

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALENCIA
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Estudio de la influencia de la Fase I en el desempeño de la Fase II en el gráfico T^2 de Hotelling

Tesis Presentada por: Eva Soriano Martínez
Dirigida por: Francisco José Aparisi García

Para la obtención del título de
Máster Universitario en Ingeniería de Análisis de Datos, Mejora de Procesos y Toma de
Decisiones

Valencia, 18 de Septiembre de 2017

Resumen

Los procesos productivos actuales requieren, en la mayoría de ocasiones, realizar un seguimiento sobre el valor de varias características de calidad que han de cumplir sus productos. Es por ello que se han realizado numerosos estudios en el campo del control estadístico de calidad multivariante, aportando gráficos de control como el T^2 de Hotelling sobre el que se han aplicado reglas de manera que el tiempo de detección de un cambio en el proceso sea lo más pequeño posible. No obstante, hasta ahora sólo se había estudiado el efecto de la estimación de los parámetros del gráfico T^2 de Hotelling sobre el desempeño real del ARL bajo control, obviando el efecto que se produce sobre el conjunto, es decir: sobre el ARL bajo control y el ARL fuera de control a la vez. Es por ello que en este estudio se muestra un análisis del efecto de la estimación en Fase I sobre el desempeño real en Fase II del conjunto ARL_0 y ARL_1 en el gráfico T^2 de Hotelling, que nos aportará una nueva forma de realizar la Fase I de manera que se dividirá en dos partes para obtener el mayor porcentaje posible de gráficos conformes en el desempeño en conjunto. Se incluye también un análisis de la aplicación de una corrección sobre el límite de control y se expondrán conclusiones acerca del desempeño real tanto de los ARL's como en conjunto. Se mostrará que para tamaños de muestras total pequeños, esta corrección es beneficiosa para el desempeño en conjunto.

Palabras clave: *gráfico de control, T^2 de Hotelling, ARL, gráficos conformes en el desempeño, efecto de estimación.*

Agradecimientos

A mi familia y mi pareja, que han estado conmigo durante todos los días en los que me veían trabajar, animándome cuando más lo necesitaba, en esos momentos que los ánimos se me caían al suelo y estaban ahí para volver a levantármelos con más fuerza que antes. Siempre me habéis apoyado en todo lo que he querido y habéis luchado junto a mí para construirme un futuro prometedor que me brindara un buen trabajo y una satisfacción para mí misma, porque no hay nada mejor que trabajar en lo que realmente te gusta. También quiero dedicarle unas palabras a mi tutor Francisco Aparisi, por tener tanta paciencia, por el apoyo que siempre me ha brindado y por hacer las cosas tan fáciles como el respirar. No me quiero olvidar de su doctorando Jaime Mosquera, que me ha ayudado tanto con este trabajo y que me ha brindado magníficos consejos.

Índice

1	Introducción y Objetivos	8
2	Conceptos Básicos del Control Estadístico de la Calidad	11
2.1	Reseña Histórica	11
2.2	Conceptos Fundamentales	12
3	Control Estadístico de Procesos Multivariantes: Gráfico T^2 de Hotelling	15
3.1	Origen y Estudios sobre el gráfico de control T^2 de Hotelling	15
3.2	Nociones Básicas del gráfico T^2 de Hotelling	19
3.3	Fase I y Fase II del Control Estadístico de la Calidad en el gráfico T^2 de Hotelling	23
4	Metodología	24
5	Resultados	30
5.1	Desempeño real del Gráfico de Control T^2 de Hotelling en Fase II	30
5.2	Efecto de la Corrección en el Límite de Control en el desempeño real en Fase II del Gráfico T^2 de Hotelling	49
6	Conclusiones	52
	Referencias	54
7	Anexo	56

Índice de Figuras

Figura 1	Ejemplo de gráfico de control \bar{X} (Montgomery, 2009)	12
Figura 2	Ejemplo de un gráfico de control \bar{X}	14
Figura 3	Ejemplo de gráfico de control T^2 de Hotelling (Montgomery, 2009) .	20
Figura 4	Simulador T2 with estimated parameters v2	26
Figura 5	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 0,25$	35
Figura 6	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 0,25$	35
Figura 7	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 0,25$	36

Figura 8	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 0,25$	36
Figura 9	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 1$	36
Figura 10	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 1$	37
Figura 11	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 1$	37
Figura 12	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 1$	38
Figura 13	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 10%	38
Figura 14	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 10%	38
Figura 15	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 20%	39
Figura 16	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 20%	39
Figura 17	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 0,25$	44
Figura 18	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 0,25$	44
Figura 19	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 0,25$	45
Figura 20	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 0,25$	45
Figura 21	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 1$	45
Figura 22	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 1$	46
Figura 23	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 1$	46
Figura 24	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 1$	46
Figura 25	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 10%	47

Figura 26	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 10 %	47
Figura 27	Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 20 %	47
Figura 28	Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 20 %	48
Figura 29	Comparación del desempeño para ARL_0 con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 10 %	49
Figura 30	Comparación del desempeño para ARL_0 con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 20 %	49
Figura 31	Comparación del desempeño para ARL_1 con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 10 %	50
Figura 32	Comparación del desempeño para ARL_1 con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 20 %	50
Figura 33	Comparación del desempeño en conjunto con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 10 %	51
Figura 34	Comparación del desempeño en conjunto con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 20 %	51

Índice de Tablas

Tabla 1	Parámetros del simulador para $p=2$	28
Tabla 2	Parámetros del simulador para $p=3$	29
Tabla 3	Desempeño con $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370, $n = 3$ y 10 % de tolerancia	31
Tabla 4	Desempeño con $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370, $n = 3$ y 20 % de tolerancia	32
Tabla 5	Desempeño con $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370, $n = 5$ y 10 % de tolerancia	33
Tabla 6	Desempeño con $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370, $n = 5$ y 20 % de tolerancia	34
Tabla 7	Desempeño con $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370, $n = 3$ y 10 % de tolerancia	40
Tabla 8	Desempeño con $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370, $n = 3$ y 20 % de tolerancia	41

Tabla 9	Desempeño con $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370, $n = 5$ y 10 % de tolerancia	42
Tabla 10	Desempeño con $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370, $n = 5$ y 20 % de tolerancia	43

1. Introducción y Objetivos

La calidad del producto es un aspecto muy importante actualmente, puesto que de ella depende el éxito y la prosperidad de las empresas. En este sentido, adquiere importancia el estudio en profundidad de la variabilidad del producto, ya que una alta variabilidad provoca una baja calidad al ser inversamente proporcionales (Montgomery, 2009). Si se presenta mucha variabilidad en la producción, se tendrán unidades tanto de muy buena calidad como de muy mala calidad y esto no es conveniente porque una empresa que se concentre en tener menor variabilidad en su producción y por consiguiente tendrá mejor calidad en sus productos, tendrá más posibilidades de atraer a más clientes y destacar entre su competencia. Además, tener una baja variabilidad en la producción contribuye a reducir los costes de producción y de reparación, así como tener menos reparaciones de los productos. Como consecuencia de tener una buena calidad, se producirán menos reclamaciones por parte de los clientes y menos reparaciones, por lo que los gastos destinados a estas finalidades se pueden destinar a mejorar la calidad del producto final.

Con esta finalidad, se originó el control estadístico de la calidad de la mano de los gráficos de control en 1924 (Shewhart, 1924). A partir de esa fecha, se empezaron a introducir técnicas estadísticas para mejorar la calidad de los productos, cosa que antes se hacía de manera asistemática, es decir: la persona encargada escogía algunas muestras y comparaba las unidades frente a un rango en el que debía estar la característica de calidad deseada. Debido a ello, no se tenía en cuenta la variabilidad del proceso, por lo que este rango resultaba inadecuado. Gracias a la introducción de los gráficos de control, se pudo controlar el origen de esta variabilidad de manera mucho más sencilla, ya que, con un simple vistazo, el operario puede ver si se está produciendo de la manera correcta.

El gráfico de control T^2 de Hotelling permite controlar la variabilidad de la producción en el caso que se tenga más de una característica de calidad. Más concretamente, se centrará este estudio en el desempeño de éste en el proceso de producción cuando se ha estimado la media ($\vec{\mu}_0$) y la matriz de varianzas-covarianzas ($\hat{\Sigma}_0$) entre las variables del proceso, puesto que no se va a saber con certeza el valor exacto de éstos.

Como se verá en la Sección 3, los estudios sobre la influencia de la estimación de $\vec{\mu}_0$ y Σ_0 sobre el desempeño del gráfico de control T^2 de Hotelling en la Fase II se han centrado en el efecto sobre el ARL bajo control, sin evaluar en profundidad el efecto que hay sobre el ARL fuera de control que, aunque sea menor que el del ARL_0 , ejerce un efecto sobre el desempeño en conjunto $ARL_0 \cap ARL_1$. Este desempeño en conjunto es en el que se debería prestar atención ya que de nada servirá un gráfico de control que

proporciona muchas falsas alarmas cuando el proceso está bajo control y que no detecte un cambio en el proceso cuando está fuera de control. Es por ello que este estudio es una gran novedad en el campo del control estadístico multivariante puesto que hasta ahora sólo se habían realizado estudios sobre el efecto de la estimación sobre el ARL bajo control, menospreciando el efecto que puede llegar a tener el ARL fuera de control sobre el desempeño en conjunto, que es realmente en lo que se está interesado: se desea un gráfico de control que emita un bajo número de falsas alarmas a la vez que se logre detectar rápidamente un cambio en los parámetros del proceso.

Para ver este desempeño, se realizarán simulaciones para distintos tamaños de muestra y se estudiará el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño del ARL bajo control y fuera de control, así como el del conjunto.

Por tanto, los objetivos a cumplir con el presente estudio son los siguientes:

- **Objetivo general:** Valorar el efecto del error de estimación en los parámetros $\vec{\mu}_0$ y $\hat{\Sigma}_0$ en la Fase I sobre el desempeño del gráfico de control T^2 de Hotelling.
- **Objetivos específicos:**
 - Valorar el efecto del error de estimación en Fase I sobre el desempeño en conjunto en el gráfico T^2 de Hotelling.
 - Evaluar el efecto de realizar un ajuste al límite de control sobre el desempeño del gráfico T^2 de Hotelling en los estados bajo control y fuera de control del proceso.
 - Estudiar el efecto que se obtiene al realizar una corrección en el límite de control sobre el desempeño en conjunto en el gráfico T^2 de Hotelling.

Para poder cumplir estos objetivos, se ha seguido la siguiente estructura en el presente trabajo:

En primer lugar, se hará una introducción al control estadístico de la calidad definiendo los conceptos básicos para poder seguir el trabajo así como la notación que se va a seguir en el mismo. A continuación, se centrará el estudio en el gráfico de control T^2 de Hotelling describiendo la motivación de su creación y sus características más importantes. Posteriormente, se desarrollará la metodología empleada en este trabajo describiendo cómo se han realizado las simulaciones en el programa, de las cuales se harán uso para el posterior estudio sobre el efecto del desempeño en Fase II del gráfico T^2 de Hotelling como consecuencia del error de estimación en la Fase I a través de las simulaciones realizadas,

mostrando tanto el efecto para el ARL bajo control (ARL_0) como para el ARL fuera de control (ARL_1), así como su efecto sobre el desempeño en conjunto. Se finalizará con las conclusiones del trabajo con la idea de reflejar con más claridad los resultados obtenidos, además de la bibliografía seguida para el desarrollo del mismo. Para finalizar, se adjunta un anexo en donde se indica el código del software utilizado para realizar las simulaciones.

2. Conceptos Básicos del Control Estadístico de la Calidad

En esta sección, se comenzará con una introducción histórica del control estadístico de calidad resaltando la motivación de su creación. A continuación, se entrará más en detalle en los conceptos básicos del control de calidad de manera que se pueda seguir con claridad la notación del trabajo y la siguiente sección dedicada al gráfico de control T^2 de Hotelling.

2.1. Reseña Histórica

A raíz de la revolución industrial, las empresas centradas en procesos productivos empezaron a dedicar sus estudios en el control de la calidad de sus productos, puesto que querían producir lo máximo posible a la vez que ofrecer un producto que tuviera una buena recepción por parte de los clientes, así como una garantía del mismo, de modo que no tuviera roturas antes de lo previsto. Es por esto que se introdujo el concepto de calidad de un producto, el cual se define como la inversa de la variabilidad (Montgomery, 2009) debido a que cuanta menos variabilidad se tenga en la producción, mejor lo percibirá el cliente puesto que se tendrá más seguridad de que no se producirá una rotura durante el tiempo de garantía que la empresa prevé. Es por ello que las empresas empezaron a plantearse la implementación de un CEP (Control Estadístico de Procesos) mediante el cual se pudiera controlar la variabilidad tanto de la producción como de los productos ya que de ella depende la calidad final que se ofrece al cliente. Los CEP ofrecen una gran utilidad a las empresas puesto que permiten detectar cuando se está realizando de manera incorrecta la producción, debido a que se tienen que cumplir unos requisitos mínimos de calidad, corregir ese fallo y de esta manera reducir la variabilidad del proceso productivo, además de que esta implementación conlleva un coste prácticamente despreciable para la empresa. Como consecuencia de la implantación del CEP, llegó el origen de los gráficos de control en 1924 de la mano de Shewhart, W.A. en su artículo (Shewhart, 1924), el cual introdujo el gráfico de control \bar{X} para los Laboratorios Bell. Posteriormente, desarrolló los métodos estadísticos para usarlos en los gráficos de control en (Shewhart, 1931).

2.2. Conceptos Fundamentales

En control de calidad no se busca realizar una inspección 100% debido a que, en algunos casos, conllevaría un enorme coste y pérdida de tiempo para la empresa. Lo que se hace es tomar una muestra aleatoria de la población con la que se estima el nivel de calidad de la población total. Se supone que la población sigue una distribución normal para los conceptos y resultados que se van a mostrar a continuación.

Un gráfico de control puede ser comprendido como test de hipótesis dibujado en un gráfico. Su aspecto se puede observar en la Figura 1.

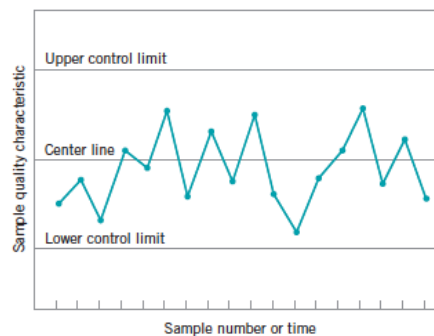


Figura 1: Ejemplo de gráfico de control \bar{X} (Montgomery, 2009)

Se tiene una línea central que corresponde al valor de la característica que se desea obtener. Se dibuja el valor de la característica de calidad, representado con un punto, en cada uno de los instantes en los que se ha medido y se unen con una línea. Hay dos límites de especificación: un límite superior (*USL*) y un límite inferior (*LSL*), los cuales son calculados normalmente por una persona que está muy familiarizada con el proceso productivo y tiene la certeza de qué límites son los tolerables para la característica de calidad estudiada. A la vista está que la imposición de estos límites no tiene ninguna base estadística y, por lo tanto, puede ser que el proceso esté bajo control y sin embargo haya situaciones que el gráfico muestre que el proceso está fuera de control. Esto es debido a que esta forma de colocar los límites de especificación en el gráfico de control no tiene en cuenta la variabilidad del proceso. Es por ello que se originó el control estadístico de calidad: para obtener unos límites de control acordes a la variabilidad que presenta el proceso productivo y de este modo asegurarse que, cuando un punto sale fuera de alguno de los límites de control, realmente es que ha habido un cambio en el proceso y no se trate de una falsa alarma.

Antes de explicar el gráfico de control \bar{X} a modo de ilustración de un gráfico de control, cabe destacar que podemos tener dos tipos de variabilidad en el proceso de producción:

- *Variabilidad innata*: Es la que sucede de manera natural en el proceso, ya sea por causas ocasionales o pequeñas causas inevitables que ocurren durante el proceso.
- *Variabilidad provocada por causas asignables*: Es aquella que se produce cuando ha habido un cambio en el proceso productivo que es consecuencia de una causa que se puede corregir, es decir: es un error de producción que se puede solventar y en el cual se puede intervenir, como por ejemplo cuando un operario comete un error en el proceso productivo o el material que se utiliza durante el proceso resulta defectuoso.

Es en esta última variabilidad en la que se centra el control de calidad debido a que es la culpable de que el proceso se encuentre fuera de control y en la que se puede actuar para que el proceso vuelva a estar bajo control.

Como se ha comentado anteriormente, un gráfico de control no es más que un test de hipótesis de la forma que se expresa en la Ecuación 1 en el caso del gráfico de control de Shewhart \bar{X} .

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde μ_0 representa la media del proceso bajo control.

Como consecuencia del test de hipótesis, hay dos tipos de error:

- *Error Tipo I*: Se rechaza H_0 cuando en realidad es cierta. Se denota α a la probabilidad de cometer el error Tipo I.
- *Error Tipo II*: H_0 es falsa, pero se acepta. Se denota β a la probabilidad de cometer el error Tipo II.

Un ejemplo de gráfico de control \bar{X} es el que se muestra en la Figura 2.

En este caso, los puntos que se dibujan en el gráfico de control corresponden a la media que se calcula para un tamaño de muestra n cada t unidades de tiempo.

Como la característica de calidad que se estudia en el gráfico de Shewhart sigue una distribución normal con media μ_0 y varianza σ_0^2 , los límites de control se especifican de la forma que se expone en la Ecuación 2.

