{k+1, k+2\}|\{1, k+2\}] = c_{k+1,1} - a_{k+1,k+2}c_{k+2,1} \geq 0,$$

$$\det A_c[\{k, k+1\}|\{1, k+1\}] = a_{k1} - a_{k,k+1}c_{k+1,1} \geq 0,$$

obtenemos la C_2-condición, es decir, $a_{k1} \geq \dfrac{a_{k,k+1}a_{k+1,k+2} \cdots a_{n-1,n}a_{n1}}{a_{k+1,k+1}a_{k+2,k+2} \cdots a_{nn}}$.
A partir del teorema 4.3.2, es fácil observar que también es una condición necesaria que las submatrices, cuyos grafos asociados son C_1 y C_2, satisfacen la C-condición.

La suficiencia de las condiciones se verifica de forma análoga a la demostración del teorema 4.3.10. □

Podemos extender el resultado de los teoremas 4.3.10 y 4.3.11 al caso de block-ciclo dirigido monótonamente etiquetado.

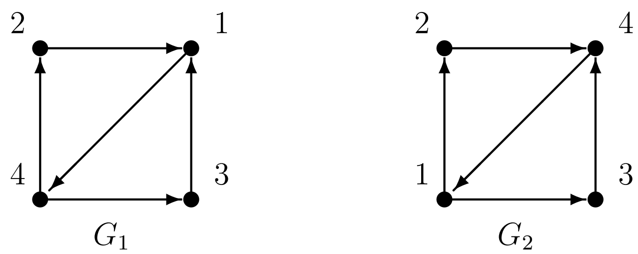
Corolario 4.3.2 *Sea G un block-ciclo dirigido monótonamente etiquetado, formado por el conjunto de ciclos $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$, intersectados dos en dos en uno o más arcos en común. Entonces, toda matriz parcial TNN A con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es G, tiene completación TNN si y sólo si cada submatriz A_i de A cuyo grafo asociado es C_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, cumple la C-condición, y además cada submatriz principal de A cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado satisface la C_2-condición.*

Vemos ahora el caso de un doble ciclo no monótonamente etiquetado.

Lema 4.3.9 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño 4×4, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado, G_A, es doble ciclo con dos ciclos no monótonamente etiquetados y un arco en común, y que no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente especificado. A tiene completación TNN si y sólo si las submatrices principales cuyos grafos asociados son los dos ciclos cumplen la C-condición.*

Demostración: El número de grafos asociados a A que cumplen las condiciones anteriores es bastante numeroso, pero teniendo en cuenta que la total no negatividad se conserva por la semejanza de permutación $P = [n, n -$

$1, \ldots, 1]$, podemos centrar el estudio en los dos grafos siguientes:



Sean

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} \\ a_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & a_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

las matrices parciales TNN cuyos grafos asociados son G_1 y G_2 respectivamente.

En el caso de A_1, elegimos las siguientes completaciones,

$a_1)$ si $a_{42}a_{21} \leq a_{43}a_{31}$

Consideramos la matriz parcial,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/a_{21} & x_{13} & x_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{21}/a_{31} & a_{21}a_{14} \\ x_{31} & a_{31}/a_{21} & 1 & a_{31}a_{14} \\ x_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos a comprobar que las submatrices $B[\{1,2\}]$ y $B[\{2,3,4\}]$ son matrices TNN:

$\det B[\{1,2\}] = 0$

$\det B[\{2,3\}] = 0$

$\det B[\{2,3\}|\{2,4\}] = 0$
$\det B[\{2,3\}|\{3,4\}] = 0$
$\det B[\{2,4\}|\{2,3\}] = a_{43} - \frac{a_{42}a_{21}}{a_{31}} \geq 0$, puesto que $a_{42}a_{21} \leq a_{43}a_{31}$.
$\det B[\{2,4\}|\{3,4\}] = \frac{a_{21}}{a_{31}} - a_{21}a_{14}a_{43} \geq 0$, por la C-condición.
$\det B[\{3,4\}|\{2,3\}] = \frac{a_{43}a_{31}}{a_{21}} - a_{42} \geq 0$, puesto que $a_{42}a_{21} \leq a_{43}a_{31}$.
$\det B[\{3,4\}|\{2,4\}] = \frac{a_{31}}{a_{21}} - a_{31}a_{14}a_{42} \geq 0$, por la C-condición.
$\det B[\{3,4\}] = 1 - a_{43}a_{31}a_{14} \geq 0$, por la C-condición.
$\det B[\{2,3,4\}] = 0$
Por tanto, B es una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es un 1-cordal, con lo cual el teorema 3.2.2 nos permite asegurar que B tiene completación TNN, B_c. Observamos que las posiciones $(1,4)$ y $(3,1)$ de B_c coinciden con a_{14} y a_{31} respectivamente, con lo que B_c es también una completación de A_1.

$a_2)$ si $a_{42}a_{21} > a_{43}a_{31}$

Consideramos la matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & a_{14}a_{42} & a_{14}a_{43} & x_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{43}/a_{42} & x_{24} \\ a_{31} & a_{42}/a_{43} & 1 & 1/a_{43} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

Vemos que sus menores son no negativos:
$\det D[\{1,2\}] = 1 - a_{21}a_{14}a_{42} \geq 0$, por la C-condición,
$\det D[\{1,2\}|\{1,3\}] = \frac{a_{43}}{a_{42}} - a_{21}a_{14}a_{43} \geq 0$, por la C-condición,
$\det D[\{1,3\}|\{1,2\}] = \frac{a_{42}}{a_{43}} - a_{31}a_{14}a_{42} \geq 0$, por la C-condición,
$\det D[\{1,3\}] = 1 - a_{31}a_{14}a_{42} \geq 0$, por la C-condición.
$\det D[\{1,3\}|\{2,3\}] = 0$
$\det D[\{2,3\}|\{1,2\}] = \frac{a_{42}a_{21}}{a_{43}} - a_{31} \geq 0$, puesto que $a_{42}a_{21} \geq a_{43}a_{31}$,
$\det D[\{2,3\}|\{1,3\}] = a_{21} - \frac{a_{43}a_{31}}{a_{42}} \geq 0$, ya que $a_{42}a_{21} \geq a_{43}a_{31}$,
$\det D[\{2,3\}] = 0$
$\det D[\{3,4\}] = 0$

$\det D[\{1,2,3\}] = 0$
Por tanto D es una matriz parcial TNN cuyo grafo asociado es 1-cordal. Aplicando el teorema 3.2.2 a la matriz D obtenemos una completación TNN, D_c. Observamos que las posiciones $(1,4)$ y $(4,2)$ de D_c coinciden con a_{14} y a_{42} respectivamente. Por tanto, D_c es una completación de A_1.
En el caso de la matriz A_2, elegimos las siguientes completaciones,

$b_1)$ si $a_{12}a_{24} \leq a_{13}a_{34}$

$$A_{2c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{13}a_{34} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{13}/a_{12} & a_{24} \\ 1/a_{13} & a_{12}/a_{13} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{41}a_{12} & a_{41}a_{13} & 1 \end{bmatrix}$$

$b_2)$ si $a_{12}a_{24} > a_{13}a_{34}$

$$A_{2c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{12}a_{24} \\ a_{24}a_{41} & 1 & a_{24}/a_{34} & a_{24} \\ a_{34}a_{41} & a_{34}/a_{24} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & 1/a_{24} & 1/a_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

Siguiendo los pasos del apartado $a)$ podemos demostrar que A_{2_c} es una completación TNN.
Comprobamos a continuación la necesidad de la condición. Sea A_{1c} una completación TNN de A_1. De las desigualdades $\det A_{1_c}[\{3,4\}] \geq 0$ y $\det A_{1_c}[\{1,3\}|\ \{1,4\}] \geq 0$ deducimos que $a_{14}a_{43}a_{31} \leq 1$. Por otra parte, combinanado $\det A_{1_c}[\{2,4\}] \geq 0$ y $\det A_{1_c}[\{1,2\}|\{1,4\}] \geq 0$ obtenemos $a_{14}a_{42}a_{21} \leq 1$. El caso A_2 se demuestra de forma análoga. □

La generalización del lema anterior a matrices de tamaño $n \times n$ constituye el contenido de la siguiente conjetura.

Conjetura 4.3.1 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n > 4$, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado, G_A, es doble ciclo,* *con dos ciclos no monótonamente etiquetados y un arco en común, y que no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente especificado. A tiene completación TNN si y sólo si la submatriz principal asociada a cada ciclo cumple la C-condición.*

El resultado anterior no se cumple en caso de que el grafo asociado, doble ciclo, tenga como subgrafo a un camino totalmente especificado.

Ejemplo 4.3.28 *Consideramos la matriz parcial totalmente no negativa*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & 1 & x_{15} \\ 1 & 1 & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} & 1 \\ x_{41} & 0{,}5 & 1 & 1 & x_{45} \\ x_{51} & 1 & x_{53} & x_{54} & 1 \end{bmatrix},$$

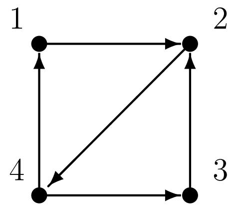
cuyo grafo asociado es un doble ciclo, con dos ciclos no monótonamente etiquetados, que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado. Observamos que $\det A[\{3,4\}|\{3,5\}] \geq 0$ *implica que* $x_{45} \geq 1$*, mientras que con dicho valor el* $\det A[\{4,5\}|\{2,5\}]$ *es negativo siempre. Por tanto A no tiene completación totalmente no negativa.*

El resultado del lema 4.3.9 se puede extender al caso en que uno de los ciclos que compone el doble ciclo es monótonamente etiquetado, añadiendo otra condición a la C-condición.

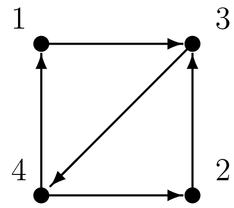
Si denotamos por P_c el producto de los elementos conocidos en la matriz parcial que corresponden a los arcos de un determinado ciclo C, entonces podemos establecer el siguiente resultado.

Lema 4.3.10 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño 4×4, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado, G, es un doble ciclo dirigido no monótonamente etiquetado con dos ciclos, C_1 monótonamente etiquetado* *y C_2 no monótonamente etiquetado y un arco en común, y que no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente especificado. Entonces A tiene completación TNN si y sólo si las submatrices cuyos grafos asociados son los dos ciclo satisfacen la C-condición y además se cumple $P_{c_1} \geq P_{c_2}$.*

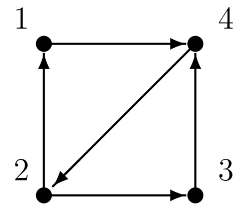
Demostración: Demostramos el resultado para cada una de las matrices A_i que tenga un grafo asociado G_i que verifique las condiciones del enunciado. A continuación detallamos las distintas posibilidades habiendo eliminado del listado los que corresponden a matrices semejantes por la permutación $P = [n, n-1, \ldots, 1]$ en virtud de la proposición 3.2.1.



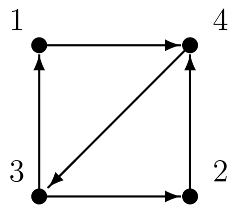
G_1



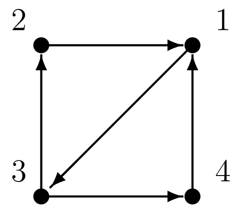
G_2



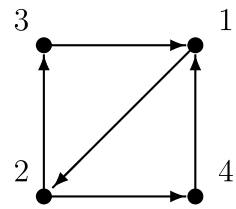
G_3



G_4



G_5



G_6

Vamos a demostrar que la matriz

$$A_{1_c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{24}a_{43} & a_{12}a_{24} \\ a_{41}/a_{43}a_{32} & 1 & a_{24}a_{43} & a_{24} \\ a_{41}/a_{43} & a_{32} & 1 & 1/a_{43} \\ a_{41} & a_{43}a_{32} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

es una completación TNN de A_1.

