



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

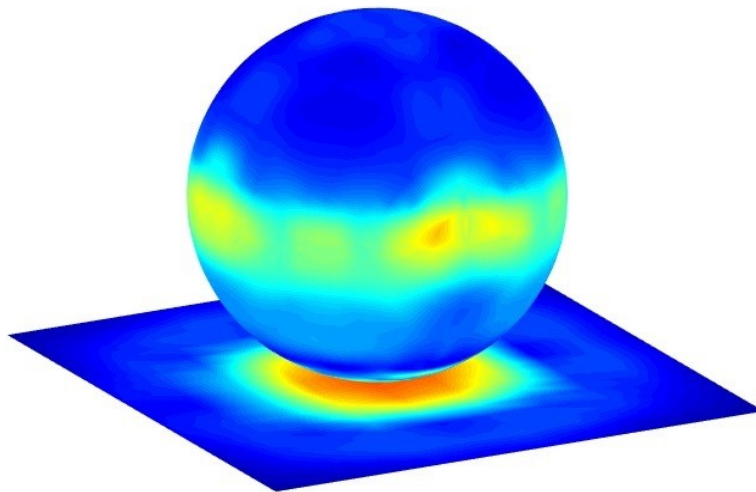


UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES



**"DESARROLLO E IMPLEMENTACIÓN DE UN
PROCEDIMIENTO DE MEJORA DE LAS TENSIONES DE
CONTACTO DE ELEMENTOS FINITOS EN MALLADOS
CARTESIANOS 3D INDEPENDIENTES DE LA GEOMETRÍA"**

AUTOR: HÉCTOR NAVARRO GARCÍA

TUTOR: JUAN JOSÉ RÓDENAS GARCÍA

CURSO: 2016-2017

Índice

Resumen.....	i
Introducción.....	1
cgFEM-FEAVox.....	3
Contacto considerando mallados cartesianos	6
Objetivos	10
Mejora de la solución mediante técnica SPR	11
Superconvergencia y puntos óptimos de muestreo	11
Técnica base de reconstrucción de tensiones: Superconvergent Patch Recovery	13
Limitaciones de la técnica SPR	17
Mejora de la reconstrucción de tensiones: técnica SPR-C.....	19
Imposición de ecuación de Equilibrio Interno.....	22
Imposición de la ecuación de compatibilidad	25
Imposición de la ecuación de equilibrio en contornos con tracciones impuestas	29
Imposición de la ecuación de equilibrio en contornos de simetría	33
Formulación del SPR-C en problemas sin contacto.....	40
Imposición de la ecuación de equilibrio en superficies de contacto	42
Formulación del SPR-C en contacto	50
Conclusiones	52
Bibliografía	53

Resumen

Dentro de los sistemas mecánicos es muy habitual encontrar componentes en contacto. En muchas ocasiones estas interacciones tienen importantes implicaciones a nivel de funcionalidad, eficiencia energética y vida útil del conjunto. Por tanto, una correcta simulación numérica del contacto permitirá optimizar los diseños consiguiendo sistemas más fiables, energéticamente eficientes y menos costosos de adquirir (por la reducción de costes de prototipado) y de mantener (por la reducción del desgaste de los componentes y de la necesidad de recambios).

La naturaleza no lineal del contacto imposibilita la obtención de soluciones analíticas o de ábacos de diseño para la mayoría de casos de estudio. Conscientes de esta limitación, dentro del ámbito de la simulación mediante el método de los elementos finitos (MEF) han aparecido procedimientos para resolver numéricamente este tipo de problemas. Sin embargo, la calidad de estas soluciones numéricas se aleja de los niveles de precisión que permitirían optimizar los diseños si buscamos tiempos de cálculo operativos.

El objetivo del TFG es desarrollar e implementar en Matlab una metodología de postproceso basada en el uso de técnicas de alisado de las soluciones del MEF (evaluadas mediante el Cartesian grid Finite Element Method - cgFEM) que mejore la solución en el contacto y permita mayor precisión al aplicar los criterios de diseño de componentes en contacto.