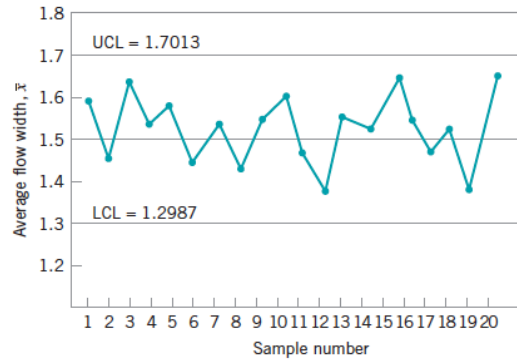


Figura 2: Ejemplo de un gráfico de control \bar{X}

$$\begin{cases} UCL = \mu_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right) \\ CL = \mu_0 \\ LCL = \mu_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right) \end{cases} \quad (2)$$

donde $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el correspondiente Z-percentil de la distribución normal asociada. En general, se utiliza el criterio 3-Sigma, es decir $\alpha = 0,0027$, dando lugar a un ARL_0 de 370. La definición de ARL se expondrá más adelante.

Observando la Figura 2, se tiene que la zona de aceptación es la región delimitada entre los dos límites de control y la zona de rechazo es la restante. Cuando se produce un cambio en la media del valor de la característica de calidad, se tiene una medida de dicho cambio, denotado por d y llamado *descentrado*, y representa la distancia entre la media en ese instante y la media bajo control, calculándose de la manera que se explicita en la Ecuación 3.

$$d = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma} \quad (3)$$

donde μ_1 es la media fuera de control y σ la varianza del proceso.

Para poder medir el desempeño de un gráfico de control, se tiene, entre otras medidas, el ARL (*Average Run Length*) que se define como el promedio de puntos que se tienen que dibujar en el gráfico de control hasta que el primero sale fuera de los límites de control. La definición matemática de este concepto aplicado al gráfico T^2 de Hotelling se mostrará en la Sección 3. Otra medida es el ATS (*Average Time to Signal*) que es el tiempo medio que transcurre hasta que el primer punto sale fuera de los límites de control. En este estudio, sólo se ha utilizado el ARL como medida del desempeño para el gráfico T^2 de Hotelling.

3. Control Estadístico de Procesos Multivariantes: Gráfico T^2 de Hotelling

3.1. Origen y Estudios sobre el gráfico de control T^2 de Hotelling

Antes de proceder a la descripción de las nociones básicas sobre el gráfico de control T^2 de Hotelling, se van a mostrar algunos de los estudios que se han realizado en el área del control estadístico multivariante, así como artículos relacionados con el origen del gráfico T^2 de Hotelling y avances que se han hecho en la construcción del mismo para solventar el problema de la detección cuando se producen cambios pequeños en el proceso productivo.

El origen del gráfico T^2 de Hotelling tuvo lugar en el artículo (Hotelling, 1947), en donde Harold Hotelling describe la construcción de dicho gráfico explicitando las definiciones de sus parámetros así como la definición del estadístico T^2 y la expresión del límite de control, asumiendo que las variables de las características de calidad a estudiar siguen una distribución normal.

Años más tarde, se publicó el artículo (Jackson, 1985), que es uno de los primeros artículos que se escribieron sobre el gráfico T^2 de Hotelling. En él se muestra que antes y después de la segunda guerra mundial, se generó una motivación por estudiar el control estadístico de la calidad debido a los requisitos que pedían los gobiernos de América y Gran Bretaña. Como consecuencia de no disponer del material necesario para el estudio del control estadístico de la calidad multivariante, no fue hasta la creación de los ordenadores cuando se pudo empezar a estudiar el campo multivariante. En este artículo también se hace referencia a la relación entre el control de calidad y la técnica multivariante de Componentes Principales. Este estudio es interesante, puesto que ofrece otra forma de calcular el estadístico T^2 de Hotelling a través del producto escalar de las nuevas componentes principales obtenidas de las características de calidad originales. También se muestra que cualquier control multivariante de procesos debe aportar respuesta a las siguientes condiciones:

1. ¿Está el proceso bajo control?
2. El error Tipo I puede ser mantenido.
3. Estas técnicas tienen en cuenta la relación entre las variables de calidad consideradas.
4. Si el proceso está fuera de control, ¿a qué se debe?

Cabe destacar que (Lowry y Montgomery, 1995) es uno de los artículos más importantes en el área de control de calidad multivariante, pues fue uno de los pioneros en mostrar recomendaciones de uso de los gráficos MCUSUM, MEWMA y T^2 de Hotelling y es la base de muchos estudios que se han realizado en este campo. Es uno de los artículos más citados en el campo del control estadístico de calidad multivariante.

Un año más tarde, se realiza el artículo (Aparisi, 1996) en donde se desarrolla el gráfico T^2 de Hotelling con Tamaño de Muestra Variable (T^2 TMV) con la finalidad de incrementar el poder de detectar un cambio en el proceso al gráfico T^2 de Hotelling. Se muestra que el ARL fuera de control para el gráfico de T^2 de Hotelling con tamaño de muestra variable es más pequeño que el obtenido para el gráfico T^2 de Hotelling. Por tanto, si se utiliza el tamaño de muestra variable, se incrementa el poder de detección del gráfico T^2 de Hotelling.

El artículo (Nedumaran y Pignatiello Jr, 2000) fue uno de los primeros en mostrar el efecto de la estimación en la construcción del límite de control del gráfico T^2 de Hotelling y aporta recomendaciones para su construcción correcta, todo esto sin tener en cuenta la limitación del tamaño de muestra.

En (Aparisi y Haro, 2001), se desarrolla la técnica del Intervalo de Muestra Variable (VSI) con el que se consigue que el gráfico T^2 de Hotelling sea más rápido en detectar cambios pequeños en el proceso. Para comparar el desempeño del gráfico T^2 de Hotelling con VSI frente al T^2 original, se utiliza el ATS. Se muestra que el ATS obtenido para el VSI es más pequeño que el del original y, por consiguiente, se detectan antes las situaciones fuera del control del proceso. Poco tiempo después, se hizo un estudio para determinar si era posible aumentar más el poder de detección del gráfico T^2 de Hotelling. Este estudio fue (Aparisi y Haro, 2003), en el que se desarrolla el gráfico T^2 de Hotelling con Tamaño de Muestra Variable e Intervalo de Muestra Variable (VSSVSI). Se muestra que el T^2 VSSVSI es mucho más eficiente que el T^2 , e incluso se obtiene un ATS muy pequeño para muestras pequeñas, lo que produce que se detecte con rapidez un cambio en el proceso. Este detalle es interesante, puesto que hay situaciones en las que se disponen de tamaños de muestra muy limitados. Por otro lado, se expone que cuando se producen cambios muy pequeños en el proceso, el gráfico MEWMA sigue siendo más eficiente que el T^2 VSSVSI para detectarlos, aunque a partir de cambios mayores que 0,5, el gráfico T^2 VSSVSI es, generalmente, la mejor opción.

El artículo (Champ *et al.*, 2005) es muy interesante, pues se demuestra que la distribución del RL , que es el número de secuencias de muestreo en el que se observa la primera señal, del gráfico T^2 de Hotelling cuando está bajo control no depende de los parámetros del proceso: solo depende del número de variables, el tamaño de muestra y el número de muestras; pero si está fuera de control sólo depende de la distancia estadística, que en este caso es la distancia de Mahalanobis entre los vectores de media bajo control y fuera de control, suponiendo que la matriz de covarianzas Σ_0 no cambia, además de los parámetros de los que depende cuando está bajo control. Esto nos indica que el efecto de la estimación se va a dar en la Fase II, que es cuando monitoreamos y se producen cambios en el proceso. También se dan recomendaciones del tamaño de muestras total $m * n$ para que el ARL bajo control que se obtiene al estimar los parámetros sea lo más cercano posible, aproximadamente un $\pm 5\%$ del valor deseado. Para el caso $p = 2$ se recomienda un tamaño de muestral total de, al menos, $m * n = 900$.

Continuando con la construcción de nuevas reglas para el T^2 de Hotelling con la finalidad de aumentar su poder de detección ante cambios pequeños en el proceso y a la vez saber en qué variable(s) se ha(n) producido el cambio, en (Aparisi *et al.*, 2006) se estudia el problema de detectar en qué variable(s) se ha producido un cambio cuando el gráfico T^2 de Hotelling detecta un cambio en el proceso. Para ello, se enfocan en las redes neuronales y comparan los resultados obtenidos con un procedimiento que ya estaba desarrollado con anterioridad: el método MTY, desarrollado en (Mason *et al.*, 1995) y (Mason *et al.*, 1997). Consiste en descomponer el estadístico T^2 de Hotelling en varios términos, de modo que cada término está asociado a una variable del proceso. Si un término es significativo, entonces la variable asociada es la que ha cambiado en el proceso. Este método era considerado el más efectivo, pero en realidad no se había comprobado su efectividad. Es por ello que en este artículo se plantearon desarrollar otra técnica para averiguar qué variable(s) ha(n) cambiado en el proceso, y optaron por las redes neuronales. Sorprendentemente, en la mayoría de los cambios que se pueden producir en el proceso, la red neural arrojaba mejores resultados que el método MTY y era más sencillo de utilizar, ya que desarrollaron un software, para los casos en los que hay dos o tres variables de calidad en el proceso, en el que indica qué variable(s) había(n) cambiado pulsando solamente un botón. El desempeño del gráfico T^2 para los dos métodos se ha medido con el porcentaje de clasificación correcta de las variables, es decir: el porcentaje de veces que los métodos acertaban el estado de las variables, que es *cambia* y *no cambia*.

En el artículo (Jensen *et al.*, 2006) muestran algunos de los estudios que se han hecho sobre el efecto de la estimación de los parámetros del gráfico de control sobre su desempeño en la Fase II. Se centra principalmente en los gráficos de control Shewhart, R, S, S^2 , EWMA, aunque también hace referencia a los gráficos de control multivariantes. Se muestra que este desempeño se ha estudiado principalmente sobre el ARL bajo control y no se ha visto cómo afecta esta estimación sobre el ARL fuera de control y hace hincapié en prestar atención en la manera de elegir el tamaño de la muestra para estimar los parámetros del gráfico de control, ya que de éstos depende el desempeño que se obtiene en la Fase II y si se realiza una mala estimación, obtendremos resultados que serán incorrectos.

También se han realizado estudios sobre revisiones bibliográficas destacando los más importantes avances en el campo multivariante, como es el caso de (Bersimis *et al.*, 2007), en el cual se realiza una amplia revisión bibliográfica de los avances más importantes que se han realizado en el campo de los gráficos de control multivariantes, así como una explicación clara y concisa de los aspectos más importantes del gráfico de control T^2 de Hotelling y una breve explicación de otros gráficos de control multivariantes, como los gráficos de control MCUSUM y MEWMA.

Siguiendo con estudios sobre el efecto de la estimación de los parámetros sobre el desempeño de los gráficos multivariantes, el artículo (Champ y Jones-Farmer, 2007) se centra en el efecto de estimar los parámetros en los gráficos de control MEWMA y MCUSUM. Se muestra que, al utilizar los parámetros estimados en lugar de sus valores originales, el número de falsas alarmas se incrementa dramáticamente debido a que se reduce el ARL bajo control.

En (Aparisi y Sanz, 2010) se desarrolla una técnica basada en redes neuronales para detectar en qué variable(s) se ha producido un cambio ante una situación fuera de control. En este caso, se emplea el gráfico de control multivariante MEWMA, el cual tiene información tanto del presente como del pasado y es muy eficiente a la hora de detectar cambios pequeños en el proceso.

También hay estudios que comparan la efectividad entre los distintos gráficos de control multivariantes, como es el caso de (Faraz *et al.*, 2011). En él se comparan los gráficos T^2 de Hotelling original y VSI mediante el AATS, que es la media del ATS, que significa el tiempo medio desde el inicio del proceso hasta la primera señal después de que el proceso haya cambiado, resultando que el T^2 de Hotelling VSI es más rápido en detectar los cambios en el proceso que el T^2 original.

Por último, destacar que (Psarakis *et al.*, 2014) muestra una revisión extensa de la literatura de los gráficos de control tanto univariantes como multivariantes más utilizados.

3.2. Nociones Básicas del gráfico T^2 de Hotelling

Uno de los motivos por los que se optó por construir el gráfico T^2 de Hotelling para controlar un proceso en el que hay más de una variable de calidad a tener en cuenta, fue el hecho de poder determinar α , que es la probabilidad de cometer error Tipo I, de forma que se mantuviera el de diseño. Esto viene debido a que, tal y como se muestra en (Jackson, 1985), si se construyeran p gráficos \bar{X} , uno para cada variable de calidad y asumiendo que son independientes entre sí, la probabilidad de falsa alarma sería más elevada de la que se espera, ya que dicha probabilidad sería:

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p$$

donde α' es la probabilidad de falsa alarma del conjunto de gráficos. Por tanto, si se supone que hay 8 gráficos \bar{X} al mismo tiempo y se desea una probabilidad de falsa alarma $\alpha = 0,0027$ para cada uno de los gráficos, se tiene que la probabilidad de falsa alarma del conjunto es $\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^8 = 0,021$. Como consecuencia, el 2,1 % de las muestras señalarán una falta de control, es decir: uno o más gráficos indicarán falsa señal de falta de control en el 2,1 % de las muestras. Para remediar esta diferencia entre α y α' , se tiene que calcular α' de manera que el gráfico total tuviera el α que se desea. Este procedimiento es laborioso y por ello se opta por la construcción del gráfico T^2 de Hotelling, ya que éste poseerá la probabilidad de error Tipo I que se desea sin tener que realizar procedimientos tediosos.

El gráfico T^2 de Hotelling fue creado en (Hotelling, 1947), el cual corresponde al test de hipótesis multivariante descrito en la Ecuación 4. En él se representa el estadístico T^2 de Hotelling que describirá más adelante. Un ejemplo de gráfico de control T^2 de Hotelling puede verse en la Figura 3.

$$\begin{cases} H_0 : \vec{\mu} = \vec{\mu}_0 \\ H_1 : \vec{\mu} \neq \vec{\mu}_0 \end{cases} \quad (4)$$

donde $\vec{\mu}_0$ representa el vector de medias cuando del proceso bajo control, y se denota como $\vec{\mu}_0' = (\mu_{0,1}, \mu_{0,2}, \dots, \mu_{0,p})$; y $\vec{\mu}$ es el vector de medias en el momento en el que se toma la muestra. Por consiguiente, lo que se comprueba con cada muestra es si se puede aceptar que todas las medias permanecen bajo control. Para poder realizar el test descrito en la Ecuación 4, se extrae una muestra de tamaño n del proceso, con la cual se calcula, para cada una de las p variables consideradas, su media muestral, denotada por \bar{X}_i . Se asume que las p variables de calidad a estudiar siguen una distribución normal.

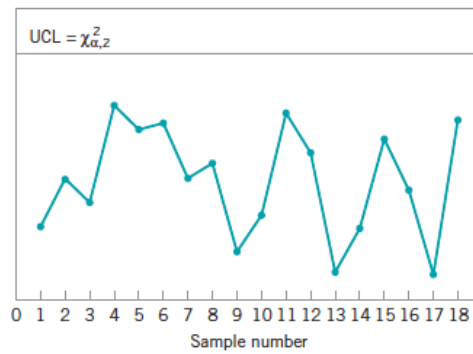


Figura 3: Ejemplo de gráfico de control T^2 de Hotelling (Montgomery, 2009)

Por tanto, tenemos el vector de medias muestrales formado por cada media muestral de cada variable, cuya expresión es:

$$\vec{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

Por otro lado, se tiene el estadístico T^2 de Hotelling, que se calcula de la manera que se explicita en la Ecuación 5.

$$T_i^2 = n(\vec{\bar{X}}_i - \vec{\mu}_0)' \Sigma_0^{-1} (\vec{\bar{X}}_i - \vec{\mu}_0) \quad (5)$$

donde $\vec{\bar{X}}_i$ es el vector de medias muestral formado por las medias de las p variables consideradas, y Σ_0 es la matriz de varianzas-covarianzas que guarda la estructura de correlación entre las variables cuando el proceso está bajo control. Se denotan, tal y como se muestra en (Aparisi *et al.*, 2006) y (Aparisi, 1996) respectivamente, de la manera que se expone en la Ecuación 6. Destacar que el estadístico T^2 es estrictamente positivo debido a que se asume que Σ_0 es definida positiva.

$$\vec{\bar{X}}_i = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p) \quad \text{y} \quad \Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{0,1}^2 & \rho\sigma_{0,1}\sigma_{0,2} & \dots & \rho\sigma_{0,1}\sigma_{0,p} \\ \cdot & \sigma_{0,2}^2 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho\sigma_{0,1}\sigma_{0,p} & \cdot & \cdot & \sigma_{0,p}^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Destacar que el estadístico T^2 es estrictamente positivo, ya que se asume que Σ_0 es definida positiva.

Si los parámetros $\vec{\mu}_0$ y Σ_0 han sido estimados durante la Fase I, se obtiene la siguiente expresión para el estadístico T^2 :

$$T_i^2 = n(\vec{\bar{X}}_i - \vec{\bar{X}})' \vec{S}_0^{-1} (\vec{\bar{X}}_i - \vec{\bar{X}}) \quad (7)$$

donde $\vec{\bar{X}}$ es el vector formado por la media de las medias de cada variable y \vec{S}_0 es la matriz de varianzas-covarianzas muestral, que se calculan de la manera que se indica en la Ecuación 8 (Lowry y Montgomery, 1995).

$$\vec{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \vec{X}_i \quad \text{y} \quad S_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \quad (8)$$

donde m es el número de muestras consideradas y S_i es la matriz de varianzas-covarianzas de cada muestra.

