Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Aplicadas y Calidad

Máster Universitario en Ingeniería de Análisis de Datos,
Mejora de Procesos y Toma de Decisiones

Trabajo Fin de Máster

MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA MIXTA PARA LA PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN EN ARTÍCULOS CON VIDA ÚTIL CORTA

Autor:

Juan Esteban Fonseca Núñez

Tutor:

Rubén Ruiz García

Septiembre de 2017

Resumen

Este Trabajo Fin de Máster presenta modelos matemáticos de programación lineal entera mixta para la planificación de la producción en artículos cuya corta vida útil limita su uso para la satisfacción de la demanda proyectada para una serie de periodos. Esta situación se debe modelizar de forma explícita cuando el número de periodos de planificación es superior al número de periodos de vida útil de los productos. Teniendo en cuenta los costes fijos y variables de producción, costes por almacenamiento, y costes por desechar producto que haya sobrepasado su tiempo de vida, se buscan soluciones que minimicen el coste total, comparando los beneficios sobre los costes de producción en caso de concentrar la elaboración del producto en pocos periodos, frente a los beneficios sobre los costes por inventario y costes por desechar producto en caso de producir en cada periodo lo mínimo necesario.

En el Trabajo de Fin de Máster se detallarán los modelos contemplando un producto con limitaciones por capacidad productiva y capacidad de inventario, seguido por un caso multinivel para un producto compuesto por la agregación de otros productos con distintas vidas útiles restantes, y un modelo biobjetivo orientado no únicamente a minimizar el coste total, sino a encontrar una solución equilibrada entre el coste total y la vida útil restante de los productos entregados a los clientes, la cual habrá de ser la mayor posible. Adicionalmente, se consideran estrategias de programación lineal entera mixta para involucrar en el modelo alternativas de producción que se quieran evaluar en la toma de decisiones para la planificación. Estos modelos son implementados y evaluados utilizando el Solver profesional CPLEX por medio de su formulación en el software GAMS, cuyos resultados son enlazados con Excel para presentar y analizar su solución.

Resum

Este Treball Fi de Màster presenta models matemàtics de programació lineal sencera mixta per a la planificació de la producció en articles la curta vida útil de la qual limita el seu ús per a la satisfacció de la demanda projectada per a una sèrie de períodes. Esta situació es deu modelizar de forma explícita quan el nombre de períodes de planificació és superior al nombre de períodes de vida útil dels productes. Tenint en compte els costos fixos i variables de producció, costos per emmagatzemament, i costos per rebutjar producte que haja sobrepassat el seu temps de vida, es busquen solucions que minimitzen el cost total, comparant els beneficis sobre els costos de producció en cas de concentrar l'elaboració del producte en pocs períodes, enfront dels beneficis sobre els costos per inventari i costos per rebutjar producte en cas de produir en cada període el mínim necessari.

En el Treball de Fi de Màster es detallaran els models contemplant un producte amb limitacions per capacitat productiva i capacitat d'inventari, seguit per un cas multinivel per a un producte compost per l'agregació d'altres productes amb distintes vides útils restants, i un model biobjetivo orientat no únicament a minimitzar el cost total, sinó a trobar una solució equilibrada entre el cost total i la vida útil restant dels productes entregats als clients, la qual haurà de ser la major possible. Addicionalment, es consideren estratègies de programació lineal sencera mixta per a involucrar en el model alternatives de producció que es vullguen avaluar en la presa de decisions per a la planificació. Estos models són implementats i avaluats utilitzant el Solver professional CPLEX per mitjà de la seua formulació en el programari GAMS, els resultats del qual són enllaçats amb Excel per a presentar i analitzar la seua solució.

Índice general

Índice de tablas

Índice de ilustraciones

1. Introducción y objetivos

1.1. Introducción

Garantizar que una empresa pueda posicionarse y mantenerse en el mercado, requiere de un proceso de mejora continua en cada uno de sus niveles y sectores. Específicamente el sector de producción es esencial para lograr que los productos diseñados se realicen de acuerdo a los objetivos de la empresa, de tal forma cumplan su propósito, calidad, especificaciones, y las expectativas de los clientes. Considerando que en este sector se suelen incurrir la mayoría de los costes de la empresa, es muy importante realizar su planificación con el fin de reducirlos lo máximo posible sin sacrificar ninguno de los demás objetivos. Esto conllevará a que la empresa incremente su efectividad, logre satisfacer la demanda del producto a precios competitivos y aumente sus utilidades.

Aunque los beneficios de una correcta planificación de la producción suelen ser conocidos por las empresas, su desarrollo suele ser limitado por los múltiples factores que inciden en esta, lo cual hace que su determinación no sea trivial, y se deba recurrir a la utilización de algún tipo de metodología analítica para lograrlo. Es así como surgieron los modelos clásicos de sistemas *Materials Requirement Planning* y *Enterprise Resource Planning* (Orlicky & Plossl, 1994), los cuales mediante heurísticos y toma de decisiones manuales permiten desarrollar soluciones factibles basadas en ciertos criterios de simplificación. Estos modelos sin embargo no suelen obtener una solución óptima, al desarrollarse de una forma sistemática que contempla un mínimo número de alternativas, basándose en ajustar los planes de cada una de las etapas de la producción de tal forma estas cumplan con los requisitos de la demanda en los distintos periodos. Adicionalmente, este tipo de modelos no involucran directamente algunas restricciones como lo son la capacidad de la producción y del inventario, las cuales suelen ser importantes en gran mayoría de los problemas, y mucho menos algunas restricciones adicionales que puedan ser características de ciertos procesos productivos.

Es así como ha surgido como alternativa la optimización de la planificación de la producción mediante el uso de modelos matemáticos, los cuales se pueden resolver por medio de algoritmos programables en ordenadores. En el caso particular de los modelos de programación lineal entera mixta (*Mixed Integer Programming,* MIP), estos permiten una mayor flexibilidad en su formulación mediante el uso de variables binarias o enteras que permiten involucrar una gran variedad de detalles y alternativas según la forma en la que se empleen. Este tipo de modelos se veían altamente limitados cuando fueron desarrollados en los años 60, por la alta capacidad computacional requerida en sus algoritmos de resolución (Pochet & Wolsey, 2006), lo que con el desarrollo en la potencia de los computadores y con la ayuda de Solvers profesionales como CPLEX y sistemas de modelización con lenguaje algebraico de programación como GAMS, ha hecho que se puedan modelar problemas con alto nivel de complejidad en la actualidad.

Gran parte de los casos prácticos de planificación se pueden desarrollar mediante modelos MIP aunque posean complejidad computacional NP-Hard, pudiéndose resolver mediante el uso de un Solver sin necesidad de recurrir a heurísticos o meta-heurísticos. Además, la resolución de estos modelos puede determinar la solución óptima, o una solución cercana a esta cuando su complejidad, tamaño e infraestructura computacional disponible, obliguen a interrumpir el algoritmo de resolución antes de que se llegue a la mejor solución posible.

Conociendo las ventajas que tiene la optimización de modelos matemáticos respecto en la resolución de problemas de planificación de la producción respecto a herramientas clásicas como el MRP (Billington, McClain, & Thomas, 1983), se busca extender su aplicación al caso de la producción de artículos cuya vida útil es menor al horizonte de planificación. En este tipo de problemas es muy importante llevar un control del tiempo que lleva cada uno de los productos en el inventario, con el fin de que puedan ser utilizados de forma eficiente para satisfacer la demanda de cada uno de los periodos, y se evite tener desperdicios por su incorrecto manejo.

Con el fin de evaluar problemas de planificación de la producción de artículos con vida útil corta, se plantean en este Trabajo de Fin de Máster cuatro modelos en orden creciente de complejidad, iniciando con dos modelos que buscan minimizar el coste total de producción, contemplando el modelo 1 un producto a un nivel, y el modelo 2 multinivel, un producto final con vida útil corta que se puede elaborar con distintas vidas útiles restantes iniciales, dependiendo de la vida útil restante de los productos del nivel inferior utilizados en su elaboración, las cuales a su vez poseen vida útil corta. Posteriormente, en el modelo 3 se busca adicionar el objetivo de maximizar la vida útil media del producto final entregado a los clientes al objetivo de minimización de costes del modelo 2, de tal forma se pueda así crear un conjunto de soluciones que permitan conocer la relación entre ambos objetivos con el fin de encontrar una solución equilibrada. Finalmente, se desarrolla el modelo 4 con el que se busca por medio del uso de variables binarias incorporar decisiones entre alternativas de producción, y alternativas de subcontratación con precios variables tomando como base el modelo 3.

Finalmente, se abordan cada uno de estos modelos en el presente Trabajo Fin de Máster, mediante la siguiente estructura de los capítulos:

- Descripción de la problemática (capítulo 2): se describe detalladamente los casos basados en supuestos reales que se cubren mediante los modelos planteados y su utilidad.
- Estado del arte (capítulo 3): se hace una recopilación de los principales casos abordados en la literatura relacionados con modelos de programación lineal entera mixta, programación multicriterio, y planificación de la producción multinivel con artículos con vida útil corta.
- Propuesta metodológica (capítulo 4): se hace una descripción conceptual sobre los principales temas relacionados con los modelos planteados, entre los cuales se hace una introducción a la programación lineal, programación lineal entera mixta, los casos en los que es aplicable y útil, su adaptación a modelos multiobjetivo, y finalmente las herramientas computacionales utilizadas para desarrollar los modelos y visualizar su solución.
- Modelos 1, 2, 3 y 4 (capítulos 5, 6, 7 y 8): se desarrolla cada uno de los modelos descritos anteriormente, realizando una explicación del problema a resolver, seguido por el planteamiento de cada uno de los componentes del modelo matemático mientras se describe su funcionalidad detalladamente, su implementación e interpretación para su puesta en práctica como plan de producción mediante un ejemplo, un análisis de los resultados y finalmente conclusiones.
- Conclusiones generales y trabajo futuro (capítulo 9): se finaliza con una recopilación de las ideas principales y los objetivos alcanzados por medio del presente Trabajo de Fin de Máster, y se proponen ideas para su ampliación y continuación en trabajos futuros.

1.2. Objetivos

Habiendo introducido la motivación y los temas a cubrir en este Trabajo Fin de Máster, se especifican los objetivos que se buscan cumplir mediante su desarrollo:

- Proponer modelos matemáticos de programación lineal entera mixta para la planificación en la producción de artículos con vida útil corta en varios niveles, que sean fáciles de adaptar e interpretar a problemas de la realidad.
- Plantear y resolver un modelo de programación biobjetivo que permita encontrar una solución balanceada entre los costes totales y la calidad del producto percibida por los clientes utilizando la longevidad del producto entregado como indicador, realizándolo por medio del análisis del conjunto de soluciones eficientes obtenidas por el modelo bajo los criterios de minimizar el coste total y maximizar la vida útil media de los productos recibidos por los clientes.
- Describir los diferentes usos que tienen las variables enteras en los modelos matemáticos de programación lineal entera mixta, y aprovecharlos para involucrar alternativas de selección entre máquinas de producción que representen distintas capacidades de producción, costes de lanzamiento y coste unitario por fabricación de producto, además de involucrar la alternativa de subcontratación de la producción.
- Implementar cada uno de los modelos aprovechando las ventajas del lenguaje profesional de modelización algebraica GAMS, aplicarlo a ejemplos mediante el uso del Solver profesional CPLEX, y presentar los resultados mediante tablas y gráficas para su análisis.

2. Descripción de la problemática

Este Trabajo de Fin de Máster contempla problemas de planificación de la producción para artículos con vida útil corta, los cuales como se mencionó anteriormente, se irán presentando en un orden creciente de complejidad a lo largo de la presente memoria. El primer modelo considera el caso de un único producto con vida útil corta en un solo nivel, sirviendo como base para plantear el segundo modelo, en el que se extiende su aplicación a un caso con estructura multinivel en el que cada uno de los productos involucrados en la producción tienen ciertas características particulares de vida útil corta, de las cuales depende la vida útil restante del producto final del nivel superior.

Los problemas planteados buscan poder representar ciertos casos reales que puedan tener características similares de vida útil corta, y que, de tener ciertas variantes, puedan ser adaptados por medio de estos. Los principales casos en los que se considera estos podrían ser prácticos, son los casos de elaboración de alimentos procesados, que se compongan de otros alimentos a su vez perecederos, los cuales el cliente al ordenarlos buscará que no sea necesario utilizarlos inmediatamente, sino que pueda almacenarlos cierta cantidad de tiempo, o que de hacerlo estén lo más frescos posible. En estos se espera que el producto deje de ser útil luego de un tiempo por su fecha de vencimiento, por su sabor, apariencia, propiedades organolépticas, etc., pero también habrá casos en los que se requiera de cierto tiempo desde su producción para su uso, por ejemplo, por falta de madurez o de consistencia requerida, o hasta casos en los que el producto sea útil para diferentes usos dependiendo de su edad, como podría pasar en el caso de los lácteos. Asimismo, este tipo de problemas se podrán adaptar a casos que no consideren directamente la producción, pero sí manejen artículos con vida útil reducida como podría suceder por ejemplo en el caso de una empresa que se dedique a la elaboración de arreglos florales, para los cuales requerirá distintas especies con ciertas edades puntuales para realizarlos. En este caso los costes variables podrían representar lo que se incurra en comprar las flores a un proveedor por unidad, los costes fijos los gastos de transporte, etc.

Para cada uno de los modelos se considera que se conoce la demanda del producto, bien en forma de pedidos realizados y pendientes de servir, o en forma de un pronóstico de ventas, que habrá de cumplirse en su totalidad y a tiempo para cada uno de los periodos del horizonte de planificación. Además, se considera que en cada periodo existen limitaciones por capacidad de la producción, capacidad de almacenamiento, y especialmente limitaciones en la edad de los productos que habrán de utilizarse en cada etapa de la estructura multinivel y de los productos finales que serán entregados a los clientes.

A partir de los problemas que se buscan tratar con estos modelos surge la necesidad de determinar cuáles son las variables a controlar en cada uno de los periodos del horizonte de planificación. Estas variables al no haber flexibilidad en la forma de satisfacer la demanda, se limitará en el caso de un producto en un solo nivel, a la cantidad de cada producto a realizar en cada periodo y a cuáles unidades disponibles del inventario utilizar para satisfacer la demanda, y de forma adicional en el caso multinivel, a la cantidad de cada producto de cada edad utilizar en la conformación de cada uno de los productos de cada posible edad de un nivel superior. Finalmente, en el modelo 4 también se obtiene como resultado la máquina a utilizar en la fabricación del producto final, y la cantidad de producto a subcontratar.

Tanto para el caso de un solo nivel (modelo 1) y el caso multinivel (modelo 2 y siguientes) se busca obtener un plan de producción que además de ser factible y de cumplir la demanda considerando las distintas limitaciones, tenga como objetivo garantizar que se incurra en el menor coste total posible. Es así que la solución habrá de encontrar un balance entre cada uno de los conceptos de coste que lo componen, los cuales son:

- Los costes en caso de lanzarse la producción de cada uno de los productos en el periodo, lo cual representa un coste fijo independiente de la cantidad de producto que se realice en este. Los costes de lanzamiento modelizan la preparación de las líneas de producción, puesta en marcha de maquinaria y limpieza posterior de los recursos productivos, entre otros ejemplos.
- Los costes variables de producción de cada producto, que dependen de la cantidad de producto que se realice en cada periodo y que son determinados al multiplicarla por su coste unitario.
- Los costes por inventario, que representan los gastos que requiere mantener el producto almacenado, los cuales se asume que son lineales con la cantidad almacenada.
- Los costes por desechar producto, los cuales son también lineales con la cantidad de producto desechado, al asumirse existe un coste unitario por cada producto que no sea utilizado y que se deba desechar. Es importante diferenciar este coste del coste variable de producción. El producto no solo cuesta producirlo, sino también el hecho de sacarlo del inventario y deshacerse de él al estar vencida su fecha de consumo (por ejemplo incineración, reciclaje, etc.).

Es de esperar que contra más segmentada sea la producción, se pueda realizar pequeñas cantidades de los productos en cada periodo, se tenga costes por inventario pequeños, y productos a entregar a los clientes recién elaborados que eviten de igual forma tener desechos. Sin embargo, al existir un coste fijo en el caso de lanzarse la producción en cada periodo, producir en más periodos de tiempo de lo necesario implicará estos costes aumenten, y que los ahorros por inventario y por desechar producto se pierdan. Por otro lado, en caso de fabricarse la producción en pocos periodos como se haría en un caso de aplicación de economía de escala, se reducirán los costes por lanzamiento, pero aumentarán los costes por inventario, y en el caso de los productos con vida útil corta, se obtendrán productos con baja vida útil restante en ciertos periodos que de llegar a no cumplir con las condiciones de edad para su uso, harán que se haya perdido su coste por producción y encima de todo se deba incurrir en un coste adicional en el momento de desecharse.

Adicionalmente a partir del modelo 3, al ser importante qué tan frescos o nuevos están los productos que reciben los clientes en la imagen y en la calidad percibida por estos, se considera pertinente buscar agregar como objetivo entregar a los clientes un producto con la mayor vida útil restante posible, además de buscar reducir al máximo el coste total. Estos dos criterios entran en conflicto en la determinación de la solución a implementar, ya que para entregar un producto con vida útil restante alta se debe evitar utilizar productos con vida útil cercana a cero, lo cual impone limitaciones que alteran el balance que debe haber en el plan de producción para garantizar un coste total bajo. Por lo anterior, se habrá de escoger una solución que, aunque tenga costes superiores a los mínimos posibles, estos sean lo menor posible mientras a la vez se garantiza cierta vida útil restante media del producto entregado a los clientes.

3. Estado del Arte

La investigación operativa ha cambiado el enfoque mediante el cual se plantean soluciones a problemas de planificación de la producción, tal como se menciona en uno de los primeros trabajos en estudiar este problema. El trabajo en concreto es *Mathematical programming approaches to capacity-constrained MRP systems: review, formulation and problem reduction* (Billington, McClain, & Thomas, 1983), donde se explican las deficiencias de sistemas tradicionales como el MRP (que asumen no existen restricciones por capacidad), y la falta de eficiencia en las metodologías utilizadas en ciertas empresas para involucrar estas restricciones, las cuales en casos multinivel generalmente se tratan mediante heurísticos simples que únicamente buscan solucionar su cumplimiento sin involucrar otros niveles de la producción, llegando simplemente a una solución factible sin optimizar el problema. Es así que en este artículo se plantean como alternativa su formulación mediante modelos matemáticos (MIP), y se menciona cómo facilitar su resolución mediante relajación lagrangiana teniendo en cuenta el tamaño de los problemas y la capacidad computacional de la época.

Es así que el uso de la investigación operativa y la literatura relacionada con problemas de planificación ha crecido muy rápido a partir del trabajo anteriormente citado, existiendo diversas formas para abordar problemas de este tipo según el tipo de modelización, los algoritmos de resolución, y en general la estructura de los modelos según su enfoque en la definición de las variables, objetivo, restricciones, tipos de parámetros, etc. Es así que en *Mathematical Programming Models and Methods for Production Planning and Scheduling* (Shapiro, 1993) se describen la variedad de tipos de modelos matemáticos que se han aplicado, y se hace énfasis en su utilidad para solucionar problemas de planificación, y su aplicabilidad como partida para analizar problemas de mayor escala en temas de programación de la producción, que requieran de otros métodos de resolución para alcanzar una buena solución a los problemas ante su complejidad computacional, como lo son los heurísticos. Entre las diferentes categorías de modelos matemáticos que se mencionan en este, se encuentra la programación lineal, la optimización en redes, programación lineal entera mixta, no lineal, dinámica, multicriterio y estocástica.

En particular en la modelización de productos con vida útil corta o perecederos, como la que se trata en este Trabajo Fin de Máster, también se encuentra en la literatura una gran variedad de artículos que buscan solucionar la planificación de la producción, utilizando principalmente modelos de programación lineal entera mixta (MIP), la cual es desarrollada y acompañada de otras metodologías, algoritmos o supuestos dependiendo del caso puntual de aplicación.

Ahumada & Villalobos (2011) realizan modelos MIP para la planificación de la cosecha y distribución de productos perecederos en la agricultura, con los cuales buscan maximizar las ganancias, pero a la vez entregar un producto que esté lo más cercano a su punto ideal de madurez, medido a través de características como el color, textura, apariencia externa, tiempo almacenado, cuya representación aproximada mediante funciones dependientes del tiempo es útil para involucrar este factor en los modelos.

En *Multi-Objective Lot-Sizing and Scheduling Dealing with Perishability Issues* (Amorim, Antunes, & Almada-Lobo, 2011), se busca realizar la planificación y la programación de la producción para este tipo de productos de forma simultanea mediante su planteamiento en un modelo de programación lineal entera mixta multiobjetivo que busca minimizar el coste total, y entregar el producto lo más fresco posible, maximizando su *freshness*, utilizando un algoritmo genético multiobjetivo NSGA-II para su resolución (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyariva, 2002), lo que una vez más demuestra la importancia en considerar alguna medida de la calidad de los productos en este tipo de problemas, al variar esta con el tiempo en los productos perecederos.

En *A robust optimization model for production planning of perishable products* (Leung, Lai, Ng, & Wu, 2007) se busca modelizar el caso de una empresa que fabrica dos tipos de juguetes, cuyos componentes son perecederos, y encontrar un plan de producción que garantice tener un valor cercano al óptimo en la función objetivo (de maximizar la utilidad), teniendo en cuenta la incertidumbre del mercado y el riesgo de fallo de los componentes. Esto se realiza mediante un modelo multicriterio basado en escenarios que permite encontrar un set de soluciones eficientes entre dos criterios de robustez, en la solución y en el modelo, refiriéndose en el primer caso a un plan que permita obtener un plan que garantice cierta cercanía al valor óptimo en la utilidad, y refiriéndose el segundo a un plan que no esté cercano a incumplir sus restricciones y así a ser inviable.

También se han planteado alternativas híbridas que combinan programación de modelos matemáticos y simulación simultáneamente para la planificación de la producción multiperiodo para múltiples productos, que buscan aprovechar las ventajas de ambos tipos de modelos, de tal forma estos sean más realistas e involucren la incertidumbre de los parámetros y sean fáciles de interpretar (Byrnea & Bakir, 1999). Otros modelos desarrollados en el tema son de programación lineal entera estocástica multiobjetivo de dos pasos, aplicados a maximizar las utilidades en la producción de alimentos y biocombustible (Cobuloglu & Büyüktahtakin, 2017), en los que se consideran múltiples estados de los productos debido a la incertidumbre en las condiciones climáticas y otros parámetros para crear una serie de escenarios, y se utiliza posteriormente descomposición tipo Bender para buscar su solución en problemas de gran escala, separando el problema original en un problema maestro y un subproblema, que son sincronizados de tal forma su resultado sea consistente con el problema original.

Mula, Poler, García-Sabater, & Lario (2006), hacen una revisión exhaustiva de la literatura existente sobre modelos de planificación de la producción que consideran la incertidumbre, entre los cuales se encuentra que existen principalmente artículos con un enfoque estocástico, algunos de programación dinámica con un enfoque teórico únicamente, y se encuentra que ante problemas con procesos complejos, se suele utilizar simulación e inteligencia artificial. Además, consideran que los modelos fuzzy parecen ser aquellos con mayor potencial para el desarrollo de modelos que consideran incertidumbre de diferentes fuentes y no únicamente la demanda como en la mayoría de los casos se suele abordar, por lo que en *The effectiveness of a fuzzy mathematical programming approach for supply chain production planning with fuzzy demand* (Mula, Peidro, & Poler, 2010), buscan demostrar su efectividad en un modelo de programación lineal fuzzy, con el cual se puede involucrar la incertidumbre sin requerir mayor potencial computacional como se podría requerir en un modelo estocástico.

Se han realizado modelos fuzzy de programación lineal entera mixta para la planificación de la producción en los casos en los que la incertidumbre puede llevar a que se tenga escasez para la entrega del producto debido a la falta de homogeneidad de los productos por del proceso de producción (Alemany, Grillo, Ortiz, & Fuertes-Miquel, 2015). También se han desarrollado modelos fuzzy multiperiodo para la planificación de la producción y el abastecimiento (Lan, Liu, & Sun, 2009), en los cuales se asume que los costes y la demanda son variables difusas con cierta distribución de posibilidades, que ante su complejidad se deben solucionar mediante la combinación de redes neuronales (NN) y meta-heurísticos como algoritmos de enjambres de partículas o *Particle Swarm Optimization* (PSO).

Por otro lado, buscando unificar los distintos procesos de una empresa, se han creado modelos matemáticos para enlazar la cadena de suministro, la planificación de la producción y la distribución de productos perecederos con inventario como lo hacen Seyedhosseini & Ghoreyshi (2014), sin embargo en su implementación se ha encontrado que se incurre en un gran coste computacional, aun utilizando modelos con relajaciones, por lo que es necesario el uso de heurísticos para su solución en problemas de gran escala, siendo el modelo matemático útil para obtener una solución factible de partida.

Habiendo detallado el estado del arte de los problemas de planificación de la producción para artículos con vida útil corta, se propone incorporar algunas de las ideas importantes mencionadas anteriormente en este Trabajo Fin de Máster, y buscar formular los modelos de tal forma abarquen casos diferentes y sean útiles por su fácil interpretación.

Surge como idea enfocar los modelos MIP a tratar productos cuya vida útil inicial está condicionada por los productos a partir de los cuales está elaborado, que a su vez son de vida útil corta, y cuya vida útil restante es conocida y así determinística. Esto enfocándose a permitir modelar la fecha de vencimiento del producto final, siendo distinto al caso en el que es prioridad modelar la incertidumbre de la demanda para encontrar una solución robusta, o al caso en el que no se tiene certeza del tiempo en el que los productos pueden ser útiles.

Adicionalmente, se busca incorporar un modelo biobjetivo que no solo minimice los costes, sino que también garantice cierto estado de vida útil restante de los productos entregados a los clientes, tomando como referencia las buenas prácticas desarrolladas en *Multi-Objective Lot-Sizing and Scheduling Dealing with Perishability Issues* (Amorim, Antunes, & Almada-Lobo, 2011). Sin embargo, en este caso el modelo que trata la elaboración de una serie de productos en un único nivel, se trata cada producto individualmente, siendo estos representados por su fecha de elaboración, y su fecha de entrega, y no agrupando los productos por sus características en el inventario, lo cual podría dificultar su extensión a un caso multinivel en el que las condiciones lógicas requeridas a formular para representar las alternativas de vida útil inicial en la elaboración de productos del nivel superior, podría resultar en una cantidad innecesaria de variables. Por lo anterior, se busca en cambio desarrollar un modelo que tenga en cuenta el tiempo de vida de los productos, detallándolos para cada uno de los periodos según la cantidad existente para cada una de los valores posibles de vida útil restante.

Asimismo, en *Mathematical Programming Models and Methods for Production Planning and Scheduling* (Shapiro, 1993), se menciona la importancia de tratar separadamente los problemas de planificación de la producción, que suelen ser de naturaleza táctica y que suelen abordar los problemas a largo plazo desde un enfoque más global, de los de programación de la producción, que suelen ser de naturaleza operacional y que suelen describir al detalle pequeños segmentos de la producción con horizontes de planificación de pocas horas, días o semanas. Por lo anterior se considera realizar modelos que inicialmente consideren únicamente la planificación de la producción para este tipo de problemas, de tal forma se pueda garantizar su fácil uso mediante modelos matemáticos MIP que se puedan resolver mediante un Solver.

Finalmente, aprovechando el amplio uso que se le puede dar a los modelos MIP mediante el uso de variables enteras, se decide realizar una revisión de la literatura para buscar incorporarlos en los modelos a realizar. Gonen & Foote (1981), los utilizan en la planificación de sistemas de distribución para representar una gran cantidad de condiciones lógicas y de alternativas a decidir como la ubicación de estaciones, su tamaño, expansión, número de métodos de transporte, etc., además de utilizarlo para representar una función de costos no lineal mediante funciones lineales a trozos. Winston & Venkataramanan (2003) ilustran una serie de ejemplos de aplicación sencillos en decisiones de inversión, costes fijos y funciones no lineales, mientras que Magee & Glover (1996) de forma más detallada mencionan su utilidad para representar cantidades enteras, decisiones, variables indicadoras, condicionales, restricciones de selección múltiple, restricciones lógicas, restricciones disjuntas, separación de espacios no convexos, la aproximación lineal de funciones no lineales y la creación de sets especialmente organizados. Por último, se hace una revisión de los principios de *Boolean Algebra*, a los que se puede acceder por medio de una gran variedad de libros como *Boolean Algebra and its Applications* (Whitesitt, 2010). Esta estructura algebraica que permite esquematizar operaciones lógicas es útil para simplificar relaciones de muchas etapas y complejas, de tal forma en conjunto con las formas de representar las condiciones lógicas mediante restricciones en un modelo MIP, permita garantizar se desarrolla el modelo adecuadamente.

4. Propuesta Metodológica

Con el fin de introducir la teoría detrás de los modelos y herramientas utilizados en este Trabajo Fin de Máster, se presenta en este capítulo una breve explicación de los conceptos, las suposiciones y las ventajas de los modelos de programación lineal entera mixta. Posteriormente se explica el uso de modelos multi-criterio y del cálculo del conjunto de soluciones eficientes que se pueden obtener a partir de estos, y finalmente un resumen de los motivos de la selección de las herramientas computacionales utilizadas para la resolución de los modelos planteados.

4.1. Introducción a los modelos matemáticos

La investigación de operaciones como menciona Winston y Venkataramanan en *Introduction to Mathematical Programming* (2003), estudia la toma de decisiones desde un enfoque científico, en el cual se suelen involucrar modelos matemáticos para representar un problema real para realizar mejores decisiones sobre este, y comprender en mayor profundidad su comportamiento. De esta forma la selección y determinación de un modelo depende directamente de la estructura matemática de la realidad del problema en cuestión, y de la habilidad y la importancia que se le dé a cada uno de sus componentes en la toma de decisiones.

Los distintos modelos matemáticos que se suelen plantear en la práctica suelen estar compuestos por 3 componentes que se deben plantear adecuadamente para representar en su totalidad los elementos básicos que caracterizan el problema a tratar, siendo estos: la función objetivo, las variables decisión y las restricciones. En el modelo los componentes se relacionan al buscarse encontrar los valores que deben tomar las variables decisión para optimizar la función objetivo entre el espacio total de soluciones limitado por las restricciones.

Es así como las variables decisión deben describir completamente las decisiones o alternativas a determinar. La función objetivo, que se debe describir en función de las variables decisión, debe representar el objetivo principal y el criterio según el cual se van a comparar las soluciones factibles, siendo el fin de la resolución del problema encontrar la solución factible que la optimice, ya sea por maximización o minimización. Finalmente, las restricciones deben plantearse mediante igualdades o desigualdades involucrando las variables decisión acompañadas de sus respectivos coeficientes, y los valores limitantes característicos de cada restricción, siendo mediante estas que se garantiza se analicen únicamente las soluciones factibles en el modelo.

Dependiendo de la naturaleza de las funciones matemáticas habrá de seleccionarse una técnica de resolución adecuada, cuya dificultad y tipo de solución dependerá del caso, pudiéndose requerir en ciertos casos por su complejidad el uso de técnicas heurísticas o meta-heurísticas, que no siempre podrán garantizar se pueda encontrar la solución óptima del problema.

4.1.1. Modelos de programación lineal (LP)

La programación lineal en particular, es una de las herramientas a las que mayor uso se le ha dado por sus ventajas para representar gran variedad de problemas, y por las facilidades que brinda para determinar su solución óptima. En esta, la función objetivo y cada una de las ecuaciones de las restricciones deben ser planteadas como una combinación lineal de las variables.

De esta forma, la función objetivo debe tener una estructura como la siguiente, siendo la función objetivo (f) constituida por la suma de las variables decisión (x) que están acompañadas de sus respectivos coeficientes (c).

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

De forma similar, las i restricciones del modelo tendrán una estructura como la siguiente, en la que la función g habrá de ser lineal respecto a las variables, las cuales estarán acompañadas de los coeficientes técnicos que las multiplican (a), teniendo que ser el valor de la función g menor o igual, mayor o igual, o simplemente igual al parámetro de limitación (b).

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \, (\leq o \geq o =) \, b_i$$

Lo anterior implica que en estos modelos se debe asumir el principio de proporcionalidad y de aditividad de las variables, asumiendo que la función objetivo y que la función g de cada restricción se pueda calcular como la suma de las contribuciones individuales de cada una de las variables, contribución que a su vez habrá de ser proporcional al valor de cada variable, y que será independiente del valor que tomen el resto de variables.

Adicionalmente, en las variables se asume el principio de no negatividad, en el cual se asume que todas las variables tomarán valores iguales o superiores a 0, por lo que de tenerse variables que puedan tener valores negativos, será necesario realizar modificaciones en la modelización para evitar la variable utilizada tome valores negativos. Asimismo, se asume un principio de certidumbre en los parámetros, a los cuales se les debe atribuir un valor fijo y conocido, y finalmente se asume el principio de divisibilidad de las variables, lo que implica que estas podrán tomar cualquier valor real, y no un conjunto de valores discretos.

De garantizar el modelo en cuestión es de programación lineal, se podrá tener la certeza de que habrá una forma eficiente de solucionarlo utilizando algoritmos como el *Simplex*, con los que se obtendrá la solución o soluciones que optimicen el valor de la función objetivo. Adicionalmente, este tipo de modelos permiten realizar un análisis de sensibilidad sobre la solución, con el cual se puede tener una idea de las repercusiones que tendrían los cambios en los coeficientes de las variables en la función objetivo y en las partes derechas de las restricciones (fundamentalmente). Por lo anterior, de tenerse la posibilidad, es recomendable plantear un problema mediante un modelo de programación lineal, con el cual su implementación se podrá obtener fácilmente mediante herramientas computacionales, teniendo como resultado una solución que optimiza el problema y que es sencilla de interpretar.

4.1.2. Modelos de programación lineal entera mixta (MIP)

Los modelos de programación lineal entera mixta se parecen a los modelos de programación lineal explicados en el apartado anterior, con la diferencia de que en estos las variables no habrán de cumplir con el principio de divisibilidad, y podrá haber además de variables continuas, variables binarias y enteras. Aunque involucrar este tipo de variables en el modelo conlleva a que se deban utilizar distintos métodos de resolución al *Simplex*, como el algoritmo *Branch and Bound*, estos modelos de poderse solucionar con un Solver, permiten una gran flexibilidad a la hora de modelizar, siendo útiles para la representación de condiciones lógicas y de representación de alternativas, lo que no sería fácil de modelizar mediante un modelo de programación lineal. La utilidad y versatilidad que permiten este tipo de modelos se explican en mayor profundidad en la sección 4.2

Considerando los modelos desarrollados en este Trabajo de Fin de Máster son modelos MIP, se explica brevemente los fundamentos del método *Branch and Bound* que es utilizado para su resolución. Teniendo en cuenta la similitud entre los modelos MIP y LP, el método *Branch and Bound* se basa en resolver el problema asumiendo que el espacio de soluciones factibles es continuo para todas las variables sin importar estas sean realmente de naturaleza entera o binaria, de tal forma se puedan aprovechar las facilidades que tiene la resolución de los modelos LP. Es así como luego de obtener la solución que optimiza el problema que se asume es LP, se debe analizar el valor obtenido en las variables enteras que se asumieron continuas en este, y dividir en dos el espacio de soluciones factibles para continuar resolviendo el problema con la suposición de que es LP en cada uno de estos subespacios hasta converger en la mejor solución que cumpla con la naturaleza de las variables, la cual será la solución óptima al problema (Winston & Venkataramanan, 2003, págs. 512-539).

En este proceso es importante detallar que en la solución de un problema MIP con la relajación LP, siempre se obtendrá en la función objetivo un valor que es igual o mejor al que tendrá la solución óptima al problema MIP, ya que el espacio de soluciones factibles del modelo MIP estará contenido dentro del espacio de soluciones del modelo LP adaptado a este.