Introducción

Desde su aparición a mediados del siglo XIX el Método de los Elementos Finitos MEF ha supuesto una revolución en el cálculo de problemas en derivadas parciales. En términos generales, este procedimiento subdivide el dominio del problema en un conjunto de subdominios (elementos) definidos por los nodos que conectan. Dentro de cada uno de estos elementos las funciones incógnita se aproximan a partir de un conjunto de variables discretas, como pueden ser el valor de las variables incógnita en los nodos (interpolación nodal). A continuación, se estudia la estacionariedad de un funcional o se aplica un método de residuo ponderados para obtener un sistema de ecuaciones algebraicas (ecuaciones aproximadas de comportamiento). La resolución de este sistema permite obtener el conjunto de variables discretas que caracterizan la solución del problema.

La aproximación discreta a un problema de naturaleza continua da lugar a una solución aproximada. La solución exacta del problema se obtendría con un planteamiento analítico. No obstante, este segundo procedimiento solo se puede aplicar a problemas con geometrías muy sencillas. Desde el punto de vista de la ingeniería, la solución aproximada es suficiente siempre y cuando se pueda acotar su error. Esto ha llevado a que el MEF se convierta en una herramienta muy importante para la industria, usándose de forma habitual para resolver problemas de análisis estructural, plasticidad, electromagnetismo y transferencia de calor, entre otros.

En su aplicación al diseño estructural, el empleo de esta metodología ha transformado el proceso de diseño. Actualmente, los ingenieros pueden conocer el comportamiento del producto en condiciones de trabajo a través del uso de un software de simulación. De esta manera se disminuye el número de prototipos a construir y ensayar, reduciendo el gasto innecesario de recursos durante el desarrollo y, con ello, el coste final del producto.

Desde la perspectiva del diseño mecánico, los componentes habitualmente trabajan integrados en un conjunto. Dentro del sistema, existe una transferencia de cargas entre elementos, la cual se realiza por medio del contacto entre sus superficies.

La modelización de este tipo de cargas desde la perspectiva de MEF supone un reto ya que, en este caso, las condiciones de contorno no están definidas a priori ni tampoco a nivel de valores ni de extensión. Las fuerzas de acción y reacción entre los cuerpos que interaccionan aparecen en la zona de contacto entre los mismos. Dado que los cuerpos no presentan un comportamiento rígido, este área depende de las condiciones de contorno a las que estén sometidos, y por ello precisa un procedimiento que tenga en cuenta la evolución de la zona de contacto, así como las fuerzas que en ella aparecen.

Como ya se ha comentado, una solución aproximada será válida desde el punto de vista ingenieril siempre y cuando su error esté acotado. Para poder cuantificar el error de la solución, inicialmente es necesario conocer dónde se originan estas imprecisiones.

En primer lugar, podemos considerar los errores de modelado. Éstos pueden deberse a dos fuentes. Por un lado, el modelo matemático considerado para la resolución de estos problemas, aunque habitualmente complejo, no deja de ser una simplificación del modelo físico real. Como consecuencia, se producen distorsiones en lo que respecta a las propiedades físicas, las cargas y la geometría. Por otra parte, es posible que el usuario cometa errores durante la definición del modelo, dando lugar así a una representación no realista del problema. En este caso, no es posible su cuantificación ya que es independiente del proceso de cálculo. Será el usuario quien, estudiando los resultados obtenidos tras el análisis, deba decidir si el modelo calculado es correcto o debe ser modificado.

Por otro lado, encontramos errores de redondeo, como consecuencia la representación de magnitudes continuas mediante números con decimales finitos; errores de integración, provocados por el empleo de métodos de integración numérica durante el proceso de resolución; errores de manipulación, causados por los redondeos que se realizan durante el flujo del algoritmo; y errores de discretización, causados por la representación de un sistema continuo mediante elementos discretos.

De entre los distintos tipos de errores, los más importantes son los de discretización. Los errores de redondeo pueden minimizarse utilizando doble precisión durante la computación, mientras que los errores de manipulación se reducen utilizando algoritmos adecuados. Igualmente, se puede eliminar la influencia de los errores de integración en la convergencia del error teniendo en cuenta ciertas consideraciones. Además, el refinamiento de las mallas utilizadas para el cálculo permite aproximar muy bien el modelo de elementos finitos al modelo real. Con todo esto, la mayor fuente de error se localiza en la discretización.