En el caso de que el vector de medias $\vec{\mu}_0$ y la matriz de varianzas-covarianzas Σ_0 son conocidos, el límite de control para el gráfico de control T^2 de Hotelling queda determinado por la siguiente expresión:

$$LC = \chi^2_{p,\alpha} \quad (9)$$

donde p es el número de variables de calidad consideradas en el control del proceso, y α es la probabilidad de falsa alarma que se ha establecido a través del ARL bajo control que se desea. Tal y como se puede comprobar en la Ecuación 9, el límite de control para el T^2 de Hotelling no depende del vector de medias ni de la matriz de varianzas-covarianzas del proceso. Esto es importante tenerlo en cuenta, puesto que la influencia de la estimación de $\vec{\mu}_0$ y Σ_0 se verá reflejado al calcular el estadístico T^2 , no sobre el límite de control.

Puesto que durante este estudio trabajaremos con un tamaño de muestras total $m * n$ mayor de 25, siguiendo las recomendaciones de (Jackson, 1985), construiremos el límite de control como se ha definido en la Ecuación 9, aunque los parámetros del gráfico T^2 de Hotelling sean estimados.

Acudiendo a la definición expuesta en la Sección 2, tenemos que el ARL bajo control (ARL_0) se calcula de la forma que se expone en la Ecuación 10.

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (10)$$

Por otro lado, cuando se presenta un cambio en el proceso, el estadístico T^2 sigue una distribución Chi-Cuadrado no central con p grados de libertad y parámetro de no centralidad $\lambda = n(\vec{\mu} - \vec{\mu}_0)' \Sigma_0^{-1} (\vec{\mu} - \vec{\mu}_0) = nd^2$, donde $d = \sqrt{(\vec{\mu} - \vec{\mu}_0)' \Sigma_0^{-1} (\vec{\mu} - \vec{\mu}_0)}$ es la distancia de Mahalanobis entre el vector de medias del proceso bajo control y el vector de medias cuando el proceso está fuera de control. Por tanto, el ARL fuera de control (ARL_1) se obtiene de la manera que se expone en la Ecuación 11.

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - P(\text{señal})} \quad (11)$$

donde $P(\text{señal})$ es la probabilidad de que un punto sobrepase el límite de control del gráfico T^2 de Hotelling, es decir: $P(\text{señal}) = P(\chi_{p,\lambda}^2 > LC)$.

3.3. Fase I y Fase II del Control Estadístico de la Calidad en el gráfico T^2 de Hotelling

Para comprobar si el proceso está bajo control, es decir si su media y varianza son constantes, se ha visto en la Sección 2 que es necesario utilizar un gráfico de control, el cual nos dirá en cada muestra que seleccionamos aleatoriamente si se puede aceptar que el proceso se encuentra bajo control.

En este caso, al estar trabajando con el gráfico T^2 de Hotelling, se tiene que límite de control no depende del vector de medias ni de la matriz de varianzas-covarianzas: sólo depende del número de variables de calidad que se desea medir en el proceso y el α considerado. Sin embargo, se tiene que saber $\vec{\mu}_0$ y Σ_0 para calcular el estadístico T^2 para ver si el proceso sigue bajo control, pero se debe tener certeza de que tanto $\vec{\mu}_0$ como Σ_0 son constantes, y eso no se puede saber sin construir el gráfico de control, pero $\vec{\mu}_0$ y Σ_0 son desconocidos. De este modo, se entra en un problema de circularidad en el cual no se puede emplear el gráfico de control sin saber si $\vec{\mu}_0$ y Σ_0 son constantes, pero sólo el gráfico de control lo puede comprobar. Para resolver este problema, se opta por dividir el control de calidad en dos etapas: *Fase I* y *Fase II*.

- Fase I: Su objetivo es estimar $\vec{\mu}_0$ y Σ_0 y comprobar si son estables. Se podría decir que es una fase de estimación y comprobación. Cabe destacar que sólo se puede controlar un proceso en el momento que se asegura que esté bajo control. El procedimiento consiste en tomar m muestras de tamaño n , de las que se calculan $\vec{\mu}$ y Σ y se obtiene el estadístico T^2 . Se grafican cada uno de los estadísticos T^2 asociados a cada muestra y si se cumple que todos ellos están por debajo del límite de control, aceptaremos que el proceso está bajo control y por tanto ya se tendrán las estimaciones $\hat{\vec{\mu}}_0$ y $\hat{\Sigma}_0$.
- Fase II: Una vez que se comprueba que el objetivo de la Fase I se ha cumplido, se da comienzo al monitoreo del proceso con los valores de $\vec{\mu}_0$ y Σ_0 estimados previamente en la Fase I.

4. Metodología

En esta sección, se va a exponer el procedimiento que se ha seguido para realizar las simulaciones explicitando los parámetros que se han considerado así como los valores de ARL_0 , número de muestras (m), tamaño de muestra (n), descentrado (d), tolerancia de ambos ARL's (tol) y corrección para el límite de control (*corrección*). Estas simulaciones se han realizado con el software de Windows *simT2* desarrollado por Aparisi García, Francisco José (2017) cuyo código se adjunta en el Anexo.

Dado que no se pueden saber los parámetros $\vec{\mu}$ y Σ reales del proceso, se estiman tomando una muestra de tamaño n , produciéndose un error al estimarlas. Como consecuencia de este error, se tiene que el α_{real} , que es la probabilidad de falsa alarma, no es el mismo que $\alpha_{nominal}$ teóricamente considerado. Por tanto, el ARL_0 *nominal* será distinto al ARL_0 *real*. Por ejemplo, si se tiene que el α_{real} es más grande que el $\alpha_{nominal}$, entonces el ARL_0 *real* será más pequeño que el ARL_0 *nominal* como consecuencia de la definición de ARL bajo control. Por tanto, debido al error comentado al estimar $\hat{\mu}_0$ y $\hat{\Sigma}_0$ en la Fase I, se tendrá que el ARL_0 *real* será más grande o más pequeño que el deseado, que es el ARL_0 *nominal*.

En el caso del gráfico T^2 de Hotelling, α representa el porcentaje de veces que el estadístico T^2 supera el límite de control. Como se expuso en la Sección 3, el gráfico de control T^2 de Hotelling sólo posee un límite de control y no depende de $\hat{\mu}_0$ y $\hat{\Sigma}_0$. El problema viene al calcular el ARL_0 , ya que la distancia T^2 de Hotelling utiliza $\hat{\mu}_0$ y $\hat{\Sigma}_0$, y α se calcula de la manera que se ha descrito anteriormente. Por otro lado, β es el porcentaje de veces que el estadístico T^2 no supere el límite de control cuando se produzca un cambio en el proceso. De esta forma, se calculará el ARL_0 con α y ARL_1 con β , obteniendo puntos cuyas coordenadas son estos dos ARL's.

Para solventar el problema de la variación del ARL_{real} respecto del $ARL_{nominal}$, se tomarán m muestras de tamaño n , se calculará el estadístico T^2 para cada una de esas muestras, se obtendrán ARL_0 y ARL_1 y se irán graficando los puntos obtenidos en un gráfico ARL_1 frente a ARL_0 , de manera que se representará con un punto verde el ARL_0 y ARL_1 que se obtendrían teóricamente y los puntos azules serán los obtenidos en las simulaciones. Este gráfico se puede observar en la Figura 4. Una vez terminado el muestreo, se obtiene el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño para cada ARL así como en conjunto ($ARL_0 \cap ARL_1$).

Como se ha comentado en la Sección 1, se va a realizar una corrección sobre el límite de control, y se evaluará el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño tanto de

los ARL's como en conjunto. Destacar que aumentar el límite de control, siempre hará aumentar el valor real de ARL_0 del gráfico, de manera que los ARL_0 que sean altos, serán más altos, lo que producirá menos falsas alarmas todavía cuando el proceso se encuentre bajo control, y los que salgan bajos, mejorarán con ese ajuste. Sin embargo, hay que tener en cuenta que al disminuir α , aumenta β . Por tanto, se está estropeando el ARL_1 y se tiene que, sea cual sea el gráfico obtenido, al aumentar el límite de control se aumentará tanto ARL_0 como ARL_1 . Sin embargo, el efecto puede ser beneficioso sobre la probabilidad conjunta dado que se puede obtener una probabilidad conjunta mejor, aunque se estropee algo la probabilidad de ARL_1 debido a que el efecto de la corrección del límite de control sobre ARL_1 es menor que sobre ARL_0 . Es por ello que se va a realizar una corrección sobre el límite de control en algunos casos que se indicarán más adelante.

Antes de proceder a describir cómo se han realizado las simulaciones en el software, cabe destacar que, por un resultado sobre números aleatorios multivariantes, resulta que si se tienen variables aleatorias que no siguen una distribución normal pero están relacionadas entre sí (como es el caso de este estudio), realizando la descomposición de Cholesky de la matriz de varianzas covarianzas Σ , quedando $\Sigma = AA'$, generando números aleatorios de una distribución normal multivariante de media 0 y varianza 0, y contruyendo la combinación $\mu + AZ$, se tiene que ésta sigue una distribución normal multivariante de media μ y varianza Σ .

Debido a esto, el software tomará números aleatorios de una distribución normal multivariante de media 0 y varianza 1, se aplicará la descomposición de Cholesky a la matriz de varianzas-covarianzas Σ y se contruirán las nuevas variables que siguen una distribución normal multivariante, como se ha descrito anteriormente.

Una vez descrito el procedimiento mediante el cual se va a estudiar el desempeño del gráfico de control T^2 de Hotelling, se procede a detallar cómo se han realizado las simulaciones a través del software *simT2* de Aparisi García, Francisco José (2017).

Como se puede apreciar en la Figura 4, se han considerado 3000 iteraciones para cada una de las simulaciones realizadas. Los parámetros del simulador y los valores que se han utilizado se explicitan a continuación.

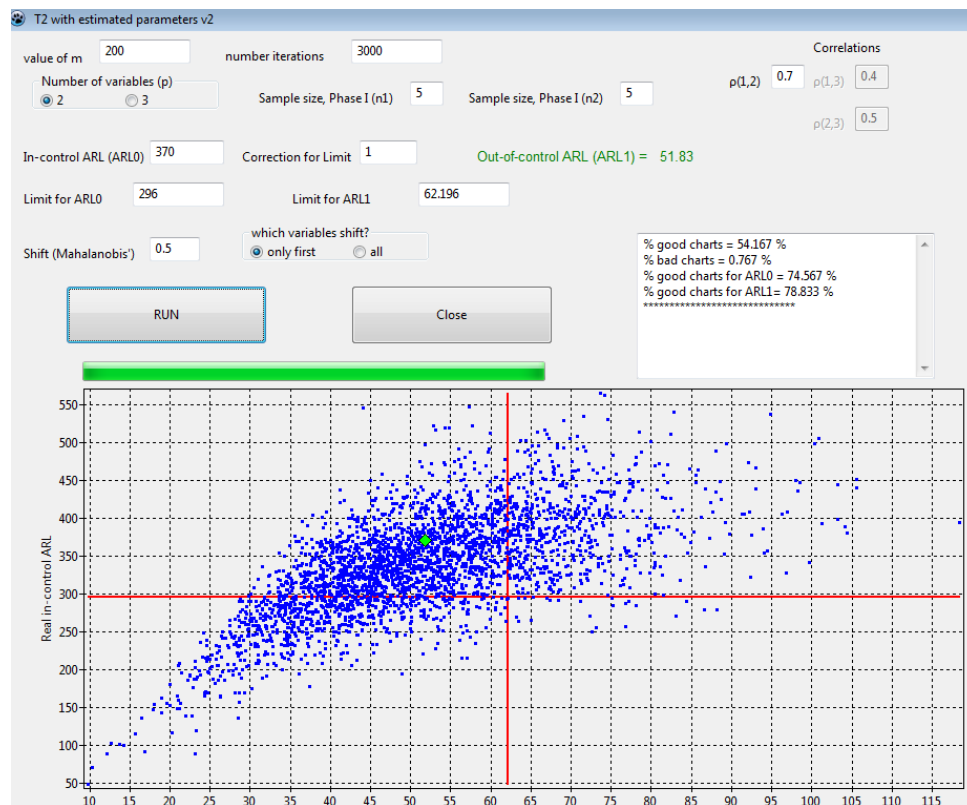


Figura 4: Simulador T2 with estimated parameters v2

- m es el número de muestras de cada simulación. Se han considerado 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 1500, 2000, 2500 y 3000. Estos dos últimos valores se han utilizado cuando la tolerancia de los límites de control de los ARL's es del 10% para que se obtuviera cerca del 95% de gráficos conformes en el desempeño para ARL_0 .
- p es el número de variables de calidad que se miden durante el proceso. En este caso, se consideran 2 y 3 variables.
- $\rho(i, j)$ representa la correlación entre las variables i y j . En este caso, se van a dejar los valores por defecto que se muestran en la Figura 4.
- n_0 y n_1 son los tamaños de muestra para la Fase I y Fase II, respectivamente. Como este estudio se centra en el caso del gráfico de control T^2 de Hotelling con tamaño de muestra fijo, se tiene que $n_0 = n_1$ y se denotará como n . Los valores que se han tenido en cuenta son 3 y 5.

- d es la distancia de Mahalanobis entre el vector de medias bajo control y el vector de medias actual cuando se produce un cambio en el proceso. Para este estudio, se han tenido en cuenta descentrados de 1, 0,5 y 0,25.
- ARL_0 es el número medio de simulaciones que se realizan hasta que la primera de ellas sale fuera del límite de control cuando el proceso está bajo control. En este caso, se han considerado los valores más habituales que son 200 y 370.
- ARL_1 es el número medio de simulaciones que se ejecutan hasta que la primera de ellas sale fuera del límite de control cuando el proceso está fuera de control.
- Los límites para ARL_0 y para ARL_1 se calculan en base a la tolerancia ε que se está dispuesto a permitir para los ARL's. Se han considerado unas tolerancias del 10% y 20%, obteniendo el valor máximo permitido para cada uno de los ARL's de la forma que se expone en las Ecuaciones 12 y 13, respectivamente, puesto que se desea que se detecten las menos falsas alarmas posibles y cuanto antes los cambios que se produzcan en el proceso.

$$\text{Limit for } ARL_0 = ARL_0 \cdot (1 - \varepsilon) \quad (12)$$

$$\text{Limit for } ARL_1 = ARL_1 \cdot (1 + \varepsilon) \quad (13)$$

- Respecto a las variables que cambian en el proceso, que está en la opción **variables shift**, se considera durante todas las simulaciones la opción **only first** en el caso $p = 2$ y la opción **all** para el caso $p = 3$.
- La **corrección** que se va a aplicar sobre el límite de control es del 1% y 3%, y sólo en el caso del $ARL_0 = 370$, tamaño de muestra $n = 5$, número de variables $p = 2$ y descentrado $d = 0,5$. El límite de control aplicando la corrección se calcula de la manera que sigue:

$$LC_{\text{con corrección}} = LC \cdot (1 + \% \text{ de Corrección}) \quad (14)$$

Por tanto, se tienen los casos que se indican en las Tablas 1 y 2 para $p = 2$ y $p = 3$, respectivamente, que corresponden a cada una de las combinaciones que se obtienen con los valores de los parámetros descritos anteriormente, en donde se indica también los ARL's fuera de control que se obtienen para cada descentrado, así como el valor límite permitido para cada ARL.

Tabla 1: Parámetros del simulador para $p=2$

p	n	ε	d	ARL_0	$Limit ARL_0$	ARL_1	$Limit ARL_1$
2	3	10%	0.25	200	180	130.32	143.352
				370	333	230.41	253.451
			0.5	200	180	55.33	60.863
				370	333	90.82	99.902
			1	200	180	10.51	11.561
				370	333	14.98	16.478
		20%	0.25	200	160	130.32	156.384
				370	296	230.41	276.492
			0.5	200	160	55.33	66.396
				370	296	90.82	108.984
			1	200	160	10.51	12.612
				370	296	14.98	17.976
	5	10%	0.25	200	180	103.36	113.696
				370	333	178.88	196.768
			0.5	200	180	32.94	36.234
				370	333	51.83	57.013
			1	200	180	4.92	5.412
				370	333	6.50	7.15
		20%	0.25	200	160	103.36	124.032
				370	296	178.88	214.656
			0.5	200	160	32.94	39.528
				370	296	51.83	62.196
			1	200	160	4.92	5.904
				370	296	6.50	7.80

Dado que se tienen m muestras de tamaño n en cada simulación, el tamaño de muestras total con el que se va a trabajar es $m * n$ y los resultados que se indican en la Sección 5 se indican con este tamaño de muestras, al igual que los gráficos que se exponen en la misma.

Para concluir esta sección, se indican los pasos que se han seguido para la obtención del desempeño del gráfico T^2 de Hotelling a través de las simulaciones realizadas con los parámetros mencionados anteriormente:

1. Se introducen el número de muestras, el descentrado, el tamaño de muestra tanto en la Fase I como en la Fase II, el número de variables y el ARL bajo control que se desea.
2. Con el ARL fuera de control calculado por el simulador, se determinan los valores límites de cada uno de los ARL dependiendo de la tolerancia que se decida permitir.
3. Se ejecuta la simulación, calculándose el estadístico T^2 y los valores de ARL_0 y ARL_1 reales en cada iteración. Cuando finaliza, se obtiene el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño para cada uno de los ARL's, así como en conjunto.

