

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN  
OPERATIVA



# Alternativas para la Monitorización de la Capacidad y Rendimiento de Procesos

**Proyecto de Fin de Máster presentado por: César Alejandro López Carrillo**

Tutor académico: Andrés Carrión García

Máster Universitario en Ingeniería de Análisis de Datos, Mejora de Procesos y Toma de Decisiones

**Valencia, 11 de septiembre de 2017**

## RESUMEN

La necesidad de las empresas por aumentar su productividad, lo cual implica la calidad de sus productos, ha desencadenado diferentes métodos para la monitorización de los procesos productivos. La importancia del Control Estadístico de Procesos (CEP, por sus siglas en inglés) ha crecido en los últimos años por dicha razón y a raíz de éste, se desarrollaron los índices de capacidad de proceso, cuyo objetivo es medir cuantitativamente la capacidad que tiene un proceso para producir productos que cumplan con las especificaciones del cliente. Actualmente, la estimación del índice de capacidad de proceso es utilizada para toma de decisiones a lo largo del ciclo de un producto, ya que forma parte de la decisión de fabricar o comprar un producto, mejoras en los procesos que reducen la variabilidad y acuerdos contractuales entre clientes o proveedores respecto a la calidad del producto. Una alternativa para la monitorización usual de la media y variabilidad de un proceso, que permita visualizar el comportamiento del mismo en base a las especificaciones del cliente, consiste en implementar un esquema para la monitorización de los índices de capacidad. (Vännman, 1995) define una familia de índices de capacidad que depende de dos parámetros no negativos ( $u$  y  $v$ ); esta nueva familia generaliza los cuatro índices de capacidad básicos  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$ ,  $C_{pmk}$ . El presente trabajo plantea adaptar un método para la monitorización de la familia de índices de Vännman, enfatizando en los cuatro índices básicos, a través de gráficos de control que nos permitirán estudiar y caracterizar el comportamiento de los índices de capacidad de proceso.

**Palabras clave:** índice de capacidad, transformación logarítmica, valor esperado, varianza, gráfico de control.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Gobierno del Estado de Sonora a través del Consejo Estatal de Ciencia y Tecnología (COECYT) por la financiación recibida mediante el “Programa de Apoyos para el Fomento, la Formación, el Desarrollo y la Consolidación de Científicos y Tecnólogos y de Recursos Humanos de Alto Nivel” en el curso 2016-2017.

Al profesor Andrés Carrión García, director y autor intelectual de este proyecto quien, con su gran experiencia, sus orientaciones y su paciencia ha sido fuente de inspiración y motivación para la realización de dicho proyecto.

A mi familia que siempre me brinda su apoyo y fortaleza para mi desarrollo profesional y personal.

# Contenido

---

Índice de Figuras .....	vi
Índice de Tablas .....	viii
CAPÍTULO I.....	9
1 Introducción y Planteamiento.....	9
1.1 Introducción.....	9
1.2 Planteamiento .....	13
1.3 Objetivos .....	13
CAPÍTULO II.....	15
2 Medición de la Capacidad de Procesos.....	15
2.1 Índices de capacidad de proceso .....	15
2.1.1 Índices de capacidad clásicos.....	16
2.1.1.1 Índice $C_p$ .....	16
2.1.1.2 Índice $C_{pk}$ .....	17
2.1.1.3 Índice $C_{pm}$ .....	17
2.1.1.4 Índice $C_{pmk}$ .....	18
2.1.2 Indices de Vännman .....	18
CAPÍTULO III.....	20
3 Metodología .....	20
3.1 Índice Estimado y Límites de Control .....	21
3.1.1 Estimación de $C_p(u, v)$ .....	22
3.1.1.1 Valor Esperado y Varianza.....	23
3.1.2 Determinación de Límites de Control.....	26
3.1.2.1 Límites de Control para $C_{p, n-1}(0,0) = C_p$ y $C_{p, n-1}(1,0) = C_{pk}$ .....	26
3.1.2.2 Límites de Control para $C_{p, n}(0,1) = C_{pm}$ y $C_{p, n}(1,1) = C_{pmk}$ .....	26
3.2 Límites de control en base a percentiles empíricos.....	27
3.3 Normalización de Estimadores y Cálculo de Límites de Control .....	28
3.3.1 Estimación de la Nueva Variable Transformada.....	28
3.3.1.1 Valor Esperado y Varianza.....	29

3.3.2	Determinación de Límites de Control.....	30
3.3.2.1	Límites de Control para $C_{p,n-1}(0,0) = C_p$ y $C_{p,n-1}(1,0) = C_{pk}$ transformados.....	31
3.3.2.2	Límites de Control para $C_{p,n}(0,1) = C_{pm}$ y $C_{p,n}(1,1) = C_{pmk}$ transformados.....	31
3.4	Average Run Length.....	32
CAPÍTULO IV .....		33
4	Revisión de Gráficos de Control .....	33
4.1	Proceso con capacidad media $C_p = 1.33$ .....	33
4.1.1	Índices estimados $C_{p,n-1}(u,v)$ y $C_{p,n}(u,v)$ .....	33
4.1.1.1	Límites de Control .....	35
4.1.1.2	Límites de Control con Percentiles Empíricos .....	38
4.1.2	Transformación logarítmica de dos parámetros.....	41
4.1.2.1	Límites de Control .....	42
4.1.3	ARL experimentado .....	45
4.2	Proceso con capacidad media $C_p = 1.67$ .....	46
4.2.1	Índices estimados $C_{p,n-1}(u,v)$ y $C_{p,n}(u,v)$ .....	46
4.2.1.1	Límites de Control .....	48
4.2.1.2	Límites de Control con Percentiles Empíricos .....	51
4.2.2	Transformación logarítmica de dos parámetros.....	54
4.2.2.1	Límites de Control .....	56
4.2.3	ARL Experimentado.....	59
Conclusiones.....		61
Futuras Líneas de Investigación.....		62
Referencias Bibliográficas .....		63
Anexos .....		64
Anexo I. Funciones de densidad $C_{p,n}(u,v)_i$ .....		64

## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. (a) Comportamiento de un proceso estable y (b) comportamiento de un proceso inestable.</i>	10
<i>Figura 2. Ejemplo de diagnóstico de un gráfico de control.</i>	11
<i>Figura 3. Capacidad potencial de proceso <math>C_p</math> para distintas anchuras de dispersión de proceso.</i>	12
<i>Figura 4. Diagrama del flujo a seguir para el estudio de los índices de capacidad estimados, construcción de los límites de control y evaluación de los gráficos de control.</i>	21
<i>Figura 5. Representación gráfica de percentiles empíricos, el percentil 50% representa la línea central y los percentiles 0.135% y 99.865% LCI y LCS respectivamente.</i>	28
<i>Figura 6. (a) Histograma de <math>C_{p,n} - 1(0,0)</math> y (b) histograma de <math>C_{p,n} - 1(1,0)</math> para simulación de proceso con capacidad media de 1.33.</i>	34
<i>Figura 7. (a) Histograma de <math>C_{p,n}(0,1)</math> y (b) histograma de <math>C_{p,n}(1,1)</math> para simulación de proceso con capacidad media de 1.33.</i>	34
<i>Figura 8. Gráfico de control de <math>C_{p,n} - 1(0,0)</math> para proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCI = 0.9366</math> y <math>LCS = 1.7719</math>.</i>	36
<i>Figura 9. Gráfico de control de <math>C_{p,n} - 1(1,0)</math> para proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCI = 0.8856</math> y <math>LCS = 1.7457</math>.</i>	36
<i>Figura 10. Gráfico de control de <math>C_{p,n}(0,1)</math> para proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCI = 0.9439</math> y <math>LCS = 1.7641</math>.</i>	37
<i>Figura 11. Gráfico de control de <math>C_{p,n}(1,1)</math> para proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCI = 0.8902</math> y <math>LCS = 1.7418</math>.</i>	38
<i>Figura 12. Gráfico de control para <math>C_{p,n} - 1(0,0)</math>, límites de control mediante percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCI = 0.0196</math> y <math>LCS = 1.8841</math>.</i>	38
<i>Figura 13. Gráfico de control para <math>C_{p,n} - 1(1,0)</math>, límites de control mediante percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCI = 0.9805</math> y <math>LCS = 1.8027</math>.</i>	39
<i>Figura 14. Gráfico de control para <math>C_{p,n}(0,1)</math>, límites de control mediante percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCI = 1.0214</math> y <math>LCS = 1.8326</math>.</i>	40
<i>Figura 15. Gráfico de control para <math>C_{p,n}(1,1)</math>, límites de control mediante percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCL = 0.9700</math> y <math>UCL = 1.7971</math>.</i>	40
<i>Figura 16. (a) Histograma de <math>tLC_{p,n} - 1(0,0)</math> y (b) histograma de <math>tLC_{p,n} - 1(1,0)</math> para simulación de proceso con capacidad media de 1.33.</i>	41
<i>Figura 17. (a) Histograma de <math>tLC_{p,n}(0,1)</math> y (b) histograma de <math>tLC_{p,n}(1,1)</math> para simulación de proceso con capacidad media de 1.33.</i>	41
<i>Figura 18. Gráfico de control para <math>tLC_{p,n} - 1(0,0)</math> para proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCI = -3.1036</math> y <math>LCS = 3.1215</math>.</i>	43
<i>Figura 19. Gráfico de control para <math>tLC_{p,n} - 1(1,0)</math> para proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCI = -2.9881</math> y <math>LCS = 3.0175</math>.</i>	43
<i>Figura 20. Gráfico de control para <math>tLC_{p,n}(0,1)</math> para proceso con capacidad media de 1.33, donde <math>LCI = -3.1082</math> y <math>LCS = 3.1222</math>.</i>	44

Figura 21. Gráfico de control para $tC_{p,n}(1,1)$ para proceso con capacidad media de 1.33, donde $LCL = -3.05$ y $LCS = 3.069$ .....	45
Figura 22. (a) Histograma de $C_{p,n} - 1(0,0)$ y (b) histograma de $C_{p,n} - 1(1,0)$ para simulación de proceso con capacidad media de 1.67.....	47
Figura 23. (a) Histograma de $C_{p,n}(0,1)$ y (b) histograma de $C_{p,n}(1,1)$ para simulación de proceso con capacidad media de 1.67. ....	47
Figura 24. Gráfico de control de $C_{p,n} - 1(0,0)$ para proceso con capacidad media 1.67, donde $LCL = 1.1681$ y $LCS = 2.2175$ .....	49
Figura 25. Gráfico de control de $C_{p,n} - 1(1,0)$ para proceso con capacidad media 1.67, donde $LCL = 1.1223$ y $LCS = 2.1861$ .....	49
Figura 26. Gráfico de control de $C_{p,n}(0,1)$ para proceso con capacidad media 1.67, donde $LCL = 1.1626$ y $LCS = 2.2214$ .....	50
Figura 27. Gráfico de control de $C_{p,n}(1,1)$ para proceso con capacidad media 1.67, donde $LCL = 1.1150$ y $LCS = 2.1930$ .....	51
Figura 28. Gráfico de control para $C_{p,n} - 1(0,0)$ , límites de control mediante percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.67, donde $LCL = 1.2956$ y $LCS = 2.3157$ .....	52
Figura 29. Gráfico de control para $C_{p,n} - 1(1,0)$ , límites de control obtenidos percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.67, donde $LCL = 1.2453$ y $LCS = 2.2910$ .....	52
Figura 30. Gráfico de control para $C_{p,n}(0,1)$ , límites de control obtenidos percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.67, donde $LCL = 1.2939$ y $LCS = 2.3253$ .....	53
Figura 31. Gráfico de control para $C_{p,n}(1,1)$ , límites de control obtenidos percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.67, donde $LCL = 1.2313$ y $LCS = 2.3119$ .....	54
Figura 32. (a) Histograma de $tC_{p,n} - 1(0,0)$ y (b) histograma de $tC_{p,n} - 1(1,0)$ para simulación de proceso con capacidad media de 1.67.....	55
Figura 33. (a) Histograma de $tC_{p,n}(0,1)$ y (b) histograma de $tC_{p,n}(1,1)$ para simulación de proceso con capacidad media de 1.67.....	55
Figura 34. Gráfico de control para $tC_{p,n} - 1(0,0)$ para proceso con capacidad media 1.67, donde $LCL = -2.9737$ y $LCS = 2.9360$ .....	56
Figura 35. Gráfico de control para $tC_{p,n} - 1(1,0)$ para proceso con capacidad media 1.67, donde $LCL = -2.9225$ y $LCS = 2.9028$ .....	57
Figura 36. Gráfico de control para $tC_{p,n}(0,1)$ para proceso con capacidad media 1.67, donde $LCL = -2.9153$ y $LCS = 2.8948$ .....	58
Figura 37. Gráfico de control para $tC_{p,n}(1,1)$ para proceso con capacidad media 1.67, donde $LCL = -2.9160$ y $LCS = 2.9073$ .....	58

## ÍNDICE DE TABLAS

---

<i>Tabla 1. Prueba de normalidad chi-cuadrada con 99% de confianza para índices de capacidad estimados para proceso con capacidad media 1.33.....</i>	<i>35</i>
<i>Tabla 2. Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov con 99% de confianza para índices de capacidad transformados para proceso con capacidad media 1.33.....</i>	<i>42</i>
<i>Tabla 3. Los límites de control inferior (LCI) y superior (LCS) para un proceso cuya capacidad media es de 1.33 con <math>K=3</math> cuando <math>n=50</math>, obtenidos para <math>u=0,1</math> y <math>v=0,1</math>. ....</i>	<i>45</i>
<i>Tabla 4. Resumen de ARL experimentado de los cuatro índices en estudio para la simulación de proceso con capacidad media de 1.33.....</i>	<i>46</i>
<i>Tabla 5. Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov con 99% de confianza para índices de capacidad estimados para proceso con capacidad media 1.67.....</i>	<i>48</i>
<i>Tabla 6. Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov con 99% de confianza para índices de capacidad transformados para proceso con capacidad media 1.67.....</i>	<i>56</i>
<i>Tabla 7. Los límites de control inferior (LCL) y superior (UCL) para un proceso cuya capacidad media es de 1.67 con <math>K=3</math> cuando <math>n=50</math>, obtenidos para <math>u = 0,1</math> y <math>v = 0,1</math>. ....</i>	<i>59</i>
<i>Tabla 8. Resumen de ARL experimentado de los cuatro índices en estudio para la simulación de proceso con capacidad media de 1.67.....</i>	<i>59</i>



# CAPÍTULO I

## 1 INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO

---

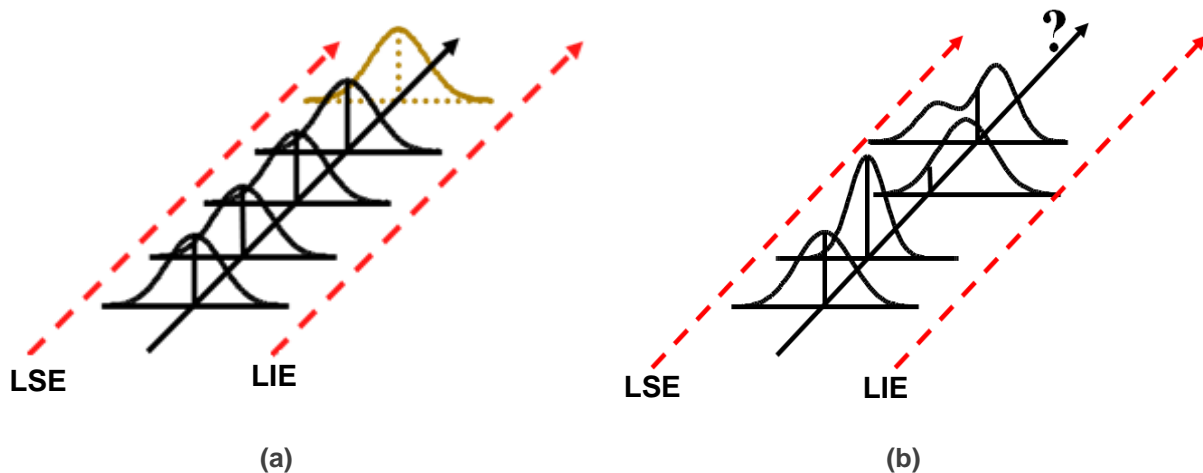
### 1.1 Introducción

Todos los procesos son afectados por fuentes de variación, independientemente de su diseño o tecnología empleada; en unos casos la variación puede ser grande o extremadamente pequeña, pero siempre existirá. Estas fuentes de variación son categorizadas como causas aleatorias y causas asignables.

Las causas aleatorias se refieren a las fuentes de variación que son parte de la naturaleza del proceso, son causas comunes que siempre están presentes y forman parte de un “proceso estable” o “bajo control”, el cual es capaz de repetir su distribución con el tiempo. Debido a que el comportamiento de un proceso estable es predecible, es posible monitorizarlo de acuerdo con el tipo de proceso y producto.

Por otro lado, las causas asignables, son fuentes de variación especiales y se refieren a cualquier factor que afecta la salida del proceso y no forma parte de la naturaleza del proceso. Un proceso que opera con causas asignables es considerado un “proceso inestable” o “fuera de control”.

Un proceso inestable tiene un comportamiento impredecible y la estimación de los parámetros no es confiable; es por ello, que la monitorización de un proceso inestable sería muy ineficiente. Esto sucede, ya que es muy difícil definir cómo funcionó el proceso en el pasado y no hay manera confiable de saber cómo será la salida del proceso en el futuro.



**Figura 1. (a) Comportamiento de un proceso estable y (b) comportamiento de un proceso inestable.**

**Fuente:** Process Improvement, LLC, recuperado de <http://efficiency100.com/Quality/default.html>

(Montgomery, 2009) define el control estadístico de procesos como un conjunto de herramientas enfocadas a resolver problemas, muy útil para conseguir la estabilidad y mejorar la capacidad del mismo proceso mediante la reducción de la variabilidad. Su objetivo principal es aplicar un conjunto de técnicas capaces de detectar rápidamente un proceso inestable, con el fin de tomar las medidas necesarias que permitan controlar las causas asignables del proceso.

Una de las herramientas principales del control estadístico de procesos son los gráficos de control, propuestos por Walter Shewhart en 1927. Dichos gráficos consisten en monitorizar el valor medio y la variabilidad del proceso de alguna característica crítica de la calidad del producto, recolectando muestras periódicamente, obteniendo su promedio  $\bar{X}$  y ya sea su rango  $R$  o desviación estándar  $S$  como estimador de variabilidad.

Dichas estimaciones son plasmadas en un gráfico que contiene una línea central, que representa el valor medio de la característica en estudio, y otras dos líneas horizontales que representan los límites de control inferior ( $LCI$ ) y superior ( $LCS$ ) que han sido determinados en una etapa previa del estudio del comportamiento habitual del proceso, conocida comúnmente como Fase 1.