En el proceso de división del espacio de soluciones para la búsqueda de la solución óptima al problema luego de la evaluación con la relajación LP, la división en dos del espacio de soluciones del modelo padre (modelo del que parte la división del problema en dos) deberá hacerse dependiendo del valor que tome una de las variables que habrá de ser de naturaleza entera en el modelo MIP, tomándose este valor obtenido en el modelo padre que no obtuvo una solución entera y creando dos subproblemas a resolver nuevamente con relajación LP. Uno de estos subproblemas limitará el espacio de soluciones del modelo padre para aquellos casos en los que la variable base tome valores iguales o inferiores al entero que es menor al valor obtenido en el modelo padre, mientras que el otro subproblema limitará la parte complementaria, al limitar el espacio de soluciones del modelo padre a los casos en lo que la variable tome valores iguales o mayores al entero superior del valor obtenido para esta misma variable en el modelo padre. Es así como de tener por ejemplo una variable de naturaleza entera con un valor de 2.4 en la resolución del modelo padre con relajación LP, se habrá de obtener dos subproblemas que tomen el espacio de soluciones del modelo padre pero uno con la limitación de que la variable tome valores iguales o inferiores a 2, mientras que otro con la limitación de que esta tome valores iguales o superiores a 3.

Es así como de no encontrar una solución que optimice el problema que sea entera o binaria para las variables de esta naturaleza, se continuará con la bifurcación del problema dependiendo del análisis de los resultados obtenidos en cada uno de los subproblemas, de tal forma se oriente el espacio de búsqueda hasta llegar a la solución óptima al problema MIP. En caso de tenerse un modelo cuya complejidad requiera una gran cantidad de bifurcaciones para la búsqueda de la solución óptima, se podrá truncar el algoritmo según algún criterio que garantice una solución que es cercana a la óptima.

4.2. Utilidad de la programación lineal entera mixta en la modelación de problemas

La programación lineal entera mixta (MIP) como se mencionó anteriormente, es una extensión de los modelos de programación lineal, por lo que aunque requiere de algoritmos más complejos como el *Branch and Bound* para su resolución, posee en general el mismo tipo de ventajas, mientras a su vez permite utilizar variables de naturaleza binaria o entera en los modelos. El uso de variables enteras permite incorporar a los modelos de programación lineal una serie de elementos que son útiles al aplicarse a una gran variedad de problemas, y que permiten modelar aspectos que directamente requieren de estas variables por su naturaleza entera, como lo son ciertas medidas en la práctica y decisiones, pero a su vez permiten indirectamente modelar otros aspectos como lo son las condiciones lógicas, funciones no lineales, indicadores, etc.

Empezando por las variables de naturaleza entera, como podrían tenerse en un caso de planificación por lotes, aunque en ciertos casos es útil asumir que una variable es continua para resolver el problema fácilmente mediante programación lineal y luego redondear la solución, en ciertos casos es necesario evitar este tipo de relajaciones al tratarse con variables con valores enteros de pequeña escala o casos en los que la solución de ser redondeada puede representar problemas de incumplimiento de restricciones y/o empeoramiento significativo en la función objetivo, siendo así necesario realizar MIP.

Por otro lado, las decisiones que son objeto de estudio en una gran cantidad de problemas se pueden representar mediante el uso de variables binarias, las cuales se habrá de utilizar en el modelo de tal forma al tomar el valor 0 o 1 modifiquen el modelo representando el caso en el que la decisión es tomada o no. Al utilizar este tipo de variables se debe modificar el modelo de tal forma se evite formular modelos que, aunque matemáticamente son correctos, podrían dejar de cumplir los supuestos de la programación lineal, principalmente el de la linealidad de las variables, por lo que es muy importante utilizar restricciones lógicas que permitan su adaptación a un modelo de programación lineal entera mixta.

Dentro de otras aplicaciones que se suelen utilizar mediante variables enteras, está el uso de indicadores para el rango de una variable continua o por una restricción lógica, siendo en el caso de planificación de la producción, importante para reflejar los costes fijos asociados a producir artículos en un rango determinado por su capacidad, sirviendo estas variables para representar si se realiza o no el lanzamiento de la producción.

De igual forma, las variables binarias pueden ser útiles para segmentar regiones de soluciones que no cumplen con el criterio de convexidad para su resolución mediante algoritmos de programación lineal, en subregiones convexas. Aunque en ciertos casos puede ser difícil determinar la segmentación de la región factible inicial en subregiones convexas, las variables binarias permiten variar las restricciones de tal forma se represente cada una de las subregiones de forma independiente para cada posible combinación de valores de estas variables dicótomas, y a su vez permiten enlazar la solución óptima de cada una de estas regiones, de tal forma se pueda determinar aquella que tiene mejor valor en la función objetivo, para así obtener una solución óptima global.

Finalmente, entre los principales usos de las variables enteras está la representación de funciones no lineales mediante su aproximación a una serie de funciones lineales por rangos. Lo anterior de aplicarse eficientemente de tal forma las funciones lineales se asemejen lo suficientes a la función original, puede evitar se deba recurrir a solucionar un modelo de programación no lineal, que podrá requerir de algoritmos más complejos para su resolución, que no siempre podrán garantizar obtener una solución que sea óptima global.

4.3. Modelación multiobjetivo

En la resolución de problemas suele ser difícil escoger un único criterio respecto al cual buscar optimizar un modelo, por lo que se han desarrollado métodos de decisiones multicriterio que permiten encontrar soluciones que se basen en varios objetivos de forma simultánea. Entre estos métodos multicriterio, es de interés en este Trabajo Fin de Máster aquellos métodos de decisiones multiobjetivo, que, a diferencia de los multiatributo, consideran un espacio de soluciones que es continuo. Asimismo, estos métodos multicriterio se pueden clasificar según el tipo de datos que utilizan en métodos determinísticos, estocásticos o fuzzy, o también se pueden clasificar según la cantidad de individuos que estén involucrados en la toma de decisiones que puede ser singular o de grupo, siendo los problemas que se consideran en este trabajo fin de máster modelados, por sus características, mediante modelos con un único individuo involucrado en la toma de decisiones con datos determinísticos.

Es característico de este tipo de modelos que los distintos criterios u objetivos de decisión suelan estar en conflicto, y se midan en unidades que difieran o sean incomparables, por lo que su forma de resolución no suele ser única al depender del peso que se le atribuya a cada uno de los objetivos en la determinación de la solución. Es por esto, que puede ser preferible obtener un conjunto de soluciones eficientes que permitan al decisor escoger una alternativa que se ajuste de acuerdo a su juicio, y a la relación y el coste de oportunidad entre ambos objetivos.

4.3.1. Conjunto de soluciones Pareto eficientes

Las alternativas se dice que son dominadas si existe alguna otra alternativa que sea mejor en uno o más criterios, mientras el resto de criterios permanecen constantes. Es así como un conjunto de soluciones no dominadas, también llamado un conjunto de soluciones eficientes, está compuesto por aquellas alternativas en las que ninguno de los objetivos podrá ser mejorado a menos de que se degrade la solución para por lo menos uno de los criterios. En el caso a abordar desde el modelo 3, el cual se explicó anteriormente busca minimizar el coste total y maximizar la vida útil media del producto entregado por los clientes, las soluciones eficientes serían aquellas en las que para un coste total determinado no exista un mayor valor posible de vida útil medio, y de forma similar para una vida útil media del producto entregado no exista otra alternativa que represente menores costes totales.

4.3.2. Metodología para la obtención del conjunto de soluciones Pareto eficientes

En el caso de un problema que involucra dos funciones objetivo, es de gran utilidad conocer todas las soluciones Pareto eficientes, con el fin de conocer la tasa de intercambio de estas en cada solución, y además aprovechar su bidimensionalidad para realizar una gráfica que permita visualizar su comportamiento para facilitar la decisión respecto a la alternativa a emplear. Existen diversas formas para obtener este conjunto de soluciones, siendo en *The computational algorithm for the parametric objective function* (Gass & Thomas, 1955) en donde se planteó por primera vez un algoritmo para su desarrollo.

Se utiliza el método de las ponderaciones, aprovechando que su implementación depende variar un único parámetro w en la función objetivo para crear cada una de las posibles soluciones eficientes al problema en cuestión. De esta forma la función objetivo a evaluar de forma iterativa es:

$$Min\ L = w\left|\frac{f_1(x) - f^*{}_1}{f_{*1} - f^*{}_1}\right| + (1 - w)\left|\frac{f_2(x) - f^*{}_2}{f_{*2} - f^*{}_2}\right|$$

Donde en la minimización de la variable artificial L, se encuentra cada una de las soluciones eficientes de la frontera de Pareto respecto a ambos criterios para cada valor diferente de w que se utilice, siendo este el que regula el peso que se le da a cada uno de los objetivos en la solución. En esta función, el peso w se debe variar entre los valores 0 y 1, garantizando que cada uno de los objetivos esté multiplicado por pesos complementarios que habrán de sumar 1. De esta forma se le estará dando todo el peso a la optimización de la función 1 de ser w igual a 1, y todo el peso a la optimización de la función 2 de ser 0.

Cada uno de los términos dentro de un valor absoluto, calculan la diferencia relativa que existe entre el valor que toma una función de uno de los dos criterios (f(x)) respecto a su valor ideal (f^*), al dividirse su diferencia entre la amplitud de los posibles valores que puede tomar en el problema, los cuales están delimitados por su valor ideal (f^*) y su valor anti-ideal (f_*).

Previo al uso de la función objetivo, se deben determinar los valores ideales y anti-ideales de cada función para crear la matriz de pagos. Esto se logra al solucionar el problema optimizando únicamente el primer criterio, y posteriormente únicamente el segundo criterio como un problema de único objetivo, y obteniendo los resultados de ambas funciones en ambos casos.

Tabla 1 Matriz de pagos de un modelo biobjetivo

	Función a optimizar	
	f1	**f2**
Valor ideal	f_1^*	f_2^*
Valor anti-ideal	f_{*1}	f_{*2}

4.4. Herramientas computacionales para la resolución de modelos matemáticos

Para poner en práctica cada uno de los modelos planteados de programación lineal entera mixta en el Trabajo Fin de Máster, se plantean ejemplos que son resueltos utilizando algoritmos de alto desempeño del Solver profesional CPLEX por medio del software y lenguaje de programación GAMS.

4.4.1. GAMS

GAMS (General Algebraic Modeling System) como se explica en profundidad en su página (www.gams.com) y en libros como *Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science* (Castillo, Conejo, Pedregal, Garciá, & Alguacil, 2002) es un ambiente computacional que se utiliza para definir, analizar y resolver problemas de optimización.

Esta herramienta se basa en un lenguaje de programación escueto que es altamente versátil y eficiente para resolver modelos matemáticos. GAMS brinda la facilidad de escalar problemas pequeños a problemas grandes sin necesidad de aumentar significativamente el código, considerando permite declarar parámetros, funciones y restricciones basado en índices, lo que permite que estos se puedan generalizar mediante el uso de pocas líneas. Adicionalmente, la metodología de programación por medio de GAMS es muy similar a la metodología utilizada para la declaración de modelos matemáticos, por lo que facilita pasar un modelo definido en papel a su aplicación, siendo además sencillo de interpretar por quien lo lee directamente del código.

Una gran ventaja que posee GAMS es que, una vez se declara el modelo en su adecuada notación, se puede escoger entre una gran variedad de Solvers que este utiliza para resolver el problema, por lo que previamente a la modelización del problema no hay necesidad de analizar las técnicas de resolución que se van a implementar. De esta forma, dependiendo de la complejidad y del tipo de problema, se puede determinar o probar con distintos Solvers la resolución del problema, considerando que estos son constantemente actualizados. Entre los tipos de problemas que se pueden solucionar con GAMS están aquellos de programación lineal y no lineal: *Linear Programming* (LP), *Nonlinear Programming* (NLP), *Nonlinear Programming with discontinuous derivatives* (DNLP), problemas de programación lineal entera mixta como los que se realizan en el Trabajo Fín de Máster como *Mixed Integer Programing* (MIP) y *Relaxed mixed-integer programming*, programación no lineal mixta *Mixed-integer nonlinear programming* (MINLP), y otros tipos de programación (RMINLP, MCP, MPEC y CNC).

4.4.2. CPLEX

Entre la variedad de Solvers que se pueden utilizar en GAMS, IBM ILOG CPLEX (https://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/) es un Solver profesional de alto desempeño, el cual es útil para la solución de problemas de programación lineal, programación cuadrática y programación lineal entera mixta.

Aunque su uso no es gratuito, esta herramienta es ampliamente utilizada por empresas debido a sus altas capacidades, que permiten mediante sus algoritmos robustos, la resolución de grandes y complejos modelos matemáticos de forma rápida para su uso diario en la toma de decisiones en problemas reales. Su uso se puede realizar mediante una gran variedad de interfaces en otros lenguajes como C++, C#, Java, Python, Visual Basic, MATLAB, etc., y puede enlazarse para importar y exportar información de distintos tipos de archivos lo que lo hace bastante flexible.

CPLEX permite a su vez solucionar una gran variedad de problemas de planificación y de ruteo del estado del arte, permite fáciles modificaciones en las opciones del modelo como lo son las variables, las restricciones, los objetivos, entre otros, y provee información para el análisis de la solución obtenida, como valores en la función objetivo, holgura de las restricciones, coste de oportunidad, valores en las variables, además de detalles del proceso de resolución, indicando si la solución es óptima, la cantidad de nodos o iteraciones requeridas por ejemplo para el caso del algoritmo *Branch and Bound*, y en caso de no encontrarse una solución factible, un diagnosis y herramientas para su solución.

Los tiempos de ejecución de cada uno de los modelos resueltos se obtuvieron utilizando el parámetro Stepsum en la línea de comando de GAMS, por medio de su ejecución con un ordenador con sistema operativo de 64 bits, procesador Intel® Core™ i7-5500U de 2.40 GHz y 8 GBytes de memoria RAM.

4.4.3. Excel

Aunque la herramienta Excel a su vez posee la herramienta Solver para la optimización de problemas planteados como modelos matemáticos, en este trabajo se prefiere herramienta GAMS junto a CPLEX debido a sus ventajas en la formulación que permiten aumentar la escala de los modelos fácilmente, y por su mayor capacidad para resolver problemas de alta complejidad. Sin embargo, Excel es una herramienta práctica, de fácil acceso y ampliamente utilizada por la mayoría de las empresas y profesionales, al ser una aplicación de hojas de cálculo de la suite de oficina *Microsoft Office*, por lo que obtener los resultados en un archivo de estas características puede ser muy importante para el análisis, la interpretación y la distribución del plan óptimo de planificación.

Es así que se decide realizar un archivo de Excel con un formato de varias hojas de cálculo, que permita tomar los resultados de la resolución de cada uno de los modelos que son exportados de GAMS/CPLEX, y organizarlos en tablas y gráficas que permitan analizar fácilmente su información. Es así que, para la visualización de los resultados en el formato organizado de tablas y gráficas, simplemente basta con ajustar los parámetros del modelo en GAMS, solucionar el problema en este por medio de CPLEX, y posteriormente abrir el archivo de Excel que los contiene. Esto se realiza tanto para el caso de un solo objetivo, como el caso bi-objetivo, en el cual al resolver el modelo con GAMS/CPLEX ,los resultados de cada una de las iteraciones para la conformación de las soluciones eficientes son guardados en un archivo de Excel, a partir del cual se puede visualizar directamente la gráfica con la frontera de Pareto.

5. Modelo 1: Un producto con vida útil corta

5.1. Problema a resolver

En la producción de artículos con vida útil reducida se busca minimizar el coste total de producción, garantizando se pueda satisfacer la demanda en el horizonte de planificación, considerado en este caso 15 periodos. El producto realizado posee una vida útil inicial de 4 periodos de tiempo, y deberá permanecer almacenado un periodo de tiempo antes de poderse utilizar para satisfacer la demanda. Lo anterior implica que el producto será útil para cumplir la demanda siempre y cuando haya estado almacenado entre 1 y 3 periodos de tiempo, teniéndose que desechar el producto que sobrepase el tercer periodo.

En el proceso de producción para cada uno de los periodos de tiempo se puede incurrir en costes por lanzamiento (en caso de decidirse fabricar el producto), costes variables por unidad de producto fabricado, costes de inventario dependientes de la cantidad de producto almacenado, y costes por desperdicio por cada producto que haya que desechar. Se debe tener en cuenta que, aunque en el modelo se tendrá la opción de producir durante los primeros 14 periodos (al no ser útil lo que se produzca en el periodo 15), todo el producto sobrante luego del último periodo habrá de ser desechado.

Conociendo la importancia de tener un registro de la vida útil de los productos para usarlo de manera eficiente para satisfacer la demanda y mitigar los desperdicios, se deben discriminar los productos en el inventario según su vida útil restante. Lo anterior permitirá que además de decidir si producir o no el producto y en qué cantidad hacerlo, se pueda determinar la cantidad de producto con cada vida útil restante del inventario a utilizar para satisfacer la demanda del periodo.

5.2. Índices del modelo

- t: periodo de tiempo en el modelo, tomando valores enteros desde 1 hasta NT.
- u: vida restante del producto, pudiendo tomar valores enteros entre 1 y 4. Este es utilizado únicamente para diferenciar los productos en el stock inicial.

5.3. Parámetros del modelo

- NT: número de periodos en los que se deberá satisfacer la demanda.
- d_t: demanda del producto en el periodo t.
- p_t: coste unitario de producción del producto en el periodo t.
- q_t: coste fijo de lanzamiento del producto en el periodo t.
- h_t: coste unitario de almacenamiento del producto para cada periodo t.
- C_t: capacidad máxima de producción del producto para cada periodo t.
- m_t: cantidad mínima de producción, en caso de decidirse producir en el periodo t.
- so_u: inventario inicial del producto con vida útil restante u.
- Cs_t: máxima capacidad de almacenamiento en el periodo t.
- cd_t: coste unitario por desechar un producto en el periodo t.

5.4. Variables Decisión

- X_t: cantidad de producto a producir con vida útil restante 4 en el periodo t, para cada posible valor de t.

- Y_t: variable binaria que toma el valor 1 de producirse producto en el periodo t y 0 en caso contrario, para cada posible valor de t.
- $V0_t$: Producto con vida útil restante 0 que se deberá desechar al inicio del periodo t, para cada posible valor de t.
- $V1_t$: Inventario del producto con vida útil restante 1 en el periodo t, para cada posible valor de t.
- $V2_t$: Inventario del producto con vida útil restante 2 en el periodo t, para cada posible valor de t.
- $V3_t$: Inventario del producto con vida útil restante 3 en el periodo t, para cada posible valor de t.
- $Ds1_t$: Cantidad de producto con vida útil restante igual a 1 a usar para satisfacer la demanda del periodo t, para cada posible valor de t.
- $Ds2_t$: Cantidad de producto con vida útil restante igual a 2 a usar para satisfacer la demanda del periodo t, para cada posible valor de t.
- $Ds3_t$: Cantidad de producto con vida útil restante igual a 3 a usar para satisfacer la demanda del periodo t, para cada posible valor de t.

5.5. Diagrama del modelo

En la ilustración 1 se presenta un diagrama esquemático del problema con el fin de representar el flujo de la producción y las relaciones de continuidad entre las variables del modelo. En este diagrama se evidencia el significado de las variables en el tiempo, teniendo en cuenta que en el modelo se asume que:

1. Las variables de inventario V1, V2 y V3 representan los valores al inicio de cada periodo luego de haberse satisfecho la demanda del periodo anterior. De forma similar, la variable V0 representa el producto desechado al inicio del periodo.
2. La demanda se satisface de forma constante a lo largo del periodo, por lo que los costes de inventario se calculan como la suma de los promedios entre las cantidades de producto almacenado al inicio del periodo t y del periodo t+1. Por ejemplo, el producto que fue realizado en el periodo t tendrá un inventario promedio en el periodo t+1 con el valor promedio entre las variables $V3_{(t+1)}$ y $V2_{(t+2)}$.

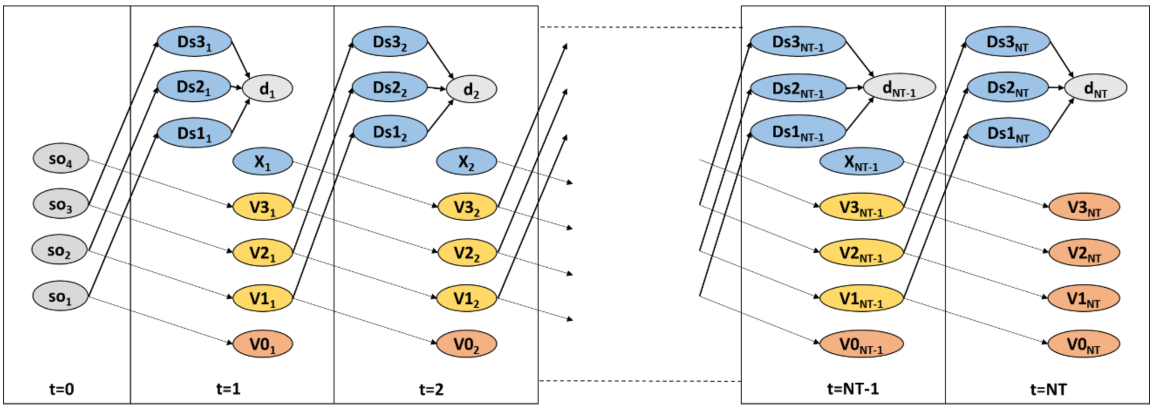

Ilustración 1 Esquema del modelo 1

En el diagrama anterior los parámetros del modelo se ven de color gris, siendo estos el inventario inicial para el producto de cada vida útil y las demandas de cada periodo. En color azul se ven las variables correspondientes a las decisiones a tomar para cada periodo, las cuales son la cantidad de producto de cada vida útil a usar para satisfacer la demanda, y la cantidad de artículos a producir. Finalmente, en amarillo se ven las variables de inventario, que se utilizan para diferenciar el producto de cada vida útil restante, y en rojo las variables del producto que no se puede utilizar y que habrá de ser desechado ya sea por no poseer vida útil restante o por ser el producto sobrante del último periodo.

5.6. Función Objetivo

La función objetivo busca minimizar el coste total conformado por los costes por lanzamiento, costos variables por unidades fabricadas en cada periodo, costes por almacenamiento y costes de desecho.

$$Min\ C.Total = C.Lanzamiento + C.Producción + C.Inventario + C.Desecho$$

Siendo:

$$C.Lanzamiento = \sum_{t=1}^{NT-1} q_t Y_t$$

$$C.Producción = \sum_{t=1}^{NT-1} p_t X_t$$

$$C.Inventario = \sum_{v=1}^{v=4} (\frac{1}{2} h_0 so_v) + \sum_{t=1}^{NT-1} \left(h_t (\frac{1}{2} X_t + V3_t + V2_t + V1_t + \frac{1}{2} V0_t) \right) + \frac{1}{2} h_{NT} (V3_{NT} + V2_{NT} + V1_{NT} + V0_{NT})$$

$$C.Desecho = \sum_{t=1}^{NT-1} (cd_t V0_t) + cd_{NT} (V3_{NT} + V2_{NT} + V1_{NT} + V0_{NT})$$

El coste por lanzamiento total se calcula sumando el coste fijo para los periodos en los cuales se tiene producción, mientras el coste por producción se calcula multiplicando las unidades producidas en cada periodo por su coste unitario.

Los costes de inventario teniendo en cuenta la suposición 2 hecha en la sección 2.5, se separan teniendo en cuenta aquellas variables que se usan en un único promedio, y aquellas que se utilizan en dos, multiplicándose cada una por el coste de inventario de su periodo, y adicionalmente por ½ en el primer caso y por 1 en el segundo. De esta forma aquellas variables involucradas en un único promedio son: los inventarios iniciales (so) en la primera sumatoria, el producto fabricado (X), el cual se va almacenando a medida que pasa el periodo, el producto con vida útil restante 0 (V0) al desecharse luego de satisfacer la demanda del periodo anterior, y todo el producto almacenado en el último periodo (NT).

Finalmente, los costes por desechar el producto se calculan con la suma de todo el producto con vida útil restante 0, y con el inventario del último periodo, el cual se deberá desechar sin importar su vida útil restante al no tenerse demanda más allá del horizonte de planificación.

5.7. Restricciones

A continuación, se explican cada una de las restricciones que se habrán de cumplir en el modelo, las cuales garantizan la continuidad entre los cambios de edad de los productos a través del tiempo, la satisfacción de la demanda de cada periodo, las limitaciones de producción en caso de producirse, la capacidad de inventario, y finalmente la naturaleza de cada una de las variables decisión en el modelo.

El nombre de cada una de las restricciones está determinado de tal forma se indique esta es una restricción (Rest), seguido por un número que representa el modelo en el que se utiliza (que en este caso es el modelo 1), y finalmente una letra que podrá estar acompañada de un número que hará referencia al tipo de restricción que podrá ser de continuidad (C), demanda (D), capacidad de producción (P), inventario (I), y naturaleza de las variables (N).

5.7.1. Continuidad para los productos que cambian su vida útil restante de 4 a 3 periodos

Ya que el producto realizado en el producto t no se podrá utilizar para satisfacer la demanda de ese mismo periodo, pasará a ser en su totalidad inventario de edad 1 en el siguiente periodo, lo que se representa mediante la siguiente restricción.

$$V3_t = X_{t-1} \qquad \forall t \qquad [Rest.1.C1]$$

En el caso particular en el que t=1, se reemplaza X_{t-1} por so_4, el stock inicial de producto con vida útil restante 4.

5.7.2. Continuidad para los productos que cambian su vida útil restante entre 3, 2, 1 y 0 periodos

Al poderse usar el producto con vida útil restante 3, 2 y 1 del periodo (t-1) para satisfacer la demanda del periodo t, las variables V3, V2 y V1 del periodo (t-1) pasarán a ser V2, V1 y V0 del periodo t respectivamente, una vez se les reste su contribución al cumplimiento de la demanda mediante las variables Ds3, Ds2 y Ds1 respectivamente.

$$V2_t = V3_{t-1} - Ds3_t \qquad \forall t \qquad [Rest.1.C2]$$

$$V1_t = V2_{t-1} - Ds2_t \qquad \forall t \qquad [Rest.1.C3]$$

$$V0_t = V1_{t-1} - Ds1_t \qquad \forall t \qquad [Rest.1.C4]$$

En el caso particular en el que t=1, se reemplaza $V3_{t-1}$ por so_3, el stock inicial de producto con vida útil restante 3, $V2_{t-1}$ por so_2 y $V1_{t-1}$ por so_1.

5.7.3. Satisfacción demanda total

La demanda total del periodo t se debe satisfacer por medio de la suma de las contribuciones de los productos que fueron tomados del inventario de cada vida útil restante como se explicó en el apartado anterior, de esta forma se obtienen las siguientes restricciones.

$$d_t = Ds3_t + Ds2_t + Ds1_t \qquad \forall t \qquad [Rest.1.D]$$

5.7.4. Límite superior e inferior de producción

En caso de decidirse producir artículos en el periodo t (siendo Y igual a 1), su cantidad estará delimitada por la capacidad máxima y mínima de producción representada por los parámetros del modelo m y C explicados con anterioridad. Por otro lado, en caso de decidirse no producir en el periodo t (siendo Y igual a 0), se debe asegurar en el modelo que la cantidad de productos a realizar en este periodo sea cero. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se plantean las siguientes restricciones.

$$m_t Y_t \leq X_t \leq C_t Y_t \qquad \forall t \qquad [Rest.1.P]$$

5.7.5. Máximo inventario

Buscando modelar la capacidad máxima de inventario en la fábrica Cs para cada periodo t, se regula la suma de los inventarios del periodo a que sea como máximo igual a este valor. En estas, es importante aclarar que en el inventario se considera el producto que es fabricado en ese periodo y que deberá irse almacenando (X_t), y no se considera el producto con vida útil restante 0 al asumirse este se desechará al inicio del periodo. Adicionalmente, este a diferencia de los costes de inventario, no se calcula promediando el inventario entre los dos periodos, sino directamente tomando el valor de cada periodo. Esto se realiza con el fin evaluar las situaciones de mayor inventario, considerando el promedio siempre será menor al mayor de los valores que lo componen. De esta forma se garantiza que en ningún momento se sobrepase la capacidad de inventario.

$$X_t + V3_t + V2_t + V1_t \leq Cs_t \qquad \forall t \qquad [Rest.1.I]$$

5.7.6. Naturaleza de las variables

Considerando la naturaleza de las variables y su representación, se debe especificar en el modelo que las variables Y deben ser binarias, tomando únicamente valores de 0 o 1, y las demás variables deben ser positivas al hacer referencia a cantidades reales de producto. Considerando en el último periodo no tiene sentido producir artículos, las variables X y Y se definen únicamente hasta t igual a NT-1.

$$V0_t, V1_t, V2_t, V3_t, Ds1_t, Ds2_t, Ds3_t \geq 0 \qquad \forall t \qquad [Rest.1.N1]$$

$$X_t \geq 0 \qquad t \in (1, NT-1) \qquad [Rest.1.N2]$$

$$Y_t, \in (0,1) \qquad t \in (1, NT-1) \qquad [Rest.1.N3]$$

5.8. Implementación del modelo en GAMS

Implementando el modelo en GAMS para poder minimizar el coste total utilizando el Solver profesional CPLEX, se muestra un ejemplo de su aplicación y de cómo interpretar sus resultados para poner en práctica el plan óptimo de producción.

5.8.1. Parámetros

Se escogen los parámetros del modelo, entre los cuales aquellos que presentan un subíndice al lado del nombre de la variable, implican que este valor es igual para todos los parámetros sin importar el valor de este subíndice. Como se observa, en este ejemplo se asume que empieza a haber demanda a satisfacer a partir del cuarto periodo, lo cual se realiza simplemente para observar cuántos periodos antes el producto se empieza a fabricar. Los costes de producción unitarios son de 40 u.m. (p), los costes de lanzamiento son 3,000 u.m. (q), los costes de inventario de 5 u.m. (h), y el coste por desechar un producto es de 10 u.m. (cd). Adicionalmente, se posee inicialmente un stock de 5 productos de cada vida útil restante (1 a 4), y de lanzarse la producción en el periodo t, este habrá de fabricarse en una cantidad entre 160 y 250 unidades (m y C). Finalmente, la capacidad de almacenamiento (Cs) es de 600 unidades para cada uno de los periodos.

Tabla 2 Demanda por periodo utilizada para el modelo 1.

Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Demanda	0	0	0	40	53	153	75	93	34	33	38	86	75	41	32

Tabla 3 Parámetros de costes y capacidad usados para el modelo 1.

p(t)	**q(t)**	**h(t)**	**C(t)**	**m(t)**	**so(v)**	**Cs(t)**	**cd(t)**
40	3000	5	250	160	5	600	10

5.8.2. Formulación del modelo en GAMS

Considerando los anteriores parámetros, se implementa el modelo matemático en GAMS, empezando por la definición de los índices y los parámetros (Ilustración 2), seguido por la declaración de las variables según su naturaleza (Ilustración 3), la definición de las funciones de costes y la función objetivo de coste total (Ilustración 4), la declaración de cada una de las restricciones (Ilustración 5), y finalmente la definición del método de resolución (MIP), el objetivo a buscar (minimización del coste total) y el código para la exportación de los resultados a Excel (Ilustración 6).

Es importante aclarar que en la Ilustración 3 se utilizan tres variables adicionales que simplemente se usan para obtener los costes separados por capítulos, los cuales sumados representan el coste total a minimizar.

```
Set t periodos /1*15/;
Parameter NT tiempo total;
*Da el número de elementos en el set;
NT=card(t);

Set u vida útil restante del producto /1*4/;

Parameters d(t) demanda prevista en el periodo t
           /1=0,2=0,3=0,4=40,5=53,6=153,7=75,8=93,9=34,
           10=33,11=38,12=86,13=75,14=41,15=32/
           p(t) coste unitario de producir en el periodo t
           /1*15=40/
           q(t) coste de lanzamiento en el periodo t
           /1*15=3000/
           h(t) coste unitario de almacenamiento
           /1*15=5/
           cd(t) coste de desechar V0
           /1*15=10/
           so(u) stock inicial para V4 V3 V2 V1
           /4=5,3=5,2=5,1=5/
           C(t) capacidad productiva en el periodo t
           /1*15=250/
           m(t) minimo a producir en el periodo t
           /1*15=160/
           Cs(t) máximo inventario
           /1*15=600/

```

Ilustración 2 Declaración de índices y parámetros para el modelo 1.

```
Variables X(t) cantidad a producir en el periodo t
          Y(t) se produce o no en el periodo t
          V3(t) inventario de producto con vida útil restante 3 al inicio del periodo t
          V2(t) inventario de producto con vida útil restante 2 al inicio del periodo t
          V1(t) inventario de producto con vida útil restante 1 al inicio del periodo t
          V0(t) producto a desechar con vida útil restante 0 al inicio del periodo t
          Ds3(t) demanda cubierta por el producto con vida útil restante 3 del periodo an»
terior
          Ds2(t) demanda cubierta por el producto con vida útil restante 3 del periodo an»
terior
          Ds1(t) demanda cubierta por el producto con vida útil restante 3 del periodo an»
terior
          CLanzamiento
          CProduccion
          CInventario
          CInventarioi
          CDesecho
          Total  total a minimizar;

*NATURALEZA DE LAS VARIABLES
Binary variable Y;
Positive variable X,V3,V2,V1,V0,Ds3,Ds2,Ds1,CLanzamiento;
```

Ilustración 3 Declaración de las variables del modelo 1, y especificación de su naturaleza.

```
*Costes  Función Objetivo
Equation c_lanzamiento Coste Lanzamiento;
          c_lanzamiento.. CLanzamiento =e= sum((t)$(ord(t)<NT-1),q(t)*Y(t));

Equation c_produccion Coste Produccion;
          c_produccion.. CProduccion =e= sum((t)$(ord(t)<NT-1),p(t)*X(t));

Equation c_inventario Coste Inventario;
          c_inventario.. CInventario =e= sum(u,(1/2)*h('1')*so(u))
          +sum((t)$(ord(t)<=NT-1),h(t)*((1/2)*X(t)+V3(t)+V2(t)+V1(t)+(1/2)*V0(t)))
          +(1/2)*h('15')*(V3('15')+V2('15')+V1('15')+V0('15'))  ;

Equation c_desecho Coste Inventario;
          c_desecho.. CDesecho =e= sum((t)$(ord(t)<NT-1),cd(t)*V0(t))
          +cd('15')*(V3('15')+V2('15')+V1('15')+V0('15'))  ;

Equation costo costo total FO;
          costo..Total =e= CLanzamiento + CProduccion + CInventario + CDesecho;

```

Ilustración 4 Funciones de costes y función objetivo de coste total.

```
*RESTRICCIONES DE CONTINUIDAD
Equation continuidad_C1_in Rest.1.C1 inicial ;
         continuidad_C1_in..V3('1') =e= so('4');
Equation continuidad_C1 Rest.1.C1;
         continuidad_C1(t)$(ord(t)>1)..V3(t) =e= X(t-1);

Equation continuidad_C2_in Rest.1.C2 inicial;
         continuidad_C2_in..V2('1') =e= so('3')-Ds3('1');
Equation continuidad_C2 Rest.1.C2;
         continuidad_C2(t)$(ord(t)>1)..V2(t) =e= V3(t-1)-Ds3(t);

Equation continuidad_C3_in Rest.1.C3 inicial;
         continuidad_C3_in..V1('1') =e= so('2')-Ds2('1');
Equation continuidad_C3 Rest.1.C3;
         continuidad_C3(t)$(ord(t)>1)..V1(t) =e= V2(t-1)-Ds2(t);

Equation continuidad_C4_in Rest.1.C4 inicial;
         continuidad_C4_in..V0('1') =e= so('1')-Ds1('1');
Equation continuidad_C4 Rest.1.C4;
         continuidad_C4(t)$(ord(t)>1)..V0(t) =e= V1(t-1)-Ds1(t);

*DEMANDA TOTAL
Equation demandatotal Rest.1.D;
         demandatotal(t)..d(t)=e= Ds3(t)+Ds2(t)+Ds1(t);
*LIMITE PRODUCCION
Equation enlace Rest.1.P derecha;
         enlace(t)..X(t) =l= C(t)*Y(t);
Equation minimo_prod Rest.1.P izquierda;
         minimo_prod(t)..X(t) =g= m(t)*Y(t);
*MAXIMO INVENTARIO
Equation max_stock Rest.1.I;
         max_stock(t)..X(t)+V3(t)+V2(t)+V1(t) =l= Cs(t);
```

Ilustración 5 Declaración de las restricciones del modelo 1.

```
Model modelo1 /all/;
modelo1.optcr=0;
solve modelo1 using mip minimizing Total;

display d,p,q,h,cd,so,C,m,Cs,X.l,Y.l,V3.l,V2.l,V1.l,V0.l,Ds3.l,Ds2.l,Ds1.l,
CLanzamiento.l,CProduccion.l,CInventario.l,CDesecho.l,Total.l;


  X.l(t)$(X.l(t)=0)=eps  ;
  V3.l(t)$(V3.l(t)=0)=eps  ;
  V2.l(t)$(V2.l(t)=0)=eps  ;
  V1.l(t)$(V1.l(t)=0)=eps  ;
  V0.l(t)$(V0.l(t)=0)=eps  ;
  Ds3.l(t)$(Ds3.l(t)=0)=eps  ;
  Ds2.l(t)$(Ds2.l(t)=0)=eps  ;
  Ds1.l(t)$(Ds1.l(t)=0)=eps  ;
  CLanzamiento.l$(CLanzamiento.l=0)=eps  ;
  CProduccion.l$(CProduccion.l=0)=eps  ;
  CInventario.l$(CInventario.l=0)=eps  ;
  CDesecho.l$(CDesecho.l=0)=eps  ;
  Total.l$(Total.l=0)=eps  ;
  d(t)$(d(t)=0)=eps  ;
  p(t)$(p(t)=0)=eps  ;
  q(t)$(q(t)=0)=eps  ;
  h(t)$(h(t)=0)=eps  ;
  C(t)$(C(t)=0)=eps  ;
  m(t)$(m(t)=0)=eps  ;
  so(u)$(so(u)=0)=eps  ;
  Cs(t)$(Cs(t)=0)=eps  ;
  cd(t)$(cd(t)=0)=eps  ;

execute_unload "resmod1.gdx" X.l,V3.l,V2.l,V1.l,V0.l,Ds3.l,Ds2.l,Ds1.l, CLanzamiento.l,CProduccion.l,C»
Inventario.l,CDesecho.l,Total.l,d,p,q,h,C,m,so,Cs,cd
execute 'gdxxrw.exe resmod1.gdx  epsout=0 var=X.l rng=c2 var=V3.l rng=c60 var=V2.l rng=c66'
execute 'gdxxrw.exe resmod1.gdx  epsout=0 var=V1.l rng=c72  var=V0.l rng=c78 var=Ds3.l rng=d84 var=Ds2.»
l rng=d87'
execute 'gdxxrw.exe resmod1.gdx  epsout=0 var=Ds1.l rng=d90 var=CLanzamiento.l rng=c93 var=CProduccion.»
l rng=c94'
execute 'gdxxrw.exe resmod1.gdx  epsout=0  var=CInventario.l rng=c95 var=CDesecho.l rng=c96 var=Total.l»
 rng=c97'
execute 'gdxxrw.exe resmod1.gdx  epsout=0 par=d rng=d100 par=p rng=c103 par=q rng=c107 par=h rng=c111 p»
ar=C rng=c115 par=m rng=c119 par=so rng=c123 par=Cs rng=c127 par=cd rng=c135'
```

Ilustración 6 Método de resolución, objetivo del modelo y código para exportar resultados a Excel.