Consideramos la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{14} & x_{14} \\ a_{41}/a_{43}a_{32} & 1 & a_{24}a_{43} & a_{24} \\ x_{42} & a_{32} & 1 & 1/a_{43} \\ x_{41} & a_{43}a_{32} & a_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

una matriz parcial TNN, puesto que:

$\det B[\{1,2\}] = 1 - \frac{a_{41}a_{12}}{a_{43}a_{32}} \geq 0$, por la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$.

$\det B[\{2,3\}] = 1 - a_{32}a_{24}a_{43} \geq 0$, por la C-condición.

$\det B[\{2,3\}|\{2,4\}] = \frac{1}{a_{43}} - a_{32}a_{24} \geq 0$, por la C-condición.

$\det B[\{2,4\}] = 1 - a_{24}a_{43}a_{32} \geq 0$, por la C-condición.

$\det B[\{2,4\}|\{2,3\}] = a_{43} - a_{43}a_{32}a_{24}a_{43} \geq 0$, por la C-condición.

$\det B[\{2,4\}|\{3,4\}] = 0$

$\det B[\{3,4\}|\{2,3\}] = 0$

$\det B[\{3,4\}|\{2,4\}] = 0$

$\det B[\{3,4\}] = 0$

$\det B[\{2,3,4\}] = 0$

Aplicando el teorema 3.2.2 a la matriz B (cuyo grafo asociado es un 1-cordal monótonamente etiquetado) obtenemos una completación TNN, B_c, cuyo elemento de la posición $(4,1)$ coincide con el elemento de la misma posición en la matriz A_1, por lo que B_c es una completación TNN de A_1.

Para demostrar la necesidad de la condición, supongamos que A_1 tiene una completación TNN, $A_{1_c} = (c_{ij})$. Observamos que los menores $\det A_{1_c}[\{1,4\}|\{1,2\}] \geq 0$ y $\det A_{1_c}[\{2,4\}] \geq 0$ implican que $a_{41}a_{12}a_{24} \leq 1$, y del mismo modo $\det A_{1_c}[\{2,3\}|\{3,4\}] \geq 0$ y $\det A_{1_c}[\{2,4\}] \geq 0$ implican $a_{43}a_{32}a_{24} \leq 1$, por tanto, las submatrices $A_1[\{1,2,4\}]$ y $A_1[\{2,3,4\}]$ satisfacen la C-condición.

Por otra parte, combinando las desigualdades $\det A_{1_c}[\{1,4\}|\{1,2\}] \geq 0$ y $\det A_{1_c}[\{3,4\}|\{2,3\}] \geq 0$ obtenemos $a_{43}a_{32} \geq a_{12}a_{24}$ y por lo tanto, conseguimos la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$.

Se demuestra de forma análoga al caso anterior que las siguientes matrices A_{i_c} son completaciones TNN de las matrices A_i cuyos grafos asociados son los anteriores G_i.

$$A_{2_c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}/a_{23} & a_{13} & a_{13}a_{23}a_{34} \\ a_{41}/a_{42} & 1 & a_{23} & a_{23}a_{34} \\ a_{34}a_{41} & a_{34}a_{42} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 1/a_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{3_c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{14}/a_{23}a_{34} & a_{14}/a_{34} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{23}a_{34} \\ a_{34}a_{42}a_{21} & a_{34}a_{42} & 1 & a_{34} \\ a_{42}a_{21} & a_{42} & 1/a_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{4_c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{14}/a_{24} & a_{14}a_{43} & a_{14} \\ a_{31}/a_{32} & 1 & a_{24}a_{43} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 1/a_{43} \\ a_{43}a_{31} & a_{43}a_{32} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{5_c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{13}a_{32} & a_{13} & a_{13}a_{34} \\ a_{21} & 1 & 1/a_{32} & a_{34}/a_{32} \\ a_{32}a_{21} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{41}/a_{21} & a_{41}/a_{32}a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{6_c} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{23} & a_{12}a_{23}a_{34} \\ a_{23}a_{31} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 1/a_{23} & 1 & a_{24}/a_{23} \\ a_{41} & a_{41}/a_{23}a_{31} & a_{41}/a_{31} & 1 \end{bmatrix}$$

□

Sin embargo, en general, cuando el grafo asociado en cuestión contiene a un camino totalmente especificado como subgrafo, la completación totalmente no negativa no existe.

Ejemplo 4.3.29 *Consideramos la matriz parcial totalmente no negativa*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & 1 \\ 1 & x_{32} & 1 & 0{,}5 \\ x_{41} & x_{42} & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble ciclo, con un camino monótonamente etiquetado y el otro no, y que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado. Observamos que $\det A[\{1,2\}] \geq 0$ *implica que* $x_{21} \leq 1$*, mientras que* $\det A[\{2,3\}|\{1,4\}] \geq 0$ *implica que* $x_{21} \geq 2$*. Por tanto* A *no tiene completación totalmente no negativa.*

Podemos ver que el lema 4.3.10 es cierto en diferentes ejemplos de matrices parciales de tamaño 5×5.

Ejemplo 4.3.30 *Consideramos la matriz parcial* TNN

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & x_{14} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 & x_{45} \\ x_{51} & a_{52} & x_{53} & x_{54} & 1 \end{bmatrix}, \quad con \quad a_{ij} \quad no \quad nulos,$$

cuyo grafo asociado está formado por dos ciclos, uno es monótonamente etiquetado y el otro no. Es fácil ver que la siguiente matriz es una completación TNN *de* A.

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{23} & a_{12}a_{23}a_{34} & a_{12}a_{23}a_{35} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & a_{23}a_{34} & a_{23}a_{35} \\ 1/a_{12}a_{23} & 1/a_{23} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{41}a_{12} & 1/a_{34} & 1 & a_{35}/a_{34} \\ a_{52}/a_{12} & a_{52} & a_{52}/a_{34}a_{41}a_{12} & a_{52}/a_{41}a_{12} & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, presentamos la siguiente conjetura.

Conjetura 4.3.2 *Sea G un grafo dirigido formado por dos ciclos, C_1 monótonamente etiquetado y C_2 no monótonamente etiquetado, con un arco en común, y que no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente especificado. Toda matriz parcial TNN, de tamaño $n \times n$, $n > 4$, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es G tiene completación TNN si y sólo si las submatrices cuyos grafos asociados son C_1 y C_2 cumplen la C-condición y además $P_{c_1} \geq P_{c_2}$.*

Capítulo 5

Problemas abiertos

Como ya habíamos comentado, el problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas, ha sido analizado fundamentalmente en dos trabajos, [31] y [34]. En el primero de ellos, C. R. Johnson, B. K. Kroschel and M. Lundquist abordaron el problema para matrices posicionalmente simétricas, lo cual indica que los grafos asociados que fueron considerados eran grafos no dirigidos. Dichos autores dieron unos resultados, de entre los cuales destacamos el siguiente:

> *El problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas está cerrado en el caso de que el grafo asociado a la matriz parcial sea* 1*-cordal monótonamente etiquetado.*

Como vemos, además del tipo de grafos asociados, el etiquetado de los vértices ha sido también un factor importante a la hora de buscar las completaciones deseadas, dando así una vía abierta para la investigación en este tipo de problemas de completación.

Problema 5.0.1 *¿Bajo qué condiciones una matriz parcial, totalmente no negativa, cuyo grafo asociado es* 1*-cordal, no monótonamente etiquetado, tiene una completación totalmente no negativa?*

Los citados autores demuestran también que el problema de completación tiene, en general, respuesta negativa para matrices parciales con grafos asociados k-cordales, $k > 1$. Hasta donde sabemos, sigue siendo un problema abierto.

Problema 5.0.2 *¿Bajo qué condiciones una matriz parcial, totalmente no negativa, cuyo grafo asociado es k-cordal, $k > 1$, tiene una completación totalmente no negativa?*

En el segundo trabajo, C. Jordán y J. R. Torregrosa, continuaron con el estudio al problema para matrices posicionalmente simétricas, analizando el caso de algunos grafos 1-cordales no monótonamente etiquetados y el de ciclos, tanto monótonamente etiquetados como no monótonamente etiquetados. En el caso de caminos, los autores dan una condición suficiente, la CP-condición, para la existencia de completaciones totalmente no negativas. Sigue siendo una cuestión abierta la demostración de la necesidad de la condición para el siguiente resultado.

Conjetura 5.0.3 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, $n > 3$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un camino no dirigido no monótonamente etiquetado. Entonces A tiene completación totalmente no negativa si y sólo si cumple la CP-condición.*

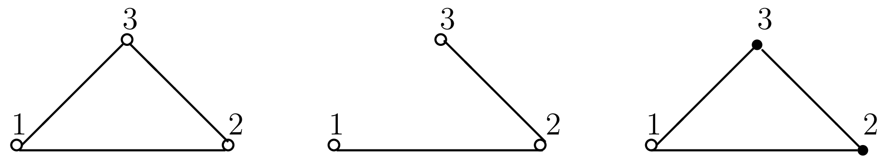
Por otra parte, C. Jordán y J. R. Torregrosa cierran el problema en el caso de ciclos no dirigidos monótonamente etiquetados para matrices parciales con elementos especificados no nulos exigiendo la condición SS-diagonal. No obstante, en esta tesis vemos que el resultado es cierto incluso con elementos especificados nulos fuera de la diagonal:

> *En el caso de ciclos no dirigidos monótonamente etiquetados, las matrices totalmente no negativas tienen completaciones totalmente no negativas si y sólo si se cumple la condición SS-diagonal.*

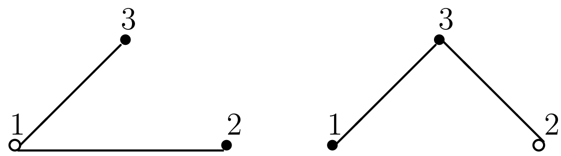
Sin embargo, el caso de ciclos no dirigidos no monótonamente etiquetados, queda como cuestión abierta.

Problema 5.0.3 *Dado G un ciclo no dirigido no monótonamente etiquetado. Sea A una matriz parcial totalmente no negativa, cuyo grafo asociado es G. ¿Bajo qué condiciones A tiene completación totalmente no negativa?*

En los resultados mencionados, se trabajaba con matrices parciales cuyas diagonales están especificadas. También, en la mayoría de los resultados del capítulo anterior hemos supuesto que la diagonal principal está especificada. Dicha suposición viene después de demostrar que, en general, con posiciones diagonales no especificadas, no existe la completación deseada. Hemos visto, que podemos encontrar grafos, como los siguientes, (representando por circulos vacíos las posiciones diagonales no especificadas)



cuyas matrices asociadas totalmente no negativas y con elementos especificados no nulos, tienen completaciones del mismo tipo. Por el contrario, podemos encontrar matrices parciales totalmente no negativas, cuyos grafos asociados son:



que no tienen completaciones totalmente no negativas.

Por lo tanto, planteamos la siguiente cuestión.

Problema 5.0.4 *¿Bajo qué condiciones podemos afirmar que una matriz* *parcial totalmente no negativa de tamaño $n \times n$, $n \geq 3$, que contiene elementos diagonales no especificados, puede tener completación totalmente no negativa?*

El problema de completación de matrices totalmente no negativas, para matrices parciales no posicionalmente simétricas, ha sido abordado exclusivamente en esta memoria, obteniendo condiciones necesarias y suficientes, para la existencia de completaciones, en distintos tipos de grafos: caminos, ciclos, caminos totalmente especificados, etc.