## Gráfico de control



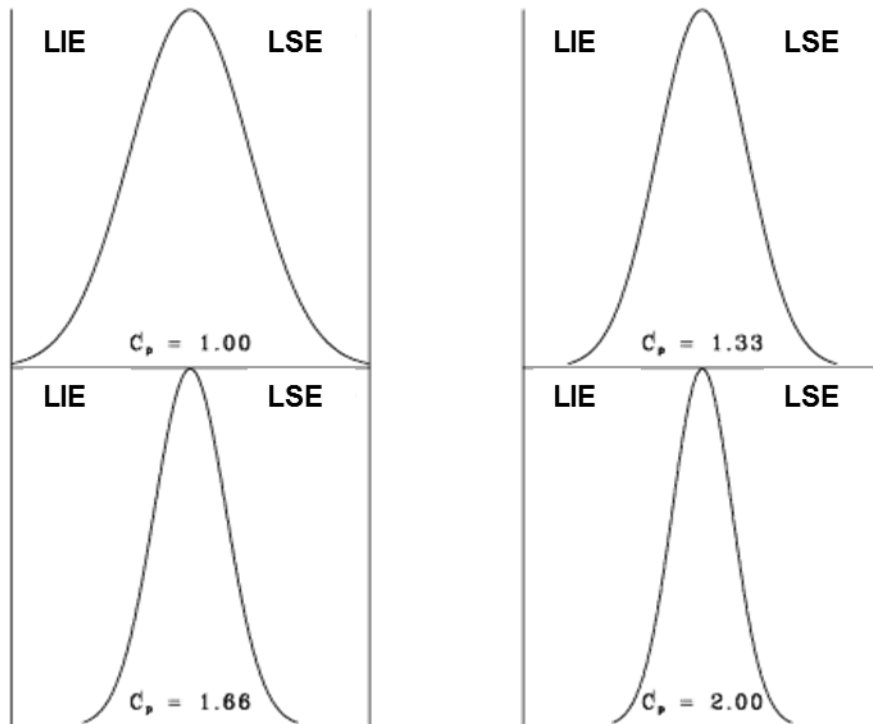
Figura 2. Ejemplo de diagnóstico de un gráfico de control.

Fuente: SPC Consulting Group, recuperado de <http://spcgroup.com.mx/grafica-de-control/>

Los gráficos más comunes son los  $\bar{X}$  y  $R$ , donde el  $\bar{X}$  representa las medias aritméticas de pequeños subgrupos y el gráfico  $R$  representa el rango de los valores de cada subgrupo. Se busca detectar lo antes posible, un cambio en la media, variabilidad o ambas. Generalmente, los subgrupos  $m$  son conformados por muestras de  $n$  individuos (entre dos y seis), lo que da lugar a un sistema de control a corto plazo.

Además de monitorizar o evaluar el comportamiento de un proceso, podemos calcular la capacidad del mismo. La capacidad del proceso es una medida de la capacidad del productor para producir un producto que cumpla con las especificaciones del cliente; se obtiene comparando el rango de tolerancia de las especificaciones del cliente con la anchura de la dispersión del proceso,  $6\sigma$ , donde  $\sigma$  es la desviación estándar del proceso.

Entre los índices de capacidad más comunes para calcular la capacidad del proceso se encuentran el  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$ . En la práctica los índices más utilizados para determinar la capacidad de un proceso son el  $C_p$  y  $C_{pk}$ .



**Figura 3. Capacidad potencial de proceso  $C_p$  para distintas anchuras de dispersión de proceso.**  
**Fuente:** recuperado de <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section1/pmc16.htm>

La capacidad de un proceso tiene gran impacto sobre las decisiones a tomar a lo largo del ciclo de un producto, ya que forma parte de la decisión de fabricar o comprar un producto, mejoras en los procesos que reducen la variabilidad y acuerdos contractuales entre clientes o proveedores respecto a la calidad del producto. El análisis de la capacidad de proceso es una predicción, por lo tanto, no sería coherente predecir el comportamiento de un proceso a partir de un comportamiento inestable.

Resulta interesante monitorizar los índices de capacidad de procesos, similar a los métodos clásicos que monitorean media, rango o desviación estándar. El monitorizar los índices de capacidad nos permitirá detectar cambios en el nivel de capacidad del proceso y actuar cuando sea necesario. Teniendo en cuenta que la capacidad de procesos forma parte de la toma de decisiones en las empresas, monitorizar su comportamiento conllevaría a obtener beneficios a partir de un procedimiento sencillo.

## 1.2 Planteamiento

Actualmente existe muy poca información bibliográfica respecto a la monitorización de los índices de capacidad por medio de gráficos de control. (Vännman, 1995) define una clase de índices de capacidad que contiene el  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$ . (Castagliola & Vännman, 2007) proponen monitorizar índices de capacidad con un enfoque EWMA, a partir de la clase de índices de capacidad propuesta por Vännman; sin embargo, esta monitorización está limitada a procesos no estables y que aun así son capaces.

A partir de la familia de índices propuesta por Vännman, es posible derivar el valor esperado, varianza y error cuadrático medio del estimador del índice de capacidad. Con esta información, se propone, similar a la lógica de operación de un gráfico de control tipo Shewhart y a lo realizado por Castagliola y Vännman, construir gráficos de control a partir del valor medio esperado y la varianza del estimador para estudiar el comportamiento de los índices de capacidad. Para esto, se estudiarán dos situaciones: un primer proceso en el cual la capacidad media  $C_p = 1.33$  y un segundo proceso en el cual la capacidad media  $C_p = 1.67$ . Dado que los índices de capacidad comúnmente utilizados en la práctica son  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$ , en este trabajo nos limitaremos sólo a estos índices que corresponden a  $C_p(u, v)$  con valores de  $u = 0,1$  y  $v = 0,1$ ; tal como se ilustra en los siguientes capítulos.

## 1.3 Objetivos

### Objetivo General

Diseñar y evaluar un método a efectos de monitorización de la capacidad de procesos a partir de la familia de índices de capacidad introducidos por Vännman que incluya  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$ , mediante gráficos de control.

## **Objetivos específicos**

- ❖ Estudiar y caracterizar el comportamiento de los cuatro índices de capacidad en estudio
- ❖ Proponer la estabilidad de la capacidad de un proceso, similar a la estabilidad de proceso a partir de la media y varianza
- ❖ Definir unos gráficos para el control de la evolución del tiempo de los distintos índices de capacidad
- ❖ Identificar límites de control
- ❖ Analizar el comportamiento de tales gráficos
- ❖ Analizar los problemas del uso de índices de capacidad

# CAPÍTULO II

## 2 MEDICIÓN DE LA CAPACIDAD DE PROCESOS

---

### 2.1 Índices de capacidad de proceso

Los índices de capacidad son una ratio que relaciona las especificaciones del producto con el comportamiento del proceso. Son valores sin unidades por lo que pueden ser comparables entre distintos procesos. Una estimación confiable de este índice será resultado de una correcta recolección de los datos. Los datos deben ser recolectados definiendo un lapso en el que se tomarán los mismos y un método de muestreo adecuado. Además de esto, hay tres condiciones que deben cumplirse al ejecutar un análisis de capacidad de proceso:

- El proceso del cual se recolectaron los datos debe ser estable.
- Las mediciones individuales del proceso deben aproximarse a una distribución normal.
- Las especificaciones están basadas en los requerimientos del cliente.

Estos índices de capacidad son calculados de manera distinta, pero comparten la característica de estimar la variación del proceso dentro de subgrupos. El hecho de estimar la variación por subgrupos puede resultar inconveniente en los casos donde el proceso varía notablemente, ya que la desviación estándar estimada para calcular el índice contempla la variabilidad dentro de cada subgrupo, sin tener en cuenta la variabilidad entre los subgrupos, corriendo el riesgo de que el índice obtenga un valor

irreal. Es común estimar la desviación estándar para estos índices como  $\sigma = \bar{R}/d_2$ , que es una estimación derivada usando rangos de subgrupos  $R_i, i = 1, \dots, m$  y el parámetro  $d_2$  es un factor constante de ajuste para la estimación de la desviación estándar del proceso al trabajar con rangos de muestras promedio.

### 2.1.1 Índices de capacidad clásicos

Existen varios índices para determinar si el proceso es capaz de producir y cumplir con los requerimientos establecidos por el cliente, entre los más comunes se encuentran el  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$ . A continuación, se hace una breve descripción de cada uno de ellos.

#### 2.1.1.1 Índice $C_p$

El índice de capacidad de proceso  $C_p$  fue el primer y original índice de capacidad de proceso introducido por Juran en 1974, diseñado para proveer una medida indirecta de la habilidad potencial para cumplir las especificaciones del cliente. Se define como:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} = \frac{d}{3\sigma} \quad (1)$$

donde  $LSE$  y  $LIE$  se refieren al límite de especificación superior y límite de especificación inferior respectivamente,  $d = (LSE - LIE)/2$ , mientras que  $\sigma$  se refiere a la desviación estándar del proceso. Este índice mide la capacidad del proceso basándose sólo en los límites de especificación, sin tomar en cuenta la posición en la que se encuentran los datos del proceso. Es común decir que el  $C_p$  mide la capacidad potencial del proceso y se espera que su valor sea lo más alto posible, valores por debajo de 1 se consideran inaceptables ya que esto indicaría que el rango natural de variación del proceso no se ajusta al rango de tolerancia.



### 2.1.1.2 Índice $C_{pk}$

El índice de capacidad de proceso  $C_{pk}$ , fue creado con la intención de compensar las debilidades del  $C_p$ , principalmente el hecho de que este último mide la capacidad del proceso sólo en términos de la variabilidad sin tener en consideración la posición del proceso. Se puede describir el  $C_{pk}$  como una forma de medir la ratio de la cantidad de espacio necesaria con la cantidad de espacio disponible para producir de acuerdo con las especificaciones del cliente. En otras palabras, es el índice unilateral para el límite de la especificación más próximo al promedio del proceso. Es común decir que el  $C_{pk}$  mide la capacidad real del proceso y se calcula de la siguiente manera:

$$C_{pk} = \min\left(\frac{LSE - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LIE}{3\sigma}\right) \quad (2)$$

A diferencia del índice  $C_p$ , el índice  $C_{pk}$  toma en cuenta el centrado de la media del proceso  $\mu$ , y en base a la distancia entre ésta y los límites de especificación; se determina el valor mínimo, que da resultado al valor del índice.

### 2.1.1.3 Índice $C_{pm}$

Uno de los puntos criticados referente a los dos índices anteriores, es que ninguno de ellos tiene en cuenta un valor objetivo  $T$  del proceso. Ambos asumen, sin declararlo, que el valor objetivo se encuentra en el centro de las especificaciones. Este valor objetivo es especificado al momento de diseñar el producto, es el valor en el cual el producto obtiene el rendimiento óptimo cuando todas las dimensiones alcanzan este valor objetivo. (Hsiang y Taguchi, 1985) introducen el primero de los índices de “segunda generación” el cual denominan  $C_{pm}$ , que se expresa de la siguiente manera:

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (3)$$

Como se puede observar en la expresión, lo que realiza este índice es estimar la capacidad del proceso con respecto a la variabilidad del valor objetivo.

#### 2.1.1.4 Índice $C_{pmk}$

También llamado el índice de capacidad de tercera generación, introducido por (Pearn, W.L., Kotz, S., Johnson, N.L., 1992) fue construido a partir de los índices  $C_{pk}$  y  $C_{pm}$ , de la misma manera que éstos últimos fueron construidos a partir del  $C_p$ . Este nuevo índice tiene en cuenta, además de lo considerado por el  $C_{pm}$ , el punto medio del intervalo de especificación  $M$ , como se puede apreciar en su expresión:

$$C_{pmk} = \frac{\min(LSE - \mu, \mu - LIE)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (4)$$

Este índice posee la ventaja de ser más sensible a desviaciones respecto al valor objetivo comparado con el  $C_{pk}$  y  $C_{pm}$ . (Vännman, 1995) comparó los cuatro índices comentados en esta sección y concluyó que el  $C_{pmk}$  es el más restrictivo de los cuatro, respecto a la desviación de la media del proceso con el valor objetivo del mismo.

#### 2.1.2 Indices de Vännman

(Vännman, 1995) define una nueva clase de índices de capacidad que depende de dos parámetros no negativos,  $u$  y  $v$ ; dichos índices tienen casos especiales en los cuales se llega al valor del  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$ . Se pueden obtener índices con diferentes propiedades, variando los parámetros de la clase en estudio. La expresión de dichos índices es la siguiente:

$$C_p(u, v) = \frac{d - u|\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}} \quad (5)$$

donde  $d = (LSE - LIE)/2$ , esto es, la mitad de longitud del intervalo de especificación,  $u$  y  $v$  son parámetros no negativos,  $\mu$  es la media del proceso,  $\sigma^2$  es la varianza del proceso,  $M$  es el punto medio del intervalo de especificación y  $T$  es un valor objetivo establecido por la organización.

Esta nueva clase de índices de capacidad considera los cuatro índices mencionados anteriormente como casos especiales, dando valores a  $u = 0$  ó  $1$  y  $v = 0$  ó  $1$ ; así,

$$C_p(0,0) = C_p; \quad C_p(1,0) = C_{pk}; \quad C_p(0,1) = C_{pm}; \quad C_p(1,1) = C_{pmk} \quad (6)$$

El valor del índice  $C_{p,n}(u, v)$ , no determina la probabilidad de no conformidad, pero la limita, tal que la probabilidad de no conformidad no será mayor a  $2\Phi(-3C_p(u, v))$ .

Asumiendo que la característica de proceso estudiada se aproxima a una distribución normal y que el valor objetivo  $T$  es igual al punto medio  $M$  de un intervalo bilateral, es posible derivar los valores esperados, varianzas y los errores medios cuadráticos de estos índices.

# CAPÍTULO III

## 3 METODOLOGÍA

---

Como se dijo a principio del trabajo, estudiaremos dos casos de procesos. Se simularon 400,000 datos que siguen una distribución normal  $N(0,1)$ , los cuales se separaron en dos grupos de 200,000 individuos (un grupo para cada caso) y ambos grupos fueron divididos en 4000 subgrupos de 50 observaciones. En el primer caso estudiado se asume que el rango de los límites de especificación es de 8 unidades ( $d = 4$ ), equivalente a decir que la anchura de la especificación es 8 veces la desviación típica del proceso, donde el valor medio de  $C_p = 1.33$ ; para el segundo caso estudiado se asume que el rango de los límites de especificación es de 10 unidades ( $d = 5$ ), y por tanto el valor medio  $C_p = 1.67$ . Además en este estudio asumimos que  $\mu = T = M$ .

Dado que los índices de capacidad comúnmente utilizados en la práctica son  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$ , en este trabajo consideramos los índices de la familia  $C_p(u, v)$  para valores de  $u = [0,1]$  y  $v = [0,1]$ ; como se mencionó en el apartado anterior.

En la Figura 4, podemos observar el diagrama del flujo que se seguirá para lograr los objetivos que nos planteamos al inicio del trabajo. Cabe mencionar que este flujo se realizará para ambos casos en estudio, un proceso con capacidad media de 1.33 y otro con capacidad media de 1.67.

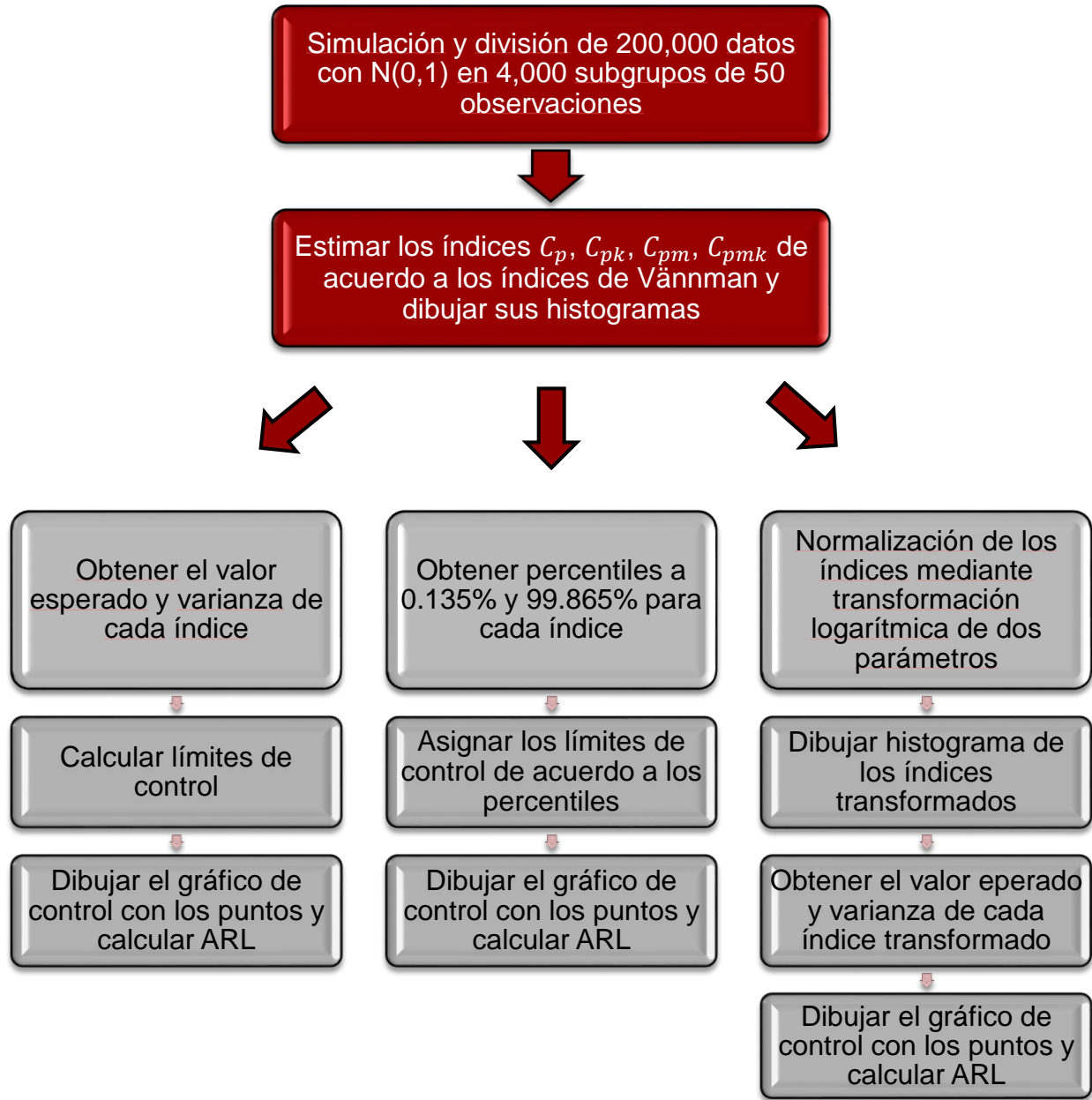


Figura 4. Diagrama del flujo a seguir para el estudio de los índices de capacidad estimados, construcción de los límites de control y evaluación de los gráficos de control.

### 3.1 Índice Estimado y Límites de Control

La familia de índices de capacidad de Vännman depende de dos parámetros no negativos  $u$  y  $v$ , tal como se describe en la Ecuación (5). En los casos de procesos donde el límite

de especificación es bilateral, es muy común que  $M = T$ , por lo que el trabajo será restringido a este tipo de casos de límite de especificación bilateral y en los cuales  $M = T$ . Teniendo en cuenta lo anterior, la expresión del índice de Vännman es la siguiente:

$$C_p(u, v) = \frac{d - u|\mu - T|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}} \quad (7)$$

### 3.1.1 Estimación de $C_p(u, v)$

Tratamos dos casos en los cuales en un intervalo de tiempo fijo obtenemos una muestra aleatoria de tamaño constante  $n = 50$ , de un proceso cuya característica en estudio se aproxima a una distribución normal  $N(0,1)$ , teniendo en cuenta que dicha característica,  $X_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , en el subgrupo  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m = 4000$ , es una muestra aleatoria de dicha característica con media  $\mu_i$  y varianza  $\sigma_i^2$ .