Tabla 2: Parámetros del simulador para $p=3$

p	n	ε	d	ARL_0	Limit ARL_0	ARL_1	Limit ARL_1
3	3	10%	0.25	200	180	142.39	156.629
				370	333	253.95	279.345
			0.5	200	180	67.68	74.448
				370	333	113.11	124.421
			1	200	180	13.58	14.938
				370	333	19.80	21.78
		20%	0.25	200	160	142.39	170.868
				370	296	253.95	304.74
			0.5	200	160	67.68	81.216
				370	296	113.11	135.732
			1	200	160	13.58	16.296
				370	296	19.80	23.76
	5	10%	0.25	200	180	117.40	129.14
				370	333	205.72	226.292
			0.5	200	180	41.75	45.925
				370	333	67.02	73.722
			1	200	180	6.21	6.831
				370	333	8.39	9.229
		20%	0.25	200	160	117.40	140.88
				370	296	205.72	246.864
			0.5	200	160	41.75	50.10
				370	296	67.02	80.424
			1	200	160	6.21	7.452
				370	296	8.39	10.068

Se realizan estos pasos para cada uno de los casos que se han indicado en las Tablas 1 y 2 considerando que no se realiza ninguna corrección en el límite de control del gráfico T^2 de Hotelling. Tal y como se ha indicado en la Sección 1, el desempeño del gráfico de control efectuando una corrección en el límite de control es un objetivo secundario de este trabajo, por lo que se ejecutarán las simulaciones pertinentes a los valores de la corrección indicados anteriormente y se comentarán los resultados en la Sección 5 a modo de comparación con los obtenidos sin realizar dichas correcciones.

5. Resultados

En esta sección, se expondrán los resultados obtenidos con las simulaciones realizadas en el software *simT2* de Aparisi García, Francisco José (2017) con los parámetros que se han descrito en la Sección 4, de manera que se muestre la influencia de la Fase I en el desempeño real en Fase II del gráfico T^2 de Hotelling. Esta influencia se mostrará con el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño del ARL_0 , ARL_1 y en conjunto. Asimismo, se mostrarán con gráficos la comparación del porcentaje de gráficos conformes en el desempeño de los ARL's bajo control, fuera de control y en conjunto de algunas de las simulaciones con el objetivo de visualizar mejor estos resultados. Cabe destacar que las tablas aportadas a continuación engloban los 4 casos considerados para cada número de variables p considerados, ya que se han unido las tablas de los resultados para los dos ARL_0 considerados que se han indicado en la Sección 4.

5.1. Desempeño real del Gráfico de Control T^2 de Hotelling en Fase II

En primer lugar, se muestran los resultados para $p = 2$ cuyos parámetros asociados que se han utilizado para realizar las simulaciones son los indicados en la Tabla 1 de la Sección 4. A continuación, se expondrán los resultados obtenidos para $p = 3$ cuyos parámetros asociados se han indicado en la Tabla 2 de la Sección 4. Para cada uno de los valores que se han considerado para el número de variables p , se han obtenido 4 casos de los que se exponen los resultados relevantes al porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto en Fase II del gráfico T^2 de Hotelling, así como conclusiones finales que se mostrarán al final de los resultados de cada número de variables p considerado. A su vez, se mostrarán gráficos de manera que se puedan apreciar con más claridad las conclusiones obtenidas.

Tabla 3: Desempeño con $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370 , $n = 3$ y 10% de tolerancia

DESIGN PARAMETERS							
ARL(0)	%Tol	n0		ARL(0)	%Tol	n0	
200	0,1	3		370	0,1	3	
d	m*n	(%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1)		d	m*n	(%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1)	
0,25	60	5,167 ; 20,633 ; 80,767		0,25	60	4,3 ; 19,567 ; 80,833	
	150	9,4 ; 27,167 ; 78,2			150	8,567 ; 25,567 ; 78,367	
	300	15,333 ; 38 ; 74,933			300	13,167 ; 35,433 ; 74,533	
	600	25,4 ; 48,733 ; 75,5			600	21,667 ; 46 ; 74,233	
	1500	42,467 ; 64,133 ; 78,3			1500	37,167 ; 60,633 ; 76,4	
	3000	59,267 ; 77,367 ; 81,9			3000	52,067 ; 73,2 ; 78,867	
	4500	68,367 ; 83,033 ; 85,333			4500	61,2 ; 78,6 ; 82,6	
	6000	75,167 ; 87,067 ; 88,1			6000	68,5 ; 83,9 ; 84,6	
	7500	79,867 ; 90,567 ; 89,3			7500	72,267 ; 86,767 ; 85,5	
	9000	82,1 ; 91,2 ; 90,9			9000	74,833 ; 87,333 ; 87,5	
0,5	60	4,7 ; 20,633 ; 71,767		0,5	60	3,967 ; 19,567 ; 72	
	150	8,7 ; 27,167 ; 69,733			150	7,9 ; 25,567 ; 69,733	
	300	13,933 ; 38 ; 68,467			300	12,6 ; 35,433 ; 68,367	
	600	22,767 ; 48,733 ; 69,667			600	19,433 ; 46 ; 68,333	
	1500	38,667 ; 64,133 ; 73,5			1500	33,667 ; 60,633 ; 71,367	
	3000	55,033 ; 77,367 ; 77,5			3000	48,567 ; 73,2 ; 74,867	
	4500	64,533 ; 83,033 ; 81,433			4500	57,6 ; 78,6 ; 78,8	
	6000	72,233 ; 87,067 ; 85,1			6000	66,433 ; 83,9 ; 82,4	
	7500	76,933 ; 90,567 ; 86,367			7500	70,567 ; 86,767 ; 83,733	
	9000	79,7 ; 91,2 ; 88,5			9000	73,1 ; 87,333 ; 85,667	
1	60	4,3 ; 20,633 ; 62,733		1	60	3,667 ; 19,567 ; 62,367	
	150	8,533 ; 27,167 ; 63,5			150	7,767 ; 25,567 ; 62,933	
	300	14,5 ; 38 ; 65,6			300	12,533 ; 35,433 ; 64,333	
	600	23,667 ; 48,733 ; 68,333			600	20,567 ; 46 ; 66,867	
	1500	39,667 ; 64,133 ; 73,633			1500	34,633 ; 60,633 ; 71,267	
	3000	57,267 ; 77,367 ; 79,433			3000	50,533 ; 73,2 ; 76,467	
	4500	67,167 ; 83,033 ; 83,9			4500	59,733 ; 78,6 ; 80,633	
	6000	74,967 ; 87,067 ; 87,767			6000	69,1 ; 83,9 ; 84,933	
	7500	79,533 ; 89,6 ; 89,433			7500	72,733 ; 86,767 ; 85,867	
	9000	83,167 ; 91,2 ; 91,933			9000	76,133 ; 87,333 ; 88,7	

Como se puede apreciar en la Tabla 3, para un tamaño de muestra $n = 3$, una tolerancia del 10% y los descentrados descritos en la Sección 4, se obtiene un porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto mayor de 70% a partir del tamaño de muestras total $m * n$ de 6000 en el caso de $ARL_0 = 200$ y de 7500 en el de $ARL_0 = 370$.

Tabla 4: Desempeño con $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370 , $n = 3$ y 20% de tolerancia

DESIGN PARAMETERS							
ARL(0)	%Tol	n0		ARL(0)	%Tol	n0	
200	0,2	3		370	0,2	3	
d	m*n	%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1		d	m*n	%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1	
0,25	60	10,067 ; 25,267 ; 83,367		0,25	60	8,333 ; 23,467 ; 83,067	
	150	20,3 ; 36,167 ; 83,1			150	17,3 ; 33,367 ; 82,667	
	300	32,5 ; 50,333 ; 81,933			300	28 ; 46,667 ; 80,967	
	600	51,8 ; 66,733 ; 85,067			600	46,7 ; 62,8 ; 83,867	
	1500	76,7 ; 86,3 ; 90,4			1500	70,2 ; 82,1 ; 88,1	
	3000	89,533 ; 94,733 ; 94,8			3000	85,267 ; 92,5 ; 92,767	
	4500	95,8 ; 98,5 ; 97,3			4500	91,967 ; 96,633 ; 95,333	
0,5	6000	97,967 ; 99,3 ; 98,667		6000	95,6 ; 98,533 ; 97,067		
	60	8,633 ; 25,267 ; 75,067		0,5	60	7,2 ; 23,467 ; 74,933	
	150	17,1 ; 36,167 ; 75,233			150	14,733 ; 33,367 ; 74,433	
	300	27,767 ; 50,333 ; 74,867			300	23,833 ; 46,667 ; 73,633	
	600	47,167 ; 66,733 ; 79,967			600	42,067 ; 62,8 ; 78,2	
	1500	72,967 ; 86,3 ; 86,667			1500	65,967 ; 82,1 ; 83,833	
	3000	87,1 ; 94,733 ; 92,367			3000	82,4 ; 92,5 ; 89,9	
4500	94,367 ; 98,5 ; 95,867		4500		90,267 ; 96,633 ; 93,633		
1	6000	96,8 ; 99,3 ; 97,5		6000	94,133 ; 98,533 ; 95,6		
	60	8,433 ; 25,267 ; 67,3		1	60	7 ; 23,467 ; 66,867	
	150	16,8 ; 36,167 ; 69			150	14,333 ; 33,367 ; 68,067	
	300	28,333 ; 50,333 ; 73,7			300	24,3 ; 46,667 ; 71,867	
	600	47,9 ; 66,733 ; 79,933			600	41,933 ; 62,8 ; 76,9	
	1500	74,7 ; 86,3 ; 88,367			1500	67,6 ; 82,1 ; 85,267	
	3000	88,667 ; 94,733 ; 93,933			3000	83,6 ; 92,5 ; 91,067	
4500	96 ; 98,5 ; 97,5		4500		92,1 ; 96,633 ; 95,467		
6000	98,033 ; 99,3 ; 98,733		6000	96,067 ; 98,533 ; 97,533			

Tal y como se puede observar en la Tabla 4, cuando se tiene un tamaño de muestra $n = 3$, una tolerancia del 20% y los descentrados considerados anteriormente, resulta que el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto es mayor de 70% a partir de un tamaño de muestras total $m * n$ de 1500 en el caso de $ARL_0 = 200$ y de 3000 en el de $ARL_0 = 370$.

Tabla 5: Desempeño con $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370 , $n = 5$ y 10% de tolerancia

DESIGN PARAMETERS							
ARL(0)	%Tol	n0		ARL(0)	%Tol	n0	
200	0,1	5		370	0,1	5	
d	m*n	%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1		d	m*n	%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1	
0,25	100	7,1 ; 20,633 ; 76,9		0,25	100	6,233 ; 19,633 ; 76,8	
	250	13,067 ; 30,833 ; 74,633			250	10,9 ; 27,867 ; 73,933	
	500	21,867 ; 43,8 ; 72,567			500	19 ; 40,633 ; 71,8	
	1000	33,567 ; 56,333 ; 74,733			1000	29,433 ; 52,633 ; 73,4	
	2500	55,667 ; 76,4 ; 78,967			2500	48,967 ; 71,467 ; 76,7	
	5000	71,933 ; 87,2 ; 84,667			5000	65,633 ; 83,467 ; 82,067	
	7500	80,7 ; 92,9 ; 87,8			7500	73,9 ; 89,2 ; 84,667	
	10000	85,067 ; 94,867 ; 90,2			10000	79,567 ; 92,067 ; 87,5	
	12500	89,3 ; 96,633 ; 92,667			12500	82,933 ; 93,233 ; 89,7	
	15000	91,5 ; 97,6 ; 93,9			15000	86,633 ; 95,2 ; 91,433	
0,5	100	6,467 ; 20,633 ; 66,833		0,5	100	5,733 ; 19,633 ; 66,867	
	250	11,633 ; 30,833 ; 65,567			250	9,9 ; 27,867 ; 64,867	
	500	20 ; 43,8 ; 66,2			500	17,4 ; 40,633 ; 65,033	
	1000	31 ; 56,333 ; 70			1000	27,333 ; 52,633 ; 68,667	
	2500	52,133 ; 76,4 ; 74,833			2500	45,833 ; 71,467 ; 72,567	
	5000	70,033 ; 87,2 ; 82,6			5000	63,533 ; 83,467 ; 79,5	
	7500	78,5 ; 92,9 ; 85,6			7500	72,333 ; 89,2 ; 83,067	
	10000	83,867 ; 94,867 ; 89			10000	78,467 ; 92,067 ; 86,367	
	12500	88,633 ; 96,633 ; 92			12500	82,633 ; 93,233 ; 89,367	
	15000	90,567 ; 97,6 ; 92,333			15000	85,5 ; 95,2 ; 90,3	
1	100	6,8 ; 20,633 ; 62,2		1	100	6,167 ; 19,633 ; 61,833	
	250	12,567 ; 30,833 ; 64,3			250	10,767 ; 27,867 ; 63	
	500	21,567 ; 43,8 ; 66,867			500	18,767 ; 40,633 ; 65,2	
	1000	34,133 ; 56,333 ; 73			1000	29,833 ; 52,633 ; 70,733	
	2500	58,033 ; 76,4 ; 80,933			2500	50,867 ; 71,467 ; 77,833	
	5000	76,833 ; 87,2 ; 89,467			5000	69,6 ; 83,467 ; 85,733	
	7500	85,867 ; 92,9 ; 92,933			7500	79,3 ; 89,2 ; 90,033	
	10000	90,2 ; 94,867 ; 95,333			10000	85,033 ; 92,067 ; 92,933	
	12500	93,867 ; 96,633 ; 97,233			12500	88,533 ; 93,233 ; 95,267	
	15000	95,567 ; 97,6 ; 97,967			15000	91,367 ; 95,2 ; 96,167	

Para un tamaño de muestra $n = 5$, una tolerancia del 10% y los descentrados considerados anteriormente, tenemos los resultados que se muestran en la Tabla 5. Se tiene que a partir de un tamaño de muestras total $m * n$ de 5000 , se obtiene un porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto mayor de 70% para el caso de $ARL_0 = 200$. Por otro lado, para el caso de $ARL_0 = 370$ se tiene un porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto mayor de 70% a partir del tamaño de muestra total de 7500 .

Tabla 6: Desempeño con $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370 , $n = 5$ y 20% de tolerancia

DESIGN PARAMETERS					
ARL(0)	%Tol	n0	ARL(0)	%Tol	n0
200	0,2	5	370	0,2	5
d	m*n	(%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1)	d	m*n	(%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1)
0,25	100	12,833 ; 26,767 ; 81	0,25	100	10,933 ; 24,6 ; 80,567
	250	27,833 ; 43,933 ; 81,467		250	23,367 ; 39,9 ; 80,467
	500	46,033 ; 62,533 ; 82,367		500	39,933 ; 57,8 ; 80,533
	1000	66,033 ; 79,267 ; 86,733		1000	59,5 ; 74,567 ; 84,633
	2500	88,567 ; 95,267 ; 93,3		2500	83,867 ; 92,4 ; 91,467
	5000	96,367 ; 99 ; 97,367		5000	93,567 ; 97,833 ; 95,733
	7500	98,8 ; 99,967 ; 98,833		7500	97,4 ; 99,567 ; 97,833
10000	99,4 ; 99,9 ; 99,5	10000	98,467 ; 99,667 ; 98,8		
0,5	100	11,367 ; 26,767 ; 71,133	0,5	100	9,967 ; 24,6 ; 70,767
	250	24,3 ; 43,933 ; 72,533		250	20,533 ; 39,9 ; 71,1
	500	41,067 ; 62,533 ; 75,2		500	35,633 ; 57,8 ; 73,4
	1000	60,933 ; 79,267 ; 81,4		1000	54,167 ; 74,567 ; 78,833
	2500	85,667 ; 95,267 ; 90,4		2500	79,8 ; 92,4 ; 87,367
	5000	94,967 ; 99 ; 95,967		5000	91,533 ; 97,833 ; 93,7
	7500	98,233 ; 99,967 ; 98,267		7500	96,333 ; 99,567 ; 96,767
10000	99,2 ; 99,9 ; 99,3	10000	97,833 ; 99,667 ; 98,167		
1	100	11,967 ; 26,767 ; 68,767	1	100	10,267 ; 24,6 ; 67,333
	250	25,733 ; 43,933 ; 72,833		250	21,833 ; 39,9 ; 71
	500	44,7 ; 62,533 ; 78,6		500	38,633 ; 57,8 ; 75,8
	1000	66,9 ; 79,267 ; 87,333		1000	59,5 ; 74,567 ; 84,067
	2500	90,633 ; 95,267 ; 95,367		2500	85,433 ; 92,4 ; 93
	5000	98,1 ; 99 ; 99,1		5000	95,867 ; 97,833 ; 98,033
	7500	99,7 ; 99,967 ; 99,733		7500	98,8 ; 99,567 ; 99,233
10000	99,9 ; 99,9 ; 100	10000	99,533 ; 99,667 ; 99,867		

Por último, se puede apreciar en la Tabla 6 que para un tamaño de muestra $n = 5$, una tolerancia del 20% y los descentrados considerados anteriormente, se tiene que a partir del tamaño de muestras total $m * n$ de 2500 tanto para el caso $ARL_0 = 200$ como para $ARL_0 = 370$ el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto es mayor de 70% .

A la vista de los resultados obtenidos en las Tablas 3, 4, 5 y 6, cabe destacar que no siempre es posible obtener el tamaño de muestras total requerido de manera que el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto supere el 70% ya que existen procesos productivos en los que el tamaño de muestra n es muy limitado.

