

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR DE GANDIA

Master en Ingeniería Acústica



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE VALENCIA



ESCUELA POLITECNICA
SUPERIOR DE GANDIA

“Comparativa de métodos de simulación para la cuantificación del aislamiento acústico proporcionado por estructuras periódicas”

TRABAJO FINAL DE MASTER

Autor/a:
Parrilla Navarro, Manuel Jesús

Tutor/a:
Dr. Javier Redondo Pastor

GANDIA, 2017

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a toda mis padres y mi hermano la dedicación, esfuerzo y apoyo que me han inculcado para conseguir realizar todo lo que me proponga, gracias a ello, estoy donde estoy, y en especial a mi abuelo Marcos, que de nuevo me sirve como inspiración día a día

A todos mis compañeros de clase, que, tras muchas horas de nervios, agobios y trabajo pasadas juntos, hemos conseguido llegar vivos al final de este máster, los biblioacústicos. A Gandía, por darme la oportunidad de vivir todo lo que he vivido en mis años de estudiante y darme a algunas personas, hoy en día, imprescindibles. Y a los que han estado desde siempre, desde Manzanares y en especial a la ya casi oficialmente mejor enfermera de todos los tiempos.

Y al más importante de todos, mi tutor Javi, que me ha acogido como un gran amigo en el que confiar y tener ganas de luchar con él. Una motivación como la que ha despertado en mí es muy difícil encontrar.

RESUMEN

Actualmente existen diferentes métodos para realizar simulaciones acústicas. La conveniencia de utilizar un método u otro depende del sistema que se estudia en cada caso. En este trabajo se realiza una comparativa entre diferentes métodos (Múltiple Scattering, Método de Elementos Finitos y Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo) aplicados a la cuantificación del aislamiento acústico proporcionado por estructuras periódicas (cristales de sonido). Se considera un estudio sistemático sobre tiempo computacional, la precisión y el coste computacional.

PALABRAS CLAVE

Método de Múltiple Scattering, Método de Elementos Finitos, Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, Cristal de Sonido, coste computacional, simulación, precisión.

ABSTRACT

Nowadays there are different available methods to perform simulations in acoustics. The suitability of them strongly depends on the system studied in each case. In the present work, a comparison between different methods (Multiple Scattering, Finite Elements Method and Finite Difference Time Domain) is carried out particularized to the quantification of the acoustic isolation provided by periodic structures (Sonic crystals). It has been considered a systematic study about computational time, precision and computational cost.

KEYWORDS

Multiple Scattering Method, Finite Elements Method, Finite Difference Time Domain Method, sonic crystals, computational cost, simulation, accuracy.

Índice

Capítulo 1.	Introducción y objetivos	1
1.1	Objetivos	1
1.2	Construcción de barreras acústicas basadas en estructuras periódicas...	2
Capítulo 2.	Estado del arte	3
2.1	¿Qué son las estructuras periódicas?	3
2.1.1	Teoría sobre estructuras periódicas.....	3
2.1.2	Cristales de sonido, el sistema periódico acústico.....	6
2.2	Breve historia métodos de simulación de estructuras periódicas.....	7
2.3	Método de Múltiple Scattering.....	8
2.3.1	Teoría del múltiple scattering.....	8
2.3.2	Scattering 2D por cilindros circulares	10
2.4	Método de Elementos Finitos (FEM).....	12
2.4.1	Ecuaciones gobernantes del método.....	12
2.4.2	Discretización del dominio	13
2.5	Método por diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD)	14
2.5.1	Teoría de FDTD.....	14
2.5.2	Aplicación a la acústica.....	16
Capítulo 3.	Simulaciones	19
3.1	Cristal de sonido bajo estudio	19
3.2	Simulación con Múltiple Scattering.....	23
3.2.1	Geometría bajo estudio	23
3.2.2	Número de veces que se tendrán en cuenta los campos dispersados (MS)	24
3.2.3	Número de frecuencias que se van a simular (MS).....	26
3.2.4	Espectro de la barrera con MS.....	31
3.3	Simulación con FEM	33
3.3.1	Pre-procesado.....	33
3.3.2	Procesado.....	35
3.3.3	Post-procesado	42

3.4	Simulación con FDTD.....	44
3.4.1	Paso espacial.....	45
3.4.2	Espectro de la barrera con FDTD.....	49
Capítulo 4.	Análisis comparativo	51
4.1	Dispersores con ff del 60%.....	51
4.2	Dispersores con ff del 75%.....	53
4.3	Dispersores con ff del 90%.....	54
4.4	Comparación con varios ff.....	56
Capítulo 5.	Conclusiones	58
5.1	Conclusiones.....	58
5.2	Líneas futuras.....	59
Referencias.....		60
Anexo I.....		62

Capítulo 1. Introducción y objetivos

1.1 Objetivos

En este trabajo se realizará un estudio comparativo sobre diferentes métodos de simulación para la cuantificación del aislamiento acústico proporcionado por estructuras periódicas. Para ello inicialmente se elegirá un diseño de pantalla acústica basada en estructuras periódicas, de la que se obtendrá el aislamiento acústico según dictan las normas vigentes, con diferentes métodos de simulación. Por conveniencia se han elegido los métodos de Múltiple Scattering (MS), Método de Elementos Finitos (FEM) y el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD). El objetivo principal del presente trabajo es el encontrar cuál de estos métodos es más adecuado para la simulación de pantallas acústicas basadas en cristales de sonido. Este objetivo principal puede desglosarse en los siguientes objetivos secundarios:

- Diseñar un protocolo de simulación para cada uno de los métodos elegidos, construyendo la estructura periódica elegida.
- Obtener el aislamiento acústico de la estructura periódica elegida para cada método de simulación.
- Variar parámetros característicos de cada método de simulación para estudiar su efecto en lo que se refiere a precisión de cálculo y tiempo de computación.
- Basados en dichos resultados, categorizar qué métodos de los estudiados son los más precisos y más rápidos para realizar este tipo de simulaciones.

A su vez, se irán desarrollando una serie de tareas:

- Estudiar teóricamente cada uno de los métodos de simulación que se van a utilizar.
- Investigar sobre las estructuras periódicas para comprender su funcionamiento y realizar las simulaciones de manera óptima.
- Aprender el método de simulación de Múltiple Scattering.
- Aplicar la normativa para realizar los cálculos de aislamiento acústico correctamente.

1.2 Construcción de barreras acústicas basadas en estructuras periódicas

Este trabajo está enmarcado en la investigación que se está realizando por el grupo “*Sonic Crystal Technologies*”, Centro de Tecnologías Físicas de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV). El objetivo de este grupo es encontrar la forma de mejorar el rendimiento de las actuales barreras acústicas a través del uso de las estructuras periódicas (Figura 1.1) y una vez conseguido esto, comercializar y fomentar el uso del nuevo modelo de barreras acústicas ideado. Esta labor se está llevando a cabo mediante métodos de optimización basados en algoritmos evolutivos. Para realizar estas optimizaciones es de vital importancia que el coste computacional necesario para simular los posibles candidatos en el proceso evolutivo sea tan corto como sea posible. Esto justifica el interés del presente trabajo.

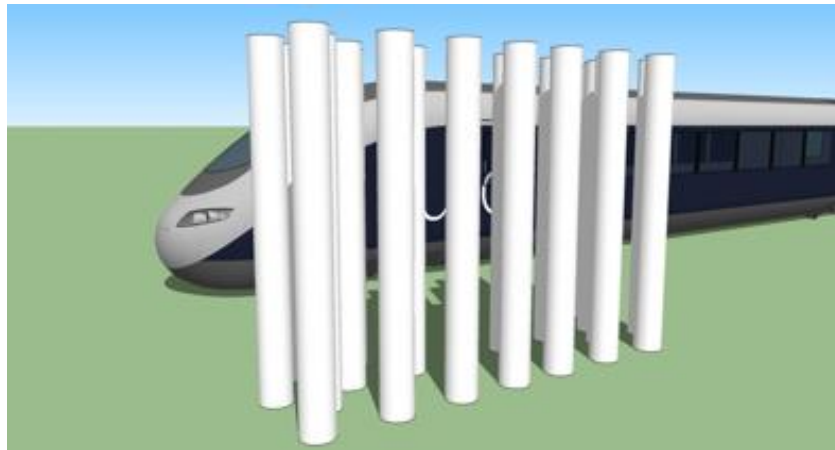


Figura 1.1. Barrera acústica basada en estructuras periódicas

Capítulo 2. Estado del arte

2.1 ¿Qué son las estructuras periódicas?

La propagación de ondas dentro de estructuras periódicas ha recibido una gran atención a lo largo de los últimos años. En 1995 [1] se estudió por primera vez la propagación de ondas sonoras en estructuras periódicas, y desde entonces, la comunidad científica ha mostrado un gran interés por dichas estructuras, habiéndose desarrollado diversas aplicaciones dentro del campo de la acústica.

En un medio con un elevado número de dispersores, las ondas serán dispersadas por cada uno de ellos, sufriendo sucesivas dispersiones en el resto. Este proceso en cascada se repite para establecer un patrón de iteraciones infinitas formado el proceso conocido como dispersión múltiple. Si los dispersores son colocados periódicamente en el espacio, el proceso de dispersión múltiple conduce a interesantes propiedades físicas, dando lugar a varias aplicaciones: guías de ondas [2], lentes [3], filtros [4], multiplexores [5], barreras acústicas [6]... entre otras aplicaciones en óptica, electromagnetismo y acústica.

Debido a que este tipo de sistemas es aún novedoso y a su alto coste de fabricación, la mayoría de los científicos que se han dedicado al estudio de las estructuras periódicas optan primero por realizar simulaciones para las diferentes aplicaciones. Es por eso por lo que surge la problemática de qué tipo de simulación es mejor para qué tipo de aplicación y de ahí el interés de este trabajo.

2.1.1 Teoría sobre estructuras periódicas

2.1.1.1 Propiedades geométricas

Una estructura periódica está formada por un grupo de dispersores situados de una forma estratégica. Este conjunto de dispersores se conoce como rejilla o red. Una red particular es definida como un sistema periódico que observado desde cualquier punto es invariante a traslaciones y rotaciones.

El concepto de sistema periódico es una abstracción matemática que implica la existencia de una estructura o medio infinito. Obviamente, en la naturaleza no existen sistemas infinitos, pero hay algunos ejemplos que imitan los sistemas periódicos. Por ejemplo, las estructuras cristalinas pueden ser estudiadas como medios periódicos usando condiciones de contorno periódicas si el cristal cumple algunas aproximaciones. Por ejemplo, el tamaño de la estructura cristalina debe

ser mucho menor que la longitud de onda de la onda que se utilizaría para explorar el cristal. En la Figura 2.1 se observan algunos ejemplos de sistemas periódicos reales. Los sistemas periódicos 1D presentan periodicidad en una dirección; en 2D, la periodicidad aparece en dos direcciones, siendo homogénea en la tercera dirección y en los sistemas periódicos 3D la periodicidad aparece en las tres dimensiones del espacio.

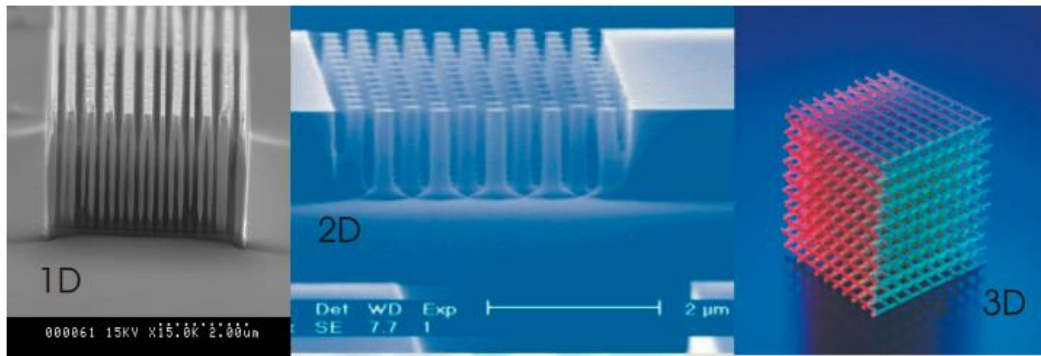


Figura 2.1 Ejemplos de sistemas periódicos

Existen cinco redes periódicas que se pueden construir en sistemas periódicos 2D, mostradas en la Figura 2.2: oblicuas, cuadradas, triangulares, rectangulares y centradas. Estas redes son caracterizadas por el *parámetro de red*, a . El parámetro de red es crucial en los sistemas periódicos porque define la relación entre las propiedades geométricas de la red y una de las propiedades físicas más importantes relacionadas con las características de propagación de tales sistemas, los intervalos de banda de Bragg o band gaps, que se definirá más adelante.

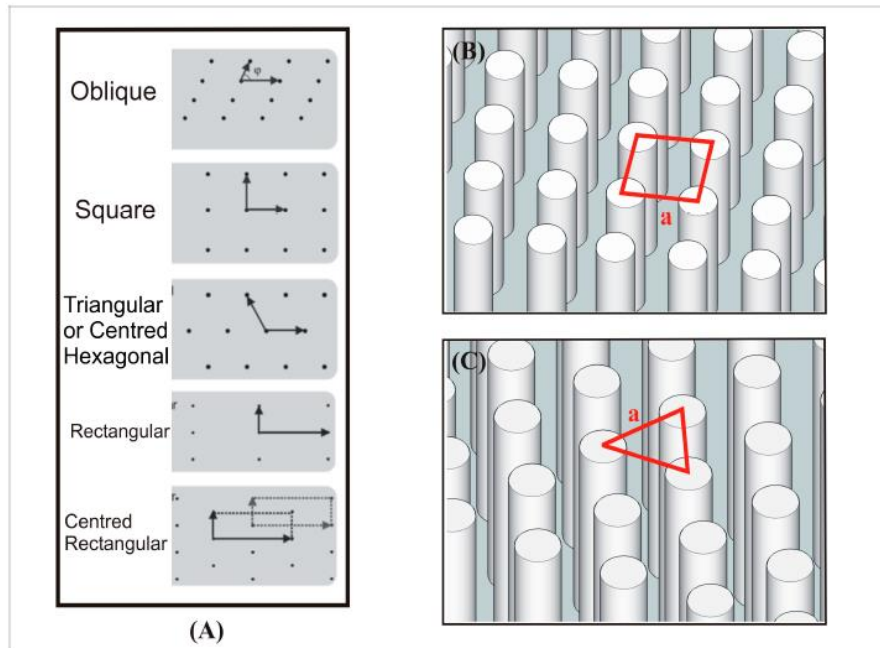


Figura 2.2 Sistemas periódicos 2D, en A se encuentran las diferentes redes posibles en 2D, en B una red cuadrada y en C una red triangular

Una vez conocidos el parámetro de red y el tamaño de los dispersores, se define el factor de llenado o *filling fraction* (ff) como el parámetro geométrico que, al igual que el parámetro de red, presenta una relación directa con las propiedades físicas del sistema. El factor de llenado es definido como el área que ocupa cada dispersor entre el área total de la celda unidad.

2.1.1.2 Propiedades Físicas

Existen diversos trabajos en los que los autores realizan un exhaustivo trabajo en cuanto a la explicación de la propagación de ondas dentro de una estructura periódica [7]. Debido a que es un campo de trabajo muy complejo y que directamente no influye en este trabajo, tan sólo se definirá el concepto clave a la hora de entender cómo funcionan físicamente estas estructuras. Este concepto es el band gap o intervalo de frecuencias de Bragg.

Un band gap es un intervalo de frecuencias en las que debido a la geometría de la estructura periódica y a la propagación de ondas en la propia estructura, se originan una serie de interferencias destructivas que no permiten la propagación de ondas acústicas a esas frecuencias. Como se ha comentado en el apartado anterior, está relacionado directamente con el *parámetro de red*, a .

$$f_{Band\ Gap} = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2 * a} \quad (2.1)$$

Siendo c la velocidad de propagación del sonido en el aire y λ la longitud de onda de la frecuencia, que puede ser expresada como dos veces el *parámetro de red*, a .

2.1.2 Cristales de sonido, el sistema periódico acústico

En los años 80 se realizaron estudios y análisis de materiales artificiales con diferentes propiedades dieléctricas. Los pioneros en estos trabajos fueron Yoblonovitch *et al.* [8] y John *et al.* [9], que observaron la existencia de frecuencias a las que no había propagación relacionada con la periodicidad del medio. Debido a estas similitudes con las propiedades de las estructuras cristalinas y medios periódicos, los llamaron Cristales Fotónicos (*PC, Photonic Crystals*). Después de eso, en los años 90, se investigaron los *Phononic Crystal*, que era composiciones periódicas de varios materiales con propiedades elásticas diferentes. Estos sistemas tenían propiedades análogas a los *PC*, pero para ondas elásticas. Especialmente, cuando uno de los medios es un fluido, el sistema se le suele llamar Cristal de Sonido (*SC, Sonic Crystals*). Por tanto, se puede llamar Cristal de Sonido a un array periódico de dispersores acústicos cilíndricos con un radio r separados por un predeterminado parámetro de red en un fluido.

El interés en los SC ha ido creciendo en los últimos años debido a la focalización acústica y sus propiedades atenuantes. En este trabajo será destacable la labor de los SC como atenuantes. El parámetro que describe esto es el *Insertion Loss (IL)*:

$$IL(dB) = 20 \log \left(\frac{p_{directa}}{p_{interferida}} \right) \quad (2.2)$$

Siendo $p_{directa}$ la presión existente en un punto tras el SC sin la existencia de este y $p_{interferida}$ la presión en ese mismo punto, pero esta vez con presencia del SC (Figura 2.3).

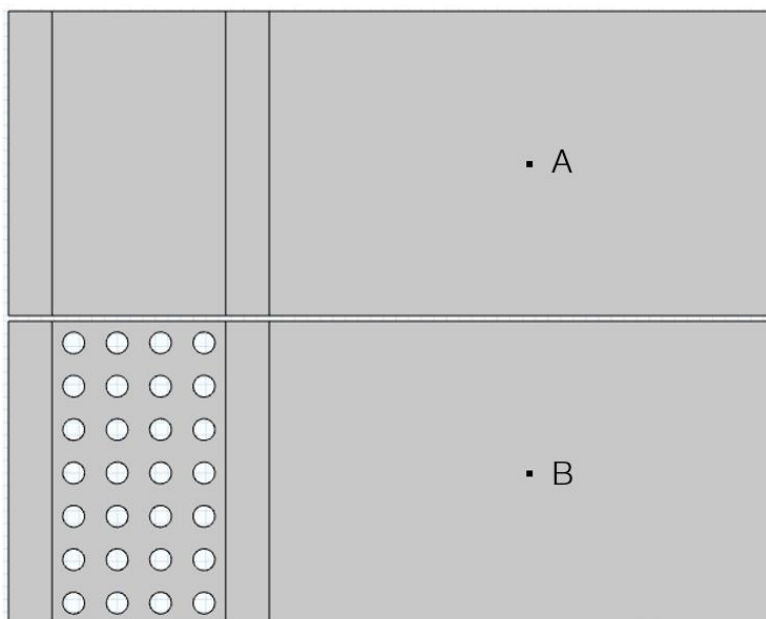


Figura 2.3 Ejemplo de cálculo de IL donde A es la pdirecta y B la pinterferida

En el siguiente capítulo [[“Capítulo 3. Simulaciones”](#)] se definirá el SC que se utilizará para las simulaciones, definiendo cada uno de los parámetros característicos antes vistos.

2.2 Breve historia métodos de simulación de estructuras periódicas

Desde que se consideró la posibilidad de utilizar estructuras periódicas como barreras acústicas [6] la comunidad científica ha realizado análisis computacionales con diferentes métodos de simulación [10]. Los primeros trabajos que se realizaron simulando estructuras periódicas datan de 1987 [8] [9] utilizando la teoría de Expansión de Ondas Planas (*Plane Waves Expansion, PWE*). A finales del siglo XX, se empezó a utilizar *Múltiple Scattering (MST)* para realizar estos trabajos [1] [11].

Tras estos trabajos, la comunidad científica ha ido realizando varios avances en cuanto a las teorías utilizadas para realizar este tipo de simulaciones. Por ejemplo, Cao *et al.* [12] utilizó el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), que, según los autores, demostró ser una técnica efectiva para los cálculos de estructuras periódicas 2D. Algunos trabajos publicados informan sobre el uso del método de elementos finitos (FEM) para el análisis de este tipo de estructuras. Wang *et al.* [13] usó este método para estudiar la generación de grandes band gaps en de las estructuras periódicas. Un trabajo reciente de Sánchez-Pérez *et al.* [14] utilizó FEM para definir un modelo 2D en dos pasos

para el diseño de barreras acústicas. Liu *et al.* [15] utilizó un modelo FEM para investigar estructuras periódicas en 1D.

Como se puede observar, son infinidad de investigaciones las que han realizado simulaciones de estructuras periódicas con varios métodos de simulación, pero muy pocos estudios se han centrado en realizar una misma simulación con diferentes métodos para clarificar los beneficios de realizar este tipo de estudios con un método de simulación u otro. En este trabajo se van a estudiar tres métodos antes mencionados, el método de múltiple scattering (MS), el método de elementos finitos (FEM) y el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD).

2.3 Método de Múltiple Scattering

2.3.1 Teoría del múltiple scattering

Este método es el más antiguo de los que se van a estudiar en este trabajo. En 1913, Zaviška [16] describió este método para un array de dispersores finitos en campos acústicos en 2D, que más tarde, Ignatowsky aplicó en 1914 al caso de incidencia normal en una fila infinita de cilindros [17]. El primer trabajo que se realizó simulando cristales de sonido fue realizado por Chen *et al.* en 2001 [18].

El múltiple scattering puede ser entendido como la interacción de campos de ondas con dos o más obstáculos. La teoría del múltiple scattering resuelve el problema teniendo en cuenta que el campo dispersado de un obstáculo induce campos dispersados adicionales a todos los demás obstáculos, que inducen campos dispersos a los demás obstáculos y así sucesivamente (Figura 2.4). Esta característica permite definir este método como auto consistente, siendo aplicable a un espacio periódico o aleatorio de cilindros.

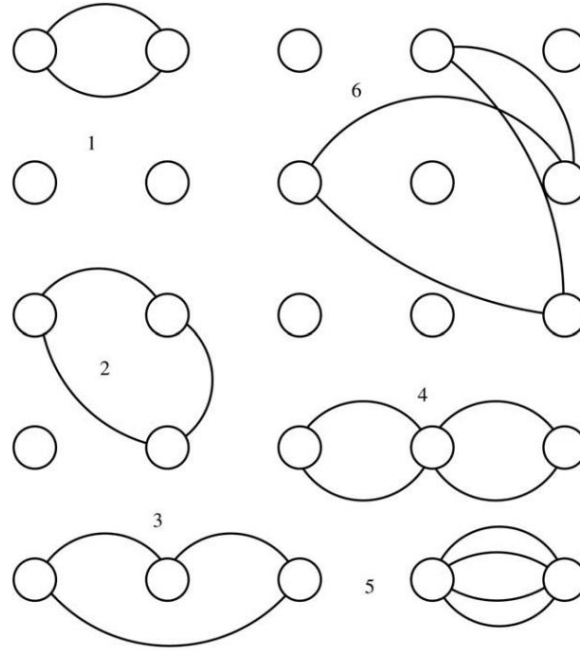


Figura 2.4 Conjunto periódico con varios caminos de scattering o dispersión. El 1 es simple, 2 y 3 son caminos de scattering doble y 4, 5 y 6 son caminos triples de scattering

Inicialmente, se consideran N obstáculos desconectados entre sí. Emitiendo una onda incidente en ellos, el problema será calcular las ondas dispersadas. El campo total puede ser expresado como:

$$p = p_{inc} + \sum_{j=1}^N p_{sc}^j \quad (2.3)$$

Donde p_{inc} es el campo incidente dado y p_{sc}^j es el campo dispersado por el dispersor j . Entonces, el campo incidente sobre el n -ésimo cilindro en presencia de otro $N-1$ es

$$p = p_{inc} + \sum_{j=1, j \neq n}^N p_{sc}^j \quad (2.4)$$

Considerando que el problema es lineal, se puede escribir como:

$$p_{inc}^j = T_j p_j \quad (2.5)$$

Donde T_j es un operador relacionado al campo incidente en el j -ésimo cilindro, p_j , y el campo dispersado por el dispersor j -ésimo, p_{sc}^j . Entonces

$$p_n = T_n \left(p_{inc} + \sum_{j=1, j \neq n}^N p_{sc}^j \right). \quad (2.6)$$

La simplicidad de estas fórmulas es engañosa debido a que el operador T_j no está claramente definido y no está especificado en ecuaciones previas requeridas para definir el espacio. En el siguiente apartado se estudia el método de separación de variables junto con un teorema de suma apropiado para estudiar la dispersión acústica producida por dos o más obstáculos cilíndricos. En este trabajo se estudiará la incidencia de ondas planas. El método exacto fue utilizado por Zaviška [16], pero conlleva un sistema simultáneo de ecuaciones algebraicas infinito, motivo por el cual se simplifica.

2.3.2 Scattering 2D por cilindros circulares

Se consideran N cilindros situados en $\vec{r}_i = (r_i, \theta_i)$ de radio a_i con $i = 1, 2, \dots, N$ para formar una red regular o una matriz aleatoria perpendicular al plano X-Y. Los cilindros son paralelos respecto al eje Z, por tanto, las condiciones de contorno y la geometría no cambia en este eje, por lo que se puede reducir el problema a 2D para resolver la ecuación de Helmholtz. La onda final llega a un receptor situado en \vec{r}_r y, como se ha visto en el apartado anterior, está formado por la suma de la onda directa desde la fuente y el campo dispersado de todos los cilindros (Ecuación 2.6).