5.8.3. Interpretación de los resultados

Los resultados obtenidos con la declaración del modelo en GAMS y que fueron obtenidos por medio del Solver profesional CPLEX (con un tiempo de ejecución de 0.23 segundos) son exportados a un documento de Excel, en el cual estos se organizan automáticamente en una tabla como la que se puede observar en la Tabla 4. En esta, cada uno de los periodos de tiempo t está representado por una columna, la demanda a cumplir que es un parámetro inicial del modelo está marcada en gris, y cada una de las variables decisión en azul, con la excepción de aquellas que representan la cantidad del producto a desechar en rojo.

La interpretación de las decisiones a tomar para cada uno de los periodos de tiempo t (representados por cada una de las columnas), por medio de los resultados de la Tabla 4 son:

- Se debe producir en caso de que en la fila “Lanzamiento” se tenga como resultado un 1, y no producir en caso de tenerse un 0. Y en caso de producirse, se habrá de producir en la cantidad obtenida en la fila “Producción”. Por ejemplo, en el periodo 1 no se habrá de producir, y en el periodo 2 se habrá de producir 241 unidades.
- Para satisfacer la demanda del periodo se debe tomar del inventario una cantidad D1 de producto con vida útil restante 1, D2 de producto con vida útil restante 2 y D3 de producto con vida útil restante 3. Es así como por ejemplo en el periodo 4 para satisfacer la demanda total de 40 unidades, se debe tomar del inventario 35 productos con vida útil 3, ningún producto con vida útil 2 y 5 productos con vida útil restante 1.
- Se puede observar la cantidad de producto que debe haber en el inventario al final de cada periodo, lo cual aunque no implica una decisión a tomar, sirve para hacer un control de la implementación del plan de producción. Es así como al final del periodo debe haber en el inventario una cantidad V1 de producto con vida útil 1, una cantidad V2 de producto con vida útil 2 y una cantidad V3 de producto con vida útil 3. Es así como el producto utilizado en el periodo 4 se obtuvo de los 241 productos con vida útil 3 del inventario y de los 5 productos con vida útil restante 1.
- Finalmente, en naranja se ve la cantidad de producto a desechar una vez finalizado el periodo por medio de la fila V0, teniéndose por ejemplo que desechar 3 unidades en el periodo 12.

Adicionalmente, se obtiene la tabla de costes detallados del modelo 1 en la Tabla 5, en la cual para cada periodo se tienen los respectivos costes por lanzamiento, por producción dependiendo de la cantidad de productos fabricados, por inventario y por producto desperdiciado, con lo cual se obtiene como resumen los costes por capítulos en la Tabla 6.

Tabla 4 Resultados modelo 1.

Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Demanda	0	0	0	40	53	153	75	93	34	33	38	86	75	41	32
D3	0	0	0	35	0	0	75	0	0	33	0	0	75	0	0
D2	0	0	0	0	53	0	0	93	0	0	38	0	0	41	0
D1	0	0	0	5	0	153	0	0	34	0	0	86	0	0	32
Lanzamiento	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
Producción	0	241	0	0	202	0	0	160	0	0	160	0	0	0	0
V3	5	0	241	0	0	202	0	0	160	0	0	160	0	0	0
V2	5	5	0	206	0	0	127	0	0	127	0	0	85	0	0
V1	5	5	5	0	153	0	0	34	0	0	89	0	0	44	0
V0	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	12
Stock total	15	251	246	206	355	202	127	194	160	127	249	160	85	44	0

Tabla 5 Costes detallados modelo 1.

Costes																Total
Lanzamiento	0	3000	0	0	3000	0	0	3000	0	0	3000	0	0	0		12,000
Producción	0	9640	0	0	8080	0	0	6400	0	0	6400	0	0	0		30,520
Inv. Inicial 0.5so															50	50
Inventario 0.5X	0	603	0	0	505	0	0	400	0	0	400	0	0	0		1,908
Inventario V3	25	0	1205	0	0	1010	0	0	800	0	0	800	0	0	0	3,840
Inventario V2	25	25	0	1030	0	0	635	0	0	635	0	0	425	0	0	2,775
Inventario V1	25	25	25	0	765	0	0	170	0	0	445	0	0	220	0	1,675
Inventario 0.5*V0	12.5	12.5	12.5	0	0	0	0	0	0	0	0	7.5	0	0	30	75
Desperdicio V0	50	50	50	0	0	0	0	0	0	0	0	30	0	0	120	300
Desperdicio 2															0	-
																53,142.5

Tabla 6 Resumen de costes por capítulos.

C. Lanzamiento	12,000.0
C. Producción	30,520.0
C. Inventario	10,322.5
C. Desecho	300.0
C. Total	**53,142.5**

5.9. Conclusiones

En la modelización de la producción de artículos con vida útil corta es muy importante discriminar la cantidad de unidades del producto que se tienen con diferentes vidas útiles restantes de tal forma se pueda decidir su distribución a utilizar para satisfacer la demanda de cada uno de los periodos.

Debido a la inutilidad del producto con vida útil 0, y al coste adicional que representa para el problema tener que desecharlo, al minimizarse los costes totales en el modelo, se tiene un resultado que no encuentra un balance únicamente entre los costes por lanzamiento y producción con los de inventario, sino que a su vez se tiene en consideración las desventajas de tener producto que sobrepase su tiempo de vida, el cual además de representar un coste completamente perdido en su fabricación al no poderse utilizar, conlleva a que se tenga un coste adicional una vez se tenga que desechar.

Finalmente, conocer la distribución de producto con distintas vidas útiles a utilizar para satisfacer la demanda para cada uno de los periodos es esencial para garantizar la correcta implementación del plan óptimo de producción, siendo igual de importante a cumplir con la cantidad de producto a fabricar para cada uno de los periodos de tiempo.

6. Modelo 2: Producción multinivel en artículos con vida útil corta

5.4. Problema a resolver

En este problema se busca minimizar el coste total de producción del producto demandado A, que se conforma a partir de cierta cantidad de producto B y C. Este producto que es de vida útil corta, se elabora con una vida útil restante inicial que depende de la vida útil restante del producto B y C utilizado en su conformación, por lo que de forma similar al modelo 1, es importante discriminar la cantidad de producto que está en el inventario según su vida útil restante, lo que en este modelo se debe realizar para los tres productos (A, B y C) en cada uno de los periodos de tiempo. En este caso multinivel, se debe decidir si lanzar la producción y en qué cantidad hacerlo para cada uno de los productos A, B y C, y en el caso de que se decida lanzar el producto final A, la cantidad de producto B y C de distintas vidas útiles restantes a tomar del inventario para su elaboración.

Se asume el producto B se comporta de forma similar al caso del modelo 1, siendo este fabricado con una vida útil restante inicial 4, pero pudiéndose utilizar únicamente cuando haya estado por lo menos un periodo almacenado y antes de que posea vida útil restante 0, lo que implica que se podrá utilizar siempre y cuando tenga vida útil restante 1, 2 o 3.

En el caso del producto C, se asume que a diferencia del producto B, este si puede utilizarse en el mismo periodo que es fabricado. Este producto que se realiza con vida útil restante inicial 4, se puede utilizar siempre y cuando no posea vida útil restante 0.

Finalmente, el producto A conformado por el producto B y C, poseerá una vez fabricado una vida útil restante inicial, que será superior en una unidad al menor valor entre la vida útil del producto B y C utilizado. Por ejemplo, si se fabrica producto A utilizando producto B con vida útil restante 3 y producto C con vida útil restante 1, el producto A conformado a partir de estos tendrá una vida útil restante inicial 2 (siendo una unidad más que la vida útil restante del producto C, que es la menor entre los dos productos).

Por lo anterior en la producción de cada periodo se debe discriminar la cantidad de producto A realizado para cada una de las vidas útiles restantes posibles, las cuales podrán tener un valor de 2, 3 o 4 (al acotar el producto B el límite superior, al tener este como máximo una vida útil restante de 3 cuando se utilice). Esto implica que se debe tener como variable decisión la cantidad de producto B y C de cada vida útil restante a utilizar para la realización de cada una de las posibles vidas útiles restantes iniciales del producto A. Finalmente, de forma similar al producto B, el producto A deberá tener una vida útil restante entre 1 y 3 para poderse utilizar para satisfacer la demanda del periodo por políticas de la empresa.

Como última consideración, y de forma similar al modelo 1, se tendrá un horizonte de planeación de 15 periodos, y los costes totales estarán determinados por la suma de costes por lanzamiento, cantidad de producción, almacenamiento y desecho de los productos A, B y C.

5.5. Índices del modelo

- t: representa cada uno de los periodos de tiempo en el modelo, tomando valores enteros desde 1 hasta NT.
- i: tipo de producto, pudiendo ser A, B o C.

- u: vida restante del producto, pudiendo tomar valores enteros entre 1 y 4. Este se usa para poder diferenciar el stock inicial según su vida útil restante, para poder representar la cantidad de producto A con cada vida útil restante a producir en las variables XAT, y para representar la vida útil del producto B o C que se utilice para producir cada tipo de producto A en las variables de tipo XA2, XA3 y XA4.

5.6. Parámetros del modelo

- NT: Número de periodos en los que se deberá satisfacer la demanda.
- dA_t: demanda a satisfacer del producto A en el periodo t.
- $p_{i,t}$: coste de producción unitario para el producto i en el periodo t.
- $q_{i,t}$: coste fijo de lanzamiento del producto i en el periodo t.
- $h_{i,t}$: coste unitario de almacenamiento del producto i para el periodo t.
- $C_{i,t}$: capacidad máxima de producción del producto i para el periodo t.
- $m_{i,t}$: en caso de producirse en el periodo t, es la cantidad mínima que se puede producir del producto i.
- $so_{i,u}$: inventario inicial del producto i con vida útil restante u.
- $Cs_{i,t}$: máxima capacidad de almacenamiento en el periodo t para el producto i.
- $cd_{i,t}$: coste unitario por desechar el producto i en el periodo t.
- αA_i: cantidad del producto i requerido para realizar un producto A. El índice i podrá tomar como valor B o C.

6.4. Variables Decisión

- $XAT_{u,t}$: cantidad de producto A con vida útil u a producir en el periodo t. El índice u tomará los valores 2, 3 o 4, al ser los posibles valores para la vida útil inicial del producto A fabricado, considerando la vida útil de los productos B y C que se podrá utilizar (explicado previamente en el numeral 3.1.)
- $XA2_{i,u,t}$: cantidad de producto A con vida útil restante 2 que se realizará utilizando producto i con vida útil u. El índice i podrá ser B o C, y u tendrá valor 1, 2 o 3 en el caso del producto B, y 1, 2, 3 o 4 en caso de ser el producto C, considerando que cada uno de estos casos es útil para producir producto A con vida útil inicial 2.
- $XA3_{i,u,t}$: cantidad de producto A con vida útil restante 3 que se realizará utilizando producto i con vida útil u. El índice i podrá ser B o C, y u tendrá valor 2 o 3 en el caso del producto B, y 2, 3 o 4 en caso de ser el producto C, considerando que cada uno de estos casos es útil para producir producto A con vida útil inicial 3.
- $XA4_{i,u,t}$: cantidad de producto A con vida útil restante 4 que se realizará utilizando producto i con vida útil u. El índice i podrá ser B o C, y u tendrá valor 3 en el caso del producto B, y 3 o 4 en caso de ser el producto C, considerando que cada uno de estos casos es útil para producir producto A con vida útil inicial 4.
- XB_t: cantidad del producto B a producir en el periodo t. Este producto como se explicó anteriormente, tendrá vida útil inicial 4.
- XC_t: cantidad del producto C a producir en el periodo t. Este producto como se explicó anteriormente, tendrá vida útil inicial 4.
- $Y_{i,t}$: variable binaria que toma el valor 1 de producirse producto i en el periodo t y 0 en caso contrario.

- $V0_{i,t}$: cantidad de producto i con vida útil restante 0 que se deberá desechar al inicio del periodo t.
- $V1_{i,t}$: Inventario del producto i con vida útil restante 1 en el periodo t.
- $V2_{i,t}$: Inventario del producto i con vida útil restante 2 en el periodo t.
- $V3_{i,t}$: Inventario del producto i con vida útil restante 3 en el periodo t.
- $DsA1_t$: Cantidad de producto A con vida útil restante 1 utilizado para satisfacer la demanda en el periodo t.
- $DsA2_t$: Cantidad de producto A con vida útil restante 2 utilizado para satisfacer la demanda en el periodo t.
- $DsA3_t$: Cantidad de producto A con vida útil restante 3 utilizado para satisfacer la demanda en el periodo t.

6.5. Descripción detallada del problema

Con el fin de entender el flujo en la línea de producción interna de cada uno de los 3 productos, la relación entre cada una de las variables y las relaciones entre los productos B y C del nivel inferior con el producto A del nivel superior, se utilizan 3 diagramas para su detallada explicación.

De forma similar a la Ilustración 1 que se utilizó para explicar el modelo 1, en los diagramas se muestran los parámetros del modelo en gris, las variables decisión en azul, en amarillo las variables de inventario y en rojo las variables que representan el producto a desechar.

6.5.1. Producto A

Como se explicó previamente en la descripción del problema, el producto A que se conforma a partir de producto B y C con diferentes vidas útiles puede producirse con vida útil inicial de 4, 3 o 2 periodos de tiempo y habrá de tener una vida útil entre 1 y 3 para poderse utilizar para satisfacer la demanda del periodo. Lo anterior se puede ver en la Ilustración 2, en la cual el producto A elaborado con vida útil inicial 4 (X4) pasará a ser inventario con vida útil 3 (V3) el siguiente periodo, el producto elaborado con vida útil inicial 2 o 3 (X2 y X3) podrá utilizarse junto al inventario de producto de su misma vida útil (V2 y V3 respectivamente) para satisfacer la demanda del periodo siguiente (D3 y D2), el inventario de producto con vida útil 1 (V1) será de igual forma útil para satisfacer la demanda del siguiente periodo (D1), y lo que no se utilice de este será producto a desechar (V0).

Adicionalmente, se ve que los 3 aportes de producto a la demanda (D1, D2 y D3) habrán de ser iguales a la demanda del periodo (d) que es un parámetro predefinido en el modelo. El producto sobrante luego de satisfacer la demanda de los NT periodos (V0, V1, V2 y V3 en el periodo t=NT) se deberá desechar en su totalidad. Se puede afirmar, previamente a la solución del modelo que, en el periodo NT no se fabricarán productos al ser estos inservibles para satisfacer la demanda en el problema.

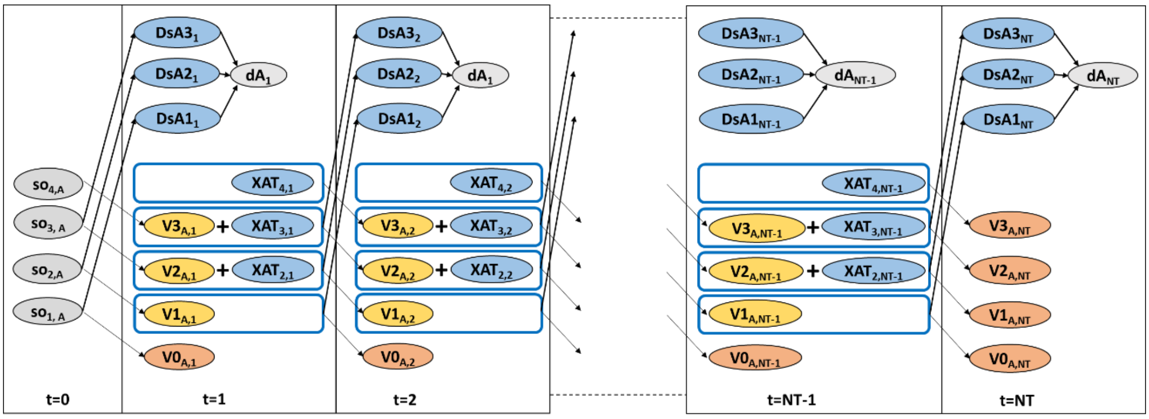

Ilustración 7 Diagrama de flujo del producto A.

6.5.2. Producto B y C

En la Ilustración 3 y 4 se muestra el diagrama de flujo de los productos B y C respectivamente, viéndose su uso en la conformación del producto A y su cambio en la vida útil en el tiempo. El producto B y C que no sea utilizado en la producción de A en el periodo t, continuará en el inventario en el siguiente periodo con una vida útil restante una unidad menor, y aquel producto que tenga vida útil restante 0 (V0) será desechado, de igual forma que el producto sobrante al final de los NT periodos. Además, se observa que tanto el producto B como C se fabrican con vida útil inicial 4.

Considerando que la vida útil inicial que tendrá el producto A fabricado depende de la vida útil restante del producto B y C utilizado para su elaboración, será importante especificar la cantidad de producto B y C de cada vida útil restante que habrá de utilizarse para la fabricación de cada una de las alternativas de vida útil inicial del producto A. Por lo anterior, es importante crear una variable para representar cada una de las posibles combinaciones de producto B o C de cada vida útil restante que se usarán para realizar cada posible alternativa de vida útil inicial del producto A, definiéndose estas de la siguiente manera:

1. El producto B con vida útil 1 podrá utilizarse para fabricar únicamente producto A con vida útil inicial 2, y se representará para cada uno de los periodos como A2B1.
2. Por otro lado, el producto B con vida útil 2 podrá utilizarse para fabricar producto A con vida útil inicial 2 o 3, por lo que su cantidad será determinada por las variables A2B2 y A3B2.
3. Finalmente, el producto B con vida útil 3 se podrá utilizar para elaborar producto A con tiempo de vida 2, 3 o 4, cantidades que serán representadas por las variables A2B3, A3B3 y A4B3 respectivamente.

De forma similar al caso B, se obtienen las posibles combinaciones de producto C requerido de cada vida útil restante para la elaboración del producto A, la cual difiere únicamente en el caso con vida útil 4, el cual para el producto C, sí se podrá utilizar para elaborar producto A. De esta forma se explican las siguientes variables que representan lo enunciado anteriormente:

4. El producto C con vida útil 1 podrá utilizarse para fabricar únicamente producto A con vida útil inicial 2, y se representará para cada uno de los periodos como A2C1.

5. Por otro lado, el producto C con vida útil 2 podrá utilizarse para fabricar producto A con vida útil inicial 2 o 3, por lo que su cantidad será determinada por las variables A2C2 y A3C2.
6. Adicionalmente, el producto C con vida útil 3 se podrá utilizar para elaborar producto A con tiempo de vida 2, 3 o 4, cantidades que serán representadas por las variables A2C3, A3C3 y A4C3 respectivamente.
7. Finalmente, y de forma difiriendo al caso del producto B, el producto C con vida útil 4 se podrá utilizar para elaborar producto A con tiempo de vida 2, 3 o 4, cantidades que serán representadas por las variables A2C4, A3C4 y A4C4 respectivamente.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se presenta el esquema de flujo para la producción de los productos B y C en la Ilustración 2 y 3 respectivamente.

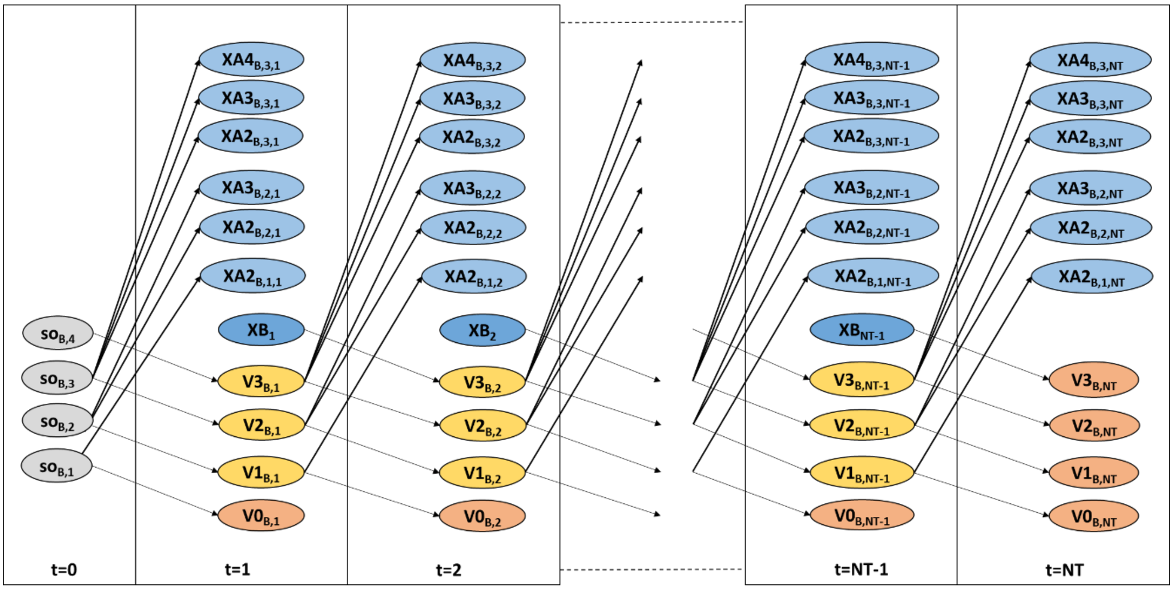

Ilustración 8 Diagrama de flujo del producto B.

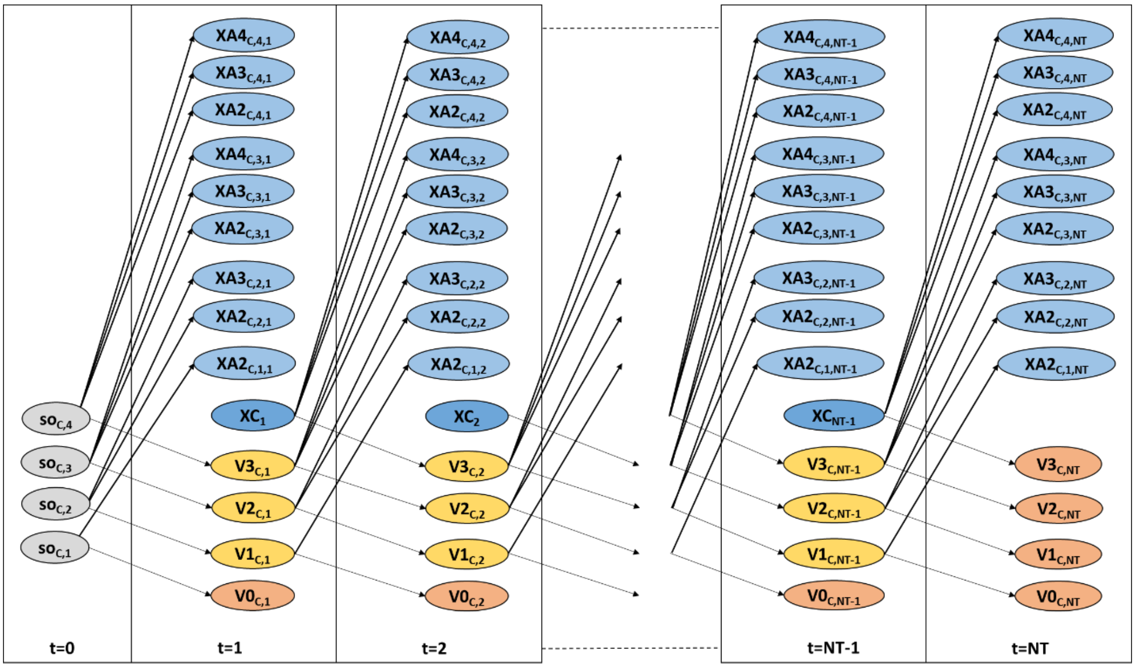

Ilustración 9 Diagrama del flujo C.

6.6. Función Objetivo

De forma similar al modelo 1, pero teniendo en cuenta la contribución al coste total de los 3 productos, la función objetivo se compone por la suma de los costes asociados al lanzamiento, cantidad de producción, inventario y desecho.

$$Min\ C.Total = C.Lanzamiento + C.Producción + C.Inventario + C.Desecho$$

Siendo:

$$C.Lanzamiento = \sum_{t=1}^{NT-1}\left(\sum_{i\in A,B,C}(q_{i,t}Y_{i,t})\right)$$

$$C.Producción = \sum_{t=1}^{NT-1}\left(\sum_{u=2}^{4}(p_{A,t}XAT_{u,t}) + p_{B,t}XB_t + p_{C,t}XC_t\right)$$

$$C.Inventario = \sum_{i\in A,B,C}\left(\sum_{u=1}^{u=4}(\frac{1}{2}h_{i,0}so_{i,u})\right)$$
$$+\sum_{t=1}^{NT-1}\left(\frac{1}{2}(\sum_{u=2}^{4}\left(h_{A,t}XAT_{u,t}\right)+h_{B,t}XB_t+h_{C,t}XC_t)\right.$$
$$\left.+\sum_{i\in A,B,C}(h_{i,t}(V3_{i,t}+V2_{i,t}+V1_{i,t}+\frac{1}{2}V0_{i,t})\right)$$
$$+\sum_{i\in A,B,C}(\frac{1}{2}h_{i,NT}(V3_{i,NT}+V2_{i,NT}+V1_{i,NT}+V0_{NT})\,)$$

$$C.Desecho = \sum_{t=1}^{NT-1}\left(\sum_{i\in A,B,C}(cd_{i,t}V0_{i,t})\right)+\sum_{i\in A,B,C}cd_{i,NT}(V3_{i,NT}+V2_{i,NT}+V1_{i,NT}+V0_{NT})\,)$$

De forma similar al modelo 1, el coste por lanzamiento total se calcula sumando el coste fijo para los periodos en los cuales se tiene producción, y el coste por producción se calcula multiplicando las unidades producidas en cada periodo por su coste unitario. En el caso del producto A, al estar separada su producción según sus alternativas de vida útil inicial, las cuales podrán ser de 2, 3 o 4 periodos, se suma la contribución de cada una de estas para cada uno de los periodos.

Los costes de inventario se separan teniendo en cuenta aquellas variables que se usan en un único promedio, y aquellas que se utilizan en dos, de forma similar a como se realizó en el modelo 1. De esta forma aquellas variables involucradas en un único promedio son: los inventarios iniciales (so) en la primera sumatoria, el producto fabricado (X), el cual se va almacenando y usando para satisfacer la demanda a medida que pasa el periodo (segunda fila de la función de coste por inventario), el producto con vida útil restante 0 (V0) al desecharse luego de satisfacer la demanda del periodo anterior (al final de la tercera línea), y todo el producto almacenado del último periodo NT (última fila).

Finalmente, los costes por desechar el producto se calculan con la suma de todo el producto con vida útil restante 0, y con el inventario del último periodo, el cual se deberá desechar sin importar su vida útil restante al no tenerse demanda más allá del horizonte de planificación.

6.7. Restricciones

A continuación, se explican cada una de las restricciones que se habrán de cumplir en el modelo, las cuales garantizan la continuidad entre los cambios de edad de los productos a través del tiempo, la satisfacción de la demanda de cada periodo, las limitaciones de producción en caso de producirse, el límite en la capacidad de inventario, y finalmente la naturaleza de cada una de las variables decisión en el modelo.

6.7.1. Continuidad y demanda producto del producto A

Por medio de las siguientes restricciones se busca:

- Modelizar el cambio en la vida útil restante del producto A con el paso del tiempo, el cual disminuirá su vida útil en una unidad cada periodo.
- Tomar la cantidad de producto A con vida útil restante u que está en inventario (por medio de las variables V1, V2 o V3) y el producto de este tipo que fue fabricado el periodo anterior (usando las variables XAT_2, XAT_3 y XAT_4), y restarle su contribución para satisfacer la demanda del periodo actual (por medio de DsA1, DsA2 y DsA3). Es importante notar que al ser útil únicamente el producto con vida útil restante 1, 2 o 3 para satisfacer la demanda, en la restricción Rest.2.C.A1 el producto fabricado con vida útil 4 pasará a ser directamente producto con vida útil 3 en el siguiente periodo.
- Actualizar el inventario del producto A para cada una de las distintas vidas útiles, ya habiendo restado su contribución a la satisfacción de la demanda.

Cada una de estas consideraciones se implementa en el modelo mediante las siguientes restricciones:

$$V3_{A,t} = XAT_{4,(t-1)} \qquad \forall t \quad [Rest.2.C.A1]$$

$$V2_{A,t} = XAT_{3,(t-1)} \ + \ V3_{A,(t-1)} - DsA3_t \qquad \forall t \quad [Rest.2.C.A2]$$

$$V1_{A,t} = XAT_{2,(t-1)} \ + \ V2_{A,(t-1)} - DsA2_t \qquad \forall t \quad [Rest.2.C.A3]$$

$$V0_{A,t} = \qquad V1_{A,(t-1)} - DsA1_t \qquad \forall t \quad [Rest.2,C.A4]$$

En el caso particular de t=1 se reemplazará la suma del producto fabricado junto al producto en inventario en cada restricción, por su correspondiente stock inicial. De esta forma la variable XAT_4 será reemplazada por $so_{A,4}$, la suma de XAT_3 y $V3_A$ por $so_{A,3}$, la suma de XAT_2 y $V2_A$ por $so_{A,2}$, y finalmente $V1_A$ por $so_{A,1}$,

Adicionalmente, para garantizar que se cumpla con la demanda total del producto A en el periodo t se deberá garantizar que la suma de los aportes de producto A de cada vida útil la igualen.

$$dA_t = DsA3_t + DsA2_t + DsA1_t \qquad \forall t \quad [Rest.2.D.A]$$

6.7.2. Continuidad y demanda producto B

Con las siguientes restricciones se busca:

- Modelizar el cambio en la vida útil restante del producto B con el paso del tiempo, el cual disminuirá su vida útil en una unidad cada periodo.
- Tomar la cantidad de producto B con vida útil restante u que se tenga en inventario (por medio de las variables V1, V2 o V3), y restarle su contribución para satisfacer la

necesidad de producto B requerido para la elaboración del producto A. Este producto se obtiene al multiplicar la cantidad de producto A con distintas vidas útiles iniciales que se va a fabricar utilizando producto B con vida útil restante u, y multiplicarlo por el parámetro que indica la cantidad de producto B requerido para la elaboración de una unidad de A (αA_B). El uso del producto B para cada vida útil restante u en la elaboración de A considera los primeros 3 puntos de la explicación detallada del problema en el numeral 3.5.

- Actualizar el inventario del producto B para cada una de las distintas vidas útiles, ya habiendo restado el producto utilizado en la elaboración de producto A.

Estas consideraciones se implementan en el modelo mediante las siguientes restricciones:

$$V3_{B,t} = XB_{(t-1)} \qquad \forall t \quad [Rest.2.C.B1]$$

$$V2_{B,t} = V3_{B,(t-1)} - \alpha A_B\left(XA4_{B,3,t} + XA3_{B,3,t} + XA2_{B,3,t}\right) \quad \forall t \quad [Rest.2.C.B2]$$

$$V1_{B,t} = V2_{B,(t-1)} - \alpha A_B\left(XA3_{B,2,t} + XA2_{B,2,t}\right) \quad \forall t \quad [Rest.2.C.B3]$$

$$V0_{B,t} = V1_{B,(t-1)} - \alpha A_B\left(XA2_{B,1,t}\right) \quad \forall t \quad [Rest.2.C.B4]$$

En el caso de t=1 se debe reemplazar en las restricciones $XB_{(t-1)}$ por el stock inicial de producto B con vida útil 4 ($so_{B,4}$), y de forma similar $V3_{B,(t-1)}$ por $so_{B,3}$, $V2_{B,(t-1)}$ por $so_{B,2}$ y $V1_{B,(t-1)}$ por $so_{B,1}$.