Se consideran dos estimadores distintos para  $C_p(u, v)$ ; diferenciándose en la manera de estimar la varianza  $\sigma_i^2$ . Al igual que el estimador  $\hat{C}_{pmk}$  estudiado por (Pearn, W.L., Kotz, S., Johnson, N.L., 1992), el estimador  $\hat{C}_{p,n}(u, v)$  para  $C_p(u, v)$  definido por Vännman es el siguiente:

$$\hat{C}_{p,n}(u, v)_i = \frac{d - u|\hat{\mu}_i - T|}{3\sqrt{\hat{\sigma}_i^2 + v(\hat{\mu}_i - T)^2}} \quad (8)$$

donde la media  $\mu$  es estimada por la media muestral,  $\hat{\mu}_i$ , y la varianza  $\sigma^2$  es estimada por el estimador de máxima verosimilitud

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \quad (9)$$

De la Ecuación (8), (Vännman, 1995) demostró que  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$  es igual a  $\hat{C}_{pmk}$  estudiado por (Pearn, W.L., Kotz, S., Johnson, N.L., 1992) y que  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  es igual a  $\hat{C}_{pm}$  estudiado por (Boyles, 1991) y por (Pearn, W.L., Kotz, S., Johnson, N.L., 1992).

El segundo estimador,  $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$ , se obtiene estimando la varianza  $\sigma^2$  por medio de la varianza muestral, por lo que se tiene

$$\hat{C}_{p,n-1}(u, v)_i = \frac{d - u|\hat{\mu}_i - T|}{3\sqrt{s_i^2 + v(\hat{\mu}_i - T)^2}} \quad (10)$$

donde,

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \quad (11)$$

De la Ecuación (10), (Vännman,1995) demostró que  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  es igual a  $\hat{C}_p$  y que  $\hat{C}_{p,n}(1,0)$  es igual a  $\hat{C}_{pk}$ , discutido por varios autores como (Bissell, 1990) y (Kotz, S., Pearn, W. L., Johnson, N.L., 1993).

(Vännman, 1995) compara las expresiones (8) y (10) y concluye que ambos estimadores de los índices se relacionan como

$$\hat{C}_{p,n-1}(u, v) = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \hat{C}_{p,n}\left(u, \frac{n-1}{n}v\right) \quad (12)$$

Teniendo en cuenta que la característica de proceso estudiada se aproxima a una distribución normal y que el valor objetivo  $T$  es igual al punto medio  $M$  de un intervalo bilateral, es posible derivar el valor esperado, varianza y error cuadrado medio del estimador  $\hat{C}_{p,n}(u, v)$ . Utilizando la relación planteada en Ecuación (12) es posible derivar el valor esperado y varianza para el estimador  $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$ .

### 3.1.1.1 Valor Esperado y Varianza

Para obtener el valor esperado del estimador  $\hat{C}_{p,n}(u, v)$ , se utiliza un razonamiento inspirado por (Pearn, W.L., Kotz, S., Johnson, N.L.,1992), cuando ellos obtienen el valor

esperado del  $\hat{C}_{pmk}$ , donde para procesos en los cuales  $M = T$  y además de esto, suponemos que el proceso está centrado al valor objetivo, es decir,  $\mu = T$ , obtenemos:

### Valor esperado $\hat{C}_{p,n}(u, v)$

$$E\left(\hat{C}_{p,n}(u, v)\right) = \frac{1}{3} \frac{d\sqrt{n}}{\sigma R(n)\sqrt{2}} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{n}{2}; 1-v\right) - \frac{2uR(n)}{(n-1)\sqrt{n}} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{n+1}{2}; 1-v\right) \quad (13)$$

donde,  ${}_2F_1$  es la función hipergeométrica y,

$$R(n) = \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^{-1} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

De tal manera, es que se obtiene el valor esperado para los índices estimados  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  y  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$ .

### Valor esperado $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$

A partir de la Ecuación (12), derivamos el valor esperado para el estimador  $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$ ,

$$E\left(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)\right) = \sqrt{\frac{n-1}{n}} E\left(\hat{C}_{p,n}\left(u, \frac{n-1}{n}v\right)\right) \quad (14)$$

De tal manera, es que se obtiene el valor esperado para los índices estimados  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  y  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$ .

### Varianza $\hat{C}_{p,n}(u, v)$

$$V\left(C_p(u, v)\right) = E\left(\left(C_p(u, v)\right)^2\right) - \left(E\left(C_p(u, v)\right)\right)^2 \quad (15)$$

donde,



$$\begin{aligned}
E\left(\left(C_p(u, v)\right)^2\right) &= \frac{1}{9}\left[\left(\frac{d}{\sigma}\right)^2 \frac{n}{n-2} \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{n}{2}; 1-v\right) - \frac{4ud\sqrt{n}}{\sigma(n-1)\sqrt{2\pi}} \right. \\
&\quad \left. \cdot {}_2F_1\left(1, 1; \frac{n+1}{2}; 1-v\right) + \frac{u^2}{n} \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{3}{2}; \frac{n+2}{2}; 1-v\right)\right] \quad (16)
\end{aligned}$$

De tal manera, es que se obtiene la varianza para los índices estimados  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  y  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$ .

### Varianza $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$

A partir de las Ecuaciones (12) y (15), derivamos la varianza para el estimador  $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$ .

$$\begin{aligned}
V\left(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)\right) &= \sqrt{\frac{n-1}{n}} V\left(\hat{C}_{p,n}\left(u, \frac{n-1}{n}v\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \left[ E\left(\left(C_p\left(u, \frac{n-1}{n}v\right)\right)^2\right) - \left(E\left(C_p\left(u, \frac{n-1}{n}v\right)\right)\right)^2 \right] \quad (17)
\end{aligned}$$

De tal manera, es que se obtiene el valor esperado para los índices estimados  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  y  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$ .

Una vez obtenido el valor esperado y la varianza de cada estimador, es posible construir los gráficos de control que nos permitirán monitorizar el comportamiento de los índices de capacidad a lo largo del tiempo. En el siguiente apartado se explica cómo se obtiene cada uno de los gráficos de control y veremos que el método para la construcción del gráfico de control es similar a los gráficos introducidos por Shewhart para la media y variabilidad.

### 3.1.2 Determinación de Límites de Control

En los gráficos de control, es necesario determinar la “distancia” de la línea central del gráfico a los límites de control. Lo anterior viene dado por un parámetro  $K$ , cuyo valor habitualmente es 3; medida adoptada por la mayoría de las industrias siguiendo el criterio 6 sigma. Nuestro caso no es la excepción y utilizaremos valor  $K=3$  para brindar la distancia de la línea central a los límites de control medida en desviaciones estándar. Optamos por unos límites simétricos por lo que tenemos las siguientes expresiones.

#### 3.1.2.1 Límites de Control para $\hat{C}_{p,n-1}(0, 0) = C_p$ y $\hat{C}_{p,n-1}(1, 0) = C_{pk}$

- ❖ El límite de control inferior ( $LCI$ ) está dado por la expresión

$$LCI = E\left(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)\right) - K * D\left(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)\right) \quad (18)$$

- ❖ El límite de control superior ( $LCS$ ) está dado por la expresión

$$LCS = E\left(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)\right) + K * D\left(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)\right) \quad (19)$$

donde,

$$D\left(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)\right) = \sqrt{V\left(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)\right)} \quad (20)$$

#### 3.1.2.2 Límites de Control para $C_{p,n}(0, 1) = C_{pm}$ y $C_{p,n}(1, 1) = C_{pmk}$

- ❖ El límite de control inferior ( $LCI$ ) está dado por la expresión

$$LCI = E\left(\hat{C}_{p,n}(u, v)\right) - K * D\left(\hat{C}_{p,n}(u, v)\right) \quad (21)$$

- ❖ El límite de control superior ( $LCS$ ) está dado por la expresión

$$LCS = E\left(\hat{C}_{p,n}(u, v)\right) + K * D\left(\hat{C}_{p,n}(u, v)\right) \quad (22)$$

donde,

$$D\left(\hat{C}_{p,n}(u, v)\right) = \sqrt{V\left(\hat{C}_{p,n}(u, v)\right)} \quad (23)$$

### 3.2 Límites de control en base a percentiles empíricos

Una alternativa para determinar los límites de control a partir de datos que no siguen una distribución normal es generarlos a partir de los percentiles empíricos. Cuando se tiene una gran cantidad de datos, como es nuestro caso que tenemos 4,000 observaciones para cada índice, es posible calcular los percentiles a manera de un histograma. En este caso los índices son trabajados de menor a mayor, asignando la probabilidad calculada de acuerdo con:

$$Prob(X \leq x_i) = i/(N + 1)$$

donde  $i$  es el número de orden que ocupa el valor de  $x$  en la serie y  $N$  el número total de observaciones.

Ya se mencionó que trabajaremos con el criterio de  $3\sigma$ , que bajo un proceso estable produce  $\alpha = 0.0027$ , que se traduce en que 0.27% de las observaciones caerán fuera de los límites de control sin ninguna razón en especial. Ya que estamos trabajando con dos límites (dos colas), el criterio resulta ser  $6\sigma$  por lo que  $\frac{\alpha}{2} = 0.00135$ ; por lo tanto, buscaremos los percentiles 0.135% y 99.865% que nos darán el valor del límite inferior y superior respectivamente, en los cuales se espera que 0.135% de las observaciones estén por debajo del límite inferior y otro 0.135% de las observaciones estén por encima del límite superior.

A continuación, la Figura 5 representa los percentiles comentados en el párrafo anterior.

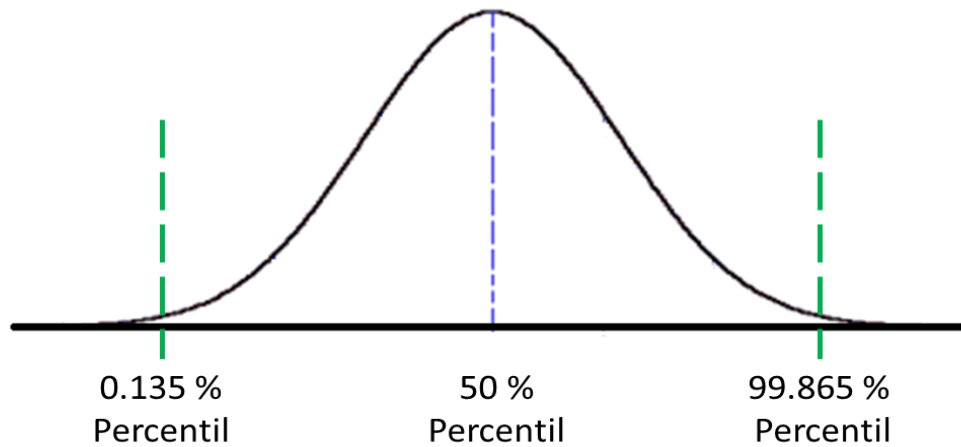


Figura 5. Representación gráfica de percentiles empíricos, el percentil 50% representa la línea central y los percentiles 0.135% y 99.865% LCI y LCS respectivamente.

### 3.3 Normalización de Estimadores y Cálculo de Límites de Control

(Castagliola & Vännman, 2007) afirman que la densidad de probabilidad del estimador  $\hat{C}_{p,n}(u, v)$ , así mismo el de  $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$ , es sesgada y este sesgo resulta ser mayor cuando el tamaño de muestra  $n$  es pequeño. Dado que  $\hat{C}_{p,n}(u, v)$  y  $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$  no siguen una distribución normal, se propone hacer una transformación logarítmica de dos parámetros a los estimadores, obteniendo así una nueva variable transformada que se aproxima a una distribución normal, la cual se convertirá en nuestra variable a monitorizar.

Para referirnos a los índices transformados, agregaremos el prefijo  $tl$  en cada estimador, por lo tanto,  $tl \hat{C}_{p,n}(0,1)$ , se refiere a la transformación logarítmica de dos parámetros de  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$ ; utilizando la misma nomenclatura para los otros tres índices.

#### 3.3.1 Estimación de la Nueva Variable Transformada

Para  $\hat{C}_{p,n}(u, v)$ , la nueva variable a monitorizar es:

$$tl\hat{C}_{p,n}(u, v) = a + b \ln(\hat{C}_{p,n}(u, v)_i) \quad (24)$$

donde  $a$  y  $b$  son dos parámetros definidos como

$$a = -b \ln \left( E(\hat{C}_{p,n}(u, v)) \left( \frac{V(\hat{C}_{p,n}(u, v))}{E^2(\hat{C}_{p,n}(u, v))} + 1 \right)^{-1/2} \right) \quad (25)$$

y,

$$b = \left( \ln \left( \frac{V(\hat{C}_{p,n}(u, v))}{E^2(\hat{C}_{p,n}(u, v))} + 1 \right) \right)^{-1/2} \quad (26)$$

Para  $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$ , la nueva variable a monitorizar es:

$$tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v) = a + b \ln(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)_i) \quad (27)$$

donde  $a$  y  $b$  son dos parámetros definidos como

$$a = -b \ln \left( E(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)) \left( \frac{V(\hat{C}_{p,n-1}(u, v))}{E^2(\hat{C}_{p,n-1}(u, v))} + 1 \right)^{-1/2} \right) \quad (28)$$

y,

$$b = \left( \ln \left( \frac{V(\hat{C}_{p,n-1}(u, v))}{E^2(\hat{C}_{p,n-1}(u, v))} + 1 \right) \right)^{-1/2} \quad (29)$$

### 3.3.1.1 Valor Esperado y Varianza

Sea  $Y = a + bX$  una transformación lineal, existen dos expresiones sencillas para obtener el valor esperado y la varianza de dicha transformación. El valor esperado de una transformación lineal se obtiene como  $E(Y) = a + bE(X)$ ; mientras que la varianza se obtiene  $V(Y) = b^2V(X)$ . Bajo estas dos propiedades definiremos el valor esperado y varianza, adaptándolas a ambos estimadores en estudio.

**Valor esperado  $tl\hat{C}_{p,n}(u, v)$**

$$E\left(tl\hat{C}_{p,n}(u, v)\right) = a + b E\left(\ln(\hat{C}_{p,n}(u, v)_i)\right) \quad (30)$$

De tal manera, es que se obtiene el valor esperado para los índices estimados  $tl\hat{C}_{p,n}(0,1)$  y  $tl\hat{C}_{p,n}(1,1)$ .

**Valor esperado  $tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$**

$$E\left(tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v)\right) = a + b E\left(\ln(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)_i)\right) \quad (31)$$

De tal manera, es que se obtiene el valor esperado para los índices estimados  $tl\hat{C}_{p,n}(0,0)$  y  $tl\hat{C}_{p,n}(1,0)$ .

**Varianza  $tl\hat{C}_{p,n}(u, v)$**

$$V\left(tl\hat{C}_{p,n}(u, v)\right) = b^2 V\left(\ln(\hat{C}_{p,n}(u, v)_i)\right) \quad (32)$$

**Varianza  $tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$**

$$V\left(tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v)\right) = b^2 V\left(\ln(\hat{C}_{p,n-1}(u, v)_i)\right) \quad (33)$$

### 3.3.2 Determinación de Límites de Control

Al igual que en el apartado anterior, utilizaremos valor  $K=3$  para brindar la distancia de la línea central a los límites de control medida en desviaciones estándar. Optamos por unos límites simétricos por lo que tenemos las siguientes expresiones.

### 3.3.2.1 Límites de Control para $\hat{C}_{p,n-1}(0, 0) = C_p$ y $\hat{C}_{p,n-1}(1, 0) = C_{pk}$ transformados

- ❖ El límite de control inferior (*LCI*) está dado por la expresión

$$LCI = E \left( tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v) \right) - K * D(tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v)) \quad (34)$$

- ❖ El límite de control superior (*LCS*) está dado por la expresión

$$LCS = E \left( tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v) \right) + K * D(tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v)) \quad (35)$$

donde,

$$D(tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v)) = \sqrt{V \left( tl\hat{C}_{p,n-1}(u, v) \right)} \quad (36)$$

### 3.3.2.2 Límites de Control para $C_{p,n}(0, 1) = C_{pm}$ y $C_{p,n}(1, 1) = C_{pmk}$ transformados

- ❖ El límite de control inferior (*LCL*) está dado por la expresión

$$LCL = E \left( tl\hat{C}_{p,n}(u, v) \right) - K * D(tl\hat{C}_{p,n}(u, v)) \quad (37)$$

- ❖ El límite de control superior (*UCL*) está dado por la expresión

$$UCL = E \left( tl\hat{C}_{p,n}(u, v) \right) + K * D(tl\hat{C}_{p,n}(u, v)) \quad (38)$$

donde,

$$D(tl\hat{C}_{p,n}(u, v)) = \sqrt{V \left( tl\hat{C}_{p,n}(u, v) \right)} \quad (39)$$

### 3.4 Average Run Length

Una manera de evaluar la eficacia de un gráfico de control para detectar un cambio de nivel es a través del ARL o *Average Run Length*, por sus siglas en inglés. (Montgomery, 2009) define el ARL como el promedio de puntos que deben ser trazados antes de que un punto esté por fuera de los límites de control, lo que indique una condición de proceso inestable o fuera de control. Este método puede ser utilizado cuando las observaciones del proceso están incorrelacionadas, como es nuestro caso.

El ARL puede ser fácilmente calculado de la siguiente manera:

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (40)$$

donde  $p$  es la probabilidad de que cualquier punto exceda los límites de control. De esta manera, la probabilidad  $p$  de que cualquier punto exceda los límites de control estará dada por el número de puntos que caen fuera de los límites de control (NE) / el número total de puntos dibujados (NT).

$$p = \frac{NE}{NT}$$

Para gráficos que consideran los límites a  $3\sigma$  de distancia, cuando el proceso está bajo control, la probabilidad de que un punto exceda los límites de control es  $p = 0.0027$ . Por lo tanto, el ARL para un gráfico de control cuando el proceso está bajo control es

$$ARL_0 = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.0027} = 370$$

Esto se traduce de manera que a pesar de que el proceso se mantiene estable, en promedio se generará una señal de alarma (punto fuera de control) cada 370 muestras.



# CAPÍTULO IV

## 4 REVISIÓN DE GRÁFICOS DE CONTROL

---

En este capítulo, se presentan los resultados obtenidos de acuerdo con la metodología descrita en el capítulo anterior. Para cada capacidad media en estudio (1.33 y 1.67) se estimaron los cuatro índices; a partir de los cuales verificamos si distribución, obtuvimos el valor esperado y varianza para el cálculo de los límites de control, se calcularon los percentiles empíricos a los valores establecidos generando otros límites de control diferentes y se realizó la transformación logarítmica de dos parámetros a los estimadores de los cuales, de la misma manera, se dibujaron los histogramas, se calculó el valor esperado y la varianza, así como los límites de control a partir de éstos. Por último, se calculó el ARL experimentado de los gráficos de control para evaluar su eficacia.