Las soluciones para las ondas dispersadas por objetos cilíndricos pueden ser expresadas en términos por dos funciones importantes: $H_n(kr)e^{in\theta}$ y $J_n(kr)e^{in\theta}$, las funciones de Hankel y Bessel de orden n y de primer tipo. Ambas son soluciones a la ecuación de Helmholtz. La primera satisface las condiciones de radiación en el infinito y es simple en el origen de las coordenadas. La segunda es regular en el origen de coordenadas.

2.3.2.1 Incidencia de una onda plana

Una onda plana procedente de la parte negativa del eje X puede ser expresada respecto al origen por las coordenadas cartesianas como una exponencial $e^{i\vec{k}\vec{x}}$, donde \vec{k} y $\vec{r} = \vec{x}$ son el vector de onda ($k = 2\pi/\lambda$; λ es la longitud de onda) y la posición, respectivamente. Como se ha mencionado, el problema de la dispersión de N obstáculos cilíndricos se resuelve transformándolo a coordenadas cilíndricas por simplicidad. Es posible entonces expresar la onda plana como una función de Bessel de primer orden centrada en el origen de coordenadas,

$$p_{inc} = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} A_q J_q(kr) e^{iq\theta} \quad (2.7)$$

Donde A_q son los coeficientes que determinan la onda incidente. Para ondas planas se puede demostrar que $A_q = i^q$ [19].

El campo dispersado por el dispersor j se puede expresar respecto al origen de coordenadas del j -ésimo cilindro usando n -ésimo orden de las funciones de Bessel de primer orden como:

$$p_{sc}^j = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} A_{jq} H_q(kr_j) e^{iq\theta_j} \quad (2.8)$$

Donde:

$$r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \quad (2.9)$$

$$\theta_j = \arcsin\left[\frac{(y - y_j)}{r_j}\right] \quad (2.10)$$

En la Figura 2.5 se muestra un esquema del sistema de coordenadas centrado de cada cilindro.

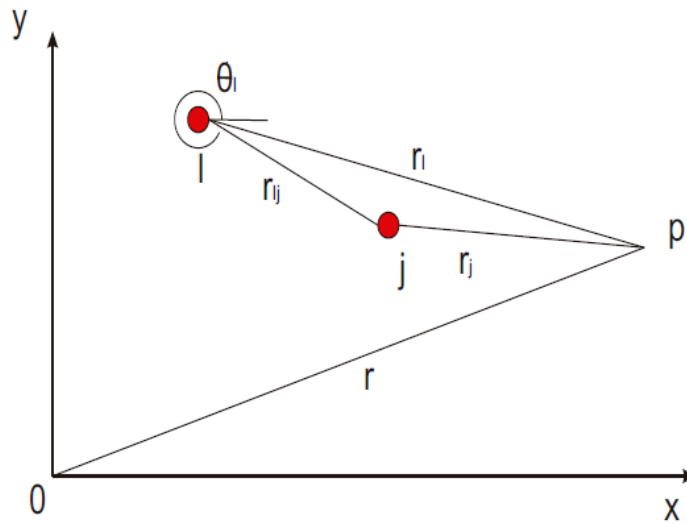


Figura 2.5. Coordenadas de cada cilindro

Por tanto, una vez obtenidas cada una de las coordenadas de los cilindros, se puede obtener la función que expresa la presión en el campo a calcular. Para obtenerla son necesarios el uso de ciertos teoremas que debido a su complejidad y a que este cálculo no se encuentra totalmente relacionado con este trabajo, se referencia al trabajo realizado por Vicente Romero [7] para obtener todo el desarrollo de este sistema. La presión en cada uno de los puntos vendrá dada por tanto por:

$$p(x, y) = p_{inc} + \sum_{l=1}^N \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} A_{ls} H_{ls}(kr_l) e^{(is\theta_l)} \quad (2.11)$$

2.4 Método de Elementos Finitos (FEM)

Este método está basado en la ecuación que define la propagación del sonido en fluidos, derivada de las ecuaciones del flujo de fluidos. Es decir, la conservación de la masa se describe por la ecuación de continuidad; la conservación de momento, conocida por las ecuaciones de Navier-Sokes; una ecuación de conservación de energía; las ecuaciones constitutivas del modelo y una ecuación de estado para describir la relación entre variables termodinámicas. En el caso clásico de la acústica de presión, que describe con precisión la mayoría de los fenómenos acústicos, se supone que el flujo es sin pérdidas y los efectos adiabáticos y viscosos no se tienen en cuenta y, por tanto, se utiliza una ecuación de estado isotrópica lineal [20].

2.4.1 Ecuaciones gobernantes del método

Tras las suposiciones antes establecidas, el campo acústico es definido por una variable, la presión p , y se obtiene de la ecuación de ondas:

$$\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \left(-\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) = 0 \quad (2.12)$$

Donde t es tiempo, ρ_0 la densidad del fluido y c la velocidad del sonido.

Los problemas de acústica a menudo implican ondas armónicas simples como las ondas sinusoidales. Más generalmente, cualquier señal puede ser expresada con componentes armónicos a través de su serie de Fourier. La ecuación de onda puede entonces ser resuelta en el dominio de la frecuencia para cierta frecuencia. Una solución armónica tiene la siguiente forma:

$$p(x, t) = p(x) \sin(\omega t) \quad (2.13)$$

Donde las componentes espaciales $p(x)$ y temporales $\sin(\omega t)$ se separan. La presión puede ser reescrita de una forma más general utilizando variables complejas:

$$p(x, t) = p(x) e^{j\omega t} \quad (2.14)$$

Utilizando esta suposición para el campo de presión, la onda ecuación de ondas dependiente del tiempo queda reducida a la conocida ecuación de Helmholtz:

$$\nabla \left(-\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) - \frac{\omega^2}{\rho_0 c^2} p = 0 \quad (2.15)$$

En el caso homogéneo una solución simple a la ecuación de Helmholtz es una onda plana:

$$p = P_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.16)$$

Donde P_0 es la amplitud de la onda, que se está moviendo en la dirección k con una frecuencia angular w y un número de onda $k = |k|$.

2.4.2 Discretización del dominio

Para resolver la ecuación de Helmholtz (Ecuación 2.15), este método se basa en la discretización del dominio en pequeños elementos (Figura 2.6). Cada dominio está formado por nodos, que son puntos en común con otros elementos.

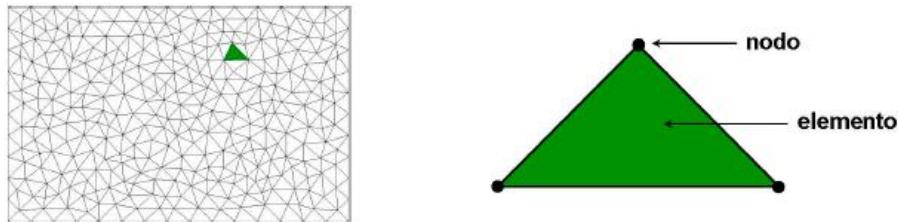


Figura 2.6. Elementos de FEM

Existen diferentes tipos de elementos (Figura 2.7) atendiendo a la dimensión del problema. En 2 dimensiones pueden ser triangulares o cuadriláteras. En 3D pueden formarse tetraedros, pirámides, prismas triangulares y hexaedros.

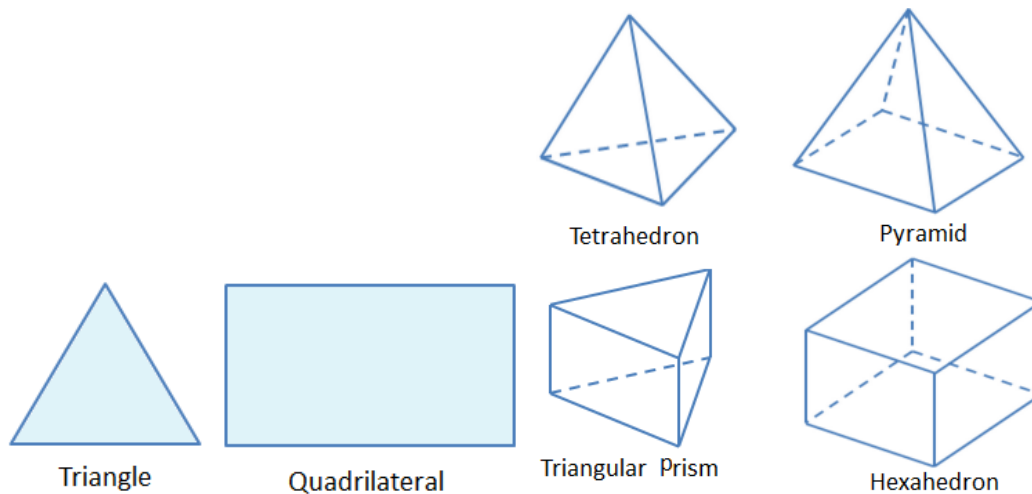


Figura 2.7. Tipos de mallas FEM. (a) en 2D, (b) en 3D

El tamaño que deben tener los elementos depende del caso. Hay softwares que tienen ciertos tamaños de elemento predefinidos. En otros casos, se utiliza una relación entre un número determinado de elementos (6 u 8 elementos) por longitud de onda de la frecuencia máxima que se desea simular.

2.5 Método por diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD)

Este método de simulación es actualmente uno de los más utilizados para resolver problemas de electromagnetismo. La razón principal por la que el método de FDTD tiene tanto éxito es debido a que es un método extremadamente sencillo, incluso para problemas en 3D. La técnica base de este método fue propuesta por K. Yee *et al.* [21].

La teoría de este método es simple. Para resolver un problema electromagnético, la idea es tan simple como discretizar, en tiempo y en espacio, las ecuaciones de Maxwell con aproximaciones de frecuencias centrales. La original idea de Yee reside en la asignación en el espacio de los componentes del campo eléctrico y magnético.

2.5.1 Teoría de FDTD

El método de FDTD es un método numérico que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales parciales de forma discreta. Esta técnica consiste en reemplazar las derivadas parciales por una ecuación definida como “diferencias finitas” aproximada.

Las fórmulas de diferencias finitas son obtenidas por medio de la expansión de las series de Taylor. Considerando la derivada parcial $\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}$, sin variar el valor de x y realizando una aproximación en dos puntos $t + \frac{1}{2}\Delta t$ y $t - \frac{1}{2}\Delta t$ se obtiene:

$$F\left(x, t + \frac{1}{2}\Delta t\right) = F(x, t) + F'(x, t)\frac{\Delta t}{2} + F''(x, t)\frac{\Delta t^2}{4} * \frac{1}{2!} + F'''(x, t)\frac{\Delta t^3}{8} * \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.17)$$

$$F\left(x, t - \frac{1}{2}\Delta t\right) = F(x, t) - F'(x, t)\frac{\Delta t}{2} + F''(x, t)\frac{\Delta t^2}{4} * \frac{1}{2!} - F'''(x, t)\frac{\Delta t^3}{8} * \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.18)$$

Considerando que la elección de Δt es una cantidad muy pequeña, se consideran despreciables los términos a partir de las derivadas de segundo orden. Considerando esto se obtiene:

$$F\left(x, t + \frac{1}{2}\Delta t\right) - F\left(x, t - \frac{1}{2}\Delta t\right) = F(x, t)\Delta t \quad (2.19)$$

Despejando $F(x, t)$:

$$F(x, t) = \frac{F\left(x, t + \frac{1}{2}\Delta t\right) - F\left(x, t - \frac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t} \quad (2.20)$$

Esta ecuación está definida como diferencia finita de segundo orden centrada en el tiempo para la función $F(x, t)$. Pudiéndose expresar como:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_i^n = \frac{F|_i^{n+1/2} + F|_i^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (2.21)$$

Donde n e i son números enteros que representan un punto discreto en el tiempo n y espacio i y $n + \frac{1}{2} = t + \frac{1}{2}\Delta t$, así como $n - \frac{1}{2} = t - \frac{1}{2}\Delta t$.

De la misma forma, es posible obtener $\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}$, fijando un tiempo n y variando el espacio x :

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_i^n = \frac{G|_{i+1/2}^n + G|_{i-1/2}^n}{\Delta x} \quad (2.23)$$

Esta ecuación (Fórmula 2.23) se define como diferencia finita de segundo orden centrada en el espacio para la función $G(x, t)$.

La aproximación realizada para la definición de las diferencias finitas puede variar considerando más términos de las series de Taylor, lo cual implica mayor exactitud de los resultados numéricos, pero se requiere mayor tiempo de computación para el cálculo.

2.5.2 Aplicación a la acústica

Como se ha comentado anteriormente, originalmente este método fue planteado para resolver problemas electromagnéticos. A pesar de esto, gracias a la comunidad científica, este método se ha conseguido aplicar a otros campos a través de analogías a diferentes tipos de ondas (Figura 2.8).

Sound waves	TE waves	TM waves
v_x	E_y	$-G_y$
v_y	$-E_x$	G_x
p	G_z	E_z
\bar{K}	$\underline{\mu}$	$\underline{\epsilon}$
$\underline{\rho}$	$\underline{\epsilon}$	$\underline{\mu}$

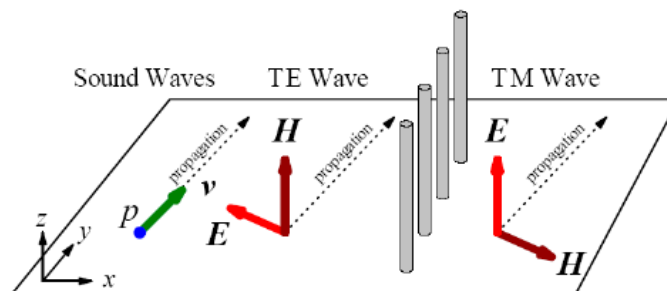


Figura 2.8. Analogías 2D de diferentes tipos de ondas

Las ecuaciones acústicas de primer orden en un medio homogéneo sin pérdidas se pueden expresar como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + k(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad (2.26)$$

$$\vec{\nabla} p + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \quad (2.27)$$

Donde p es la presión acústica, \vec{u} es el vector de velocidad de las partículas, ρ la densidad del medio y $k = \rho c^2$ es la compresibilidad del medio.

Las ecuaciones pueden ser reescritas en coordenadas cilíndricas (2D):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0 \quad (2.30)$$

Se pueden aproximar las derivadas de espacio y tiempo a diferencias finitas:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=x_0} \approx \frac{p\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - p\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \quad (2.31)$$

Donde Δx es el intervalo espacial entre los puntos considerados. Definiendo tres mallas escalonadas a tresbolillo (una para presiones y dos para velocidades) y tras las operar con las fórmulas, quedan tal que:

$$\begin{aligned} p\left(x, y, t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= p\left(x, y, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ &- \Delta t k \left(\frac{u_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t\right) - u_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, t\right)}{\Delta x} \right. \\ &\left. + \frac{u_y\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t\right) - u_y\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, t\right)}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} u_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t + \Delta t\right) &= u_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t\right) \\ &- \Delta t \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{p\left(x + \Delta x, y, t + \frac{\Delta t}{2}\right) - p\left(x, y, t + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} u_y\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, t + \Delta t\right) &= u_y\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, t\right) \\ &- \Delta t \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{p\left(x, y + \Delta y, t + \frac{\Delta t}{2}\right) - p\left(x, y, t + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

En resumen, la presión p (Figura 2.9), es evaluada en una malla discreta $(n\Delta x \times m\Delta y)$ en los tiempos $(t + \frac{1}{2})\Delta t$ mientras la velocidad u_x y u_y , son evaluadas en unas mallas ligeramente separadas entre sí, $((n + \frac{1}{2})\Delta x, m\Delta y)$ y $(n\Delta x, (m + \frac{1}{2})\Delta y)$ respectivamente en tiempo (siendo m y n enteros).

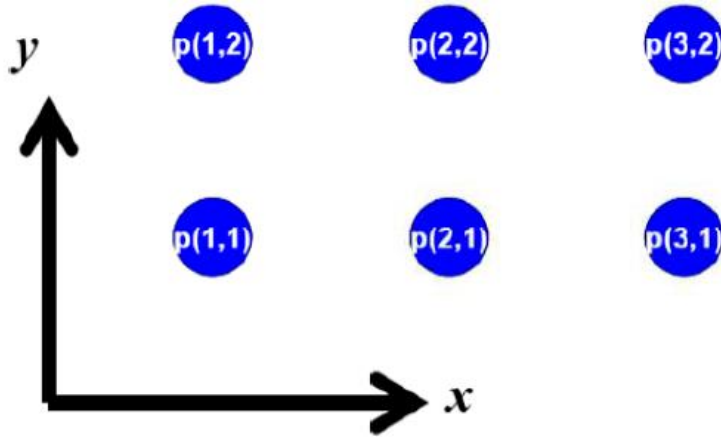


Figura 2.9. Malla de presiones FDTD

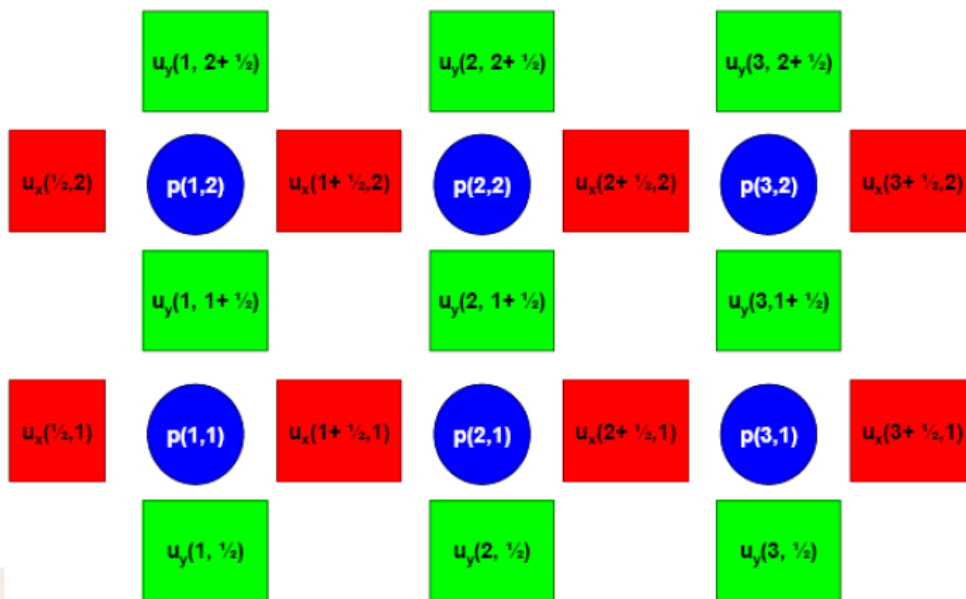


Figura 2.10. Malla al tresbolillo de velocidades y presiones FDTD

Capítulo 3. Simulaciones

3.1 Cristal de sonido bajo estudio

En el apartado 2.1 del Capítulo 2 [[“2.1 ¿Qué son las estructuras periódicas?”](#)] se realizó una pequeña introducción a las estructuras periódicas y los cristales de sonido. En este apartado, se va a definir la barrera acústica basada en cristales de sonido que se utilizará para realizar las simulaciones.

La primera decisión será elegir la forma de los difusores que se utilizarán. La comunidad científica ha utilizado varias formas de los dispersores para construir un cristal de sonido (Figura 3.1): circulares simples, triangulares, dispersores de C simple, de C doble...

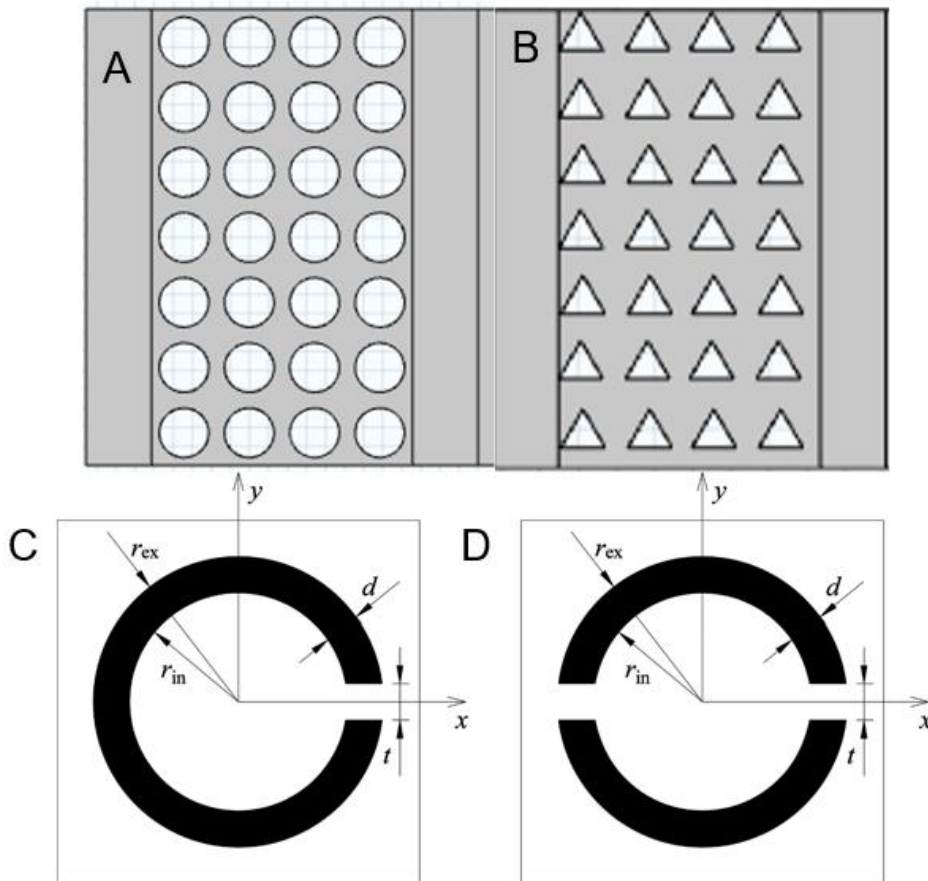


Figura 3.1. Diferentes tipos de dispersores: A circular simple, B triangular, C de C simple y D de C doble

Por simplicidad en el diseño, se van a utilizar dispersores circulares simples y situados en una red cuadrada (lado de la red igual al *parámetro de red*, a) por lo que el factor de llenado, ff , vendrá dado por la siguiente fórmula:

$$ff = \frac{A_{\text{geometría del dispersor}}}{A_{\text{celda unidad}}} = \frac{2\pi r^2}{a^2} \quad (3.1)$$

El siguiente paso será elegir la distribución de la red de los dispersores. Atendiendo a los estudios de la comunidad científica [22], las mínimas filas recomendadas para tener unos efectos destacables de una barrera acústica basada en cristales de sonido son de 4 filas (dirección X), por lo que se elegirá este número de filas. En cuanto a las columnas, lo que establecerán el largo de la barrera, se elige la medida de 1.2 metros, ya que es una medida estándar en la construcción de barreras de sonido, por lo que habrá que situar 7 columnas (dirección Y) de dispersores. Por lo tanto, la barrera acústica tendrá la siguiente forma:

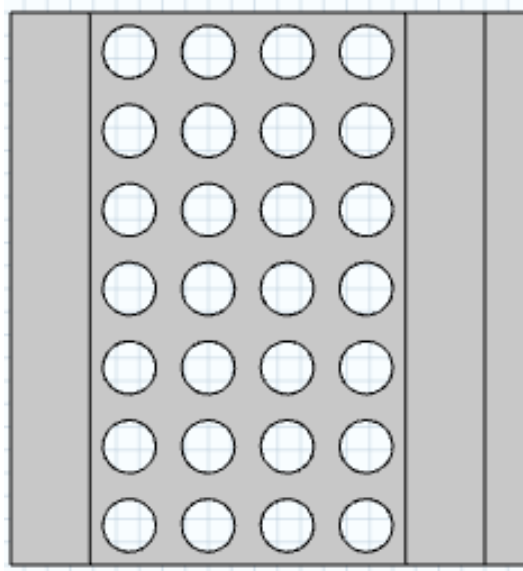


Figura 3.2. Barrera acústica bajo estudio

La característica más importante de las barreras acústicas es el intervalo de frecuencias a las que consiguen cancelar la propagación del sonido en ellas y así proporcionar aislamiento a tales frecuencias. Como se ha explicado en el capítulo anterior, ese intervalo es conocido como el intervalo de Bragg o la frecuencia de band gap. Para establecer esa frecuencia a la que se quiere que no exista propagación de ondas acústicas en la barrera acústica, se va a referir a la normal que establece una ponderación a las frecuencias dependiendo de su importancia en el espectro del ruido de tráfico, debido a que es el uso que se le da a estas estructuras. Esta norma es la UNE-EN 1793 Parte 3 [23].

f_i Hz	L_i dB
100	-20
125	-20
160	-18
200	-16
250	-15
315	-14
400	-13
500	-12
630	-11
800	-9
1 000	-8
1 250	-9
1 600	-10
2 000	-11
2 500	-13
3 150	-15
4 000	-16
5 000	-18

Figura 3.3. Tabla del espectro normalizado de ruido de tráfico

Como se observa en la Figura 3.3, la frecuencia con mayor importancia dentro del espectro de ruido de tráfico será de 1000 Hz, por lo que se seleccionará esta como la frecuencia principal de band gap de la barrera acústica que se simulará. Una vez elegida la frecuencia de band gap se podrá calcular el *parámetro de red*, a , de la estructura.