Paralelamente al desarrollo del MEF, han surgido distintas metodologías que permiten cuantificar la calidad de la solución. De forma general se pueden clasificar en estimadores de error a-priori y estimadores de error a-posteriori. Los primeros se derivan de un análisis del modelo y dan información sobre la convergencia y estabilidad del sistema de resolución, así como de la evolución del error asociado a la solución a medida que se modifican los parámetros de la malla. Los errores a posteriori se basan en el postprocesamiento de los resultados del análisis de elementos finitos y sirven para cuantificar la calidad de la solución. Ainsworth y Tinsley Oden (2007) presentaron un resumen de las distintas metodologías de estimación de error a posteriori aplicables al análisis con elementos finitos.

El estimador ZZ, planteado en Zienkiewicz y Zhu en 1987, es un ejemplo de estimador de error a posteriori y es uno de los más extendidos gracias a sus buenos resultados. Éste evalúa una estimación $\|e_{es}\|$ del valor exacto del error de discretización en norma energética $\|e_{ex}\|$:

$$\|e_{es}\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma^* - \sigma_{ef}) d\Omega \quad (1)$$

donde el dominio Ω puede referirse tanto al dominio del problema como a un subdominio, σ_{ef} representa las tensiones calculadas por el MEF, D es la matriz elástica del material y σ^* es el llamado campo de tensiones alisado o reconstruido. La precisión de este estimador dependerá de la calidad de σ^* .

De entre todas las técnicas propuestas para el cálculo de σ^* , una de las más extendidas gracias a su robustez, simplicidad y bajo coste computacional es la técnica SPR (Superconvergent Patch Recovery), que fue desarrollada por Zienkiewicz y Zhu en 1992. Esta técnica obtiene nuevos campos minimizando el error de un polinomio de un grado superior al utilizado durante el análisis en una región del dominio compuesta por una serie de elementos que comparten un mismo nodo. Asignando a cada uno de los nodos los valores de estos campos evaluados en los nodos se obtiene un campo superconvergente. Éste es más cercano a la realidad que el proporcionado por elementos finitos y permite realizar una estimación del error cometido durante el proceso de discretización.

No obstante, las estimaciones que ofrece este procedimiento empeoran en aquellas zonas en las que la conectividad entre elementos es menor (nodo compartido por un menor número de elementos). Esta situación la encontramos al considerar los nodos que conforman la frontera del dominio. Para mejorar esta situación, Ródenas et al. (2007) propusieron aplicar las condiciones de compatibilidad, equilibrio interno y equilibrio en la frontera para contornos con tracciones impuestas y de simetría para mejorar la solución obtenida. Este nuevo procedimiento denominado SPR-C, ha demostrado ser capaz de calcular un campo reconstruido con una mayor precisión, así como de mejorar la efectividad en la estimación del error.

cgFEM-FEAVox

Los beneficios que ha proporcionado el método de los elementos finitos han propiciado la inversión de una gran cantidad de recursos en su mejora, buscando principalmente la reducción del coste computacional. En este sentido, el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales (en adelante DIMM) de la Universitat Politècnica de València ha desarrollado el código de elementos finitos en 2D llamado cgFEM (Nadal Soriano, 2014) y su ampliación a 3D denominada FEAVox, en los que hace uso de mallados cartesianos independientes de la geometría.

Para la formulación estándar del MEF, la malla debe ser conforme a la frontera exterior del dominio. Para el caso bidimensional, esto supone dividir el dominio del problema en un conjunto de subdominios triangulares o cuadrados, lineales o curvos, de tal manera que no exista solapamiento entre ellos. Además, el tamaño de los elementos deberá ser tal que se mantengan unas cotas de error aceptables y su geometría debe ser lo más regular posible. Todas estas condiciones dan lugar a un procedimiento de mallado que puede llegar a ser muy costoso.