A su vez, mencionar que cuanto mayor es el tamaño de muestras total $m * n$, mayor porcentaje de gráficos conformes en el desempeño para los ARL's bajo control y fuera de control se obtienen, independientemente del descentrado y tamaño de muestra tomados, tal y como se pueden apreciar en las tablas anteriormente mencionadas. Esto es debido a que se pueden estimar con mejor precisión los valores reales de $\bar{\mu}_0$ y Σ_0 cuanto mayor sea el tamaño de muestras total disponible. Este resultado es general para todos los casos que se van a estudiar.

Otro punto a destacar para $p = 2$ es que para el mismo tamaño de muestra n y el mismo porcentaje de tolerancia, el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto es mayor para el caso $ARL_0 = 200$, como se observa en las Figuras 5, 6, 7 y 8, siendo mayor en el descentrado 1, tal y como se puede apreciar en las Figuras 9, 10, 11 y 12.

Por otro lado, si se mantiene el tamaño de muestra n , resulta que para la tolerancia del 20 %, el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto es mayor que para la tolerancia del 10 %, como se puede comprobar en las Figuras 13, 14, 15 y 16.

Por último, destacar que para los casos en donde la tolerancia es 20 %, el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto alcanza al porcentaje de gráficos conformes del ARL_0 y del ARL_1 conforme el tamaño de muestras total $m*n$ se incrementa. Un ejemplo de este resultado se puede ver en las Figuras 15 y 16.

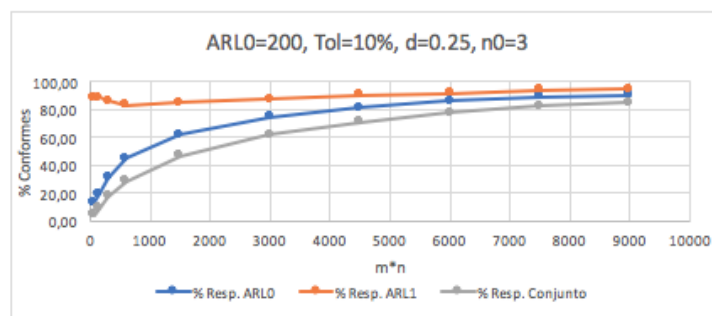


Figura 5: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 0,25$

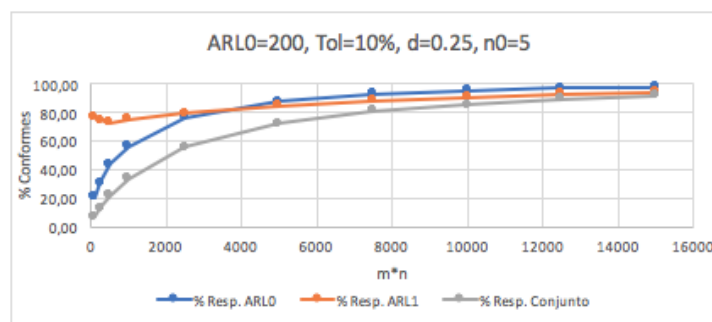


Figura 6: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 0,25$

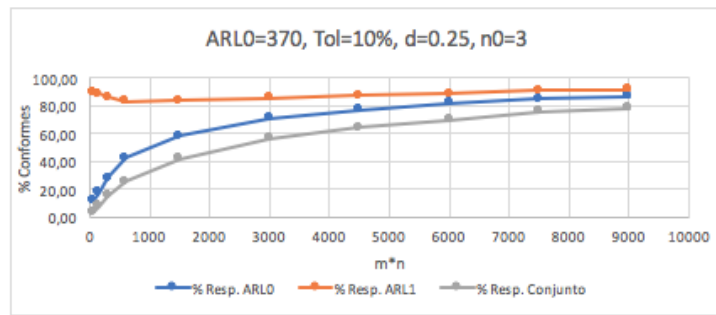


Figura 7: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 0,25$

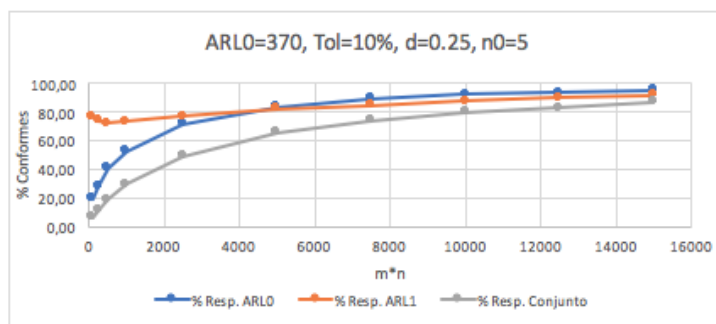


Figura 8: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 0,25$

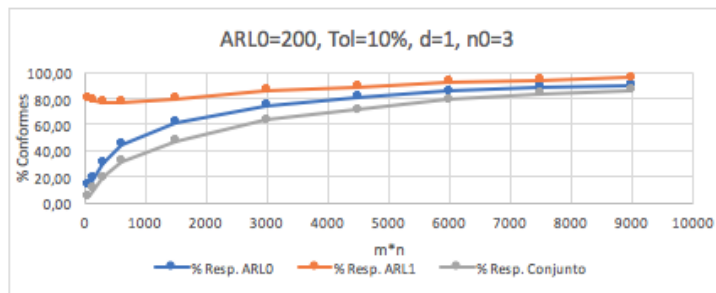


Figura 9: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 1$

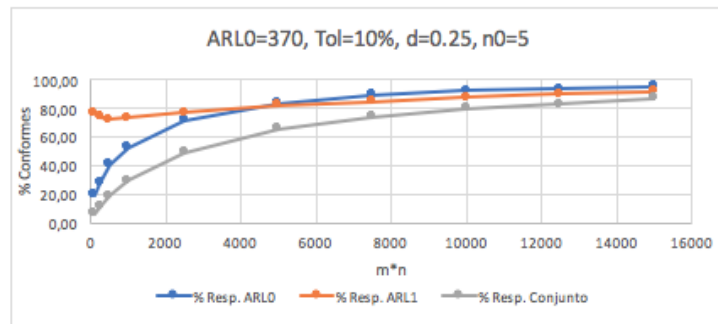


Figura 10: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 1$

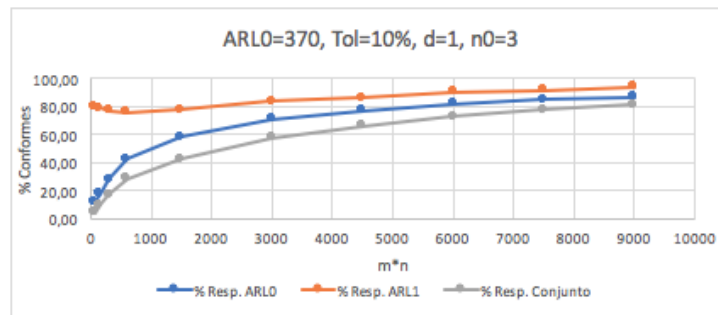


Figura 11: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 1$

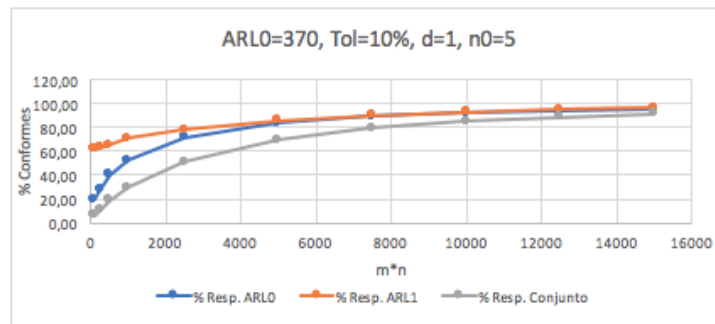


Figura 12: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 1$

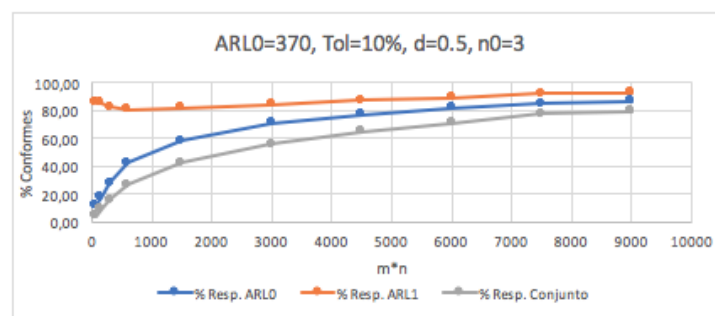


Figura 13: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 10%

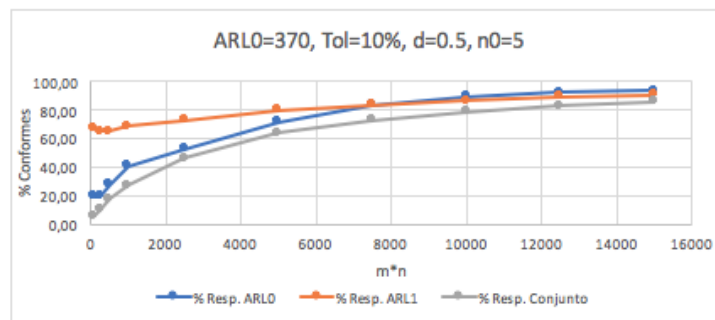


Figura 14: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 10%

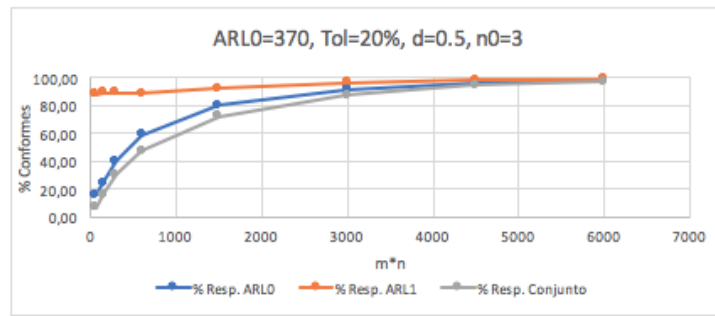


Figura 15: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 20%

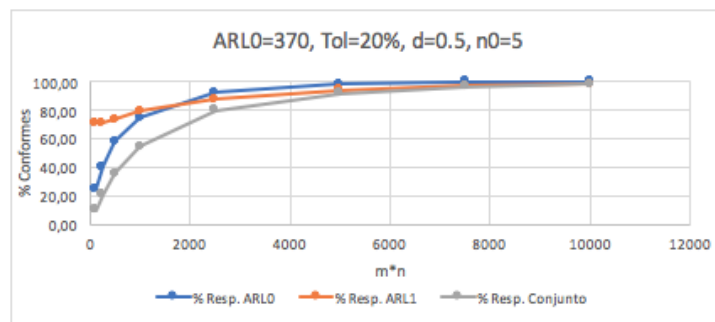


Figura 16: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 20%

Tabla 7: Desempeño con $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370 , $n = 3$ y 10% de tolerancia

DESIGN PARAMETERS							
ARL(0)	%Tol	n0		ARL(0)	%Tol	n0	
200	0,1	3		370	0,1	3	
d	m*n	%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1		d	m*n	%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1	
0,25	60	4,2 ; 13,467 ; 88,5		0,25	60	3,633 ; 12,367 ; 89	
	150	9,2 ; 19,567 ; 88,4			150	8,1 ; 17,833 ; 88,533	
	300	17,4 ; 30,6 ; 86,2			300	14,867 ; 27,767 ; 86,133	
	600	28,333 ; 44,933 ; 83,1			600	25,367 ; 42,133 ; 82,9	
	1500	46,4 ; 61,9 ; 84,433			1500	41,8 ; 58,233 ; 83,433	
	3000	61,733 ; 74,733 ; 87			3000	56,333 ; 70,733 ; 85,6	
	4500	71,033 ; 80,967 ; 90,067			4500	64,2 ; 77,133 ; 87,067	
	6000	77,2 ; 85,967 ; 91,233			6000	69,7 ; 81,433 ; 88,267	
	7500	82,467 ; 88,8 ; 93,667			7500	75,833 ; 85 ; 90,833	
	9000	84,633 ; 90,433 ; 94,2			9000	77,9 ; 86,6 ; 91,3	
0,5	60	4,8 ; 13,467 ; 85,333		0,5	60	4,133 ; 12,367 ; 85,733	
	150	10,033 ; 19,567 ; 85,133			150	8,867 ; 17,833 ; 85,2	
	300	18,167 ; 30,6 ; 82,6			300	15,6 ; 27,767 ; 82,467	
	600	29,1 ; 44,933 ; 81,133			600	26,567 ; 42,133 ; 80,367	
	1500	46,233 ; 61,9 ; 82,867			1500	42,167 ; 58,233 ; 81,9	
	3000	62,3 ; 74,733 ; 87,067			3000	55,967 ; 70,733 ; 84,4	
	4500	70,6 ; 80,967 ; 89,4			4500	64,533 ; 77,133 ; 87,033	
	6000	77,967 ; 85,967 ; 91,967			6000	70,867 ; 81,433 ; 89,2	
	7500	82,833 ; 88,8 ; 94,033			7500	77,167 ; 85 ; 92,067	
	9000	85,267 ; 90,433 ; 94,833			9000	79,3 ; 86,6 ; 92,633	
1	60	4,967 ; 13,467 ; 79,5		1	60	4,433 ; 12,367 ; 79,8	
	150	10,967 ; 19,567 ; 78,8			150	9,633 ; 17,833 ; 78,6	
	300	19,667 ; 30,6 ; 77,433			300	17,267 ; 27,767 ; 76,767	
	600	31,433 ; 44,933 ; 76,933			600	28,6 ; 42,133 ; 75,567	
	1500	47,3 ; 61,9 ; 79,867			1500	42,633 ; 58,233 ; 77,567	
	3000	63,267 ; 74,733 ; 86,267			3000	57,433 ; 70,733 ; 83,767	
	4500	71,667 ; 80,967 ; 89,2			4500	65,767 ; 77,133 ; 86,2	
	6000	79,433 ; 85,967 ; 93,133			6000	72,9 ; 81,433 ; 90,367	
	7500	83,467 ; 88,8 ; 94,367			7500	77,3 ; 85 ; 91,667	
	9000	86,6 ; 90,433 ; 96,167			9000	81,167 ; 86,6 ; 94,1	

En la Tabla 7 se tiene que para los descentrados considerados y un tamaño de muestra $n = 3$, a partir del tamaño de muestras $m * n$ de 4500 resulta un porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto mayor de 70% para el caso del $ARL_0 = 200$; y para el caso del $ARL_0 = 370$ se tiene que a partir del $m * n$ de 6000 se alcanza el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño conjunto indicado anteriormente.

Tabla 8: Desempeño con $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370 , $n = 3$ y 20% de tolerancia

DESIGN PARAMETERS					
ARL(0)	%Tol	n0	ARL(0)	%Tol	n0
200	0,2	3	370	0,2	3
d	m*n	(%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1)	d	m*n	(%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1)
0,25	60	7,833 ; 16,9 ; 90,1	0,25	60	6,8 ; 15,467 ; 90,3
	150	19,233 ; 27,633 ; 91,367		150	15,8 ; 24,3 ; 91,267
	300	35,6 ; 43,733 ; 91,867		300	31,433 ; 39,967 ; 91,4
	600	54,033 ; 62,9 ; 91,133		600	48,633 ; 58,567 ; 90,067
	1500	78,233 ; 83,8 ; 94,433		1500	73,167 ; 80,067 ; 93,1
	3000	91,6 ; 93,867 ; 97,733		3000	87,233 ; 91,2 ; 96,033
	4500	96,667 ; 97,567 ; 99,1		4500	93,967 ; 95,967 ; 98
0,5	6000	98,4 ; 99,167 ; 99,233	6000	96,967 ; 98,233 ; 98,733	
	60	7,767 ; 16,9 ; 87,633	0,5	60	6,667 ; 15,467 ; 87,867
	150	18,867 ; 27,633 ; 89,033		150	15,933 ; 24,3 ; 89,033
	300	34,067 ; 43,733 ; 89,367		300	30,367 ; 39,967 ; 88,933
	600	53,933 ; 62,9 ; 89,667		600	47,467 ; 58,567 ; 88,367
	1500	77,433 ; 83,8 ; 93,633		1500	72,033 ; 80,067 ; 91,933
	3000	91,3 ; 93,867 ; 97,433		3000	87,167 ; 91,2 ; 95,967
4500	96,633 ; 97,567 ; 99,067	4500		94,233 ; 95,967 ; 98,267	
1	6000	98,533 ; 99,167 ; 99,367	6000	96,967 ; 98,233 ; 98,733	
	60	8,167 ; 16,9 ; 82,733	1	60	7,067 ; 15,467 ; 82,833
	150	19,3 ; 27,633 ; 84,4		150	16,3 ; 24,3 ; 83,633
	300	35,067 ; 43,733 ; 85,967		300	30,933 ; 39,967 ; 84,167
	600	52,633 ; 62,9 ; 86,567		600	47,4 ; 58,567 ; 84,833
	1500	77,8 ; 83,8 ; 93,333		1500	72,567 ; 80,067 ; 91,2
	3000	91,567 ; 93,867 ; 97,7		3000	87,633 ; 91,2 ; 96,367
4500	96,667 ; 97,567 ; 99,1	4500		94,167 ; 95,967 ; 98,133	
6000	98,833 ; 99,167 ; 99,667	6000	97,5 ; 98,233 ; 99,267		

Como se puede apreciar en la Tabla 8, para los descentrados considerados y un tamaño de muestra $n = 3$ se obtiene que a partir del tamaño de muestras total $m * n$ de 1500, el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto es mayor de 70% para los dos ARL_0 estudiados.