### 4.1 Proceso con capacidad media $C_p = 1.33$

#### 4.1.1 Índices estimados $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$ y $\hat{C}_{p,n}(u, v)$

Se estimaron los índices para  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0) = C_p$ ;  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0) = C_{pk}$ ;  $\hat{C}_{p,n}(0,1) = C_{pm}$  y  $\hat{C}_{p,n}(1,1) = C_{pmk}$ . Se procede a verificar la normalidad de los índices, en las Figuras 6 y 7 podemos observar los histogramas de los distintos índices de capacidad estimados, gráficamente observamos una distribución con sesgo positivo, la cual no se aproxima a una distribución normal.

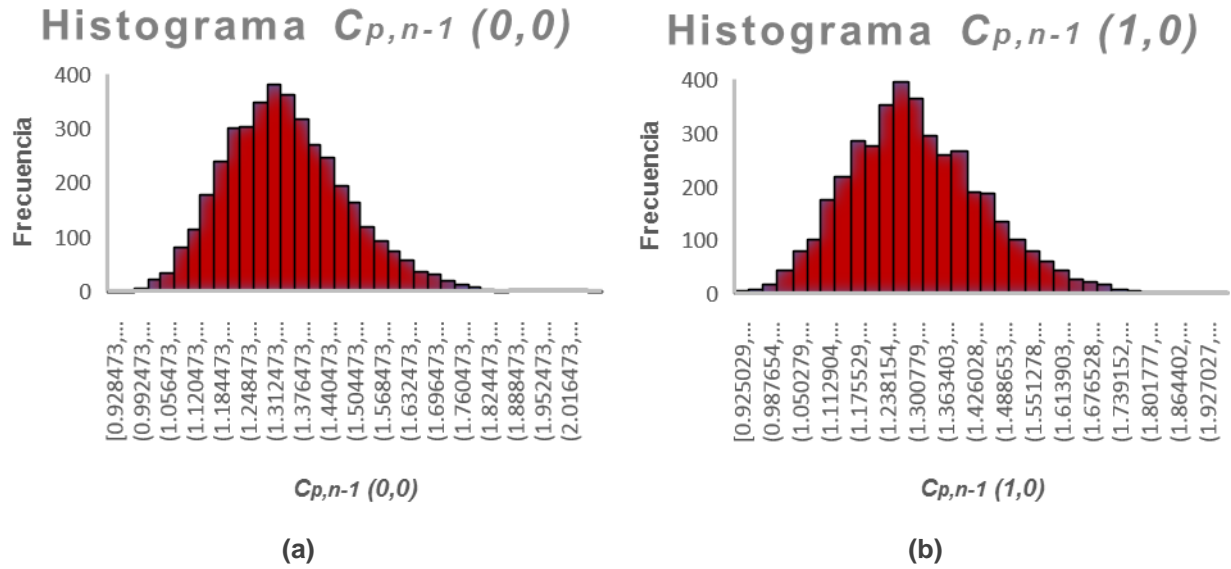


Figura 6. (a) Histograma de  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  y (b) histograma de  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  para simulación de proceso con capacidad media de 1.33.

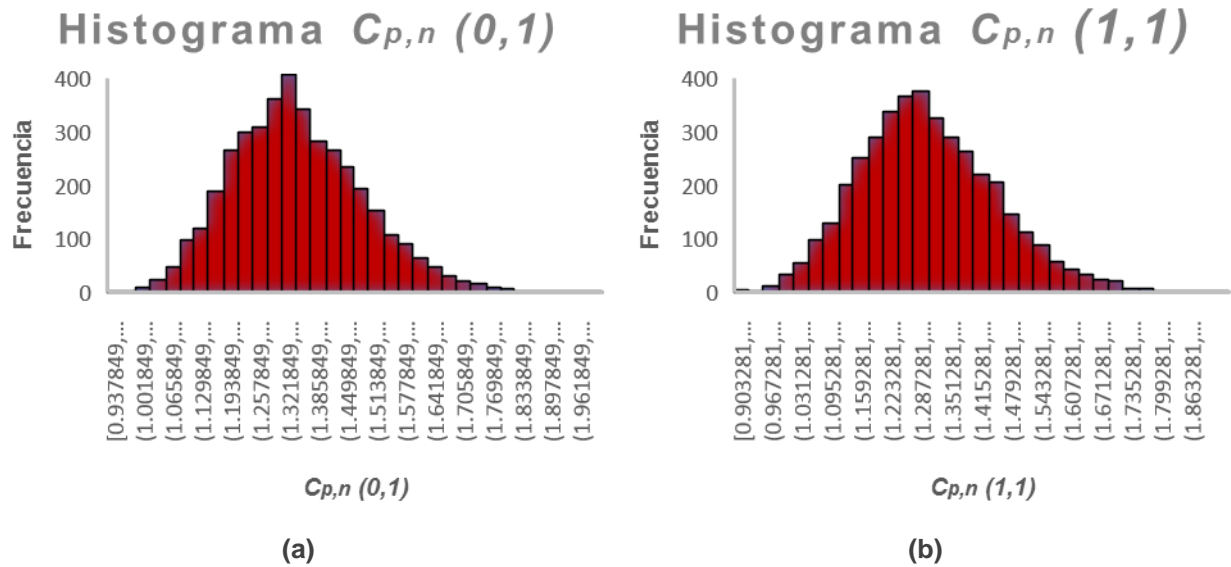


Figura 7. (a) Histograma de  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  y (b) histograma de  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$  para simulación de proceso con capacidad media de 1.33.

Para confirmar lo visto anteriormente en los histogramas donde aparentemente los índices estimados no se aproximan a una distribución normal, se realizó la prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov con un 99% de confianza. En la Tabla 1 podemos observar el p-valor para cada índice en estudio, dado que cada uno de ellos es menor que 0.01, se puede rechazar la idea de que los índices estimados provienen de una distribución normal con un 99% de confianza.

**Tabla 1. Prueba de normalidad chi-cuadrada con 99% de confianza para índices de capacidad estimados para proceso con capacidad media 1.33**

Índice	Prueba	P-valor
$\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$	Kolmogorov-Smirnov	0.0000218536
$\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$	Kolmogorov-Smirnov	0.00000485144
$\hat{C}_{p,n}(0,1)$	Kolmogorov-Smirnov	0.00000344008
$\hat{C}_{p,n}(1,1)$	Kolmogorov-Smirnov	0.0000878832

Ya que los índices estimados no siguen una distribución normal, la construcción de límites de control a partir de estos datos, podría resultar no muy útil. Debido a esto se procede a, además de obtener los límites de control para los índices estimados, obtener los límites de control a partir de los percentiles empíricos de dichos índices estimados y a realizar la transformación logarítmica de dos parámetros para normalizar los índices estimados y después construir los límites de control en base a los índices transformados.

#### **4.1.1.1 Límites de Control**

Los primeros límites de control obtenidos pertenecen al índice estimado  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  que como hemos venido comentando, es igual al índice de capacidad que conocemos como  $C_p$ . En la Figura 8, se observa que la mayoría de los puntos fuera de los límites de control caen por encima del LCS, lo cual tiene coherencia ya que en el histograma pudimos ver el sesgo positivo representando valores altos en dicho índice de capacidad. De las 4000 observaciones, 17 de ellas caen por encima del LCS y 1 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $C_{p,n-1} (0,0)$

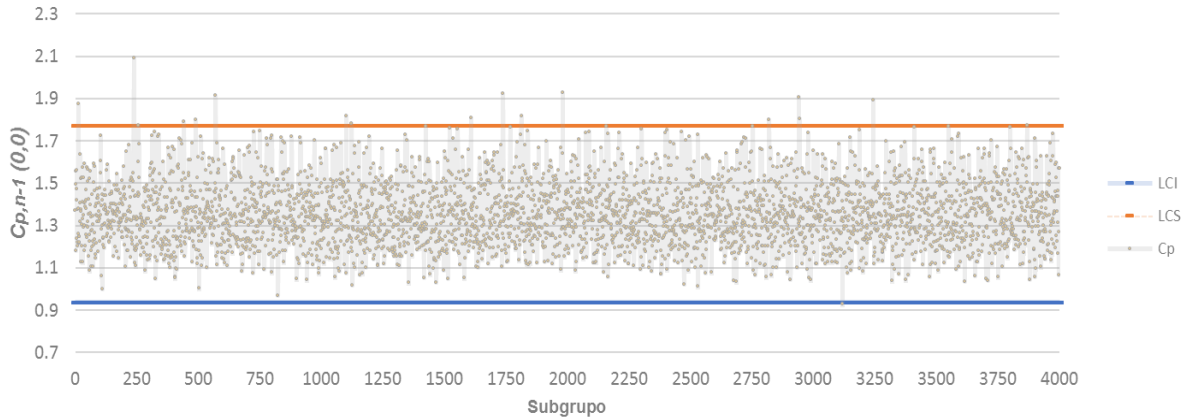


Figura 8. Gráfico de control de  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  para proceso con capacidad media de 1.33, donde LCI= 0.9366 y LCS = 1.7719.

Los siguientes límites de control obtenidos pertenecen al índice estimado  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  que como hemos venido comentando, es igual al índice de capacidad que conocemos como  $C_{pk}$ . En la Figura 9, se observa que la mayoría de los puntos fuera de los límites de control caen por encima del LCS, lo cual tiene coherencia ya que en el histograma pudimos ver el sesgo positivo representando valores altos en dicho índice de capacidad. De las 4000 observaciones, 15 de ellas caen por encima del LCS y ninguna por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $C_{p,n-1} (1,0)$

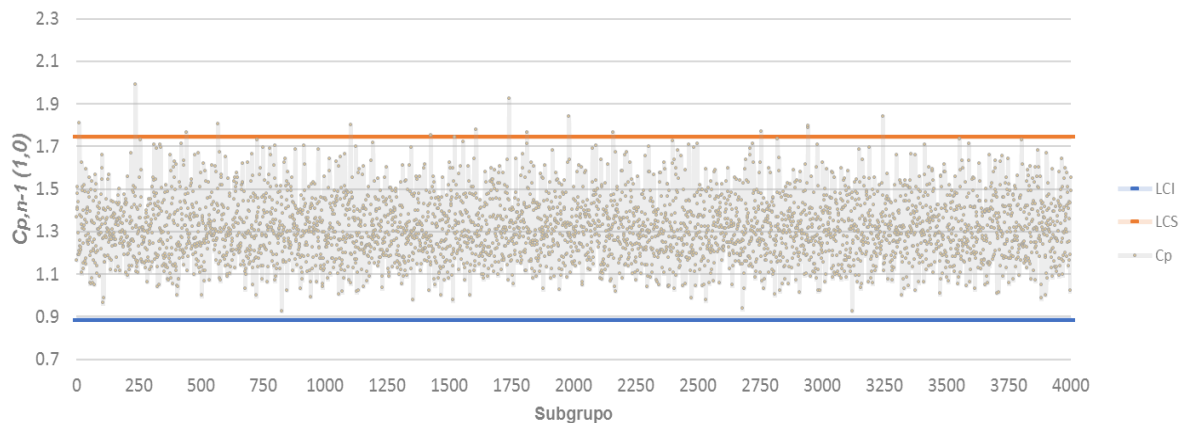
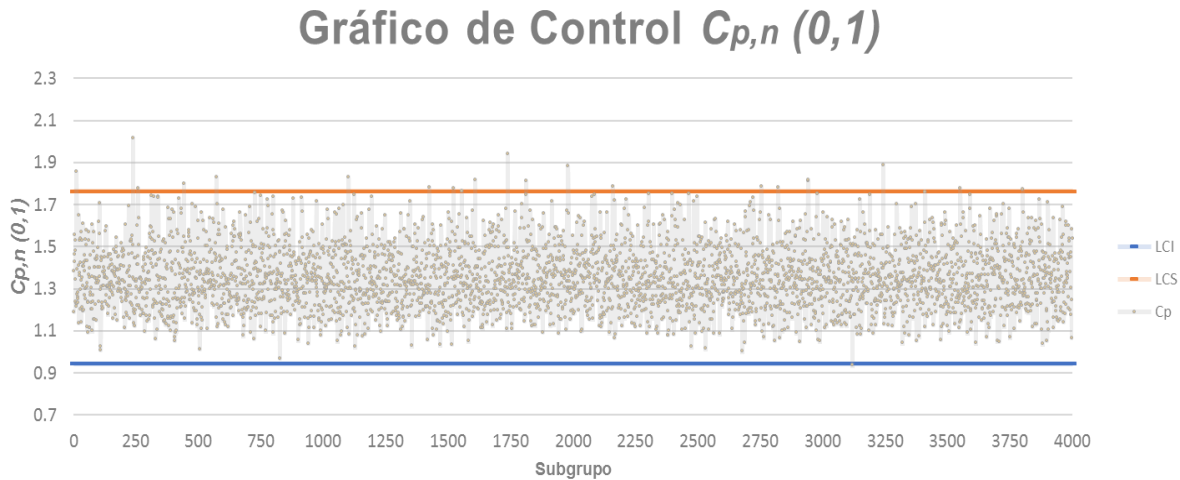


Figura 9. Gráfico de control de  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  para proceso con capacidad media de 1.33, donde LCI = 0.8856 y LCS = 1.7457.

Los siguientes límites de control obtenidos pertenecen al índice estimado  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  que como hemos venido comentando, es igual al índice de capacidad que conocemos como  $C_{pm}$ . En la Figura 10, se observa que la mayoría de los puntos fuera de los límites de control caen por encima del LCS, lo cual tiene coherencia ya que en el histograma pudimos ver el sesgo positivo representando valores altos en dicho índice de capacidad. De las 4000 observaciones, 21 de ellas caen por encima del LCS y 1 por debajo del LCI.



**Figura 10. Gráfico de control de  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  para proceso con capacidad media de 1.33, donde LCI = 0.9439 y LCS = 1.7641.**

Los siguientes límites de control obtenidos pertenecen al índice estimado  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$  que como hemos venido comentando, es igual al índice de capacidad que conocemos como  $C_{pmk}$ . En la Figura 11, se observa que la mayoría de los puntos fuera de los límites de control caen por encima del LCS, lo cual tiene coherencia ya que en el histograma pudimos ver el sesgo positivo representando valores altos en dicho índice de capacidad. De las 4000 observaciones, 16 de ellas caen por encima del LCS y ninguno por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $C_{p,n} (1,1)$

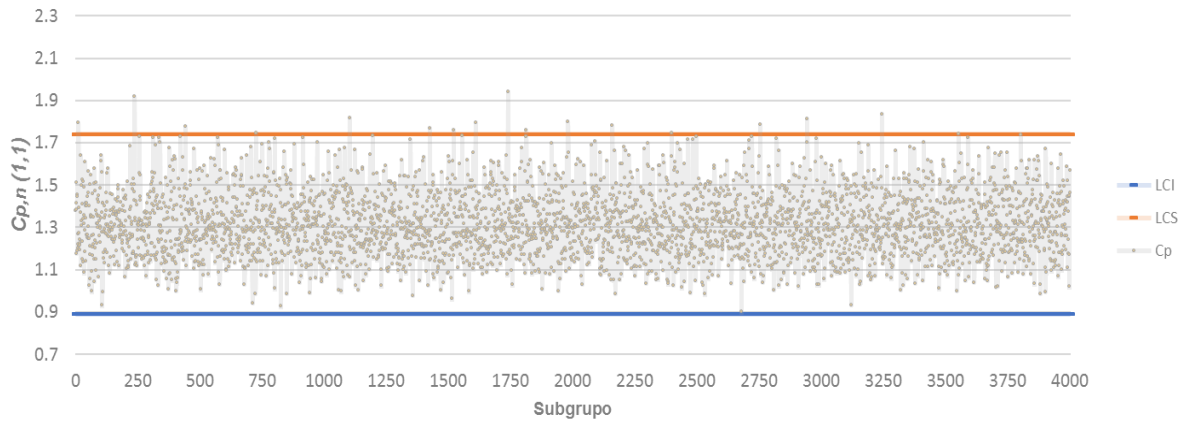


Figura 11. Gráfico de control de  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$  para proceso con capacidad media de 1.33, donde LCI = 0.8902 y LCS = 1.7418.

### 4.1.1.2 Límites de Control con Percentiles Empíricos

Una vez obtenidos los percentiles 0.135% y 99.865% relacionados al índice estimado  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  o  $C_p$ , obtenemos los límites de control para dicho índice como se muestra en la Figura 12. En este caso es de esperarse, como se puede observar en la gráfica, que la cantidad de puntos que caen por debajo del LCI y por encima del LCS sea muy similar o igual. De las 4000 observaciones, 6 de ellas caen por encima del LCS y 6 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $C_{p,n-1} (0,0)$

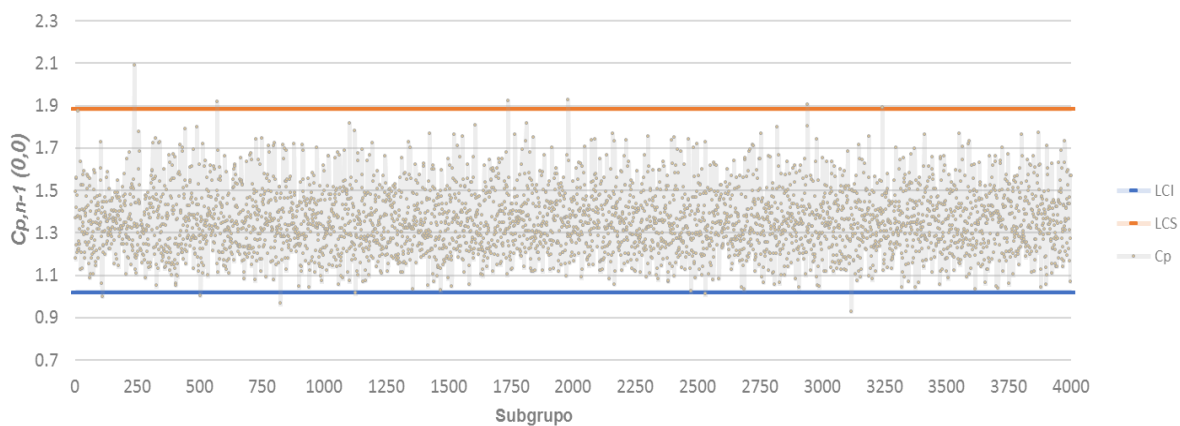
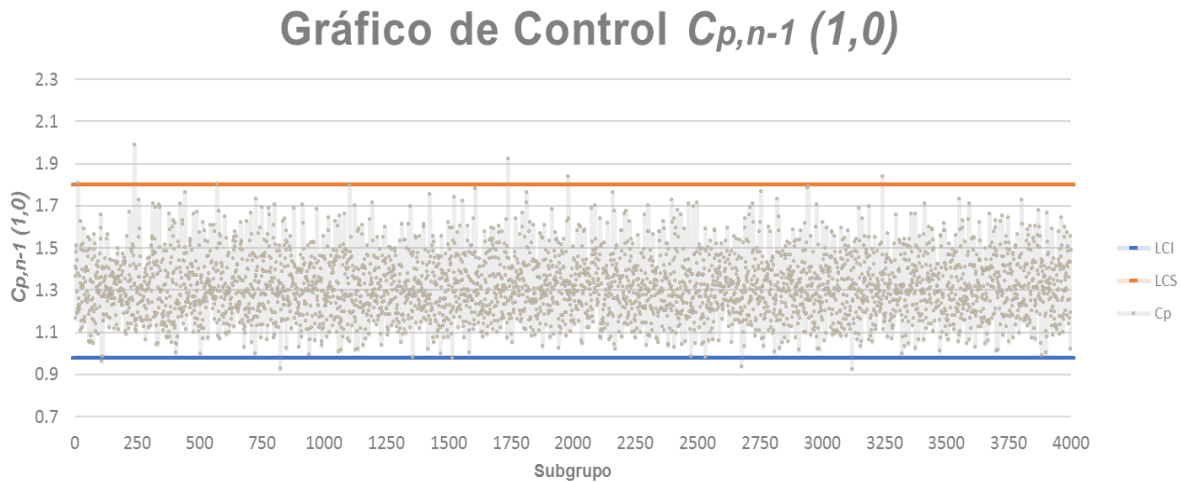


Figura 12. Gráfico de control para  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$ , límites de control mediante percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.33, donde LCI = 0.0196 y LCS = 1.8841.