En contraposición, los códigos desarrollados en el DIMM emplean una malla de aproximación que no necesita adaptarse a la geometría. En consecuencia, es posible definirla y refinarla fácilmente manteniendo los elementos sin distorsionar. El único requisito que debe cumplir es que el dominio completo del problema debe quedar contenido dentro del dominio de la malla (Figura 1). Adicionalmente, se define una segunda malla denominada como malla de integración (Figura 2). Esta segunda malla es la que se tiene en cuenta para realizar la integración numérica del dominio. La malla de integración se genera a partir de la malla de aproximación dividiendo los elementos intersectados por la frontera en subdominios de integración. Esta división se lleva a cabo haciendo uso de una triangulación de Delaunay que tiene en cuenta los nodos del elemento en el interior del dominio, así como una serie de puntos sobre la frontera.

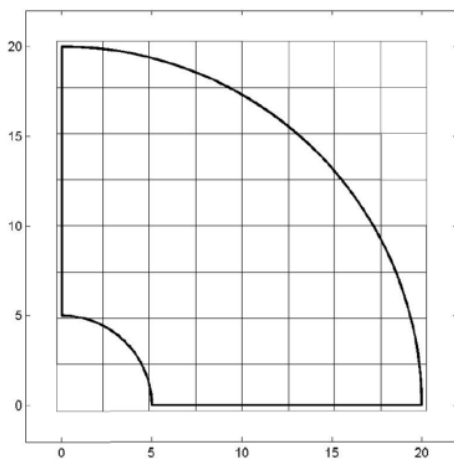


Figura 1: Malla de aproximación

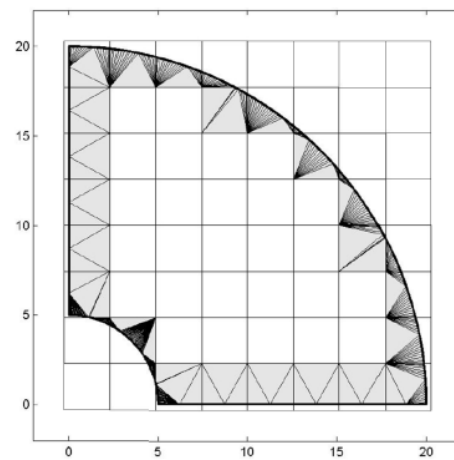


Figura 2: Malla de integración

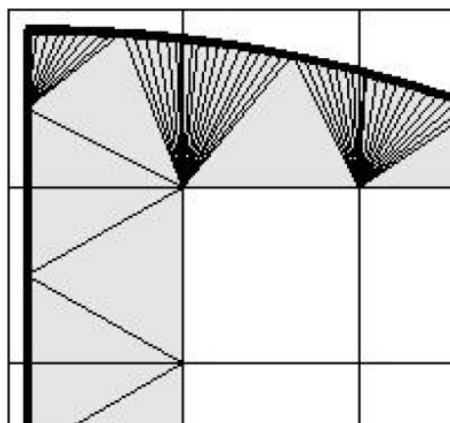


Figura 3: Detalle de la malla de integración

Considerando la relación de los elementos con el dominio del problema se pueden distinguir tres tipos de elementos en la malla de aproximación:

- Elementos de contorno: elementos cortados por la frontera del dominio. Solo una parte de los elementos pertenece al dominio del problema.

- Elementos internos: elementos completamente contenidos en el interior del dominio.
- Elementos externos: elementos posicionados totalmente fuera del dominio.