$$f_{Band\ Gap} = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2 * a} \rightarrow a = \frac{c}{2 * f_{Band\ Gap}} = \frac{343}{2 * 1000} = 0.1715$$

Siendo c la velocidad del sonido en el aire (343 m/s), el *parámetro de red*, a , que tendrá la estructura será de 0.1715. Tras elegir la frecuencia de band gap y obtener el *parámetro de red*, a , se podrá calcular el radio que deberán tener cada uno de los dispersores de la estructura. En este trabajo, se realizarán las simulaciones para tres ff diferentes, lo que significa que será necesario obtener tres radios de los dispersores diferentes. Los ff que se simularán serán 60%, 75% y 90%. Para ello se utilizará la siguiente fórmula:

$$ff = \frac{A_{geometría\ del\ dispersor}}{A_{celda\ unidad}} = \frac{2\pi r^2}{a^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{ff * a^2}{2\pi}} \quad (3.2)$$

Por tanto, los parámetros principales de la barrera acústica basada en cristales de sonido que se va a simular son los siguientes:

Forma de los dispersores	Circulares
Filas (dirección X)	4
Columnas (dirección Y)	8
Parámetro de red, a	0.1715
Frecuencia de Band Gap	1000 Hz
Radio de los dispersores	Para $ff=60\% \rightarrow 0.053$ m
	Para $ff=75\% \rightarrow 0.059$ m
	Para $ff=90\% \rightarrow 0.065$ m

Tabla 3.1. Parámetros de la barrera a simular

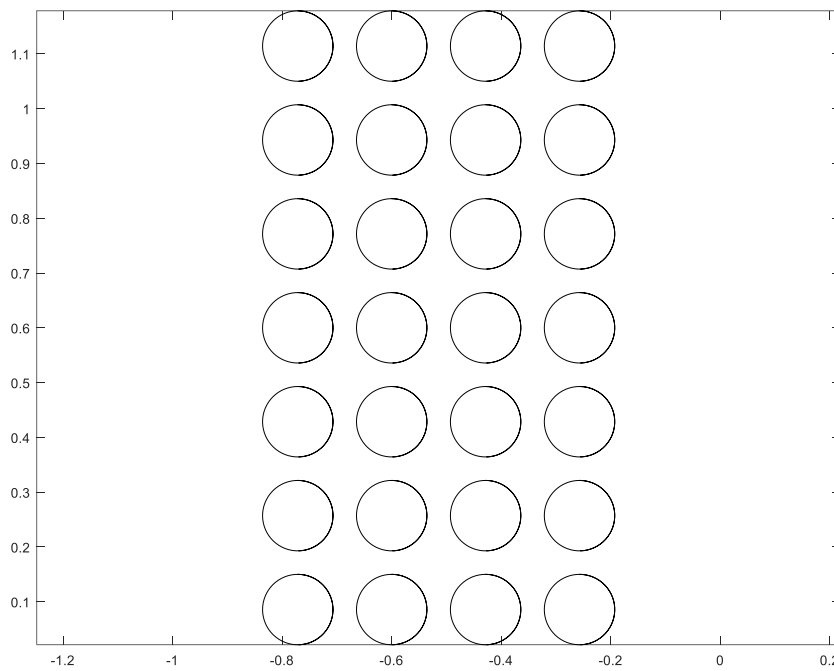


Figura 3.4. Barrera bajo estudio con $ff=75\%$

3.2 Simulación con Múltiple Scattering

Tras la breve introducción a la teoría de múltiple scattering realizada en el apartado 2.3 del Capítulo 2 [[“2.3 Método de Múltiple Scattering”](#)], el siguiente paso será realizar la simulación con este método. Para ello se utilizará inicialmente el toolbox para Matlab de μ -diff [24]. Este toolbox contiene códigos de ejemplos de simulaciones con la teoría del múltiple scattering. Estos códigos serán la base del código que se realizará para este trabajo. Existen varios parámetros fundamentales que habrá que seleccionar:

- Geometría bajo estudio. En este caso será la barrera de sonido basada en estructuras periódicas descrita en el capítulo anterior.
- Número de veces que se tendrán en cuenta los campos dispersados. Como se explicó al principio de este apartado, la teoría de múltiple scattering tiene cuenta varios campos dispersados que inducen los obstáculos. Se realizará un estudio de cuál será el número mínimo de campos dispersados a simular para obtener un resultado óptimo.
- Número de frecuencias que se van a simular. Se realizarán los cálculos del Insertion Loss para un número determinado de frecuencias. En este trabajo se utilizará un algoritmo que tiene cuenta N frecuencias por cada tercio de octava. Se realizará un estudio para saber cuál será el número N de frecuencias óptimo para la simulación.

Además de estos parámetros, será necesario establecer unas características que permitan categorizar cómo de óptimas son estas simulaciones y sean comparables con los otros métodos de simulación. Se establecen así:

- Coste computacional. Se tendrá en cuenta cuánto tiempo tardan en realizarse las simulaciones, expresando así este coste computacional en segundos.
- Error. Se calculará un error en el Insertion Loss calculado, siempre referido al caso más ideal de cada una de las simulaciones (mayor número de frecuencias).

3.2.1 Geometría bajo estudio

El primer paso para realizar esta simulación será por tanto la definición de la barrera de sonido basada en estructuras periódicas descrita en el apartado anterior. Por tanto, en Matlab se escribirá el código que defina cada uno de los centros de los dispersores para el parámetro de red y el facto de llenado descritos.

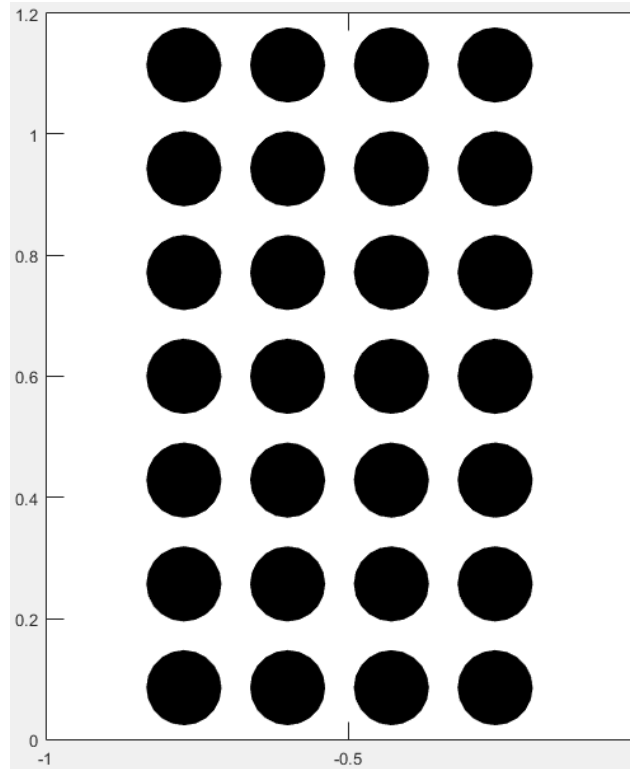


Figura 3.5. Barrera de sonido bajo estudio

Además de la propia barrera, dentro del código se crean repeticiones de la misma barrera hacia arriba y hacia abajo, de esta manera el cálculo se mostrará sólo para la barrera que se muestra en la Figura 3.5, pero el algoritmo realizará los cálculos como si la barrera se repitiera, de esta forma se consigue cierta condición de periodicidad de la barrera.

3.2.2 Número de veces que se tendrán en cuenta los campos dispersados (MS)

En la definición de la teoría de múltiple scattering se describía que será necesario establecer cuántas veces se tiene en cuenta la interacción entre los campos dispersos provocados por los obstáculos. Por tanto, inicialmente se fijará el número de frecuencias a simular (que se explicará en el siguiente apartado) como un parámetro que no tendrá relevancia en el resultado.

Se modificará el código proporcionado por μ -diff con la estructura periódica ya añadida y se hará que se realice la simulación teniendo en cuenta de 1 a 8 campos dispersos tenidos en cuenta. Los resultados obtenidos son los siguientes:

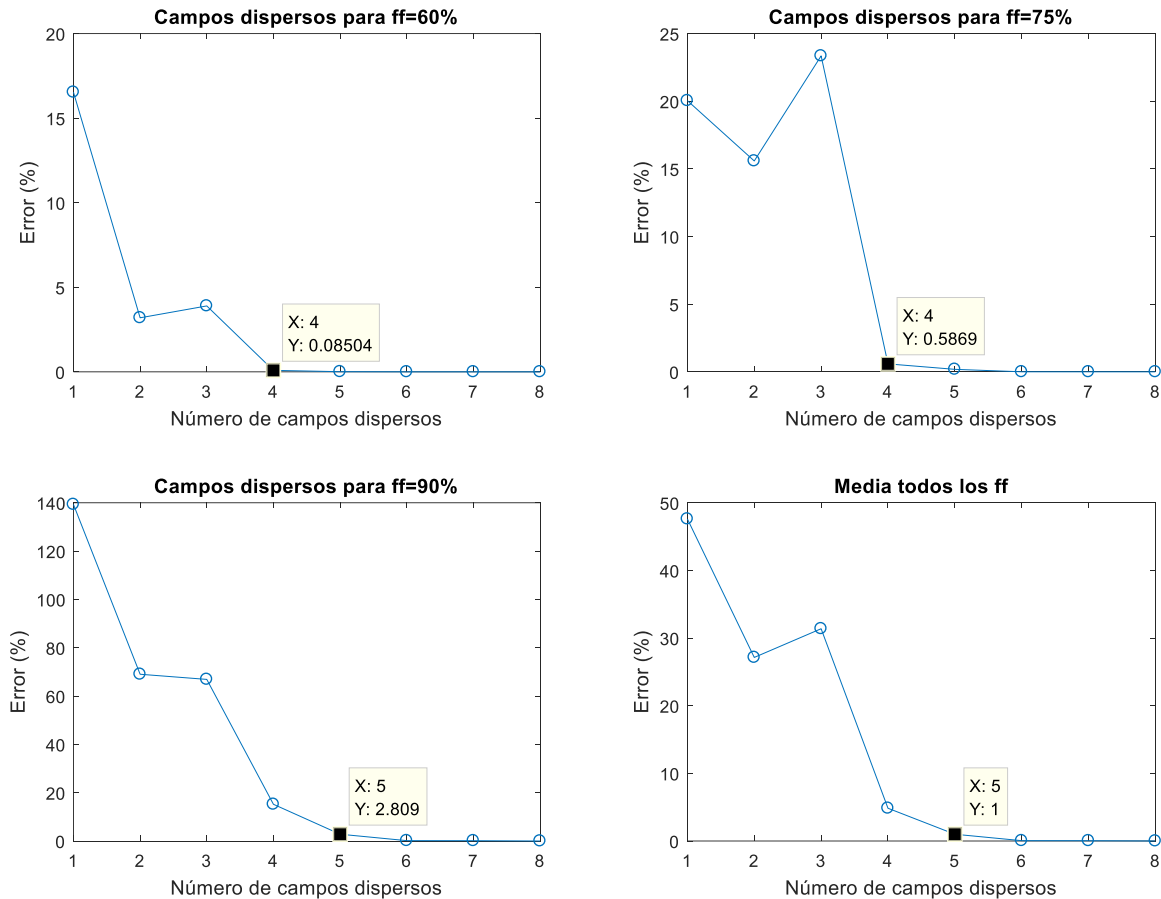


Figura 3.6. Número de campos dispersos dependiendo del ff (MS)

Como se puede ver en la Figura 3.6, los puntos destacables de cada una de las simulaciones son los siguientes:

- Para $ff=60\%$, teniendo en cuenta 4 campos dispersos, el error es prácticamente nulo.
- Para $ff=75\%$, igual que en el caso anterior, a partir de 4 campos dispersos el error es nulo.
- Para $ff=90\%$, la simulación empieza a tener resultados que se pueden considerar con suficiente exactitud a partir de 5 campos dispersos.

Por tanto, en media, la forma de conseguir unos buenos resultados en la simulación será establecer los campos dispersos tenidos en cuenta a la hora de realizar el cálculo en 5. Con este parámetro establecido, se procederá a ver cuántas frecuencias serán necesarias simular para obtener buenos resultados sin tener un coste computacional elevado.

3.2.3 Número de frecuencias que se van a simular (MS)

Una vez establecidos cuántos campos dispersos se tendrán en cuenta a la hora de realizar las simulaciones, el siguiente paso será establecer cuántas frecuencias se calcularán.

Debido a las características del problema, aislamiento proporcionado por una barrera acústica, se seguirá la normativa y se realizarán todos los cálculos por bandas de frecuencias de tercios de octava entre 100 Hz y 5000 Hz y se distribuirán entre 1 y 10 frecuencias de forma logarítmica para cada frecuencia central de las bandas de tercio de octava (100 Hz, 125 Hz, 160 Hz, 200 Hz, 250 Hz, 315 Hz, 400 Hz, 500 Hz, 630 Hz, 800 Hz, 1000 Hz, 1250 Hz, 1600 Hz, 2000 Hz, 2500 Hz, 3150 Hz, 4000 Hz y 5000 Hz).

Una vez calculado el vector de frecuencias se calculará el campo de presión sonora (Figuras 3.7-3.10) en la zona de cálculo seleccionada, y con eso se obtendrá el IL global para cada vector de frecuencias antes calculado. La precisión se calculará con respecto al caso de 10 frecuencias por cada frecuencia central de banda de tercio de octava.

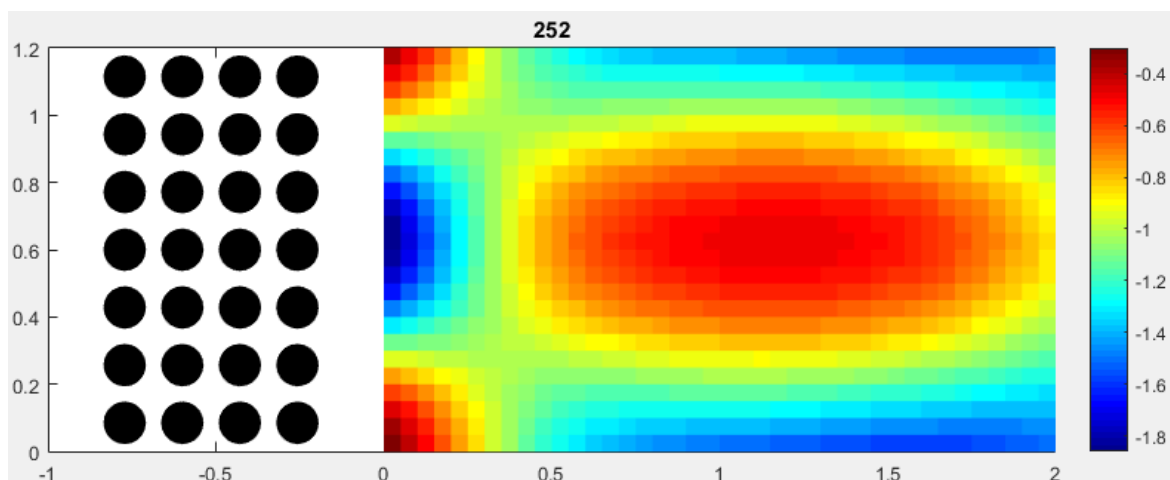


Figura 3.7. Campo de presión para 252 Hz (MS)

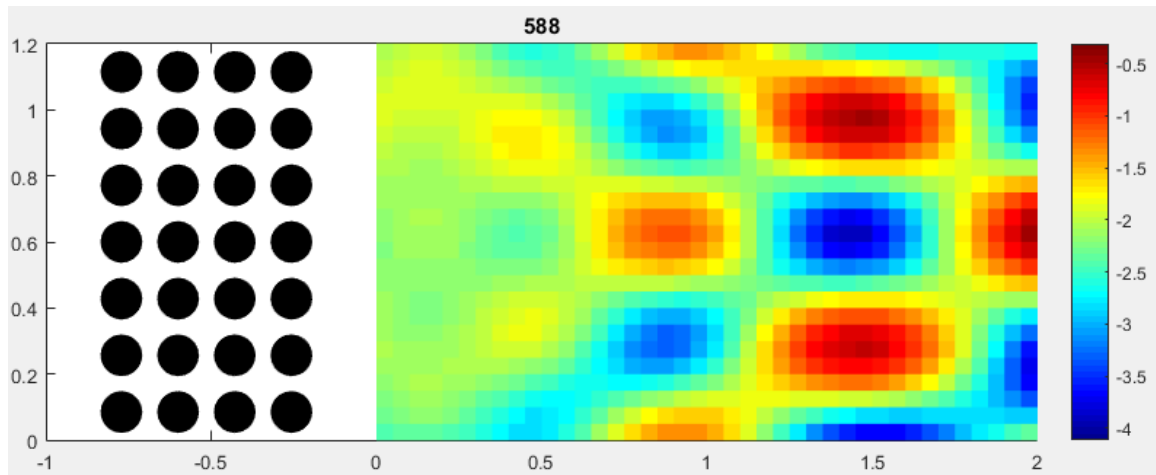


Figura 3.8. Campo de presión para 588 Hz (MS)

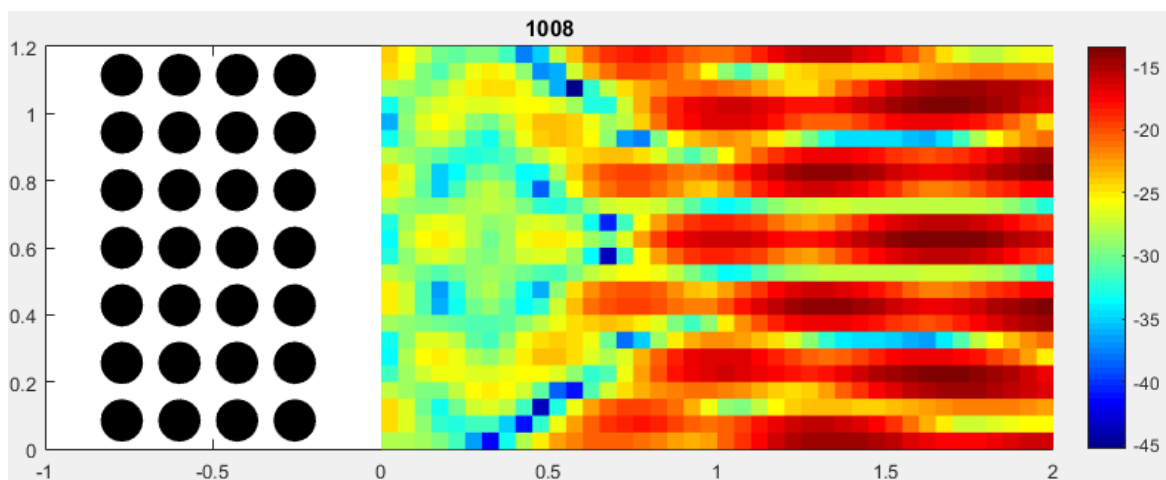


Figura 3.9. Campo de presión para 1000 Hz (MS)

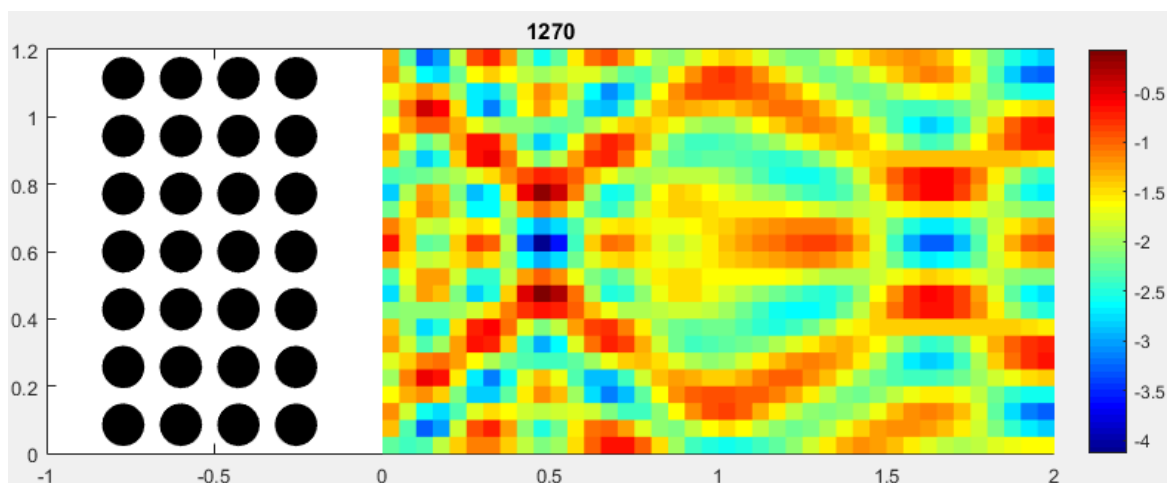


Figura 3.10. Campo de presión para 1270 Hz (MS)

Tras realizar las simulaciones, los resultados obtenidos son los siguientes:

- Para $ff=60\%$ (Figura 3.11): a partir de 3 frecuencias por cada frecuencia central de banda de tercio de octava (tercer punto de la Figura 3.11), la precisión obtenida ya se puede considerar correcta y aumentar las frecuencias para tener en cuenta conlleva un aumento muy notable del coste computacional, factor principal a evitar en este trabajo.

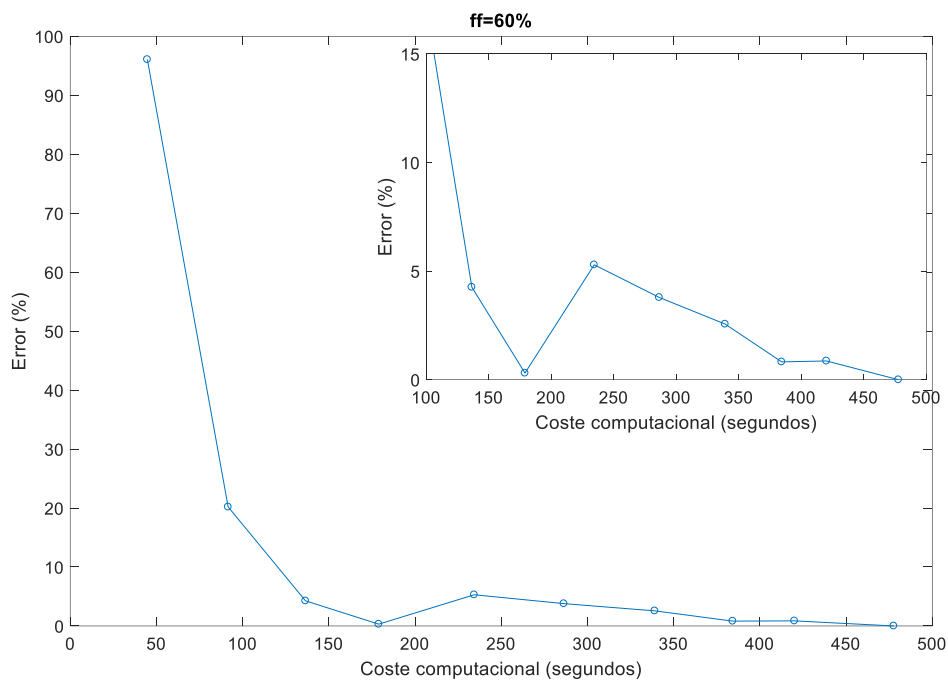


Figura 3.11. Error para $ff=60\%$ (MS)

- Para $ff=75\%$ (Figura 3.12): a partir de 4 frecuencias por cada frecuencia central de banda de tercio de octava (cuarto punto en la Figura 3.12), la precisión conseguida es menor del 5%, valor más que aceptable y aumentar el número de frecuencias para tener en cuenta aumenta de manera innecesaria el coste computacional.

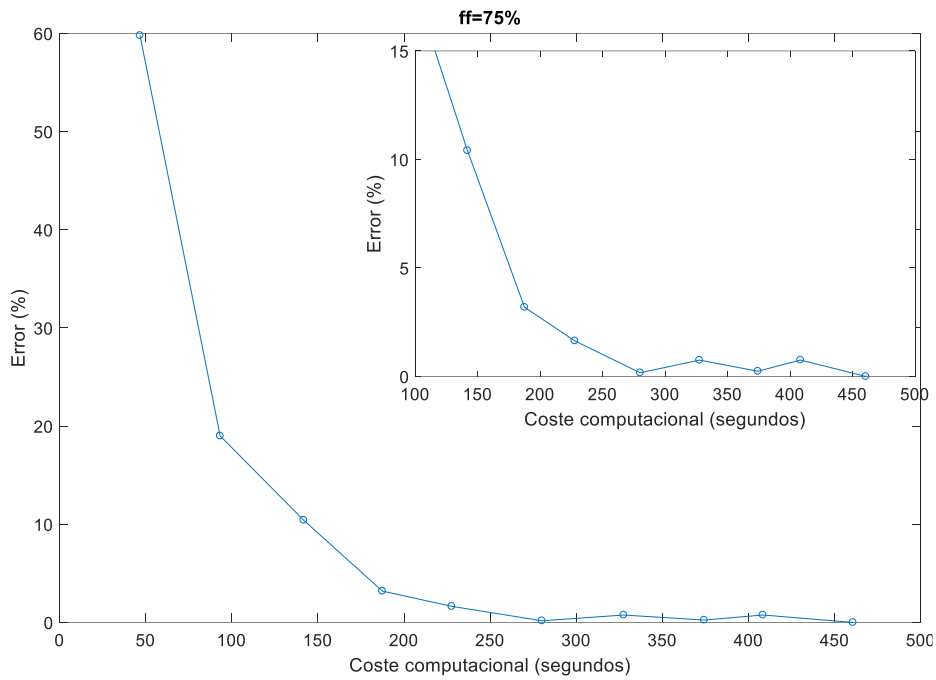


Figura 3.12. Error para ff=75% (MS)

- Para ff=90% (Figura 3.13): a partir 4 frecuencias por cada tercio de banda de octava, el error está por debajo del 5% y aumentar el número de frecuencias a calcular conlleva un aumento innecesario del coste computacional.