Una vez obtenidos los percentiles 0.135% y 99.865% relacionados al índice estimado  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  o  $C_{pk}$ , obtenemos los límites de control para dicho índice como se muestra en la Figura 13. En este caso es de esperarse, como se puede observar en la gráfica, que la cantidad de puntos que caen por debajo del LCI y por encima del LCS sea muy similar o igual. De las 4000 observaciones, 6 de ellas caen por encima del LCS y 6 por debajo del LCI.



**Figura 13. Gráfico de control para  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$ , límites de control mediante percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.33, donde LCI = 0.9805 y LCS = 1.8027.**

Una vez obtenidos los percentiles 0.135% y 99.865% relacionados al índice estimado  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  o  $C_{pm}$ , obtenemos los límites de control para dicho índice como se muestra en la Figura 14. En este caso es de esperarse, como se puede observar en la gráfica, que la cantidad de puntos que caen por debajo del LCI y por encima del LCS sea muy similar o igual. De las 4000 observaciones, 6 de ellas caen por encima del LCS y 6 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $C_{p,n}(0,1)$

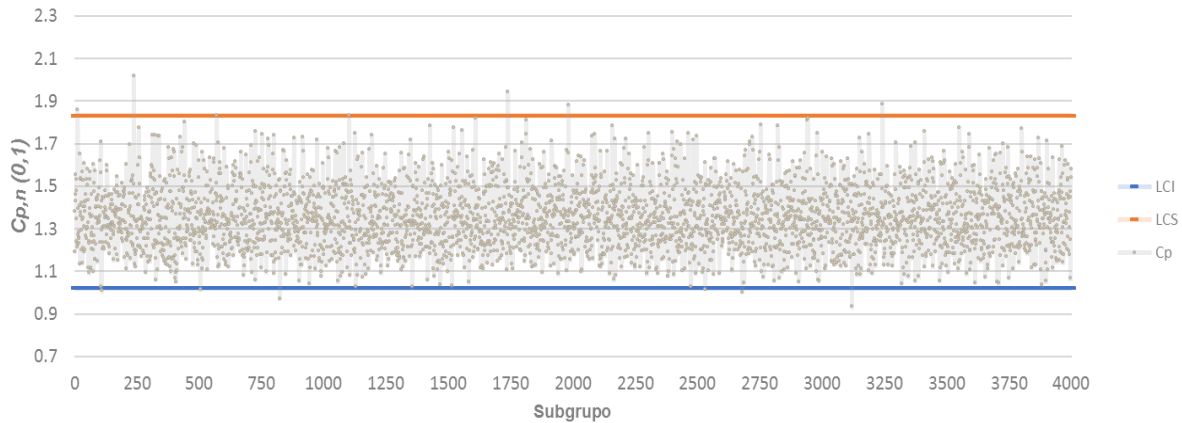


Figura 14. Gráfico de control para  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$ , límites de control mediante percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.33, donde LCI = 1.0214 y LCS = 1.8326.

Una vez obtenidos los percentiles 0.135% y 99.865% relacionados al índice estimado  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$  o  $C_{pmk}$ , obtenemos los límites de control para dicho índice como se muestra en la Figura 15. En este caso es de esperarse, como se puede observar en la gráfica, que la cantidad de puntos que caen por debajo del LCI y por encima del LCS sea muy similar o igual. De las 4000 observaciones, 6 de ellas caen por encima del LCS y 6 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $C_{p,n}(1,1)$

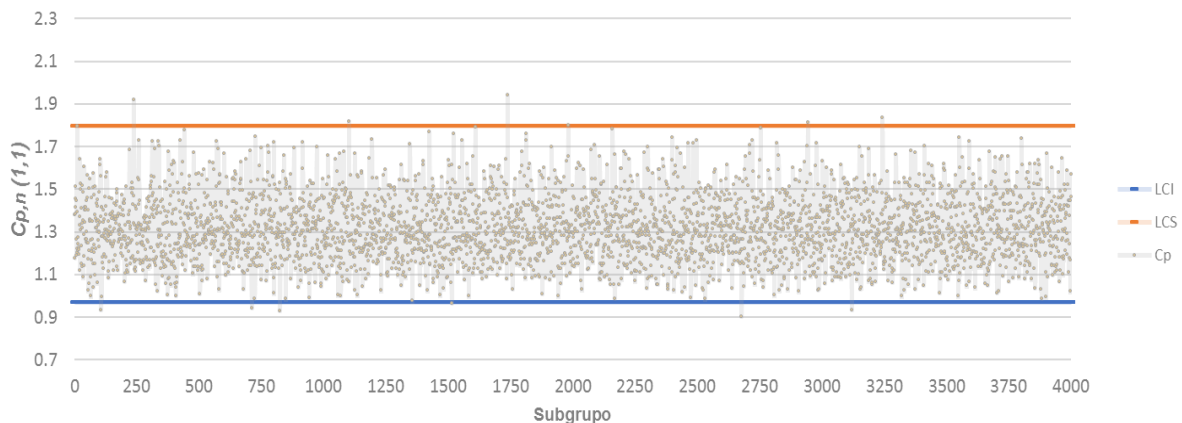


Figura 15. Gráfico de control para  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$ , límites de control mediante percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.33, donde LCL = 0.9700 y UCL = 1.7971.



### 4.1.2 Transformación logarítmica de dos parámetros

Después de ver que los índices estimados no siguen una distribución normal, se optó por realizar la transformación logarítmica de dos parámetros tal y como se definió en el capítulo 3. Una vez obtenidos los nuevos índices transformados, se procede a verificar la normalidad de éstos, recordando la nomenclatura,  $tl\hat{C}_{p,n-1}(0,0) = C_p$ ;  $tl\hat{C}_{p,n-1}(1,0) = C_{pk}$ ;  $tl\hat{C}_{p,n}(0,1) = C_{pm}$  y  $tl\hat{C}_{p,n}(1,1) = C_{pmk}$ . En las figuras 16 y 17 podemos ver el cambio comparado con los histogramas anteriores, en este caso, podemos ver gráficamente que los índices estimados transformados se aproximan a una distribución normal.

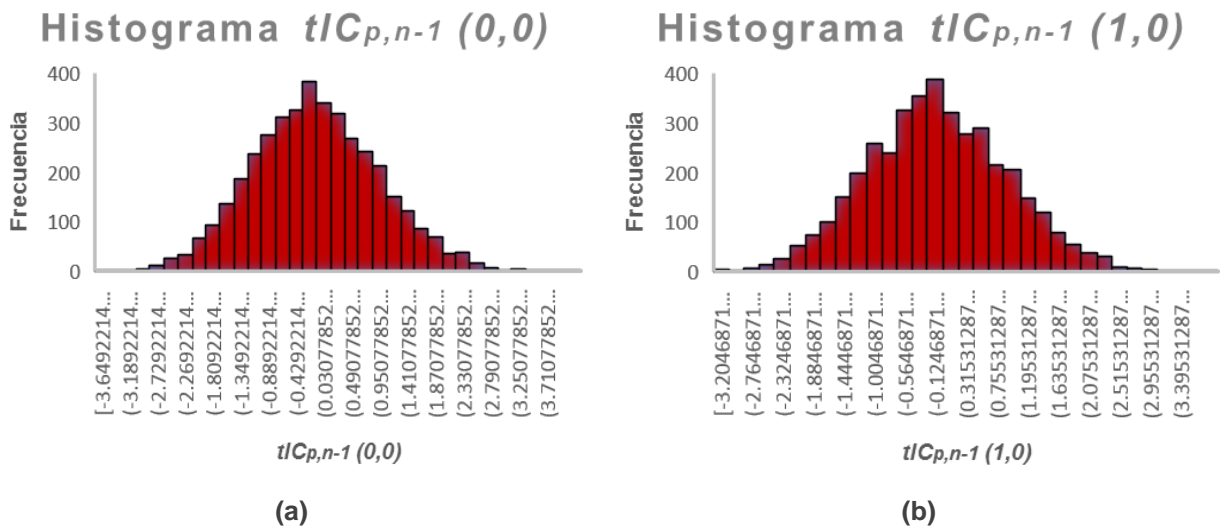


Figura 16. (a) Histograma de  $tl\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  y (b) histograma de  $tl\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  para simulación de proceso con capacidad media de 1.33.

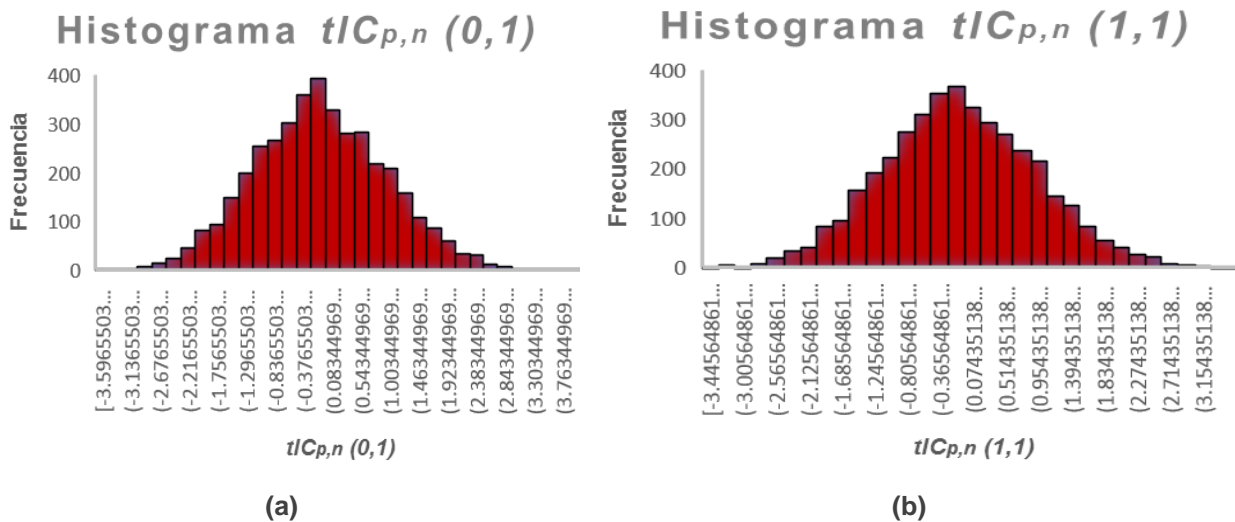


Figura 17. (a) Histograma de  $tl\hat{C}_{p,n}(0,1)$  y (b) histograma de  $tl\hat{C}_{p,n}(1,1)$  para simulación de proceso con capacidad media de 1.33.

Para confirmar lo visto anteriormente en los histogramas donde aparentemente los índices estimados se aproximan a una distribución normal, se realizó la prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov con un 99% de confianza. En la Tabla 2 podemos observar el p-valor para cada índice en estudio, dado que cada uno de ellos es mayor que 0.01, no se puede rechazar la idea de que los índices estimados provienen de una distribución normal con 99% de confianza.

**Tabla 2. Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov con 99% de confianza para índices de capacidad transformados para proceso con capacidad media 1.33**

Índice	Prueba	P-valor
$tl\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$	Kolmogorov-Smirnov	0.218688
$tl\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$	Kolmogorov-Smirnov	0.127405
$tl\hat{C}_{p,n}(0,1)$	Kolmogorov-Smirnov	0.0884255
$tl\hat{C}_{p,n}(1,1)$	Kolmogorov-Smirnov	0.471641

Una vez realizada la transformación, se procede a calcular el valor esperado y la varianza, como se describió en el capítulo anterior. Con esta información se obtuvieron los límites de control para los índices estimados con transformación logarítmica de dos parámetros y los resultados se presentan a continuación.

#### **4.1.2.1 Límites de Control**

Después de la transformación logarítmica de dos parámetros de  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  obtuvimos un nuevo índice a monitorizar,  $tl\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$ , cuyos límites de control fueron calculados y que de la misma manera corresponden a lo que conocemos habitualmente como  $C_p$ . En la Figura 18, se muestra que la cantidad de observaciones que caen fuera de los límites se redujo en comparación con los índices sin transformación. De las 4000 observaciones, 7 de ellas caen por encima del LCS y 2 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $t/C_{p,n-1} (0,0)$

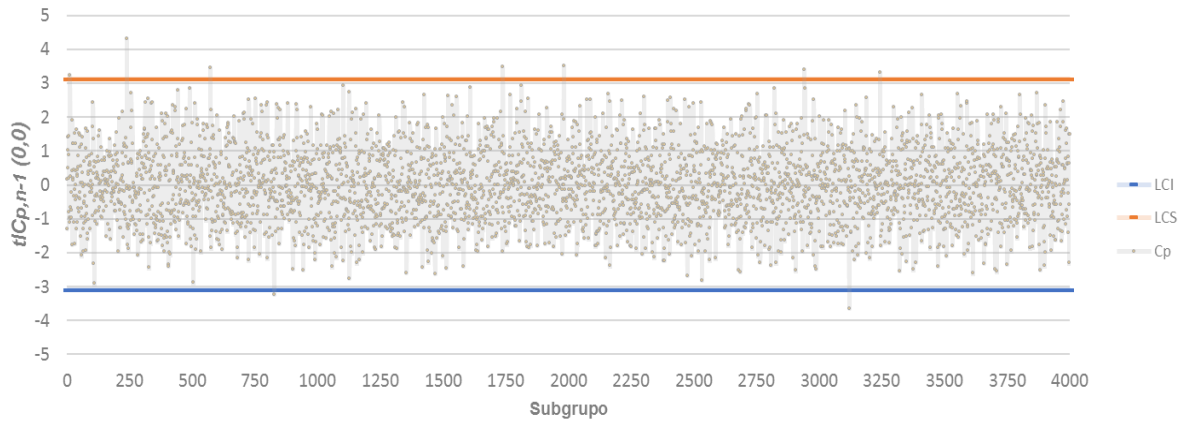


Figura 18. Gráfico de control para  $t\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  para proceso con capacidad media de 1.33, donde LCI = -3.1036 y LCS = 3.1215.

Después de la transformación logarítmica de dos parámetros de  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  obtuvimos un nuevo índice a monitorizar,  $t\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$ , cuyos límites de control fueron calculados y que de la misma manera corresponden a lo que conocemos habitualmente como  $C_{pk}$ . En la Figura 19, se muestra que la cantidad de observaciones que caen fuera de los límites se redujo en comparación con los índices sin transformación; además, se aprecia que la proporción de observaciones por encima del LCS y por debajo del LCI es semejante. De las 4000 observaciones, 4 de ellas caen por encima del LCS y 3 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $t/C_{p,n-1} (1,0)$

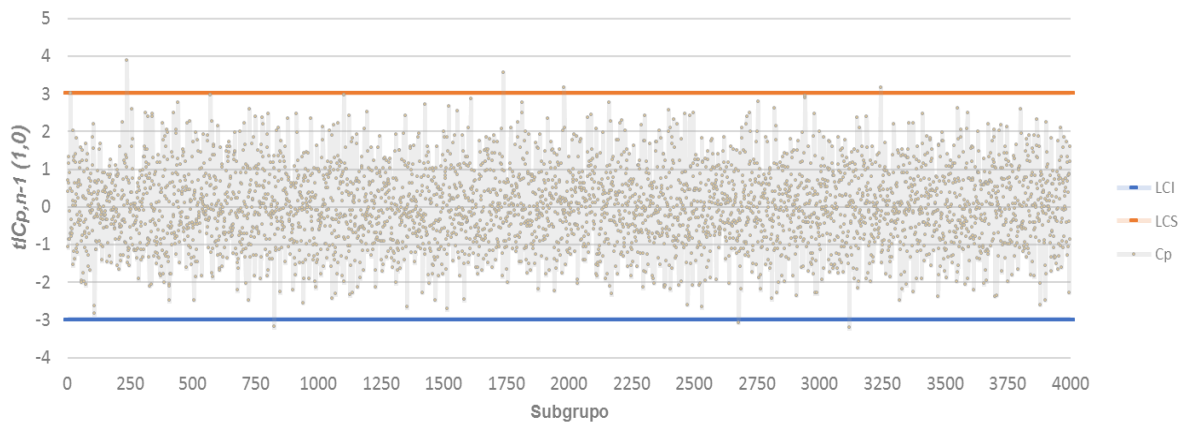
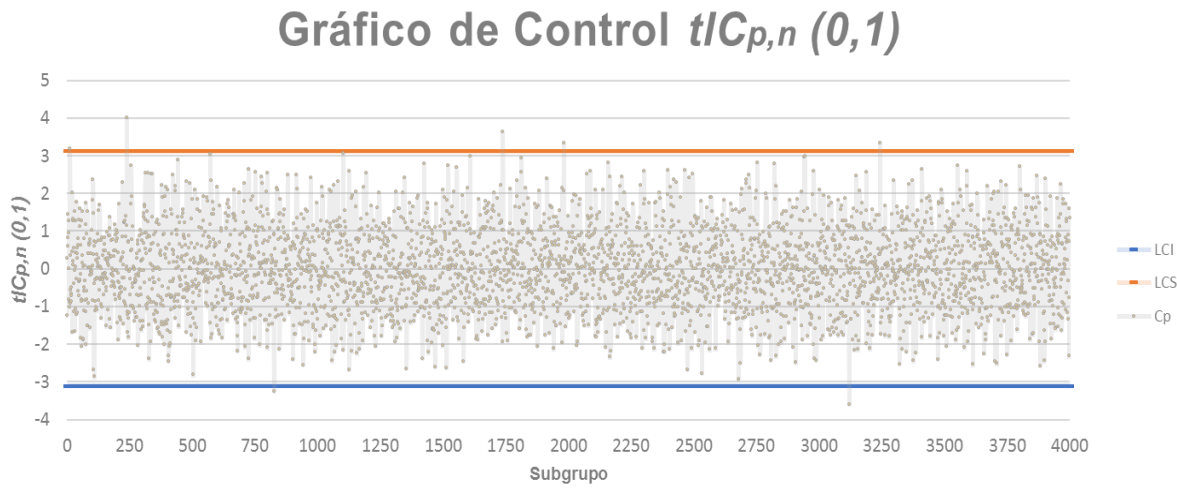


Figura 19. Gráfico de control para  $t\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  para proceso con capacidad media de 1.33, donde LCI = -2.9881 y LCS = 3.0175.