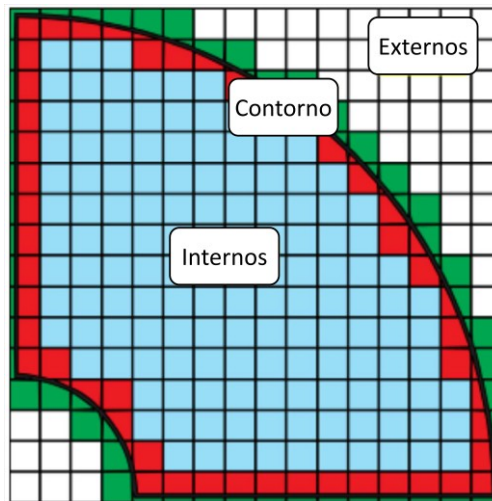


Figura 4: Tipos de elementos

La malla de análisis estará formada por los elementos internos y los elementos de contorno (los elementos externos no se consideran durante el proceso de análisis). Los elementos internos son tratados como elementos estándar de elementos finitos; dado que éstos semejantes al elemento de referencia, es posible reducir notablemente el tiempo de cálculo. Los elementos del contorno se integran teniendo en cuenta los subdominios definidos por la triangulación de Delaunay y la definición paramétrica de la frontera siguiendo la estrategia propuesta por el NEFEM (NURBS-enhanced Extended Finite Element Method) desarrollado por Sevilla et al. (2011), a fin de obtener una representación exacta del dominio del problema. Marco et al. (2015) establecieron el proceso seguido para la clasificación de los elementos y la integración de los subdominios en el FEAVox.

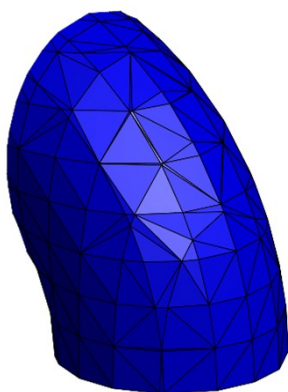


Figura 5: Aproximación lineal del contorno

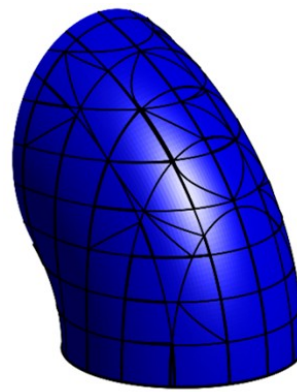


Figura 6: Contorno definido con NURBS

Los códigos usan un conjunto de mallas cartesianas estructuradas jerárquicamente donde cada una de ellas está formada por elementos cuadrados (2D) o cúbicos (3D) regulares. La malla de nivel 0 incluye en un único elemento todo el dominio del problema. Partiendo de esta malla base, la malla de nivel i se obtendrá dividiendo cada elemento de la malla $i - 1$ en

2^s elementos, donde s es el número de dimensiones del problema. Generalizando, la malla de nivel i tendrá $2^{s \cdot n}$ elementos. Debido a esta estructura jerárquica de la malla cartesiana, las propiedades geométricas de cada elemento, como son sus coordenadas, topología o tamaño, resultan muy fáciles de calcular.

La Figura 7 muestra un ejemplo de la estructura jerárquica de malla en el cgFEM. Inicialmente, se impone el dominio de cálculo sobre el conjunto de mallas de diferentes niveles. A continuación, se genera una malla de cálculo que será una combinación de elementos de los distintos niveles de mallas cartesianas, de tal manera que se cubra todo el dominio de cálculo sin que existan solapamientos y ni diferencia de más de un nivel entre elementos contiguos.