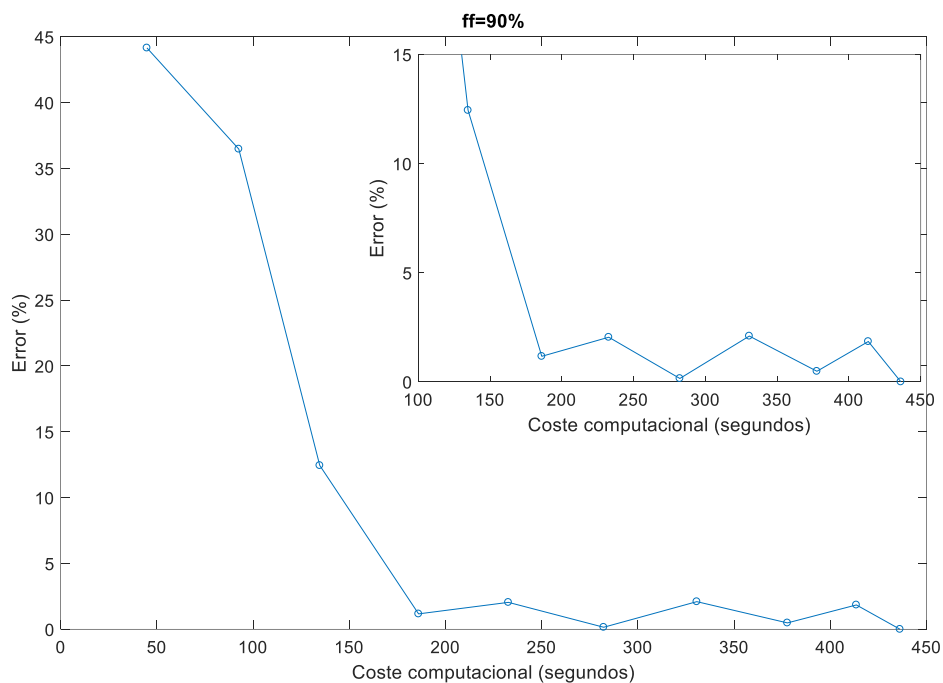


Figura 3.13. Error para ff=90% (MS)

Por tanto, se considerará como un punto que proporciona un equilibrio entre error y coste computacional considerar 4 frecuencias por cada frecuencia central de banda de octava.

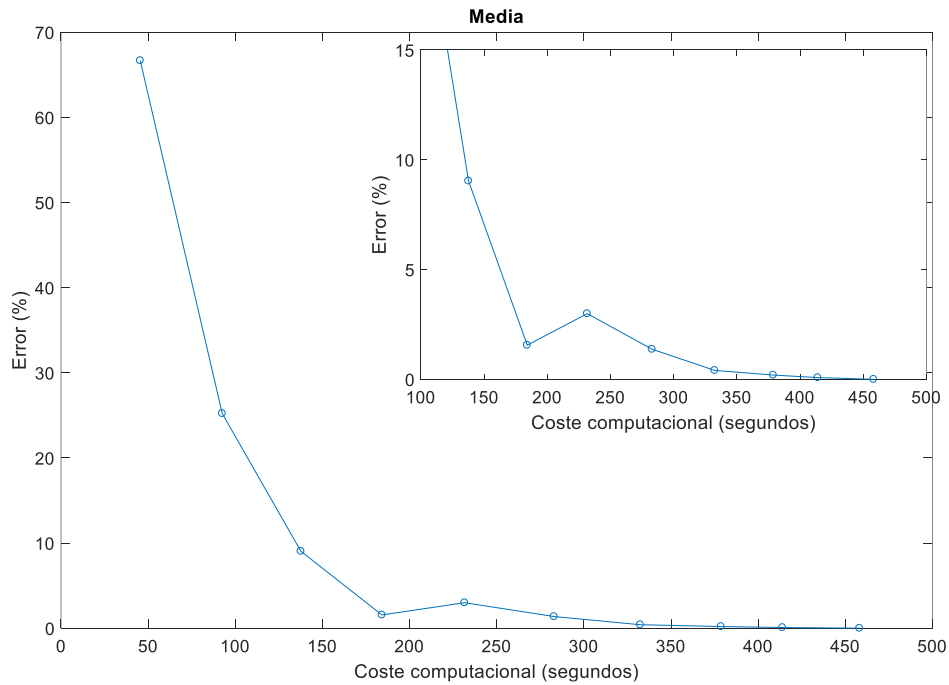


Figura 3.14. Media de los errores (MS)

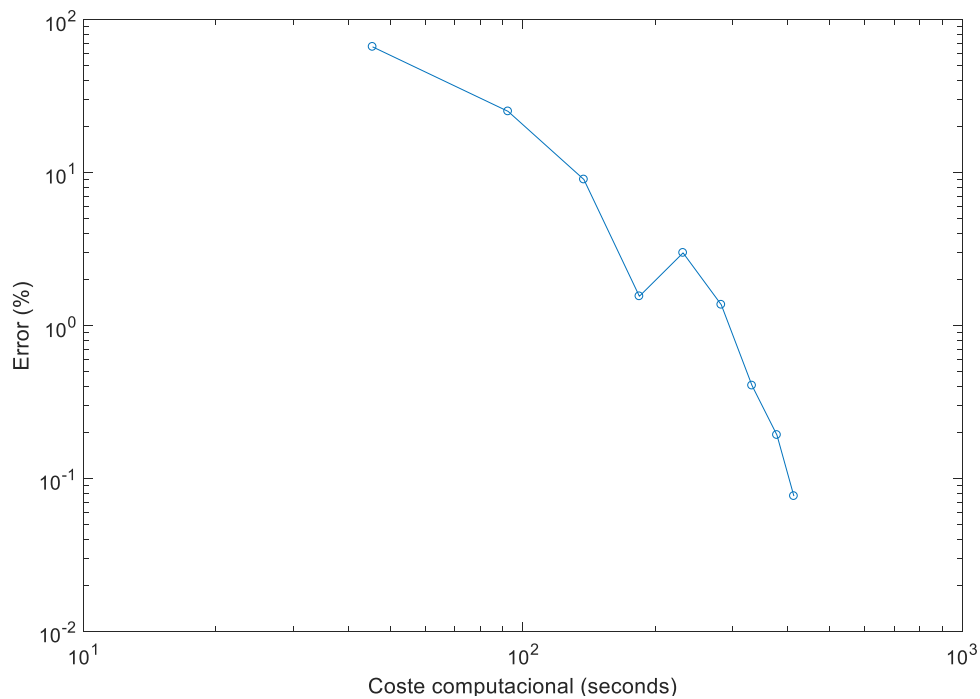


Figura 3.15. Media de los errores con los ejes logarítmicos (MS)

3.2.4 Espectro de la barrera con MS

Tras establecer el número de campos dispersados y el número de frecuencias por frecuencia central en bandas de tercio de octava, se realiza una simulación para obtener el Insertion Loss de la barrera para los tres radios de los dispersores. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- Para $ff=60\%$, el espectro del Insertion Loss obtenido se muestra en la Figura 3.16. Se puede comprobar que el primer band gap se encuentra en 1000 Hz y se puede apreciar que en torno a los 2000 Hz estará el segundo band gap. El coste computacional de esta simulación fue de 195 segundos. El valor medio de Insertion Loss es de 3 dB.

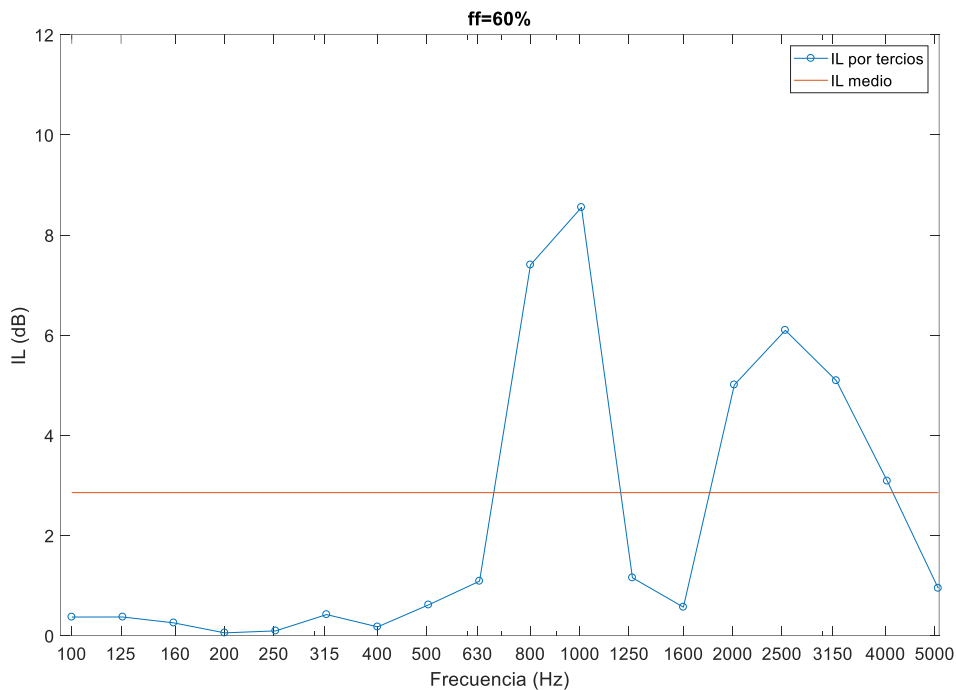


Figura 3.16. Espectro IL para $ff=60\%$ (MS)

- Para $ff=75\%$, el espectro del IL obtenido (Figura 3.17) es muy similar al caso de $ff=60\%$. Las diferencias destacables aparecen a partir del primer band gap. Además de ello, el valor medio del IL es mayor, de unos 4 dB. El coste computacional en este caso fue de 197 segundos, similar al caso anterior.

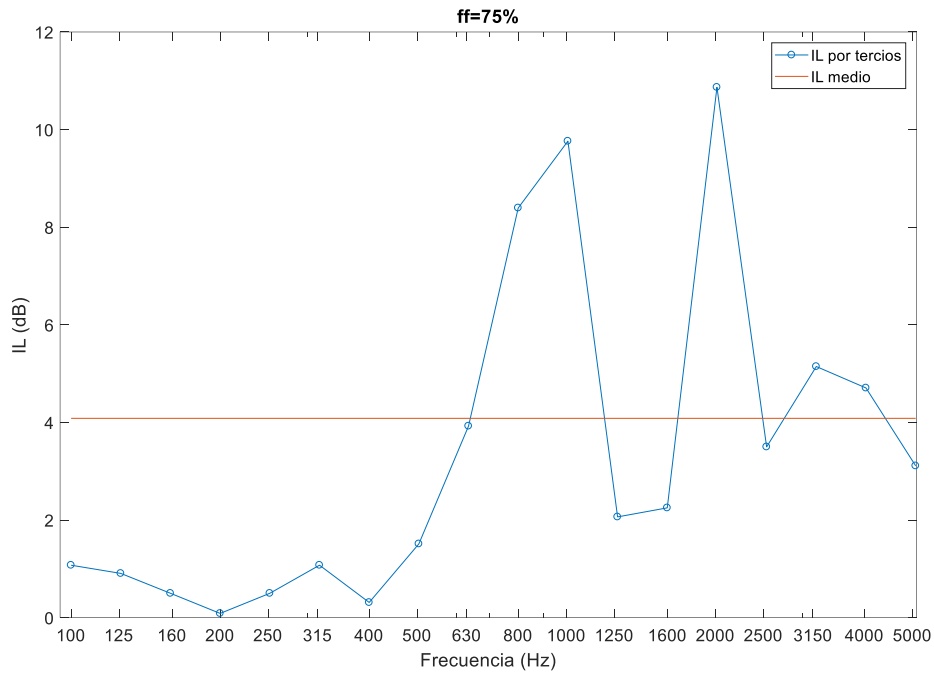


Figura 3.17. Espectro IL para $ff=75\%$ (MS)

- Para un $ff=90\%$, la forma del espectro del IL obtenido (Figura 3.18), es similar a los otros casos de ff . El IL medio es de 5.3 dB. El coste computacional en este caso fue de 195 segundos.

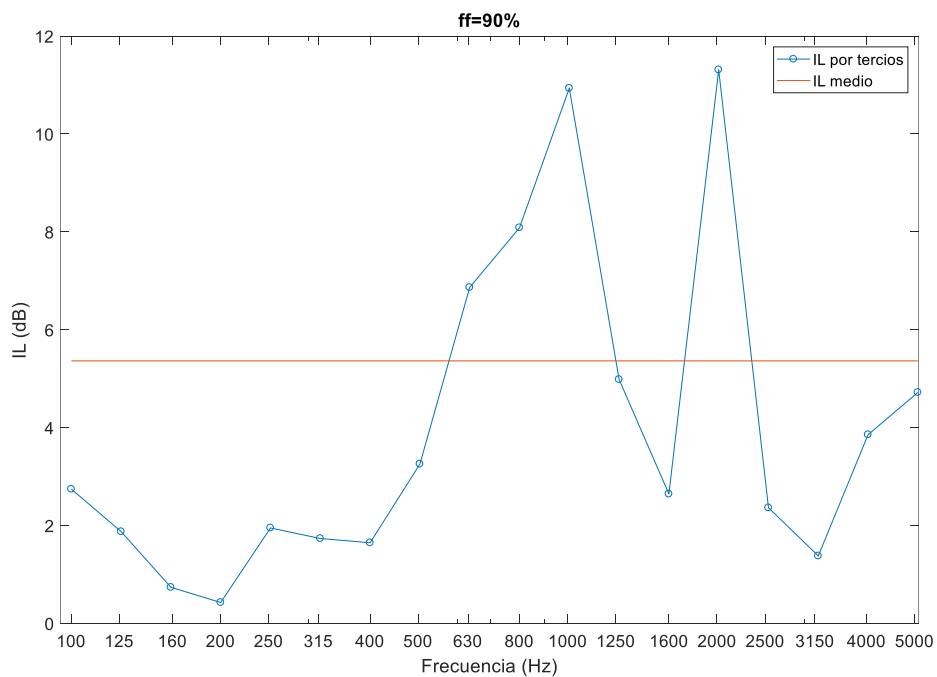


Figura 3.18. Espectro IL para $ff=90\%$ (MS)

3.3 Simulación con FEM

Como se introdujo en el apartado 2.4 del Capítulo 2 [[“2.4 Método de Elementos Finitos \(FEM\)”](#)], uno de los principales parámetros a determinar para este método de simulación es el tamaño de los elementos en los que se subdividen la zona de estudio. El software utilizado para realizar este método de simulación será el COMSOL Multiphysics, utilizando el módulo de acústica.

La preparación de la simulación con este software sigue los siguientes pasos:

- Pre-procesado: este método de simulación es muy interesante plantearse si existen simetrías en el modelo que se va a simular debido a que puede ahorrarse mucho coste computacional. Además, hay que decidir que dimensión espacial tiene el problema (1D, 2D o 3D). En definitiva, en este punto se plantea el modelo que se va a simular.
- Procesado: en este punto se deciden la física que se va a estudiar, el tipo de estudio, el tamaño de los elementos y las frecuencias que se van a simular.
- Post-procesado: una vez realizadas las simulaciones, se decide la forma más adecuada de representar los resultados, de forma que la interpretación sea sencilla. Se pueden utilizar las funciones que el software COMSOL contiene o exportar los resultados y representarlos con ayuda de otros softwares, como pueden ser Microsoft Excel o Matlab.

3.3.1 Pre-procesado

En este paso se define el modelo que se va a simular. Se construirá con los elementos proporcionados por el propio software COMSOL la geometría descrita en el apartado 1 de este mismo capítulo [3.1 Cristal de sonido bajo estudio]

En este caso, no se puede considerar ninguna simetría, debido a que el campo de presión acústica tras la barrera de cristales variará dependiendo de la posición en la que se mida. Además de esto, el problema se plantea en 2D.



Figura 3.19. Modelo para $ff=60\%$ (FEM)



Figura 3.20. Modelo para $ff=75\%$ (FEM)



Figura 3.21. Modelo para $ff=90\%$ (FEM)

En las Figuras 3.19-3.21 se puede observar como el único cambio es el radio de los dispersores que varía dependiendo del ff que se tenga en cada caso. Además del propio modelo, para poder realizar correctamente las medidas del campo de presión acústica, se construye una malla de puntos (Figura 3.22), espaciados 10 cm entre ellos, por todo el campo tras la barrera. Los puntos servirán como sondas

en las que medir el campo de presión acústica, que será necesario en el punto del Post-Procesado.

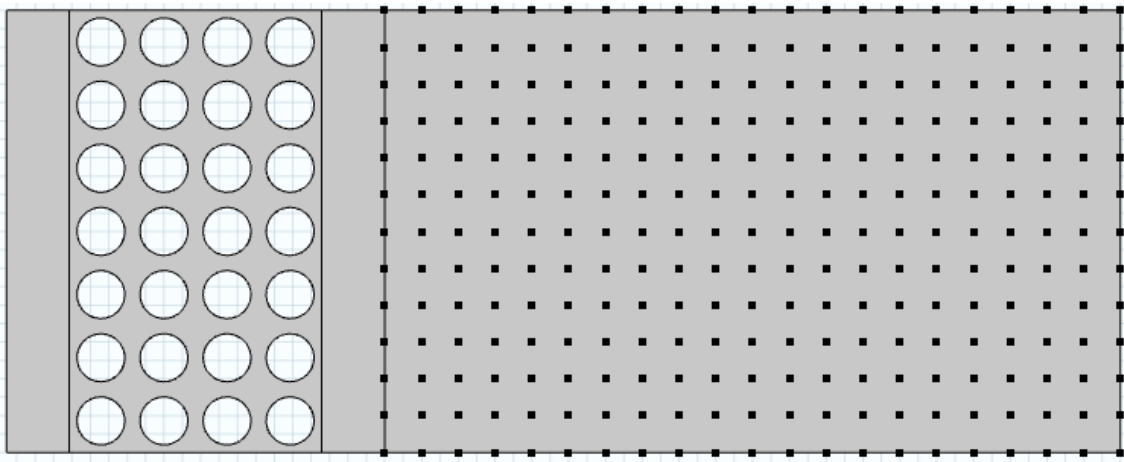


Figura 3.22. Modelo con malla de puntos (FEM)

3.3.2 Procesado

Una vez definido el modelo que se va a simular, el siguiente paso es elegir el módulo de simulación que se va a utilizar, la física a resolver y el estudio del modelo que se estudia.

Al estar frente a un problema de la acústica, se elegirá el módulo de acústica. Dentro del módulo de acústica que se va a utilizar en este trabajo, existen diferentes tipos de físicas que se pueden resolver (*Acústica de presión, interacción estructura-acústica, aeroacústica...*). En este trabajo se utilizará la física de *Acústica de presión*, y dentro de ésta, existen los estudios de *frecuencia propia, dominio de la frecuencia, modo de dominio de la frecuencia y análisis modal*¹. En este caso se utilizará el estudio *dominio de la frecuencia*, en el que existe una excitación y simula la interacción de esta excitación con el modelo construido.

El siguiente paso por realizar será elegir el tamaño de los elementos en los que se subdivide el modelo. Este paso será uno de los estudios que se lleven a cabo para definir un tamaño de elementos que permita conseguir un equilibrio entre precisión y coste computacional.

¹ Para más información sobre los módulos, físicas y tipos de estudio, acudir al manual de COMSOL [20].

3.3.2.1 Tamaño de los elementos (FEM)

Dentro COMSOL existen varias formas de definir el tamaño de los elementos de forma predefinida (Figura 3.23), pero en este caso se llevará a cabo un pequeño estudio para elegir el tamaño.

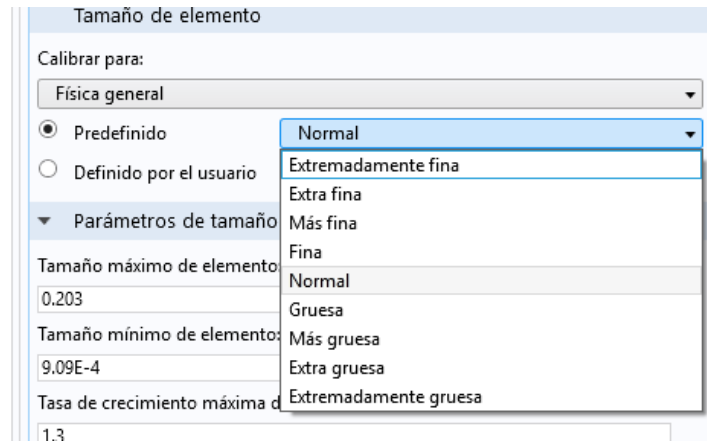


Figura 3.23. Tamaños predefinidos COMSOL

Según la guía de usuario de COMSOL [20], será necesario un tamaño mínimo de elementos relacionado con las frecuencias más altas que se quieren simular. La clave está en elegir un tamaño mínimo de elemento relacionado con la longitud de onda de la frecuencia máxima de trabajo. Varios estudios hablan sobre utilizar 6 u 8 veces la longitud de onda de la frecuencia máxima de trabajo. En este trabajo se elegirán 8 veces la longitud de onda, por lo que el tamaño de los elementos vendrá dado por:

$$\text{tamaño elemento} = \frac{c}{f_{\text{máxima}} * 8} \quad (3.3)$$

Donde c es la velocidad del sonido en el aire (343 m/s) y $f_{\text{máxima}}$ la frecuencia de trabajo máxima elegida.

Como en el caso de Múltiple Scattering, las frecuencias que se simularán en este caso son una distribución logarítmica de 1 a 10 frecuencias por cada frecuencia central de las bandas de tercio de octava. Inicialmente se establecerán 3 frecuencias por cada frecuencia central de tercio de banda de octava y en el siguiente apartado se realizará el estudio exacto de cuántas proporcionarán un equilibrio entre coste computacional y precisión. Por tanto, se van a considerar 3 frecuencias máximas de trabajo, 3000 Hz, 4000 Hz y 5000 Hz y los tamaños de elementos correspondientes a éstas son 0.0143 m, 0.0107 m y 0.0086 m.

Se realizaron las simulaciones de los tres radios diferentes, con 3 frecuencias por cada frecuencia central de las bandas de tercio de octava y con los 3 tamaños de elementos diferentes. Tras esto, se realizó la media de los errores para los 3 radios de dispersores diferentes y se obtuvo la siguiente gráfica (Figura 3.24):

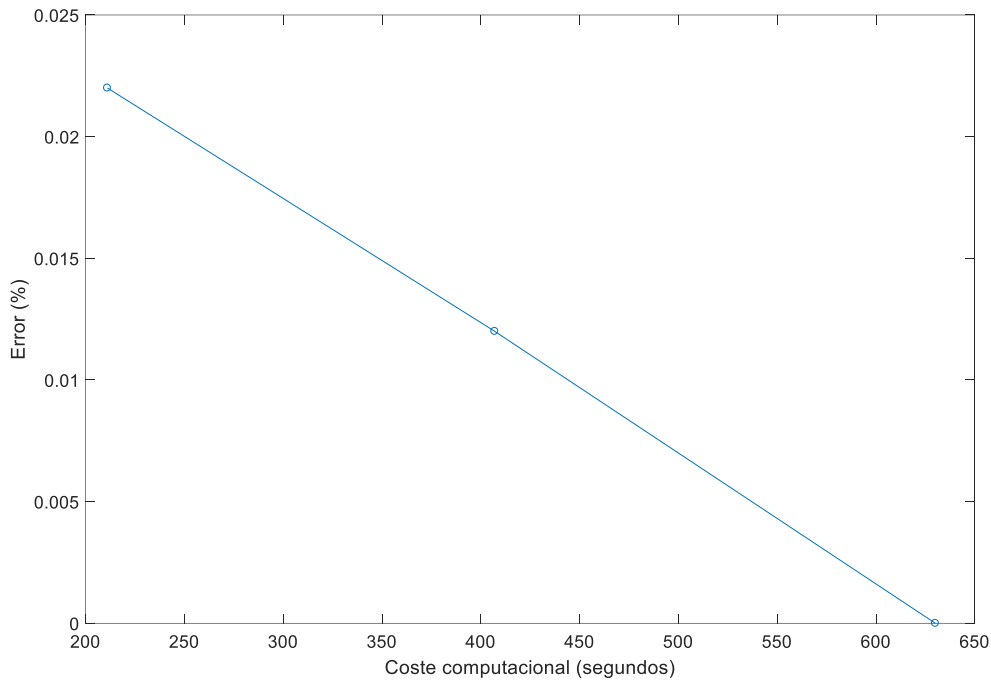


Figura 3.24. Error según el tamaño de los elementos (FEM)

El primer punto representa el tamaño de elemento correspondiente a 3000 Hz, el segundo a 4000 Hz y el tercero a 5000 Hz. Se puede observar que el error que existe entre los tres puntos es insignificante, pero que el coste computacional se eleva a medida que el elemento es mayor. Por tanto, se puede concluir que elegir entre el tamaño de 3000 Hz o 5000 Hz no conlleva cambios considerables en la precisión de los resultados, pero sí aumenta de manera significativa el coste computacional, por lo que se elegirá el tamaño de los elementos relacionado con 3000 Hz, 0.0143 m.