> *El problema está cerrado en el caso de caminos dirigidos monótonamente etiquetados, mientras que en el caso de no monótonamente etiquetados hace falta que las matrices parciales no tengan elementos nulos.*

Sin embargo, hemos tenido que abordar el problema con condiciones al tratarse de ciclos.

> *Para las matrices parciales totalmente no negativas, con elementos especificados no nulos y cuyos grafos asociados son ciclos dirigidos, la C-condición ha sido necesaria y suficiente para cerrar el problema.*

También hemos tenido que utilizar otra condición necesaria y suficiente en el caso de caminos totalmente especificados.

> *Dada una matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado, monótonamente etiquetado, si $n = 3$ siempre existe completación totalmente no negativa, pero para $n \geq 4$ existe la completación deseada si y sólo si la matriz cumple la C_1-condición.*

En caso de caminos totalmente especificados no monótonamente etiquetados, el resultado es cierto para matrices de tamaño $n \times n$, $n = 3$. En cambio para $n = 4$, hemos visto que la C_1-condición no es suficiente para la existencia de completaciones totalmente no negativas, por tanto, hemos introducido la C_2-condición como condición suficiente. Actualmente estamos trabajando en la demostración de la siguiente conjetura para el caso general.

Conjetura 5.0.4 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, $n > 4$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado. Entonces A tiene completación totalmente no negativa si cumple la C_2-condición.*

Como generalización del caso de los caminos totalmente especificados, hemos continuado con el análisis del problema de completación para matrices parciales totalmente no negativas cuyos grafos asociados son doble-caminos. Dividimos este caso en dos: cuando uno de los caminos es monótonamente etiquetado y el otro no, y cuando los dos caminos son no monótonamente etiquetados.

> *El problema está cerrado para matrices de tamaño $n \times n$, con elementos especificados no nulos y cuyos grafos asociados son doble-caminos, con un camino monótonamente etiquetado y el otro no.*

En el caso de doble-camino con dos caminos no monótonamente etiquetados, el problema sigue abierto. Aunque para algunas matrices parciales de tamaño 4×4 con elementos especificados no nulos existe la completación totalmente no negativa, seguimos trabajando para encontrar la completación deseada en el caso de matrices de tamaño $n \times n$, $n > 4$. Hemos dividido dicho problema abierto en dos casos: cuando ambos caminos tienen vértice de inicio etiquetado con $i_1 = 1$ y cuando la etiquetación del vértice de inicio es distinta de 1. En el primer caso nos encontramos ante la siguiente cuestión.

Problema 5.0.5 *Sea A una matriz parcial TNN de tamaño $n \times n$, $n > 4$, cuyo grafo asociado es un doble-camino con dos caminos no monótonamente etiquetados. ¿Bajo qué condiciones existe la completación totalmente no negativa, cuando ambos caminos tienen el vértice de inicio con la numeración $i_1 = 1$?.*

No obstante, cuando la etiquetación del vértice de inicio es distinta de 1, la completación totalmente no negativa existe bajo ciertas condiciones.

> *El problema está bien analizado en el caso de doble-camino con caminos no monótonamente etiquetados y el vértice de inicio es distinto de* 1.

En el análisis de otros tipos de grafos asociados hemos abordado los cliques con caminos adjuntos. En concreto dos tipos de grafos:

i) $G_1 = (V_1, E_1)$, con $V_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$, es el grafo formado por un clique con vértices $\{k, k+1, \ldots, n\}$ y un camino dirigido $\{(n, 1), (1, 2), \ldots, (k-1, k)\}$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$.

ii) $G_2 = (V_2, E_2)$, con $V_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$, es el grafo formado por un clique con vértices $\{1, 2, \ldots, k\}$ y un camino dirigido $\{(k, k+1), (k+1, k+2), \ldots, (n-1, n), (n, m)\}$, $m = 1, 2, \ldots, k$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$.

En los dos casos, la completación totalmente no negativa existe para matrices de tamaño $n \times n$, cuando el camino adjunto es de 3 vértices y para caminos de longitud mayor también dicha completación existe bajo ciertas condiciones necesarias y suficientes.

Problema 5.0.6 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa cuyo grafo asociado es un clique con camino adjunto, distino de G_1 y G_2 antes mencionados. ¿Bajo qué condiciones A tiene completación totalmente no negativa?*

Por último, hemos obtenido resultados para los doble ciclos distinguiendo dichos grafos por el número de vértices en común y también por la monotonía de los ciclos. En el caso de un vértice en común, tenemos el siguiente resultado.

> *Para el caso de doble ciclo con ciclos monótonamente etiquetables y un vértice en común, existe la completación totalmente no negativa si y sólo si las submatrices que especifican cada ciclo satisfacen la C-condición.*

En general, con ciclos no monótonamente etiquetables, no existe la completación deseada.

Problema 5.0.7 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa, cuyo grafo asociado es un doble ciclo con dos ciclos no monótonamente etiquetables y un vértive en común. ¿Bajo qué condiciones A tiene una completación totalmente no negativa?*

No obstante, para doble ciclos con un arco o más en común, obtenemos los siguientes resultados: por una parte, cuando los ciclos son monótonamente etiquetados.

> *Toda matriz parcial totalmente no negativa cuyo grafo asociado es un doble ciclo monótonamente etiquetado con uno o más arcos en común, y que no contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado, tiene completación totalmente no negativa exigiendo la C-condición como necesaria y suficiente para las submatrices que especifican los ciclos. Sin embargo, si el mencionado doble ciclo contiene a un camino totalmente especificado como subgrafo, además de la condición anterior, la submatriz principal cuyo grafo asociado es dicho camino totalmente especificado debe satisfacer la C_2-condición como necesaria y suficiente.*

El corolario 4.3.2 generaliza los resultados obtenidos para el caso de block-ciclo monótonamente etiquetado.

Por otra parte, la C-condición es también necesaria y suficiente para matrices de tamaño $n \times n$, $n = 4$, cuyo grafo asociado es doble ciclo con dos ciclos no monótonamente etiquetados y un arco en común, y que no contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado. En cambio, para $n > 4$, podemos generalizar el resultado como en la conjetura 4.3.1.

Finalmente para el caso de doble ciclo con un ciclo monótonamente etiquetado y el otro no, podemos ver conjetura 4.3.2.

Problema 5.0.8 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa cuyo grafo asociado es un doble ciclo no monótonamente etiquetado que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado. ¿Bajo qué condiciones A tiene completación totalmente no negativa?*

Parte III

Otros tipos de matrices parciales

Capítulo 6

Introducción

En esta parte, vamos a analizar el problema de completación de otros tipos de matrices parciales: las matrices totalmente no positivas, las R-matrices y las TR-matrices. Con el estudio de las matrices parciales totalmente no positivas se aborda otra clase de matrices donde todos los menores tienen el mismo signo. Esta denominación de matrices recibe el nombre de "Sign-Regular Matrices" en diferentes trabajos de investigación, ver [13], [10] y [20]. En cambio, con las R-matrices, se centra en la no singularidad de las submatrices principales, y se generaliza este último concepto en el caso de TR-matrices, cuyos menores (principales y no principales) son distintos de cero.

6.1. Matrices totalmente no positivas

Una matriz real $A = (-a_{ij})$ se dice que es una matriz totalmente no positiva si todos sus menores son no positivos.

El estudio de este tipo de matrices supone un análisis paralelo al de las matrices totalmente no negativas. Aun así, dicha clase de matrices ha recibido menos atención históricamente que las matrices totalmente no negativas.

En el próximo capítulo, abordamos el problema de completación de matrices parciales totalmente no positivas. Es decir, analizamos matrices parciales cuyas submatrices completamente especificadas son totalmente no positivas. Concretamente, veremos el caso de matrices no posicionalmente simétricas, siendo el problema para las matrices posicionalmente simétrica analizado y estudiado por Araújo, Torregrosa y Urbano en [2]. Dichos autores cierran el problema para el caso de 1-cordal monótonamente etiquetado, y además proponen condiciones necesarias y suficientes para el caso de ciclos monótonamente etiquetados.

En el capítulo 7 estudiamos el problema mencionado, distinguiendo dos tipos de grafos asociados: los acíclicos y los no acíclicos. Observamos, que los resultados obtenidos para las matrices parciales totalmente no positivas tienen cierta semejanza con el caso de las totalmente no negativas.

6.2. R y TR-matrices

Una matriz real $A = (a_{ij})$ se dice que es una R-matriz (TR-matriz) si todos sus menores principales (todos sus menores principales o no) son no nulos. Las R-matrices están conectadas con otros tipos de matrices como las P-matrices, matrices totalmente no negativas y matrices totalmente no positivas: toda matriz de cualquiera de esas clases es una R-matriz. Mientras que las TR-matrices son una generalización del concepto de R-matriz.

Por otra parte, por definición, toda TR-matriz es R-matriz. Sin embargo, en general, una R-matriz no es TR-matriz, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.2.1 *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A es una R-matriz, ya que todas las submatrices principales tienen determinante no nulo. En cambio, no es una TR-matriz, puesto que, podemos encontrar un menor con el valor nulo: $\det A[\{1,2\}|\{2,3\}] = 0$.

En los capítulos 8 y 9, cerramos el problema de completación de R y TR-matrices parciales, para matrices posicional y no posicionalmente simétricas.

Capítulo 7

Matrices totalmente no positivas

En este capítulo, estudiamos el problema de completación de matrices parciales totalmente no positivas, estableciendo condiciones necesarias y suficientes, similares a las obtenidas en el capítulo 4, que nos permiten garantizar la existencia de la completación deseada.

Definición 7.0.1 *Se dice que una matriz real $A = (-a_{ij})$, es una matriz totalmente no positiva si todos los menores de A tienen valor no positivo.*

A continuación presentamos las propiedades utilizadas para este tipo de matrices. Para más información ver [13].

Proposición 7.0.1 *Sea $A = (-a_{ij})$ una matriz totalmente no positiva de tamaño $n \times n$. Entonces:*

1. *Si D es una matriz diagonal positiva, entonces DA y AD son matrices totalmente no positivas.*

2. *Si D es una matriz diagonal positiva, entonces DAD^{-1} es una matriz totalmente no positiva.*

3. *La total no positividad, en general, no se mantiene por la semejanza de permutación. Como caso particular, si* $P = [n, n-1, \dots, 2, 1]$*, entonces* PAP^T *es una matriz totalmente no positiva.*

4. *Si* B *es una matriz totalmente no positiva de tamaño* $m \times m$*, entonces la matriz*
$$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$
es una matriz totalmente no positiva.

5. *Cualquier submatriz de* A *(principal y no principal) es totalmente no positiva.*

6. *Si* $a_{ii} \neq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$*, entonces* $a_{ij} \neq 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$*.*

Como hemos comentado, el concepto de total no positividad es heredado por las submatrices tanto principales como no principales. Por tanto, y llevando dicho concepto al contexto de matrices parciales, podemos dar la siguiente definición.

Definición 7.0.2 *Se dice que una matriz parcial* A *es una matriz parcial totalmente no positiva si toda submatriz completamente especificada es totalmente no positiva.*

Denotamos por TNP la total no positividad, es decir, aparece en los resultados las abreviaciones matrices parciales TNP, completación TNP, ..., señalando que como en el resto de esta memoria consideramos matrices cuadradas.