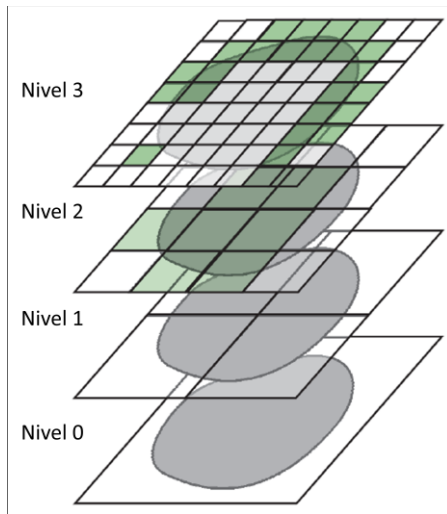


Figura 7: Apilamiento de mallas cartesianas

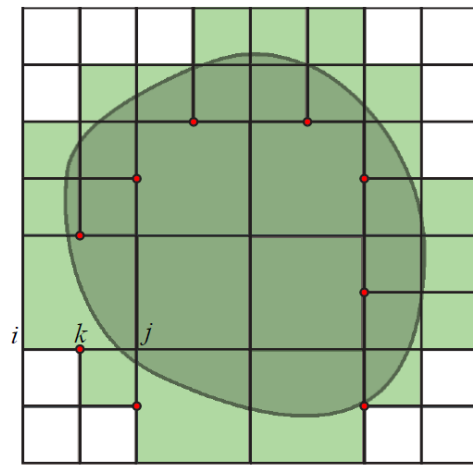


Figura 8: Malla de análisis. o nodos con restricciones MPC para continuidad C^0

Como consecuencia de la combinación de mallas cartesianas de distintos niveles, habrá nodos pertenecientes a elementos de un nivel mayor que estarán localizados sobre los contornos de elementos de menos orden (Figura 8). Estos nodos se denominan nodos suspendidos. Para asegurar la continuidad C^0 entre elementos es necesario establecer una relación entre los desplazamientos del nodo suspendido y los desplazamientos de los nodos del elemento adyacente que definen el contorno en el que se encuentra el nodo suspendido. Estas relaciones deberán ser añadidas al sistema de ecuaciones y se denominan restricciones multi-punto (MPC).

Contacto considerando mallados cartesianos

La formulación que se emplea para resolver los problemas de contacto en el cgFEM y el FEAVox es la propuesta por Tur et al. (2015) y, posteriormente, desarrollada por Navarro-Jiménez (2017) para el caso tridimensional con grandes deformaciones. A continuación, se expone esta formulación de manera resumida.

Consideremos dos cuerpos deformables identificados como $^{(1)}$ y $^{(2)}$ y de volúmenes $\Omega^{(1)}$ y $\Omega^{(2)}$, respectivamente. La frontera de cada cuerpo $\Gamma^{(i)}$ se subdivide en tres superficies no superpuestas, $\Gamma_D^{(i)}$ sobre la que se imponen las condiciones de contorno de Dirichlet, $\Gamma_N^{(i)}$ donde se imponen las condiciones de contorno de Neumann y $\Gamma_C^{(i)}$, que es la superficie donde puede ocurrir el contacto entre cuerpos.

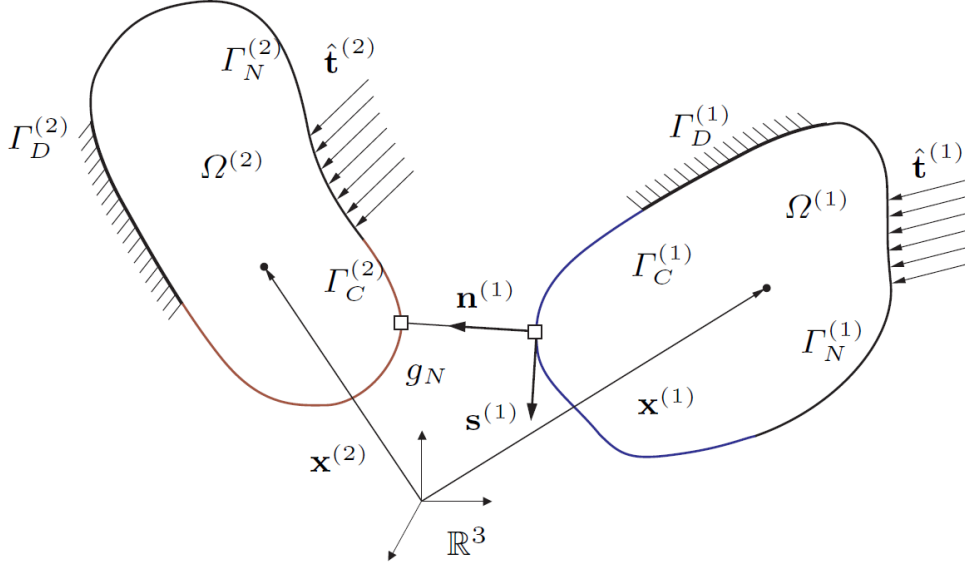


Figura 9: Esquema de dos cuerpos deformable en contacto

Asumiendo comportamiento lineal del material y pequeñas deformaciones, el problema de contacto puede ser formulado como la minimización del funcional que representa la energía potencial total del sistema:

$$\min \left\{ \Pi_p(\mathbf{u}) = \sum_{i=1,2} \left(\int_{\Omega^{(i)}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma^{(i)}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \right) \right\} \text{ sujeto a } g_N \geq 0 \text{ en } \Gamma_C^{(1)} \quad (2)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ es el tensor de tensiones, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ es el tensor de deformaciones, $\hat{\mathbf{t}}$ es el vector de tracciones impuestas en el contorno de Neumann y g_N es la distancia entre superficies de contacto. El valor de g_N se calcula como la distancia entre un punto $\mathbf{x}^{(1)}$ y la intersección de la superficie de contacto $\Gamma_C^{(2)}$ con la línea que pasa por $\mathbf{x}^{(1)}$ y está orientada según el vector normal $\mathbf{n}^{(1)}$ a la superficie $\Gamma_C^{(1)}$ en $\mathbf{x}^{(1)}$:

$$g_N = \left(\mathbf{x}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}) - \mathbf{x}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}) \right) \mathbf{n}^{(1)} \quad (3)$$

donde $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ son las coordenadas locales del punto $\mathbf{x}^{(1)}$ y del punto de intersección en la superficie $\Gamma_C^{(2)}$, respectivamente.

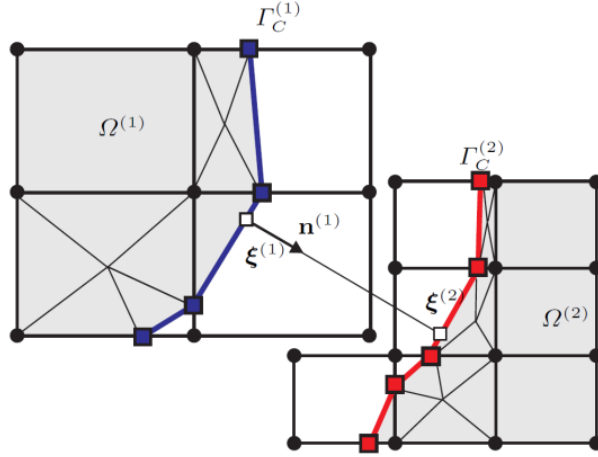


Figura 10: Elementos finitos de mallas cartesianas en contacto

El funcional presentado anteriormente puede ser reformulado utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange para considerar así la inecuación. De esta forma, la solución al problema será aquella que minimice el funcional con respecto a los desplazamientos y los maximice con respecto al campo de multiplicadores de Lagrange λ_N :

$$\text{opt} \left\{ \sum_{i=1,2} \left(\int_{\Omega^{(i)}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_N^{(i)}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_C^{(i)}} \lambda_N g_N d\Gamma \right) \right\} \text{ sujeto a } \lambda_N \leq 0 \quad (4)$$

donde la restricción que afecta a λ_N puede ser resulta asumiendo que la superficie de contacto es conocida, resolviendo el problema y modificando la superficie de contacto.

El problema que presenta este tipo de formulación aparece cuando el espacio de los multiplicadores es muy rico en comparación con el de los desplazamientos. En estos casos, aunque es posible llegar a una solución, la convergencia a la misma se ve reducida. A fin de mejorar esta convergencia, la formulación estabilizada añade un nuevo término a este funcional que restringe el rango de valores que puede tomar el campo de multiplicadores.

La formulación propuesta puede considerarse una modificación del método Nitsche y se escribe:

$$\text{opt} \left\{ \Pi_p(\mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C^{(1)}} \lambda_N g_N d\Gamma + \sum_{\forall e} \frac{h}{2E\kappa} \int_{\Gamma_C^{(1)}} (\lambda_N - p_N)^2 d\Gamma \right\} \quad (5)$$

donde E es el modulo de Young, h es una medida representativa del tamaño del elemento, κ es un parámetro de penalización definido por el usuario y p_N es la tensión de estabilización. Esta tensión de estabilización puede ser cualquier variable que tenga buenas propiedades.

Este término p_N puede ser cualquier variable que tenga buenas propiedades de convergencia hacia la tracción de contacto exacta. La diferencia del funcional desarrollado por Tur et al. (2015) con respecto al método de Nitsche reside en la definición de p_N . Mientras que para el método de Nitsche p_N se define como la tracción de contacto calculada a partir de la solución de elementos finitos, el trabajo de Tur propone la utilización de un campo de tensiones reconstruido para obtener la tracción de contacto.