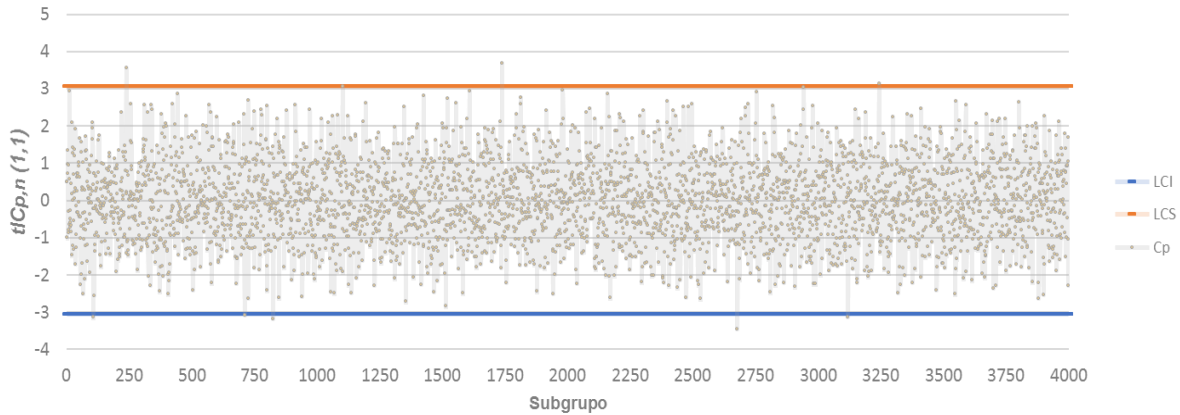
Después de la transformación logarítmica de dos parámetros de  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  obtuvimos un nuevo índice a monitorizar,  $tl\hat{C}_{p,n}(0,1)$ , cuyos límites de control fueron calculados y que de la misma manera corresponden a lo que conocemos habitualmente como  $C_{pm}$ . En la Figura 20, se muestra que la cantidad de observaciones que caen fuera de los límites se redujo en comparación con los índices sin transformación. De las 4000 observaciones, 5 de ellas caen por encima del LCS y 2 por debajo del LCI.



**Figura 20. Gráfico de control para  $tl\hat{C}_{p,n}(0,1)$  para proceso con capacidad media de 1.33, donde LCI = -3.1082 y LCS = 3.1222.**

Después de la transformación logarítmica de dos parámetros de  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$  obtuvimos un nuevo índice a monitorizar,  $tl\hat{C}_{p,n}(1,1)$ , cuyos límites de control fueron calculados y que de la misma manera corresponden a lo que conocemos habitualmente como  $C_{pmk}$ . En la Figura 21, se muestra que la cantidad de observaciones que caen fuera de los límites se redujo en comparación con los índices sin transformación. De las 4000 observaciones, 3 de ellas caen por encima del LCS y 5 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $t\widehat{C}_{p,n}(1,1)$



**Figura 21. Gráfico de control para  $t\widehat{C}_{p,n}(1,1)$  para proceso con capacidad media de 1.33, donde  $LCI = -3.05$  y  $LCS = 3.069$ .**

En la Tabla 3 se muestra un resumen de los límites de control que se calcularon para la simulación del proceso con capacidad media de 1.33. Se pueden observar los límites de control inferior y superior para los cuatro índices en estudio, calculados de las tres formas que hemos propuesto a lo largo del trabajo.

**Tabla 3. Los límites de control inferior (LCI) y superior (LCS) para un proceso cuya capacidad media es de 1.33 con  $K=3$  cuando  $n=50$ , obtenidos para  $u=0,1$  y  $v=0,1$ .**

	$(0,0) = C_p$		$(1,0) = C_{pk}$		$(0,1) = C_{pm}$		$(1,1) = C_{pmk}$	
	LCI	LCS	LCI	LCS	LCI	LCS	LCI	LCS
Índice estimado	0.9366	1.7719	0.8856	1.7457	0.9439	1.7641	0.8902	1.7418
Percentiles empíricos	1.0196	1.8841	0.9805	1.8027	1.0214	1.8326	0.9700	1.7971
Índice transformado (tl)	-3.1036	3.1215	-2.9881	3.0175	-3.1082	3.1222	-3.0504	3.0690

### 4.1.3 ARL experimentado

Con la finalidad de evaluar la eficiencia de los gráficos de control obtenidos, para el caso del proceso con capacidad media de 1.33, se calculó el ARL experimentado para cada gráfico construido en los apartados anteriores. La Tabla 4 muestra la diferencia de eficiencias de los gráficos existente entre las tres técnicas utilizadas para obtener los límites de control.

**Tabla 4. Resumen de ARL experimentado de los cuatro índices en estudio para la simulación de proceso con capacidad media de 1.33.**

	ARL experimentado			
	$(0,0) = C_p$	$(1,0) = C_{pk}$	$(0,1) = C_{pm}$	$(1,1) = C_{pmk}$
Índice estimado	222	267	182	250
Percentiles empíricos	333	333	333	333
Índice transformado (tl)	444	571	571	500

De manera general, podemos ver que los gráficos de los índices estimados sin transformación en estado bajo control generan mayor número de falsas alarmas que las otras dos técnicas. Los gráficos de control construidos a partir de percentiles empíricos, para los cuatro índices por igual, generan en promedio una falsa alarma cada 333 puntos consecutivos. Por último, los índices transformados generan en promedio una falsa alarma cada 400 o 500 puntos; clara diferencia comparándolo con los no transformados, dónde queda evidente el sesgo comentado anteriormente que genera más puntos fuera de los límites.

## **4.2 Proceso con capacidad media $C_p = 1.67$**

### **4.2.1 Índices estimados $\hat{C}_{p,n-1}(u, v)$ y $\hat{C}_{p,n}(u, v)$**

De la misma manera que lo realizado estudiando un proceso con capacidad media de 1.33, se estimaron los índices  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0) = C_p$ ;  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0) = C_{pk}$ ;  $\hat{C}_{p,n}(0,1) = C_{pm}$  y  $\hat{C}_{p,n}(1,1) = C_{pmk}$  para un proceso cuya capacidad media es de 1.67. Se procede a verificar la normalidad de los índices, en las Figuras 22 y 23 podemos observar los histogramas de los distintos índices de capacidad estimados, gráficamente observamos una distribución con sesgo positivo, la cual no se aproxima a una distribución normal.

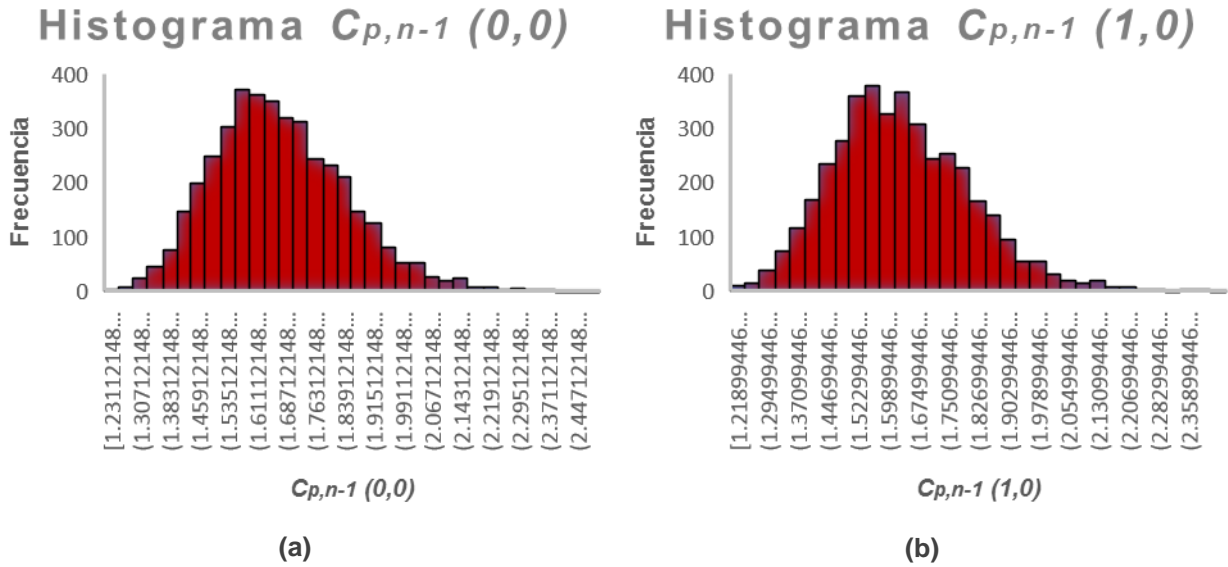


Figura 22. (a) Histograma de  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  y (b) histograma de  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  para simulación de proceso con capacidad media de 1.67.

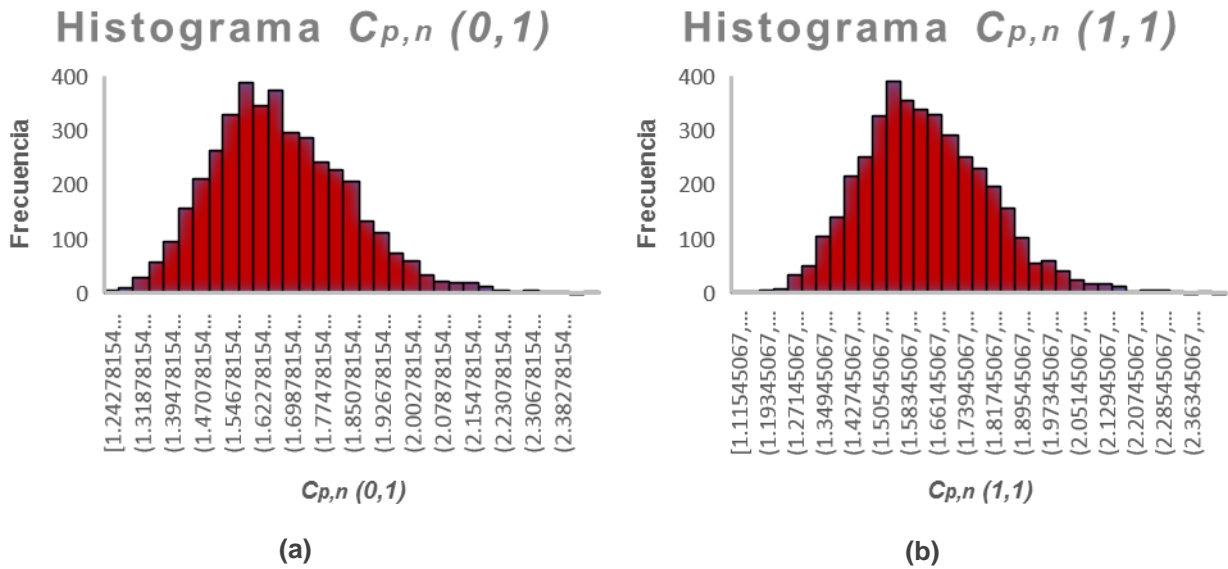


Figura 23. (a) Histograma de  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  y (b) histograma de  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$  para simulación de proceso con capacidad media de 1.67.

Para confirmar lo visto anteriormente en los histogramas donde aparentemente los índices estimados no se aproximan a una distribución normal, se realizó la prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov con un 99% de confianza. En la Tabla 5 podemos observar el p-valor para cada índice en estudio, dado que cada uno de ellos es menor

que 0.01, se puede rechazar la idea de que los índices estimados provienen de una distribución normal con un 99% de confianza.

**Tabla 5. Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov con 99% de confianza para índices de capacidad estimados para proceso con capacidad media 1.67**

Índice	Prueba	P-valor
$\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$	Kolmogorov-Smirnov	0.00000550874
$\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$	Kolmogorov-Smirnov	0.00000384297
$\hat{C}_{p,n}(0,1)$	Kolmogorov-Smirnov	0.00000113356
$\hat{C}_{p,n}(1,1)$	Kolmogorov-Smirnov	0.0000123481

Ya que los índices estimados no siguen una distribución normal, la construcción de límites de control a partir de estos datos, podría resultar no muy útil. Debido a esto se procede a, además de obtener los límites de control para los índices estimados, obtener los límites de control a partir de los percentiles empíricos de dichos índices estimados y a realizar la transformación logarítmica de dos parámetros para normalizar los índices estimados y después construir los límites de control en base a los índices transformados.

#### 4.2.1.1 Límites de Control

Los límites de control obtenidos pertenecen al índice estimado  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  que como hemos venido comentando, es igual al índice de capacidad que conocemos como  $C_p$ . En la Figura 24, se observa que la mayoría de los puntos fuera de los límites de control caen por encima del LCS, lo cual tiene coherencia ya que en el histograma pudimos ver el sesgo positivo representando valores altos en dicho índice de capacidad. De las 4000 observaciones, 21 de ellas caen por encima del LCS y 0 por debajo del LCI.



## Gráfico de Control $C_{p,n-1} (0,0)$

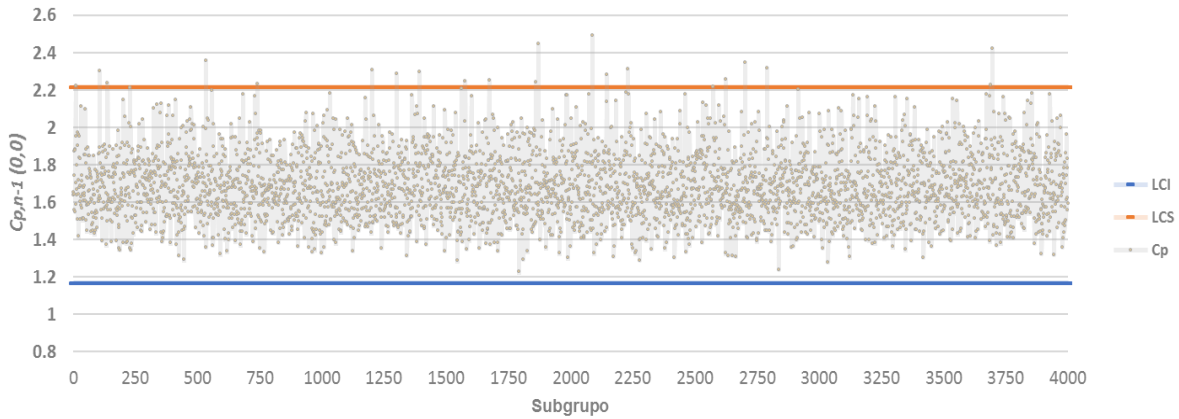


Figura 24. Gráfico de control de  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  para proceso con capacidad media 1.67, donde  $LCI = 1.1681$  y  $LCS = 2.2175$ .

Los límites de control obtenidos pertenecen al índice estimado  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  que como hemos venido comentando, es igual al índice de capacidad que conocemos como  $C_{pk}$ . En la Figura 25, se observa que la mayoría de los puntos fuera de los límites de control caen por encima del LCS, lo cual tiene coherencia ya que en el histograma pudimos ver el sesgo positivo representando valores altos en dicho índice de capacidad. De las 4000 observaciones, 20 de ellas caen por encima del LCS y 0 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $C_{p,n-1} (1,0)$

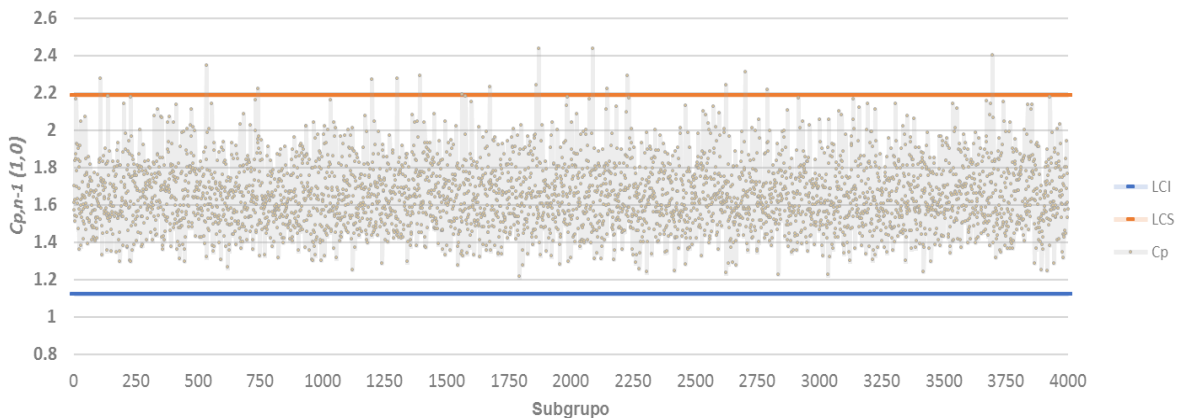
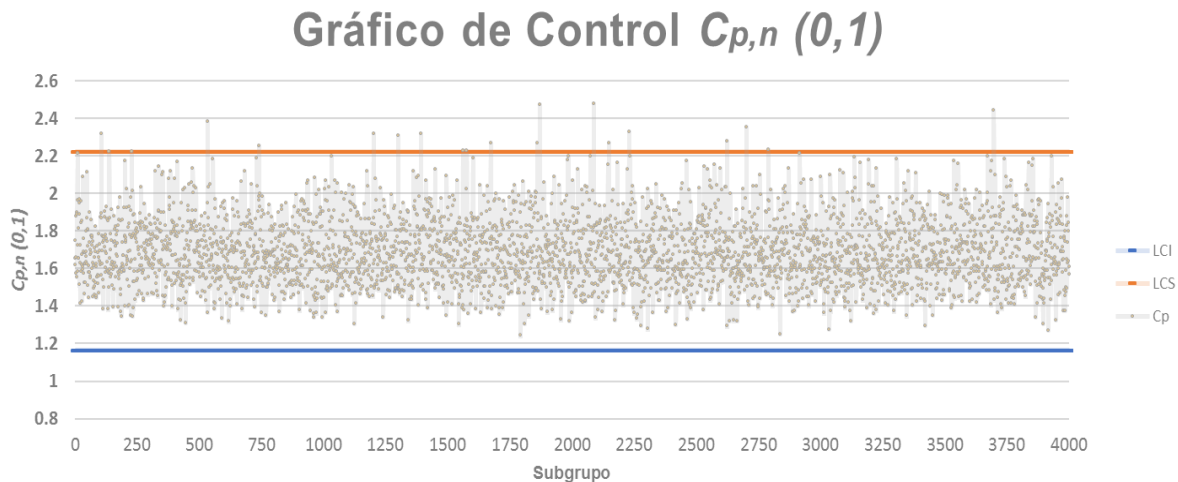


Figura 25. Gráfico de control de  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  para proceso con capacidad media 1.67, donde  $LCI = 1.1223$  y  $LCS = 2.1861$ .

Los límites de control obtenidos pertenecen al índice estimado  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  que como hemos venido comentando, es igual al índice de capacidad que conocemos como  $C_{pm}$ . En la Figura 26, se observa que la mayoría de los puntos fuera de los límites de control caen por encima del LCS, lo cual tiene coherencia ya que en el histograma pudimos ver el sesgo positivo representando valores altos en dicho índice de capacidad. De las 4000 observaciones, 17 de ellas caen por encima del LCS y 0 por debajo del LCI.



**Figura 26. Gráfico de control de  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  para proceso con capacidad media 1.67, donde LCI = 1.1626 y LCS= 2.2214.**

Los límites de control obtenidos pertenecen al índice estimado  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$  que como hemos venido comentando, es igual al índice de capacidad que conocemos como  $C_{pmk}$ . En la Figura 27, se observa que la mayoría de los puntos fuera de los límites de control caen por encima del LCS, lo cual tiene coherencia ya que en el histograma pudimos ver el sesgo positivo representando valores altos en dicho índice de capacidad. De las 4000 observaciones, 18 de ellas caen por encima del LCS y 0 por debajo del LCI.