Empezamos comprobando que el problema en general tiene respuesta negativa, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.0.2 *La siguiente matriz parcial* TNP *no posicionalmente simétrica,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} \\ -x_{21} & -1 & -0{,}5 \\ -1 & -x_{32} & -1 \end{bmatrix},$$

no tiene completación TNP*, ya que* $\det A[\{2,3\}] \leq 0$ *y* $\det A[\{1,3\}|\{1,2\}] \leq 0$ *si* $x_{32} \geq 2$ *y* $x_{32} \leq 1$*, respectivamente.*

Vamos a considerar matrices parciales con diagonal principal especificada, sin elementos nulos, no siendo ciertos en general, en caso contrario, los resultados que presentamos. La proposición 7.0.1 nos permite entonces suponer a lo largo de todo el capítulo que la diagonal principal está formada por $-1's$. Además, al ser los elementos diagonales distintos de cero, podemos afirmar por dicha proposición que el resto de elementos especificados es también no nulo.

Por las propiedades, sabemos que el concepto de total no positividad no se conserva por semejanza de permutación, con lo cual es necesario considerar las distintas etiquetaciones de los vértices del grafo asociado. Distinguimos, por tanto, entre los casos de grafos asociados monótona y no monótonamente etiquetados. Tanto en uno como en otro no existe en general la completación deseada. A este efecto recordamos el ejemplo 7.0.2 para el caso monótonamente etiquetado. Para grafos no monótonamente etiquetados podemos considerar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.0.3 *La matriz parcial* TNP*,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -x_{12} & -0{,}7 \\ -1 & -1 & -x_{23} \\ -x_{31} & -1 & -0{,}8 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado, tiene *los menores* $\det A[\{1,2\}] \leq 0$ *y* $\det A[\{1,3\}|\{2,3\}] \leq 0$ *si* $x_{12} \geq 1$ *y* $x_{12} \leq 7/8$, *respectivamente. Por lo tanto,* A *no tiene completación* TNP.

7.1. Grafos no acíclicos

En esta sección analizamos el problema de completación de matrices parciales totalmente no positivas en los casos de ciclos, doble ciclos y cliques con caminos adjuntos.

Ciclos

Como ya hemos visto en el ejemplo 7.0.2, el resultado en general no es cierto en este caso. A fin de resolver el problema, introducimos la siguiente condición.

Definición 7.1.1 *Sea* $A = (-a_{ij})$ *con* $a_{ij} > 0$, *una matriz parcial de tamaño* $n \times n$, *cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido* $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}$. *Decimos que* A *cumple la* $\bar{C}$*-condición si*

$$\frac{a_{i_1,i_2} a_{i_2,i_3} \cdots a_{i_{n-1},i_n} a_{i_n,i_1}}{a_{i_1,i_1} a_{i_2,i_2} \cdots a_{i_n,i_n}} \geq 1.$$

La anterior condición es necesaria y suficiente para el caso de matrices parciales de tamaño 3×3.

Lema 7.1.1 *Sea* A *una matriz parcial* TNP, *de tamaño* 3×3, *cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido monótonamente etiquetado. Existe completación* TNP, A_c *de* A, *si y sólo si* A *satisface la* $\bar{C}$*-condición.*

Demostración: Sea A_c una completación TNP de A,

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -c_{13} \\ -c_{21} & -1 & -a_{23} \\ -a_{31} & -c_{32} & -1 \end{bmatrix},$$

donde c_{ij} tiene valor positivo. De las desigualdades $\det A_c[\{2,3\}|\{1,3\}] \leq 0$ y $\det A_c[\{1,2\}] \leq 0$ obtenemos $a_{12}a_{23}a_{31} \geq 1$.
Para la suficiencia de la condición, es fácil comprobar que la siguiente matriz,

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -a_{12}a_{23} \\ -1/a_{12} & -1 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{31}a_{12} & -1 \end{bmatrix},$$

es una completación TNP. □

Teniendo en cuenta el desarrollo de la demostración del teorema 4.3.2, podemos generalizar el resultado anterior.

Teorema 7.1.1 *Sea $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, una matriz parcial TNP, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido monótonamente etiquetado. Existe completación TNP, A_c de A, si y sólo si A satisface la $\bar{C}$-condición.*

A continuación, estudiamos el problema para las matrices parciales cuyos grafos asociados son ciclos dirigidos no monótonamente etiquetados. Veremos que en este caso la $\bar{C}$-condición es también necesaria y suficiente para garantizar la existencia de completaciones totalmente no positivas.

Es fácil verificar el siguiente resultado siendo la demostración análoga a la del teorema 4.3.3.

Teorema 7.1.2 *Sea $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, una matriz parcial TNP, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado. Existe completación TNP, A_c de A, si y sólo si A satisface la $\bar{C}$-condición.*

Clique con un camino adjunto

Al igual que en otros casos, para este tipo de grafos, el problema tampoco tiene ahora respuesta afirmativa.

Ejemplo 7.1.1 *Consideramos la matriz parcial* TNP

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} & -x_{14} & -x_{15} \\ -x_{21} & -1 & -1 & -x_{24} & -x_{25} \\ -x_{31} & -x_{32} & -1 & -1 & -1 \\ -x_{41} & -x_{42} & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -x_{52} & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dado que si $\det A[\{1,5\}|\{1,2\}] \leq 0$ *y* $\det A[\{2,5\}|\{2,3\}] \leq 0$, $x_{52} \leq 1$ *y* $x_{52} \geq 2$ *respectivamente, entonces no existe completación* TNP *de* A.

Sin embargo, y visto el texto de la demostración del lema 4.3.5, análogamente podemos afirmar lo siguiente.

Lema 7.1.2 *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo no monótonamente etiquetado, con* $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, *formado por un clique cuyos vértices son* $\{2, 3, \ldots, n\}$ *y un camino dirigido* $\{(n, 1), (1, 2)\}$. *Cada matriz parcial* TNP, $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, *cuyo grafo asociado es* G *tiene completación* TNP.

En general, el resultado anterior no es cierto cuando el número de vértices del camino dirigido es mayor que 3, como podemos ver en el ejemplo 7.1.1.

Generalizando el resultado anterior introducimos, de forma análoga al teorema 4.3.7, una condición necesaria y suficiente para la existencia de una completación totalmente no positiva.

Teorema 7.1.3 *Sea* $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, *una matriz parcial* TNP *de tamaño* $n \times n$, $n \geq 4$, *cuyo grafo asociado es la unión de un clique de vértices* $\{k, k+1, \ldots, n\}$ *y un camino dirigido con el conjunto de arcos* $\{(n, 1), (1, 2), \ldots, (k-1, k)\}$, $k \geq 3$. *Existe una completación* TNP *de* A *si y sólo si la submatriz de* A *cuyo grafo asociado es el camino totalmente especificado formado por el conjunto de arcos* $\{(n, 1), (1, 2), \ldots, (k-1, k), (n, k)\}$ *satisface la* C_1*-condición.*

Análogamente al lema 4.3.7, podemos establecer el siguiente resultado para matrices parciales totalmente no positivas.

Lema 7.1.3 *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo no monótonamente etiquetado, con* $V = \{1, 2, \ldots, n\}$*, formado por un clique de vértices* $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ *y un camino dirigido* $\{(n-1, n), (n, m)\}$*,* $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$*. Cada matriz parcial* TNP*,* $A = (-a_{ij})$*,* $a_{ij} > 0$*, cuyo grafo asociado es* G *tiene completación* TNP*.*

Al igual como hemos visto en el ejemplo 7.1.1, en general el resultado anterior tampoco es cierto cuando el camino dirigido tiene más de 3 vértices.

Ejemplo 7.1.2 *Consideramos la matriz parcial* TNP

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -x_{14} & -x_{15} \\ -1 & -1 & -1 & -x_{24} & -x_{25} \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -x_{35} \\ -x_{41} & -x_{42} & -x_{43} & -1 & -1 \\ -2 & -x_{52} & -x_{53} & -x_{53} & -1 \end{bmatrix}.$$

Vemos que A *no tiene completación* TNN*, puesto que si* $\det A[\{3,4\}|\{1,4\}] \leq 0$*,* $x_{41} \geq 3$*, y si* $\det A[\{4,5\}|\{1,5\}] \leq 0$*, entonces* $x_{41} \leq 2$*.*

El siguiente resultado se demuestra de forma análoga al teorema 4.3.8.

Teorema 7.1.4 *Sea* $A = (-a_{ij})$*,* $a_{ij} > 0$*, una matriz parcial* TNP *de tamaño* $n \times n$*,* $n \geq 4$*, cuyo grafo asociado es la unión de un clique con los vértices* $\{1, 2, \ldots, k\}$*, y un camino dirigido con conjunto de arcos* $\{(k, k+1), (k+1, k+2), \ldots, (n-1, n), (n, m)\}$*,* $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$*. Entonces existe una completación* TNP *de* A *si y sólo si la submatriz de* A *cuyo grafo asociado es el camino totalmente especificado formado por el conjunto de arcos* $\{(k, k+1), (k+1, k+2), \ldots, (n-1, n), (n, m), (k, m)\}$ *satisface la* C_1*-condición.*

Doble ciclos

A continuación abordamos la existencia de completaciones totalmente no positivas en el caso de doble ciclos con un número arbitrario de vértices o arcos en común. En este caso, el resultado en general no es cierto, lo que ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1.3 *La siguiente matriz parcial TNP,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} & -x_{14} \\ -x_{21} & -1 & -0{,}5 & -x_{24} \\ -1 & -x_{32} & -1 & -1 \\ -x_{41} & -0{,}8 & -x_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble ciclo monótonamente etiquetado con un arco en común, no tiene completación TNP ya que $A[\{1,2,3\}]$ no la tiene, como comprobamos en el ejemplo 7.0.2.

Si el grafo asociado a la matriz parcial es un doble ciclo con un vértice en común, podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 7.1.5 *Sea $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ un doble ciclo formado por los ciclos monótonamente etiquetables $C_1 = (V_1, E_1)$ y $C_2 = (V_2, E_2)$. Toda matriz parcial TNP, $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es G tiene completación TNP si y sólo si las submatrices asociadas a los mencionados ciclos cumplen la $\bar{C}$-condición.*

Demostración: A partir de los teoremas 7.1.1 y 7.1.2 podemos completar las submatrices principales cuyos grafos asociados son los mencionados ciclos, obteniendo una matriz parcial TNP cuyo grafo asociado es un 1-cordal. Por tanto, a partir de [2], existe la completación deseada. Por otra parte, la necesidad de la condición se demuestra siguiendo los mismos pasos de la demostración de los teoremas 7.1.1 y 7.1.2.

Corolario 7.1.1 *Sea G un block-ciclo formado por el conjunto de ciclos monótonamente etiquetables $\{C_1,\ C_2,\ldots,C_k\}$ e intersectados exactamente en un vértice. Entonces, toda matriz parcial TNP, $A=(-a_{ij})$, $a_{ij}>0$, cuyo grafo asociado es G tiene completación TNP si y sólo si cada submatriz A_i de A, cuyo grafo asociado es C_i, $i=1,2,\ldots,k$ cumple la $\bar{C}$-condición.*

En general, cuando los ciclos no son monótonamente etiquetables, no existe la completación deseada.

Ejemplo 7.1.4 *Consideramos la matriz parcial TNP*

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -x_{12} & -x_{13} & -1 \\ -x_{21} & -1 & -1 & -x_{24} \\ -0{,}5 & -x_{32} & -1 & -x_{34} \\ -x_{41} & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble ciclo. Observamos que los dos ciclos no son monótonamente etiquetables. Si $\det A[\{3,4\}]\leq 0$ *y* $\det A[\{1,3\}|\{1,4\}]\leq 0$ *entonces* $x_{34}\geq 1$ *y* $x_{34}\leq 0{,}5$ *respectivamente. Por tanto, A no tiene completación TNP.*

Vemos, sin embargo, que la $\bar{C}$-condición es también necesaria y suficiente para garantizar la existencia de completaciones totalmente no positivas en el caso de doble ciclos monótonamente etiquetados con más de un vértice en común, siempre que el grafo asociado no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente especificado. Este teorema se demuesra de forma análoga al teorema 4.3.10.