3.3.2.2 Número de frecuencias a simular (FEM)

Al igual que fue necesario para Múltiple Scattering [[“3.2.3 Número de frecuencias que se van a simular \(MS\)”](#)], será necesario definir el vector de frecuencias que se va a simular. Se llevará a cabo el mismo estudio realizado que para Múltiple Scattering, variando una distribución logarítmica de 1 a 10 frecuencias por cada frecuencia central de bandas de tercio de octava y ya con el tamaño de los elementos fijado en 0.0143 m.

Se simula con COMSOL los vectores de frecuencias generados para los 3 radios de dispersores diferentes, obteniendo el campo de presión acústica (Figuras 3.25-3.27) y se calcula el IL exportando los datos obtenidos a Matlab. COMSOL ofrece información de cada una de las simulaciones, y dentro de esa información se encuentra el coste computacional de cada una de las simulaciones. Con Matlab se calcula la precisión de cada una de las simulaciones.

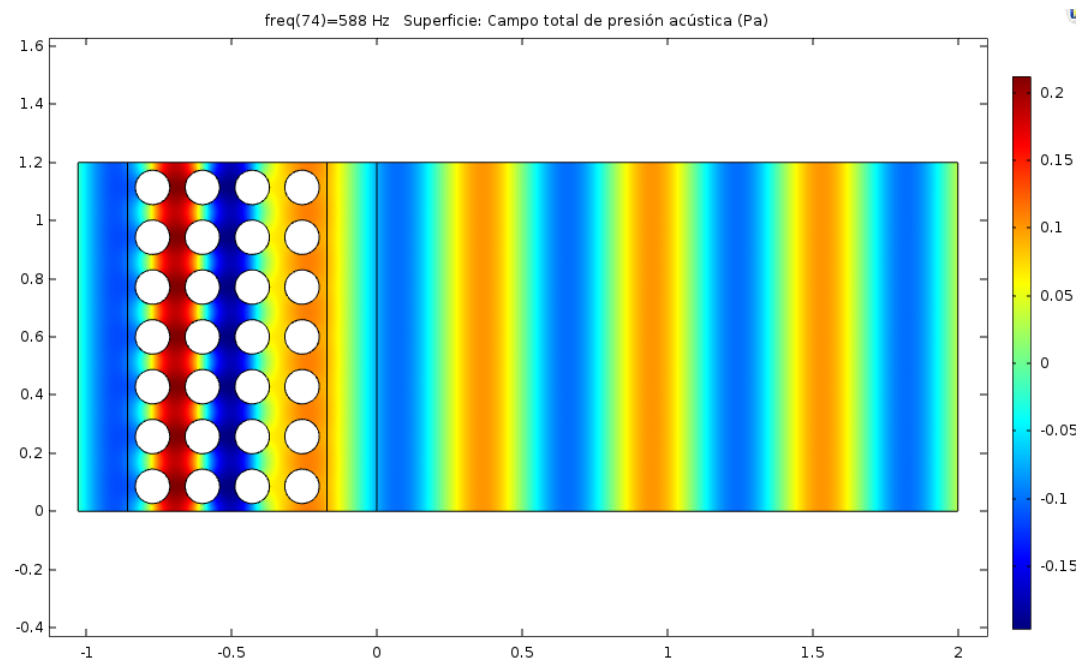


Figura 3.25. Campo de presión acústica para 588 Hz (FEM)

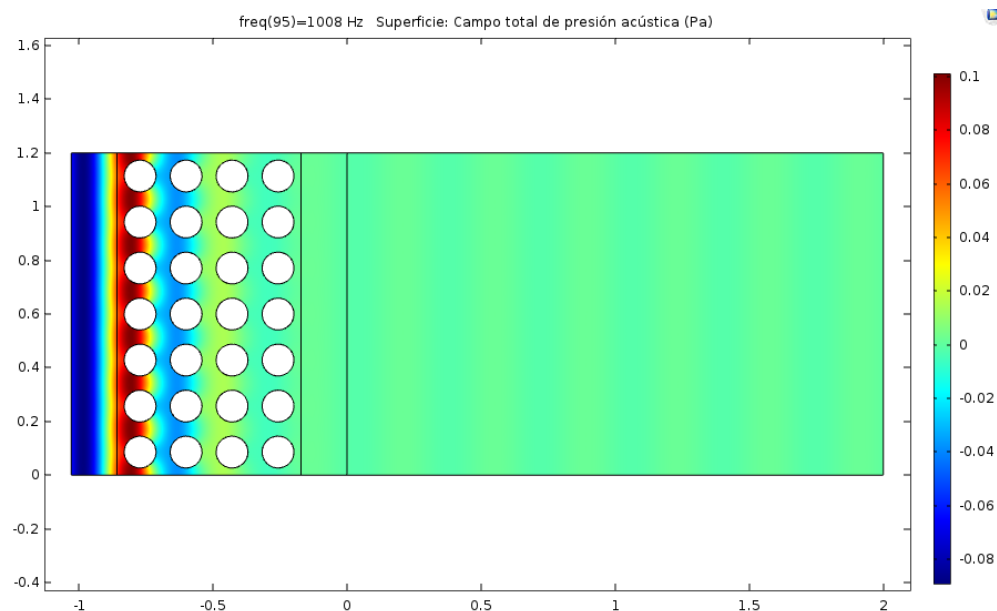


Figura 3.26. Campo de presión acústica para 1008 Hz (FEM)

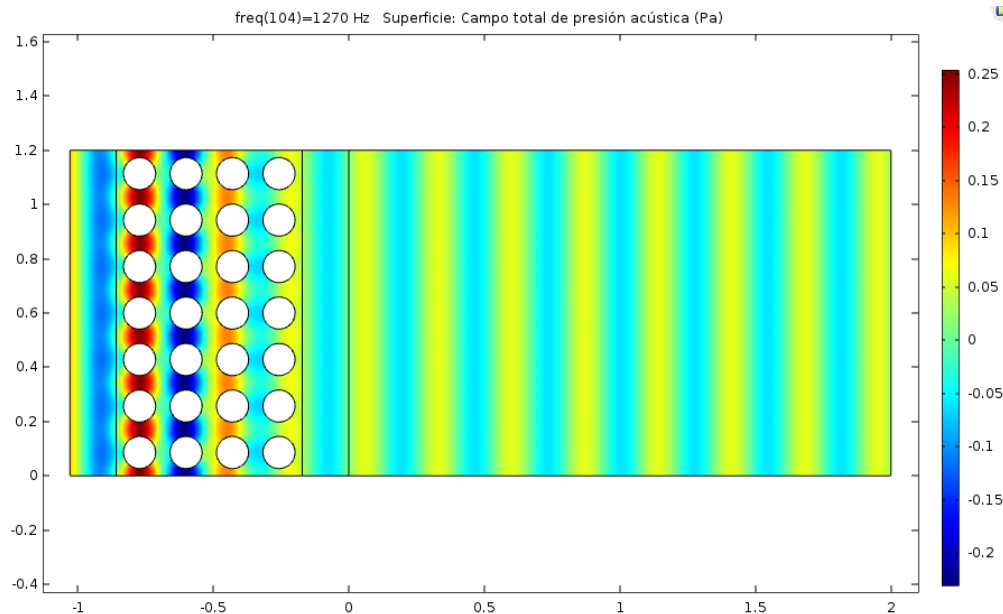


Figura 3.27. Campo de presión acústica para 1270 Hz (FEM)

Tras realizar las simulaciones, se obtienen los siguientes datos sobre el error:

- Para $ff=60\%$ (Figura 3.28), el primer punto donde se baja el error del 5% es en el tercero, 3 frecuencias por cada frecuencia central de banda de tercios de octava. A pesar de ello, se debe tener cuidado debido a que el siguiente punto supera esta barrera del 5%. El coste computacional en el tercer punto será de 220 segundos.

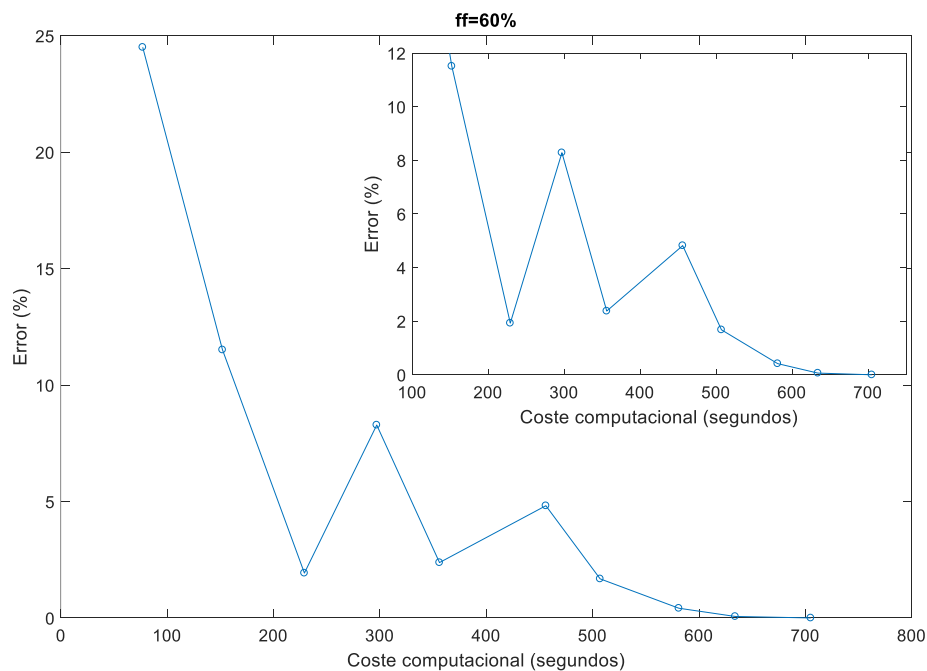


Figura 3.28. Error para $ff=60\%$ (FEM)

- Para $ff=75\%$ (Figura 3.29), el punto de estabilidad entre precisión y coste computacional se encuentra en el segundo punto, 2 frecuencias por cada frecuencia central de bandas de tercio de octava. A partir de ese punto, aumentar las frecuencias para tener en cuenta conlleva un aumento del coste computacional innecesario.

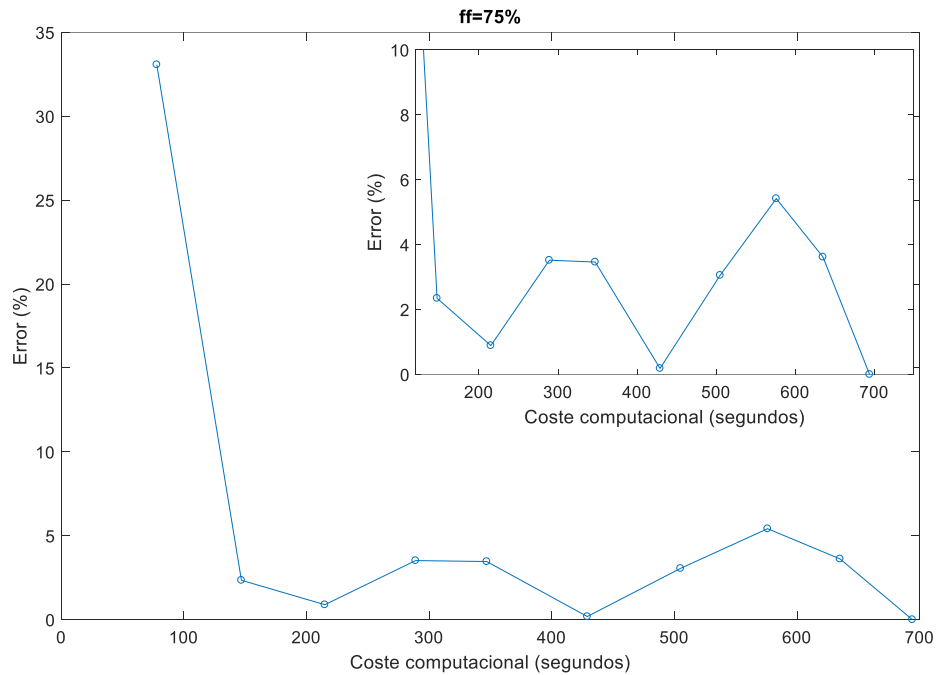


Figura 3.29. Error para $ff=75\%$ (FEM)

- Para $ff=90\%$ (Figura 3.30), el punto de equilibrio entre precisión y coste computacional se encuentra con un coste computacional muy bajo, en el segundo punto, 2 frecuencias por cada frecuencia central de banda de octava y un coste computacional de 130 segundos. A partir de ahí el coste computacional aumenta sin ser necesario debido a que ya se obtiene un error por debajo del 5%.

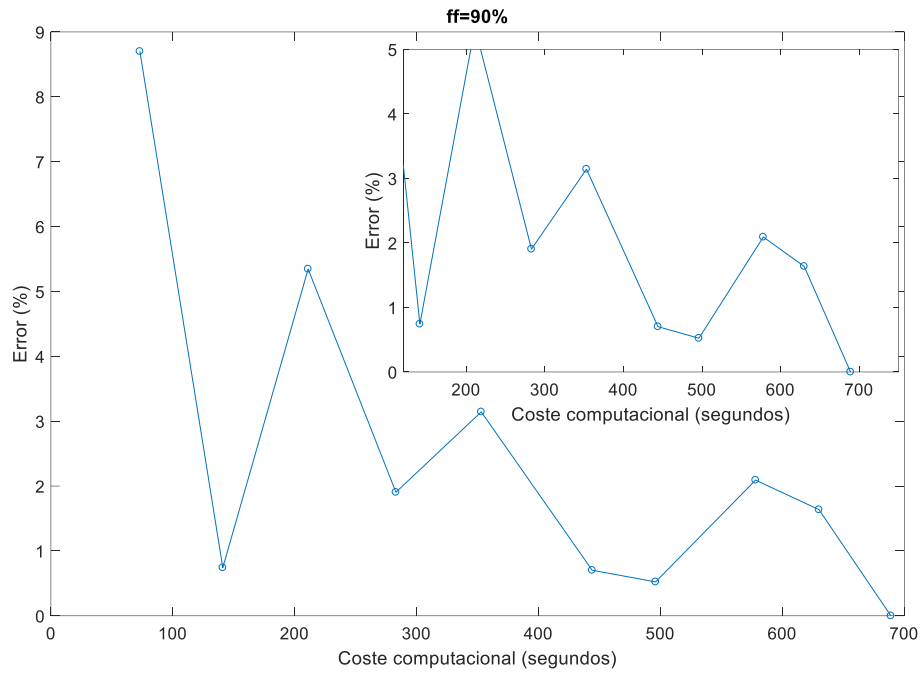


Figura 3.30. Error para ff=90% (FEM)

Por tanto, se considerará el punto de equilibrio entre coste computacional y precisión teniendo en cuenta 3 frecuencias por cada frecuencia central de la banda de tercios de octava.

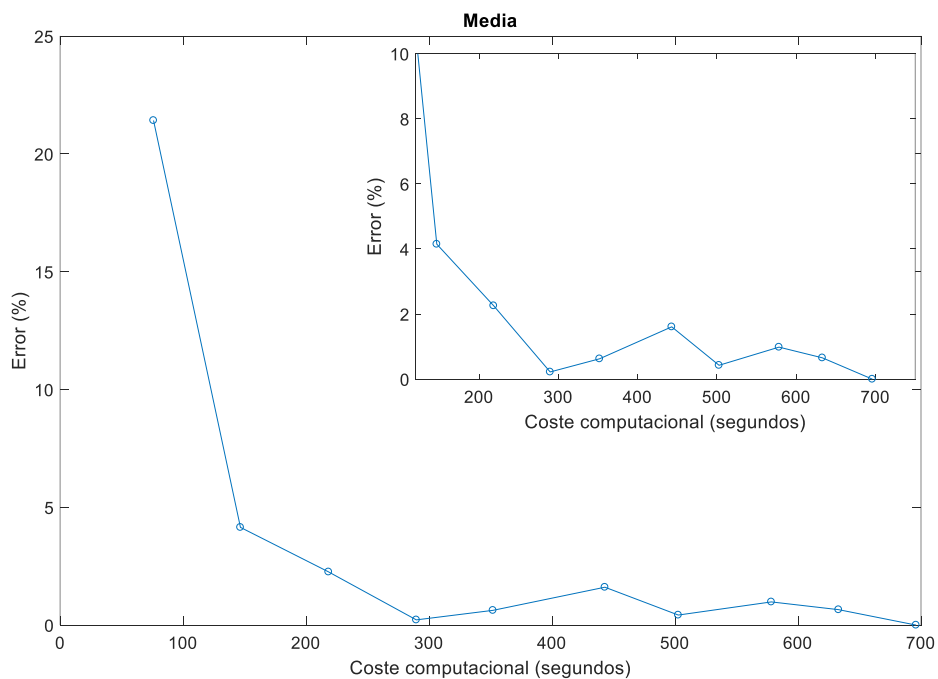


Figura 3.31. Media de error (FEM)

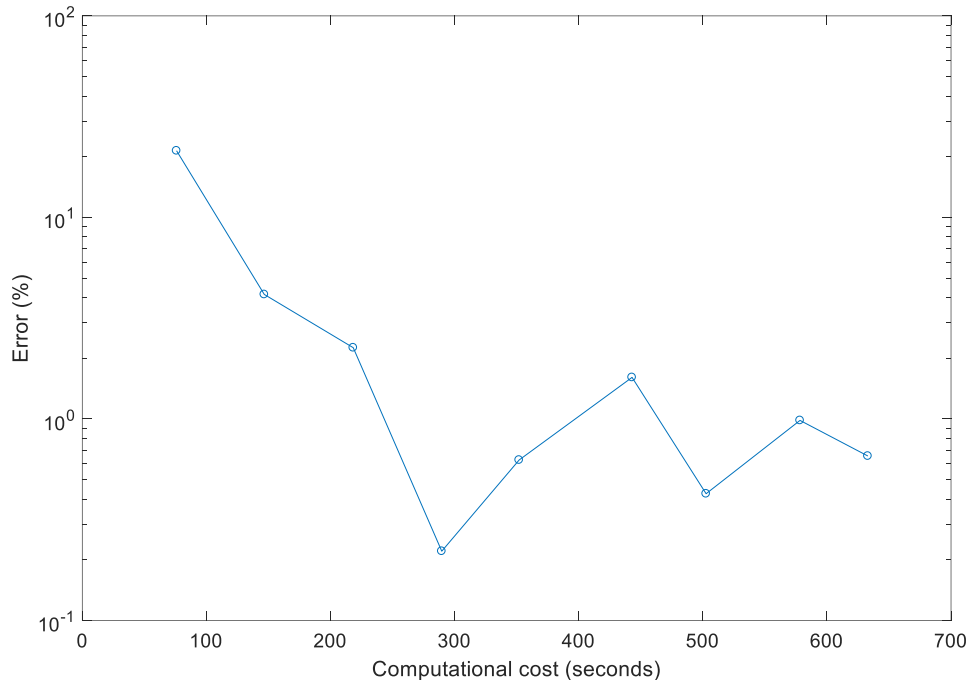


Figura 3.32. Media de error con eje Y logarítmico (FEM)

3.3.3 Post-procesado

Tras obtener la simulación que ofrece un equilibrio correcto entre coste computacional y precisión, se realizó el cálculo del IL para ese tamaño de elemento elegido y el número de frecuencias por cada frecuencia central de las bandas de tercio de octava.

Inicialmente se realizaron todos los cálculos con el modelo construido en COMSOL y se exportaron los datos para trabajar en su post-procesado y representación en Matlab. Los resultados obtenidos son los siguientes:

- Para $ff=60\%$ (Figura 3.33), se observa correctamente el primer band gap en 1000 Hz. En cuanto al segundo band gap se puede ver la influencia de no realizar la simulación con la suficiente resolución frecuencial (tamaño de elemento para la frecuencia máxima de 3000 Hz), pero para este trabajo esto no influye. El coste de computación de este cálculo fue de 215 segundos y se obtiene un IL medio de 5.4 dB.

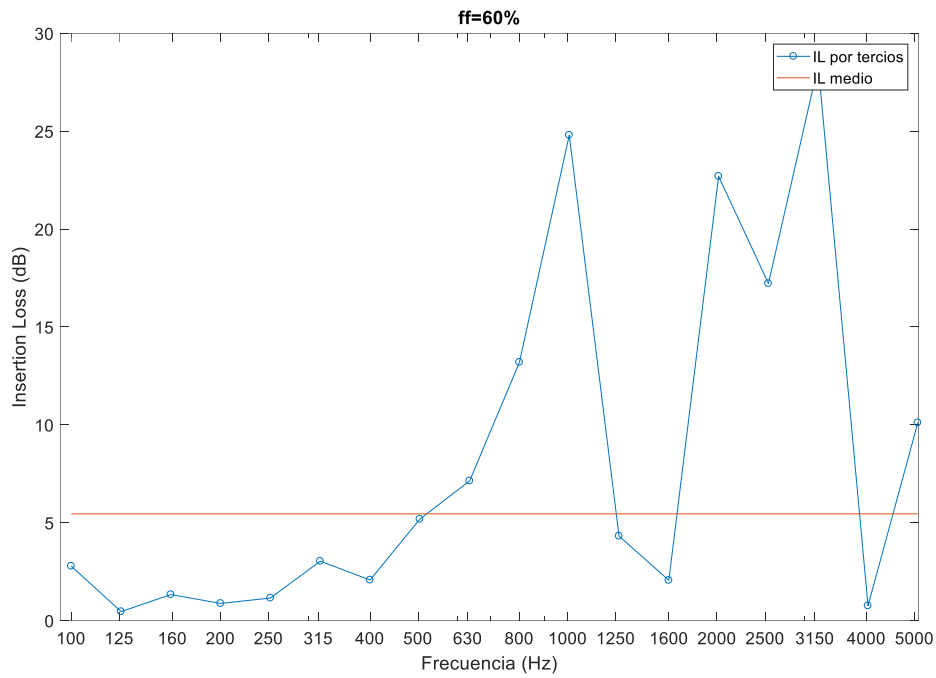


Figura 3.33. Espectro IL para $ff=60\%$ (FEM)

- Para $ff=75\%$ (Figura 3.34), se observa la misma distribución de los band gaps que para el $ff=60\%$, pero el valor de IL es mayor. El valor medio del IL es de 7 dB y el coste computacional de este cálculo fue de 230 segundos.

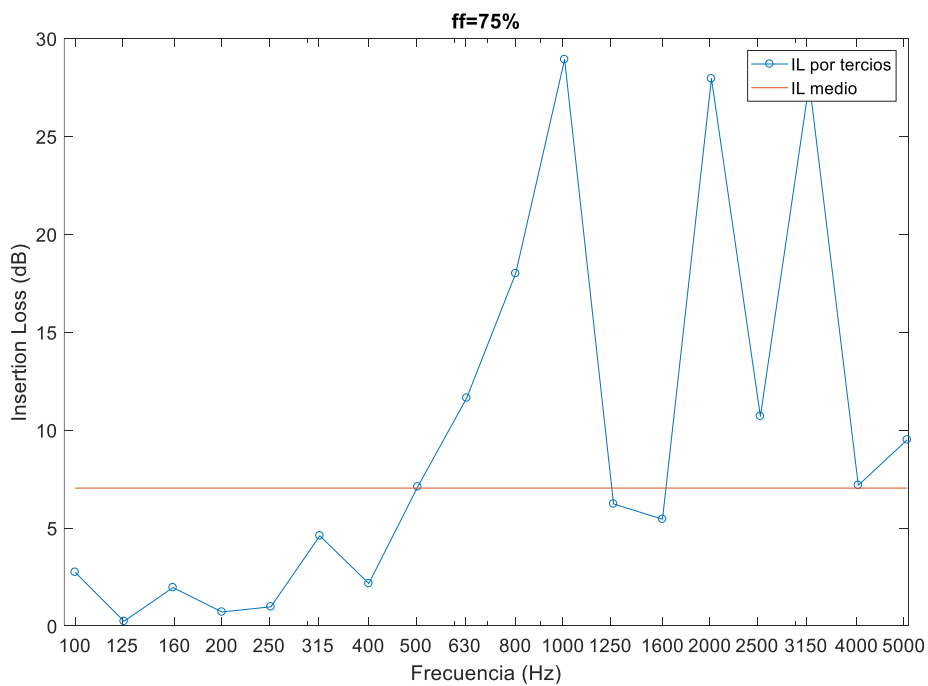


Figura 3.34. Espectro IL para $ff=75\%$ (FEM)

- Para $ff=90\%$ (Figura 3.35), se encuentra la misma distribución de band gaps y debido al mayor radio de los dispersores, el valor del IL es también mayor. El coste computacional de este cálculo fue de 210 segundos y el IL medio es de 8.2 dB.