Adicionalmente, para garantizar que el producto A elaborado se componga en su totalidad de las distintas alternativas de producto B, se deberán satisfacer las siguientes restricciones. De esta forma, de acuerdo a los primeros 3 puntos mencionados en la descripción detallada del problema (3.5), el producto A con vida útil inicial 4 se podrá componer de producto B con vida útil 3, el producto A con vida útil inicial 3 con producto B con vida útil 2 y 3, y el producto A con vida útil inicial 2 con producto B con vida útil 1, 2 y 3.

$$XAT_{4,t} = XA4_{B,3,t} \qquad \forall t \quad [Rest.2.D.B1]$$

$$XAT_{3,t} = XA3_{B,3,t} + XA3_{B,2,t} \qquad \forall t \quad [Rest.2.D.B2]$$

$$XAT_{2,t} = XA2_{B,3,t} + XA2_{B,2,t} + XA2_{B,1,t} \quad \forall t \quad [Rest.2.D.B3]$$

6.7.3. Continuidad y demanda producto C

De forma similar a como se hizo para el producto B, se tienen las restricciones de continuidad para el producto C. En estas se busca modelizar el cambio de vida útil del producto C en el tiempo, al tomar la cantidad en inventario para cada vida útil restante y restarle el producto utilizado para la fabricación del producto A.

$$V3_{C,t} = XC_{(t-1)} - \alpha A_C\left(XA4_{C,4,t} + XA3_{C,4,t} + XA2_{C,4,t}\right) \qquad \forall t \quad [Rest.2.C.C1]$$

$$V2_{C,t} = V3_{C,(t-1)} - \alpha A_C\left(XA4_{C,3,t} + XA3_{C,3,t} + XA2_{C,3,t}\right) \qquad \forall t \quad [Rest.2.C.C2]$$

$$V1_{C,t} = V2_{C,(t-1)} - \alpha A_C\left(XA3_{C,2,t} + XA2_{C,2,t}\right) \qquad \forall t \quad [Rest.2.C.C3]$$

$$V0_{C,t} = V1_{C,(t-1)} - \alpha A_C\left(XA2_{C,1,t}\right) \qquad \forall t \quad [Rest.2.C.C4]$$

En el caso de t=1 se debe reemplazar en las restricciones $XC_{(t-1)}$ por el stock inicial de producto C con vida útil 4 ($so_{C,4}$), y de forma similar $V3_{C,(t-1)}$ por $so_{C,3}$, $V2_{C,(t-1)}$ por $so_{C,2}$ y $V1_{C,(t-1)}$ por $so_{C,1}$.

Adicionalmente, para garantizar que el producto A elaborado se componga en su totalidad de las distintas alternativas de producto C, se deberán satisfacer las siguientes restricciones. De esta forma, de acuerdo a puntos 4, 5 y 6 mencionados en la descripción detallada del problema (3.5), el producto A con vida útil inicial 4 se podrá componer de producto C con vida útil 3 y 4, el producto A con vida útil inicial 3 con producto C con vida útil 2, 3 y 4, y el producto A con vida útil inicial 2 con producto C con vida útil 1, 2, 3 y 4.

$$XAT_{4,t} = XA4_{C,4,t} + XA4_{C,3,t} \qquad \forall t \quad [Rest.2.D.C1]$$

$$XAT_{3,t} = XA3_{C,4,t} + XA3_{C,3,t} + XA3_{C,2,t} \qquad \forall t \quad [Rest.2.D.C2]$$

$$XAT_{2,t} = XA2_{C,4,t} + XA2_{C,3,t} + XA2_{C,2,t} + XA2_{C,1,t} \qquad \forall t \quad [Rest.2.D.C3]$$

6.7.4. Mínima y máxima producción

En caso de decidirse producir artículos en el periodo t (siendo Y_t igual a 1), su cantidad estará delimitada por la capacidad máxima y mínima de producción representada por los parámetros del modelo m y C explicados con anterioridad. Por otro lado, en caso de decidirse no producir en el periodo t (siendo Y_t igual a 0), se debe asegurar en el modelo que la cantidad de productos a realizar en este periodo sea cero. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se plantean las siguientes restricciones, siendo cada una para cada uno de los tipos de producto.

$$m_{A,t}Y_{A,t} \leq \sum_{u=2}^{4} XAT_{u,t} \leq C_{A,t}Y_{A,t} \qquad \forall t \qquad [Rest.2.P.A]$$

$$m_{B,t}Y_{B,t} \leq XB_t \leq C_{B,t}Y_{B,t} \qquad \forall t \qquad [Rest.2.P.B]$$

$$m_{C,t}Y_{C,t} \leq XC_t \leq C_{C,t}Y_{C,t} \qquad \forall t \qquad [Rest.2.P.C]$$

6.7.5. Máximo inventario

Buscando modelar la capacidad máxima de inventario en la fábrica (Cs) para cada periodo t, se regula la suma de los inventarios del periodo a que sea como máximo igual a esta como se obtiene en las siguientes restricciones. En estas, es importante aclarar que en el inventario no se considera el producto con vida útil restante 0 al asumirse este se desechará al inicio del periodo.

$$XAT_{2,t} + XAT_{3,t} + XAT_{4,t} + V3_{A,t} + V2_{A,t} + V1_{A,t} \leq Cs_{A,t} \qquad \forall t \qquad [Rest.2.I.A]$$

$$XB_t + V3_{B,t} + V2_{B,t} + V1_{B,t} \leq Cs_{B,t} \qquad \forall t \qquad [Rest.2.I.B]$$

$$XC_t + V3_{C,t} + V2_{C,t} + V1_{C,t} \leq Cs_{C,t} \qquad \forall t \qquad [Rest.2.I.C]$$

6.7.6. Naturaleza de las variables

Considerando la naturaleza de las variables y su representación, se debe especificar en el modelo que las variables Y deben ser binarias, tomando únicamente valores de 0 o 1, y las demás variables deben ser positivas al hacer referencia a cantidades reales de producto.

$$XAT_{u,t} \geq 0 \qquad \forall t, u \in (2,3,4) \qquad [Rest.2.N1]$$

$$XA2_{B,u,t}, XA3_{B,u,t}, XA4_{B,u,t} \geq 0 \qquad \forall t, u \in (1,2,3) \qquad [Rest.2.N2]$$

$$XA2_{C,u,t}, XA3_{C,u,t}, XA4_{C,u,t} \geq 0 \qquad \forall t, u \in (1,2,3,4) \qquad [Rest.2.N3]$$

$$XB_t, XC_t, V0_{i,t}, V1_{i,t}, V2_{i,t}, V3_{i,t}, DsA1_t, DsA2_t, DsA3_t \geq 0 \qquad \forall i, \forall t \qquad [Rest.2.N3]$$

$$Y_{i,t}, \in (0,1) \qquad \forall i, \forall t \qquad [Rest. 2. N4]$$

6.8. Implementación del modelo en GAMS

Implementando el modelo en GAMS para poder minimizar el coste total utilizando el Solver profesional CPLEX, se muestran dos ejemplos de su aplicación y de cómo interpretar sus resultados para poner en práctica el plan óptimo de producción. Además, mediante la comparación de estos dos ejemplos, que difieren únicamente en la capacidad de producción de los productos, se busca evidenciar los distintos tipos de soluciones que se podrán obtener mediante el uso de este modelo.

Adicionalmente, considerando la dificultad del entendimiento de los resultados por la cantidad de variables del modelo, se exportan los resultados obtenidos del modelo óptimo resuelto con CPLEX a Excel por medio de GAMS y se presentan en formato de tablas y gráficas.

6.8.1. Parámetros de los ejemplos

Se escogen los parámetros del modelo, entre los cuales aquellos que presentan un subíndice al lado del nombre de la variable, implican que este valor es igual para todos los parámetros sin importar el valor de este subíndice. El ejemplo 2 cambia respecto al 1 al aumentar la capacidad máxima de producción para cada uno de los productos, pasando la capacidad máxima del producto A que era de 90 unidades a ser de 120, la del producto B de 200 a 400 y la del producto C de 500 a 800 en ejemplo 2. Asimismo, el ejemplo 2 a diferencia del ejemplo 1 posee inventario inicial no nulo.

Tabla 7 Demanda producto A modelo para los ejemplos 1 y 2 del modelo 2.

Periodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Demanda A	0	0	0	30	43	73	65	83	24	23	28	76	65	31	22

Tabla 8 Parámetros ejemplo 1 del modelo 2.

i	p(t)	q(t)	h(t)	C(t)	m(t)	so (v)	Cs(t)	cd(t)	alfaA(t)
A	50	3000	10	90	20	0	300	10	N/A
B	40	4000	5	200	40	0	600	10	2
C	10	2000	2	500	20	0	1000	5	5

Tabla 9 Parámetros del ejemplo 2 del modelo 2

i	p(t)	q(t)	h(t)	C(t)	m(t)	so (v)	Cs(t)	cd(t)	alfaA(t)
A	50	3000	10	120	20	5	300	10	N/A
B	40	4000	5	400	40	10	600	10	2
C	10	2000	2	800	20	20	1000	5	5

6.8.2. Formulación del modelo en GAMS

Considerando los anteriores parámetros, se implementa el modelo matemático en GAMS, mostrando el caso del ejemplo 2, en el cual se realiza la definición de los índices y los parámetros (Ilustración 10), seguido por la declaración de las variables según su naturaleza (Ilustración 11), la definición de las funciones de costes y la función objetivo de coste total (Ilustración 12), la declaración de cada una de las restricciones de continuidad y demanda para el producto A, producto B y producto C (Ilustración 13, 14 y 15 respectivamente), las restricciones para la capacidad de producción e inventario junto a la definición del método de resolución (MIP) y el criterio de minimización del coste total (Ilustración 16), y finalmente y el código para la exportación de los resultados a Excel (Ilustración 17). Luego de implementar el modelo para ambos ejemplos, este tuvo un tiempo de ejecución de 0.302 segundos para el primero, y 0.825 segundos para el segundo.

```
Set t periodos /1*15/;
Parameter NT tiempo total;
*Da el número de elementos en el set;
NT=card(t);

Set i identidad del producto /A, B, C/;
Set u vida útil restante del producto /1*4/;

Parameters dA(t) demanda prevista de producto A en el periodo t
           /1=0,2=0,3=0,4=30,5=43,6=73,7=65,8=83,9=24,
           10=23,11=28,12=76,13=65,14=31,15=22/
           p(i,t) coste unitario de producir i en el periodo t
           /A.1*15=50, B.1*15=40, C.1*15=10 /
           q(i,t) coste de lanzamiento para producto i en el periodo t
           /A.1*15=3000, B.1*15=4000, C.1*15=2000/
           h(i,t) coste unitario de almacenamiento de producto i en el periodo t
           /A.1*15=10, B.1*15=5, C.1*15=2/
           C(i,t) capacidad productiva para i en el periodo t
           /A.1*15=120, B.1*15=400, C.1*15=800/
           m(i,t) minimo a producir de i en el periodo t de lanzarse
           /A.1*15=20,B.1*15=40, C.1*15=20/
           so(i,u) stock inicial para V4 V3 V2 V1
           /A.1*4=5,B.1*4=10, C.1*4=20/
           Cs(i,t) máximo inventario
           /A.1*15=300,B.1*15=600, C.1*15=1000/
           cd(i,t) coste de desechar V0
           /A.1*15=10,B.1*15=10, C.1*15=5/
           alfaA(i,t) cantidad de producto i para hacer un producto A
           /B.1*15=2, C.1*15=5/
```

Ilustración 10 Definición de los índices y de los parámetros del modelo 2.

```
Variables XAT(u,t) cantidad a producir de A con vida útil v en el periodo t
          XA2(i,u,t) cantidad de i con v.u. v para producir A con v.u. 2 en t
          XA3(i,u,t) cantidad de i con v.u. v para producir A con v.u. 2 en t
          XA4(i,u,t) cantidad de i con v.u. v para producir A con v.u. 2 en t
          XB(t) cantidad de B a producir en t
          XC(t) cantidad de C a producir en t
          Y(i,t) determina si se produce o no el producto i en el periodo t
          V3(i,t) inventario de producto i con vida útil restante 3 al inicio del periodo t
          V2(i,t) inventario de producto i con vida útil restante 2 al inicio del periodo t
          V1(i,t) inventario de producto i con vida útil restante 1 al inicio del periodo t
          V0(i,t) producto i a desechar con vida útil restante 0 al inicio del periodo t
          DsA3(t) demanda de A cubierta por el producto con v.u. 3 del periodo anterior
          DsA2(t) demanda de A cubierta por el producto con v.u. 2 del periodo anterior
          DsA1(t) demanda de A cubierta por el producto con v.u. 1 del periodo anterior
          CLanzamiento
          CProduccion
          CInventario
          CDesecho
          Total  total a minimizar;

Binary variable Y;
*Posteriormente para lotes de tamaño discreto se debe recordar ajustar a enteros
Positive variable XAT,XA2,XA3,XA4,XB,XC,V3,V2,V1,V0,DsA3,DsA2,DsA1;
```

Ilustración 11 Declaración de las variables según su naturaleza para el modelo 2.

```
*Costes función objetivo
Equation c_lanzamiento ;
         c_lanzamiento..CLanzamiento =e= sum((i,t)$(ord(t)<=NT-1),q(i,t)*Y(i,t));

Equation c_produccion ;
         c_produccion..CProduccion =e= sum((t)$(ord(t)<=NT-1), sum((u)$(ord(u)>=2),
                        p('A',t)*XAT(u,t))+p('B',t)*XB(t)+p('C',t)*XC(t));

Equation c_inventario ;
         c_inventario..CInventario =e= sum((i,u),(1/2)*h(i,'1')*so(i,u))
                        +sum((t)$(ord(t)<=NT-1),
                         (1/2)*(sum(u,h('A',t)*XAT(u,t))+h('B',t)*XB(t)+h('C',t)*XC(t))
                         +sum(i,h(i,t)*(V3(i,t)+V2(i,t)+V1(i,t)+(1/2)*V0(i,t))))
                        +sum(i,h(i,'15')*(V3(i,'15')+V2(i,'15')+V1(i,'15')+(1/2)*V0(i,'15')))  ;

Equation c_desecho ;
         c_desecho..CDesecho =e= sum((t)$(ord(t)<=NT-1), sum(i,cd(i,t)*V0(i,t)))
                           +sum(i,cd(i,'15')*(V3(i,'15')+V2(i,'15')+V1(i,'15')+V0(i,'15')));

Equation costo costo total FO;
         costo..Total =e= CLanzamiento + CProduccion + CInventario + CDesecho;
```

Ilustración 12 Definición de funciones de costes por capítulos y función objetivo de coste total para el modelo 2.

```
*RESTRICCIONES DE CONTINUIDAD
*Restricciones A
Equation continuidad_CA1_in Rest.2.C.A1 inicial ;
         continuidad_CA1_in..V3('A','1') =e= so('A','4');
Equation continuidad_CA1 Rest.2.C.A1;
         continuidad_CA1(t)$(ord(t)>1)..V3('A',t) =e= XAT('4',t-1);

Equation continuidad_CA2_in Rest.2.C.A2 inicial;
         continuidad_CA2_in..V2('A','1') =e= so('A','3')-DsA3('1');
Equation continuidad_CA2 Rest.2.C.A2;
         continuidad_CA2(t)$(ord(t)>1)..V2('A',t) =e= XAT('3',t-1)+V3('A',t-1)-DsA3(t);

Equation continuidad_CA3_in Rest.2.C.A3 inicial;
         continuidad_CA3_in..V1('A','1') =e= so('A','2')-DsA2('1');
Equation continuidad_CA3 Rest.2.C.A3;
         continuidad_CA3(t)$(ord(t)>1)..V1('A',t) =e= XAT('2',t-1)+V2('A',t-1)-DsA2(t);

Equation continuidad_CA4_in Rest.2.C.A3 inicial;
         continuidad_CA4_in..V0('A','1') =e= so('A','1')-DsA1('1');
Equation continuidad_CA4 Rest.2.C.A3;
         continuidad_CA4(t)$(ord(t)>1)..V0('A',t) =e= V1('A',t-1)-DsA1(t);

Equation demandatotal Rest.2.D.A;
         demandatotal(t)..dA(t)=e= DsA3(t)+DsA2(t)+DsA1(t);
```

Ilustración 13 Restricciones de continuidad y satisfacción de la demanda del producto A en el modelo 2.

```
*Restricciones B
Equation continuidad_CB1_in Rest.2.C.B1 inicial ;
         continuidad_CB1_in..V3('B','1') =e= so('B','4');
Equation continuidad_CB1 Rest.C.B1;
         continuidad_CB1(t)$(ord(t)>1)..V3('B',t) =e= XB(t-1);

Equation continuidad_CB2_in Rest.2.C.B2 inicial ;
         continuidad_CB2_in..V2('B','1') =e= so('B','3')-alfaA('B','1')*(XA4('B','3','1')»
+XA3('B','3','1')+XA2('B','3','1'));
Equation continuidad_CB2 Rest.C.B2;
         continuidad_CB2(t)$(ord(t)>1)..V2('B',t) =e= V3('B',t-1)-alfaA('B',t)*(XA4('B','»
3',t)+XA3('B','3',t)+XA2('B','3',t));

Equation continuidad_CB3_in Rest.2.C.B3 inicial ;
         continuidad_CB3_in..V1('B','1') =e= so('B','2')-alfaA('B','1')*(XA3('B','2','1')»
+XA2('B','2','1'));
Equation continuidad_CB3 Rest.C.B3;
         continuidad_CB3(t)$(ord(t)>1)..V1('B',t) =e= V2('B',t-1)-alfaA('B',t)*(XA3('B','»
2',t)+XA2('B','2',t));

Equation continuidad_CB4_in Rest.2.C.B4 inicial ;
         continuidad_CB4_in..V0('B','1') =e= so('B','1')-alfaA('B','1')*XA2('B','1','1');
Equation continuidad_CB4 Rest.2.C.B4;
         continuidad_CB4(t)$(ord(t)>1)..V0('B',t) =e= V1('B',t-1)-alfaA('B',t)*XA2('B','1»
',t);

Equation demanda_DB1 Rest.2.D.B1 ;
         demanda_DB1(t)..XAT('4',t) =e= XA4('B','3',t);

Equation demanda_DB2 Rest.2.D.B2 ;
         demanda_DB2(t)..XAT('3',t) =e= XA3('B','3',t)+XA3('B','2',t);

Equation demanda_DB3 Rest.2.D.B3 ;
         demanda_DB3(t)..XAT('2',t) =e= XA2('B','3',t)+XA2('B','2',t)+XA2('B','1',t);
```

Ilustración 14 Restricciones de continuidad y satisfacción de la demanda del producto B por el producto a A en el modelo 2.

```
*Restricciones C
Equation continuidad_CC1_in Rest.2.C.C1 inicial ;
         continuidad_CC1_in..V3('C','1') =e=
so('C','4')-alfaA('C','1')*(XA4('C','4','1')+XA3('C','4','1')+XA2('C','4','1'));
Equation continuidad_CC1 Rest.2.C.B1;
         continuidad_CC1(t)$(ord(t)>1)..V3('C',t) =e=
XC(t-1)-alfaA('C',t)*(XA4('C','4',t)+XA3('C','4',t)+XA2('C','4',t));

Equation continuidad_CC2_in Rest.2.C.C2 inicial ;
         continuidad_CC2_in..V2('C','1') =e=
so('C','3')-alfaA('C','1')*(XA4('C','3','1')+XA3('C','3','1')+XA2('C','3','1'));
Equation continuidad_CC2 Rest.2.C.C2;
         continuidad_CC2(t)$(ord(t)>1)..V2('C',t) =e=
V3('C',t-1)-alfaA('C',t)*(XA4('C','3',t)+XA3('C','3',t)+XA2('C','3',t));

Equation continuidad_CC3_in Rest.2.C.C3 inicial ;
         continuidad_CC3_in..V1('C','1') =e=
so('C','2')-alfaA('C','1')*(XA3('C','2','1')+XA2('C','2','1'));
Equation continuidad_CC3 Rest.2.C.C3;
         continuidad_CC3(t)$(ord(t)>1)..V1('C',t) =e=
V2('C',t-1)-alfaA('C',t)*(XA3('C','2',t)+XA2('C','2',t));

Equation continuidad_CC4_in Rest.2.C.C4 inicial ;
         continuidad_CC4_in..V0('C','1') =e=
so('C','1')-alfaA('C','1')*XA2('C','1','1');
Equation continuidad_CC4 Rest.2.C.C4;
         continuidad_CC4(t)$(ord(t)>1)..V0('C',t) =e=
V1('C',t-1)-alfaA('C',t)*XA2('C','1',t);

Equation demanda_DC1 Rest.2.D.C1 ;
         demanda_DC1(t)..XAT('4',t) =e= XA4('C','4',t)+ XA4('C','3',t);

Equation demanda_DC2 Rest.2.D.C2 ;
         demanda_DC2(t)..XAT('3',t) =e= XA3('C','4',t)+ XA3('C','3',t)+XA3('C','2',t);

Equation demanda_DC3 Rest.2.D.C3 ;
         demanda_DC3(t)..XAT('2',t) =e= XA2('C','4',t)+ XA2('C','3',t)+XA2('C','2',t)+XA2»
('C','1',t);
```

Ilustración 15 Restricciones de continuidad y satisfacción de la demanda del producto C por el producto A en el modelo 2

```
*Mínima y máxima producción
* Producto A
Equation min_prodA Rest.2.P.A izquierda;
         min_prodA(t)..sum((u)$(ord(u)>1),XAT(u,t)) =g= m('A',t)*Y('A',t);

Equation max_prodA Rest.2.P.A derecha;
         max_prodA(t)..sum((u)$(ord(u)>1),XAT(u,t)) =l= C('A',t)*Y('A',t);
* Producto B
Equation min_prodB Rest.2.P.B izquierda;
         min_prodB(t)..XB(t) =g= m('B',t)*Y('B',t);

Equation max_prodB Rest.2.P.B derecha;
         max_prodB(t)..XB(t) =l= C('B',t)*Y('B',t);
* Producto C
Equation min_prodC Rest.2.P.C izquierda;
         min_prodC(t)..XC(t) =g= m('C',t)*Y('C',t);

Equation max_prodC Rest.2.P.B derecha;
         max_prodC(t)..XC(t) =l= C('C',t)*Y('C',t);

*Inventario máximo
Equation max_stockA Rest.2.I.A;
         max_stockA(t)..XAT('2',t)+XAT('3',t)+XAT('4',t)+V3('A',t)+V2('A',t)+V1('A',t) =l»
= Cs('A',t);

Equation max_stockB Rest.2.I.B;
         max_stockB(t)..XB(t)+V3('B',t)+V2('B',t)+V1('B',t) =l= Cs('B',t);

Equation max_stockC Rest.2.I.C;
         max_stockC(t)..XC(t)+V3('C',t)+V2('C',t)+V1('C',t) =l= Cs('C',t);



Model modelo1 /all/;
modelo1.optcr=0;
solve modelo1 using mip minimizing Total;
```

Ilustración 16 Restricciones de para las limitaciones en la capacidad de producción y el inventario, para el producto A, B y C en el modelo 2.

```
display dA,p,q,h,cd,so,C,m,Cs,XAT.l,XA2.l,XA3.l,XA4.l,XB.l,XC.l,Y.l,V3.l,V2.l
V1.l,V0.l,DsA3.l,DsA2.l,DsA1.l,CLanzamiento.l,CProduccion.l,CInventario.l,CDesecho.l,Total.l;


  XAT.l(u,t)$(XAT.l(u,t)=0)=eps  ;
  XA2.l(i,u,t)$(XA2.l(i,u,t)=0)=eps  ;
  XA3.l(i,u,t)$(XA3.l(i,u,t)=0)=eps  ;
  XA4.l(i,u,t)$(XA4.l(i,u,t)=0)=eps  ;
  XB.l(t)$(XB.l(t)=0)=eps  ;
  XC.l(t)$(XC.l(t)=0)=eps  ;
  V3.l(i,t)$(V3.l(i,t)=0)=eps  ;
  V2.l(i,t)$(V2.l(i,t)=0)=eps  ;
  V1.l(i,t)$(V1.l(i,t)=0)=eps  ;
  V0.l(i,t)$(V0.l(i,t)=0)=eps  ;
  DsA3.l(t)$(DsA3.l(t)=0)=eps  ;
  DsA2.l(t)$(DsA2.l(t)=0)=eps  ;
  DsA1.l(t)$(DsA1.l(t)=0)=eps  ;
  CLanzamiento.l$(CLanzamiento.l=0)=eps  ;
  CProduccion.l$(CProduccion.l=0)=eps  ;
  CInventario.l$(CInventario.l=0)=eps  ;
  CDesecho.l$(CDesecho.l=0)=eps  ;
  Total.l$(Total.l=0)=eps  ;
  dA(t)$(dA(t)=0)=eps  ;
  p(i,t)$(p(i,t)=0)=eps  ;
  q(i,t)$(q(i,t)=0)=eps  ;
  h(i,t)$(h(i,t)=0)=eps  ;
  C(i,t)$(C(i,t)=0)=eps  ;
  m(i,t)$(m(i,t)=0)=eps  ;
  so(i,u)$(so(i,u)=0)=eps  ;
  Cs(i,t)$(Cs(i,t)=0)=eps  ;
  cd(i,t)$(cd(i,t)=0)=eps  ;
  alfaA(i,t)$(alfaA(i,t)=0)=eps  ;
execute_unload "results.gdx" XAT.l,XA2.l,XA3.l,XA4.l,XB.L,XC.l,V3.l,V2.l,V1.l,V0.l,DsA3.l,DsA2.l,DsA1.l, CLanzamiento.l,CProduccion.l,CInventario.l,CDesecho.l,Total.l,dA,p,q,h,C,m,so,Cs,cd,alfaA
execute 'gdxxrw.exe results.gdx  epsout=0 var=XAT.l rng=c2 var=XA2.l rng=b9 var=XA3.l rng=b24 var=XA4.l rng=b39'
execute 'gdxxrw.exe results.gdx  epsout=0 var=XB.l rng=d53 var=XC.l rng=d56 var=V3.l rng=c60 var=V2.l rng=c66'
execute 'gdxxrw.exe results.gdx  epsout=0 var=V1.l rng=c72  var=V0.l rng=c78 var=DsA3.l rng=d84'
execute 'gdxxrw.exe results.gdx  epsout=0 var=DsA2.l rng=d87 var=DsA1.l rng=d90 var=CLanzamiento.l rng=c93'
execute 'gdxxrw.exe results.gdx  epsout=0 var=CProduccion.l rng=c94 var=CInventario.l rng=c95 var=CDesecho.l rng=c96 var=Total.l rng=c97'
execute 'gdxxrw.exe results.gdx  epsout=0 par=dA rng=d100 par=p rng=c103 par=q rng=c107 par=h rng=c111 par=C rng=c115 par=m rng=c119 par=so rng=c123 par=Cs rng=c127 par=alfaA rng=c131 par=cd rng=c135'
```

Ilustración 17 Exportación de variables y parámetros a Excel para su análisis.

6.8.3. Interpretación de los resultados para el plan de producción

Antes de comparar los resultados del ejemplo 1 y 2, se muestran a modo de ejemplo los resultados del caso 2, para los cuales se observa las decisiones que habrá que tomar para llevar a cabo el plan de producción que minimiza los costes totales.

La interpretación de las decisiones a tomar para cada uno de los periodos de tiempo t se separan en tres secciones, explicándose primero las decisiones a tomar con el producto A, y luego las decisiones para la línea de producción de los productos B y C.

6.8.3.1. Decisiones correspondientes al producto A

La interpretación de las decisiones a tomar para cada uno de los periodos de tiempo t (representados por cada una de las columnas) para el producto A por medio de los resultados de la Tabla 10 son:

- Se debe producir en caso de que en la fila "Lanzamiento" se tenga como resultado un 1, y no producir en caso de tenerse un 0. Y en caso de producirse, se habrá de producir

XAT2 productos A con vida útil inicial de 2, XAT3 con vida útil inicial 3 y XAT4 con vida útil inicial 4. Por ejemplo, en el periodo 3 en el que se fabricarán un total de 120 productos A, estos habrán de ser 52 de vida útil inicial 4, 25 de vida útil inicial 3 y 43 de vida útil inicial 2. Posteriormente cuando se explique las decisiones del producto B y C se explicará qué distribución de estos productos se usará en la elaboración de los productos A.

- Para satisfacer la demanda del periodo se debe tomar del inventario una cantidad D1 de producto con vida útil restante 1, D2 de producto con vida útil restante 2 y D3 de producto con vida útil restante 3. Es así como por ejemplo en el periodo 4 para satisfacer la demanda total de 30 unidades, se debe tomar del inventario 25 productos con vida útil 3, ningún producto con vida útil 2 y 5 productos con vida útil restante 1.
- Se puede observar la cantidad de producto que debe haber en el inventario al final de cada periodo, la cual aunque no implica una decisión a tomar, sirve para hacer un control de la implementación del plan de producción. Es así como al final del periodo debe haber en el inventario una cantidad V1 de producto con vida útil 1, una cantidad V2 de producto con vida útil 2 y una cantidad V3 de producto con vida útil 3. Por ejemplo, el producto utilizado en el periodo 4 se obtuvo de los 241 productos con vida útil 3 del inventario y de los 5 productos con vida útil restante 1.
- Finalmente, se puede conocer la cantidad de producto que dejará de ser útil en el inventario por medio de la variable V0, la cual representa la cantidad de producto con vida útil 0 que se tendrá que desechar al finalizar el periodo. En este caso en particular, se desecharán 5 unidades durante los primeros 3 periodos.

Adicionalmente, se obtiene la tabla de costes detallados en la Tabla 11, en la cual para cada periodo se tienen los respectivos costes por lanzamiento, por producción dependiendo de la cantidad de productos fabricados, por inventario y por producto desperdiciado.

Tabla 10 Resultados producto A modelo 2 ejemplo 2

Producto A															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Demanda	0	0	0	30	43	73	65	83	24	23	28	76	65	31	22
D3	0	0	0	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D2	0	0	0	0	0	21	0	83	0	23	0	76	43	0	0
D1	0	0	0	5	43	52	65	0	24	0	28	0	22	31	22
Lanzamiento	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
XAT	0	0	120	0	86	0	120	38	0	0	120	74	0	0	0
XAT4	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	22	0	0	0	0
XAT3	0	0	77	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0
XAT2	0	0	43	0	86	0	107	0	0	0	98	74	0	0	0
V3	5	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	22	0	0	0
V2	5	5	0	52	0	0	0	0	51	0	0	0	22	0	0
V1	5	5	5	43	52	65	0	24	0	28	0	22	31	22	0
V0	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	15	10	125	95	138	65	120	75	51	28	120	118	53	22	0

Tabla 11 Costes asociados al producto A

Costes																Total
Lanzamiento	0	0	3000	0	3000	0	3000	3000	0	0	3000	3000	0	0		18,000
Producción	0	0	6000	0	4300	0	6000	1900	0	0	6000	3700	0	0		27,900
Inv. Inicial 0.5so															100	100
Inventario 0.5X	0	0	600	0	430	0	600	190	0	0	600	370	0	0	0	2,790
Inventario V3	50	0	0	0	0	0	0	130	0	0	0	220	0	0	0	400
Inventario V2	50	50	0	520	0	0	0	0	510	0	0	0	220	0	0	1,350
Inventario V1	50	50	50	430	520	650	0	240	0	280	0	220	310	220	0	3,020
Inventario 0.5*V0	25	25	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	75
Desperdicio V0	50	50	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	150
Desperdicio 2															0	-
																53,785.0

6.8.3.2. Decisiones correspondientes al producto B y C

La interpretación de las decisiones a tomar para cada uno de los periodos de tiempo t (representados por cada una de las columnas) para el producto B y C por medio de los resultados de la Tabla 12 y 14 respectivamente son:

- Se debe producir en caso de que en la fila “Lanzamiento” se tenga como resultado un 1, y no producir en caso de tenerse un 0. Y en caso de producirse, se habrá de producir en la cantidad obtenida en la fila “Producción”. Por ejemplo, en el periodo se habrá de fabricar 392 unidades de producto B y 0 de producto C, mientras que en el periodo 2 se habrá de fabricar 560 del producto C y ninguna del B.
- En los periodos que se fabrique producto A, se requiere tomar cierta cantidad de producto B de vida útil restante 1, 2 y 3, y producto C de vida útil restante 1, 2, 3 y 4. El total de producto B de cada vida útil que se requiere tomar está representado por el Total B1, B2 y B3 marcados en blanco en la tabla, requiriéndose por ejemplo para el periodo 3, 230 unidades de producto B con vida útil restante 3 (B3), 0 de vida útil restante 2 (B2) Y 10 de vida útil restante 1 (B1).
- Adicionalmente, se muestra la cantidad de producto A que se realizará con este producto con las variables de tipo XA#B#, donde el signo # representa algún número entre las posibilidades. De esta forma continuando para el caso del periodo 3, las 230 unidades de producto B con vida útil restante 3 se utilizarán para realizar el equivalente a 115 unidades de A (Total XAB3), de las cuales 52 (XA4B3) se harán con vida útil inicial 4, 25 con vida útil inicial 3 (XA3B3) y 38 con vida útil inicial 2(XA2B3). Esto implica que en la fabricación de producto A con vida útil inicial 4, 3 y 2, se deberá utilizar 102 (2*52) unidades de producto B con vida útil restante 3, 50 (2*25) unidades del mismo producto B con vida útil restante 3, y finalmente 76 (2*38) unidades de producto B con vida útil restante 3 respectivamente (de acuerdo al parámetro αA_B que en este caso es 2). La misma idea aplica para el producto B con otras vidas útiles y para el producto C.
- Se puede observar la cantidad de producto que debe haber en el inventario al final de cada periodo, lo cual aunque no implica una decisión a tomar, sirve para hacer un control de la implementación del plan de producción. Es así como al final del periodo debe haber en el inventario una cantidad V1 de producto con vida útil 1, una cantidad V2 de producto con vida útil 2 y una cantidad V3 de producto con vida útil 3.

- Finalmente, se puede conocer la cantidad de producto que dejará de ser útil en el inventario por medio de la variable V0, la cual representa la cantidad de producto con vida útil 0 que se debe desechar al finalizar el periodo.

Adicionalmente, se obtiene la tabla de costes detallados en la Tabla 13 y 14 para el producto B y C respectivamente, en la cual para cada periodo se tienen los respectivos costes por lanzamiento, por producción dependiendo de la cantidad de productos fabricados, por inventario y por producto desperdiciado.

Tabla 12 Resultados producto B modelo 2 caso 2

Producto B															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
XA4B3	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	22	0	0	0	0
XA3B3	0	0	77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2B3	0	0	33	0	0	0	107	0	0	0	98	0	0	0	0
Total XAB3	0	0	110	0	0	0	120	0	0	0	120	0	0	0	0
Total B3	0	0	220	0	0	0	240	0	0	0	240	0	0	0	0
XA3B2	0	0	0	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0
XA2B2	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	74	0	0	0
Total XAB2	0	0	5	0	0	0	0	38	0	0	0	74	0	0	0
Total B2	0	0	10	0	0	0	0	76	0	0	0	148	0	0	0
XA2B1	0	0	5	0	86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total B1	0	0	10	0	172	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lanzamiento	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Producción XB	392	0	0	0	316	0	0	0	388	0	0	0	0	0	0
V3	10	392	0	0	0	316	0	0	0	388	0	0	0	0	0
V2	10	10	172	0	0	0	76	0	0	0	148	0	0	0	0
V1	10	10	0	172	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V0	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	422	412	172	172	316	316	76	0	388	388	148	0	0	0	0

Tabla 13 Costes asociados al producto B

Costes																	Total
Lanzamiento	4000	0	0	0	4000	0	0	0	4000	0	0	0	0	0	0		12,000
Producción	15680	0	0	0	12640	0	0	0	15520	0	0	0	0	0	0		43,840
Inv. Inicial 0.5so																100	100
Inventario 0.5X	980	0	0	0	790	0	0	0	970	0	0	0	0	0	0	0	2,740
Inventario V3	50	1960	0	0	0	1580	0	0	0	1940	0	0	0	0	0	0	5,530
Inventario V2	50	50	860	0	0	0	380	0	0	0	740	0	0	0	0	0	2,080
Inventario V1	50	50	0	860	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	960
Inventario 0.5*V0	25	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50
Desperdicio V0	100	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	200
Desperdicio 2																0	-
																	67,500.0

Tabla 14 Resultados producto C modelo 2 caso 2

Producto C															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
XA4C4	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	22	0	0	0	0
XA3C4	0	0	77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C4	0	0	35	0	86	0	107	0	0	0	98	74	0	0	0
Total XAC4	0	0	112	0	86	0	120	0	0	0	120	74	0	0	0
Total C4	0	0	560	0	430	0	600	0	0	0	600	370	0	0	0
XA4C3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA3C3	0	0	0	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0
XA2C3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAC3	0	0	0	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0
Total C3	0	0	0	0	0	0	0	190	0	0	0	0	0	0	0
XA3C2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C2	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAC2	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total C2	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C1	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total C1	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lanzamiento	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
Producción XC	0	560	0	430	0	790	0	0	0	600	370	0	0	0	0
V3	20	0	0	0	0	0	190	0	0	0	0	0	0	0	0
V2	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V1	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V0	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	60	600	0	430	0	790	190	0	0	600	370	0	0	0	0

Tabla 15 Costes asociados al producto C

Costes																Total
Lanzamiento	0	2000	0	2000	0	2000	0	0	0	2000	2000	0	0	0		10,000
Producción	0	5600	0	4300	0	7900	0	0	0	6000	3700	0	0	0		27,500
Inv. Inicial 0.5so															80	80
Inventario 0.5X	0	560	0	430	0	790	0	0	0	600	370	0	0	0	0	2,750
Inventario V3	40	0	0	0	0	0	380	0	0	0	0	0	0	0	0	420
Inventario V2	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	80
Inventario V1	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	80
Inventario 0.5*V0	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
Desperdicio V0	100	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	200
Desperdicio 2															0	-
																41,150.0

Tabla 16 Tabla de costes

C. Lanzamiento	40,000
C. Producción	99,240
C. Inventario	22,645
C. Desecho	550
C. Total	**162,435**

6.8.4. Análisis y comparación de resultados

Con el fin de hacer fácilmente la comparación de los resultados del ejemplo 1 y 2 para el modelo 2, estos se representan por medio de gráficas en las ilustraciones 18 a 21, en las que cada uno de los resultados se muestra a la par para ambos casos, presentando las gráficas del ejemplo 1 a la izquierda y las del ejemplo 2 a la derecha. En caso de quererse observar los resultados de forma detallada para el ejemplo 1 en el mismo formato que se presentaron en la sección 6.8.4, se puede acudir a estos en la sección A de Anexos.