Teorema 7.1.6 *Sea $A=(-a_{ij})$, $a_{ij}>0$, una matriz parcial TNP de tamaño $n\times n$ cuyo grafo asociado es un doble ciclo monótonamente etiquetado con específicamente dos ciclos C_1 y C_2, y $k-m$ arcos en común, $k=m+1,m+2,\ldots,m+n-2$, y que no contiene como subgrafo a ningún* *camino totalmente especificado. Existe completación TNP, A_c de A, si y sólo si cada una de las submatrices asociadas a los ciclos C_1 y C_2 cumplen la $\bar{C}$-condición.*

En caso de que el grafo asociado contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado, en general, la completación deseada no existe.

Ejemplo 7.1.5 *Consideramos la matriz parcial TNP*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} & -x_{14} & -x_{15} \\ -x_{21} & -1 & -1 & -x_{24} & -x_{16} \\ -2 & -x_{32} & -1 & -1 & -x_{35} \\ -x_{41} & -x_{42} & -x_{43} & -1 & -1 \\ -1 & -x_{52} & -x_{53} & -x_{54} & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble ciclo que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado. Observamos que $\det A[\{3,5\}|\{1,4\}] \leq 0$ *implica que* $x_{54} \leq 0{,}5$*, mientras que con dicha desigualdad el* $\det A[\{4,5\}]$ *es positivo siempre. Por tanto A no tiene completación totalmente no positiva.*

Sin embargo, podemos de forma análoga al teorema 4.3.11 afirmar el siguiente resultado.

Teorema 7.1.7 *Sea $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, una matriz parcial TNP, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un doble ciclo monótonamente etiquetado con específicamente dos ciclos C_1 y C_2, y $k - m$ arcos en común, $k = m+1, m+2, \ldots, m+n-2$, y que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado. Existe completación TNP, A_c de A, si y sólo si cada una de las submatrices asociadas a los ciclos C_1 y C_2, cumplen la $\bar{C}$-condición, y además la submatriz principal de A cuyo grafo asociado es dicho camino totalmente especificado satisface la C_1-condición.*

Corolario 7.1.2 *Sea $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, una matriz parcial TNP, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un block-ciclo monótonamente etiquetado. Existe completación TNP, A_c de A, si y sólo si cada una de las submatrices asociadas a cada ciclo satisface la $\bar{C}$-condición, y además cada submatriz principal de A cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado satisface la C_1-condición.*

Abordamos a continuación el caso de doble ciclos, no monótonamente etiquetados. Teniendo en cuenta la demostración del lema 4.3.9, podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 7.1.1 *Sea $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, una matriz parcial TNP de tamaño 4×4, cuyo grafo asociado, G_A, es doble ciclo con dos ciclos no monótonamente etiquetados y un arco en común y que no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente especificado. A tiene completación TNP si y sólo si la submatriz principal asociada a cada ciclo cumple la $\bar{C}$-condición.*

Para matrices parciales de tamaño $n \times n$, $n > 4$, la completación deseada es una cuestión abierta hasta el momento.

Conjetura 7.1.1 *Sea $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, una matriz parcial TNP de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado, G_A, es doble ciclo con dos ciclos no monótonamente etiquetados y más de un arco en común y que no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente especificado. A tiene completación TNP si y sólo si la submatriz principal asociada a cada ciclo cumple la $\bar{C}$-condición.*

En caso de doble ciclo con dos ciclos no monótonamente etiquetados y que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado, el resultado anterior no se cumple.

Ejemplo 7.1.6 *Consideramos la matriz parcial totalmente no positiva*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -x_{12} & -x_{13} & -1 & -x_{15} \\ -1 & -1 & -x_{23} & -x_{24} & -x_{25} \\ -x_{31} & -x_{32} & -1 & -x_{34} & -2 \\ -x_{41} & -1 & -1 & -1 & -x_{45} \\ -x_{51} & -1 & -x_{53} & -x_{54} & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble ciclo, con dos ciclos no monótonamente etiquetados, que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado. Observamos que $\det A[\{3,4\}|\{3,5\}] \leq 0$ *implica que* $x_{45} \leq 2$*, mientras que con dicho valor el* $\det A[\{4,5\}|\{2,5\}]$ *es positivo siempre. Por tanto* A *no tiene completación totalmente no positiva.*

El siguiente resultado analiza el caso de doble ciclos cuando uno de los ciclos es monótonamente etiquetado y el otro no. La demostración es análoga a la del lema 4.3.10.

Lema 7.1.4 *Sea* $A = (-a_{ij})$*,* $a_{ij} > 0$*, una matriz parcial* TNP *de tamaño* 4×4*, cuyo grafo asociado,* G*, es un grafo doble ciclo no monótonamente etiquetado con dos ciclos,* C_1 *monótonamente etiquetado y* C_2 *no monótonamente etiquetado y un arco en común, y que no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente especificado. Entonces* A *tiene completación* TNP *si y sólo si las submatrices asociadas a los ciclos satisfacen la* $\bar{C}$*-condición y además se cumple* $P_{c_1} \leq P_{c_2}$*.*

Sin embargo, el problema sigue abierto para matrices parciales de tamaño $n \times n$, $n > 4$.

Conjetura 7.1.2 *Sea* G *un grafo dirigido formado por dos ciclos,* C_1 *monótonamente etiquetado y* C_2 *no monótonamente etiquetado, y con más de un arco en común, y que no contiene como subgrafo a ningún camino totalmente* *especificado. Toda matriz parcial* TNP*,* $A = (-a_{ij})$*,* $a_{ij} > 0$*, cuyo grafo asociado es* G*, tiene completación* TNN *si y sólo si las submatrices asociadas a los ciclos* C_1 *y* C_2 *cumplen la* $\overline{C}$*-condición y además* $P_{c_1} \leq P_{c_2}$*.*

En general, si el grafo asociado, doble ciclo, contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado, la completación deseada no existe.

Ejemplo 7.1.7 *Consideramos la matriz parcial totalmente no positiva*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} & -x_{14} \\ -x_{21} & -1 & -x_{23} & -1 \\ -1 & -x_{32} & -1 & -2 \\ -x_{41} & -x_{42} & -0{,}5 & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble ciclo, con un camino monótonamente etiquetado y el otro no, y que contiene como subgrafo a un camino totalmente especificado. Observamos que $\det A[\{1,2\}] \leq 0$ *implica que* $x_{12} \geq 1$*, mientras que* $\det A[\{2,3\}|\{1,4\}] \geq 0$ *implica que* $x_{12} \leq 0{,}5$*. Por tanto* A *no tiene completación totalmente no positiva.*

7.2. Grafos acíclicos

En esta sección abordamos el problema de completación de matrices parciales totalmente no positivas cuyos grafos asociados no contienen ciclos. Estudiamos los caminos, caminos totalmente especificados y los doble-caminos.

Caminos

Sea A una matriz parcial totalmente no positiva, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un camino dirigido monótonamente etiquetado. Podemos completar las posiciones $(2,1),(3,2),\ldots,(n,n-1)$ de A, de tal manera que el resultado sea una matriz parcial totalmente no positiva con un camino asociado no dirigido y monótonamente etiquetado, es decir, cuyo grafo asociado sea un 1-cordal monótonamente etiquetado. Por tanto, a partir de los resultados obtenidos en [2] por Araújo, Torregrosa y Urbano, obtenemos una completación totalmente no positiva.

Para el caso de caminos dirigidos no monótonamente etiquetados, obtenemos un resultado análogo al de matrices totalmente no negativas.

Teorema 7.2.1 *Sea $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, una matriz parcial TNP de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un camino dirigido no monótonamente etiquetado. Entonces, existe una completación TNP de A.*

Caminos totalmente especificados

A continuación abordamos el caso de caminos totalmente especificados. En primer lugar, para las matrices parciales de tamaño 3×3 consideramos el siguiente resultado, cuya demostración es análoga a la de las proposiciones 4.3.5 y 4.3.7.

Proposición 7.2.1 *Sea $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, una matriz parcial TNP de tamaño 3×3, cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado monótona o no monótonamente etiquetado. Entonces, A tiene completación TNP.*

Para matrices de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, en general, no existe completaciones totalmente no positivas como podemos comprobar en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 7.2.1 *Consideramos la matriz parcial TNP*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} & -7 \\ -x_{21} & -1 & -3 & -x_{24} \\ -x_{31} & -x_{32} & -1 & -3 \\ -x_{41} & -x_{42} & -x_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado monótonamente etiquetado. El determinante $\det A[\{1,2\}|\{2,4\}]$ *es no positivo si* $x_{24} \leq 7$. *Sin embargo,* $\det A[\{2,3\}|\{3,4\}] \leq 0$ *implica que* $x_{24} \geq 9$. *Por tanto* A *no tiene completación* TNP.

Ejemplo 7.2.2 *Consideramos la matriz parcial* TNP,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -x_{12} & -1 & -1 \\ -x_{21} & -1 & -1 & -x_{24} \\ -x_{31} & -x_{32} & -1 & -x_{34} \\ -x_{41} & -0{,}5 & -x_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado. Se comprueba que si $\det A[\{1,2\}|\{3,4\}] \leq 0$ *y* $\det A[\{2,4\}] \leq 0$ *entonces* $x_{24} \leq 1$ *y* $x_{24} \geq 2$, *respectivamente. Por lo tanto,* A *no tiene completación* TNP.

Teniendo en cuenta la demostración del teorema 4.3.4, podemos obtener el siguiente resultado.

Teorema 7.2.2 *Sea* $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, *una matriz parcial* TNP *de tamaño* $n \times n$, $n \geq 4$, *cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado monótonamente etiquetado. Entonces* A *tiene completación* TNN *si y sólo si cumple la* C_2*-condición.*

La C_2-condición no es suficiente en el caso de caminos totalmente especificados no monótonamente etiquetados, como hemos visto en el ejemplo 7.2.2, cuya matriz no tiene completación totalmente no positiva a pesar de satisfacer la condición mencionada.

Por ello, a continuación, exigimos la C_1-condición, cuyo cumplimiento por las matrices parciales en cuestión garantiza la existencia de completaciones totalmente no positivas. El siguiente resultado se demuesta de forma análoga a la proposición 4.3.8.

Proposición 7.2.2 *Toda matriz parcial TNP, $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, de tamaño 4×4, cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado tiene completación TNP si cumple la C_1-condición.*

Dicha condición no es necesaria como ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.2.3 *Consideramos la matriz parcial TNP*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -x_{12} & -1 & -1 \\ -x_{21} & -1 & -x_{23} & -1 \\ -x_{31} & -0{,}5 & -1 & -x_{34} \\ -x_{41} & -x_{42} & -x_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado. Existe completación TNP de A,

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -0{,}5 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -0{,}5 & -1 & -0{,}5 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

pese a que A no cumple la C_1-condición, ya que $a_{13}a_{32}a_{24} = 0{,}5 < a_{14} = 1$.

Estamos trabajando en la generalización del resultado anterior para matrices de tamaño arbitrario $n \times n$, $n > 4$.