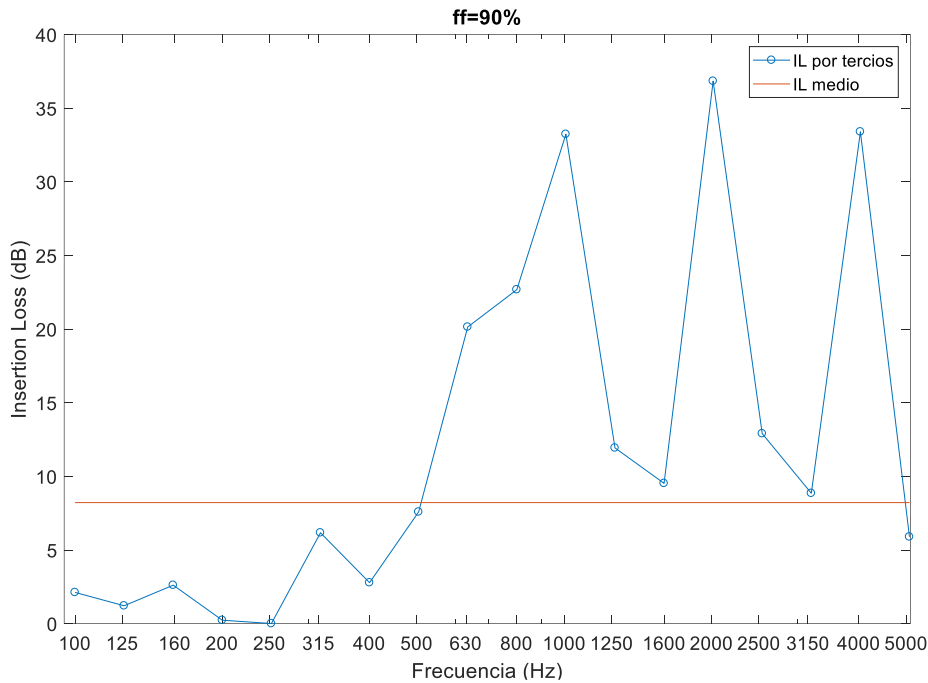


Figura 3.35. Espectro IL para $ff=90\%$ (FEM)

3.4 Simulación con FDTD

En el apartado 2.5 del Capítulo 2 [[“2.5 Método de Diferencias finitas en el dominio del tiempo \(FDTD\)”](#)] se realizó una introducción a la teoría de este método. Para realizar la simulación, se utilizará el software *MATLAB R2017a*.

Para realizar la simulación siguiendo este método hay que seguir unos pasos. El primero de todos será declarar todos los parámetros fundamentales que van a intervenir en la simulación, la zona de cálculo y las matrices de presión y velocidad (explicado en el apartado 2.5 del Capítulo 2).

En cuanto a los parámetros principales es referido al *parámetro de red*, a , calculado en el apartado 1.1 de este capítulo, de la estructura periódica que se va a simular y las constantes del medio (densidad del aire ($\rho=1.21 \text{ kg/m}^3$), velocidad del sonido ($c=343 \text{ m/s}$)). Además, en este punto se define también el paso espacial, que será el parámetro que variará para obtener diferentes simulaciones, por lo que se explicará más adelante.

Una vez definidos los parámetros básicos se define la zona de cálculo y la barrera acústica. En la siguiente figura (Figura 3.36) se puede observar todo definido:

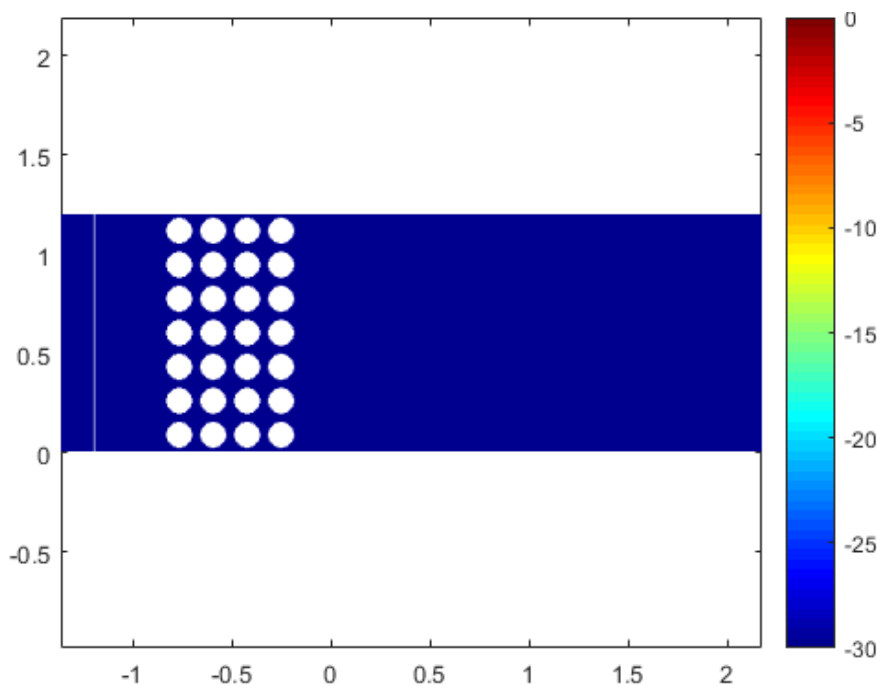


Figura 3.36. Zona del cálculo (FDTD)

Tras esto, se definen las matrices de presión y velocidad que se usarán para realizar la simulación, y una vez definidas, se realiza la simulación. El punto final de la simulación será calcular el IL de la barrera, con el que se obtendrán todos los valores para calcular la precisión de la simulación.

3.4.1 Paso espacial

Como se ha mencionado antes, en este método de simulación el parámetro a variar será el paso espacial. La forma de definir este parámetro se realiza igual que en FEM, hay que decidir cuántos elementos establecen por longitud de onda y, por tanto, hay que establecer una frecuencia máxima de trabajo. Según la norma UNE-EN 1793 Parte 3 [23], la frecuencia máxima del espectro del ruido de tráfico es 5000 Hz, por tanto, se utilizará esa frecuencia.

Se establecen unos factores modificadores del paso espacial, una distribución logarítmica de diez valores entre 0.3 y 1, que se traducen en un espacio espacial entre 0.0057 m y 0.0017 m. Estos valores significan entre 15 y 50 nodos por longitud de onda. El vector que se utilizará es el siguiente (Tabla 3.2):

Punto en las gráficas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º de nodos por λ	10	12	13	14	15	17	20	23	28	35

Tabla 3.2. Vector de elementos por longitud de onda (FDTD)

Una vez establecidos los nodos por longitud de onda a calcular, se realizan las simulaciones y se obtienen el *IL* de la barrera acústica. Dependiendo de cuántos elementos se tienen en cuenta por longitud de onda, los resultados obtenidos dependiendo del *ff* son los siguientes:

- Para $ff=60\%$ (Figura 3.37), se observa que a partir del octavo punto, 23 nodos por longitud de onda, la precisión de los resultados ya es lo suficientemente alta como para considerarse buenos. Aumentar el número de elementos por longitud de onda conlleva un aumento notable en el coste computacional sin cambiar mucho la precisión de los resultados.

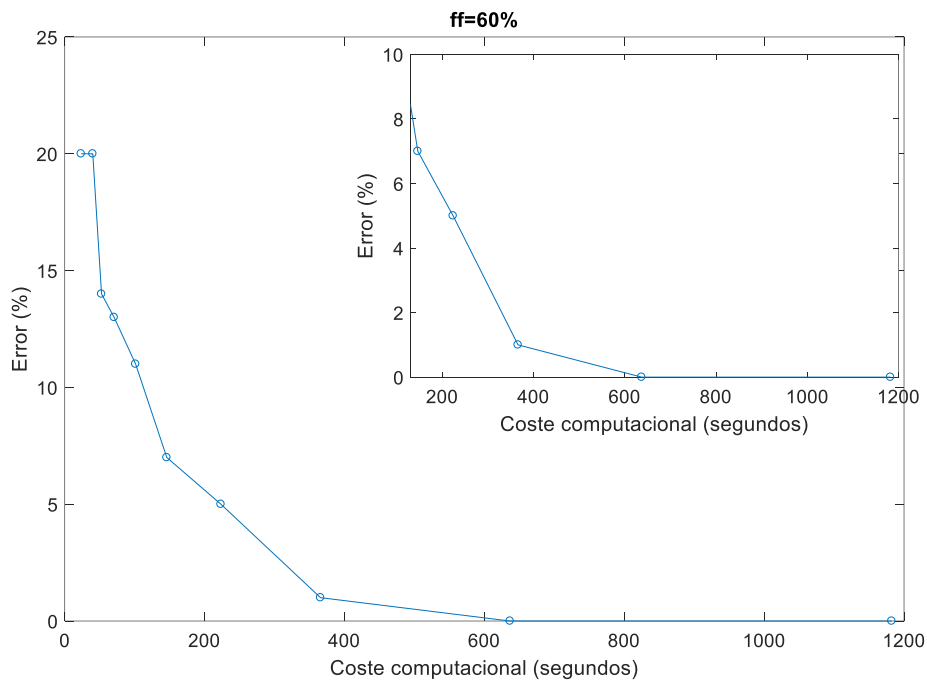


Figura 3.37. Error para $ff=60\%$ (FDTD)

- Para $ff=75\%$ (Figura 3.38), se observa que el mismo punto que en el caso anterior, el octavo, 23 nodos por longitud de onda, se encuentra un equilibrio entre precisión y coste computacional.

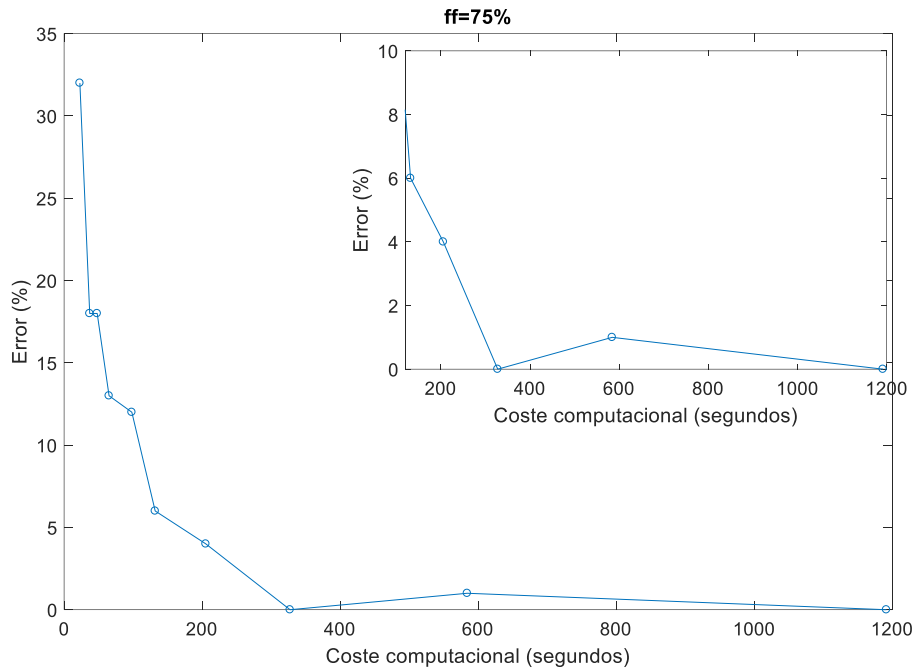


Figura 3.38. Error para $ff=75\%$ (FDTD)

- Para $ff=90\%$ (Figura 3.39), en este caso hasta el noveno punto, 28 elementos por longitud de onda, la precisión del cálculo no es la adecuada, y a partir de ahí el coste computacional incrementa innecesariamente.

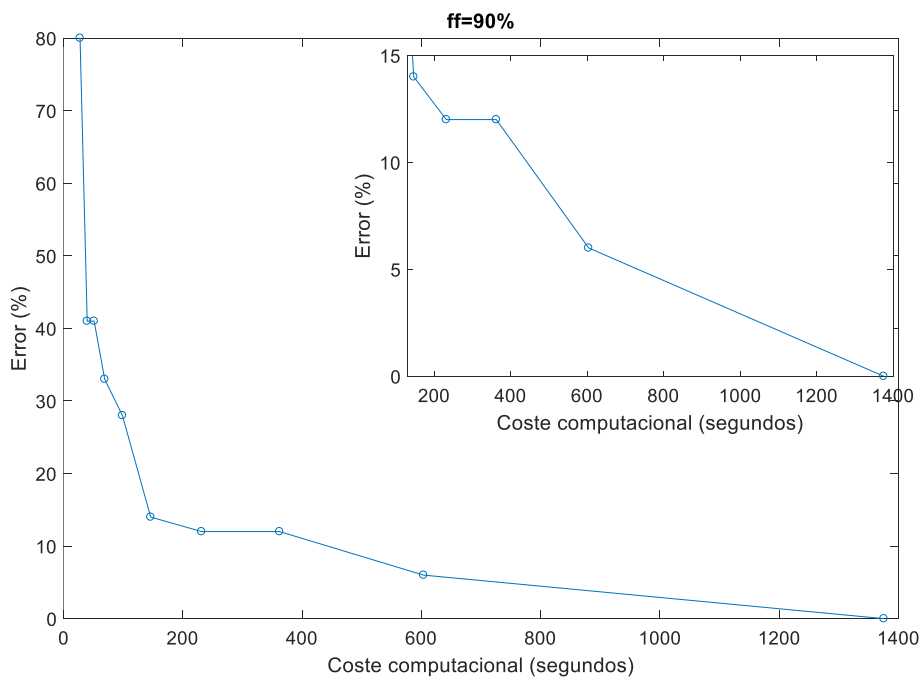


Figura 3.39. Error para $ff=90\%$ (FDTD)

Por tanto, en media se podrá considerar a partir del octavo punto, 23 elementos por longitud de onda, un punto en el que se conserva una relación adecuada entre precisión y coste computacional. El aumento del número de elementos por longitud de onda conlleva un aumento elevado del coste computacional, algo innecesario.

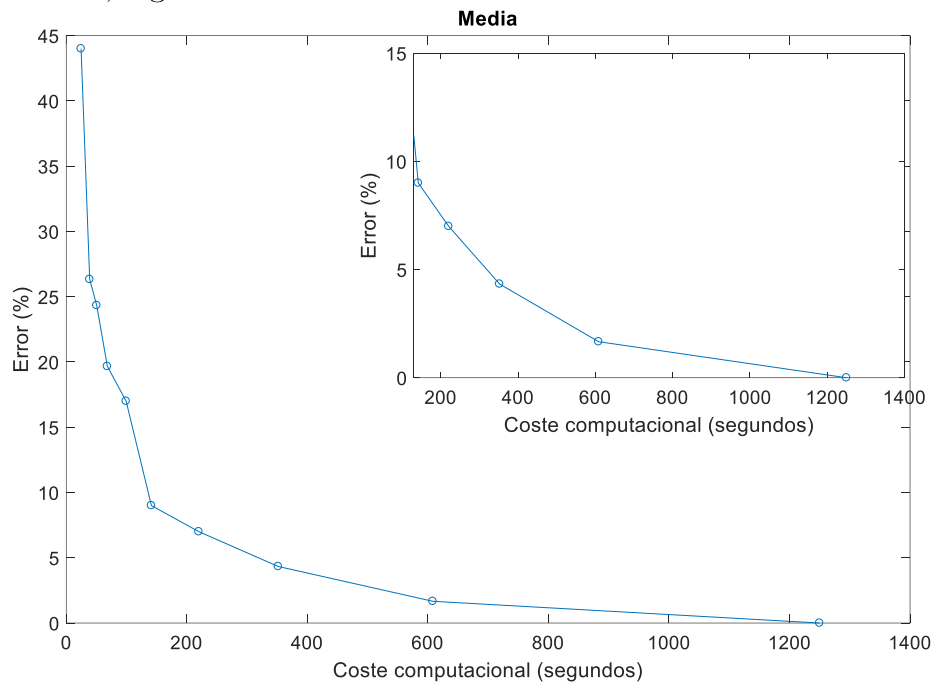


Figura 3.40. Error medio (FDTD)

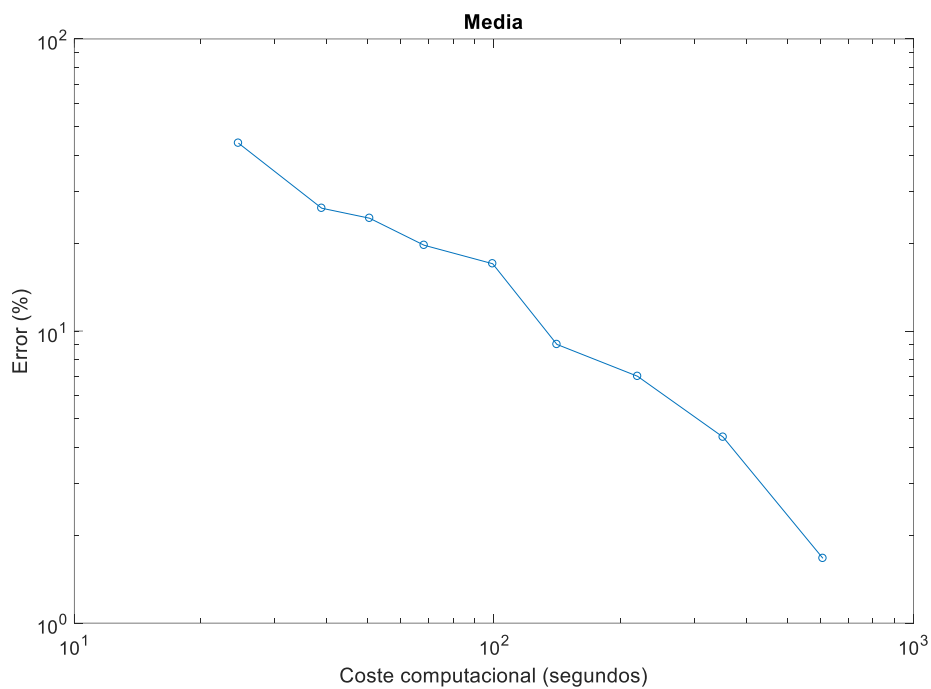


Figura 3.41. Error medio con ejes logarítmicos (FDTD)

3.4.2 Espectro de la barrera con FDTD

Una vez establecido cuál será el paso espacial correcto para tener un buen compromiso entre precisión y coste computacional, se calcula el espectro del IL de la barrera acústica.

- Para $ff=60\%$ (Figura 3.42), se observa perfectamente que el primer band gap de la barrera se encuentra en 1000 Hz y el segundo sobre 2000 Hz, aunque debido a la geometría de la propia barrera, no tiene un IL elevado. El IL medio en este caso es de 4.7 dB. El coste computacional de este cálculo fue de 365 segundos.

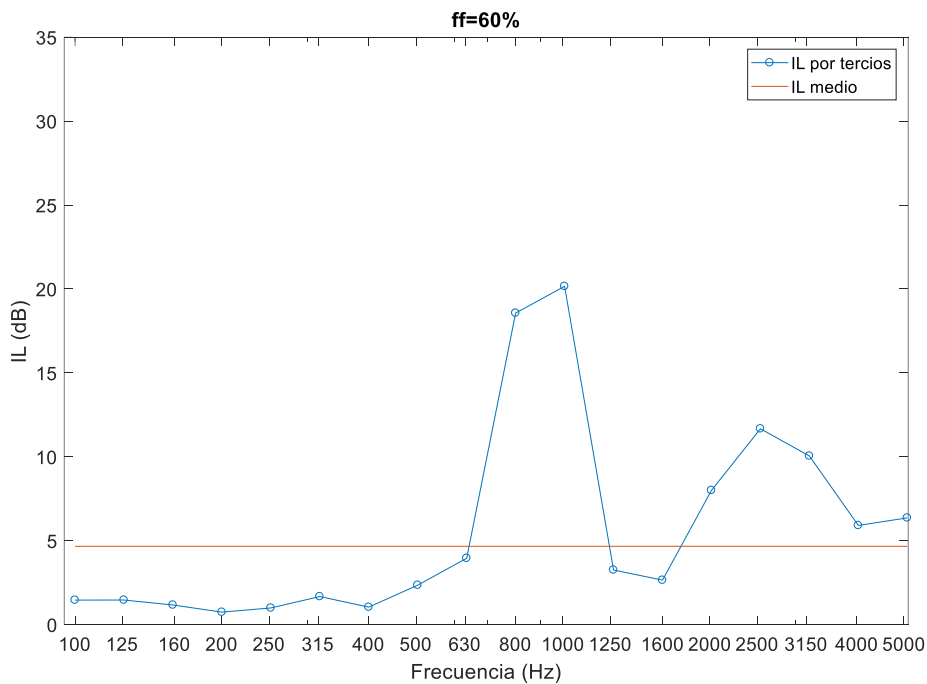


Figura 3.42. Espectro IL para $ff=60\%$ (FDTD)

- Para $ff=75\%$ (Figura 3.43), al igual que para el caso de $ff=60\%$, se observa el primer band gap a 1000 Hz y en este caso, el segundo band gap sobre 2000 Hz tiene mucha mayor influencia en el IL medio de la barrera. El IL medio en este caso es de 7 dB y con un coste computacional del cálculo de 327 segundos.

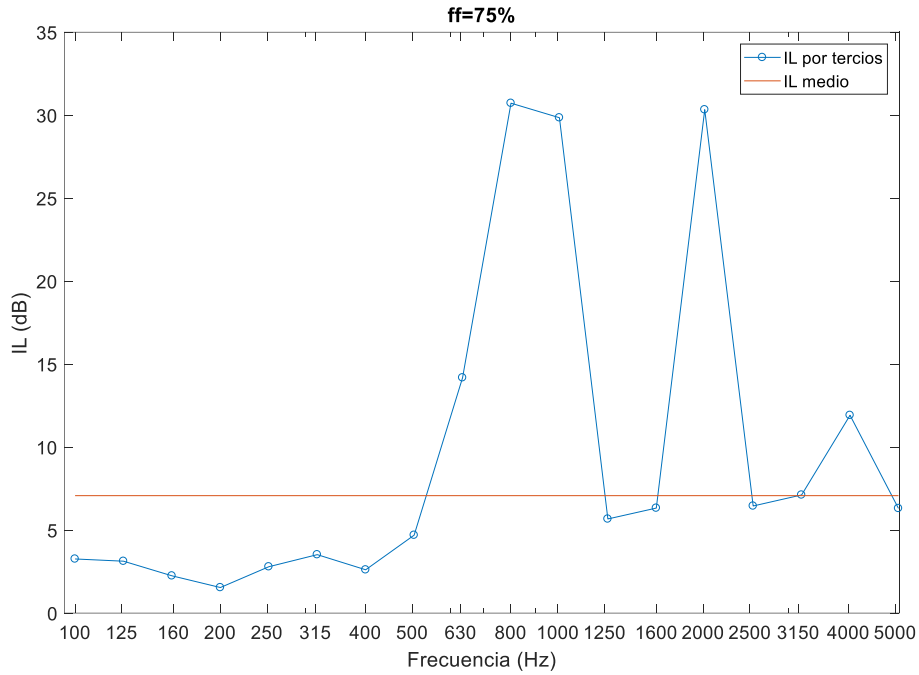


Figura 3.43. Espectro IL para ff=75% (FDTD)

- Para ff=90% (Figura 3.44) el primer band gap a 1000 Hz es mucho mayor que en los dos casos anteriores, debido a que el radio de los dispersores es mayor. El *IL* medio en este caso es de 11.7 dB. El coste computacional de este cálculo fue de 362 segundos.

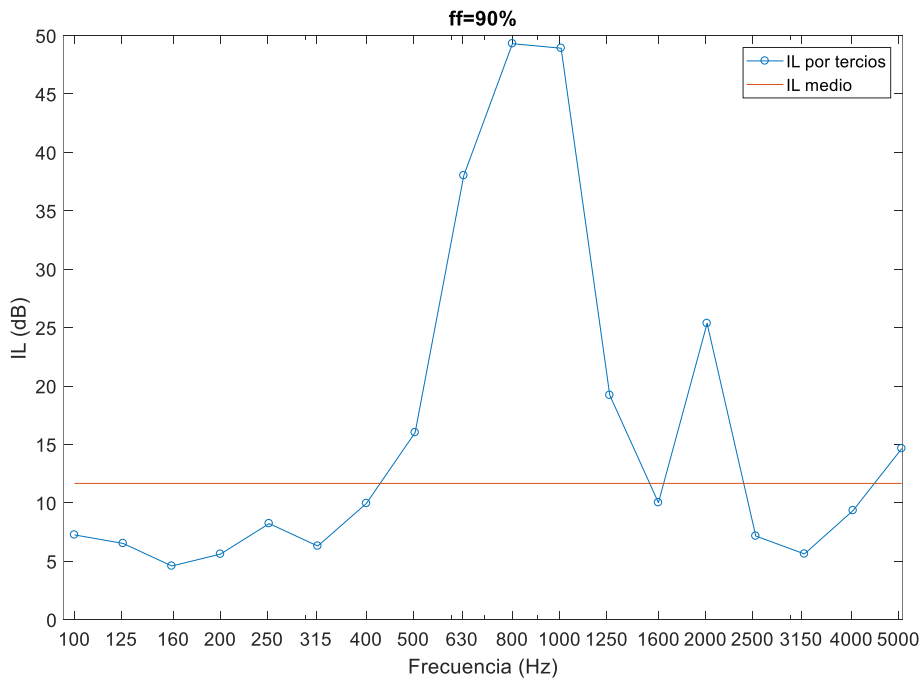


Figura 3.44. Espectro IL para ff=90% (FDTD)

Capítulo 4. Análisis comparativo

En el capítulo anterior [[“Capítulo 3. Simulaciones”](#)], se realizaron las simulaciones de la barrera acústica basada en estructuras periódicas para cada uno de los métodos de simulación elegidos. En cada caso, se obtuvo cuál sería la forma adecuada de obtener buena precisión en los resultados con un coste computacional bajo.

Para calcular el grado de precisión en los resultados, se calculó el *IL* de la barrera de sonido. En este capítulo se realizará un análisis comparativo de los resultados obtenidos de cada método de simulación y para cada estructura periódica simulada.