De esta forma en las ilustraciones 18 a 21 se muestran los resultados en el siguiente orden:

1. La cantidad de producto A de distintas vidas útiles iniciales fabricado en cada periodo, y la cantidad de producto B y C de distintas vidas útiles restantes utilizado para este (Ilustración 18)
2. La vida útil del producto A entregado a los clientes y la cantidad de producto B y C fabricado en cada periodo (Ilustración 19). Se debe notar que la cantidad de producto entregado a los clientes (representado por la altura de las barras) debe ser igual en ambos casos para cada uno de los periodos.
3. El inventario del producto de cada vida útil restante para cada uno de los tipos de producto en cada uno de los periodos (Ilustración 20).
4. La cantidad de producto B y C de cada vida útil restante utilizado para la realización de cada tipo de producto A realizado según su vida útil inicial (Ilustración 21)
5. El coste total y su distribución en cada uno de los capítulos: lanzamiento, producción, inventario y desperdicio (Ilustración 21).

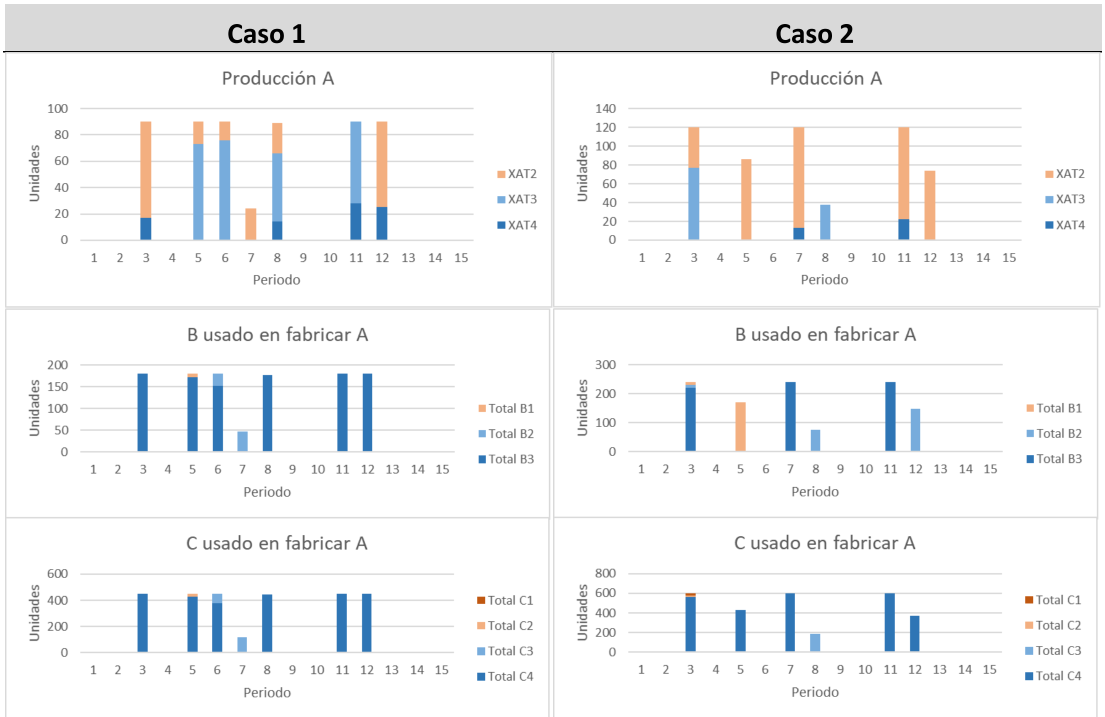

Ilustración 18 Cantidad de producto A fabricado y cantidad de producto B y C utilizado en su elaboración para el ejemplo 1 (izquierda) y el ejemplo 2 (derecha).

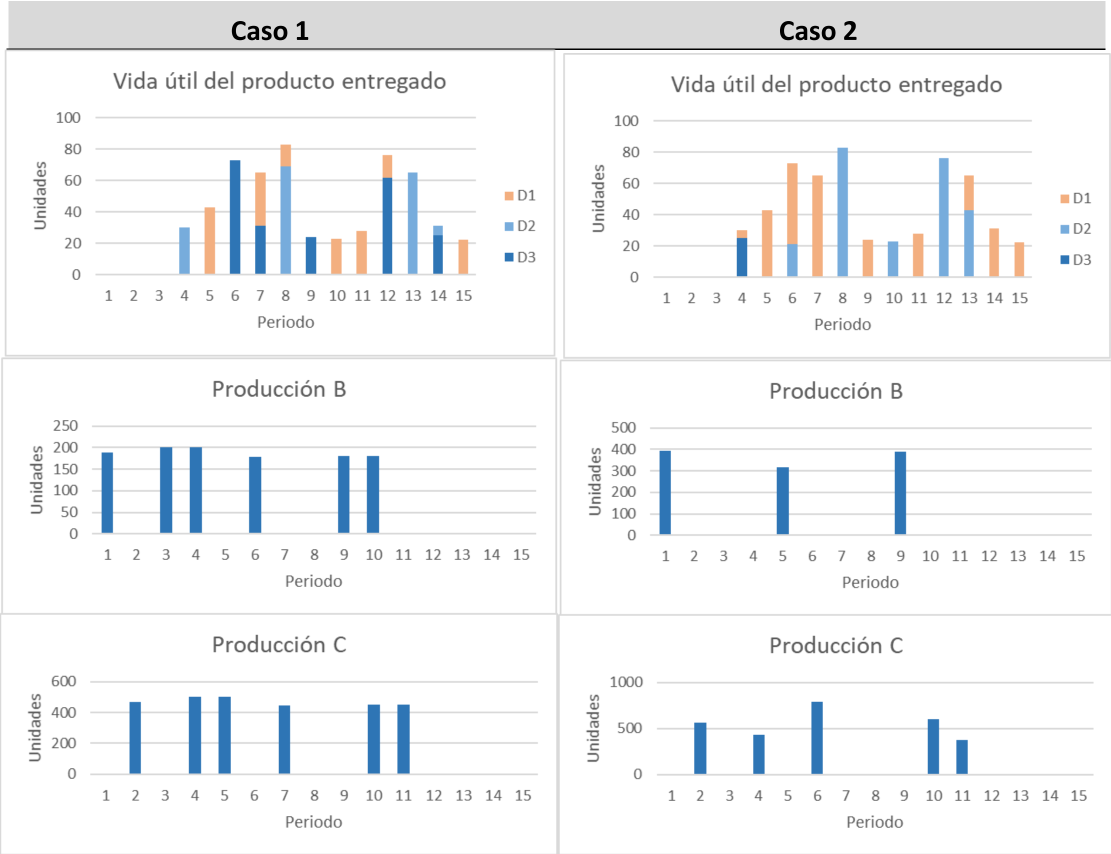

Ilustración 19 Vida útil del producto A entregado y cantidad de producto B y C fabricado para el ejemplo 1 (izquierda) y el ejemplo 2 (derecha)

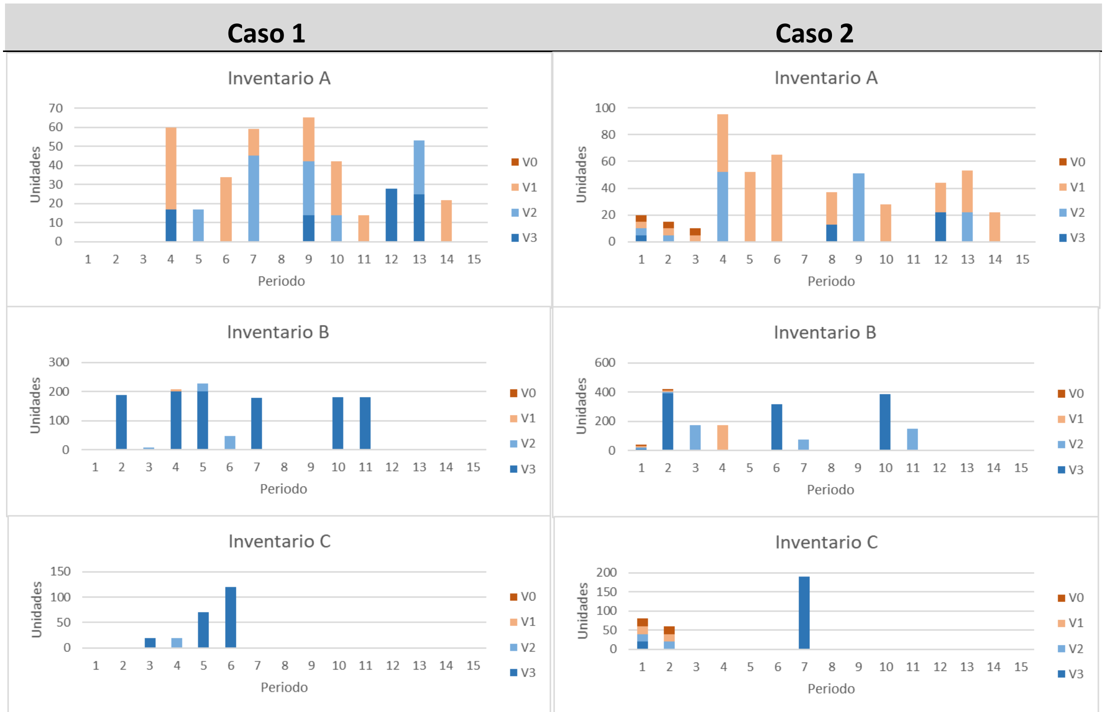

Ilustración 20 Inventario del producto A, B y C de cada vida útil restante del ejemplo 1 (izquierda) y del ejemplo 2 (derecha).

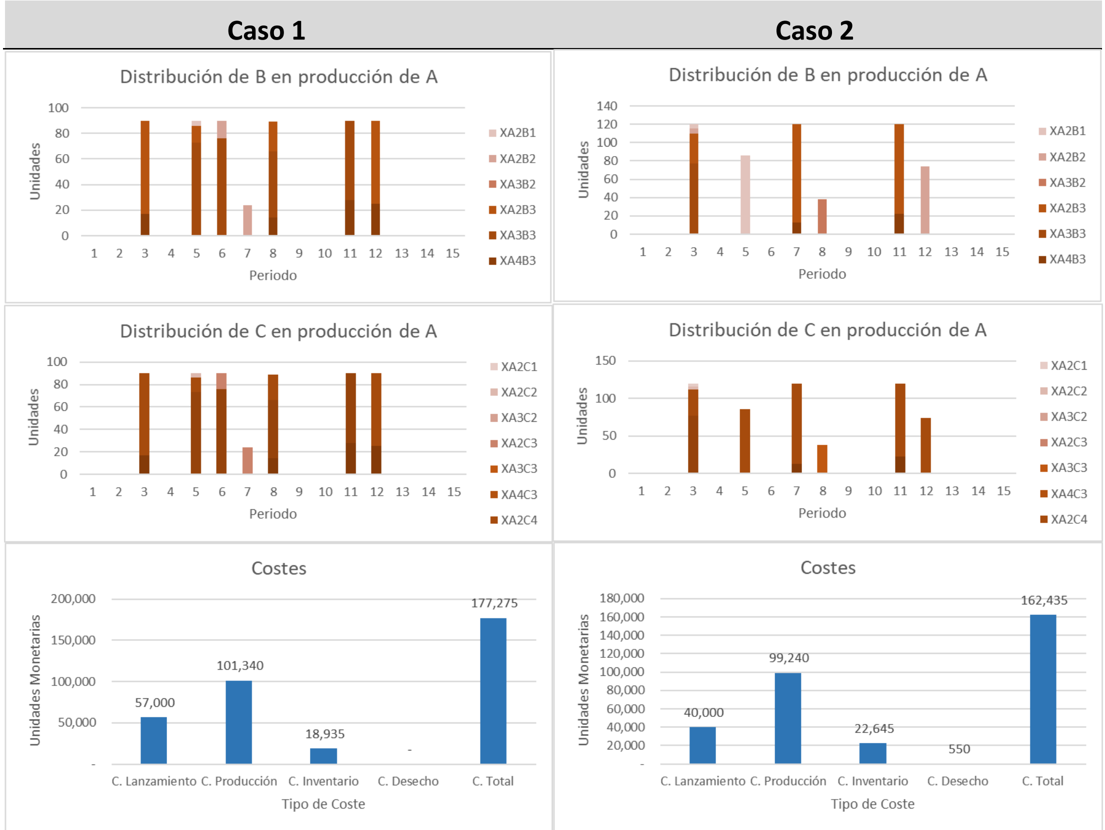

Ilustración 21 Distribución del producto B en la elaboración del producto A y coste total detallado por capítulos para el ejemplo 1(izquierda) y el ejemplo 2 (derecha).

6.8.4.1. Análisis de resultados

Se observa que la configuración óptima en cada uno de los casos difiere considerablemente al aumentarse la capacidad de producción en el segundo ejemplo respecto al primero, en el cual al hacerse una relajación en las restricciones asociadas a este (*Rest.2.P.A, Rest.2.P.B* y *Rest.2.P.C*), y así ampliarse la región de soluciones factibles, era de esperar que de no obtenerse el mismo coste total que en el ejemplo 1, se tuviera una disminución en este al implicar una mejoría en la función objetivo. Lo anterior se puede observar que conlleva a que se tenga un menor número de lanzamientos para los productos en el ejemplo 2 respecto al 1, lo cual disminuye el coste el coste asociado a este capítulo, y representa un ahorro en los costes totales a pesar de tener un aumento en el coste por inventario.

Se hace mención a algunos detalles a extraer de la comparación entre ambos ejemplos:

- A partir de la Ilustración 18 se puede evidenciar que en la solución del ejemplo 2 a diferencia del 1, se lanza la producción del producto A 7 veces y no 6, siendo en ambos casos el primer lanzamiento en el periodo 3 (considerando que el periodo 4 es el primero con demanda y que el producto A fabricado en el periodo 3 se puede utilizar a partir del 4), y el último lanzamiento en el periodo 12, en el cual en ambos casos la totalidad del producto A realizado tiene vida útil inicial 3, lo que lo hace útil para ser utilizado exactamente hasta el periodo 15, que es el último periodo con demanda a satisfacer. Sin embargo, la distribución de los lanzamientos entre el periodo 3 y 12 difiere considerablemente en ambos casos, al producirse 5 veces del total de 7 con la capacidad máxima (90 unidades) en el ejemplo 1, y 3 veces del total de 6 en el ejemplo 2 (con capacidad de 120 unidades), lo que demuestra las limitaciones que estas restricciones imponen a la solución del problema.

- Comparando la fabricación de producto B (Ilustración 19), se observa nuevamente que en el ejemplo 2 se realiza una menor cantidad de lanzamientos, realizándose 6 lanzamientos para el producto B en el ejemplo 1, entre los cuales 2 de estos se realizan con la capacidad máxima (200 unidades), mientras que en el ejemplo 2 se realizan únicamente 3 lanzamientos, los cuales superan las 300 unidades, pero no el máximo de capacidad (400 unidades). Lo anterior explica el motivo por el cual en el ejemplo 2 se elabora más producto A con vida útil inicial 2 que en el ejemplo 1, el cual suele utilizar principalmente producto B con vida útil 3 (Ilustración 18).
- Analizando la fabricación de producto C (Ilustración 19), se observa que en el ejemplo 1 se deben realizar 6 lanzamientos de los cuales 2 se realizan con la capacidad máxima de producción (500 unidades), mientras que en el ejemplo 2 únicamente se realizan 5 lanzamientos que no se ven limitados por la capacidad máxima al ser todos inferiores a 800 unidades, aunque únicamente en 2 periodos se produzca menos de 500 unidades. A pesar de lo anterior, no parece haber un cambio semejante en las proporciones de vida útil restante del producto C utilizado para elaborar producto A (Ilustración 18).
- Observando el inventario, se ve que en ninguno de los ejemplos para ninguno de los productos se tiene algún periodo que tenga el inventario al máximo de su capacidad, por lo que se concluye que esta restricción no limita realmente estos ejemplos en particular. Sin embargo, es evidente que en el ejemplo 2 los periodos con mayor inventario casi duplican los periodos con mayor inventario del ejemplo 1, lo cual es coherente con el hecho de que en el ejemplo 2 en los periodos que se produce se hace en una cantidad mayor a la del ejemplo 1.
- El hecho de que el inventario no crezca hasta su capacidad máxima, demuestra de cierta forma que la vida útil corta de los productos influye fuertemente en su valor, al ser importante en la minimización del coste total no tener producto que desechar, y así fabricar en lo posible únicamente lo que se sepa no va a caducar en el inventario.
- Finalmente, se ve en los costes que en la minimización del coste total es muy importante evitar producto que alcance vida útil 0, ya que este es producto que además de representar un coste perdido en su fabricación, implica un coste adicional al desecharse. Es así que en el ejemplo 1 no se tiene producto desechado, y en el ejemplo 2 únicamente se desecha producto del inventario inicial con vida útil 1, 2 y 3, al no haber otra alternativa teniendo en cuenta que este no es útil para satisfacer la demanda que inicia en el periodo 4. Sin embargo, al poderse utilizar el producto del inventario inicial con vida útil 4, este conlleva a que se fabriquen menos unidades de cada uno de los productos, lo que hace que se obtengan menores costes variables de producción en el ejemplo 2.

6.9. Conclusiones

Mediante la implementación del modelo 2 se llegan a las siguientes conclusiones:

- En la elaboración de un producto final con vida útil corta que se conforma a su vez de otros productos con vida útil reducida, es muy importante planificar la producción considerando de forma conjunta cada uno de los niveles considerando la fuerte interdependencia entre los productos. Esto debido a que el plan de producción del nivel superior (A) obliga a la producción de niveles inferiores a tener el producto requerido para su elaboración disponible a tiempo, influye en su inventario, y en el caso en el que la vida útil es corta, influye en la cantidad de producto que se pueda desperdiciar.

- En la producción de artículos con vida útil corta la implementación de economía de escala por medio de la reducción de los costes fijos a través de grandes volúmenes de producción en pocos periodos, se ve limitada por la capacidad y los costes de inventario, pero también fuertemente por el envejecimiento del producto que, de no utilizarse en el plazo de tiempo correcto, implicará pérdidas de capital, al estarse elaborando producto que no es útil.
- En la correcta implementación del plan de producción óptimo, es muy importante regular la cantidad de producto a realizar en cada periodo, pero a su vez especificar la cantidad de cada producto que se habrá de utilizar de distintas vidas útiles de forma independiente para satisfacer la demanda, y para elaborar el producto final a partir de los productos que lo componen. Es así como es muy importante en el caso del modelo 2, utilizar correctamente la cantidad de producto B y C de cada una de las vidas útiles restantes que se tienen en inventario, para elaborar cada uno de los distintos productos A de distintas vidas útiles a realizar. De incumplir la asignación de estos recursos, se podrá estar utilizando producto más nuevo para reemplazar producto más viejo, lo que de alguna forma hará que se descomplete la cantidad de este producto requerido en la elaboración de otros productos y se pueda estar incumpliendo con las especificaciones del producto a entregar al cliente, o se deba ajustar el plan de producción e incurrir en costes adicionales para su corrección.
- Gracias al uso de la modelación matemática se puede encontrar una solución que minimice los costes de producción, a la cual sería muy difícil llegar por medio de otra metodología. Observando las condiciones impuestas en el modelo, se puede ver la versatilidad que brinda el modelo para adaptarse a cada uno de los casos, al cual se le podrán cambiar las condiciones entre los productos A, B y C fácilmente, y las condiciones internas del uso de cada uno de estos productos.
- Al requerir el modelo un tiempo de ejecución menor a un segundo mediante su resolución con el Solver CPLEX, se evidencia su practicidad para representar modelos de complejidad similar, siendo innecesario el uso de heurísticos o metaheurísticos a menos de que se aumente su complejidad significativamente.

7. Modelo 3: Producción biobjetivo multinivel para artículos con vida útil corta

7.1. Problema a resolver

En el caso de la producción de artículos con vida útil corta, se vuelve esencial para las empresas a nivel competitivo no solo minimizar los costes totales, sino además maximizar la vida útil restante que poseen los productos a la hora de ser entregados a los clientes, quienes valorarán el producto sea lo más nuevo o fresco posible.

De esta forma, retomando el problema del modelo 2 y cambiando su objetivo a encontrar un conjunto de soluciones eficientes (explicadas en la sección4.3 de la propuesta metodológica) que satisfagan la demanda del horizonte de planificación, incurriendo en bajos costes y entregando producto con vida útil restante lo mayor posible a los clientes, se crea la frontera de Pareto que sirve como herramienta para tomar decisiones que encuentren un balance apropiado entre estos dos criterios. Considerando que la incorporación de ambos objetivos en el modelo 2 únicamente implica un cambio en su función objetivo, se presentan únicamente los cambios que se han de realizar sobre este para actualizarlo al modelo 3.

7.2. Creación de la frontera de Pareto

Se utiliza la metodología para la obtención de las soluciones Pareto eficientes explicada en la sección 4.3 de la propuesta metodológica, creando la función objetivo compuesta por ambos criterios, e iterando para distintos valores del peso w en su rango entre 0 y 1. Se evalúan soluciones eficientes entre el criterio de minimizar el coste total y el criterio que tiene como objetivo maximizar la VUM de los productos entregados a los clientes. Es así que se explicará a continuación la obtención de la función objetivo por medio de la determinación de sus parámetros, y las funciones de ambos criterios utilizadas.

7.2.1. Función objetivo

La frontera de Pareto se crea a partir de un conjunto de soluciones no dominadas que tienen como objetivo tener bajos costes totales y alta vida útil media del producto entregado a los clientes. Para esto se plantea la siguiente función objetivo con la variable artificial L.

$$Min\ L = w\left|\frac{C.Total - {f^*}_{C.\ Total}}{f_{*\,C.\ Total} - {f^*}_{C.\ Total}}\right| + (1-w)\left|\frac{VUM - {f^*}_{VUM}}{f_{*VUM} - {f^*}_{VUM}}\right|$$

Donde en la minimización de L, se encuentra una solución eficiente para cada valor diferente de w que se utilice entre 0 y 1, garantizando que cada uno de los objetivos esté multiplicado por pesos complementarios que habrán de sumar 1. De esta forma se le estará dando todo el peso a la minimización del coste total cuando w sea 1, y todo el peso a la maximización de la vida útil media (VUM) en caso de ser 0.

Como se mencionó en la propuesta metodológica, previo al uso de la función objetivo, se deben determinar los valores ideales y anti-ideales de cada función. Esto se logra obteniendo los resultados de ambas funciones al optimizar únicamente uno de los dos objetivos. De esta forma, al minimizar el Coste Total únicamente, se obtiene en su función su valor ideal (menor valor posible), mientras que se obtiene el valor anti-ideal de VUM. De forma similar, al buscar maximizar la VUM se obtiene su valor ideal (mayor valor posible), y el valor anti-ideal del Coste Total.

Conociendo que se obtendrá un valor ideal menor al valor anti-ideal para el Coste Total, y un valor ideal mayor al valor anti-ideal para la VUM, se puede eliminar el valor absoluto de la función objetivo al reescribirla de esta forma:

$$Min\ L = w\frac{C.Total - {f^*}_{C.\ Total}}{f_{*\,C.\ Total} - {f^*}_{C.\ Total}} + (1-w)\frac{{f^*}_{VUM} - VUM}{{f^*}_{VUM} - f_{*VUM}}$$

Finalmente, para terminar de explicar esta función objetivo, se explican las funciones de Coste Total y de VUM que son utilizadas en las siguientes dos secciones.

7.2.2. Función de coste total

El coste total de producción se calcula con la función de coste total planteada en la sección 6.6, compuesta de la suma del coste por lanzamiento, producción, inventario y de productos desechados.

7.2.3. Función de vida útil media del producto entregado

La función que calcula la vida útil media de los productos entregados a los clientes es la siguiente:

$$VUM = \left(\sum_{t=1}^{NT} \mathrm{DsA1}_t + 2\sum_{t=1}^{NT} \mathrm{DsA2}_t + 3\sum_{t=1}^{NT} \mathrm{DsA3}_t\right) \Bigg/ \sum_{t=1}^{NT} \mathrm{dA}_t$$

En esta función la vida útil media del producto entregado (VUM) se obtiene al sumar la vida útil restante de todos los productos entregados y dividirlo entre el total de productos entregados. Es por esto que para su cálculo se multiplica cada vida útil restante (1, 2 y 3), por la suma del producto de este tipo entregado a los clientes, y se divide entre la demanda total de producto, la cual de acuerdo a la Restricción D.2.A. de la sección 6.7.1., es igual a la suma del producto entregado de vida útil 1, 2 y 3. En esta función se decide utilizar la demanda total en el denominador en vez de la suma del producto entregado, de tal forma se pueda garantizar que esta función es lineal en variables, y que se obtiene un modelo de programación lineal entera mixta.

7.3. Implementación del modelo en GAMS

Se implementa el modelo en GAMS de tal forma se solucione el modelo realizando las iteraciones en la función objetivo utilizando el Solver profesional CPLEX, con lo cual se construye la frontera de Pareto con el conjunto de soluciones eficientes. A partir del análisis de los resultados, se escoge una única alternativa a implementar, para la cual únicamente habrá de fijar el peso w correspondiente para obtener su solución detallada por medio de GAMS y CPLEX.

En su implementación se deciden utilizar los mismos parámetros utilizados en el ejemplo 2 del modelo 2, de tal forma se pueda profundizar su análisis y comparar su solución (detallada en la sección 6.8.3) con aquella que se escoja mediante la frontera de Pareto. Estos parámetros se muestran a continuación de igual forma a como se presentaron en la tabla 9 de la sección 6.8.1.

Tabla 17 Parámetros del ejemplo 2 del modelo 2, que serán utilizados para el ejemplo del modelo 3

i	p(t)	q(t)	h(t)	C(t)	m(t)	so (v)	Cs(t)	cd(t)	alfaA(t)
A	50	3000	10	120	20	5	300	10	N/A
B	40	4000	5	400	40	10	600	10	2
C	10	2000	2	800	20	20	1000	5	5

7.3.1. Elaboración del conjunto de soluciones para la frontera de Pareto en GAMS

De acuerdo a la metodología descrita en la sección 4.3.2 de la propuesta metodológica, se modela el problema en GAMS al tomar como base el modelo 2, y utilizar como criterios la función de costes de la sección 7.2.2 y la función de la VUM de la sección 7.2.3. Para la elaboración de la frontera de Pareto se obtienen primero los valores ideales y anti-ideales de Coste Total y VUM al optimizar cada uno de estos objetivos de forma independiente, teniendo los resultados que se presentan a continuación.

Tabla 18 Matriz de pagos para el ejemplo del modelo 3

	Coste Total (u.m.)	VUM (periodos)
Valor ideal (f^*)	162,435	1.526
Valor anti-ideal (f_*)	222,025	3.000

Reemplazando los parámetros en la función objetivo, se obtiene que esta finalmente queda:

$$Min\ L = w\frac{C.Total - 162{,}435}{222{,}025 - 162{,}435} + (1 - w)\frac{3 - VUM}{3 - 1.526}$$

Finalmente, resolviendo el problema para distintos valores de w (entre 0 y 1) en la función objetivo, y guardando los resultados en las funciones de Coste Total y VUM, se obtiene el conjunto de soluciones eficientes de la frontera de Pareto. Esto se realiza mediante un Loop en GAMS que soluciona el problema para cada uno de los distintos valores de w y exporta los valores obtenidos en las funciones de ambos criterios a Excel, con el cual se realiza automáticamente la gráfica de la frontera de Pareto. Las modificaciones hechas al modelo 2 en la función objetivo y la declaración de las funciones VUM y de coste total realizadas se pueden observar en la Ilustración 22, el Loop que soluciona el problema con 21 diferentes pesos w (con incrementos de 0.05 desde 0 a 1) se muestra en la Ilustración 23, y finalmente la exportación de los resultados a Excel en la Ilustración 24.

```
*Ponderación de los objetivos, variable a minimizar
Equation l_min;
          l_min..L =e=pond*(Total-162435)/(222025-162435)+(1-pond)*(3-VUmedia)/(3-1.526);

*Vida útil media del producto entregado al cliente, a minimizar
Equation vu_media;
          vu_media..VUmedia =e= (1/dtotal)*(1*sum(t,DsA1(t))+2*sum(t,DsA2(t))+3*sum(t,DsA3»
(t)));
*Costes función objetivo
Equation c_lanzamiento ;
          c_lanzamiento..CLanzamiento =e= sum((i,t)$(ord(t)<=NT-1),q(i,t)*Y(i,t));

Equation c_produccion ;
          c_produccion..CProduccion =e= sum((t)$(ord(t)<=NT-1), sum((u)$(ord(u)>=2),
                          p('A',t)*XAT(u,t))+p('B',t)*XB(t)+p('C',t)*XC(t));

Equation c_inventario ;
          c_inventario..CInventario =e= sum((i,u),(1/2)*h(i,'1')*so(i,u))
                          +sum((t)$(ord(t)<=NT-1),
                           (1/2)*(sum(u,h('A',t)*XAT(u,t))+h('B',t)*XB(t)+h('C',t)*XC(t))
                           +sum(i,h(i,t)*(V3(i,t)+V2(i,t)+V1(i,t)+(1/2)*V0(i,t))))
                          +sum(i,h(i,'15')*(V3(i,'15')+V2(i,'15')+V1(i,'15')+(1/2)*V0(i,'1»
5'))) ;

Equation c_desecho ;
          c_desecho..CDesecho =e= sum((t)$(ord(t)<=NT-1), sum(i,cd(i,t)*V0(i,t)))
                              +sum(i,cd(i,'15')*(V3(i,'15')+V2(i,'15')+V1(i,'15')+V0(i,'15»
')));

Equation costo costo total FO;
          costo..Total =e= CLanzamiento + CProduccion + CInventario + CDesecho;
```

Ilustración 22 Cambio en la función objetivo en el modelo 2 para la adaptación del modelo 3.

```
Model modelo1 /all/;
modelo1.optcr=0;
solve modelo1 using mip minimizing L;

display dA,p,q,h,cd,so,C,m,Cs,XAT.l,XA2.l,XA3.l,XA4.l,XB.l,XC.l,Y.l,V3.l,V2.l
V1.l,V0.l,DsA3.l,DsA2.l,DsA1.l,CLanzamiento.l,CProduccion.l,CInventario.l,CDesecho.l,Tota»
l.l,dtotal,VUmedia.l,L.l;


Set j /1*21/;
Parameter ponderaciones(j) /1=0,2=0.05,3=0.1,4=0.15,5=0.2,6=0.25,7=0.3,8=0.35,9=0.4,10=0.»
45,11=0.5,12=0.55,13=0.6,14=0.65,15=0.7,16=0.75,17=0.8,18=0.85,19=0.9,20=0.95,21=1/

variable costetotal(j);
variable vidautilmedia(j);

Loop (j,
  pond=ponderaciones(j);
  Solve modelo1 using mip minimizing L;
  costetotal.l(j)=Total.l;
  vidautilmedia.l(j)=VUmedia.l;
) ;

display costetotal.l,vidautilmedia.l,ponderaciones;
```

Ilustración 23 Iteraciones para la solución del modelo cambiando el peso w (pond) en la función objetivo para la creación de la frontera de Pareto. Los valores de vida útil media y coste total son guardados para cada uno de los casos.

```
execute_unload "results.gdx" XAT.l,XA2.l,XA3.l,XA4.l,XB.L,XC.l,V3.l,V2.l,V1.l,V0.l,DsA3.l»
,DsA2.l,DsA1.l, CLanzamiento.l,CProduccion.l,CInventario.l,CDesecho.l,Total.l,dA,p,q,h,C,»
m,so,Cs,cd,alfaA,costetotal.l,vidautilmedia.l,ponderaciones
execute 'gdxxrw.exe results.gdx  epsout=0 var=XAT.l rng=c2 var=XA2.l rng=b9 var=XA3.l rng»
=b24 var=XA4.l rng=b39'
```

Ilustración 24 Exportación de resultados del modelo 3.a Excel

7.3.2. Análisis de resultados de la frontera de Pareto

Los resultados de las iteraciones obtenidas luego de implementar el modelo en GAMS se muestran a continuación, para las cuales se requirió un tiempo de ejecución de 13.892 segundos.

Tabla 19 Resultados de las iteraciones para la realización de la frontera de Pareto para el ejemplo del modelo 3.

Peso w	Coste Total (u.m.)	V. U. Media (periodos)
1.00	**162,435**	**1.50**
0.95	**162,515**	**2.43**
0.90	**163,795**	**2.83**
0.85	163,795	2.83
0.80	163,795	2.83
0.75	163,795	2.83
0.70	163,795	2.83
0.65	163,795	2.83
0.60	163,795	2.83
0.55	163,795	2.83
0.50	163,795	2.83
0.45	163,795	2.83
0.40	**166,515**	**2.88**
0.35	**167,735**	**2.90**
0.30	**173,245**	**2.95**
0.25	**174,065**	**2.96**
0.20	**179,505**	**3.00**
0.15	179,505	3.00
0.10	179,505	3.00
0.05	179,505	3.00
0.00	222,025	3.00

Ilustración 25 Frontera de Pareto para el ejemplo del modelo 3.

Tabla 20 Análisis de soluciones eficientes

Solución	Coste Total (u.m.)	V. U. Media (periodos)	Diferencia Coste Total (u.m.)	Aumento en Coste Total	Diferencia VUM (periodos)	Aumento en VUM	Tasa de intercambio (u.m./periodos)
1	162,435	1.50					
2	162,515	2.43	80	0.05%	0.93	62.04%	86
3	163,795	2.83	1280	0.79%	0.40	16.47%	3,203
4	166,515	2.88	2720	1.66%	0.05	1.76%	54,691
5	167,735	2.90	1220	0.73%	0.02	0.68%	62,442
6	173,245	2.95	5510	3.28%	0.06	2.02%	94,004
7	174,065	2.96	820	0.47%	0.01	0.24%	115,415
8	179,505	3.00	5440	3.13%	0.04	1.32%	139,215

En base a los resultados obtenidos, se busca escoger una solución que contemple tanto el coste total como la VUM de forma balanceada, para lo cual se deberá escoger una solución que esté cerca de la esquina inferior derecha del gráfico de Pareto, donde se tendrá una alta vida útil media de los productos entregados a los clientes, y un coste total bajo.