Conjetura 7.2.1 *Sea $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, una matriz parcial TNP de tamaño $n \times n$, $n > 4$, cuyo grafo asociado es un camino totalmente especificado no monótonamente etiquetado. Entonces A tiene completación TNP si A cumple la C_1-condición.*

Doble-caminos

A continuación, generalizamos las ideas obtenidas anteriormente para analizar el caso de doble-caminos. Como ya sabemos, un doble-camino de 3 vértices no es más que un camino totalmente especificado, por tanto, y por la porposición 7.2.1, podemos asegurar que toda matriz parcial TNP, de tamaño 3×3, cuyo grafo asociado es un doble-camino tiene completación TNP.

En general, una matriz parcial totalmente no positiva, de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, asociada a este tipo de grafos no tiene completación totalmente no positiva, como podemos ver en los siguiente ejemplos.

Ejemplo 7.2.4 *Consideramos la siguiente matriz parcial TNP,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} & -0{,}5 \\ -x_{21} & -1 & -1 & -x_{24} \\ -x_{31} & -x_{32} & -1 & -x_{34} \\ -x_{41} & -x_{42} & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble-camino, con uno de los dos caminos monótonamente etiquetado y el otro no. A partir de $\det A[\{1,2\}|\{2,4\}] \leq 0$ *y* $\det A[\{2,4\}|\{3,4\}] \leq 0$ *obtenemos $x_{24} \leq 0{,}5$ y $x_{24} \geq 1$ respectivamente, lo que es una contradicción. Por tanto, A no tiene completación TNP.*

Ejemplo 7.2.5 *Consideramos la siguiente matriz parcial TNP,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -x_{12} & -1 & -1 \\ -x_{21} & -1 & -x_{23} & -x_{24} \\ -x_{31} & -1 & -1 & -x_{34} \\ -x_{41} & -0{,}5 & -x_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble-camino con los dos caminos no monótonamente etiquetados. Para que $\det A[\{1,3\}|\{3,4\}]$ *y* $\det A[\{3,4\}|\{2,4\}]$ *sean no* *positivos, es necesario que* $x_{34} \leq 1$ *y* $x_{34} \geq 2$ *respectivamente. Por tanto,* A *no tiene completación* TNP.

Para el caso en que la matriz parcial tenga como grafo asociado un doble-camino con un camino monótonamente etiquetado y el otro no, establecemos el siguiente resultado siguiendo el desarrollo del lema 4.3.3.

Lema 7.2.1 *Sea* $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, *una matriz parcial* TNP, *de tamaño* 4×4, *cuyo grafo asociado es un doble-camino formado por los caminos* C_1 *monótonamente etiquetado, y* C_2 *no monótonamente etiquetado, ambos con el vértice inicial etiquetado con* 1. *Entonces,* A *tiene completación* TNP *si y sólo si* $P_{c_1} \leq P_{c_2}$.

Para el caso de matrices de tamaño mayor, podemos establecer el siguiente resultado siguiendo el desarrollo del teorema 4.3.5.

Teorema 7.2.3 *Sea* G *un doble-camino con un camino* C_1 *monótonamente etiquetado y otro* C_2 *no monótonamente etiquetado. Cada matriz parcial* TNP, $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, *de tamaño* $n \times n$, $n > 4$, *cuyo grafo asociado es* G *tiene completación* TNP *si y sólo si* $P_{c_1} \leq P_{c_2}$.

En el caso de doble-camino con los dos caminos no monótonamente etiquetados el problema sigue abierto si el vértice inicial está etiquetado con 1. En otro caso, vértice inicial distinto de 1, obtenemos el siguiente resultado cuya demostración es análoga al teorema 4.3.6.

Teorema 7.2.4 *Sea* G *un doble-camino formado por caminos no monótonamente etiquetados* $C_1 = (V_1, E_1)$ *y* $C_2 = (V_2, E_2)$, *cuyos vértices inicial y final no están etiquetados con* 1. *Toda matriz parcial* TNP, $A = (-a_{ij})$, $a_{ij} > 0$, *de tamaño* $n \times n$, $n \geq 4$, *cuyo grafo asociado es* G *tiene una completación* TNP *si cumple la condición,*

$$P_{c_1} \geq P_{c_2} \quad si \quad 1 \in V_1 \qquad o \qquad P_{c_2} \geq P_{c_1} \quad si \quad 1 \in V_2$$

Podemos considerar los casos de grafos asociados mencionados en el quinto capítulo como cuestiones abiertas en el problema de completación de matrices parciales totalmente no positivas.

Capítulo 8

R-matrices

En este capítulo, estudiaremos el problema de completación de R-matrices, cerrando el problema tanto en el caso de matrices posicionalmente simétricas como de no posicionalmente simétricas.

Definición 8.0.1 *Se dice que una matriz real, A, de tamaño $n \times n$, es una R-matriz si para todo subconjunto α de $\{1, 2, \ldots, n\}$ se verifica que* $\det A[\alpha]$ *es distinto de cero.*

Ejemplo 8.0.6 *Las submatrices principales de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ -0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

tienen determinante distinto de cero, por lo que A es una R-matriz.

Destacamos algunas de las propiedades de esta clase de matrices.

Proposición 8.0.3 *Sea A una R-matriz.*

a) *DA, AD y DAD^{-1} son R-matrices, siendo D una matriz diagonal con elementos diagonales no nulos.*

b) *PAP^T es una R-matriz, siendo P una matriz permutación.*

c) *Toda submatriz principal de una R-matriz es una R-matriz.*

Demostración:

a) Supongamos que D tiene la forma,

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sea $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Es sencillo comprobar que

$\det(DA)[\alpha] = \det D[\alpha] \det A[\alpha]$
$\det(AD)[\alpha] = \det A[\alpha] \det D[\alpha]$
$\det(DAD^{-1})[\alpha] = \det A[\alpha]$
Por tanto, si A y D son R-matrices, DA, AD y DAD^{-1} también lo son.

b) Sea la matriz permutación $P = [i_1, i_2, \ldots, i_n]$. Entonces $\det(PAP^T)[\alpha] = \det A[\beta] \neq 0$, donde $\beta = \{i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_k}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

c) Inmediato a partir de la definición de R-matriz.

La última propiedad nos permite extender el concepto de R-matriz al contexto de matrices parciales.

Definición 8.0.2 *Dada una matriz parcial, A, se dice que es una R-matriz parcial si el determinante de cada submatriz principal completamente especificada es distinto de cero.*

Ejemplo 8.0.7 *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & ? & ? \\ -0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ ? & -1 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

es una R-matriz parcial ya que todas sus submatrices principales totalmente especificadas tienen determinante distinto de cero.

A continuación exponemos los resultados obtenidos sobre el problema de completación de R-matrices parciales. En primer lugar, ponemos de manifiesto en las siguientes proposiciones, la posibilidad de suponer, sin pérdida de generalidad, que la diagonal de una R-matriz está especificada.

Proposición 8.0.4 *Sea A una R-matriz parcial de tamaño $n \times n$, con todos los elementos diagonales no especificados. Entonces A tiene R-completación.*

Demostración: Sea $\overline{A}_x$ la R-matriz parcial obtenida de A al reemplazar todos los elementos no especificados fuera de la diagonal por valores reales y los elementos diagonales por x. Sea α un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ con $|\alpha| = k$. Es fácil observar que $\det \overline{A}_x[\alpha]$, es un polinomio en x de grado k al que denotamos por $P_\alpha(x)$.
Estamos interesados en encontrar valores de x para los cuales $P_\alpha(x)$ sea distinto de cero, para todo α. Sea N_α el conjunto de soluciones reales de la ecuación $P_\alpha(x) = 0$. Cualquier valor de x perteneciente al conjunto $\mathbb{R} - \bigcup \{N_\alpha \colon \alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}\}$ nos va a proporcionar una R-completación de A. $\square$

Analizando el caso de matrices parciales, cuya diagonal contiene posiciones especificadas y otras no, complementamos el resultado anterior.

Proposición 8.0.5 *Sea A una R-matriz parcial de tamaño $n \times n$, cuya diagonal contiene algunas posiciones especificadas y otras no. Entonces A tiene*

R-completación si y sólo si la submatriz principal correspondiente a las posiciones diagonales especificadas tiene R-completación.

Demostración: Veamos que la condición del enunciado es suficiente para la existencia de una R-completación de A.
Por semejanza de permutación suponemos, sin pérdida de generalidad, que A tiene la forma,

$$A = \begin{bmatrix} A[\alpha^c] & A[\alpha^c|\alpha] \\ A[\alpha|\alpha^c] & A[\alpha] \end{bmatrix},$$

donde $\alpha = \{m, m+1, \ldots, n\}$, $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, la diagonal de $A[\alpha]$ está completamente especificada y la diagonal de $A[\alpha^c]$ está completamente no especificada. Por hipótesis, existe $A[\alpha]_c$, una R-completación de $A[\alpha]$. Sea $x_{ii}, i = 1, 2, \ldots, m-1$ los elementos no especificados de la diagonal. Consideramos la R-matriz parcial, A_1, obtenida al reemplazar cada elemento no especificado de las submatrices $A[\alpha^c|\alpha]$ y $A[\alpha|\alpha^c]$ por un único valor real y la submatriz principal $A[\alpha]$ por su correspondiente R-completación, $A[\alpha]_c$.
Ahora estudiamos la submatriz parcial $A_1[\{m-1\} \cup \alpha]$ de A_1. Sea $\beta \subseteq \alpha$. Sabemos que $\det A_1[\beta] \neq 0$, por lo tanto, existe un valor real x_β que cumple la ecuación:

$$\det A_1[\{m-1\} \cup \beta] = x_{m-1,m-1} \det A_1[\beta] + \det A_{1_0}[\{m-1\} \cup \beta] = 0$$

Entonces podemos elegir un valor real $c_{m-1,m-1}$ para que la matriz A_2, obtenida al reemplazar $x_{m-1,m-1}$ por $c_{m-1,m-1}$ en A_1 sea una nueva R-matriz parcial. Aplicando un argumento análogo a $A_2[\{m-2, m-1\} \cup \beta]$ y asi sucesivamente obtenemos una R-completación de A.
La necesidad de la condición es evidente por la propia definición de R-matriz.
□

A partir de ahora podemos considerar, por tanto, sin pérdida de generalidad, matrices parciales con la diagonal completamente especificada. La proposición 8.0.3 nos permite suponer además que los elementos diagonales son 1´s.

Analizamos ahora el problema de completación de R-matriz en ambos casos, matrices no posicionalmente simétricas y matrices posicionalmente simétricas.

8.1. Matrices no posicionalmente simétricas

El problema de completación de R-matrices parciales tiene respuesta afirmativa en el caso de matrices parciales no posicionalmente simétricas, como vemos en los siguientes resultados.

Lema 8.1.1 *Sea A una R-matriz parcial, de tamaño $n \times n$, con un único elemento no especificado. Entonces A tiene R-completación.*

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, a partir de la propiedad PAP^{-1}, que el elemento no especificado está en la posición $(1, n)$. Dado $x \in \mathbb{R}$, consideramos la completación de A

$$A_x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & x \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sea $\delta = \det A_x[\{2, 3, \ldots, n\}|\{1, 2, \ldots, n-1\}]$. Es sencillo comprobar que

$$\det A_x = \det A_0 + (-1)^{n+1}\delta x$$

Por tanto, consideramos dos casos:

(a) $\delta \neq 0$. En este caso, es fácil ver que existe un único valor de x para que $\det A_x = 0$.

b) $\delta = 0$. Entonces, el conjunto de vectores $\{u_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{in-1}],$ $i = 2, 3, \ldots, n\}$ es linealmente dependiente, por tanto, existe un conjunto de escalares, no todos nulos, α_j, $j = 2, 3, \ldots, n-1$, tal que $u_n = \sum_{j\in\{2,3,\ldots,n-1\}} \alpha_j u_j$.
Haciendo las operaciones adecuadas sobre el determinante

$$\det A_0 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

obtenemos:

$$\det A_0 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} - \sum_{j\in\{2,3,\ldots,n-1\}} \alpha_j a_j n \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que el determinante de $A[\{2, 3, \ldots, n\}]$ y de $A[\{2, 3, \ldots, n-1\}]$ es no nulo, ya que A es una R-matriz parcial, se verifica que $a_{nn} - \sum_{j\in\{2,3,\ldots,n-1\}} \alpha_j a_j n \neq 0$. Entonces, $\det A_0$ y por tanto, $\det A_x$ es distinto de cero.