4.1 Dispersores con *ff* del 60%

Para empezar esta comparación, primero se representarán los valores medios del *IL* obtenidos respecto al coste computacional que utilizaron. Para este caso de los dispersores con el *ff* del 60% los resultados obtenidos fueron los siguientes (Figura 4.1):

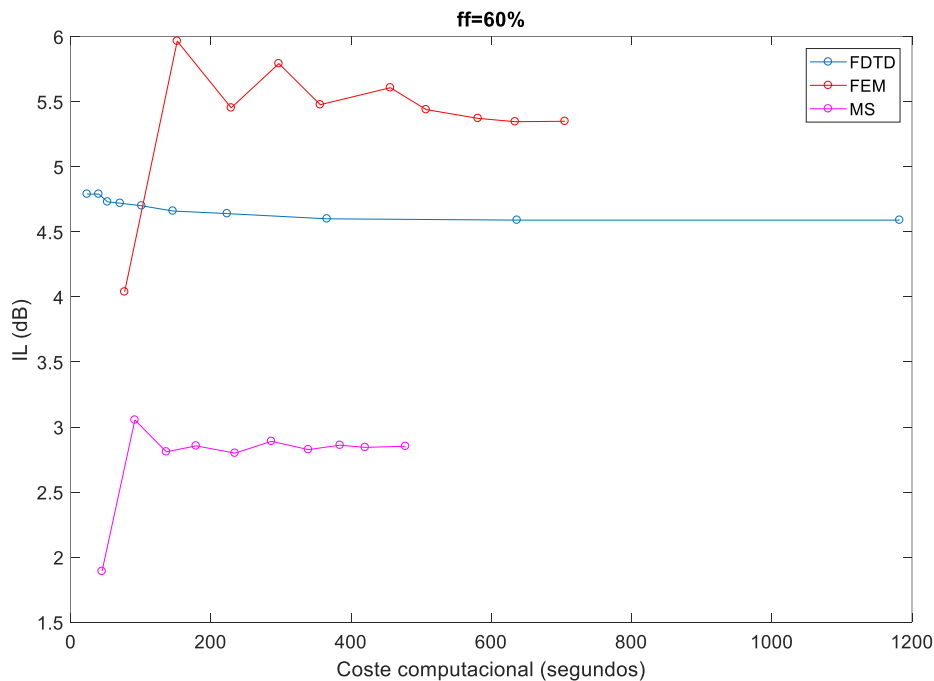


Figura 4.1. Valores IL para *ff*=60%

De esta figura, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- En cuanto al método de Múltiple Scattering, se puede observar que los valores medios del IL obtenidos convergen muy rápido (se necesitan sobre 180 segundos). A pesar de esto, se ve que el valor medio es muy bajo en comparación con los otros dos métodos utilizados.
- Para FEM, se puede observar que en este caso la convergencia de los resultados es mucho más lenta (en torno a los 500 segundos). El valor medio del IL es el más alto en comparación con los otros métodos.
- Para FDTD es el método de simulación que más rápido convergen los valores medios del IL , tanto que prácticamente no varían. Se puede observar que con las dos primeras simulaciones (coste computacional de menos de 50 segundos)

Otra forma de ver estos resultados es representando el espectro del IL calculado para el caso en el que mejor precisión y menor coste computacional se consiguió. El espectro para cada uno de los métodos de simulación es el siguiente (Figura 4.2):

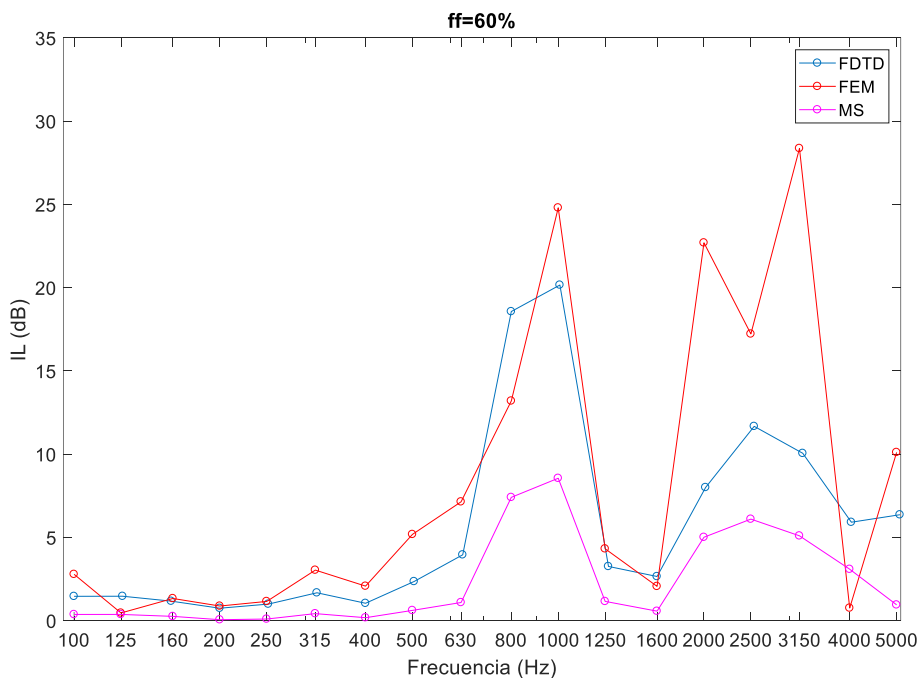


Figura 4.2. Espectro IL para $ff=60\%$

Se puede observar que por debajo de la frecuencia del primer band gap, no existe influencia notable de la barrera para cualquiera de los métodos de simulación utilizados, por tanto, la diferencia de nivel observada en la Figura 4.1 no proviene de esta zona.

A la frecuencia del primer band gap (1000 Hz) se observa una notable diferencia entre FDTD y FEM con MS. Los valores obtenidos con FDTD y FEM son muy similares, pero con MS son mucho menores.

En torno a los 2000 Hz y ya más alta frecuencia existe una notable diferencia entre FDTD y MS con FEM. En este punto, los valores obtenidos con FEM son mucho mayores. Por tanto, esta zona es la que provoca la diferencia obtenida en el *IL* medio.

4.2 Dispersores con ff del 75%

Como se ha realizado para el caso del $ff=75\%$, primero se van a representar los valores medios del *IL* obtenidos respecto al coste computacional.

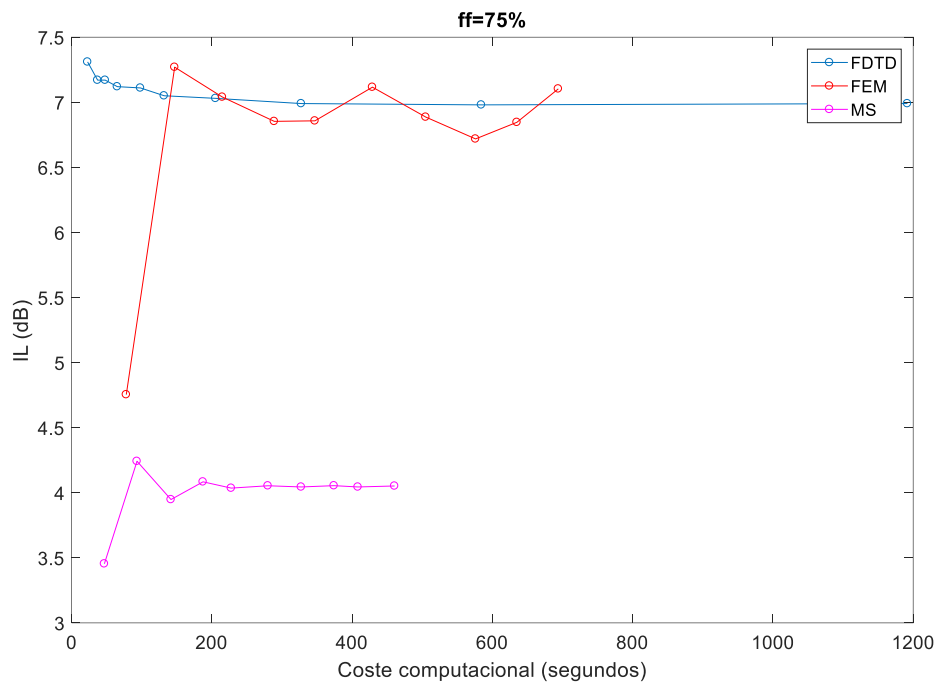


Figura 4.3. Valores *IL* para $ff=75\%$

De esta figura (Figura 4.3) se puede obtener la siguiente información:

- Realizando la simulación con MS, queda claro que los valores medios de *IL* son mucho menores que para FDTD y FEM. A pesar de ello, la convergencia de los valores se consigue rápido, en torno a 200 segundos.
- Los valores obtenidos con FDTD y FEM son prácticamente iguales. La diferencia en este caso se observa en que FDTD necesitó mucho menos coste computacional para conseguir que converjan los valores del *IL* obtenidos (en torno a 100 segundos). Utilizando FEM, los valores calculados del *IL* convergen a partir de 300 segundos.

Por tanto, a la hora de observar el espectro del IL , se podrá suponer que en el caso de FDTD y FEM serán iguales. Para MS serán valores menores.

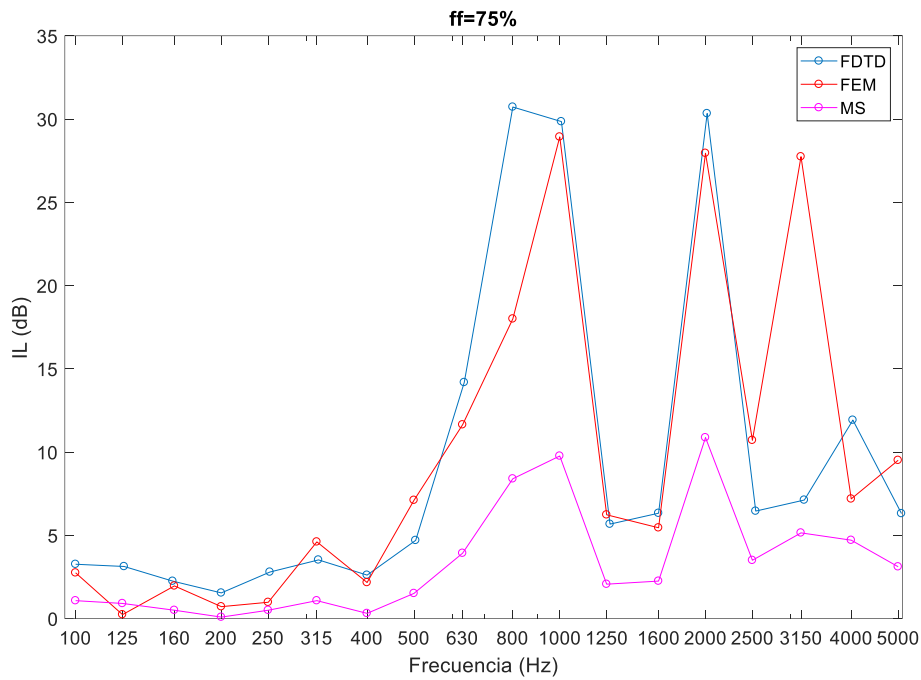


Figura 4.4. Espectro IL para $ff=75\%$

En la Figura 4.4 se puede observar el espectro del IL calculado. Como se preveía viendo la Figura 4.3, utilizando FDTD y FEM, el espectro calculado es similar.

4.3 Dispersores con ff del 90%

Al igual que para los otros dos anteriores casos de ff , a continuación, se presentan los resultados obtenidos para un ff de 90% de los dispersores que componen la barrera acústica.

Inicialmente se presentan los valores medios del IL para todas las simulaciones realizadas respecto al coste computacional utilizado.

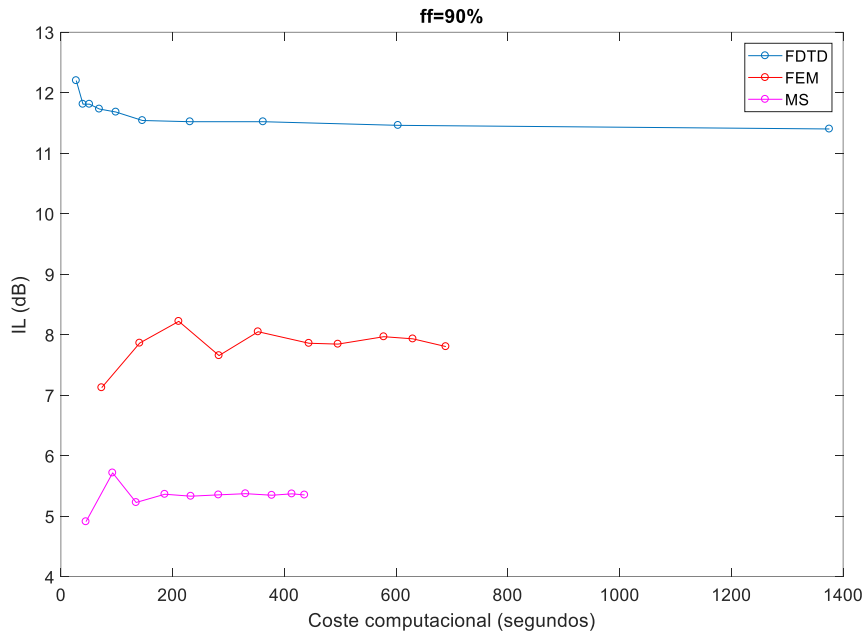


Figura 4.5. Valores IL para ff=90%

De la Figura 4.5 se puede interpretar que:

- Al igual que en los otros casos, el método de simulación con el que más rápido convergen los valores medios de IL es FDTD.
- Para ninguno de los casos los valores del IL calculado son similares. Para MS son mucho más bajos que para FEM, que a su vez son más bajos que utilizando FDTD.

En la siguiente figura se puede observar el espectro del IL en de la simulación con la que se consigue la convergencia de los valores del IL medio.

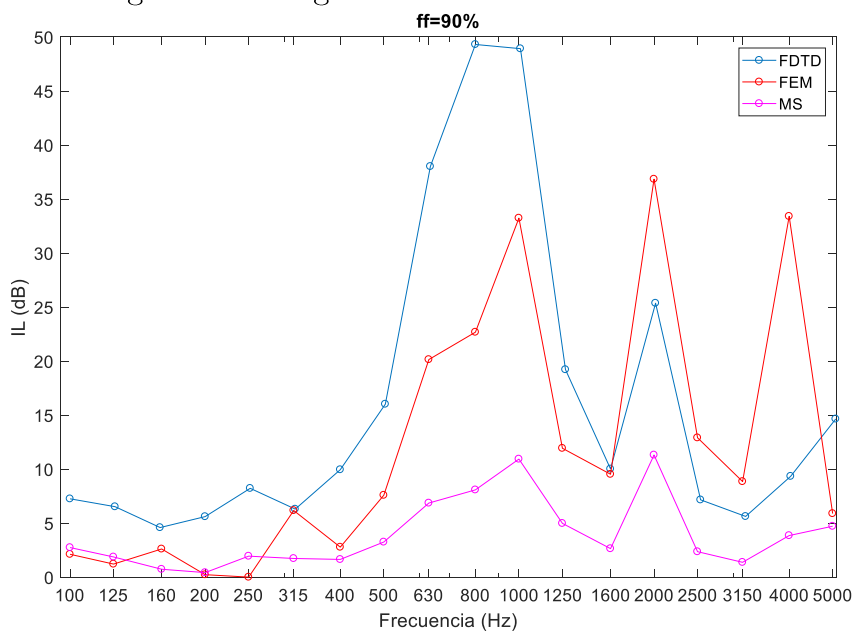


Figura 4.6. Espectro IL para ff=90%

En la Figura 4.6 se puede observar el espectro del IL para el caso de los dispersores con 90% de ff . Como se puede apreciar, la diferencia principal se encuentra en el primer band gap en 1000 Hz. El IL calculado en el caso de FDTD es mucho mayor que utilizando FEM y MS.

4.4 Comparación con varios ff

Tras los resultados obtenidos al realizar la comparación con tres ff diferentes, se decidió por realizar una simulación para varios valores de ff para intentar arrojar una explicación a los resultados obtenidos.

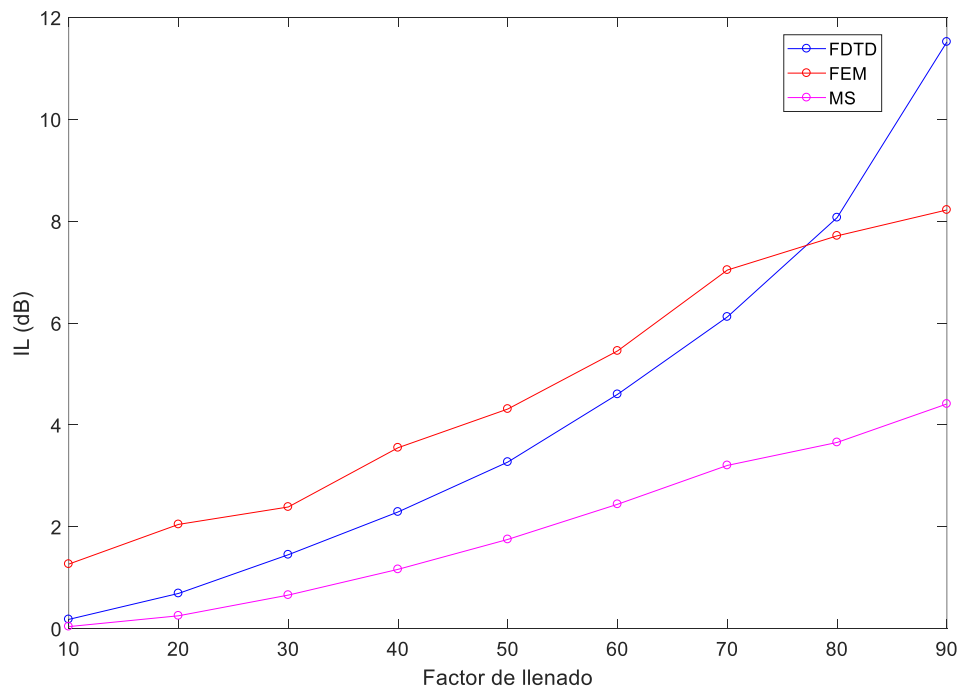


Figura 4.7. IL medio para varios ff

Gracias a la Figura 4.7 se puede establecer un criterio a la hora de elegir el método adecuado para simular barreras acústicas basadas en estructuras periódicas.

En primer lugar, es destacable la gran diferencia que existe entre los valores obtenidos utilizando MS y los otros dos métodos. Este resultado es debido a que como se explicó en el apartado 2.3.1 [[“2.3.1 Teoría del múltiple scattering”](#)]. La onda que incide sobre el primer obstáculo provoca la dispersión de ese campo recibido con forma de una función de Bessel. Ese campo vuelve a ser dispersado por otro obstáculo y así sucesivamente. Dependiendo de cuántas veces se tengan en cuenta esos campos dispersados, darán el orden de la función de Bessel a resolver. Esto imposibilita que cuando los dispersores tienen un radio mayor, la

función de Bessel pueda ser resuelta de forma correcta, por lo que los resultados obtenidos serán bajos. A pesar de esto, se ve que la relación del IL es aumentar conforme el ff es mayor. Existe un punto en el que esta relación no es lineal (para valores de ff a partir de 80%), por lo que, en definitiva, no se recomienda el uso de este método para este tipo de simulaciones.

En cuanto al cálculo realizado en FEM, se puede observar también que la tendencia de que el IL aumente con relación al ff es correcta. A pesar de esto, existen dos puntos que rompen esta tendencia. Para ver esto más claro, se realiza la derivada de los valores representados para ver si siguen alguna relación lineal (Figura 4.8).

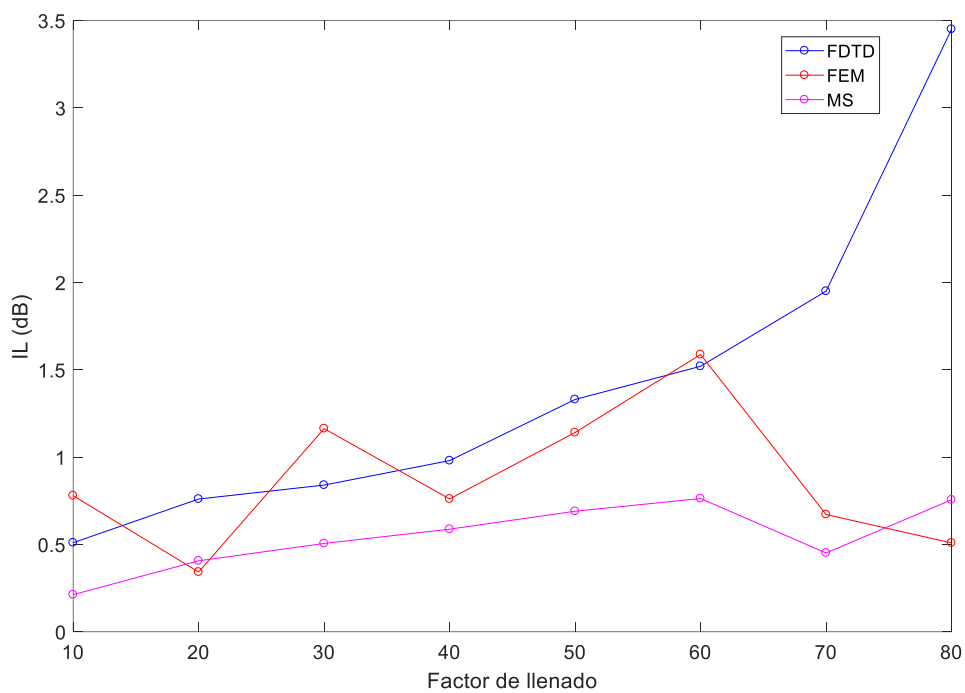


Figura 4.8. Derivada valores IL respecto ff

Como se comentaba, se puede observar que hay varios puntos para los valores obtenidos con FEM en los que se rompe la relación lineal entre el ff y el IL calculado. Por tanto, se desaconseja también el uso de este método de simulación.

Como punto final, respecto a los resultados obtenidos utilizando el método FDTD, se puede observar (en las Figuras 4.7 y 4.8) que la relación entre el ff y el IL es totalmente lineal, y se puede ajustar a una función polinómica. En este caso no existe ningún punto que rompa esta relación, por lo que este método sería el más acertado a la hora de realizar este tipo de simulaciones.

Capítulo 5. Conclusiones

5.1 Conclusiones

Tras el análisis comparativo resumido en el capítulo anterior, se puede afirmar que FDTD es el mejor método de simulación para simular la eficiencia apantallante de estructuras periódicas debido a su gran precisión y el bajo coste computacional que conlleva. Además, FDTD posee la interesante característica que al ser un código de creación propia puede incluirse automatizarse fácilmente el post-procesado necesario para obtener los parámetros que cuantifican la eficiencia de una estructura periódica. En los casos de MS y FEM fue necesario realizar cálculos adicionales para obtener el IL .

En cuanto a las tareas planteadas al principio de este trabajo:

- Inicialmente se ha estudiado la teoría en la que se basa cada uno de los métodos de simulación estudiados, con especial interés al método de Multiple Scattering, pues no se poseían conocimientos sobre este método.
- Tras conocer las bases teóricas de cada uno de los métodos de simulación, se ha investigado sobre su eficiencia al simular estructuras periódicas y su funcionamiento.

Una vez cumplidas las tareas asignadas, se han conseguido llevar a cabo los objetivos planteados:

- Se ha diseñado el protocolo de simulación para cada uno de los métodos estudiados, construyendo además en ellos la estructura periódica que se estableció en el capítulo 3 [[3.1 Cristal de sonido bajo estudio](#)].
- Se ha obtenido el aislamiento acústico proporcionado por la barrera acústica basada en cristales de sonido en los tres métodos de simulación.
- Se han variado parámetros característicos de cada simulación, obteniendo diferencias en los valores del IL obtenidos, cada uno referenciado a un cierto tiempo de cálculo.
- Gracias a esas variaciones realizadas en los parámetros característicos, se han categorizado los tres métodos estudiados en cuanto a precisión y coste computacional.

5.2 Líneas futuras

Como se ha mencionado al inicio de este trabajo, este análisis comparativo será utilizado por el grupo *Sonic Crystal Technologies* como base para realizar las optimizaciones de los cristales de sonido que están desarrollando. Gracias al bajo coste computacional obtenido con FDTD y a su facilidad de implementación, en los futuros trabajos se utilizará este método para la optimización de las estructuras periódicas.

Es destacable también que este trabajo establece las bases para la realización de la tesis doctoral del autor en el campo de las aplicaciones de las estructuras periódicas dentro del grupo “*Sonic Crystal Technologies*”.

Finalmente, cabe señalar que el presente trabajo ha sido aceptado como Comunicación en el Congreso Español de Acústica Tecniacústica 2017 organizado por la Sociedad de Acústica Española. Se adjunta como anexo el texto íntegro de la citada comunicación. Actualmente y en colaboración con varios miembros del citado grupo de investigación se está preparando un artículo de investigación que será enviado a la revista “*The Journal of Computational Acoustics*”.