En estos resultados se observa que el coste total mínimo es de 162,435 u.m. con un producto con VUM de 1.50, y que de permitir el coste total aumente a 162,515 o 162,795 u.m., lo que implica un aumento de tan solo el 0.05% o del 0.84% del coste total, hará aumentar la VUM del producto entregado a un valor de 2.43 o 2.83 periodos, lo que implica una mejoría en este criterio del 62.04% o del 88.67% respectivamente. Teniendo en cuenta lo anterior, se recomendaría incorporar alguna de estas dos soluciones que implican una alta mejoría en la VUM de los productos ante un aumento muy pequeño en los costes totales.

Adicionalmente, se puede evidenciar que en la obtención del valor ideal de la VUM al minimizar únicamente teniendo este criterio, se obtienen varias soluciones, al observarse que para tener una VUM de 3 periodos, se puede tener un coste total de 222,025 u.m., pero también un coste de 179,505 u.m., el cual es una solución que domina a la anterior. Por esta razón, se decide no graficar el valor obtenido al utilizar un peso w de 0.

7.4. Comparación de resultados modelo 2 y modelo 3

A partir de los resultados obtenidos en la frontera de Pareto, y el análisis de los resultados realizado, se busca comparar la solución obtenida en el modelo 2 para el ejemplo, la cual corresponde al punto de la frontera de Pareto con menor coste total (VUM = 1.50 y coste total = 162,435), y la solución recomendada (VUM = 2.83 y coste total = 163,795) obtenida del modelo 3, de tal forma se puedan analizar los cambios entre ambos planes de producción que conllevan a que ante un aumento de tan solo el 0.84% del coste total se pueda mejorar la VUM del producto entregado en un 88.67%.

Con el fin de hacer fácilmente la comparación de los resultados obtenidos por medio del modelo 2 y 3 para el mismo problema, con exactamente los mismos parámetros, se representan los distintos resultados por medio de gráficas en las ilustraciones 26 a 29, en las que cada uno de los resultados se muestra a la par para ambos casos, presentando las gráficas de los resultados del ejemplo utilizando el modelo 2 a la izquierda y el modelo 3 a la derecha. En caso de quererse observar los resultados de forma detallada para la solución obtenida con el modelo 3, se puede acudir a estos en la sección B de Anexos.

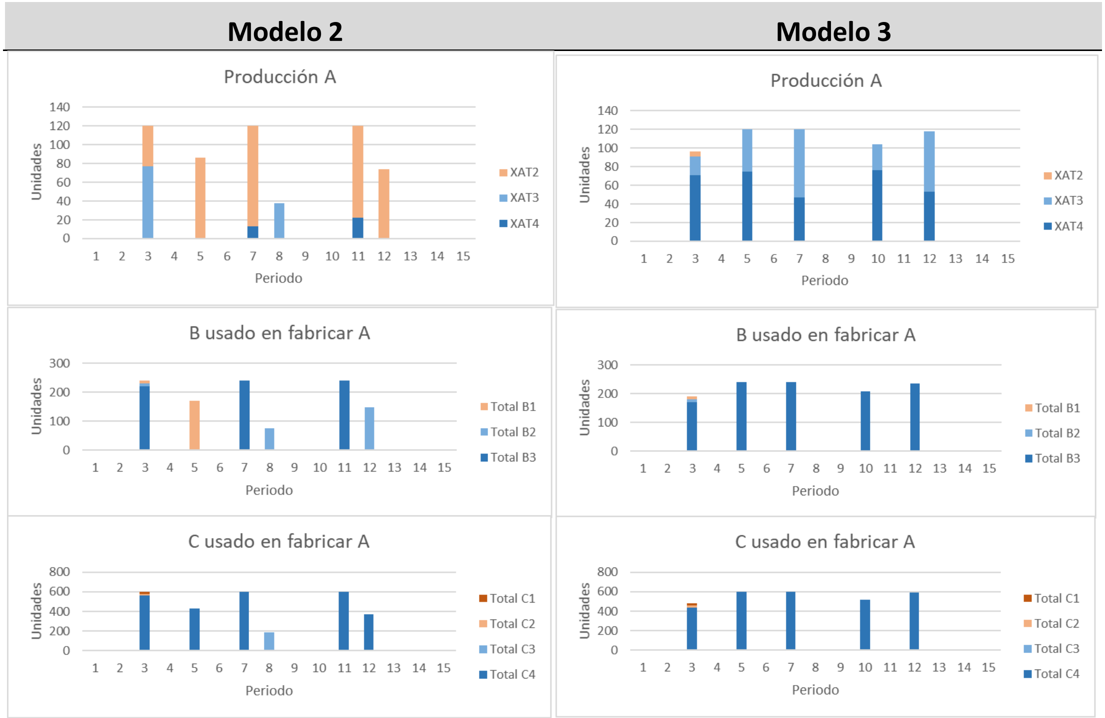

Ilustración 26 Cantidad de producto A fabricado y cantidad de producto B y C utilizado en su elaboración para la solución del ejemplo con el modelo 2 (izquierda) y el modelo 3 (derecha).

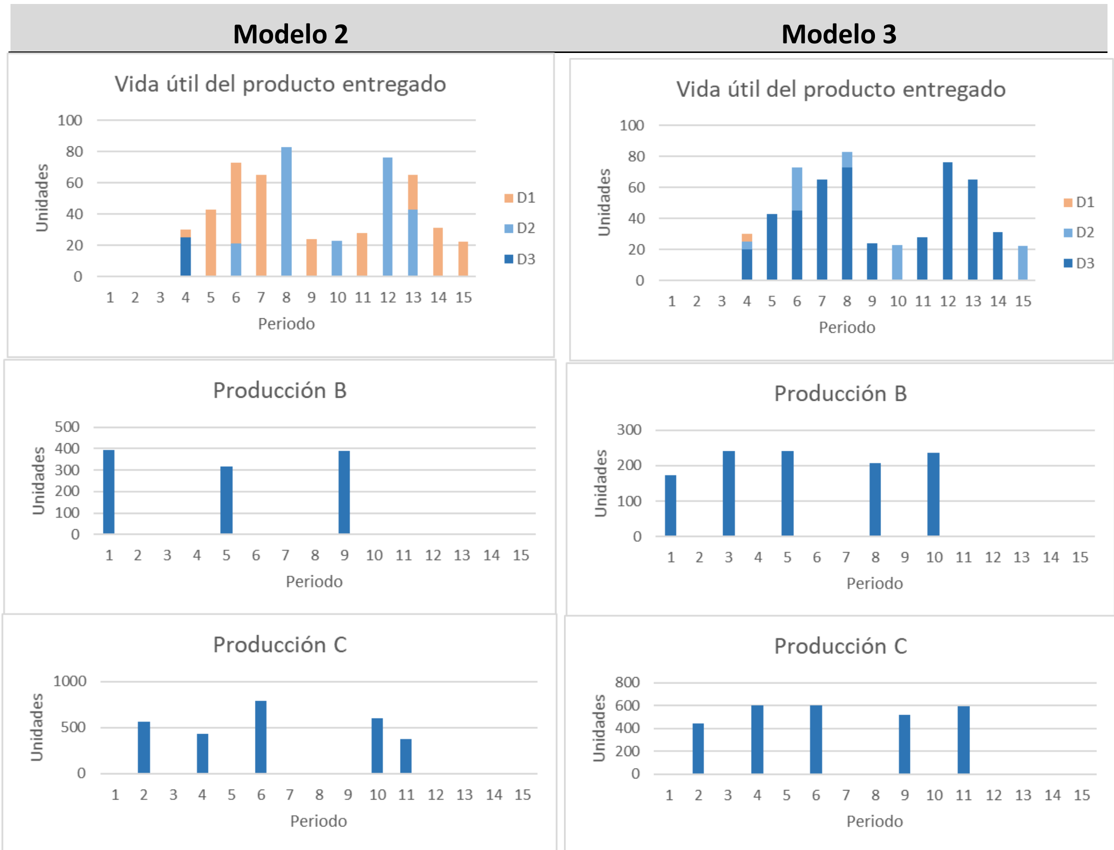

Ilustración 27 Vida útil del producto A entregado y cantidad de producto B y C fabricado para la solución del ejemplo con el modelo 2 (izquierda) y el modelo 3 (derecha).

Ilustración 28 Inventario del producto A, B y C de cada vida útil restante en la solución del ejemplo con el modelo 2 (izquierda) y el modelo 3 (derecha).

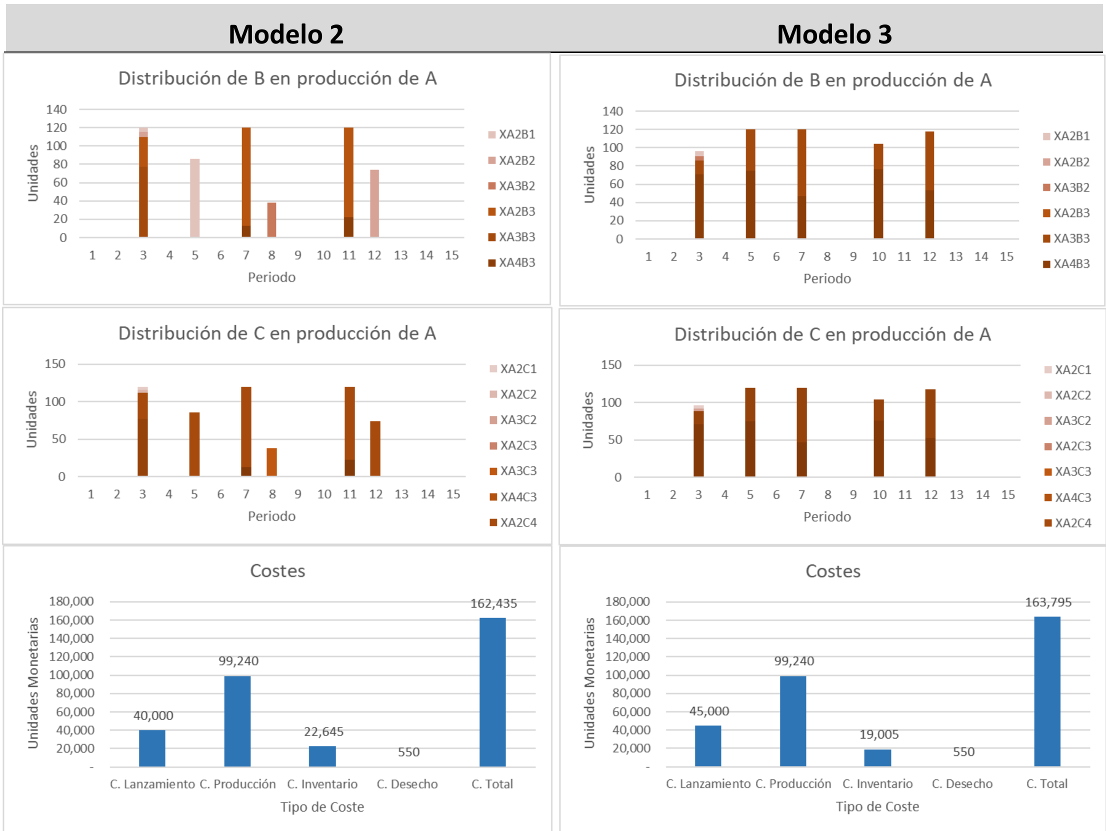

Ilustración 29 Distribución del producto B en la elaboración del producto A y coste total detallado por capítulos para la solución del ejemplo con el modelo 2 (izquierda) y el modelo 3 (derecha).

7.4.1. Análisis de resultados

Principalmente por medio de la Ilustración 28 se puede evidenciar el cambio de 1.3 periodos en la vida útil media de los productos A entregados a los clientes, los cuales en el caso del modelo 3 utilizan en su gran mayoría producto A con su máxima vida útil 3 o con vida útil 2, a excepción del primer periodo con demanda (periodo 4) en el que se aprovecha el producto del inventario para satisfacer la demanda, entregando únicamente 5 productos con vida útil restante 1.

Se explican algunos detalles adicionales observados que explican la significante mejoría de la VUM en la solución del modelo 3:

- A partir de la Ilustración 26 se observa que en la solución del modelo 3 se produce producto A con vida útil inicial en su gran mayoría de vida útil 4 y 3, excepto en el primer periodo de producción (periodo 3) que se producen 5 unidades de producto con vida útil 2, el cual se compone de producto B y C del inventario inicial. Esto se observa se puede realizar debido a que el producto B y C utilizado es en su gran mayoría (a excepción del producto del inventario inicial) producto de la máxima vida útil posible, representado por el color azul oscuro de las barras.
- Se observa en la Ilustración 29 las diferencias en los costes por capítulos, en los que el coste por desechos es igual en ambos casos al ser correspondiente al producto de vida útil restante 1, 2 y 3 que se tenía en el inventario inicial y que no había posibilidad de ser utilizado. El coste de producción a su vez es igual en ambos casos al producirse la cantidad justa de producto necesario, por lo que la diferencia entre el coste total de ambos casos se refleja en los capítulos de costes por lanzamiento e inventario.
- A partir de las gráficas de producción de los 3 productos, se observa que para el producto A se tiene un lanzamiento menos en el caso del modelo 3 (con un total de 5 lanzamientos), en el producto B se tienen dos lanzamientos más (5), y en el producto C la misma cantidad de lanzamientos (5), teniéndose así un coste por lanzamientos 5,000 u.m. superior al del modelo 2. Es interesante observar que siempre que se realiza un lanzamiento en la producción de B, se realiza lanzamiento en la producción de C un periodo después, y de A dos periodos después. Esto implica que para la realización de producto A se utiliza producto B con vida útil restante 3, considerando este requiere de un periodo en el inventario antes de utilizarse, y el producto C con vida útil restante 4, el cual no tiene la limitación del producto B.
- De acuerdo a lo concluido en el punto anterior, se observa que en el inventario del producto B siempre está el producto un único periodo antes de ser utilizado, y en el producto C no hay inventario, al utilizarse el producto recién fabricado en la elaboración de producto A. El inventario del producto A llega a tener como máximo producto con vida útil 2 almacenado, alternándose un periodo con inventario con vida útil 3 y otro con vida útil 2. Además, la eficiente utilización del producto reduce los costes por inventario, los cuales son de 19,005 u.m., siendo 3,640 u.m. menores a la solución del modelo 2.

7.5. Conclusiones

La frontera de Pareto permite visualizar la relación entre las dos funciones objetivo, de tal forma se pueda calcular el coste de oportunidad o la tasa de intercambio entre estas, y se pueda tener un conjunto de soluciones eficientes para decidir según la importancia que tenga cada uno de los objetivos en la práctica. En este caso en particular, se pueden encontrar alternativas que permiten ante un coste total de producción levemente superior al mínimo posible, una gran mejoría en la VUM de los productos entregados a los clientes.

De esta forma, realizar el modelo biobjetivo tiene como ventaja respecto al modelo con un único objetivo del modelo 2, que permite visualizar las repercusiones de la selección de una de las alternativas en cada uno de los criterios que se tienen como objetivo, aunque evidentemente por las iteraciones que requiere, tiene un tiempo de ejecución mayor, pasando de un tiempo de 0.83s a 13.9s. Esto permite pasar de brindarle al decisor una única solución óptima en un criterio, a brindarle información sobre los beneficios que pueden tener soluciones subóptimas sobre otros aspectos importantes para el éxito de la empresa, como en este caso se considera lo es la vida útil de los productos recibidos por los clientes.

Finalmente, a partir del análisis comparativo de resultados se puede observar que una solución con un cambio leve en uno de sus objetivos, puede llegar a implicar un gran cambio en el plan de producción para alcanzar el objetivo para mejorar el otro objetivo, por lo que se justifica la utilización de modelos matemáticos para poder obtener esta solución fácilmente, en vez de recurrir a algún tipo de modificación manual que llegará a una mejor solución local pero no global.

8. Modelo 4: Inclusión de alternativas en la planificación de la producción

8.1. Problema a resolver

Tomando como partida el modelo 3, se busca incorporar ciertas alternativas que puedan surgir en la práctica para la elaboración del producto final A. Se asume que la empresa debe escoger una sola máquina para la producción de todas las unidades en el horizonte de planificación, entre varias alternativas de máquinas que pueden elaborar el producto A. Cada una de las posibles máquinas difiere respecto a las demás en la capacidad mínima y máxima de producción, en el coste por lanzamiento, y en el coste unitario para la elaboración de productos A.

Por otro lado, se busca agregar al modelo la posibilidad de subcontratar producto B y C a otra empresa, la cual presenta una propuesta de precios particular que depende de la cantidad de producto que se le pida en cada uno de los periodos. Estas unidades subcontratadas tendrán costes superiores a los que se obtendrían en promedio fabricando las unidades dentro de la empresa. Sin embargo, estos son útiles para completar unidades faltantes en un periodo, y darle flexibilidad al plan ideal de producción. Esto es útil en casos en los para satisfacer pocos productos faltantes en la demanda, se deba tomar una decisión que implique un aumento significativo en los costes.

Se asume que cada uno de los productos B y C podrán ser comprados a dos precios diferentes, teniéndose un coste unitario alto para las primeras unidades hasta un límite, a partir del cual las unidades adicionales tendrán un coste inferior. Adicionalmente, el subcontratista para incentivar la compra de su producto, ofrece un descuento adicional sobre los pedidos en caso comprarse ambos productos en una cantidad superior o igual a la del límite especificado. Este consiste en un descuento porcentual adicional sobre el costo total de subcontratación en el periodo. En resumen, se tienen las siguientes condiciones por parte de la empresa subcontratista para cada uno de los periodos:

1. El producto B puede comprar a un precio $ps1_B$ para las primeras ns_B unidades. En caso de comprarse más de esta cantidad, las unidades que sobrepasen este límite se podrán comprar a un precio $ps2_B$ que es inferior a $ps1_B$.
2. De forma similar al caso anterior, el producto C se compra a un precio $ps1_C$ para las primeras ns_C unidades, y a un precio $ps2_C$ para aquellas unidades adicionales, siendo este segundo precio inferior al primero.
3. En caso de comprarse en el periodo ns_B o más unidades de producto B, y ns_C o más unidades de producto C, el coste total del producto subcontratado en ese periodo se multiplica por un factor (ds), teniendo un descuento de (1-ds)%, al ser ds un valor positivo inferior a 1.
4. La empresa subcontratista se compromete a entregar como máximo CB unidades de producto B y CC unidades de producto C en cada uno de los periodos t.

También es importante aclarar que en el mismo periodo t en el que el producto es subcontratado, este se puede utilizar para elaborar producto A o se puede guardar como inventario. Este será obtenido con la máxima vida útil restante que será útil para elaborar producto A, por lo que en el caso del producto B este se obtendrá con vida útil restante 3, y en el caso del producto C con vida útil restante 4.

Con el fin de resaltar las diferencias del modelo 4 respecto al modelo 3 y así poder observar fácilmente los cambios necesarios para involucrar la decisión de la máquina para el producto A y la posibilidad de subcontratación para el producto B y C, se marcan en negrilla los cambios que consideran el primer caso, y en con color azul los cambios del segundo caso.

8.2. Índices del modelo

- t: representa cada uno de los periodos de tiempo en el modelo, tomando valores enteros desde 1 hasta NT.
- i: tipo de producto, pudiendo ser A, B o C.
- u: vida restante del producto almacenado, pudiendo tomar valores enteros entre 1 y 4. Este se usa para la definición de los parámetros de stock inicial, y para las variables tipo XAT para indicar la vida útil inicial del producto A.
- **k: máquina a escoger para la producción de producto A, pudiendo ser en este caso 1 o 2. En el caso de los productos B y C únicamente toma el valor 1, por lo que de tenerse tanto el subíndice i como el subíndice k en el mismo parámetro o variable, k únicamente podrá tomar el valor 1 de ser i igual a B o C.**
- w: tipo de precio a utilizar en caso de subcontratarse, toma el valor 1 en caso de considerar el precio sin la promoción, y el valor 2 en caso de considerar la promoción.

8.3. Parámetros del modelo

9. NT: Número de periodos en los que se deberá satisfacer la demanda. En este caso en particular se toma como 15.
10. **NK: Número de máquinas entre las cuales escoger para la producción de A. En este caso en particular se toma NK igual a 2.**

- dA_t: demanda a satisfacer del producto A en el periodo t.
- **$p_{k,i,t}$: coste de producción unitario al utilizar la máquina k para el producto i en el periodo t.**
- **$q_{k,i,t}$: coste fijo de lanzamiento al utilizar la máquina k en la elaboración de producto i en el periodo t.**
- $h_{i,t}$: coste unitario de almacenamiento del producto i para el periodo t.
- **$C_{k,i,t}$: capacidad máxima de producción al utilizar la máquina k en la elaboración de producto i para el periodo t.**
- **$m_{k,i,t}$: en caso de producirse en el periodo t, es la cantidad mínima que se puede producir del producto i al utilizarse la máquina k.**
- $so_{i,u}$: inventario inicial del producto i con vida útil restante u.
- $Cs_{i,t}$: máxima capacidad de almacenamiento en el periodo t para el producto i.
- $cd_{i,t}$: coste unitario por desechar el producto i en el periodo t.
- αA_i: cantidad del producto i requerido para realizar un producto A. El índice i podrá tomar como valor B o C.
- $ns_{i,t}$: número de unidades subcontratadas del producto i, a partir de las cuales aplica el precio 2 en el periodo t.
- $ps1_{i,w,t}$: precio unitario para los primeros $ns_{i,t}$ productos subcontratados del producto i en el periodo t, teniendo el descuento adicional de la promoción en caso de que w sea 2, y sin considerarlo en caso de que w sea 1.

- $ps2_{i,w,t}$: precio unitario para los productos subcontratados del producto i que sean adicionales a los primeros $ns_{i,t}$ subcontratados del mismo producto i en el periodo t, teniendo el descuento adicional de la promoción en caso de que w sea 2, y sin considerarlo en caso de que w sea 1.
- CB_t: cantidad máxima de producto B a subcontratar en el periodo t.
- CC_t: cantidad máxima de producto C a subcontratar en el periodo t.

8.4. Variables Decisión

- **$XAT_{k,u,t}$: cantidad de producto A con vida útil u a producir en el periodo t utilizando la máquina k. El índice u tomará los valores 2, 3 o 4, al ser los posibles valores para la vida útil inicial del producto A fabricado, considerando la vida útil de los productos B y C que se podrá utilizar (explicado previamente en el numeral 3.1.).**
- $XA2_{i,u,t}$: cantidad de producto A con vida útil restante 2 que se realizará utilizando producto i con vida útil u. El índice i podrá ser B o C, y u tendrá valor 1, 2 o 3 en el caso del producto B, y 1, 2, 3 o 4 en caso de ser el producto C, considerando que cada uno de estos casos es útil para producir producto A con vida útil inicial 2.
- $XA3_{i,u,t}$: cantidad de producto A con vida útil restante 3 que se realizará utilizando producto i con vida útil u. El índice i podrá ser B o C, y u tendrá valor 2 o 3 en el caso del producto B, y 2, 3 o 4 en caso de ser el producto C, considerando que cada uno de estos casos es útil para producir producto A con vida útil inicial 3.
- $XA4_{i,u,t}$: cantidad de producto A con vida útil restante 4 que se realizará utilizando producto i con vida útil u. El índice i podrá ser B o C, y u tendrá valor 3 en el caso del producto B, y 3 o 4 en caso de ser el producto C, considerando que cada uno de estos casos es útil para producir producto A con vida útil inicial 4.
- XB_t: cantidad del producto B a producir en el periodo t. Este producto como se explicó anteriormente, tendrá vida útil inicial 4.
- XC_t: cantidad del producto C a producir en el periodo t. Este producto como se explicó anteriormente, tendrá vida útil inicial 4.
- **Z_k: esta variable binaria toma el valor 1 de escogerse la máquina k para la producción de A y 0 en caso contrario, existiendo una única variable de este tipo con valor 1.**
- **$Y_{k,i,t}$: esta variable binaria toma el valor 1 de producirse producto i en el periodo t y 0 en caso contrario. En el caso de que i corresponda al producto A, esto aplicará únicamente para aquellas variables con el subíndice k correspondiente a la máquina seleccionada determinada por Z_k.**
- $V0_{i,t}$: cantidad de producto i con vida útil restante 0 que se deberá desechar al inicio del periodo t.
- $V1_{i,t}$: Inventario del producto i con vida útil restante 1 en el periodo t.
- $V2_{i,t}$: Inventario del producto i con vida útil restante 2 en el periodo t.
- $V3_{i,t}$: Inventario del producto i con vida útil restante 3 en el periodo t.
- $DsA1_t$: Cantidad de producto A con vida útil restante 1 utilizado para satisfacer la demanda en el periodo t.
- $DsA2_t$: Cantidad de producto A con vida útil restante 2 utilizado para satisfacer la demanda en el periodo t.
- $DsA3_t$: Cantidad de producto A con vida útil restante 3 utilizado para satisfacer la demanda en el periodo t.

- $Z2_{i,t}$: variable binaria que toma el valor 1 en caso de subcontratarse una cantidad igual o superior a $ns_{i,t}$ del producto i en el periodo t, y valor 0 en caso contrario. Únicamente aplica para i igual a A o B.
- $Z3_t$: variable binaria que toma el valor 1 en caso de aplicarse la promoción del descuento adicional en el periodo t para los productos subcontratados, y valor 0 en caso contrario.
- $S1_{i,w,t}$: cantidad de producto i subcontratado en el periodo t con el precio $ps1_{i,w,t}$.
- $S2_{i,,w,t}$: cantidad de producto i subcontratado en el periodo t con el precio $ps2_{i,w,t}$.

8.5. Función Objetivo

De forma similar a como se realizó para el modelo 3, se tiene la siguiente función objetivo que contempla el criterio de minimización de costes en el primer término y de maximización de la vida útil media del producto entregado a los clientes en el segundo término, a la cual al variar los valores del peso w entre 0 y 1 dará las distintas soluciones Pareto eficientes. Previo a su uso se deben establecer los valores ideales y anti-ideales con el procedimiento realizado anteriormente.

$$Min\ L = w\frac{C.Total - f^*{}_{C.\ Total}}{f_{*\,C.\ Total} - f^*{}_{C.\ Total}} + (1-w)\frac{f^*{}_{VUM} - VUM}{f^*{}_{VUM} - f_{*VUM}}$$

8.6. Función de coste total

El coste total de producción se calcula de forma similar al modelo 3 con la siguiente función, compuesta de la suma del coste por lanzamiento, producción, inventario, coste por productos desechados, y adicionalmente el coste por subcontratación. Nuevamente, se resalta en negrilla las diferencias respecto a la función del modelo 3 para involucrar el caso de las máquinas para la producción de producto A, y en azul para el caso de la subcontratación.

$$C.Total = C.Lanzamiento + C.Producción + C.Inventario + C.Desecho + C.Sub$$

Siendo:

$$C.Lanzamiento = \sum_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{NT-1}}\left[\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{NK}}(\boldsymbol{q_{k,A,t}Y_{k,A,t}}) + \sum_{\boldsymbol{i\in B,C}}(\boldsymbol{q_{1,i,t}Y_{k,i,t}})\right]$$

$$C.Producción = \sum_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{NT-1}}\left[\sum_{\boldsymbol{u=2}}^{\boldsymbol{4}}\left(\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{NK}}(\boldsymbol{p_{k,A,t}XAT_{k,u,t}})\right) + \boldsymbol{p_{1,B,t}XB_t} + \boldsymbol{p_{1,C,t}XC_t}\right]$$

$$C.Inventario = \sum_{i\in A,B,C}\left(\sum_{u=1}^{u=4}(\frac{1}{2}h_{i,0}so_{i,u})\right)$$
$$+\sum_{t=1}^{NT-1}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{\boldsymbol{u=2}}^{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{h_{A,t}}\left(\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{NK}}\boldsymbol{XAT_{k,v,t}}\right)+h_{B,t}XB_t+h_{C,t}XC_t\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{i\in A,B,C}(h_{i,t}(V3_{i,t}+V2_{i,t}+V1_{i,t}+\frac{1}{2}V0_{i,t})\right]$$
$$+\sum_{i\in A,B,C}(\frac{1}{2}h_{i,NT}(V3_{i,NT}+V2_{i,NT}+V1_{i,NT}+V0_{NT}))$$

$$C.Desecho = \sum_{t=1}^{NT-1}\left(\sum_{i\in A,B,C}(cd_{i,t}V0_{i,t})\right)+\sum_{i\in A,B,C}cd_{i,NT}(V3_{i,NT}+V2_{i,NT}+V1_{i,NT}+V0_{NT}))$$

$$C.Sub = \sum_{t=1}^{NT}\left[\sum_{i\in B,C}((ps1)_{i,t,1}S1_{i,t,1}+(ps2)_{i,t,1}S2_{i,t,1}+(ps1)_{i,t,2}S1_{i,t,2}+(ps1)_{i,t,2}S2_{i,t,2})\right]$$

A diferencia del modelo 3, para determinar el coste por lanzamiento, coste por producción y coste por inventario, se involucran todas las posibles variables Y y XAT considerando los posibles casos de máquinas k, teniendo en cuenta que posteriormente por medio de las restricciones se garantizará únicamente sean distintas a cero aquellas correspondientes a la máquina escogida. En el caso de los costes por subcontratación, estos se componen de sumar para cada periodo el coste por subcontratación del producto B y C. Dentro de la sumatoria, se suma el coste de los productos comprados con el precio ps1 y el precio ps2, tanto para el caso en el que no aplica la promoción (primeros dos términos) como para el caso en el que sí aplica (últimos dos términos). Es importante tener en cuenta que lo anterior se hace al conocerse que únicamente los primeros dos términos (sin promoción) o los últimos dos términos (con promoción) no tendrán valor nulo por medio de las restricciones que se explican posteriormente.

8.7. Función de vida útil media del producto entregado

Exactamente de la misma forma a como se explicó en el modelo 3 en el numeral 7.2.3, se calcula a vida útil media del producto entregado a los clientes.

$$VUM = \left(\sum_{t=1}^{NT}\mathrm{DsA1}_t+2\sum_{t=1}^{NT}\mathrm{DsA2}_t+3\sum_{t=1}^{NT}\mathrm{DsA3}_t\right)\Big/\sum_{t=1}^{NT}\mathrm{dA}_t$$

8.8. Restricciones

Se agregan nuevas restricciones lógicas para el caso de quererse escoger una máquina para la producción de producto A, otras restricciones lógicas para las condiciones de subcontratación de producto B y C, y se modifican las restricciones que se tenían en el modelo 3 de acuerdo a las decisiones a modelar en el modelo 4.

8.8.1. Condiciones lógicas para decidir la máquina del producto A

Se plantean restricciones con el fin de garantizar se cumplan con las condiciones lógicas al escoger una de las posibles máquinas para la producción del producto A. Es así que en la siguiente restricción se garantiza que únicamente se utilice una máquina al condicionar que la suma de las variables Z sea igual a 1.

$$\sum_{k}^{NK} \boldsymbol{Z_k} = \mathbf{1} \qquad [\boldsymbol{Rest.4.K.Z}]$$

Adicionalmente, para garantizar únicamente se pueda realizar el lanzamiento de la producción utilizando la máquina escogida para cada uno de los periodos t, se plantea la siguiente restricción, en la que la máquina escogida k, tendrá un valor Z_k igual a 1 y permitirá que se pueda lanzar la producción utilizándola, al poder tomar sus variables Y_k un valor de 0 o 1. Mientras que para el resto de máquinas su variable Z_k correspondiente tomará el valor de 0, por lo que no se podrá lanzar la producción con estas al quedar condicionada cada una de las variables Y_k correspondientes a ser 0.

$$\boldsymbol{Y_{k,A,t}} \leq \boldsymbol{Z_k} \qquad \forall\, \boldsymbol{k, t} \quad [\boldsymbol{Rest.4.K.Y}]$$

Finalmente, la condición que garantiza que el modelo produzca artículos A únicamente con la máquina escogida en caso de realizarse el lanzamiento, se desarrolla en conjunto con las restricciones de capacidad mínima y máxima de producción, en la restricción Rest.4.P.A que se explica posteriormente.

8.8.2. Condiciones lógicas para el producto B y C subcontratado

Teniendo en cuenta que para cada uno de los productos B y C existe la posibilidad de subcontratar, bajo las 3 condiciones enunciadas en el numeral 8.1, se realizan las restricciones que se muestran a continuación.