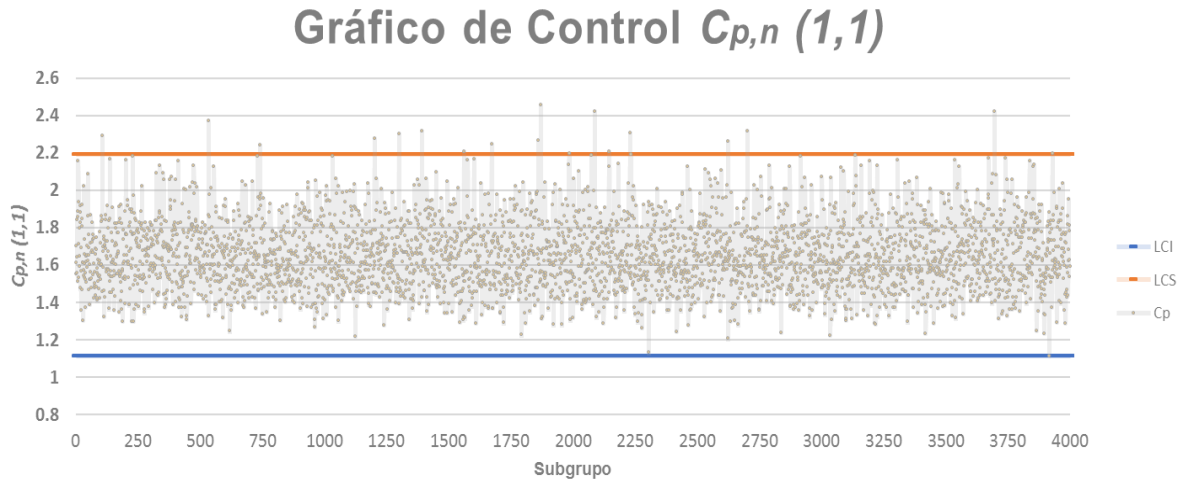


Figura 27. Gráfico de control de  $\hat{C}_{p,n}(1, 1)$  para proceso con capacidad media 1.67, donde  $LCI = 1.1150$  y  $LCS = 2.1930$ .

#### 4.2.1.2 Límites de Control con Percentiles Empíricos

De la misma manera que lo realizado estudiando un proceso simulado con capacidad media de 1.33, obtenemos los percentiles 0.135% y 99.865% para un proceso simulado con capacidad media 1.67.

Los percentiles relacionados al índice estimado  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  o  $C_p$  se presentan en la Figura 28 y representan los límites de control para este caso. Por el hecho de obtener los límites a través de los percentiles, como se puede observar en la gráfica, es de esperarse que la cantidad de puntos que caen por debajo del LCI y por encima del LCS sea muy similar o igual. De las 4000 observaciones, 6 de ellas caen por encima del LCS y 6 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $C_{p,n-1} (0,0)$

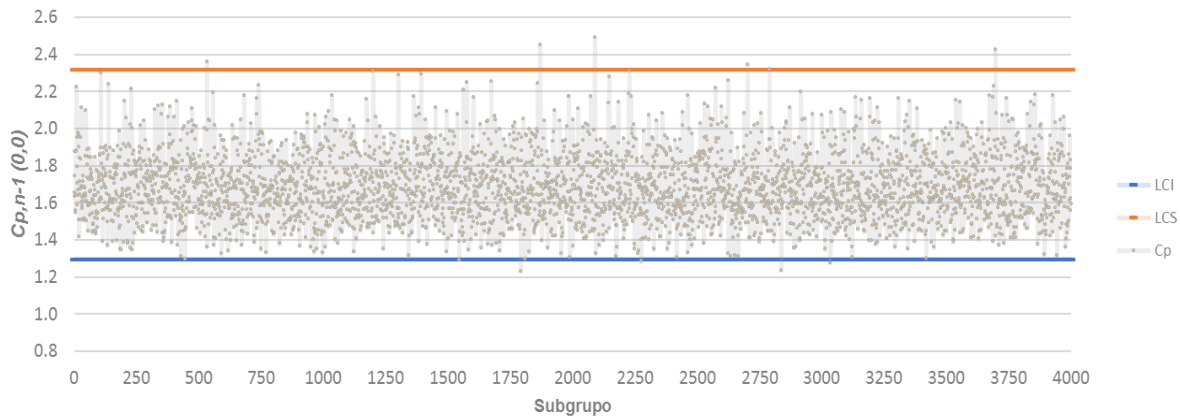


Figura 28. Gráfico de control para  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$ , límites de control mediante percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.67, donde LCI = 1.2956 y LCS = 2.3157.

Los percentiles relacionados al índice estimado  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  o  $C_{pk}$  se presentan en la Figura 29 y representan los límites de control para este caso. Por el hecho de obtener los límites a través de los percentiles, como se puede observar en la gráfica, es de esperarse que la cantidad de puntos que caen por debajo del LCI y por encima del LCS sea muy similar o igual. De las 4000 observaciones, 6 de ellas caen por encima del LCS y 6 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $C_{p,n-1} (1,0)$

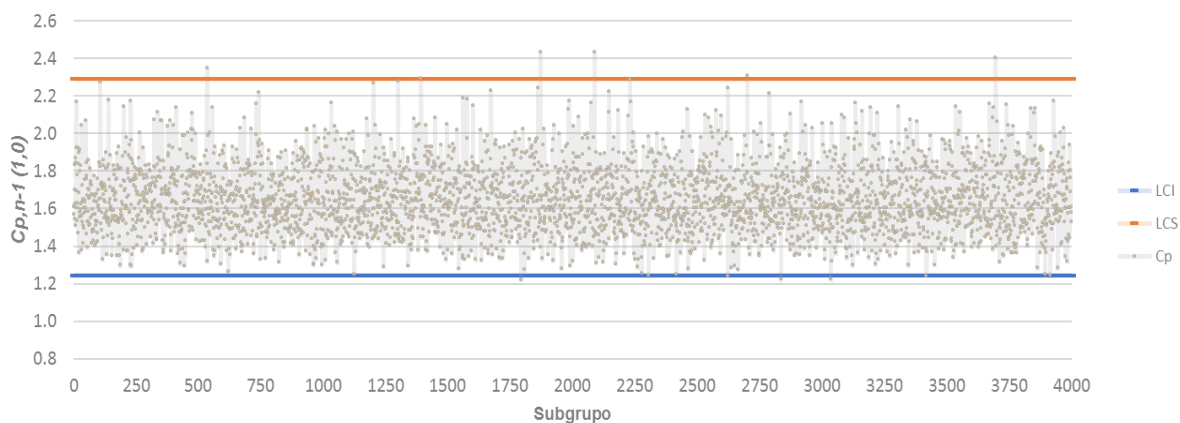
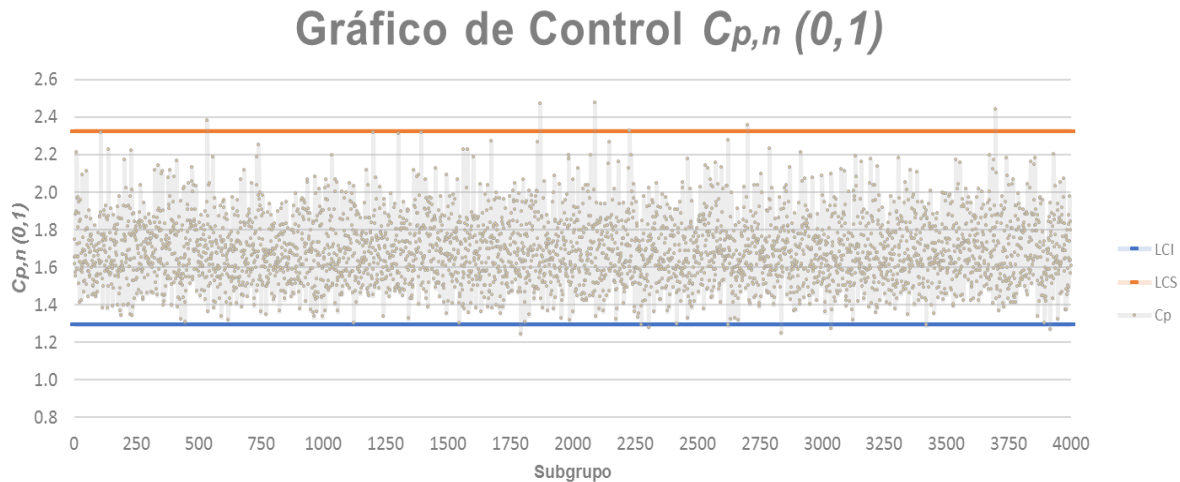


Figura 29. Gráfico de control para  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$ , límites de control obtenidos percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.67, donde LCI = 1.2453 y LCS = 2.2910.

Los percentiles relacionados al índice estimado  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  o  $C_{pm}$  se presentan en la Figura 30 y representan los límites de control para este caso. Por el hecho de obtener los límites a través de los percentiles, como se puede observar en la gráfica, es de esperarse que la cantidad de puntos que caen por debajo del LCI y por encima del LCS sea muy similar o igual. De las 4000 observaciones, 6 de ellas caen por encima del LCS y 6 por debajo del LCI.



**Figura 30. Gráfico de control para  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$ , límites de control obtenidos percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.67, donde LCI = 1.2939 y LCS= 2.3253.**

Los percentiles relacionados al índice estimado  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$  o  $C_{pmk}$  se presentan en la Figura 31 y representan los límites de control para este caso. Por el hecho de obtener los límites a través de los percentiles, como se puede observar en la gráfica, es de esperarse que la cantidad de puntos que caen por debajo del LCI y por encima del LCS sea muy similar o igual. De las 4000 observaciones, 6 de ellas caen por encima del LCS y 6 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $C_{p,n}(1,1)$

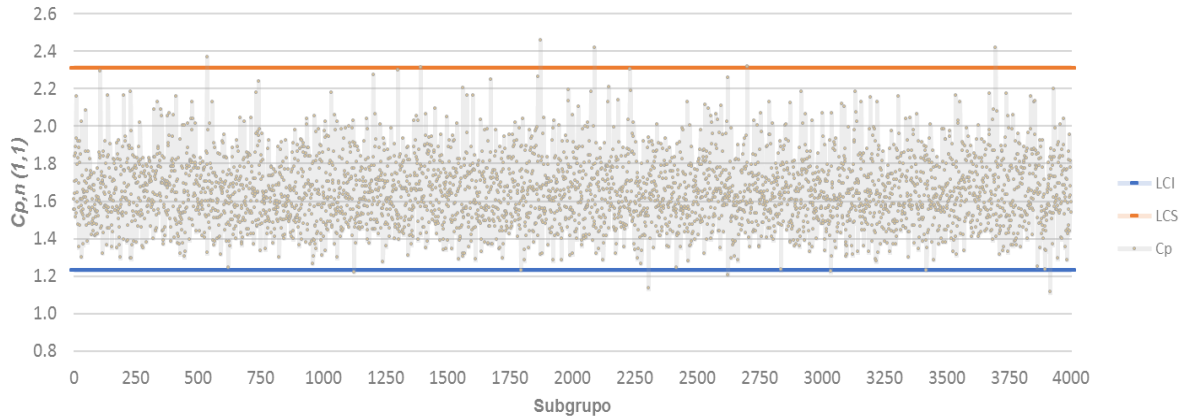


Figura 31. Gráfico de control para  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$ , límites de control obtenidos percentiles empíricos, de proceso con capacidad media de 1.67, donde LCI = 1.2313 y LCS = 2.3119.

### 4.2.2 Transformación logarítmica de dos parámetros

Al igual que en el proceso simulado con capacidad media de 1.33, para un proceso simulado con capacidad media 1.67 vemos que las distribuciones de los índices estimados presentan sesgo positivo al momento de dibujar su histograma, se optó por realizar la transformación logarítmica de dos parámetros tal y como se definió en el capítulo 3. Una vez obtenidos los nuevos índices transformados, se procede a verificar la normalidad de los éstos, recordando la nomenclatura,  $tl\hat{C}_{p,n-1}(0,0) = C_p$ ;  $tl\hat{C}_{p,n-1}(1,0) = C_{pk}$ ;  $tl\hat{C}_{p,n}(0,1) = C_{pm}$  y  $tl\hat{C}_{p,n}(1,1) = C_{pmk}$ . En las Figuras 32 y 33 podemos ver el cambio comparado con los histogramas de las Figuras 22 y 23, en este caso, podemos ver gráficamente que los índices estimados transformados se aproximan a una distribución normal.

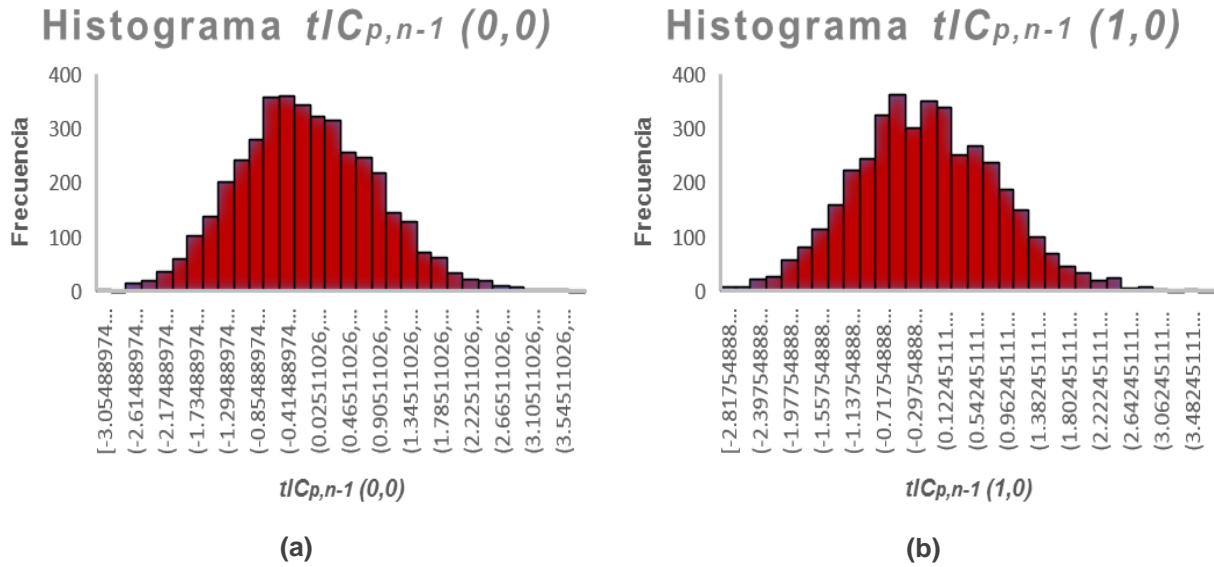


Figura 32. (a) Histograma de  $t\widehat{IC}_{p,n-1}(0,0)$  y (b) histograma de  $t\widehat{IC}_{p,n-1}(1,0)$  para simulación de proceso con capacidad media de 1.67.

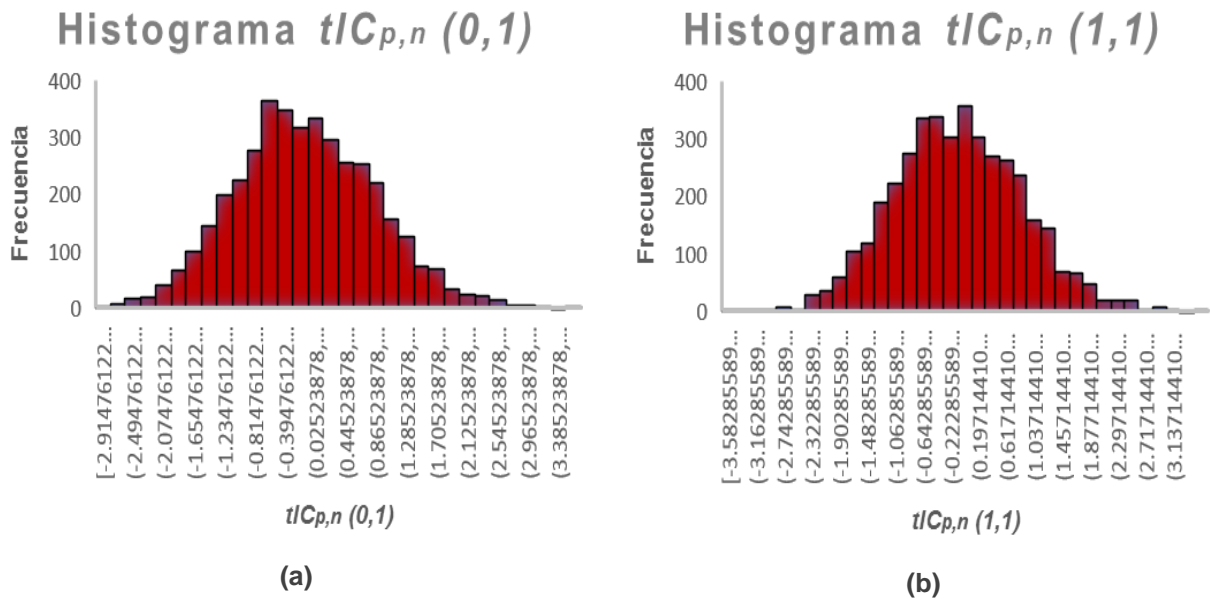


Figura 33. (a) Histograma de  $t\widehat{IC}_{p,n}(0,1)$  y (b) histograma de  $t\widehat{IC}_{p,n}(1,1)$  para simulación de proceso con capacidad media de 1.67.

Para confirmar lo visto anteriormente en los histogramas donde aparentemente los índices estimados se aproximan a una distribución normal, se realizó la prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov con un 99% de confianza. En la Tabla 6 podemos observar el p-valor para cada índice en estudio, dado que cada uno de ellos es mayor

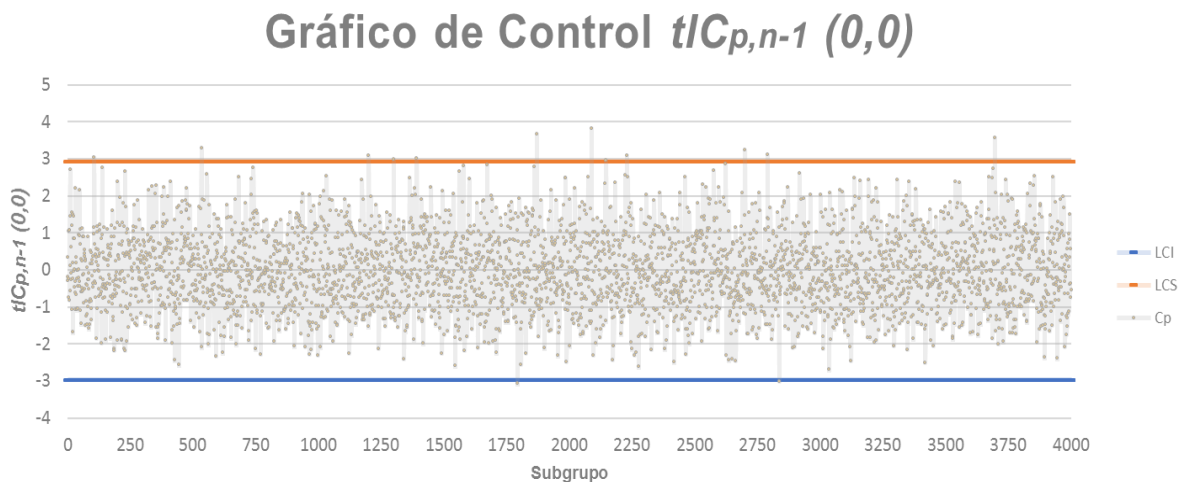
que 0.01, no se puede rechazar la idea de que los índices estimados provienen de una distribución normal con 99% de confianza.