Tabla 9: Desempeño con $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370 , $n = 5$ y 10% de tolerancia

DESIGN PARAMETERS							
ARL(0)	%Tol	n0		ARL(0)	%Tol	n0	
200	0,1	5		370	0,1	5	
d	m*n	(%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1)		d	m*n	(%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1)	
0,25	100	5,233 ; 11,1 ; 89,667		0,25	100	4,8 ; 10,4 ; 90,033	
	250	13,567 ; 23,5 ; 86,5			250	12,067 ; 21,7 ; 86,5	
	500	24,467 ; 37,3 ; 84,467			500	21,467 ; 34,033 ; 83,967	
	1000	39,533 ; 53,767 ; 84,433			1000	35,467 ; 50,233 ; 83,2	
	2500	60,3 ; 73,067 ; 87,1			2500	54,833 ; 69,4 ; 85,067	
	5000	77,567 ; 86,033 ; 91,467			5000	71,633 ; 82,133 ; 89,433	
	7500	86,3 ; 91,7 ; 94,6			7500	80,267 ; 88,1 ; 92,133	
	10000	90,2 ; 94,267 ; 95,933			10000	84,533 ; 90,967 ; 93,567	
	12500	93,4 ; 96,033 ; 97,367			12500	86,767 ; 91,967 ; 94,8	
	15000	94,633 ; 96,733 ; 97,9			15000	89,167 ; 93,4 ; 95,767	
0,5	100	5,567 ; 11,1 ; 84		0,5	100	5,167 ; 10,4 ; 84,5	
	250	14,1 ; 23,5 ; 80,633			250	12,667 ; 21,7 ; 80,533	
	500	25,867 ; 37,3 ; 79,467			500	23,3 ; 34,033 ; 78,567	
	1000	39,033 ; 53,767 ; 78,5			1000	35,833 ; 50,233 ; 77,233	
	2500	59,833 ; 73,067 ; 84,5			2500	54,8 ; 69,4 ; 82,033	
	5000	76,767 ; 86,033 ; 90,133			5000	70,7 ; 82,133 ; 87,467	
	7500	84,733 ; 91,7 ; 92,9			7500	79,6 ; 88,1 ; 91	
	10000	89,833 ; 94,267 ; 95,5			10000	84,867 ; 90,967 ; 93,8	
	12500	93,133 ; 96,033 ; 97			12500	87,1 ; 91,967 ; 94,9	
	15000	94,333 ; 96,733 ; 97,6			15000	89,4 ; 93,4 ; 95,833	
1	100	6,067 ; 11,1 ; 75,867		1	100	5,667 ; 10,4 ; 75,933	
	250	15,367 ; 23,5 ; 73,633			250	13,833 ; 21,7 ; 72,367	
	500	27,567 ; 37,3 ; 75			500	24,8 ; 34,033 ; 73,467	
	1000	41,933 ; 53,767 ; 76,767			1000	38,3 ; 50,233 ; 74,3	
	2500	63,833 ; 73,067 ; 86,767			2500	58,367 ; 69,4 ; 83,133	
	5000	80,367 ; 86,033 ; 92,967			5000	74,633 ; 82,133 ; 90,033	
	7500	87,467 ; 91,7 ; 95,367			7500	82,467 ; 88,1 ; 93,533	
	10000	92,3 ; 94,267 ; 97,9			10000	87,733 ; 90,967 ; 96,4	
	12500	94,967 ; 96,033 ; 98,867			12500	89,933 ; 91,967 ; 97,7	
	15000	95,967 ; 96,733 ; 99,167			15000	91,933 ; 93,4 ; 98,433	

Para un tamaño de muestra $n = 5$ y los descentrados considerados se tienen los resultados que ofrecen en la Tabla 9. Resulta que a partir del tamaño de muestras total $m*n$ de 5000 se obtiene un porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto mayor de 70% para los dos ARL's bajo control escogidos.

Tabla 10: Desempeño con $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y 370 , $n = 5$ y 20% de tolerancia

DESIGN PARAMETERS					
ARL(0)	%Tol	n0	ARL(0)	%Tol	n0
200	0,2	5	370	0,2	5
d	m*n	(%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1)	d	m*n	(%Resp.Conj, %Resp.ARL0, %Resp.ARL1)
0,25	100	10,5 ; 15,967 ; 92,2	0,25	100	9,1 ; 14,333 ; 92,267
	250	27,467 ; 35,433 ; 91,133		250	23,367 ; 31,133 ; 90,9
	500	49,167 ; 57,167 ; 91,733		500	42,933 ; 51,767 ; 90,733
	1000	72,233 ; 78,467 ; 93,7		1000	65,5 ; 73,3 ; 92,133
	2500	92,1 ; 94,233 ; 97,867		2500	88,167 ; 91,8 ; 96,367
	5000	98,333 ; 99 ; 99,333		5000	96,433 ; 97,833 ; 98,6
	7500	99,667 ; 99,867 ; 99,8		7500	98,8 ; 99,3 ; 99,5
10000	99,933 ; 99,967 ; 99,967	10000	99,7 ; 99,933 ; 99,767		
0,5	100	10,033 ; 15,967 ; 87,233	0,5	100	8,933 ; 14,333 ; 87,367
	250	26,633 ; 35,433 ; 86,767		250	22,467 ; 31,133 ; 86,1
	500	47,4 ; 57,167 ; 87,2		500	41,767 ; 51,767 ; 86,233
	1000	69,2 ; 78,467 ; 89,867		1000	62,7 ; 73,3 ; 88,033
	2500	90,267 ; 94,233 ; 95,933		2500	86,667 ; 91,8 ; 94,667
	5000	97,8 ; 99 ; 98,8		5000	95,967 ; 97,833 ; 98,1
	7500	99,567 ; 99,867 ; 99,7		7500	98,7 ; 99,3 ; 99,4
10000	99,9 ; 99,967 ; 99,933	10000	99,767 ; 99,933 ; 99,833		
1	100	10,933 ; 15,967 ; 81,5	1	100	9,533 ; 14,333 ; 80,967
	250	28,2 ; 35,433 ; 82,6		250	23,667 ; 31,133 ; 80,833
	500	49,233 ; 57,167 ; 85,433		500	43,567 ; 51,767 ; 83,5
	1000	71,5 ; 78,467 ; 90,233		1000	64,7 ; 73,3 ; 87,333
	2500	92,067 ; 94,233 ; 97,533		2500	88,667 ; 91,8 ; 96,233
	5000	98,667 ; 99 ; 99,667		5000	97,033 ; 97,833 ; 99,133
	7500	99,833 ; 99,867 ; 99,967		7500	99,033 ; 99,3 ; 99,733
10000	99,967 ; 99,967 ; 100	10000	99,9 ; 99,933 ; 99,967		

En la Tabla 10 se muestran los resultados obtenidos para un tamaño de muestra $n = 5$ y los descentrados considerados. Para el $ARL_0 = 200$ se tiene que a partir del tamaño de muestras total $m * n$ de 1000, el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto es mayor de 70% , mientras que para el $ARL_0 = 370$, a partir del tamaño de muestras total $m * n$ de 2500, el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto es mayor de 70% .

Tal y como se mencionó al final de los resultados obtenidos para el caso $p = 2$, en base a los resultados obtenidos en las Tablas 7, 8, 9 y 10, no siempre se puede obtener el tamaño de muestras total requerido de manera que el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto supere el 70% debido a la limitación del tamaño de muestra n en algunos procesos productivos. Por tanto, no se llegará al porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto indicado.

Como sucedía en el caso $p = 2$, se tiene que independientemente del tamaño de muestra y el descentrado considerados, resulta que a mayor tamaño de muestras total $m * n$, mayor porcentaje de gráficos conformes en el desempeño para ARL_0 y ARL_1 .

Por un lado, se obtiene que para un mismo tamaño de muestra n y mismo porcentaje de tolerancia, el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto es mayor para el descentrado $d = 1$, siendo este porcentaje mayor en el caso del $ARL_0 = 200$, tal y como se puede apreciar en las Figuras 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 y 24. Por otro lado, manteniendo el mismo tamaño de muestra n resulta que el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto es mayor cuando el porcentaje de tolerancia es del 20 %, como se muestra en las Figuras 25, 26, 27 y 28.

En último lugar, cabe destacar que para los casos en donde la tolerancia es del 20 %, se obtiene un porcentaje de gráficos conformes en el desempeño para ARL_0 y ARL_1 similar a medida que se incrementa el tamaño de muestras total $m * n$, como se puede apreciar en las Figuras 27 y 28.

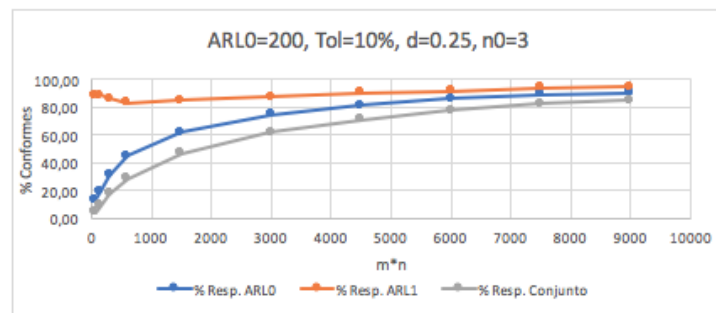


Figura 17: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 0,25$

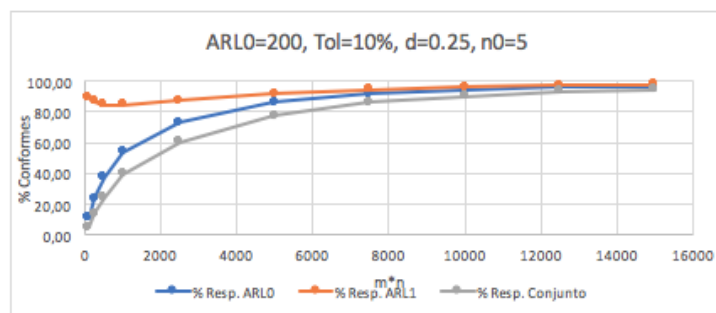


Figura 18: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 0,25$

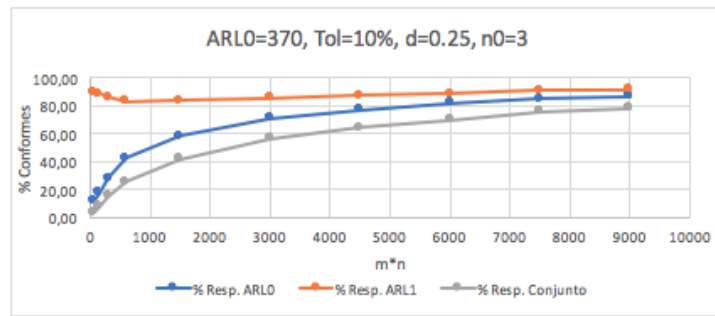


Figura 19: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 0,25$

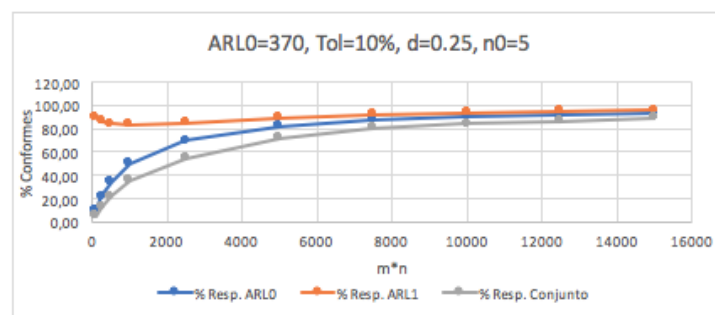


Figura 20: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 0,25$

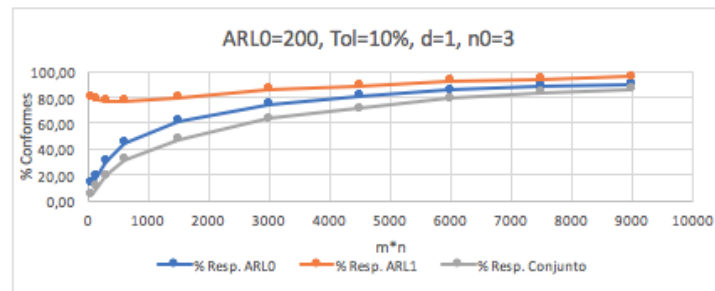


Figura 21: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 1$

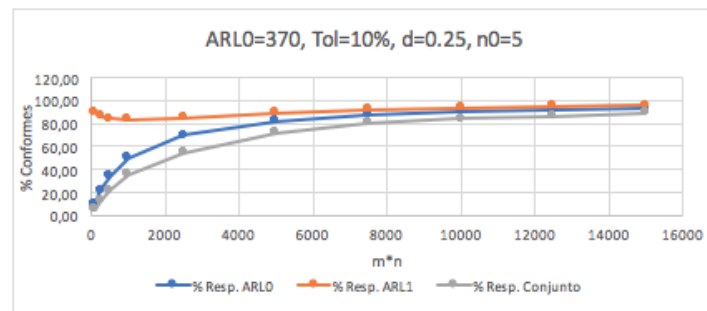


Figura 22: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 200$ y $d = 1$

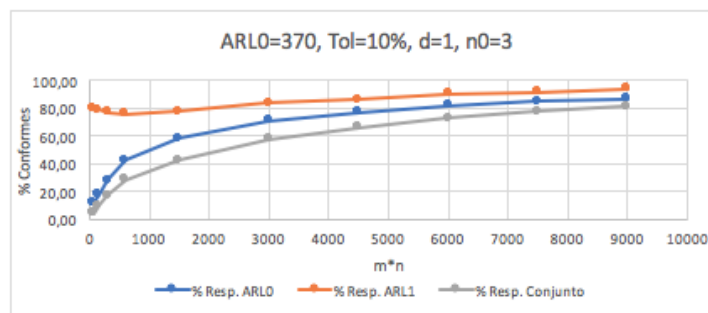


Figura 23: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 1$

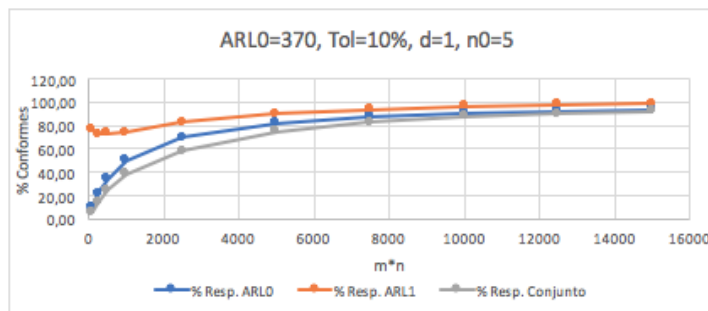


Figura 24: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y $d = 1$

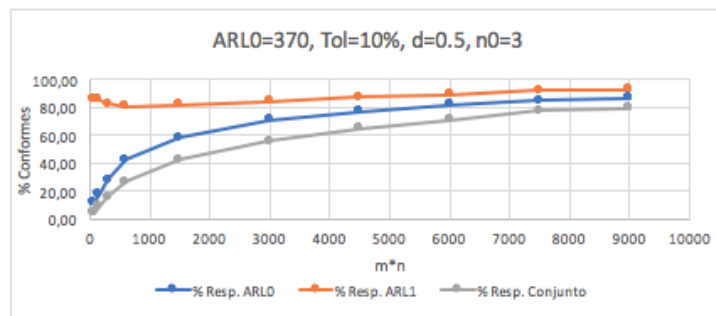


Figura 25: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 10 %

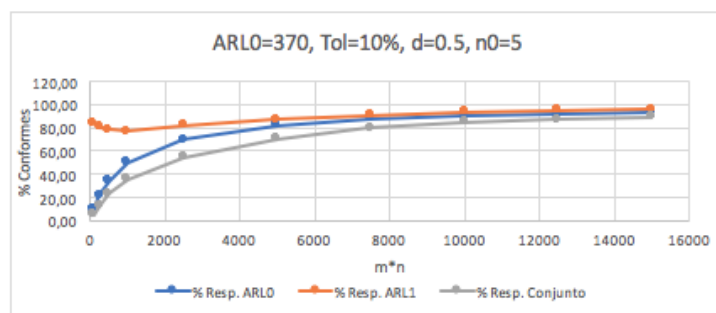


Figura 26: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 10 %

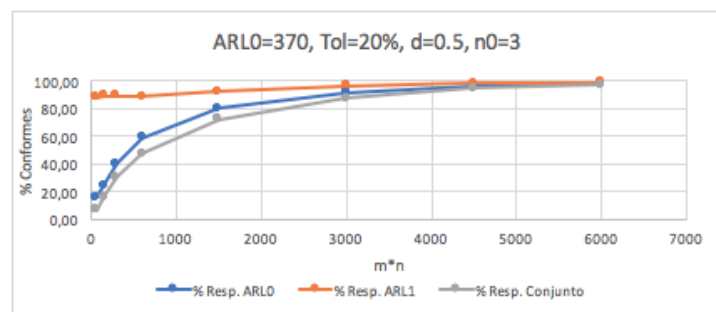


Figura 27: Un gráfico del desempeño con $n = 3$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 20 %

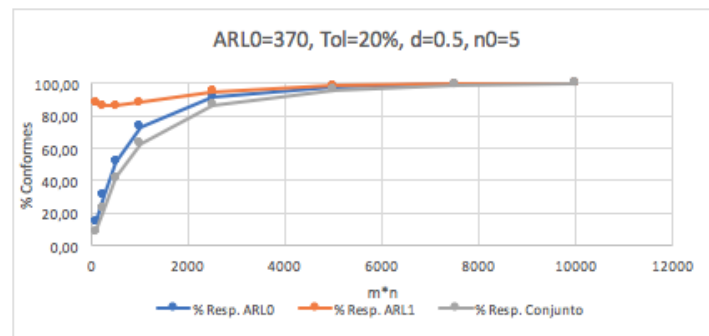


Figura 28: Un gráfico del desempeño con $n = 5$ y $p = 3$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$ y tolerancia 20%

Para finalizar esta subsección, destacar que para el mismo tamaño de muestra n , mismo porcentaje de tolerancia y mismo ARL_0 se tiene que el porcentaje de gráficos conformes para ARL_0 y en conjunto es mayor en el caso $p = 2$ que en el caso $p = 3$, siendo en este último mayor el porcentaje de gráficos conformes para ARL_1 que en el caso $p = 2$.