Con el fin de que se cumpla que únicamente las primeras ns_i unidades de producto i se compren al precio $ps1_i$ para cada uno de los periodos, se tienen las siguientes restricciones, las cuales aplican para las cantidades, con y sin el descuento adicional determinado por w.

$$S1_{i,t,w} \leq ns_{i,t} \qquad \forall w, t \;\&\; i \in \{B, C\} \;\; [Rest.4.L.1]$$

Para permitir se pueda comprar unidades al precio $ps2_i$ únicamente en caso de ya haberse comprado ns_i unidades al precio $ps1_i$, para cada producto i con o sin el descuento, se tiene las siguientes restricciones. En el lado derecho de la restricción se conoce que únicamente $S1_{i,1,t}$ o $S1_{i,2,t}$ será diferente a cero como se garantiza en las restricciones Rest.4.L.5 y Rest.4.L.6, por lo que en cualquiera de los dos casos al alcanzarse las $ns_{i,t}$ unidades, el lado derecho tendrá un valor de 1, lo que le dará la libertad a $Z2_{i,t}$ de ser 0 o 1. Mientras que en el caso en el que no se alcance este límite el lado derecho de la restricción, esta tomará un valor inferior a 1, y $Z2_{i,t}$ será obligado a ser 0. Finalmente, al ya conocer el valor de Z2, este se utiliza para limitar la cantidad de S2 a producir en Rest.4.L.3, siendo M un valor lo suficientemente grande para no limitar el valor superior de S2 en caso de ser Z2 igual a 1.

$$Z2_{i,t} \leq \frac{1}{ns_{i,t}}\left(S1_{i,1,t} + S1_{i,2,t}\right) \qquad \forall t \;\&\; i \in \{B,C\} \;\; [Rest.4.L.2]$$

$$S2_{i,w,t} \leq M\left(Z2_{i,t}\right) \qquad \forall t,w \;\&\; i \;\in \{B,C\} \;\; [Rest.4.L.3]$$

Adicionalmente, para representar la condición que dice que se podrá tener una promoción adicional en el periodo t en caso de comprarse por lo menos $n_{B,t}$ unidades de producto B y $n_{C,t}$ unidades de producto C, se presenta la siguiente restricción para cada uno de los periodos t. En esta la variable $Z3_t$ podrá tomar el valor 0 o 1 en caso de que tanto el producto B y C hayan llegado al nivel límite representado por $Z2_{B,t}$ y $Z2_{C,t}$, mientras que únicamente podrá tomar el valor 0 en caso contrario.

$$2Z3_t \;\leq Z2_{B,t} + Z2_{C,t} \qquad \forall t \;\; [Rest.4.L.4]$$

De tal forma se utilicen únicamente los precios con promoción en caso de que este aplique, y únicamente los precios sin promoción en caso de que no aplique, se realizan las siguientes restricciones. En estas en caso de no aplicar la promoción y ser Z3 igual a 0, solo se podrá usar el set de variables con w igual a 1, mientras que en el caso que si aplique la promoción y sea Z3=1, se podrán utilizar las variables con w igual a 2. Teniendo en cuenta que los precios que multiplican las variables S1 y S2 en la función de costes por subcontratación con w igual a 2 siempre son menores a los de w igual a 1, se puede garantizar que de aplicar la promoción y ser Z3 igual a 1, las variables S1 y S2 con w igual a 1 serán cero.

$$S1_{i,2,t} \leq M(Z3_t) \qquad \forall t \;\&\; i \;\in \{B,C\} \;\; [Rest.4.L.5]$$

$$S2_{i,2,t} \leq M(Z3_t) \qquad \forall t \;\&\; i \;\in \{B,C\} \;\; [Rest.4.L.6]$$

Finalmente, se crean las restricciones que limitan la cantidad de producto B y C a subcontratar teniendo en cuenta la condición 4 de la empresa subcontratista explicada en el numeral 8.1.

$$\sum_{w=1}^{2}\left(S1_{B,w,t} + S2_{B,w,t}\right) \leq CB_t \qquad \forall t \quad [Rest.4.L.7]$$

$$\sum_{w=1}^{2}\left(S1_{C,w,t} + S2_{C,w,t}\right) \leq CC_t \qquad \forall t \quad [Rest.4.L.8]$$

8.8.3. Continuidad y demanda del producto A

Tomando las restricciones de continuidad del modelo 3, se modifica el lado derecho de tal forma se sumen las variables correspondientes a cada tipo de máquina, las cuales por medio de las restricciones Rest.4.P.A, se garantiza que únicamente sean diferente a cero aquellas relacionadas con la máquina escogida.

$$V3_{A,t} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{NK}} \boldsymbol{XAT_{k,4,(t-1)}} \qquad \forall t \quad [Rest.4.C.A1]$$

$$V2_{A,t} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{NK}} \boldsymbol{XAT_{k,3,(t-1)}} \; + \; V3_{A,(t-1)} - DsA3_t \qquad \forall t \quad [Rest.4.C.A2]$$

$$V1_{A,t} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{NK}} \boldsymbol{XAT_{k,2,(t-1)}} \; + \; V2_{A,(t-1)} - DsA2_t \qquad \forall t \quad [Rest.4.C.A3]$$

$$V0_{A,t} = \qquad V1_{A,(t-1)} - DsA1_t \qquad \forall t \quad [Rest.4,C.A4]$$

En el caso particular de t=1 se reemplazará la suma del producto fabricado y del producto que está en inventario en cada restricción, por su correspondiente stock inicial. De esta forma la sumatoria de las variables $XAT_{k,4}$ será reemplazada por $so_{A,4}$, la suma de $XAT_{k,3}$ y $V3_A$ por $so_{A,3}$, la suma de $XAT_{k,2}$ y $V2_A$ por $so_{A,2}$, y finalmente $V1_A$ por $so_{A,1}$,

Adicionalmente, para garantizar que se cumpla con la demanda total del producto A en el periodo t se deberá garantizar que la suma de los aportes de producto A de cada vida útil la igualen, teniéndose la siguiente restricción que es igual a la que se tenía en el modelo 3.

$$dA_t = DsA3_t + DsA2_t + DsA1_t \qquad \forall t \quad [Rest.4.D.A]$$

8.8.4. Continuidad y demanda producto B

La restricción de continuidad del producto B se modifica para aquella que calcula el inventario de producto con vida útil restante 2 en el periodo t Rest.2.C.B2. En esta restricción en la que se toma el producto con vida útil restante 3 y se le resta su aporte a la elaboración de producto A en el periodo t, se le suma la cantidad de producto subcontratado que es de esa misma vida útil restante de tal forma se pueda utilizar en conjunto con el producto existente en inventario de este tipo. Es así que se suman las 4 variables correspondiente, de las cuales únicamente las primeras dos o las últimas dos serán distintas a cero dependiendo si aplica o no la promoción, como se garantiza en Rest.4.L.4 y Rest.4.L.5 anteriormente explicado.

$$V3_{B,t} = XB_{(t-1)} \qquad \forall t \quad [Rest.4.C.B1]$$

$$V2_{B,t} = V3_{B,(t-1)} + \left(\boldsymbol{S1_{B,t,1}} + \boldsymbol{S2_{B,t,1}} + \boldsymbol{S1_{B,t,2}} + \boldsymbol{S2_{B,t,2}}\right) - \alpha A_B\left(XA4_{B,3,t} + XA3_{B,3,t} + XA2_{B,3,t}\right) \quad \forall t \quad [Rest.4.C.B2]$$

$$V1_{B,t} = V2_{B,(t-1)} - \alpha A_B\left(XA3_{B,2,t} + XA2_{B,2,t}\right) \quad \forall t \quad [Rest.4.C.B3]$$

$$V0_{B,t} = V1_{B,(t-1)} - \alpha A_B\left(XA2_{B,1,t}\right) \quad \forall t \quad [Rest.4.C.B4]$$

En el caso de t=1 se debe reemplazar en las restricciones $XB_{(t-1)}$ por el stock inicial de producto B con vida útil 4 ($so_{B,4}$), y de forma similar $V3_{B,(t-1)}$ por $so_{B,3}$, $V2_{B,(t-1)}$ por $so_{B,2}$ y $V1_{B,(t-1)}$ por $so_{B,1}$.

Adicionalmente, para garantizar que el producto A elaborado se componga en su totalidad de las distintas alternativas de producto B, se deberán satisfacer las siguientes restricciones, las cuales se basan en tomar aquellas del modelo 3, y cambiar el lado izquierdo de la restricción por la suma de las variables correspondientes a cada alternativa de máquina a escoger, entre las cuales se conoce que únicamente una podrá ser distinta a cero en cada uno de los casos.

$$\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{NK}} \boldsymbol{XAT_{k,4,t}} = XA4_{B,3,t} \qquad \forall t \quad [Rest.4.D.B1]$$

$$\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{NK}} \boldsymbol{XAT_{k,3,t}} = XA3_{B,3,t} + XA3_{B,2,t} \qquad \forall t \quad [Rest.4.D.B2]$$

$$\sum_{k=1}^{NK} \boldsymbol{XAT_{k,2,t}} = XA2_{B,3,t} + XA2_{B,2,t} + XA2_{B,1,t} \quad \forall t \quad [Rest.4.D.B3]$$

8.8.5. Continuidad y demanda producto C

De forma similar a como se hizo para el producto B se toma como partida las restricciones del modelo 3 y se modifica Rest.2.C.C1 que calcula el inventario de producto con vida útil restante 3 en el periodo t, de tal forma considere tanto el producto con vida útil 4 que se fabricó en ese periodo, como el producto subcontratado. Al poder ser únicamente las primeras dos o las últimas dos variables del producto subcontratado distintas de cero (dependiendo si aplica o no la promoción), se pueden sumar los cuatro términos en la restricción.

$$V3_{C,t} = XC_{(t-1)} + \left(\boldsymbol{S1_{C,t,1}} + \boldsymbol{S2_{C,t,1}} + \boldsymbol{S1_{C,t,2}} + \boldsymbol{S2_{C,t,2}}\right) - \alpha A_C\left(XA4_{C,4,t} + XA3_{C,4,t} + XA2_{C,4,t}\right) \quad \forall t \quad [Rest.4.C.C1]$$

$$V2_{C,t} = V3_{C,(t-1)} - \alpha A_C\left(XA4_{C,3,t} + XA3_{C,3,t} + XA2_{C,3,t}\right) \quad \forall t \quad [Rest.4.C.C2]$$

$$V1_{C,t} = V2_{C,(t-1)} - \alpha A_C\left(XA3_{C,2,t} + XA2_{C,2,t}\right) \quad \forall t \quad [Rest.4.C.C3]$$

$$V0_{C,t} = V1_{C,(t-1)} - \alpha A_C\left(XA2_{C,1,t}\right) \quad \forall t \quad [Rest.2.C.C4]$$

En el caso de t=1 se debe reemplazar en las restricciones $XC_{(t-1)}$ por el stock inicial de producto C con vida útil 4 ($so_{C,4}$), y de forma similar $V3_{C,(t-1)}$ por $so_{C,3}$, $V2_{C,(t-1)}$ por $so_{C,2}$ y $V1_{C,(t-1)}$ por $so_{C,1}$.

Adicionalmente, para garantizar que el producto A elaborado se componga en su totalidad de las distintas alternativas de producto C, se modifican las restricciones que se tenían en el modelo 3 al cambiar el lado izquierdo por la suma de las variables correspondientes a cada posibilidad de máquina a escoger, de las cuales únicamente una podrá ser distinta de cero.

$$\sum_{k=1}^{NK} \boldsymbol{XAT_{k,4,t}} = XA4_{C,4,t} + XA4_{C,3,t} \quad \forall t \quad [Rest.4.D.C1]$$

$$\sum_{k=1}^{NK} \boldsymbol{XAT_{k,3,t}} = XA3_{C,4,t} + XA3_{C,3,t} + XA3_{C,2,t} \quad \forall t \quad [Rest.4.D.C2]$$

$$\sum_{k=1}^{NK} \boldsymbol{XAT_{k,2,t}} = XA2_{C,4,t} + XA2_{C,3,t} + XA2_{C,2,t} + XA2_{C,1,t} \quad \forall t \quad [Rest.4.D.C3]$$

8.8.6. Mínima y máxima producción

De tal forma cada producto en caso de su lanzamiento en el periodo t se realice entre sus límites de capacidad mínima y máxima, se plantean las siguientes restricciones, las cuales a la vez en la restricción garantizan únicamente se realice producto con la máquina k escogida (Rest.4.P.A), teniendo en cuenta la restricción lógica Rest.4.K.Y hecha anteriormente.

$$\boldsymbol{m_{k,A,t}Y_{k,A,t}} \leq \sum_{u=2}^{4} \boldsymbol{XAT_{k,u,t}} \leq \boldsymbol{C_{k,A,t}Y_{k,A,t}} \qquad \forall \boldsymbol{k}, t \quad [Rest.4.P.A]$$

$$\boldsymbol{m_{1,B,t}Y_{1,B,t}} \leq \boldsymbol{XB_t} \leq \boldsymbol{C_{1,B,t}Y_{1,B,t}} \qquad \forall t \quad [Rest.4.P.B]$$

$$\boldsymbol{m_{1,C,t}Y_{1,C,t}} \leq \boldsymbol{XC_t} \leq \boldsymbol{C_{1,C,t}Y_{1,C,t}} \qquad \forall t \quad [Rest.4.P.C]$$

8.8.7. Máximo inventario

Exactamente de la misma forma como se utilizó en el modelo 3, se plantea la restricción que limita la capacidad de inventario para cada uno de los productos en cada uno de los periodos de tiempo t.

$$\sum_{k=1}^{NK} \left(\boldsymbol{XAT_{k,2,t}} + \boldsymbol{XAT_{k,3,t}} + \boldsymbol{XAT_{k,4,t}}\right) + V3_{A,t} + V2_{A,t} + V1_{A,t} \leq Cs_{A,t} \quad \forall t \quad [Rest.4.I.A]$$

$$XB_t + V3_{B,t} + V2_{B,t} + V1_{B,t} \leq Cs_{B,t} \qquad \forall t \quad [Rest.4.I.B]$$

$$XC_t + V3_{C,t} + V2_{C,t} + V1_{C,t} \leq Cs_{C,t} \qquad \forall t \quad [Rest.4.I.C]$$

8.8.8. Naturaleza de las variables

Se garantiza las variables añadidas al modelo cumplan con su naturaleza, por lo que las variables que miden cantidades como en el caso de producto A fabricado en cada máquina y la cantidad de producto subcontratado habrán de ser positivos, mientras que las variables de decisión para la máquina del producto A a escoger, los periodos con lanzamiento de la producción, y las variables que indican si se puede comprar producto subcontratado al precio ps2, y si aplica la promoción.

$$\boldsymbol{XAT_{k,v,t}}, \boldsymbol{S1_{i,t,w}}, \boldsymbol{S2_{i,t,w}} \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{k}, \forall \boldsymbol{i}, \forall t, \forall \boldsymbol{w}, u \in (2,3,4) \qquad [Rest.4.N1]$$

$$XA2_{B,u,t}, XA3_{B,u,t}, XA4_{B,u,t} \geq 0 \qquad \forall t, u \in (1,2,3) \qquad [Rest.2.N2]$$

$$XA2_{C,u,t}, XA3_{C,u,t}, XA4_{C,u,t} \geq 0 \qquad \forall t, u \in (1,2,3,4) \qquad [Rest.2.N3]$$

$$XB_t, XC_t, V0_{i,t}, V1_{i,t}, V2_{i,t}, V3_{i,t}, DsA1_t, DsA2_t, DsA3_t \geq 0 \qquad \forall i, t \qquad [Rest.2.N3]$$

$$\boldsymbol{Z_k}, \boldsymbol{Y_{k,i,t}}, Z2_{i,t}, Z3_t \in (0,1) \qquad \forall\, \boldsymbol{k}, i, t \qquad [Rest.4.N3]$$

8.9. Ejemplo de implementación del modelo utilizando GAMS/CPLEX

De forma similar a como se hizo en el modelo 3, se desarrolla el modelo utilizando GAMS/CPLEX, para crear las soluciones Pareto eficientes a partir de las cuales se podrá escoger el plan de producción a implementar.

8.9.1. Parámetros del ejemplo

En este ejemplo en el que se utiliza la misma demanda que en el ejemplo del modelo 3, cambian los parámetros al tener el producto A una fila por cada alternativa de máquina (representada con el índice k), las cuales en este caso varían en coste unitario de producción, coste fijo por lanzamiento, y capacidad máxima y mínima de producción. Adicionalmente, se presenta una columna adicional respecto a los modelos anteriores, en la que se muestra el límite (ns) respecto al cual varían los precios de subcontratación para los productos B y C. Los distintos precios de subcontratación para los productos B y C dependiendo si superan el límite establecido, y en caso de aplicar o no la promoción según la cantidad, se observan en la tabla 23.

Tabla 21 Demanda del producto A en el ejemplo del modelo 4.

Periodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Demanda A	0	0	0	30	43	73	65	83	24	23	28	76	65	31	22

Tabla 22 Índices y parámetros utilizados para el ejemplo del modelo 4.

i	k	p(t)	q(t)	h(t)	C(t)	m(t)	so (v)	Cs(t)	cd(t)	alfaA(t)	ns(t)
A	1	50	2500	10	140	60	5	300	10	N/A	N/A
A	2	51	2000	10	110	0	5	300	10	N/A	N/A
B	N/A	40	1000	5	400	40	10	600	10	2	10
C	N/A	10	1000	2	800	20	20	1000	5	5	20

Tabla 23 Costes de subcontratación producto B y C para el ejemplo del modelo 4.

		Sin promoción	Con promoción
Producto B	Precio 1 (u.m.)	70	63.0
	Precio 2 (u.m.)	64	57.6
Producto C	Precio 1 (u.m.)	15	13.5
	Precio 2 (u.m.)	13	11.7
	Descuento de la promoción		10%

8.9.2. Determinación parámetros para la función objetivo

De forma similar a como se realizó en el modelo 3, se obtienen los siguientes valores ideales y anti-ideales de coste total y vida útil media del producto entregado a los clientes, y así se completa la siguiente matriz de pagos.

Tabla 24 Matriz de pagos ejemplo del modelo 4.

	Coste Total (u.m.)	VUM (periodos)
Valor ideal (f^*)	140,263.7	2.094
Valor anti-ideal (f_*)	268,488.0	3.000

Utilizando estos valores obtenidos de optimizar de forma independiente cada uno de los criterios, se procede a formular la función objetivo con la cual se obtendrá el conjunto eficiente de soluciones para la elaboración de la frontera de Pareto, la cual finalmente es:

$$Min\ L = w\frac{C.Total - 140{,}263.7}{268{,}488.0\ - 140{,}263.7} + (1-w)\frac{3 - VUM}{3 - 2.094}$$

8.9.3. Implementación del modelo en GAMS/CPLEX

Conociendo cada una de los índices, parámetros, variables decisión, restricciones y fórmulas de cada uno de los criterios explicados anteriormente, y utilizando los parámetros creados para el ejemplo, se procede a implementar el modelo en GAMS y solucionarlo mediante CPLEX. De esta forma en la ilustración 30 y 31 se muestra la declaración de los índices y parámetros, en la ilustración 32 la declaración de las variables decisión, seguido por la función objetivo y cada una de las restricciones de la ilustración 33 a las 38, la resolución del modelo iterando el valor del peso w en la función objetivo para obtener la frontera de Pareto en la ilustración 39, y la exportación de los datos en la ilustración 40.

```
Set t periodos /1*15/;
Parameter NT tiempo total;
*Da el número de elementos en el set;
NT=card(t);

Set i identidad del producto /A, B, C/;
Set u vida útil restante del producto /1*4/;

*Agregado al modelo 3
Set k máquina a escoger para A /1*2/;
Set w opción de promoción /1*2/;

Parameter NK maquinas totales;
NK=card(k);
*--------------------

Parameters dA(t) demanda prevista de producto A en el periodo t
           /1=0,2=0,3=0,4=30,5=43,6=73,7=65,8=83,9=24,
           10=23,11=28,12=76,13=65,14=31,15=22/
*Agregado al modelo 3
           p(k,i,t) coste unitario de producir i en el periodo t con la maq k
           /1.A.1*15=50,2.A.1*15=51, 1*2.B.1*15=40, 1*2.C.1*15=10 /
           q(k,i,t) coste de lanzamiento para producto i en el periodo t con la maq k
           /1.A.1*15=2500,2.A.1*15=2000,1*2.B.1*15=1000, 1*2.C.1*15=1000/
*--------------------
           h(i,t) coste unitario de almacenamiento de producto i en el periodo t
           /A.1*15=10, B.1*15=5, C.1*15=2/
*Agregado al modelo 3
           C(k,i,t) capacidad productiva para i en el periodo t con la maq k
           /1.A.1*15=140,2.A.1*15=110, 1*2.B.1*15=400, 1*2.C.1*15=800/
           m(k,i,t) minimo a producir de i en el periodo t de lanzarse
           /1.A.1*15=60,2.A.1*15=0,1*2.B.1*15=40, 1*2.C.1*15=20/
*--------------------
```

Ilustración 30 Declaración de índices y parámetros del modelo 4

```
           so(i,u) stock inicial para V4 V3 V2 V1
           /A.1*4=5,B.1*4=10, C.1*4=20/
           Cs(i,t) máximo inventario
           /A.1*15=300,B.1*15=600, C.1*15=1000/
           cd(i,t) coste de desechar V0
           /A.1*15=10,B.1*15=10, C.1*15=5/
           alfaA(i,t) cantidad de producto i para hacer un producto A
           /B.1*15=2, C.1*15=5/
*Agregado al modelo 3
           ns(i,t) límite para pasar al segundo precio del producto i en t
           /B.1*15=10, C.1*15=20/
           ps1(i,w,t) primer precio para el producto con y sin promocion
           /B.1.1*15=70, B.2.1*15=63, C.1.1*15=15, C.2.1*15=13.5/
           ps2(i,w,t) primer precio para el producto con y sin promocion
           /B.1.1*15=64, B.2.1*15=57.6, C.1.1*15=13, C.2.1*15=11.7/
           CB(t) cantidad máxima de producto B a subcontratar en periodo t
           /1*15=100/
           CC(t) cantidad máxima de producto C a subcontratar en periodo t
           /1*15=200/
*--------------------
   ;
Parameter dtotal demanda total a satisfacer ;
           dtotal= sum(t, dA(t)) ;
Parameter pond factor de ponderacion a cambiar para realizar frontera de Pareto;
```

Ilustración 31 Continuación en la declaración de parámetros del modelo 4.

```
Variables XAT(k,u,t) cantidad a producir de A con vida útil u en el periodo t con la maq k
*--------------------
          XA2(i,u,t) cantidad de i con v.u. u para producir A con v.u. 2 en t
          XA3(i,u,t) cantidad de i con v.u. u para producir A con v.u. 2 en t
          XA4(i,u,t) cantidad de i con v.u. u para producir A con v.u. 2 en t
          XB(t) cantidad de B a producir en t
          XC(t) cantidad de C a producir en t
*Agregado al modelo 3
          Z(k) toma valor 1 en caso de escogerse la máquina k y 0 en caso contrario
          Y(k,i,t) determina si se produce o no el producto i en el periodo t de usarse la maq k
*--------------------
          V3(i,t) inventario de producto i con vida útil restante 3 al inicio del periodo t
          V2(i,t) inventario de producto i con vida útil restante 2 al inicio del periodo t
          V1(i,t) inventario de producto i con vida útil restante 1 al inicio del periodo t
          V0(i,t) producto i a desechar con vida útil restante 0 al inicio del periodo t
          DsA3(t) demanda de A cubierta por el producto con v.u. 3 del periodo anterior
          DsA2(t) demanda de A cubierta por el producto con v.u. 2 del periodo anterior
          DsA1(t) demanda de A cubierta por el producto con v.u. 1 del periodo anterior
          CLanzamiento
          CProduccion
          CInventario
          CDesecho
          Total  total a minimizar
          VUmedia vida útil media del producto entregado
          L variable a minimizar en caso multiobjetivo
*Agregado al modelo 3
          Z2(i,t) var binaria en caso de alcanzar limite ns
          Z3(t) var binaria en caso de aplicar la promoción
          S1(i,w,t) cantidad de producto subcontratado con precio ps1
          S2(i,w,t) cantidad de producto subcontratado con precio ps2
          CSub coste por subcontratación
*--------------------
;

*Agregado al modelo 3
Binary variable Z,Y,Z2,Z3;
Positive variable XAT,XA2,XA3,XA4,XB,XC,V3,V2,V1,V0,DsA3,DsA2,DsA1,S1,S2;
*--------------------
```

Ilustración 32 Declaración de las variables del modelo 4.

```
*Ponderación de los objetivos, variable a minimizar
Equation l_min;
         l_min..L =e=pond*(Total-140263.7)/(268488-140263.7)+(1-pond)*(3-VUmedia)/(3-2.09»
4);

*Vida útil media del producto entregado al cliente, a minimizar
Equation vu_media;
         vu_media..VUmedia =e= (1/dtotal)*(1*sum(t,DsA1(t))+2*sum(t,DsA2(t))+3*sum(t,DsA3»
(t)));
*Costes función objetivo
Equation c_lanzamiento ;
         c_lanzamiento..CLanzamiento =e=  sum((t)$(ord(t)<=NT-1), sum(k,q(k,'A',t)*Y(k,'A»
',t))
                                    + q('1','B',t)*Y('1','B',t)+ q('1','C',t)*Y('1','C',»
t));

Equation c_produccion ;
         c_produccion..CProduccion =e= sum((t)$(ord(t)<=NT-1), sum((u,k),p(k,'A',t)*XAT(k»
,u,t))
                                  +p('1','B',t)*XB(t)+ p('1','C',t)*XC(t));

Equation c_inventario ;
         c_inventario..CInventario =e= sum((i,u),(1/2)*h(i,'1')*so(i,u))
                        +sum((t)$(ord(t)<=NT-1),
                         (1/2)*( sum(u,h('A',t)*sum(k,XAT(k,u,t)) )+h('B',t)*XB(t)+h('C'»
,t)*XC(t))
                         +sum(i,h(i,t)*(V3(i,t)+V2(i,t)+V1(i,t)+(1/2)*V0(i,t))))
                        +sum(i,h(i,'15')*(V3(i,'15')+V2(i,'15')+V1(i,'15')+(1/2)*V0(i,'1»
5'))) ;

Equation c_desecho ;
         c_desecho..CDesecho =e= sum((t)$(ord(t)<=NT-1), sum(i,cd(i,t)*V0(i,t)))
                            +sum(i,cd(i,'15')*(V3(i,'15')+V2(i,'15')+V1(i,'15')+V0(i,'15»
')));
Equation c_sub;
         c_sub..CSub =e= sum((t,i,w)$(ord(i)>=2),ps1(i,w,t)*S1(i,w,t)+ps2(i,w,t)*S2(i,w,t»
))

Equation costo costo total FO;
         costo..Total =e= CLanzamiento + CProduccion + CInventario + CDesecho + CSub;

```

Ilustración 33 Declaración de la función objetivo y de las funciones que componen el criterio de coste total, y la vida útil media de los productos para el modelo 4.

```
*RESTRICCIONES LÓGICAS MÁQUINAS A
Equation kz Rest.4.K.Z;
         kz..sum(k,Z(k)) =e= 1;

Equation ky Rest.4.K.Y;
         ky(k,t)..Y(k,'A',t) =l= Z(k);

*RESTRICCIONES LÓGICAS B y C
Equation l1 Rest.4.L.1;
         l1(w,t,i)$(ord(i)>=2)..S1(i,w,t) =l= ns(i,t);
Equation l2 Rest.4.L.2;
         l2(w,t,i)$(ord(i)>=2)..Z2(i,t) =l=(1/ns(i,t))*(S1(i,'1',t)+S1(i,'2',t));
Equation l3 Rest.4.L.3;
         l3(i,w,t)$(ord(i)>=2).. S2(i,w,t) =l= 1000*Z2(i,t);
Equation l4 Rest.4.L.4;
         l4(t).. 2*Z3(t)=l= Z2('B',t)+Z2('C',t);
Equation l5 Rest.4.L.5;
         l5(i,t)$(ord(i)>=2)..S1(i,'2',t) =l= 1000*Z3(t);
Equation l6 Rest.4.L.6;
         l6(i,t)$(ord(i)>=2)..S2(i,'2',t) =l= 1000*Z3(t);
Equation l7 Rest.4.L.7;
         l7(t)..sum(w,S1('B',w,t)+S2('B',w,t)) =l= CB(t);
Equation l8 Rest.4.L.8;
         l8(t)..sum(w,S1('C',w,t)+S2('C',w,t)) =l= CC(t);
```

Ilustración 34 Declaración de restricciones lógicas para la selección de la máquina del producto A, y las condiciones de subcontratación del producto B y C para el modelo 4.

```
*RESTRICCIONES DE CONTINUIDAD
*Restricciones A
Equation continuidad_CA1_in Rest.4.C.A1 inicial ;
         continuidad_CA1_in..V3('A','1') =e= so('A','4');
*Agregado al modelo 3
Equation continuidad_CA1 Rest.4.C.A1;
         continuidad_CA1(t)$(ord(t)>1)..V3('A',t) =e= sum(k,XAT(k,'4',t-1));
Equation continuidad_CA2_in Rest.4.C.A2 inicial;
         continuidad_CA2_in..V2('A','1') =e= so('A','3')-DsA3('1');
*Agregado al modelo 3
Equation continuidad_CA2 Rest.4.C.A2;
         continuidad_CA2(t)$(ord(t)>1)..V2('A',t) =e= sum(k,XAT(k,'3',t-1))+V3('A',t-1)-DsA3(t);

Equation continuidad_CA3_in Rest.4.C.A3 inicial;
         continuidad_CA3_in..V1('A','1') =e= so('A','2')-DsA2('1');
*Agregado al modelo 3
Equation continuidad_CA3 Rest.4.C.A3;
         continuidad_CA3(t)$(ord(t)>1)..V1('A',t) =e= sum(k,XAT(k,'2',t-1))+V2('A',t-1)-DsA2(t);

Equation continuidad_CA4_in Rest.4.C.A4 inicial;
         continuidad_CA4_in..V0('A','1') =e= so('A','1')-DsA1('1');
Equation continuidad_CA4 Rest.4.C.A4;
         continuidad_CA4(t)$(ord(t)>1)..V0('A',t) =e= V1('A',t-1)-DsA1(t);

Equation demandatotal Rest.4.D.A;
         demandatotal(t)..dA(t)=e= DsA3(t)+DsA2(t)+DsA1(t);
```

Ilustración 35 Restricciones de continuidad y demanda del producto A en el modelo 4.

```
*Restricciones B
Equation continuidad_CB1_in Rest.4.C.B1 inicial ;
         continuidad_CB1_in..V3('B','1') =e= so('B','4');
Equation continuidad_CB1 Rest.4.C.B1;
         continuidad_CB1(t)$(ord(t)>1)..V3('B',t) =e= XB(t-1);
*Agregado al modelo 3
Equation continuidad_CB2_in Rest.4.C.B2 inicial ;
         continuidad_CB2_in..V2('B','1') =e= so('B','3')
                        -alfaA('B','1')*(XA4('B','3','1')+XA3('B','3','1')+XA2('B','3','»
1'));
Equation continuidad_CB2 Rest.4.C.B2;
         continuidad_CB2(t)$(ord(t)>1)..V2('B',t) =e= V3('B',t-1) +sum(w,S1('B',w,t)+ S2(»
'B',w,t))
                        -alfaA('B',t)*(XA4('B','3',t)+XA3('B','3',t)+XA2('B','3',t));

Equation continuidad_CB3_in Rest.4.C.B3 inicial ;
         continuidad_CB3_in..V1('B','1') =e= so('B','2')-alfaA('B','1')*(XA3('B','2','1')»
+XA2('B','2','1'));
Equation continuidad_CB3 Rest.4.C.B3;
         continuidad_CB3(t)$(ord(t)>1)..V1('B',t) =e= V2('B',t-1)-alfaA('B',t)*(XA3('B','»
2',t)+XA2('B','2',t));

Equation continuidad_CB4_in Rest.4.C.B4 inicial ;
         continuidad_CB4_in..V0('B','1') =e= so('B','1')-alfaA('B','1')*XA2('B','1','1');
Equation continuidad_CB4 Rest.4.C.B4;
         continuidad_CB4(t)$(ord(t)>1)..V0('B',t) =e= V1('B',t-1)-alfaA('B',t)*XA2('B','1»
',t);

Equation demanda_DB1 Rest.4.D.B1 ;
         demanda_DB1(t)..sum(k,XAT(k,'4',t)) =e= XA4('B','3',t);

Equation demanda_DB2 Rest.4.D.B2 ;
         demanda_DB2(t)..sum(k,XAT(k,'3',t)) =e= XA3('B','3',t)+XA3('B','2',t);

Equation demanda_DB3 Rest.4.D.B3 ;
         demanda_DB3(t)..sum(k,XAT(k,'2',t)) =e= XA2('B','3',t)+XA2('B','2',t)+XA2('B','1»
',t);

```

Ilustración 36 Restricciones de continuidad y demanda del producto B para elaborar producto A en el modelo 4.

```
*Restricciones C
Equation continuidad_CC1_in Rest.4.C.C1 inicial ;
         continuidad_CC1_in..V3('C','1') =e=
so('C','4')-alfaA('C','1')*(XA4('C','4','1')+XA3('C','4','1')+XA2('C','4','1'));
*Agregado al modelo 3
Equation continuidad_CC1 Rest.4.C.C1;
         continuidad_CC1(t)$(ord(t)>1)..V3('C',t) =e= XC(t-1) +sum(w,S1('C',w,t)+ S2('C',»
w,t))
                                -alfaA('C',t)*(XA4('C','4',t)+XA3('C','4',t)+XA2('C','4'»
,t));
Equation continuidad_CC2_in Rest.4.C.C2 inicial ;
         continuidad_CC2_in..V2('C','1') =e=
so('C','3')-alfaA('C','1')*(XA4('C','3','1')+XA3('C','3','1')+XA2('C','3','1'));
Equation continuidad_CC2 Rest.4.C.C2;
         continuidad_CC2(t)$(ord(t)>1)..V2('C',t) =e=
V3('C',t-1)-alfaA('C',t)*(XA4('C','3',t)+XA3('C','3',t)+XA2('C','3',t));
Equation continuidad_CC3_in Rest.4.C.C3 inicial ;
         continuidad_CC3_in..V1('C','1') =e=
so('C','2')-alfaA('C','1')*(XA3('C','2','1')+XA2('C','2','1'));
Equation continuidad_CC3 Rest.4.C.C3;
         continuidad_CC3(t)$(ord(t)>1)..V1('C',t) =e=
V2('C',t-1)-alfaA('C',t)*(XA3('C','2',t)+XA2('C','2',t));
Equation continuidad_CC4_in Rest.4.C.C4 inicial ;
         continuidad_CC4_in..V0('C','1') =e=
so('C','1')-alfaA('C','1')*XA2('C','1','1');
Equation continuidad_CC4 Rest.4.C.C4;
         continuidad_CC4(t)$(ord(t)>1)..V0('C',t) =e=
V1('C',t-1)-alfaA('C',t)*XA2('C','1',t);
Equation demanda_DC1 Rest.4.D.C1 ;
         demanda_DC1(t)..sum(k,XAT(k,'4',t)) =e= XA4('C','4',t)+ XA4('C','3',t);

Equation demanda_DC2 Rest.4.D.C2 ;
         demanda_DC2(t)..sum(k,XAT(k,'3',t)) =e= XA3('C','4',t)+ XA3('C','3',t)+XA3('C','»
2',t);
Equation demanda_DC3 Rest.4.D.C3 ;
         demanda_DC3(t)..sum(k,XAT(k,'2',t)) =e= XA2('C','4',t)+ XA2('C','3',t)+XA2('C','»
2',t)+XA2('C','1',t);
```

Ilustración 37 Restricciones de continuidad y demanda del producto C para la elaboración del producto A en el modelo 4.

```
*Mínima y máxima producción
* Producto A
Equation min_prodA Rest.4.P.A izquierda;
         min_prodA(k,t)..sum(u,XAT(k,u,t)) =g= m(k,'A',t)*Y(k,'A',t);

Equation max_prodA Rest.4.P.A derecha;
         max_prodA(k,t)..sum(u,XAT(k,u,t)) =l= C(k,'A',t)*Y(k,'A',t);
* Producto B
Equation min_prodB Rest.4.P.B izquierda;
         min_prodB(t)..XB(t) =g= m('1','B',t)*Y('1','B',t);

Equation max_prodB Rest.4.P.B derecha;
         max_prodB(t)..XB(t) =l= C('1','B',t)*Y('1','B',t);
* Producto C
Equation min_prodC Rest.4.P.C izquierda;
         min_prodC(t)..XC(t) =g= m('1','C',t)*Y('1','C',t);

Equation max_prodC Rest.4.P.B derecha;
         max_prodC(t)..XC(t) =l= C('1','C',t)*Y('1','C',t);

*Inventario máximo
Equation max_stockA Rest.4.I.A;
         max_stockA(t)..sum(k,XAT(k,'2',t)+XAT(k,'3',t)+XAT(k,'4',t))+V3('A',t)+V2('A',t)»
+V1('A',t) =l= Cs('A',t);

Equation max_stockB Rest.4.I.B;
         max_stockB(t)..XB(t)+V3('B',t)+V2('B',t)+V1('B',t) =l= Cs('B',t);

Equation max_stockC Rest.4.I.C;
         max_stockC(t)..XC(t)+V3('C',t)+V2('C',t)+V1('C',t) =l= Cs('C',t);
```

Ilustración 38 Restricciones de mínima y máxima producción, y capacidad de inventario en el modelo 4.

```
Set j /1*21/;
Parameter ponderaciones(j) /1=0,2=0.05,3=0.1,4=0.15,5=0.2,6=0.25,7=0.3,8=0.35,9=0.4,10=0.»
45,11=0.5,
                            12=0.55,13=0.6,14=0.65,15=0.7,16=0.75,17=0.8,18=0.85,19=0.9,20=0»
.95,21=1/

variable costetotal(j);
variable vidautilmedia(j);
variable Zvalor1(j);
variable Zvalor2(j);
variable Z2valorB(j,t);
variable Z2valorC(j,t);
variable Z3valor(j,t);

Loop (j,
  pond=ponderaciones(j);
  Solve modelo1 using mip minimizing L;
  costetotal.l(j)=Total.l;
  vidautilmedia.l(j)=VUmedia.l;
  Zvalor1.l(j)=Z.l('1');
  Zvalor2.l(j)=Z.l('2');
  Z2valorB.l(j,t)=Z2.l('B',t);
  Z2valorC.l(j,t)=Z2.l('C',t);
  Z3valor.l(j,t)=Z3.l(t);
) ;
display costetotal.l,vidautilmedia.l,ponderaciones,Zvalor1.l,Zvalor2.l;
```

Ilustración 39 Resolución del modelo MIP minimizando la función objetivo variando su peso w, para crear la frontera de Pareto.

```
Z.l(k)$(Z.l(k)=0)=eps ;
XAT.l(k,u,t)$(XAT.l(k,'1',t)=0)=eps  ;
XA2.l(i,u,t)$(XA2.l(i,u,t)=0)=eps  ;
XA3.l(i,u,t)$(XA3.l(i,u,t)=0)=eps  ;
XA4.l(i,u,t)$(XA4.l(i,u,t)=0)=eps  ;
XB.l(t)$(XB.l(t)=0)=eps  ;
XC.l(t)$(XC.l(t)=0)=eps  ;
V3.l(i,t)$(V3.l(i,t)=0)=eps  ;
V2.l(i,t)$(V2.l(i,t)=0)=eps  ;
V1.l(i,t)$(V1.l(i,t)=0)=eps  ;
V0.l(i,t)$(V0.l(i,t)=0)=eps  ;
DsA3.l(t)$(DsA3.l(t)=0)=eps  ;
DsA2.l(t)$(DsA2.l(t)=0)=eps  ;
DsA1.l(t)$(DsA1.l(t)=0)=eps  ;
CLanzamiento.l$(CLanzamiento.l=0)=eps  ;
CProduccion.l$(CProduccion.l=0)=eps  ;
CInventario.l$(CInventario.l=0)=eps  ;
CDesecho.l$(CDesecho.l=0)=eps  ;
Total.l$(Total.l=0)=eps  ;
dA(t)$(dA(t)=0)=eps  ;
p(k,i,t)$(p(k,i,t)=0)=eps  ;
q(k,i,t)$(q(k,i,t)=0)=eps  ;
h(i,t)$(h(i,t)=0)=eps  ;
C(k,i,t)$(C(k,i,t)=0)=eps  ;
m(k,i,t)$(m(k,i,t)=0)=eps  ;
so(i,u)$(so(i,u)=0)=eps  ;
Cs(i,t)$(Cs(i,t)=0)=eps  ;
cd(i,t)$(cd(i,t)=0)=eps  ;
alfaA(i,t)$(alfaA(i,t)=0)=eps  ;

execute_unload "resulta4.gdx" XAT.l,XA2.l,XA3.l,XA4.l,XB.L,XC.l,V3.l,V2.l,V1.l,V0.l,DsA3.»
l,DsA2.l,DsA1.l, CLanzamiento.l,CProduccion.l,CInventario.l,CDesecho.l,Total.l,dA,p,q,h,C»
,m,so,Cs,cd,alfaA,costetotal.l,vidautilmedia.l,ponderaciones,Zvalor1.l,Zvalor2.l,Z2valorB»
.l,Z2valorC.l, Z3valor.l
execute 'gdxxrw.exe resulta4.gdx  epsout=0 var=XAT.l rng=c2 var=XA2.l rng=b9 var=XA3.l rn»
g=b24 var=XA4.l rng=b39'
execute 'gdxxrw.exe resulta4.gdx  epsout=0 var=XB.l rng=d53 var=XC.l rng=d56 var=V3.l rng»
=c60 var=V2.l rng=c66'
execute 'gdxxrw.exe resulta4.gdx  epsout=0 var=V1.l rng=c72  var=V0.l rng=c78 var=DsA3.l »
rng=d84'
execute 'gdxxrw.exe resulta4.gdx  epsout=0 var=DsA2.l rng=d87 var=DsA1.l rng=d90 var=CLan»
zamiento.l rng=c93'
execute 'gdxxrw.exe resulta4.gdx  epsout=0 var=CProduccion.l rng=c94 var=CInventario.l rn»
g=c95 var=CDesecho.l rng=c96 var=Total.l rng=c97'
execute 'gdxxrw.exe resulta4.gdx  epsout=0 par=dA rng=d100 par=p rng=c103 par=q rng=c107 »
par=h rng=c111 par=C rng=c115 par=m rng=c119 par=so rng=c123 par=Cs rng=c127 par=alfaA rn»
g=c131 par=cd rng=c135'
execute 'gdxxrw.exe resulta4.gdx  epsout=0 par=ponderaciones rng=c140 var=costetotal.l rn»
g=c143 var=vidautilmedia.l rng=c146'
execute 'gdxxrw.exe resulta4.gdx  epsout=0 var=Zvalor1.l rng=c149 var=Zvalor2.l rng=c152 »
var=Z2valorB.l rng=c155 var=Z2valorC.l rng=c177 var=Z3valor.l rng=c199'
```

Ilustración 40 Resultados exportados a Excel para realizar la frontera de Pareto y poder analizar cada una de las soluciones.