Del análisis anterior se deduce que existe como máximo un valor de x con el que $\det A_x = 0$. Observamos que para cada submatriz principal de A que incluye la posición $(1, n)$, existe como máximo un valor de x para que el determinante de dicha submatriz sea nulo. Sea S el conjunto de todos los valores mencionados de x. Por tanto, A_x es una R-completación para todo $x \in \mathbb{R} - S$. $\square$

Podemos generalizar el resultado anterior para cualquier número de elementos no especificados.

Teorema 8.1.1 *Sea A una R-matriz parcial no posicionalmente simétrica, de tamaño $n \times n$, con r elementos no especificados, $r > 1$. Entonces A tiene R-completación.*

Demostración: Vamos a utilizar la inducción matemática sobre r. Para $r = 1$ aplicamos el lema anterior. Supongamos que A tiene R-completación para $r = k - 1$ elementos no especificados. Vamos a demostrar ahora la existencia de R-completación para $r = k$.
Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, mediante la propiedad PAP^{-1}, que existe un elemento no especificado en la posición $(1, n)$, que denotamos por x.
Sea $A_1, A_2, \ldots, A_m$, todas las submatrices que contienen únicamente la posición $(1, n)$ como no especificada. Denotamos por $\mathbb{R} - N_i$, el conjunto de valores que según la demostración del lema 8.1.1, proporciona R-completación de A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.
Sea $\overline{A}$ la matriz parcial resultante de completar la posición $(1, n)$ de A con cualquier valor del conjunto $\mathbb{R} - \bigcup\{N_i : i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$. $\overline{A}$ es una R-matriz parcial con $k - 1$ elementos no especificados. Por hipótesis de inducción, existe una R-completación de $\overline{A}$, y por tanto de A. $\square$

8.2. Matrices posicionalmente simétricas

Para matrices parciales posicionalmente simétricas el problema de completación de R-matrices parciales tiene también respuesta afrimativa, con lo que el citado problema queda completamente cerrado.

Lema 8.2.1 *Sea A una R-matriz parcial posicionalmente simétrica, de tamaño $n \times n$, con un par de elementos no especificados. Entonces A tiene R-completación.*

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los elementos no especificados están en las posiciones $(1, n)$ y $(n, 1)$.
Sea A_x la matriz obtenida al completar dichas posiciones con x,

$$A_x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & x \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Vamos a encontrar valores de x con los que A_x es una R-matriz. Para ello, estudiamos las submatrices principales de A que contienen la primera fila y la última columna.
En primer lugar, sea S el conjunto de los valores reales con los que $\det A_x[\{1, n\}]$ es nulo. Consideramos ahora $\alpha \subseteq \{2, 3, \ldots, n-1\}$, $\mathrm{card}(\alpha) = k > 0$. Entonces:

$$\det A_x[\{1\} \cup \alpha \cup \{n\}] = -x^2 \det A_x[\alpha] + (-1)^{k+1}(\det A_0[\{1\} \cup \alpha|\alpha \cup \{n\}] + \det A_0[\alpha \cup \{n\}|\{1\} \cup \alpha]) + \det A_0[\{1\} \cup \alpha \cup \{n\}]$$

Como A es una R-matriz parcial, entonces $\det A_x[\alpha] \neq 0$, consiguiendo una ecuación de segundo grado, $\det A_x[\{1\} \cup \alpha \cup \{n\}] = 0$, con cero, una o dos raíces reales. Sea N_α el conjunto de dichas raíces. Por cada valor real x del conjunto $\mathbb{R} - ((\bigcup \{N_\alpha : \alpha \subseteq \{2, 3, \ldots, n\}\}) \bigcup S)$ obtenemos una R-completación de A. $\square$

En el siguiente teorema generalizamos el resultado conseguido por inducción matemática sobre el número de pares de elementos no especificados en la matriz parcial.

Teorema 8.2.1 *Sea A una R-matriz parcial posicionalmente simétrica de tamaño $n \times n$. Entonces A tiene R-completación.*

Demostración: Supongamos que A tiene r pares de elementos no especificados. Procedemos por inducción sobre r. Para $r = 1$ aplicamos el lema anterior. Supongamos que el resultado es cierto para $r = k - 1$ y vamos a demostrarlo para $r = k$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, a partir de la propiedad PAP^{-1}, que las posiciones $(1, n)$ y $(n, 1)$ no están especificadas y las denotamos por x.

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$, todas las submatrices principales de A que contienen únicamente $(1, n)$ y $(n, 1)$ como elementos no especificados. Siguiendo la demostración del lema 8.2.1, sea $N_1, N_2, \ldots, N_m$ los conjuntos de valores reales de x para los cuales las anteriores submatrices no tienen R-completación, respectivamente.

Elegiendo x de $\mathbb{R} - \bigcup\{N_i : i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$, obtenemos una nueva R-matriz parcial $\overline{A}$ con $k - 1$ pares de elementos no especificados. Por la inducción, $\overline{A}$ y por tanto A tiene R-completación. $\square$

Capítulo 9

TR-matrices

A continuación, analizamos el problema de completación de las TR-matrices parciales, para matrices posicional y no posicionalmente simétricas, dando una respuesta afirmativa a la existencia de las completaciones deseadas en ambos casos.

Definición 9.0.1 *Dada A una matriz real de tamaño $n \times m$, se dice que A es una TR-matriz si para cualquiera α, $\beta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, con $|\alpha| = |\beta|$, se verifica que* $\det A[\alpha|\beta]$ *es distinto de cero.*

Ejemplo 9.0.1 *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}45 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}49 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{bmatrix},$$

es una TR-matriz ya que todas las submatrices de A tienen determinante distinto de cero.

A continuación veremos las propiedades de las TR-matrices, teniendo en cuenta que a lo largo de este capítulo vamos a considerar matrices cuadradas.

Proposición 9.0.1 *Dada A una TR-matriz de tamaño $n \times n$, se cumplen las siguientes propiedades:*

a) *DA, DA y DAD^{-1} son TR-matrices, siendo D una matriz diagonal con elementos diagonales no nulos.*

b) *PAP^T es una TR-matriz, siendo P una matriz permutación.*

c) *Toda submatriz de una TR-matriz es también TR-matriz.*

Demostración:

a) Supongamos que D tiene la forma:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sean $\alpha, \beta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ y $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$.
Aplicando la fórmula de Cauchy-Binet es sencillo comprobar que:
$\det(DA)[\alpha|\beta] = \det D[\alpha] \det A[\alpha|\beta]$.
$\det(AD)[\alpha|\beta] = \det A[\alpha|\beta] \det D[\beta]$.
$\det(DAD^{-1})[\alpha|\beta] = \det D[\alpha] \det A[\alpha|\beta] \det D^{-1}[\beta]$.
Como A es una TR-matriz, entonces DA, AD y DAD^{-1} también lo son.

b) Sea P la matriz permutación $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$. Entonces $\det(PAP^T)[\alpha|\beta] = \det A[\gamma|\delta] \neq 0$, donde $\gamma = \{i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_k}\}$ y $\delta = \{i_{\beta_1}, i_{\beta_2}, \ldots, i_{\beta_k}\}$, $\gamma, \delta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

c) La tercera propiedad se deduce a partir de la definición de TR-matriz.

La última propiedad nos permite extender el concepto de TR-matriz al contexto de matrices parciales.

Definición 9.0.2 *Dada A una matriz parcial, se dice que A es una TR-matriz parcial si todas las submatrices completamente especificadas de A tienen determinante distinto de cero.*

Ejemplo 9.0.2 *La matriz parcial.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & ? & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}45 \\ 0{,}25 & 0{,}49 & ? \end{bmatrix}$$

es una TR-matriz parcial ya que todas las submatrices completamente especificadas de A tienen determinante distinto de cero.

Empezamos nuestro estudio de las TR-matrices suponiendo que algunas posiciones diagonales no están especificadas. En la siguiente proposición demostramos que siempre se puede completar dichas posiciones obteniendo una nueva TR-matriz parcial.

Proposición 9.0.2 *Sea A una TR-matriz parcial de tamaño $n \times n$, con algunas posiciones diagonales no especificadas. Entonces podemos completar las posiciones diagonales no especificadas, para obtener una nueva TR-matriz parcial con toda la diagonal especificada.*

Demostración: Desarrollamos la demostración por inducción matemática sobre el número r de posiciones diagonales no especificadas.
En primer lugar, supongamos que A tiene únicamente una posición diagonal no especificada que denotamos por x. Sea S_i con $i = 1, 2, \ldots, m$, las submatrices de A cuyo único elemento no especificado es x. Razonamiento similar al de la proposición 8.0.4 nos permite asegurar que existe un conjunto $\mathbb{R} - \bigcup N_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, de valores reales con los que A puede ser completada a una nueva TR-matriz parcial con la diagonal especificada.
Ahora, supongamos que el resultado es cierto cuando A tiene $r = k - 1$

posiciones diagonales no especificadas, y vamos a demostrarlo cuando $r = k$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la posición $(1, 1)$ de A no está especificada y la denotams por x. Es fácil completar x de tal manera que la matriz obtenida siga siendo una TR-matriz parcial con $k - 1$ posiciones diagonales no especificadas. Por tanto, aplicando la hipótesis de inducción, podemos obtener una nueva TR-matriz parcial de A con diagonal especificada. $\square$

El resultado anterior, nos permite considerar matrices parciales con la diagonal especificada.

A continuación estudiamos el problema de completación de TR-matrices parciales distinguiendo el caso posicional del no posicionalmente simétrico, y cerrando el problema para ambos.

9.1. Matrices no posicionalmente simétricas

El problema de completación en el caso de matrices no posicionalmente simétricas está resuelto, como mostramos en los siguientes resultados.

Lema 9.1.1 *Sea A una TR-matriz parcial, de tamaño $n \times n$, con un único elemento no especificado. Entonces A tiene TR-completación.*

Demostración: Podemos suponer, por semejanza de permutación, que el elemento no especificado está en la posición $(1, n)$. Sea A_x el resultado de reemplazar dicho elemento por x,

$$A_x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & x \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Es suficiente estudiar las submatrices de A_x que incluyen la primera fila y la última columna.
Sea $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \{2, 3, \ldots, n\}$ y $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Se verifica

$$\det A_x[\{1\} \cup \alpha|\beta \cup \{n\}] = \det A_0[\{1\} \cup \alpha|\beta \cup \{n\}] + (-1)^{k+1} x \det A_x[\alpha|\beta]$$

Como A es una TR-matriz parcial, entonces $\det A_x[\alpha|\beta] \neq 0$, y por tanto, para cada α y β existe un único valor real $x_{\alpha\beta}$ para que $\det A_x[\{1\} \cup \alpha|\beta \cup \{n\}]$ sea igual a cero.
Por lo tanto, obtenemos una TR-completación de A al reemplazar x por un valor de $\mathbb{R} - \bigcup\{x_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \subseteq \{2, 3, \ldots, n-1\}\}$. $\square$

El siguiente resultado generaliza el anterior al considerar cualquier número de elementos no especificados en la matriz parcial.