5.2. Efecto de la Corrección en el Límite de Control en el desempeño real en Fase II del Gráfico T^2 de Hotelling

En la Sección 4, se destacó la idea de aplicar un porcentaje de corrección al límite de control del gráfico T^2 de Hotelling, de manera que el ARL_0 será más grande de lo que se ha diseñado y provocará un aumento del ARL_1 puesto que al disminuir α aumenta β . No obstante, puede que la corrección resulte beneficiosa para el conjunto a costa de empeorar el ARL_1 .

En las figuras que se adjuntan a continuación se muestran los resultados obtenidos para los porcentajes de corrección del 1% y 3% de cada uno de los ARL's y en conjunto, comparando éstos con los obtenidos sin corrección, teniendo en cuenta que los parámetros escogidos son los indicados en la Sección 4.

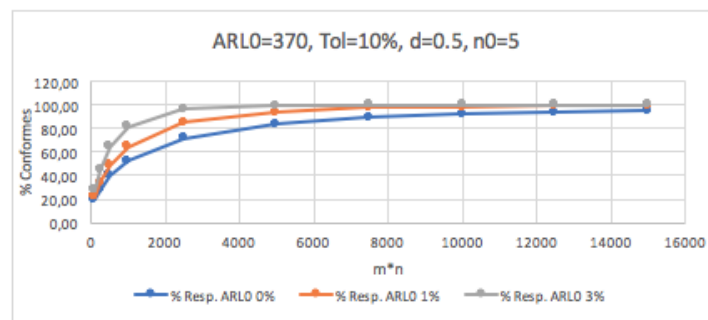


Figura 29: Comparación del desempeño para ARL_0 con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 10%

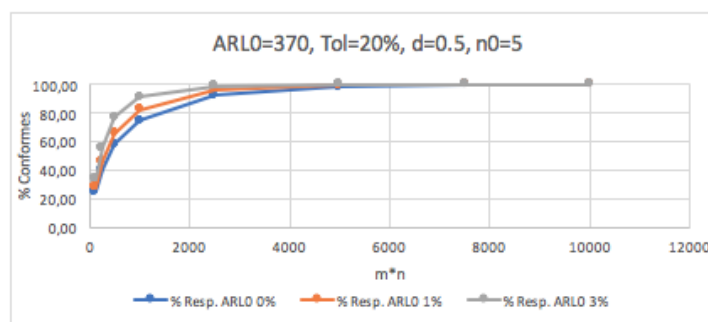


Figura 30: Comparación del desempeño para ARL_0 con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 20%

A la vista de las Figuras 29 y 30, se concluye que al aumentar el porcentaje de corrección sobre el límite de control, se aumenta el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño para ARL_0 , incrementándose a medida que se eleva el tamaño de muestras total $m * n$ obteniéndose prácticamente el 100 % de gráficos conformes en el desempeño tanto para el 10 %, a partir del tamaño de muestras total $m * n$ de 5000, como para el 20 % de tolerancia, llegando antes a dicho porcentaje en este último con un tamaño de muestras total $m * n$ de 2500.

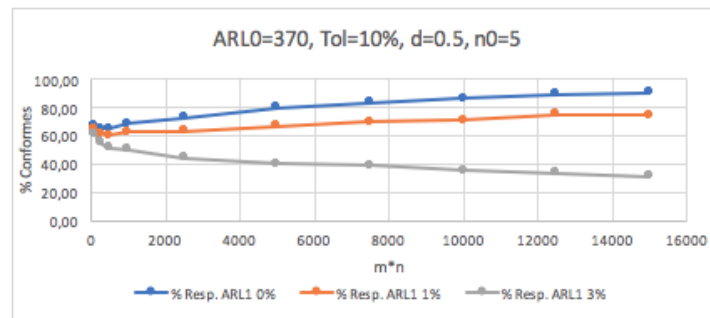


Figura 31: Comparación del desempeño para ARL_1 con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 10 %

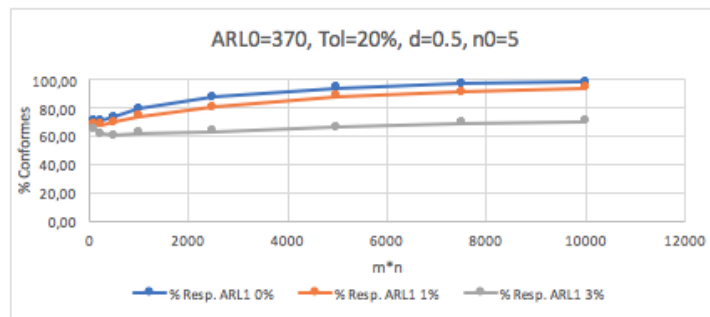


Figura 32: Comparación del desempeño para ARL_1 con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 20 %

Observando las Figuras 31 y 32 se tiene que, tal y como se había mencionado al principio de esta subsección, a medida que se incrementa el porcentaje de corrección sobre el límite de control, empeora el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño para ARL_1 , siendo en el caso del 3 % de corrección y tolerancia 20 % el que más afecta pues disminuye el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño a medida que aumenta el tamaño de muestras total $m * n$, hecho que no ocurre con los casos de sin corrección y

con el 1% de corrección con tolerancia 10% y con los casos con tolerancia 20% ya que el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño se incrementa a medida que aumenta el tamaño de muestras total $m * n$.

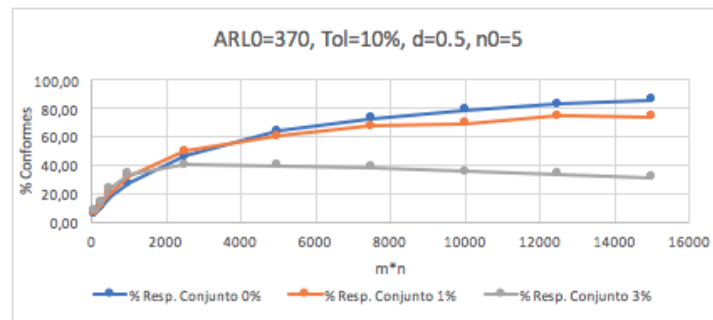


Figura 33: Comparación del desempeño en conjunto con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 10%

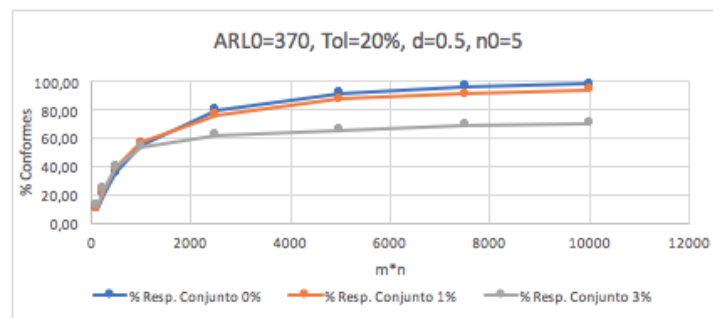


Figura 34: Comparación del desempeño en conjunto con $n = 5$ y $p = 2$ del gráfico T^2 de Hotelling para $ARL_0 = 370$, $d = 0,5$ y tolerancia 20%

A la vista de las Figuras 33 y 34, resulta que para tamaños de muestras total $m * n$ menores de 2500 para el caso del 10% de tolerancia y menores que 1000 para el del 20% de tolerancia, el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto es mayor a medida que se aplica un mayor porcentaje de corrección al límite de control. Este resultado es interesante puesto que a veces se dispone de un tamaño de muestra n pequeño y resultaría ventajoso aplicar la corrección al límite de control para obtener el valor tanto el ARL_0 como el ARL_1 reales de manera que serán cercanos a los diseñados.

6. Conclusiones

A lo largo de este estudio, se ha analizado de forma conjunta los valores reales del ARL bajo control (ARL_0) y del ARL fuera de control (ARL_1) cuando los parámetros del proceso son estimados en la Fase I. Hasta ahora, sólo se había estudiado el ARL_0 y el efecto que ejerce la estimación de los parámetros sobre el desempeño de éste. La estimación de los parámetros provoca que a veces los gráficos resultantes tengan más falsas alarmas de las esperadas cuando el proceso se encuentra bajo control, así como la pérdida parcial de eficacia de la detección de cambios en el proceso.

Ante la imposibilidad de obtener los valores tanto del ARL bajo control como fuera de control de manera analítica, se ha simulado la Fase I mediante el software *simT2* de Aparisi García, Franciso José (2017) y a partir de cada una Fase I se ha obtenido el par (ARL_0 , ARL_1).

Durante este estudio, se han elaborado tablas que muestran el porcentaje de veces o probabilidad de que el gráfico de control T^2 de Hotelling real en la Fase II posea un ARL bajo control y un ARL fuera de control asumibles para el usuario.

Los resultados obtenidos exponen la necesidad de aumentar la longitud de la Fase I respecto a los valores recomendados en la bibliografía de manera que se reduzca el efecto de la estimación de los parámetros $\vec{\mu}$ y Σ sobre el desempeño en conjunto del gráfico T^2 de Hotelling. Por ello, se aconseja dividir la Fase I en dos etapas:

- Fase de Comprobación: En esta fase se realiza una comprobación de la estabilidad del proceso con tamaños de muestra pequeños.
- Fase de Mejora: Aquí se añade una muestra grande para realizar mejor la estimación de los parámetros $\vec{\mu}$ y Σ .

Además, en este estudio también se ha contemplado la posibilidad de modificar el límite control para mejorar la probabilidad de que el desempeño real del gráfico T^2 de Hotelling en Fase II sea correcto. Los resultados muestran que aplicando un porcentaje de corrección al límite de control conlleva un efecto positivo sobre el ARL_0 ya que se aumentó su porcentaje de gráficos conformes en el desempeño. Sin embargo, esta corrección provoca un efecto negativo sobre el ARL_1 debido a que disminuyó su porcentaje de gráficos conformes en el desempeño. A su vez, dicha corrección provoca un efecto beneficioso para el conjunto puesto que se aumenta el porcentaje de gráficos conformes en el desempeño, pero sólo cuando el tamaño de muestras total es menor de 2500 para el caso del 10 % de tolerancia y de 1000 para el caso de 20 % de tolerancia.

Estos son los descubrimientos que se han hallado a la hora de estudiar la influencia de la estimación de los parámetros en Fase I en el desempeño real del gráfico de control T^2 de Hotelling y el efecto que provoca aplicar una corrección sobre el límite de control. Estos hallazgos no son más que el principio de un área de estudio que tiene futuro puesto que hasta ahora sólo se había estudiado el desempeño del ARL_0 y no se había tenido en cuenta el conjunto, por lo que se podría mejorar el procedimiento de realizar las simulaciones de manera que se pudiera estudiar mejor dicho desempeño y aplicar las pertinentes reglas al gráfico T^2 de Hotelling de manera que se proporcionara un porcentaje de gráficos conformes en el desempeño en conjunto aceptable.

Referencias

- Aparisi, F. (1996). Hotelling's T2 control chart with adaptive sample sizes. *International Journal of Production Research*, 34(10), 2853–2862.
- Aparisi, F., Avendaño, G., y Sanz, J. (2006). Techniques to interpret T2 control chart signals. *IIE Transactions*, 38(8), 647–657.
- Aparisi, F. y Haro, C. L. (2001). Hotelling's t2 control chart with variable sampling intervals. *International Journal of Production Research*, 39(14), 3127–3140.
- Aparisi, F. y Haro, C. L. (2003). A comparison of T2 control charts with variable sampling schemes as opposed to mewma chart. *International Journal of Production Research*, 41(10), 2169–2182.
- Aparisi, F. y Sanz, J. (2010). Interpreting the out-of-control signals of multivariate control charts employing neural networks. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 37, 226–230.
- Bersimis, S., Psarakis, S., y Panaretos, J. (2007). Multivariate statistical process control charts: an overview. *Quality and Reliability engineering international*, 23(5), 517–543.
- Champ, C. W. y Jones-Farmer, L. A. (2007). Properties of multivariate control charts with estimated parameters. *Sequential Analysis*, 26(2), 153–169.
- Champ, C. W., Jones-Farmer, L. A., y Rigdon, S. E. (2005). Properties of the T2 control chart when parameters are estimated. *Technometrics*, 47(4), 437–445.
- Faraz, A., Chalaki, K., y Moghadam, M. (2011). On the properties of the hotelling's T2 control chart with variable sampling intervals. *Quality & Quantity*, 45(3), 579–586.
- Hotelling, H. (1947). Multivariate quality control – illustrated by the air testing of sample bombsights. in: Eisenhart, c., hastay, m.w and wallis, w.a. *Techniques of statistical analysis*, pp. 111–184.
- Jackson, J. E. (1985). Multivariate quality control. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 14(11), 2657–2688.
- Jensen, W. A., Jones-Farmer, L. A., Champ, C. W., y Woodall, W. H. (2006). Effects of parameter estimation on control chart properties: a literature review. *Journal of Quality Technology*, 38(4), 349.

- Lowry, C. A. y Montgomery, D. C. (1995). A review of multivariate control charts. *IIE transactions*, 27(6), 800–810.
- Mason, R. L., Tracy, N. D., y Young, J. C. (1995). Decomposition of t_2 for multivariate control chart interpretation. *Journal of quality technology*, 27(2), 99–108.
- Mason, R. L., Tracy, N. D., y Young, J. C. (1997). A practical approach for interpreting multivariate t_2 control chart signals. *Journal of Quality Technology*, 29(4), 396–406.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to statistical quality control*. John Wiley & Sons Inc.
- Nedumaran, G. y Pignatiello Jr, J. J. (2000). On constructing t_2 control charts for retrospective examination. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 29(2), 621–632.
- Psarakis, S., Vyniou, A. K., y Castagliola, P. (2014). Some recent developments on the effects of parameter estimation on control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 30(8), 1113–1129.
- Shewhart, W. A. (1924). Some applications of statistical methods to the analysis of physical and engineering data. *Bell Labs Technical Journal*, 3(1), 43–87.
- Shewhart, W. A. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. D. Van Nostrand Company, Inc.