8.9.4. Determinación del conjunto de soluciones Pareto eficientes

Luego de ejecutar el modelo en GAMS/CPLEX y exportar los resultados a Excel, se obtienen los siguientes resultados para cada una de las iteraciones del peso w. Es importante resaltar que el tiempo total de ejecución fue de 3 minutos y 20.9 segundos, y el tiempo para obtener la solución definitiva a implementar conociendo el peso w asociado fue de 1.31 segundos.

Tabla 25 Resultados iteraciones con distintos pesos para la realización de la frontera de Pareto

Peso w	Coste Total (u.m)	V. U. Media (periodos)
1.00	**140,263.7**	**2.09**
0.95	140,306.0	2.89
0.90	140,306.0	2.89
0.85	140,306.0	2.89
0.80	**140,306.0**	**2.89**
0.75	143,984.8	2.97
0.70	**143,984.8**	**2.97**
0.65	145,309.8	2.99
0.60	145,309.8	2.99
0.55	**145,309.8**	**2.99**
0.50	**146,209.8**	**3.00**
0.45	146,209.8	3.00
0.40	146,209.8	3.00
0.35	146,209.8	3.00
0.30	146,209.8	3.00
0.25	146,209.8	3.00
0.20	147,174.5	3.00
0.15	147,174.5	3.00
0.10	147,174.5	3.00
0.05	147,174.5	3.00
0.00	268,448.0	3.00

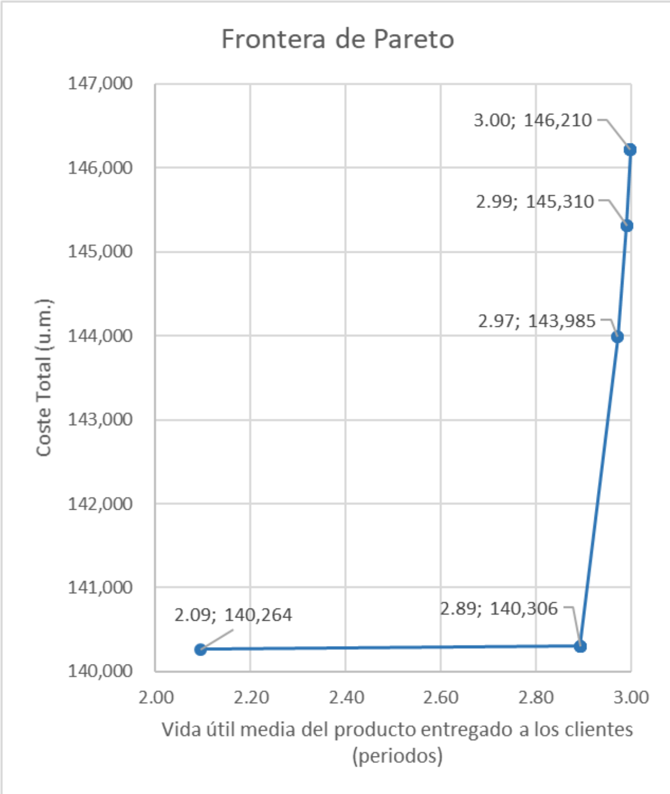

Ilustración 41 Frontera de Pareto para el ejemplo del modelo 4.

Se observa que se repiten puntos sobre la frontera de Pareto para varios pesos w distintos, y especialmente, se observa que cuando este tiene un valor entre 0 y 0.50, se obtiene siempre un valor de VUM de 3, mientras cambia el coste total, por lo que de estas iteraciones se debe dejar una única solución en la frontera de Pareto que sea realmente no dominada, la cual es aquella con VUM 3 y coste total de 146,209.8 u.m. Las 5 soluciones eficientes diferentes respecto a las funciones de los criterios son graficadas en la Ilustración 42, y son analizadas en la tabla 26 de forma similar a como se hizo en el modelo 3.

Tabla 26 Tasa de intercambio entre soluciones eficientes

Solución	Coste Total (u.m.)	V. U. Media (periodos)	Diferencia Coste Total (u.m.)	Aumento en Coste Total	Diferencia VUM (periodos)	Aumento en VUM	Tasa de intercambio (u.m./periodos)
1	140,263.7	2.09					
2	140,306.0	2.89	42.3	0.03%	0.80	38.17%	53
3	143,984.8	2.97	3678.8	2.62%	0.08	2.70%	47,072
4	145,309.8	2.99	1325.0	0.92%	0.02	0.66%	67,816
5	146,209.8	3.00	900.0	0.62%	0.01	0.24%	126,675

Se observa al comparar la solución 2 respecto a la 1, que únicamente por un incremento de 42.3 u.m. se obtiene un aumento en la VUM de los productos entregados de 0.80, lo cual implica una mejora del 38.17% de la VUM respecto a la solución con menor coste total, la cual habrá de aumentar su coste total únicamente en un 0.03%, siendo evidente para la empresa que es más adecuada la implementación de la solución 2 respecto a la 1. Adicionalmente, se observa para las demás soluciones (3, 4 y 5) que no es tan evidente conocer si a la empresa le sea atractivo implementarlas, ya que los aumentos en la VUM de los productos entregados no parecen aumentar sustancialmente respecto a la cantidad de dinero que involucrará esta mejoría, siendo posible o no que prefieran pasar de la solución 2 a la 3, ya que por un incremento de 3678.8 u.m. (del 2.62%) se puede mejorar la VUM de los productos entregados en 0.08 periodos (aumentando 2.70%).

Teniendo en cuenta el análisis anterior, se asume que la solución eficiente que mejor cumple las expectativas de la empresa es la 2, por lo que se decide implementarse como solución al problema planteado.

8.9.5. Implementación de la solución eficiente escogida

Ya habiendo escogido la solución eficiente a implementar, se debe conocer al detalle el plan de producción a seguir para lograrlo. Es así que se soluciona el modelo utilizando como peso w cualquier valor entre 0.80 y 0.95 de acuerdo a la tabla 25, y se guardan y se organizan los resultados en un formato similar al que se ha hecho para los modelos anteriores, de tal forma sea fácil de interpretar y de ejecutar en la práctica.

Las tablas 28 y 29 se pueden interpretar de igual forma a como se explicó en detalle en el modelo 3, utilizándose para conocer cuánto producto A realizar en cada periodo y conocer al detalle los costes asociados con este producto. Adicionalmente, a este producto se le agrega en este modelo la tabla 27, en la cual aparece la máquina a utilizar en la elaboración de este producto, la cual es la máquina 1, lo que implica que sus parámetros asociados de costes por lanzamiento y producción, además de la capacidad de producción son utilizados en el cálculo de la solución.

Tabla 27 Máquina seleccionada para la fabricación de producto A en el ejemplo del modelo 4.

Máquina escogida para la producción de A	1

Tabla 28 Resultados del producto A en el ejemplo del modelo 4.

Producto A															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Demanda	0	0	0	30	43	73	65	83	24	23	28	76	65	31	22
D3	0	0	0	20	43	73	65	83	24	0	28	76	65	31	0
D2	0	0	0	5	0	0	0	0	0	23	0	0	0	0	22
D1	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lanzamiento	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
XAT	0	0	68	0	138	0	130	0	0	104	0	118	0	0	0
XAT4	0	0	43	0	65	0	47	0	0	76	0	53	0	0	0
XAT3	0	0	20	0	73	0	83	0	0	28	0	65	0	0	0
XAT2	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V3	5	0	0	43	0	65	0	47	0	0	76	0	53	0	0
V2	5	5	0	0	0	0	0	0	23	0	0	0	0	22	0
V1	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V0	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	15	10	73	43	138	65	130	47	23	104	76	118	53	22	0

Tabla 29 Costes asociados a la producción del producto A en el ejemplo del modelo 4.

Costes																Total
Lanzamiento	0	0	2500	0	2500	0	2500	0	0	2500	0	2500	0	0		12,500
Producción	0	0	3400	0	6900	0	6500	0	0	5200	0	5900	0	0		27,900
Inv. Inicial 0.5so															100	100
Inventario 0.5X	0	0	340	0	690	0	650	0	0	520	0	590	0	0	0	2,790
Inventario V3	50	0	0	430	0	650	0	470	0	0	760	0	530	0	0	2,890
Inventario V2	50	50	0	0	0	0	0	0	230	0	0	0	0	220	0	550
Inventario V1	50	50	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	150
Inventario 0.5*V0	25	25	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	75
Desperdicio V0	50	50	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	150
Desperdicio 2															0	-
																47,105.0

En cuanto al producto B y C, se pueden interpretar los resultados se forma similar a como se hizo en el modelo 3 para las tablas 30 y 31 en el producto B, y las tablas 33 y 34 en el producto C. Sin embargo, a estos se deben adicionar las tablas 32 y 35 respectivamente, con las cuales se podrá conocer la cantidad de producto a subcontratar en cada uno de los casos, teniéndose 4 filas diferentes, de las cuales solo podrá haber cifras diferentes a cero en la fila 1 y 3, o en la fila 2 y 4 simultáneamente, teniendo en cuenta que el primer caso contempla el caso en el que aplica la promoción, mientras que el segundo cuando no. Es así como por ejemplo en la tabla 35 se observa que habrá de subcontratarse 100 unidades de producto C en el periodo 2 sin promoción (20 al precio 1 y 80 al precio 2), mientras que en el periodo 3 se contratarán 200 unidades (20 al precio 1 y 180 al precio 2) con promoción, lo cual se obtiene al considerar que también se compraron en el mismo periodo las 10 unidades de producto B que permitieron que esta promoción aplicara.

Tabla 30 Resultados del producto B en la solución del ejemplo del modelo 4.

Producto B															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
XA4B3	0	0	43	0	65	0	47	0	0	76	0	53	0	0	0
XA3B3	0	0	15	0	73	0	83	0	0	28	0	65	0	0	0
XA2B3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAB3	0	0	58	0	138	0	130	0	0	104	0	118	0	0	0
Total B3	0	0	116	0	276	0	260	0	0	208	0	236	0	0	0
XA3B2	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2B2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAB2	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total B2	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2B1	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total B1	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lanzamiento	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
Producción XB	106	0	276	0	260	0	0	208	0	236	0	0	0	0	0
V3	10	106	0	276	0	260	0	0	208	0	236	0	0	0	0
V2	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V1	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V0	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	136	126	276	276	260	260	0	208	208	236	236	0	0	0	0

Tabla 31 Costes asociados a la producción del producto B en el ejemplo del modelo 4.

Costes																Total
Lanzamiento	1000	0	1000	0	1000	0	0	1000	0	1000	0	0	0	0		5,000
Producción	4240	0	11040	0	10400	0	0	8320	0	9440	0	0	0	0		43,440
Inv. Inicial 0.5so															100	100
Inventario 0.5X	265	0	690	0	650	0	0	520	0	590	0	0	0	0	0	2,715
Inventario V3	50	530	0	1380	0	1300	0	0	1040	0	1180	0	0	0	0	5,480
Inventario V2	50	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
Inventario V1	50	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
Inventario 0.5*V0	25	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50
Desperdicio V0	100	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	200
Desperdicio 2															0	-
																57,185.0

Tabla 32 Subcontratación y sus costes asociados para el producto B en el ejemplo del modelo 4.

Prod. Subcontratado B																
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**Coste**
Cantidad Precio 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Cantidad 0.9*Precio 1	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	630
Cantidad Precio 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Cantidad 0.9*Precio 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
																630

Tabla 33 Resultados del producto C en la solución del ejemplo del modelo 4.

Producto C															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
XA4C4	0	0	40	0	65	0	47	0	0	76	0	53	0	0	0
XA3C4	0	0	0	0	73	0	83	0	0	28	0	65	0	0	0
XA2C4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAC4	0	0	40	0	138	0	130	0	0	104	0	118	0	0	0
Total C4	0	0	200	0	690	0	650	0	0	520	0	590	0	0	0
XA4C3	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA3C3	0	0	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAC3	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total C3	0	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA3C2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAC2	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total C2	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C1	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total C1	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lanzamiento	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Producción XC	0	0	0	690	0	650	0	0	520	0	590	0	0	0	0
V3	20	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V2	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V1	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V0	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	60	140	0	690	0	650	0	0	520	0	590	0	0	0	0

Tabla 34 Costes asociados a la producción del producto C en el ejemplo del modelo 4.

Costes																Total
Lanzamiento	0	0	0	1000	0	1000	0	0	1000	0	1000	0	0	0		4,000
Producción	0	0	0	6900	0	6500	0	0	5200	0	5900	0	0	0		24,500
Inv. Inicial 0.5so															80	80
Inventario 0.5X	0	0	0	690	0	650	0	0	520	0	590	0	0	0	0	2,450
Inventario V3	40	200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	240
Inventario V2	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	80
Inventario V1	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	80
Inventario 0.5*V0	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
Desperdicio V0	100	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	200
Desperdicio 2															0	-
																31,670.0

Tabla 35 Subcontratación y sus costes asociados para el producto B en el ejemplo del modelo 4.

Prod. Subcontratado C																
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**Coste**
Cantidad Precio 1	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Cantidad 0.9*Precio 1	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,260
Cantidad Precio 2	0	80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5,120
Cantidad 0.9*Precio 2	0	0	180	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10,368
																16,748

8.10. Conclusiones

En los modelos de planificación de la producción es muy útil permitir que el modelo pueda decidir entre distintas alternativas que puedan surgir en la práctica, y así evitar que estas se deban escoger de forma previa a su resolución. De esta forma se puede evitar seccionar el problema en dos etapas, que al ser interdependientes deberían resolverse de forma conjunta en lo posible. Además, esto puede evitar que se tomen decisiones previas equivocadas, considerando la dificultad de su análisis previo a la ejecución de modelo.

Por lo anterior, es evidente que una de las ventajas principales de la programación lineal entera mixta, es que permite mediante el uso de variables binarias y enteras involucrar diferentes alternativas de decisión y condiciones lógicas en los modelos. En particular en el modelo 4, estas variables permitieron incorporar alternativas entre las cuales seleccionar una máquina para la producción del producto final, y diferentes condiciones de subcontratación utilizadas para los productos del nivel inferior. Es así como mediante la adecuada formulación del modelo para representar las diferentes condiciones lógicas apoyándose en nuevas restricciones y modificaciones en la función objetivo, se puede garantizar que el modelo sea lineal en variables, y se pueda resolver de la misma forma que se resolvieron los modelos MIP anteriores, aunque este pueda requerir tiempos de ejecución superiores, considerando que el modelo 4 requirió 13 veces más tiempo que el modelo 3.

9. Conclusiones generales y trabajo futuro

A partir de los modelos realizados en el presente Trabajo de Fin de Máster, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- En los casos en los que se busca realizar la planificación de productos con vida útil corta, en comparación con el horizonte de planificación, es muy importante discriminar los productos por sus diferentes edades, con el fin de poder garantizar estos se utilicen adecuadamente ante las limitaciones de edad del problema. Esto permitirá garantizar se cumpla con la demanda del producto, y con las especificaciones requeridas, obteniendo costes bajos de producción y por desechar productos con edades por fuera del rango útil, además de permitir llevar un seguimiento de la vida útil del producto que es entregado a los clientes.
- La programación lineal entera mixta, por medio de su planteamiento en un lenguaje de programación escueto y compacto como GAMS y su resolución con un Solver adecuado como CPLEX para casos profesionales, tiene ventajas considerables en el caso de modelos de planificación de la producción. Mediante estos se puede garantizar obtener la solución óptima o una solución cercana a esta dependiendo de la complejidad del modelo, se puede interpretar fácilmente los resultados, y se pueden realizar análisis de sensibilidad, mediante los cuales se podrá además entender el funcionamiento del problema.
- En casos de la planificación de la producción con productos con vida útil corta, es importante considerar como objetivo minimizar el coste total, pero a su vez garantizar se cumplan ciertas condiciones de edad en el producto o tratar de encontrar una solución que entregue producto con vida útil restante alto a los clientes, el cual será valorado por los clientes como un estándar de calidad. Por lo anterior es muy importante desarrollar un modelo multicriterio que considere ambos objetivos, y permita seleccionar por medio de un análisis cuantitativo, una solución que sea equilibrada. Esto se puede realizar mediante la elaboración de la frontera de Pareto conformada por soluciones eficientes, cuya tasa de intercambio y coste de oportunidad permitirán a la empresa adaptar aquella que se adapte mejor a sus prioridades en el mercado.
- La utilización de la programación lineal entera mixta permite involucrar en el modelo distintas alternativas de decisión y condiciones lógicas que puedan surgir en problemas de planificación, y permite adaptar distintos problemas particulares que se encuentren en la práctica gracias a su versatilidad. Esto debido a las ventajas que brindan las variables binarias y enteras para representar distintas situaciones de la realidad, las cuales además sirven para realizar aproximación de funciones no lineales, que de otra forma requerirían de modelos más complejos y con mayores dificultades de resolución e interpretación.
- Un adecuado planteamiento del modelo matemático para el problema de planificación de la producción, permitirá obtener su solución óptima, pero también que sea fácil su interpretación y puesta en marcha. Por esta razón se buscó que los modelos realizados en este documento las variables decisión expresaran directamente las condiciones a tener en cuenta en cada uno de los periodos, además de permitir su ampliación y adaptación a modelos de mayor escala y con distintas condiciones.

Finalmente, se propone como trabajo futuro involucrar a estos modelos incertidumbre, de tal forma se pueda plantear casos con demanda incierta, casos en los que se incorpore la fiabilidad de los productos, los cuales en contextos de vida útil corta suelen ser importantes al utilizarse en casos de alimentos, que por factores externos puedan variar sus características de calidad. Adicionalmente, se propone realizar modelos que tengan como objetivo encontrar planes de producción robustos, que aunque se conozca de antemano no van a dar el mejor resultado posible, tengan una menor variabilidad en sus posibles resultados en los criterios que son objetivo, garantizando se obtenga un resultado favorable que considere la variabilidad del problema.

Bibliografía

Ahumada, O., & Villalobos, J. (2011). Operational model for planning the harvest and distribution of perishable agricultural products. *International Journal of Production Economics, 133*(2), 677-687.

Alemany, M., Grillo, H., Ortiz, A., & Fuertes-Miquel, V. (2015). A fuzzy model for shortage planning under uncertainty due to lack of homogeneity in planned production lots. *Applied Mathematical Modelling, 39*(15), 4463-4481.

Amorim, P., Antunes, C., & Almada-Lobo, B. (2011). Multi-Objective Lot-Sizing and Scheduling Dealing with Perishability Issues. *Industrial & Engineering Chemistry Research, 50*(6), 3371-3381.

Billington, J., McClain, J., & Thomas, J. (1983). Mathematical Programming Approaches to Capacity-Constrained MRP Systems: Review Formulation and Problem Reduction. *Management Science, 29*(10), 1126-1141.

Byrnea, M., & Bakir, M. (1999). Production planning using a hybrid simulation-analytical approach. *International Journal of Production Economics, 59*(1-3), 305-311.

Castillo, E., Conejo, A., Pedregal, P., Garciá, R., & Alguacil, N. (2002). *Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science.* John Wiley & Sons, Inc.

Cobuloglu, H., & Büyüktahtakin, E. (2017). A Two-Stage Stochastic Mixed-Integer Programming Approach to the Competition of Biofuel and Food Production. *Computers & Industrial Engineering, 107*, 251-263.

Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyariva, T. (2002). A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions On Evolutionary Computation, 6*(2), 182-197.

Gass, S., & Thomas, S. (1955). The computational algorithm for the parametric objective function. *Naval Research Logistics Quarterly, 2*(1-2), 39-45.

Gonen, T., & Foote, B. (1981). Distribution-system planning using mixed-integer programming. *IEEE Proceedings C - Generation, Transmission and Distribution, 128*(2), 70-79.

Kalvelagen, E. (2002). Solving Multi-Objective Models With Gams. *GAMS Development Corp.*

Lan, Y.-F., Liu, Y.-K., & Sun, G.-J. (2009). Modeling fuzzy multi-period production planning and sourcing problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 231*(1), 208-221.

Leung, S., Lai, K., Ng, W., & Wu, Y. (2007). A robust optimization model for production planning of perishable products. *Journal of the Operational Research Society, 58*(4), 413-422.

Magee, T., & Glover, F. (1996). Integer Programming. En M. Avriel, & B. Goaz, *Mathematical Programming for Industrial Engineers.* New York: Marcel Dekker Inc.

Mula, J., Peidro, D., & Poler, R. (2010). The effectiveness of a fuzzy mathematical programming approach for supply chain production planning with fuzzy demand. *International Journal of Production Economics, 128*(1), 136-143.

Mula, J., Poler, R., García-Sabater, J., & Lario, F. (2006). Models for production planning under uncertainty: A review. *International Journal of Production Economics, 103*(1), 271-285.

Orlicky, J., & Plossl, G. (1994). *Orlicky's Material Requirements Planning.* New York: McGraw Hill Professional.

Pochet, Y., & Wolsey, L. (2006). *Production Planning by Mixed Integer Programming.* New York: Springer.

Seyedhosseini, S., & Ghoreyshi, S. (2014). An Integrated Model for Production and Distribution Planning of Perishable Products with Inventory and Routing Considerations. *Mathematical Problems in Engineering Volume 2014*(1), 1-10.

Shabrandi, A., & Mohammadi, M. (2011). Production Planning for Perishable Products with Partial Postponement Strategy. *International Journal of Computer Applications, 31*(5), 28-37.

Shapiro, J. (1993). Mathematical Programming Models and Methods for Production Planning and Scheduling. En J. Birge, & V. Linetsky, *Handbooks in Operations Research and Management Science* (Vol. 4, págs. 371-443). ELSEVIER.

Stadtler, H. (1996). Mixed integer programming model formulations for dynamic multi-item multi-level capacitated lotsizing. *European Journal of Operational Research, 94*(3), 561-581.

Triantaphyllou, E. (2000). *Multi-criteria Decision Making Methods: A comparative study* (Vol. 44). Springer US.

Whitesitt, J. (2010). *Boolean Algebra and its Applications.* Dover Publications.

Winston, W., & Venkataramanan, M. (2003). *Introduction to Mathematical Programming: Operations Research: Volume One.* Pacific Grove, CA: Thomson, Cop.

Anexos

A. Resultados ejemplo 1 del modelo 2

Producto A															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Demanda	0	0	0	30	43	73	65	83	24	23	28	76	65	31	22
D3	0	0	0	0	0	73	31	0	24	0	0	62	0	25	0
D2	0	0	0	30	0	0	0	69	0	0	0	0	65	6	0
D1	0	0	0	0	43	0	34	14	0	23	28	14	0	0	22
Lanzamiento	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
XAT	0	0	90	0	90	90	24	89	0	0	90	90	0	0	0
XAT4	0	0	17	0	0	0	0	14	0	0	28	25	0	0	0
XAT3	0	0	0	0	73	76	0	52	0	0	62	0	0	0	0
XAT2	0	0	73	0	17	14	24	23	0	0	0	65	0	0	0
V3	0	0	0	17	0	0	0	0	14	0	0	28	25	0	0
V2	0	0	0	0	17	0	45	0	28	14	0	0	28	0	0
V1	0	0	0	43	0	34	14	0	23	28	14	0	0	22	0
V0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	0	0	90	60	107	124	83	89	65	42	104	118	53	22	0

Costes																Total
Lanzamiento	0	0	3000	0	3000	3000	3000	3000	0	0	3000	3000	0	0		21,000
Producción	0	0	4500	0	4500	4500	1200	4450	0	0	4500	4500	0	0		28,150
Inv. Inicial 0.5so															0	-
Inventario 0.5X	0	0	450	0	450	450	120	445	0	0	450	450	0	0	0	2,815
Inventario V3	0	0	0	170	0	0	0	0	140	0	0	280	250	0	0	840
Inventario V2	0	0	0	0	170	0	450	0	280	140	0	0	280	0	0	1,320
Inventario V1	0	0	0	430	0	340	140	0	230	280	140	0	0	220	0	1,780
Inventario 0.5*V0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
Desperdicio V0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
Desperdicio 2															0	-
																55,905.0

Producto B															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
XA4B3	0	0	17	0	0	0	0	14	0	0	28	25	0	0	0
XA3B3	0	0	0	0	73	76	0	52	0	0	62	0	0	0	0
XA2B3	0	0	73	0	13	0	0	23	0	0	0	65	0	0	0
Total XAB3	0	0	90	0	86	76	0	89	0	0	90	90	0	0	0
Total B3	0	0	180	0	172	152	0	178	0	0	180	180	0	0	0
XA3B2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2B2	0	0	0	0	0	14	24	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAB2	0	0	0	0	0	14	24	0	0	0	0	0	0	0	0
Total B2	0	0	0	0	0	28	48	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2B1	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total B1	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lanzamiento	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
Producción XB	188	0	200	200	0	178	0	0	180	180	0	0	0	0	0
V3	0	188	0	200	200	0	178	0	0	180	180	0	0	0	0
V2	0	0	8	0	28	48	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V1	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	188	188	208	408	228	226	178	0	180	360	180	0	0	0	0

Costes																Total
Lanzamiento	4000	0	4000	4000	0	4000	0	0	4000	4000	0	0	0	0		24,000
Producción	7520	0	8000	8000	0	7120	0	0	7200	7200	0	0	0	0		45,040
Inv. Inicial 0.5so															0	-
Inventario 0.5X	470	0	500	500	0	445	0	0	450	450	0	0	0	0	0	2,815
Inventario V3	0	940	0	1000	1000	0	890	0	0	900	900	0	0	0	0	5,630
Inventario V2	0	0	40	0	140	240	0	0	0	0	0	0	0	0	0	420
Inventario V1	0	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
Inventario 0.5*V0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
Desperdicio V0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
Desperdicio 2															0	-
																77,945.0

Producto C															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
XA4C4	0	0	17	0	0	0	0	14	0	0	28	25	0	0	0
XA3C4	0	0	0	0	73	76	0	52	0	0	62	0	0	0	0
XA2C4	0	0	73	0	13	0	0	23	0	0	0	65	0	0	0
Total XAC4	0	0	90	0	86	76	0	89	0	0	90	90	0	0	0
Total C4	0	0	450	0	430	380	0	445	0	0	450	450	0	0	0
XA4C3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA3C3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C3	0	0	0	0	0	14	24	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAC3	0	0	0	0	0	14	24	0	0	0	0	0	0	0	0
Total C3	0	0	0	0	0	70	120	0	0	0	0	0	0	0	0
XA3C2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C2	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAC2	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total C2	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total C1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lanzamiento	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
Producción XC	0	470	0	500	500	0	445	0	0	450	450	0	0	0	0
V3	0	0	20	0	70	120	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V2	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	0	470	20	520	570	120	445	0	0	450	450	0	0	0	0

Costes																Total
Lanzamiento	0	2000	0	2000	2000	0	2000	0	0	2000	2000	0	0	0		12,000
Producción	0	4700	0	5000	5000	0	4450	0	0	4500	4500	0	0	0		28,150
Inv. Inicial 0.5so															0	-
Inventario 0.5X	0	470	0	500	500	0	445	0	0	450	450	0	0	0	0	2,815
Inventario V3	0	0	40	0	140	240	0	0	0	0	0	0	0	0	0	420
Inventario V2	0	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
Inventario V1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
Inventario 0.5*V0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
Desperdicio V0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
Desperdicio 2															0	-
																43,425.0

B. Resultados del ejemplo del modelo 3

Producto A															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Demanda	0	0	0	30	43	73	65	83	24	23	28	76	65	31	22
D3	0	0	0	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D2	0	0	0	0	13	0	0	83	15	0	0	76	43	0	0
D1	0	0	0	5	30	73	65	0	9	23	28	0	22	31	22
Lanzamiento	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
XAT	0	0	120	86	0	0	120	38	0	0	120	74	0	0	0
XAT4	0	0	65	0	0	0	28	0	0	0	22	0	0	0	0
XAT3	0	0	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XAT2	0	0	30	86	0	0	92	38	0	0	98	74	0	0	0
V3	5	0	0	65	0	0	0	28	0	0	0	22	0	0	0
V2	5	5	0	0	65	0	0	0	28	0	0	0	22	0	0
V1	5	5	5	30	73	65	0	9	23	28	0	22	31	22	0
V0	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	15	10	125	181	138	65	120	75	51	28	120	118	53	22	0

Costes																Total
Lanzamiento	0	0	3000	3000	0	0	3000	3000	0	0	3000	3000	0	0		18,000
Producción	0	0	6000	4300	0	0	6000	1900	0	0	6000	3700	0	0		27,900
Inv. Inicial 0.5so															100	100
Inventario 0.5X	0	0	600	430	0	0	600	190	0	0	600	370	0	0	0	2,790
Inventario V3	50	0	0	650	0	0	0	280	0	0	0	220	0	0	0	1,200
Inventario V2	50	50	0	0	650	0	0	0	280	0	0	0	220	0	0	1,250
Inventario V1	50	50	50	300	730	650	0	90	230	280	0	220	310	220	0	3,180
Inventario 0.5*V0	25	25	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	75
Desperdicio V0	50	50	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	150
Desperdicio 2															0	-
																54,645.0

Producto B															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
XA4B3	0	0	65	0	0	0	28	0	0	0	22	0	0	0	0
XA3B3	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2B3	0	0	25	0	0	0	92	0	0	0	98	0	0	0	0
Total XAB3	0	0	110	0	0	0	120	0	0	0	120	0	0	0	0
Total B3	0	0	220	0	0	0	240	0	0	0	240	0	0	0	0
XA3B2	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2B2	0	0	0	86	0	0	0	38	0	0	0	74	0	0	0
Total XAB2	0	0	5	86	0	0	0	38	0	0	0	74	0	0	0
Total B2	0	0	10	172	0	0	0	76	0	0	0	148	0	0	0
XA2B1	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total B1	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lanzamiento	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Producción XB	392	0	0	0	316	0	0	0	388	0	0	0	0	0	0
V3	10	392	0	0	0	316	0	0	0	388	0	0	0	0	0
V2	10	10	172	0	0	0	76	0	0	0	148	0	0	0	0
V1	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V0	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	422	412	172	0	316	316	76	0	388	388	148	0	0	0	0

Costes																Total
Lanzamiento	4000	0	0	0	4000	0	0	0	4000	0	0	0	0	0		12,000
Producción	15680	0	0	0	12640	0	0	0	15520	0	0	0	0	0		43,840
Inv. Inicial 0.5so															100	100
Inventario 0.5X	980	0	0	0	790	0	0	0	970	0	0	0	0	0	0	2,740
Inventario V3	50	1960	0	0	0	1580	0	0	0	1940	0	0	0	0	0	5,530
Inventario V2	50	50	860	0	0	0	380	0	0	0	740	0	0	0	0	2,080
Inventario V1	50	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
Inventario 0.5*V0	25	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50
Desperdicio V0	100	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	200
Desperdicio 2															0	-
																66,640.0

Producto C															
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
XA4C4	0	0	65	0	0	0	28	0	0	0	22	0	0	0	0
XA3C4	0	0	21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C4	0	0	26	86	0	0	92	0	0	0	98	74	0	0	0
Total XAC4	0	0	112	86	0	0	120	0	0	0	120	74	0	0	0
Total C4	0	0	560	430	0	0	600	0	0	0	600	370	0	0	0
XA4C3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA3C3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C3	0	0	0	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0
Total XAC3	0	0	0	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0
Total C3	0	0	0	0	0	0	0	190	0	0	0	0	0	0	0
XA3C2	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total XAC2	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total C2	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XA2C1	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total C1	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lanzamiento	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
Producción XC	0	560	430	0	0	790	0	0	0	600	370	0	0	0	0
V3	20	0	0	0	0	0	190	0	0	0	0	0	0	0	0
V2	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V1	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V0	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stock total	60	600	430	0	0	790	190	0	0	600	370	0	0	0	0

Costes																Total
Lanzamiento	0	2000	2000	0	0	2000	0	0	0	2000	2000	0	0	0		10,000
Producción	0	5600	4300	0	0	7900	0	0	0	6000	3700	0	0	0		27,500
Inv. Inicial 0.5so															80	80
Inventario 0.5X	0	560	430	0	0	790	0	0	0	600	370	0	0	0	0	2,750
Inventario V3	40	0	0	0	0	0	380	0	0	0	0	0	0	0	0	420
Inventario V2	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	80
Inventario V1	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	80
Inventario 0.5*V0	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
Desperdicio V0	100	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	200
Desperdicio 2															0	-
																41,150.0