Referencias

1. R. Martínez-Sala, J. Sancho, J. V. Sánchez, V. Gómez, J. Llinares, and F. Meseguer. Sound attenuation by sculpture. *Nature*, 1995.
2. M. Kafesaki, M.M. Sigalas, and N. García. Frequency modulation in the transmittivity of wave guides in elastic-wave band-gap materials. *Phys. Rev. Lett.*, 2000.
3. C.H. Kuo and Z. Ye. Sonic crystals lenses that obey the lensmaker's formula. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2004.
4. J. V. Sánchez-Pérez, D. Caballero, R. Martínez-Sala, C. Rubio, J. Sánchez-Dehesa, F. Meseguer, J. Llinares, and F. Gálvez. Sound attenuation by a two-dimensional array of rigid cylinders. *Phys. Rev. Lett.*, 1998.
5. Hakansson, J. Sánchez-Dehesa, and F. Cervera. Experimental realization of sonic demultiplexing devices based on inverse designed scattering acoustic elements. *Appl. Phys. Lett.*, 2006.
6. J. Redondo, J.V. Sánchez-Pérez, J. M. Fuster, JM Barrigón, P. Atanasio, Pantallas acústicas basadas en cristales de sonido. 44^o Congreso Español de Acústica, Encuentro Ibérico de Acústica, EAA European Symposium on Environmental Acoustics and Noise Mapping (2013).
7. V. Romero García, Tesis Doctoral, Control de la propagación de ondas acústicas en cristales de sonido: técnicas analíticas, numéricas y de optimización. 2010
8. E. Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 1987.
9. S. John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, 1987.
10. L. Godinho, P. Amado-Mendes, A. Pereira. And D. Soares Jr., An efficient MFS formulation for the analysis of acoustic scattering by periodic structures. *Journal of Computational Acoustics* (2017).
11. M. Kafesaki and E.N. Economou, Multiple-scattering theory for three-dimensional periodic acoustic composites, *Phys. Review B* **60** (1999).
12. Y. Cao, Z. Hou and Y. Liu, Finite difference time domain method for band-structure calculations of two-dimensional phononic crystals, *Solid state communications* **132**, 8 (2004)
13. Y.F. Wang, Y.S. Wang and X.X. Su, Large bandgaps of two-dimensional phononic crystals with cross-like holes, *J. App. Phys.* **110**, 11 (2011).

14. J.V. Sánchez-Pérez, C. Rubio-Michavila and S. Castiñeira-Ibañez, Towards the development of a software to design acoustic barriers based on Sonic Crystals: an overlapping model, *Proceedings of Euronoise 2015* (2015)
15. M. Liu, J. Xiang, H. Gao, Y. Jiang, Y. Zhou and F. Li, Research on band structure of one-dimensional phononic crystals based on wavelet finite element method, *CMES - Comput. Model Eng. Sci.* **97**, 5 (2014).
16. F. Zaviška. Über die beugung elektromagnetischer wellen an parallelen, unendlich langen kreisylindern. *Ann. Phys.*, 1913.
17. W. von Ignatowsky. Zur theorie der gitter. *Ann. Phys.*, 1914.
18. Chen, Y. Y., Ye, Z., 2001. Theoretical analysis of acoustic stop bands in two-dimensional periodic scattering arrays. *Physical Review E*, 64(3), 036616.
19. L. Sanchis, F. Cervera, J. Sánchez-Dehesa, J. V. Sánchez-Pérez, C. Rubio, and R. Martínez-Sala. Reflectance properties of two-dimensional sonic band gap crystals. *Jour. Ac. Soc. Am.*, 109:2598– 2605, 2001.
20. COMSOL. COMSOL Multiphysics User's Guide. 2015
21. K. S. Yee and J. S. Chen. The finite-difference time-domain (FDTD) and the finite-volume time-domain (FVTD) methods in solving Maxwell's equations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1997.
22. J. Redondo, R. Picó, V. J. Sánchez-Morcillo, W. Woszczyk. Sound diffusers based on sonic crystals. *The Journal of the Acoustical Society of America* 2013
23. UNE-EN 1793-3 “Dispositivos reductores de tráfico en carreteras. Método de ensayo para determinar el comportamiento acústico. Parte 3: Espectro normalizado de ruido. (1998)
24. Xavier Antoine and Bertrand Thierry. *The μ -diff toolbox: user guide*, 2015.

Anexo I

**Artículo aceptado en el congreso
TECNIACUSTICA 2017. 48º Congreso
Español de Acústica y Encuentro Ibérico de
Acústica**

COMPARATIVE STUDY OF SIMULATION METHODS FOR THE QUANTIFICATION OF THE ACOUSTIC INSULATION PROVIDED BY PERIODIC STRUCTURES

PACS: 43.50 Gf, 43.28. Fp

Parrilla Navarro, M. J¹; Redondo, J.¹; Sánchez-Pérez, J.V.²; Peiró-Torres, M.P.²; Guarque Edo, P.¹

¹Instituto para la Gestión integral de Zonas Costeras. -Universitat Politècnica de València. Campus de Gandía. C/ Paranimf, 1. Grao Gandía (Spain). maparna@epsg.upv.es;

²Centro de Tecnologías Físicas: Acústica, Materiales y Astrofísica. -Universitat Politècnica de València. Camino de Vera s/n. Valencia (Spain)

Keywords: Multiple Scattering; Finite Elements Method; Finite Difference Time Domain; Sonic Crystals; Computational Cost; Simulation; Error.

RESUMEN

Actualmente existen diferentes métodos para realizar simulaciones acústicas. La conveniencia de utilizar un método u otro depende del sistema que se estudia en cada caso. En este trabajo se realiza una comparativa entre diferentes métodos (Múltiple Scattering, Método de Elementos Finitos y Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo) aplicados a la cuantificación del aislamiento proporcionado por estructuras periódicas (cristales de sonido). Se considera un estudio sistemático sobre tiempo computacional, la precisión y el coste computacional.

ABSTRACT

Nowadays there are different available methods to perform simulations in acoustics. The suitability of them strongly depends on the system studied in each case. In the present work, a comparison between different methods (Multiple Scattering, Finite Elements Method and Finite Difference Time Domain) is carried out particularized to the quantification of the isolation provided by periodic structures (Sonic crystals). It has been considered a systematic study about computational time, precision and computational cost.

INTRODUCTION

A Sonic Crystal (SC) is a periodic array of cylindrical acoustic scatters with radius r separated by a predetermined lattice constant, and embedded in a fluid [1]. The first works simulating these structures started using the Plane Waves Expansion theory (PWE) by Yablonovitch [2] and John [3] in 1987. At the end of 20th century, Multiple Scattering Theory (MST) started to develop in acoustics, with the work of Sánchez-Pérez *et al* [4].

In addition, several numerical methods have been well studied by the scientific community. Different researchers have been using these methods to study the behaviour of phononic crystals. As an example, Cao *et al.* [5] used the Finite Difference Time Domain Method (FDTD), which, according to the authors, was an effective technique for the band-structure calculations of 2D phononic crystals. Some published works also document the use of the Finite Elements Method (FEM) for the analysis of periodic structures. Wang *et al.* [6] used FEM to study the generation of large band-gaps by periodic structures. Some of recent works like Sánchez-Pérez *et al.* [7] used FEM to define a two-step 2D model for designing of sonic crystal barriers. In Liu, *et al.* [8], a wavelet-based FEM was used to investigate the band structure of 1D phononic crystals [9]. In this work, the study is focussing on the comparison of the methods of Multiple Scattering, Finite Elements Method and Finite Difference Time Domain Method.

STATE OF ART OF SIMULATION METHODS

MULTIPLE SCATTERING HISTORY

The first author who studied this method was Záviska in 1913 [10]. He described the method in 2D acoustic field for the scattering of finite arrays. This method was applied in 1914 by Ignatowsky [11] for the case of normal incidence on an infinite row of cylinders. Multiple scattering can be understood as an interaction of wave fields with two or more obstacles. Multiple Scattering Theory solves the problem considering that the field scattered by one obstacle induces further another scattered field to the other obstacles, these obstacles induce, in the same way, further scattered fields to all the other obstacles, and so on. This characterizes Multiple Scattering Theory as a self-consistent method, being applicable to randomly or periodically-spaced cylinders. The first work in acoustics with MST was in 2001 by Chen *et al* [12].

FINITE ELEMENTS METHOD HISTORY

This method was originated from the need to solve complex problems of elasticity and structural analysis in civil and aeronautical engineering. Its development dates to the work by A. Hrennikoff [13] and R. Courant [14] in the early 1940s. Typical areas of interest include structural analysis, heat transfer, fluid flow, mass transport, electromagnetic potential and acoustics. The finite elements method formulation of the problem results in a system of algebraic equations. The method provides approximate values of the unknowns to a discrete number of points over the domain [15]. To solve the problem, the methodology subdivides the large problem into smaller ones or simpler parts that are called finite elements. The simple equations which model these finite elements are then assembled into a larger system of equations which models the entire problem.

FINITE DIFFERENCE TIME DOMAIN METHOD HISTORY

The finite-difference time-domain method (FDTD) is possibly the simplest one of the full-wave techniques used to solve problems in electromagnetics, both conceptually and in terms of implementation. The FDTD method employs finite differences as approximations to both the spatial and temporal derivatives which appear in Maxwell's equations. The technique was firstly proposed by K. Yee [16]. The originality of the idea of Yee resides in the allocation in space of the electric and magnetic field components, during recent times the procedure it has developed and became better.

SONIC CRYSTAL UNDER ANALYSIS

In order to perform a comparison between the different methods exposed above, we have established a simple sonic crystal structure to be analyzed. Every principal parameters of each method will be varied to study its effect. The structure is composed of 7 rows and 4 columns of circular scatters, with a lattice constant such that the first band gap is localized at 1000 Hz (Figure 1). We have chosen 4 columns given that it is the minimal value required to observe periodicity effects [17], and 7 rows to obtain a width of 1.2 m in the experimental section which is a standard measure in the building sector. The position of band gap is chosen on that frequency in which the target frequency range for traffic noise spectrum is centred, at 1000 Hz [17]. The filling fraction (ff) of the structure will be varied from 0.6 to 0.9 and the uncertainty will be averaged to obtain a single value.

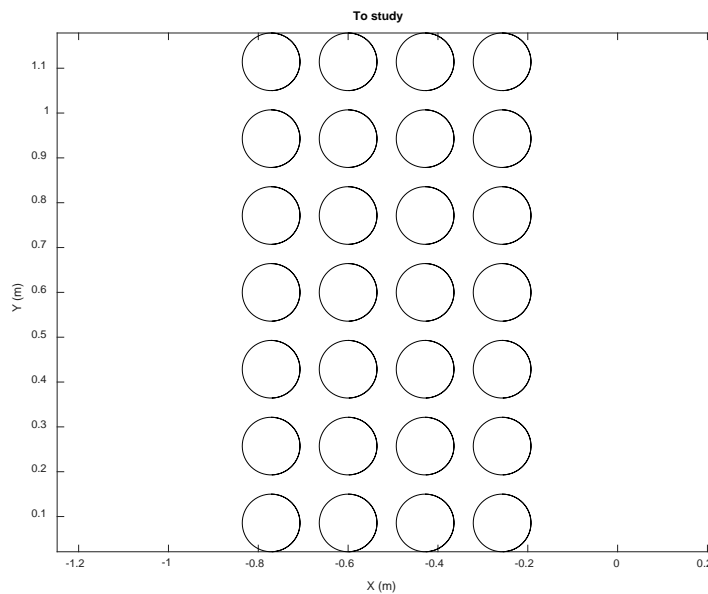


Figure 1. Structure to study with 0.75 of ff

In order to quantify the performance of the sonic crystal under analysis we have used the parameter known as Insertion Loss, defined as (1):

$$IL = 20 * \log\left(\frac{P_{direct}}{P_{interfered}}\right) \quad (1)$$

Where P_{direct} is the pressure level without the barrier and $P_{interfered}$ the pressure level with barrier. The range of simulated frequencies was from 100 Hz to 5000 Hz, frequencies provided by the normalized traffic noise spectrum [18].

SIMULATIONS RESULTS

The uncertainty of calculations has been considered by comparison with the best case in each simulation technique. All the simulations of this work were performed in a PC with 8 cores of i7-7700HQ at 2.8 GHz and 16 GB DDR4-2400 RAM

MULTIPLE SCATTERING SIMULATION

The first parameter to characterize was the order of the calculations, in other words, how many scattered fields are taken into account. Figure 2 illustrates the effect of the order in the accuracy of the method. It can be seen that order 5 is enough to obtain a very low uncertainty. Actually, increasing the order has nearly no effect.

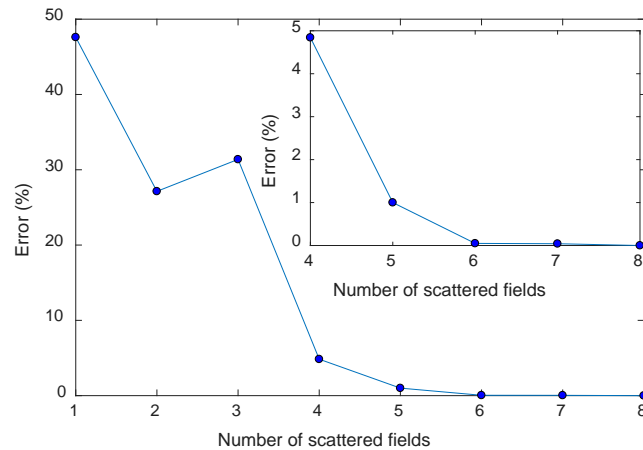


Figure 2. Number of scattered fields

With the order set to 5, the next parameter to study is how many individual frequencies per band have to be considered.

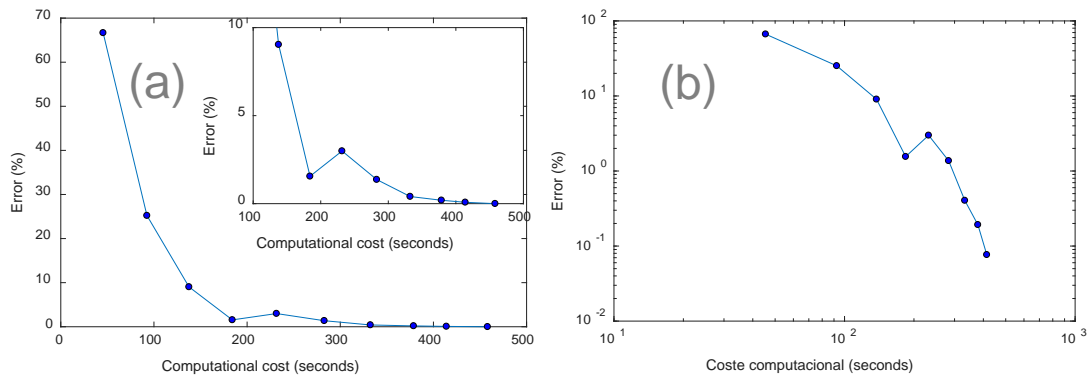


Figure 3. Uncertainty versus computational cost for MS. (a): Linear axis. (b): Logarithmic scale

Considering 4 frequencies per one third octave band (fourth point in Figure 3) the uncertainty is less than 3%. In this case the computational cost is about 180 seconds. Increasing the number of frequencies does not cause a significant reduction of the uncertainty but increases unnecessarily the computational cost. Then, we understand that this is the best compromise point between uncertainty and computational cost for this method.

FINITE ELEMENTS METHOD

This simulation method was performed with the commercial software COMSOL Multiphysics. The first parameter to study was the size of each simpler part. Considering the maximum frequency of work, it can be calculated the minimum size of each element. First, it was studied the size of each element. In this paper was considered 8 elements for wave length and the maximum work frequency was 5000 Hz, so, it was performed simulations with 3 frequencies per one third octave band and 3 sizes of elements, (for 3000 Hz, 4000 Hz and 5000 Hz, or 0.0143 m, 0.0107 m and 0.0086 m).

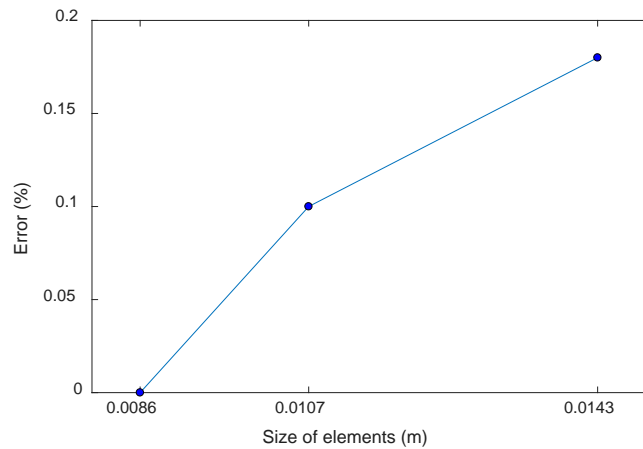


Figure 4. Size of the elements FEM

As it can be seen in Figure 4, the accuracy of the simulation is less than 3% for all cases, so we will use the maximum size of element, (the first point in figure 4) that corresponds to a size of 0.0143 m, because with higher sizes, the computational cost increases unnecessary.

Other variable parameter in FEM is the number of frequencies to simulate (like in multiple scattering). The same distribution of simulation frequencies used in multiple scattering was used for FEM. In the next figure we can see the error cost vs computational cost. Each point represents how many frequencies per one third octave band were used, (from 1 to 10).

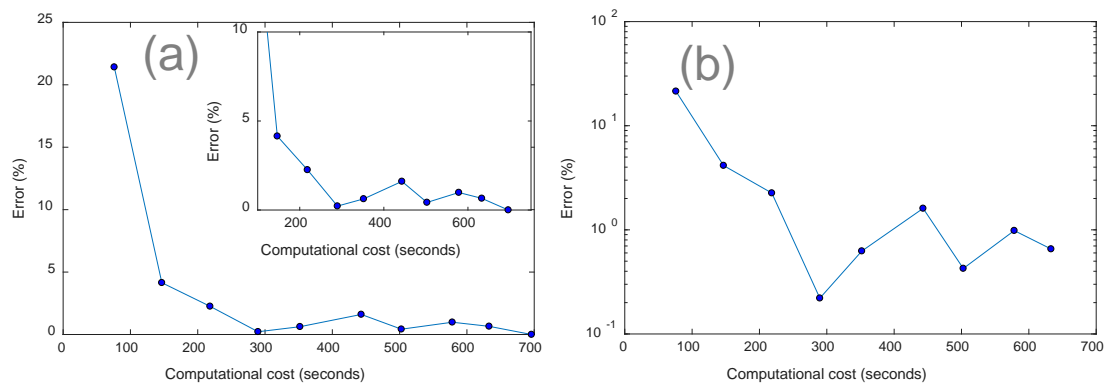


Figure 5. Uncertainty versus computational cost for FEM. Left (a): Linear axis. Right (b): Logarithmic scale

Figure 5 shows that considering three frequencies per one third octave band is enough to obtain an uncertainty lower than 3%. Increasing the number of simulation frequencies causes an unnecessary increase of the computational cost.

FINITE DIFFERENCE TIME DOMAIN

In an analogous way to the case of FEM, the most important parameter is the size of the elements. A smaller size of elements provides greater precision in the simulation but also requires more computational cost. The size of the elements was chosen in order to obtain 10 to 35 elements per wavelength. It is worth noting that the smallest wavelength to be considered is about 6 cm (that corresponds to the higher frequency, $4000 \cdot \sqrt{2}$ Hz).

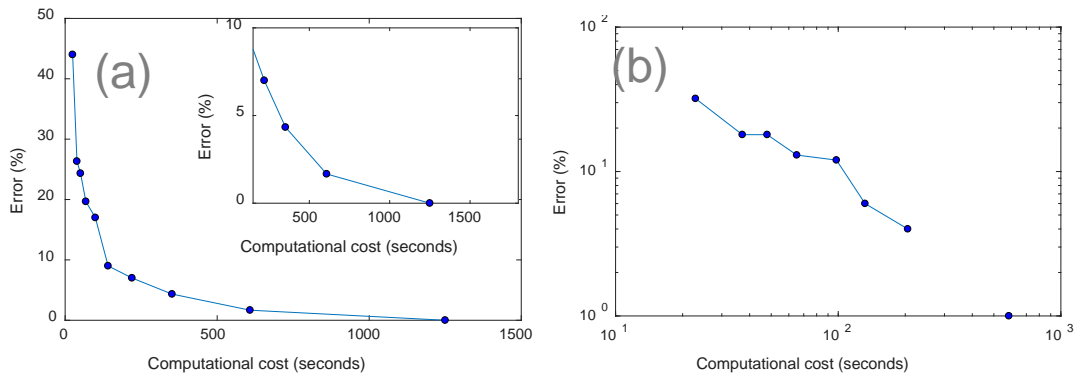


Figure 6. Uncertainty versus computational cost for FDTD. Left (a): Linear axis. Right (b): Logarithmic scale

As can be seen in Figure 6, considering around 23 elements per wavelength, (the eighth point in Figure 6), we can find equilibrium between computational cost and error. So, increasing the number of elements per wavelength increases the computational cost unnecessary.

COMPARATIVE ANALYSIS

In order to clarify which method can calculate the parameter of Insertion Loss (IL) with less computational cost and better accuracy, a comparison between the values of "IL" for the case of $ff=75\%$ it was carried out, the results are shown in the next Figure:

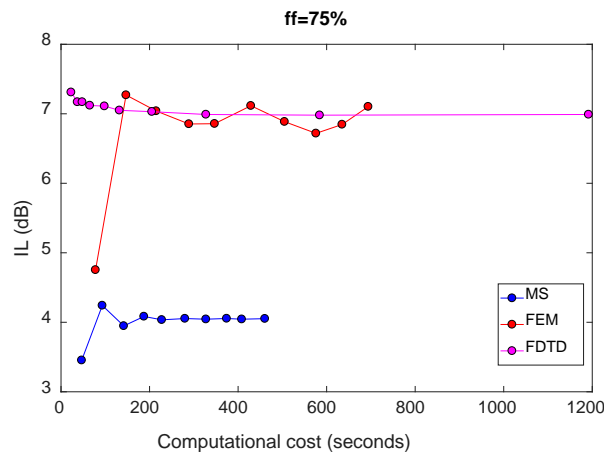


Figure 7. IL calculations for $ff=75\%$

As we can be seen, on one hand the value of IL with FEM and FDTD was similar, but the value of MS was too different from the other ones, so we advise against this method for these simulations. On the other hand, we also can see that the value of IL converges faster in FDTD than in FEM.

CONCLUSIONS

In this work, different simulation methods have been compared in order to clarify which would be used with less computational cost and would provide better accuracy in simulation of acoustic barriers based on periodic structures.

Attend to error results; any of the three methods studied could be used in this type of simulations. But, thanks to a comparative analysis study (Figure 7), we can conclude that Multiple Scattering has a low computational cost, but the values of IL are very different from the other simulation methods. Also, we have seen that with FEM and FDTD, we obtain values very similar, but FEM needs more computational cost than FDTD. Thus, FDTD converge the values of IL faster than FEM.

We conclude that, in future works, is advised to perform simulations of acoustic barriers based on periodic structures using FDTD method.

ACKNOWLEDGEMENT

This work was partially supported by the Spanish “MINISTERIO DE ECONOMIA, INDUSTRIA Y COMPETITIVIDAD” under the project TEC2015-68076-R.

REFERENCES

1. Martínez Sala, R., Sancho, J., Sánchez, J. V., Gómez, V., Llinares, J., Meseguer, F., 1995. Sound-attenuation by sculpture. *nature*, 378(6554), 241- 241.
2. Yablonovitch E., *Phys. Rev. Lett.* 58, 2059 (1987)
3. John S., *Phys. Rev. Lett.* 58, 2486 (1987)
4. Sánchez-Pérez J. V., Rubio C., Martínez-Sala R., Sánchez-Grandía R. and Gómez V., *Appl. Phys. Lett* 81(27), 5240-5242 (2002)
5. Y. Cao, Z. Hou and Y. Liu, Convergence problem of plane-wave expansion method for phononic crystals, *Physics Letters A* **327**, 2 (2004) 247-253.
6. Y.F. Wang, Y.S. Wang and X.X. Su, Large bandgaps of two-dimensional phononic crystals with cross-like holes, *J. App. Phys.* 110, 11 (2011)
7. J.V. Sánchez-Pérez, C. Rubio-Michavila and S. Castiñeira-Ibañez, Towards the development of a software to design acoustic barriers based on Sonic Crystals: an overlapping model, *Proceedings of Euronoise 2015* (2015)
8. M. Liu, J. Xiang, H. Gao, Y. Jiang, Y. Zhou and F. Li, Research on band structure of one-dimensional phononic crystals based on wavelet finite element method, *CMES - Comput. Model Eng. Sci.* 97, 5 (2014).
9. L Godinho, P. Amado-Mendes, A. Pereira. And D. Soares Jr. An efficient mfs formulation for the analysis of acoustic scattering by periodic structures. (2017)
10. F. Zaviska. Über die beugung elektromagnetischer wellen an parallelen, unendlich langen kreisylindern. *Ann. Phys.*, 40:1023, 1913.
11. W. von Ignatowsky. Zur theorie der gitter *Ann. Phys.* (1914).
12. Chen, Y. Y., Ye, Z., 2001. Theoretical analysis of acoustic stop bands in two-dimensional periodic scattering arrays. *Physical Review E*, 64(3), 036616.
13. Hrennikoff, Alexander "Solution of problems of elasticity by the framework method". *Journal of applied mechanics* (1941).
14. Courant, R. "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations". *Bulletin of the American Mathematical Societ* (1943)
15. Daryl L. Logan. *A first course in the finite element method*. Cengage Learning. (2011).
16. Kane Yee "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. (1966)
17. J. Redondo, R. Picó, V. J. Sánchez-Morcillo, W. Woszczyk. Sound diffusers based on sonic crystals. *The Journal of the Acoustical Society of America* 2013 134:6, 4412-4417
18. EN 1793-3 "Road Traffic noise reducing devices – Test methods for determining the acoustic performance – Part 3: Normalized traffic noise spectrum" (1997).