Teorema 9.1.1 *Sea A una TR-matriz parcial no posicionalmente simétrica de tamaño $n \times n$ que contiene más de un elemento no especificado. Entonces A tiene una TR-completación.*

Demostración: Por el lema 9.1.1 y siguiendo la demostración del teorema 8.1.1, podemos obtener una TR-completación de A. $\square$

9.2. Matrices posicionalmente simétricas

A continuación abordamos el caso de matrices parciales posicionalmente simétricas, obteniendo resultados que cierran el problema de TR-completación.

Lema 9.2.1 *Sea A una TR-matriz parcial posicionalmente simétrica, de tamaño $n \times n$, con un par de elementos no especificados. Entonces, A tiene TR-completación.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las posiciones $(1,n)$ y $(n,1)$ no están especificadas. Sea A_x la matriz que resulta al reemplazar dichas posiciones por x,

$$A_x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & x \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sea α, β subconjuntos de $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ con $|\alpha| = |\beta| = k$.
De forma análoga a la demostración del lema 9.1.1, podemos considerar el conjunto finito $N_{\alpha\beta}$ de valores con los que el determinante de las submatrices $A[\{1\} \cup \alpha|\beta \cup \{n\}]$ y $A[\alpha \cup \{n\}|\{1\} \cup \beta]$ es nulo. Reemplazamos el elemento x en ambas submatrices por un valor del conjunto $\mathbb{R} - \bigcup\{N_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \subseteq \{2, 3, \ldots, n-1\}\}$.
Por otro lado, tenemos

$$\det A[\{1\} \cup \alpha \cup \{n\}|\{1\} \cup \beta \cup \{n\}] = \det A_0[\{1\} \cup \alpha \cup \{n\}|\{1\} \cup \beta \cup \{n\}] + (-1)^{k+1}x(det A_0[\{1\} \cup \alpha|\beta \cup \{n\}] + \det A_0[\alpha \cup \{n\}|\{1\} \cup \beta]) - x^2 \det A[\alpha|\beta]$$

Como $\det A[\alpha|\beta] \neq 0$, entonces existe un conjunto de valores reales $x_{\alpha\beta}$ con el cual $\det A[\{1\} \cup \alpha \cup \{n\}|\{1\} \cup \beta \cup \{n\}]$ es nulo.
Por lo tanto, al reemplazar x por un valor de

$$\mathbb{R} - ((\bigcup\{x_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \subseteq \{2, 3, \ldots, n-1\}\}) \bigcup(\{N_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \subseteq \{2, 3, \ldots, n-1\}\}))$$

se obtiene la completación deseada. $\square$

A continuación generalizamos el resultado anterior.

Teorema 9.2.1 *Sea A una TR-matriz parcial posicionalmente simétrica, de tamaño $n \times n$. A tiene TR-completación.*

Demostración: Supongamos que A tiene r pares de elementos no especificados. Procedemos por inducción sobre r. Para $r = 1$ aplicamos el lema 9.2.1. Supongamos ahora que el resultado es cierto para $r = k - 1$ y vamos a demostrarlo para $r = k$.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las posiciones $(1, n)$ y $(n, 1)$ no están especificadas y las reemplazamos por x.
Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$, todas las posibles submatrices de A que contienen únicamente a x como elemento no especificado, es decir, que contienen a $(1, n)$ o $(n, 1)$, o contienen a ambas posiciones. Siguiendo la demostración de los lemas 8.2.1 y 9.2.1, sea $N_1, N_2, \ldots, N_m$ los conjuntos de valores reales de x para los cuales las anteriores submatrices no tienen TR-completación, respectivamente.
Cualquier valor x del conjunto $\mathbb{R} - \bigcup\{N_i : i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$ nos proporciona una nueva TR-matriz parcial $\overline{A}$ con $k-1$ pares de elementos no especificados. Por la inducción, $\overline{A}$ y por tanto A tiene TR-completación. $\square$

Bibliografía

[1] T. Ando, ***Totally positive matrices,***

Linear Algebra and its Applications 90, (1987), $165 - 219$.

[2] C. M. Araújo, J. R. Torregrosa and A. M. Urbano, ***Totally nonpositive completions on partial matrices,***

Linear Algebra and its Applications 413, (2006), $403 - 424$.

[3] M. Aissen, I. J. Schoenberg and A. Whitney, ***On generating functions of totally positive sequences,***

J. Anal Math, 2, (1952), $(93 - 103)$.

[4] R.B. Bapat and T. E. S. Raghavan, ***Nonnegative matrices and applications,***

Cambridge University Press, (1997).

[5] J.R.S. Blair and B. Peyton, ***An introduction to chordal graphs and clique trees,***

The IMA volumens in Mathematics and its Applications, Springer, New York, 56, (1993), $1 - 31$.

[6] E. B. Curtis and J. A. Morrow, ***Inverse Problem for Electrical Wetworks,***

World Scientific Pub. Co., $(May1996)$.

[7] L. DeAlba and L. Hogben, ***Completions of P-matrix patterns,***

Linear Algebra and its Applications 319, (2000), 83 – 102.

[8] G. H. DE Oliveira, ***Matrices with prescribed characterictic polinomial and a prescribed submatrix,***

Monatsh Math. 75, (1971), 441 – 446.

[9] J. H. Drew and C. R. Johnson, ***The completely positive and double nonegative completion problems,***

Linear and Multilinear Algebra, 44, (1998), (85 – 92).

[10] S. P. Everson, ***The Eigenvalue Distribution of Oscillatory and Strictly Sign-Regular Matrices,***

Linear Algebra and its Applications 246, (1996), 17 – 21.

[11] S. M. Fallat, C. R. Johnson, J. R. Torregrosa, A. M. Urbano, ***P-matrix completions under weak symmetric assumptions,***

Linear Algebra and its Applications 312, (2000), 73 – 91.

[12] S. M. Fallat, C. R. Johnson and R. L. Smith, ***The general totally positive matrix completion problem with few unspecified entries,***

The Electronic Journal of Linear Algebra, 7, (2000), (1 – 20).

[13] S. M. Fallat and P. Van Den Driessche, ***On matrices with all minors negative,***

The Electronic Journal of Linear Algebra 7, (2000), 92 – 99.

[14] S. Fomin and M. Shapiro, ***Stratified spaces formed by totally positive varieties,***

Michigan Math J., 48 (2000), (253 – 270).

[15] S. Fomin and A. Zelevinsky, ***Double bruhat cells and total positivity,***

J. Amer Math Soc., 12 (1999), (335 – 380).

[16] S. Friedland, ***Inverse eigenvalue problems,***

Linear Algebra and its Applications 17, (1977), 15 – 51.

[17] F. R. Gantmacher and M. G. Krein, ***Sur les matrices oscillatoires,***

C. R. Arcad, Sci. Paris, 201, (1935), (577 – 579).

[18] F. R. Gantmacher and M. G. Krein, ***Sur les matrices complètement non négatives et oscillatoires,***

Compositio Math, 4, (1937), (445 – 476).

[19] F. R. Gantmacher and M. G. Krein, ***Oszillationsmatrizen Oszillationskerne und Kleine Schwingungen Mechanischer Systeme Akademie,***

Verlag, Berlin 1960, (Russian edition: Moscow, Leningrad (1950).

[20] M. Gasca and J. M. Peña, ***A Test for strict Sign-Regularity,***

Linear Algebra and its Applications 197/198, (1994), 133 – 142.

[21] I. Gohberg, M. A. Kaashoek and F. Van Schagen, ***Partially specified matrices and operators: classification, completion, application,***

Birkhäuser Verlag (1995).

[22] R. Grone, C. R. Johnson, E. M. Sa, and H. Wolkowicz, ***Positive definite completions of partial hermitian matrices,***

Linear Algebra and its Applications 58, (1984), 109 – 124.

[23] F. Harary, ***Graph Theory,***

Addison.Wesley, Reading, MA. 1996.

[24] L. Hogben, ***Inverse M-matrix completions of patterns omitting some diagonal positions,***

Linear Algebra and its Applications 313, (2000), 173 – 192.

[25] L. Hogben, ***Graph theoretic methods for matrix completion,***

Linear Algebra and its Applications 328, (2001), 161 – 202.

[26] L. Hogben, ***Completions of M-matrix patterns,***

Linear Algebra and its Applications 285, (1998), 143 – 152.

[27] L. Hogben, ***Completions of inverse M-matrix patterns,***

Linear Algebra and its Applications 282, (1998), 145 – 160.

[28] R. Horn, C. R. Johnson, ***Topics in Matrix Analysis,***

Cambridge University Press, 1991.

[29] R. Horn, C. R. Johnson, ***Matrix Analysis,***

Cambridge University Press, 1985.

[30] C. R. Johnson and B. K. Kroschel, ***The combinatorially symmetric P-matrix completion problem,***

The Electronic Journal of Linear Algebra 1, (1996), 59 – 63.

[31] C. R. Johnson, B. K. Kroschel and M. Lundquist, ***The Totally Nonnegative Completion Problem,***

Fields Institute Commnunications, American Mathematical Society, Providence, RI, 18, (1998), 97 – 109.

[32] C. R. Johnson and R. Smith, ***Path product matrices,***

Linear and Multilinear Algebra, 46, (1999), (177 – 191).

[33] C. R. Johnson and R. Smith, ***The Completion problem for M-matrices and Inverse M-matrices,***

Linear Algebra and its Applications, 241 – 243, (1996), (655 – 667).

[34] C. Jordán and J. R. Torregrosa, ***The totally positive completion problem,***

Linear Algebra and its Applications 393, (2004), 259 – 274.

[35] S. Karlin, ***Mathematical methods and theory in games, programming and economics,***

Addison Wesley, Reading MA., (1959).

[36] S. Karlin, ***Totally positive matrices,***

Stanford University Press, Stanford, (1968).

[37] B. Lindstrom, ***On the vector representations of induced matroids,***

Bull, London Math Soc., (1973), (85 – 90).

[38] G. Lusztig, ***Total positivity in reductive groups in Lie Theory and Geometry in Honor of Bertram Kostant,***

Vol. 123 of Progress in Mathematics, Birkhauser, Boston, (1994), (531 – 568).

[39] E. Marques De Sà, ***Embedding conditions for λ-matrices,***

Linear Algebra and its Applications 24, (1979), 33 – 50.

[40] L. Mirsky, ***Matrices with Sign Consistency of a Given order,***

SIAM Journal Matrix polinomials. Integral Equations and Operator Theory 2, (1979), 265 – 599.

[41] Postnikov, ***Quantum Bruhat graph and Schubert polynomials,***

June (2002), (Available at arxiv math co/020677).

[42] H. Sachs, ***Perfect matchings in hexagonal systems,***

Combinatorica, 4, (1984), 89 – 99.

[43] M. Skandera, ***A characterization of (3+1)-free posets,***

J. Combin Theory Ser A., 93 (2001), (231 – 241).

[44] M. Skandera and B. Reed, ***Total nonnegativity and (3+1)-free posets,***

(2002), Submitted to J. Combin Theory Ser A.

[45] F. C. Silva, ***Matrices with prescribed charateristic polinomial and submatrices,***

Portugaliae Mathe. 44, (1987), 261 – 264.

[46] F. C. Silva, ***Matrices with prescribed eigenvalues and principal submatrices,***

Linear Algebra and its Applications 92, (1987), 241 – 250.

[47] R. C. Thompson, ***Interlacing inequalities for invariant factors,***

Linear Algebra and its Applications 24, (1979), $1-32$.

[48] I. Zaballa, ***Matrices with prescribed rows and invariant factors,***

Linear Algebra and its Applications 87, (1987), $113-146$.