**Tabla 6. Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov con 99% de confianza para índices de capacidad transformados para proceso con capacidad media 1.67**

Índice	Prueba	P-valor
$t\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$	Kolmogorov-Smirnov	0.0481478
$t\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$	Kolmogorov-Smirnov	0.0318462
$t\hat{C}_{p,n}(0,1)$	Kolmogorov-Smirnov	0.0261252
$t\hat{C}_{p,n}(1,1)$	Kolmogorov-Smirnov	0.08546

#### 4.2.2.1 Límites de Control

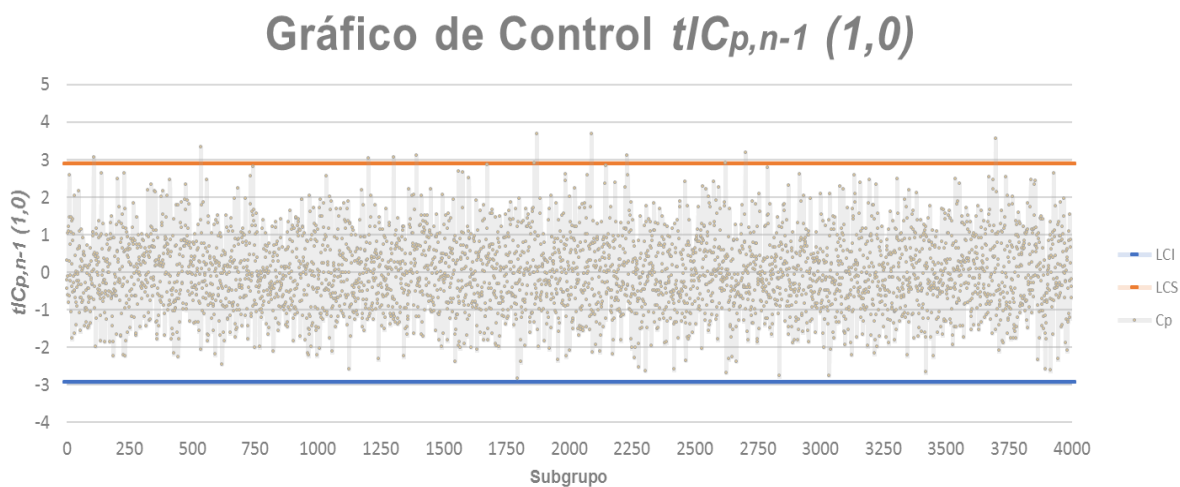
Después de la transformación logarítmica de dos parámetros de  $\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  obtuvimos un nuevo índice a monitorizar,  $t\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$ , cuyos límites de control fueron calculados y que de la misma manera corresponden a lo que conocemos habitualmente como  $C_p$ . En la Figura 34, se muestra que la cantidad de observaciones que caen fuera de los límites se redujo en comparación con los índices sin transformación. De las 4000 observaciones, 12 de ellas caen por encima del LCS y 2 por debajo del LCI.



**Figura 34. Gráfico de control para  $t\hat{C}_{p,n-1}(0,0)$  para proceso con capacidad media 1.67, donde LCI = -2.9737 y LCS = 2.9360.**



Después de la transformación logarítmica de dos parámetros de  $\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  obtuvimos un nuevo índice a monitorizar,  $tl\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$ , cuyos límites de control fueron calculados y que de la misma manera corresponden a lo que conocemos habitualmente como  $C_{pk}$ . En la Figura 35, se muestra que la cantidad de observaciones que caen fuera de los límites se redujo en comparación con los índices sin transformación; además, se aprecia que la proporción de observaciones por encima del LCS y por debajo del LCI es semejante. De las 4000 observaciones, 12 de ellas caen por encima del LCS y 0 por debajo del LCI.



**Figura 35. Gráfico de control para  $tl\hat{C}_{p,n-1}(1,0)$  para proceso con capacidad media 1.67, donde LCI = -2.9225 y LCS = 2.9028.**

Después de la transformación logarítmica de dos parámetros de  $\hat{C}_{p,n}(0,1)$  obtuvimos un nuevo índice a monitorizar,  $tl\hat{C}_{p,n}(0,1)$ , cuyos límites de control fueron calculados y que de la misma manera corresponden a lo que conocemos habitualmente como  $C_{pm}$ . En la Figura 36, se muestra que la cantidad de observaciones que caen fuera de los límites se redujo en comparación con los índices sin transformación; además, se aprecia que la proporción de observaciones por encima del LCS y por debajo del LCI es semejante. De las 4000 observaciones, 11 de ellas caen por encima del LCS y 0 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $t\hat{C}_{p,n}(0,1)$

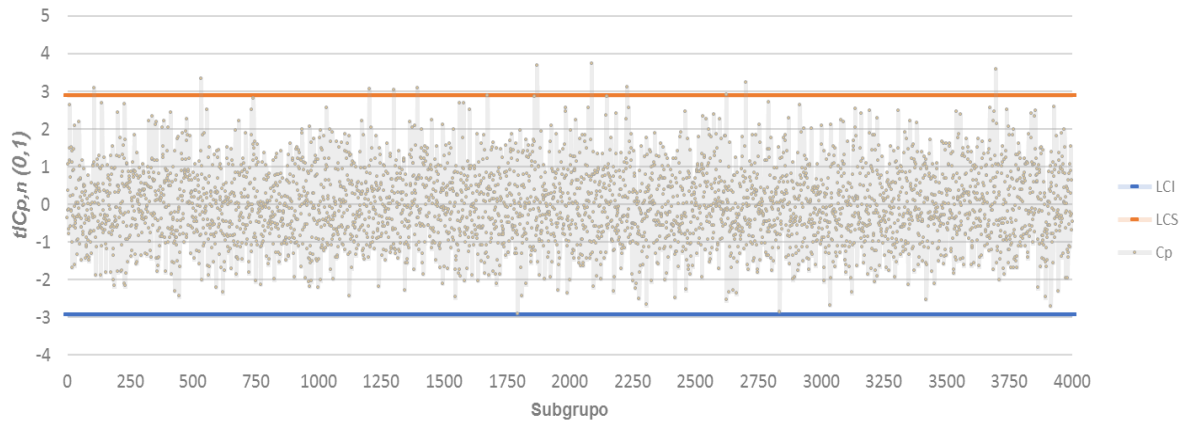


Figura 36. Gráfico de control para  $t\hat{C}_{p,n}(0,1)$  para proceso con capacidad media 1.67, donde  $LCS = 2.8948$  y  $LCI = -2.9153$ .

Después de la transformación logarítmica de dos parámetros de  $\hat{C}_{p,n}(1,1)$  obtuvimos un nuevo índice a monitorizar,  $t\hat{C}_{p,n}(1,1)$ , cuyos límites de control fueron calculados y que de la misma manera corresponden a lo que conocemos habitualmente como  $C_{pmk}$ . En la Figura 37, se muestra que la cantidad de observaciones que caen fuera de los límites se redujo en comparación con los índices sin transformación; además, se aprecia que la proporción de observaciones por encima del LCS y por debajo del LCI es semejante. De las 4000 observaciones, 12 de ellas caen por encima del LCS y 2 por debajo del LCI.

## Gráfico de Control $t\hat{C}_{p,n}(1,1)$

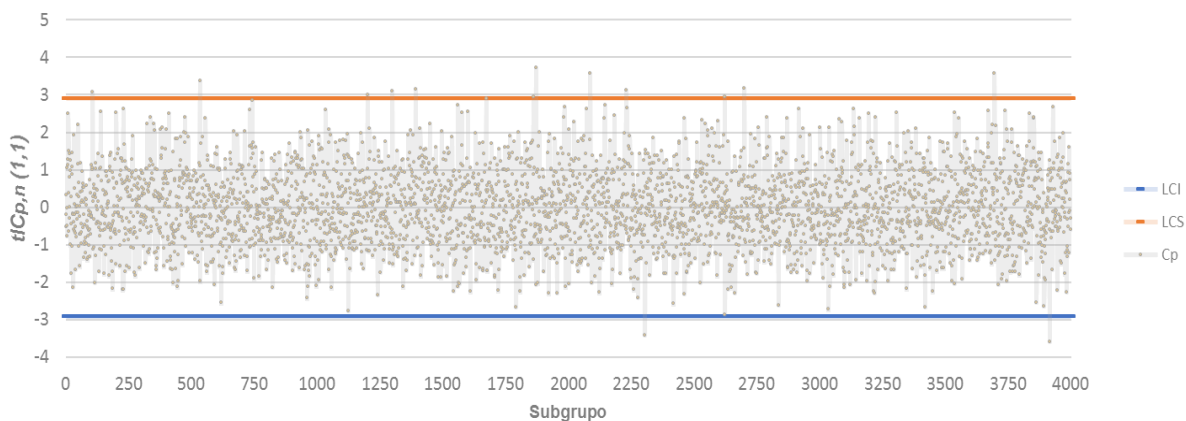


Figura 37. Gráfico de control para  $t\hat{C}_{p,n}(1,1)$  para proceso con capacidad media 1.67, donde  $LCS = 2.9073$  y  $LCI = -2.9160$ .

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los límites de control que se calcularon para la simulación del proceso con capacidad media de 1.33. Se pueden observar los límites de control inferior y superior para los cuatro índices en estudio, calculados de las tres formas que hemos propuesto a lo largo del trabajo.

**Tabla 7. Los límites de control inferior (LCL) y superior (UCL) para un proceso cuya capacidad media es de 1.67 con  $K=3$  cuando  $n=50$ , obtenidos para  $u = 0, 1$  y  $v = 0, 1$ .**

	$(0,0) = C_p$		$(1,0) = C_{pk}$		$(0,1) = C_{pm}$		$(1,1) = C_{pmk}$	
	LCL	LCS	LCL	LCS	LCL	LCS	LCL	LCS
Índice estimado	1.1682	2.2175	1.1223	2.1861	1.1626	2.2214	1.1150	2.1930
Percentiles empíricos	1.2956	2.3157	1.2453	2.291	1.2939	2.3253	1.2313	2.3119
Índice transformado (tl)	-2.9737	2.9360	-2.9225	2.9028	-2.9153	2.8948	-2.9160	2.9073

### 4.2.3 ARL Experimentado

Con la finalidad de evaluar la eficiencia de los gráficos de control obtenidos, ahora para el caso del proceso con capacidad media de 1.67, se calculó el ARL experimentado para cada gráfico construido en los apartados anteriores. La siguiente tabla muestra la diferencia de eficiencias de los gráficos existente entre las tres técnicas utilizadas para obtener los límites de control.

**Tabla 8. Resumen de ARL experimentado de los cuatro índices en estudio para la simulación de proceso con capacidad media de 1.67.**

	ARL experimentado			
	$(0,0) = C_p$	$(1,0) = C_{pk}$	$(0,1) = C_{pm}$	$(1,1) = C_{pmk}$
Índice estimado	190	235	200	222
Percentiles empíricos	333	333	333	333
Índice transformado (tl)	286	364	333	286

De manera general, podemos ver que los gráficos de los índices estimados sin transformación en estado bajo control generan mayor número de falsas alarmas que las otras dos técnicas. Los gráficos de control construidos a partir de percentiles empíricos, para los cuatro índices por igual, generan en promedio una falsa alarma cada 333 puntos

consecutivos. Sin embargo, en este caso los índices transformados generan en promedio una falsa alarma cada 300 puntos; clara diferencia comparándolo con los no transformados, dónde queda evidente el sesgo comentado anteriormente que genera más puntos fuera de los límites.

## CONCLUSIONES

---

Queda claro que la monitorización de procesos mediante gráficos de control aplicado a índices de capacidad es viable. El uso de estos índices implica tener conocimiento claro del proceso a monitorizar ya que su confiabilidad depende de un proceso estable, que los datos recogidos del proceso se aproximen a una distribución normal y que existan límites de especificación, de la característica a monitorizar, apropiados o basados en los requerimientos del cliente.

Después de estudiar los índices estimados  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  y  $C_{pmk}$  a partir de los índices  $C_p(u, v)$  propuestos por Vännman, vemos que su comportamiento no se aproxima a una distribución normal. Una transformación logarítmica de dos parámetros es una alternativa para la normalización de los índices, lo cual permitiría la utilización de éstos para la monitorización de los niveles de capacidad de un proceso estable.

A partir de los índices estimados y razonamientos mencionados en el trabajo, es posible calcular el valor esperado y la varianza del índice estimado, lo que nos permite obtener límites de control y asignarlos a la construcción de gráficos de control con un enfoque similar al utilizado por Shewhart en sus gráficos de control para monitorizar media y variabilidad.

Los gráficos de control fueron construidos para los dos niveles de capacidad de proceso más exigidos comúnmente en la industria. En ambos casos se pudo observar que el ARL bajo control para los cuatro índices estimados, es menor que los calculados con percentiles empíricos o mediante los índices transformados; esto debido al sesgo positivo de los índices estimados sin transformación que ocasiona mayor número de observaciones fuera de los límites, principalmente por encima del límite de control superior. Construir gráficos de control a partir de los índices estimados sin transformación generaría mayor número de falsas alarmas y por tanto no es una opción que se considere correcta, por lo tanto, se recomienda usar límites de control basados en los percentiles empíricos o índices de capacidad transformados.

## FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

---

El trabajo presentado surge con la idea de monitorizar un proceso a través de los índices de capacidad que cada vez se vuelven más comunes entre las empresas y es de los pocos indicadores de proceso exigidos en la industria. La bibliografía referente a este tipo de monitorización es escasa ya que actualmente no existe un gráfico de control definido para este tipo de control.

Esto es el inicio del estudio para la monitorización de índices de capacidad mediante gráficos de control, por lo que existen muchas líneas de investigación que deben ser estudiadas para definir si es viable llevar este tipo de monitorización. Entre las líneas futuras de investigación están el cálculo de límites exactos mediante las funciones de densidad, estudiar respuesta de los gráficos a distintos cambios en el proceso y la adaptación de gráficos de control a los índices  $P_p$  y  $P_{pk}$ .

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- Bisell, A.F. (1990). How reliable is your capability index? *Appl. Statist.*, 39, 331-340.
- Castagliola, P., Vännman, K. (2007). Monitoring Capability Indices using an EWMA Approach. *Quality and Reliability Engineering International*, 23, 769-790.
- DaimlerChrysler Corporation, Ford Motor Company and General Motors Corporation (2005). Statistical Process Control (SPC) Reference Manual.
- Hsiang, T.C. and Taguchi, G. (1985). *A tutorial on quality control and assurance-The Taguchi method*. ASA Annual Meeting, Las Vegas.
- Kane, V. (1986). Process Capability Indices. *Journal of quality technology*, 18, 41-52.
- Kotz, S., Lovelace C. (1998). *Process Capability Indices in Theory and Practice*. Editions Arnold.
- Kotz, S., Pearn, W.L. and Johnson, N.L. (1993). Some process capability indices are more reliable than one might think. *Appl. Statist.*, 42, 55-62.
- Montgomery, D. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons (New York).
- Pearn, W.L., Kotz, S., Johnson, N.L. (1992). Distributional and inferential properties of process capability indices. *J. Quality Technology*, 24, 216-231.
- Shewhart, W. (1927). Quality Control. *Bell System Technical Journal*, 6(4), 722–735.
- Vännman, K. (1995). A Unified Approach to Capability Indices. *Statistica Sinica*, 5, 805-820.
- Vännman K. (1997). Distribution and moments in simplified form for a general class of capability indices. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 26, 159-179.
- Verdoy, P., Mahiques, J., & Pellicer, S. (2006). *Manual de control estadístico de calidad: teoría y aplicaciones*. Publicacions de la Universitat Jaume I.

**Anexo I. Funciones de densidad  $\hat{C}_{p,n}(u, v)_i$**

(Vännman, 1997) deriva la función de densidad de  $\hat{C}_{p,n}(u, v)_i$  en Ecuación (8) para parámetros  $u \geq 0, v \geq 0, (u, v) \neq (0,0)$ . Dado que en este trabajo consideramos índices con parámetros  $u = 0,1$  y  $v = 0,1$ ; las funciones de densidad presentadas en el actual trabajo se limitan a dichos valores.

Al igual que (Castagliola & Vännman, 2007) para evitar utilizar el índice  $i$ , expresamos las funciones de densidad como funciones de los parámetros transformados  $\mu_t$  y  $\sigma_t$ , dados en la siguiente ecuación:

$$\mu_t = \frac{\mu - T}{USL - T} \quad y \quad \sigma_t = \frac{\sigma}{USL - T} \quad (A1)$$

La función de densidad de  $\hat{C}_{p,n}(u, v)$  cuando  $u = 0$  y  $v > 0$  viene dada por

$$f_{(0,v)}(x) = \frac{2^{1-\frac{n}{2}} n \mu_t^2}{9x^3 \sigma_t^2 \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{n}{18x^2 \sigma_t^2}\right) \times \int_{-L}^L \left(\frac{n}{9x^2 \sigma_t^2} - vt^2\right)^{(n-3)/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left((t - \mu_t \sqrt{n})^2 - vt^2\right)\right) dt, \quad x > 0 \quad (A2)$$

donde,

$$L = \frac{\sqrt{n}}{3x\sigma_t\sqrt{v}} \quad (A3)$$

La función de densidad de  $\hat{C}_{p,n}(u, v)$  cuando  $u = 1$  y  $v = 0$  viene dada por



$$f_{(1,0)}(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} I_1(z, x) dz, & x \leq 0 \\ \int_0^{\frac{\sqrt{n}}{3x\sigma_t}} I_1(z, x) dz, & x > 0 \end{cases} \quad (\text{A4})$$

donde,

$$I_1(z, x) = \frac{3z^{n-1} 2^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{(n-1)}{2}\right) \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \left( \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_t}(1-\mu_t) - 3xz\right)^2\right) \right. \\ \left. + \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_t}(1+\mu_t) - 3xz\right)^2\right) \right) \quad (\text{A5})$$

La función de densidad de  $\hat{C}_{p,n}(u, v)$  cuando  $u = 1$  y  $v > 0$  viene dada por

$$f_{(1,v)}(x) = \begin{cases} \int_M^{\infty} I_2(z, x) dz, & \frac{1}{3\sqrt{v}} \leq 0 \\ \int_M^{\frac{\sqrt{n}}{3x\sigma_t}} I_2(z, x) dz, & x > 0 \end{cases} \quad (\text{A6})$$

donde,

$$M = \frac{\sqrt{vn}}{\sigma_t(1 + 3x\sqrt{v})} \quad (\text{A7})$$

y

$$\begin{aligned}
I_2(u, v) &= \frac{3z^2 2^{1-n/2}}{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{\pi}} \left( z^2 - v(3xz - \sqrt{n}/\sigma_t)^2 \right)^{(n-3)/2} \\
&\quad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2 - v\left(3xz - \sqrt{n}/\sigma_t\right)^2\right)\right) \\
&\quad \times \left( \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_t}(1 - \mu_t) - 3xz\right)^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_t}(1 + \mu_t) - 3xz\right)^2\right) \right) \quad (\text{A8})
\end{aligned}$$