7. Anexo

A continuación, se adjunta el código en el cual está basado el programa *simT2* desarrollado por Aparisi García, Francisco José (2017).

```
unit Unit1;

{$mode objfpc}{$H+}

interface

uses
  Classes, SysUtils, FileUtil, TAgGraph, TAsSeries, Forms, Controls, Graphics,
  Dialogs, StdCtrls, ComCtrls, ExtCtrls, fmath, math, matrices, chicuadrado;

type

  { TForm1 }

  TForm1 = class(TForm)
    eARL0: TEdit;
    ecorreccion: TEdit;
    en1: TEdit;
    en2: TEdit;
    er12: TEdit;
    er13: TEdit;
    er23: TEdit;
    Label12: TLabel;
    Label13: TLabel;
    Label14: TLabel;
    Label15: TLabel;
    Label16: TLabel;
    Label3: TLabel;
    Label4: TLabel;
    Label8: TLabel;
    Label9: TLabel;
    limARL0: TLineSeries;
```



```
    limARL1: TLineSeries;
    Memo1: TMemo;
    who: TRadioGroup;
    ProgressBar1: TProgressBar;
    nvariables: TRadioGroup;
    verdadero: TLineSeries;
    graf: TLineSeries;
    run: TButton;
    Button2: TButton;
    Chart1: TChart;
    em: TEdit;
    eiterations: TEdit;
    elimARL0: TEdit;
    elimARL1: TEdit;
    ed: TEdit;
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    Label5: TLabel;
    Label6: TLabel;
    Label7: TLabel;
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    procedure eARL0Change(Sender: TObject);
    procedure edChange(Sender: TObject);
    procedure en2Change(Sender: TObject);
    procedure nvariablesClick(Sender: TObject);
    procedure runClick(Sender: TObject);
private
    { private declarations }
public
    { public declarations }
end;

var
    Form1: TForm1;
    n1, n2, m, p : integer;
    iterations : longint;
```

```
ARL0, limiARL0, limiARL1, alfa, d, LCSreal,LCIreal,
  ARL1verdadero, CL, CL2, lambda, mshift1, mshift2, mshift3 : real;
Msigma, Mcholesky : Pmatrix;
normales, medias, aleatorio, multi1, shiftm : Pvector;
correccion, r12 : real;

implementation

{$R *.lfm}

{ TForm1 }

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
  Application.terminate
end;

Procedure calcula_ARL;
begin

  lambda := n2*d*d;
ARL1verdadero := 1 / (1 - Distribution_noncentral_chisquare(CL, p, lambda));
form1.label14.caption := 'Out-of-control ARL (ARL1) =' + Format('%8.2f',
[ARL1verdadero]);
end;

//*****

procedure TForm1.nvariablesClick(Sender: TObject);
var
  p1 : integer;
begin
  if form1.nvariables.ItemIndex = 0 then
    begin
      form1.label8.enabled := false; form1.label9.enabled := false;
      form1.er13.enabled := false; form1.er23.enabled := false;
```

```
        end;
    if form1.nvariables.ItemIndex = 1 then
        begin
            form1.label8.enabled := true; form1.label9.enabled := true;
            form1.er13.enabled := true; form1.er23.enabled := true;
        end;

        if form1.nvariables.ItemIndex = 0 then p1 := 2;
    if form1.nvariables.ItemIndex = 1 then p1 := 3;
        p := p1;
        ARL0 := strtofloat(form1.eARL0.text);
        n2 := strtoint(form1.en2.text);
        d := strtofloat(form1.ed.text);

        alfa := 1/ARL0;
        CL := pChi2Inv(p, alfa);
        calcula_ARL

end;

// *****

procedure TForm1.eARL0Change(Sender: TObject);
var
    ARL01 : real;
begin
    if form1.eARL0.Text <> '' then
        begin
            ARL01 := strtofloat(form1.eARL0.text);
            ARL0 := ARL01;
            n2 := strtoint(form1.en2.text);
            d := strtofloat(form1.ed.text);

            alfa := 1/ARL0;
            if form1.nvariables.ItemIndex = 0 then p := 2;
            if form1.nvariables.ItemIndex = 1 then p := 3;
```

```
    CL := pChi2Inv(p, alfa);
    calcula_ARL
end;

end;

procedure TForm1.edChange(Sender: TObject);
var
    d1 : real;
begin
    if form1.ed.Text <> '' then
        begin
            d1 := strtofloat(form1.ed.text);
            ARL0 := strtofloat(form1.eARL0.text);
            n2 := strtoint(form1.en2.text);

            alfa := 1/ARL0;
            if form1.nvariables.ItemIndex = 0 then p := 2;
            if form1.nvariables.ItemIndex = 1 then p := 3;
            CL := pChi2Inv(p, alfa);
            calcula_ARL
            end;

end;

//*****

procedure TForm1.en2Change(Sender: TObject);
var
    n21 : integer;
begin
    if form1.en2.Text <> '' then
        begin
            n21 := strtoint(form1.en2.text);
            n2 := n21; d := strtofloat(form1.ed.text);
            ARL0 := strtofloat(form1.eARL0.text);
            alfa := 1/ARL0;
```

```
        if form1.nvariables.ItemIndex = 0 then p := 2;
        if form1.nvariables.ItemIndex = 1 then p := 3;
    CL := pChi2Inv(p, alfa);
    calcula_ARL
end;

end;

//*****
procedure leer_datos;
var
    i : integer;
    r12,r13, r23, auxi : real;

begin
    decimalseparator := '.';
    m := strtoint(form1.em.text);
    if form1.nvariables.ItemIndex = 0 then p := 2;
    if form1.nvariables.ItemIndex = 1 then p := 3;

n1 := strtoint(form1.en1.text); n2 := strtoint(form1.en2.text);
iterations := strtoint(form1.eiterations.text);
ARL0 := strtofloat(form1.eARL0.text); limiARL1 := strtofloat(form1.elimARL1.text);
limiARL0 := strtofloat(form1.elimARL0.text);
d := strtofloat(form1.ed.text);

alfa := 1/ARL0;
CL := pChi2Inv(p, alfa);

calcula_ARL;

form1.verdadero.clear;
form1.verdadero.AddXY(ARL1verdadero, ARL0);

correccion := strtofloat(form1.ecorreccion.text);
CL2 := CL*correccion;
```

```

dimvector(normales, p); Dimmatrix(Msigma,p,p); Dimmatrix(Mcholesky,p,p);
dimvector(medias, p); dimvector(aleatorio, p); Dimvector(multi1, p);
Dimvector(shiftm, p);

for i:=1 to p do Msigma^[i]^i := 1;

Msigma^[1]^2 := strtofloat(form1.er12.text); Msigma^[2]^1 := Msigma^[1]^2;

if p = 3 then
  begin
    Msigma^[1]^3 := strtofloat(form1.er13.text); Msigma^[3]^1 :=
      Msigma^[1]^3;
    Msigma^[2]^3 := strtofloat(form1.er23.text); Msigma^[3]^2 :=
      Msigma^[2]^3;
  end;

if p = 2 then
  begin
    if form1.who.ItemIndex = 0 then
      begin
        mshift2 := 0;
        mshift1 := sqrt(d*d*
          (1-(strtofloat(form1.er12.text)*strtofloat(form1.er12.text))));
      end;
    if form1.who.ItemIndex = 1 then
      begin
        mshift1 := sqrt((d*d*(1+strtofloat(form1.er12.text)))/2);
        mshift2 := mshift1;
      end;
    shiftm^[1] := mshift1; shiftm^[2] := mshift2;
  end;

r12 := strtofloat(form1.er12.text); r13 := strtofloat(form1.er13.text);
r23 := strtofloat(form1.er23.text);
if p = 3 then

```

```

begin
  if form1.who.ItemIndex = 0 then
    begin
      mshift2 := 0; mshift3 := 0;
      mshift1 := sqrt((d*d*
        ((r12*r12)-2*r12*r13*r23+(r13*r13)+(r23*r23)-1))/((r23*r23)-1));
    end;
  if form1.who.ItemIndex = 1 then
    begin
      auxi := (r12*r12) -2*r12*r13-2*r12*r23+2*r12+
        (r13*r13)-2*r13*r23+2*r13+(r23*r23)+2*r23-3;
      mshift1 := sqrt((d*d*((r12*r12)-2*r12*r13*r23+(r13*r13)+
        (r23*r23)-1))/(auxi));
      mshift2 := mshift1; mshift3 := mshift1;
    end;
    shiftm^[1] := mshift1; shiftm^[2] := mshift2; shiftm^[3] := mshift3;
  end;
end;

//*****
function Varianza(data : array of real; n : integer): real;
var
  i : integer;
  suma, media, resultado : real;
begin
  suma := 0;
  for i:=0 to n-1 do suma := suma + data[i];
  media := suma / n;
  suma := 0;
  for i:= 0 to n-1 do suma := suma + Power(data[i] - media, 2);
  resultado := suma / (n-1);
  Varianza := resultado;

end;

//*****

```

```

procedure hallar_cholesky;
var
  resu : integer;
  i, j : integer;
begin
  {Msigma^[1]^1 := 1; Msigma^[1]^2 := 0.7;
  Msigma^[2]^1 := 0.7; Msigma^[2]^2 := 1; }
  medias^[1] := 100; medias^[2] := 10; medias^[3] := 0;
  resu := Cholesky(Msigma, 1, p, Mcholesky);
  {for i:= 1 to p do
    for j:= 1 to p do
      form1.memo1.lines.add(floattostr(Mcholesky^[i]^j));    }
end;
//*****
function T2(p, n : integer; mrandom, mestimada :array of real; Sestimada : Pmatrix):
  real;
var
  inversa : Pmatrix;
  diferencia, prod1 : array[0..15] of real;
  resul, i, j : integer;
  suma : real;
begin
  dimmatrix(inversa, p, p);
  resul := InvMat(Sestimada,1 , p, inversa);

  for i:=0 to p-1 do diferencia[i] := mrandom[i] - mestimada[i];

  suma := 0;
  for i:=0 to p-1 do
    begin
      for j:=0 to p-1 do suma:= suma + inversa^[i+1]^j+1]*diferencia[j];
      prod1[i] := suma;
      suma := 0;
    end;
  end;

```



```

        suma := 0;
        for i:= 0 to p-1 do suma:= suma + diferencia[i]*prod1[i];
        T2 := n*suma;
        delmatrix(inversa, p, p);
    end;
//*****
Function multivariante(p : integer) : Pvector;
var
    i, j : integer;
    suma, a, b : real;
begin
    for i:=1 to p do normales^[i] := RandG(0, 1);

{   function Cholesky(A : PMatrix; Lbound, Ubound : Integer;
        L : PMatrix) : Integer;
-----
    Cholesky decomposition. Factors the symmetric positive definite matrix
    A as a product  $L * L'$ , where L is a lower triangular matrix. This
    procedure may be used as a test of positive definiteness.
-----
    Input parameters : A      = matrix
                    Lbound = index of first matrix element
                    Ubound = index of last matrix element
-----
    Output parameter : L      = Cholesky factor of matrix A
-----
    Possible results : MAT_OK
                    MAT_NOT_PD
----- }

    for i:= 1 to p do multi1^[i]:= 0;
    suma := 0;
    for i:=1 to p do
        begin
            for j:=1 to p do
                begin

```

```

        // a:= Mcholesky^[i]^[j];
        // b := normales^[j];
        suma:= suma + Mcholesky^[i]^[j]*normales^[j];
        multi1^[i] := suma;
        end;
    suma := 0;
end;

for i:=1 to p do aleatorio^[i] := multi1^[i] + medias^[i];
result := aleatorio;
end;
//*****
{function covarianza(p, m, n: integer; A, B : array of real; mediax, mediay : real) :
real;
var
    i : longint;
    mult : array of real;
    mediaxy, suma : real;
begin
{setlength(mult, m*n);
for i:= 1 to m*n do mult[i] := A[i]*B[i];

suma := 0;
for i:= 1 to m*n do suma:= suma + mult[i];

mediaxy := suma /(m*n);
covarianza := mediaxy -(mediax*mediay); }

suma := 0;
for i:=1 to m*n do
    suma := suma + ((A[i]-mediax)*(B[i] - mediay));
covarianza := suma /(m*n);
end; }

//*****

```

```

procedure TForm1.runClick(Sender: TObject);
var
  t, i,j, k : integer;
  h, conT20, conT21 : longint;
  total, vT20, vT21 : real;
  suma, suma1, suma2,  alfareal, betareal, dusar,
    contadorgood, contadorbad, contadorarl0,contadorarl1, cov: real;
  X, Y: array[1..15, 1..150] of real;
  Datos : array of array of real;
  Datos1, Datos2 , Datos3: array of real;
  Xbar,  sigma : array[1..15, 1..40000] of real;
  ARL0real, ARL1real: array[1..40000] of real;
  numeros: Pvector;
  Sestimada : Pmatrix;
  mediaestimada, sigmaestimada, Ybarra0, Ybarra1 : array[1..15] of real;
  auxiliar : array of real;

begin
  leer_datos;
  hallar_cholesky;
  form1.graf.Clear;  form1.limARL0.clear;
  form1.limARL1.clear;

  Application.ProcessMessages;;

  contadorgood := 0; contadorbad :=0; contadorarl0 := 0; contadorarl1 := 0;
  form1.ProgressBar1.Position:= 0;

  Setlength(Datos, 20, 300000); Setlength(Datos1, 300000);
  Setlength(Datos2, 300000); Setlength(Datos3, 300000);
  dimvector(numeros, p); dimmatrix(Sestimada, p, p);
  setlength(auxiliar, n1);

  total := 0;

  for t:=1 to iterations do

```

```

begin
  total := 0;
  for j:=1 to m do
    begin
      for i:= 1 to n1 do
        begin
          total := total + 1;
          numeros := multivariante(p);
          for k:=1 to p do
            begin
              X[k, i] := numeros^[k];
              Datos[k, Round(total)] := numeros^[k];
            end;
          end;
        suma := 0;

      for k:= 1 to p do
        begin
          for i:=1 to n1 do suma := suma + X[k, i];
          Xbar[k, j] := suma / n1;
          suma := 0;
        end;

      { Variance (VARS): TotalVariance / (N-1). aka Sample Variance
function Variance(const Data: array of Double): Extended; }

for k:= 1 to p do
  begin
    for i := 0 to n1-1 do auxiliar[i] := X[k, i+1];
    sigma[k,j] := Varianza(auxiliar, n1);

  end;
  { suma := 0;

  for k:= 1 to p do

```

```

        begin
            for i:=1 to n do suma := suma + Power((X[k, i] -
                Xbar[k, j]), 2);
            sigma[k, j] := (suma / (n-1));
            suma := 0;
        end;

        suma := 0; }

    end; //j, ciclo phase I, m veces

//*****
    for k:= 1 to p do
        begin
            mediaestimada[k] := 0;
            sigmaestimada[k] := 0;
        end;

    suma1 := 0; suma2 := 0;
    for k:=1 to p do
        begin
            for i := 1 to m do
                begin
                    suma1 := suma1 + Xbar[k, i];
                    suma2 := suma2 + sigma[k, i];

                end;
            mediaestimada[k] := suma1; suma1 := 0;
            sigmaestimada[k] := suma2; suma2 := 0;
        end;
    for k := 1 to p do
        begin

            mediaestimada[k] := mediaestimada[k] / m;
            sigmaestimada[k] := sigmaestimada[k] /m;
        end;

```

```

for i:=1 to m*n1 do Datos1[i] := Datos[1, i];
for i:=1 to m*n1 do Datos2[i] := Datos[2, i];
if p = 3 then for i:=1 to m*n1 do Datos3[i] := Datos[3, i];

suma := 0;
for i:=1 to m*n1 do
suma := suma + ((Datos1[i]- mediaestimada[1])*(Datos2[i] - mediaestimada[2]));

cov := suma /(m*n1);
Sestimada^[1]^1 := sigmaestimada[1]; Sestimada^[2]^2 := sigmaestimada[2];
Sestimada^[1]^2 := cov*sqrt(sigmaestimada[1])*sqrt(sigmaestimada[2]);
Sestimada^[2]^1 := cov*sqrt(sigmaestimada[1])*sqrt(sigmaestimada[2]);
if p = 3 then Sestimada^[3]^3 := sigmaestimada[3];
if p = 3 then
begin
suma := 0;
for i:=1 to m*n1 do
suma := suma + ((Datos1[i]- mediaestimada[1])*
(Datos3[i] - mediaestimada[3]));
cov := suma /(m*n1);
Sestimada^[1]^3 := cov*sqrt(sigmaestimada[1])*
sqrt(sigmaestimada[3]);
Sestimada^[3]^1 := Sestimada^[1]^3 ;
suma := 0;
for i:=1 to m*n1 do
suma := suma + ((Datos2[i]-
mediaestimada[2])*(Datos3[i] - mediaestimada[3]));
cov := suma /(m*n1);
Sestimada^[2]^3 := cov*sqrt(sigmaestimada[2])*
sqrt(sigmaestimada[3]);
Sestimada^[3]^2 :=Sestimada^[2]^3;
end;

conT20 := 0; conT21 := 0;

```

```

for h:=1 to 200000 do
begin
for i:= 1 to n2 do
begin
numeros := multivariante(p);
for k:=1 to p do
begin
Y[k, i] := numeros^[k];

end;
end;

for k:=1 to p do
begin
suma := 0;
for i := 1 to n2 do
begin
suma := suma + Y[k, i];
end;
Ybarra0[k] := suma / n2;
end;
for k:= 1 TO p do Ybarra1[k] := Ybarra0[k] + shiftm^[k];

vT20 := T2(p, n2, Ybarra0, mediaestimada, Sestimada);

vT21 := T2(p, n2, Ybarra1, mediaestimada, Sestimada);
if VT20 >= CL2 then inc(contT20);
if VT21 >= CL2 then inc(contT21);

end;
if contT21 <> 0 then ARL1real[t] := 200000/contT21 else ARL1real[t] := 30000;
if contT20 <> 0 then ARL0real[t] := 200000/contT20 else
begin
if contT21 = 0 then ARL0real[t] := 30000;
if contT21 <> 0 then ARL0real[t] := 1.2*ARL1real[t];

```

```

end;

form1.graf.AddXY(ARL1real[t],ARL0real[t]);
form1.limARL1.addxy(limiARL1, ARL0real[t]) ;
form1.limARL0.addxy(ARL1real[t], limiARL0) ;

if ((ARL1real[t] < limiARL1) and (ARL0real[t] > limiARL0))
then contadorgood := contadorgood +1;
if ((ARL1real[t] > limiARL1) and (ARL0real[t] < limiARL0))
then contadorbad := contadorbad +1;
if (ARL1real[t] < limiARL1) then contadorarl1 := contadorarl1 +1;
if (ARL0real[t] > limiARL0) then contadorarl0 := contadorarl0 +1;

form1.ProgressBar1.Position:= Round(t/iterations*100);

if (t mod 20) = 0 then
begin

Application.ProcessMessages;

end;
end; //fin ciclo t
//*****
Application.ProcessMessages;

form1.Memo1.lines.add('% good charts =
'+FloattostrF(contadorgood/iterations*100,ffixed,7,3)+ ' %');
form1.Memo1.lines.add('% bad charts =
'+FloattostrF(contadorbad/iterations*100,ffixed,7,3)+ ' %');
form1.Memo1.lines.add('% good charts for ARL0 =
'+FloattostrF(contadorARL0/iterations*100,ffixed,7,3)+ ' %');
form1.Memo1.lines.add('% good charts for ARL1=
'+FloattostrF(contadorARL1/iterations*100,ffixed,7,3)+ ' %');

form1.Memo1.lines.add('*****');
delvector(numeros,p);

```



```
    delvector(normales, p);
    Delmatrix(Msigma, p,p);
    Delmatrix(Mcholesky,p,p);
delvector(medias, p);
delvector(aleatorio, p);
delmatrix(Sestimada, p, p); delvector(multi1,p);
//error m = 600 n = 2
end;

end.
```