Esta modificación se debe a que, en el caso de problemas con contornos sumergidos, el vector de tensiones calculado a partir de los valores de desplazamientos en elementos de contorno es de poca calidad. Por este motivo, se propone la utilización de un campo de tensiones suavizado basado en la técnica SPR.

Objetivos

Los objetivos de este Trabajo Fin de Grado fueron proponer una metodología que permitiera mejorar el campo de tensiones obtenido mediante el cálculo con elementos finitos considerando mallas con contornos sumergidos y problemas de contacto tridimensionales, adaptar el procedimiento de cálculo teniendo en cuenta la estructura del software FEAVox e implementar un código utilizando lenguaje MATLAB para el cálculo del campo de tensiones mejorado aplicando la estrategia propuesta.

Mejora de la solución mediante técnica SPR

Superconvergencia y puntos óptimos de muestreo

Desde la aparición del método de elementos finitos para la resolución de problemas diferenciales, se han estudiado las características de la solución y se ha observado que existen ciertos puntos en los cuales ésta es de una mayor precisión. Aunque es un campo que continúa en estudio, de forma experimental se ha concluido que el campo calculado tiene una precisión máxima en los nodos que definen los elementos, mientras que los gradientes de la variable obtienen valores más cercanos a los reales en el interior del elemento. De hecho, al realizar el muestreo en estos puntos para problemas unidimensionales, encontramos que la solución presenta la cualidad denominada como superconvergencia. Esto significa que los valores obtenidos en estos puntos llevan asociado un error que decrece más rápidamente que en ningún otro punto del dominio.

Para poder visualizar mejor este concepto, se va a estudiar la solución obtenida para un problema de segundo orden, como puede ser el caso de un problema de conducción de calor en una dimensión (Ley de Fourier) o el cálculo de los desplazamientos en una barra elástica de sección variable. Para ambos casos, la ecuación se puede expresar de forma simplificada como:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) + \beta u + Q = 0 \quad (6)$$

a la que se añaden las condiciones de contorno para así definir completamente el problema.

En el caso de que $\beta = 0$ y el problema se resuelva considerando elementos lineales, la solución de u será exacta en los nodos. Teniendo en cuenta este planteamiento, en la Figura 11 se muestran los valores del campo exacto para u y para $\frac{du}{dx}$, así como los campos aproximados obtenidos mediante el MEF.

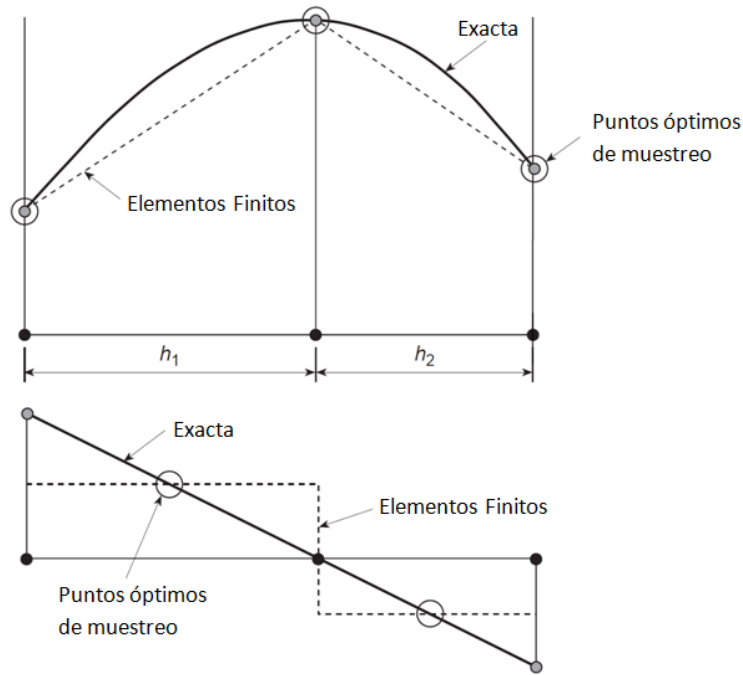


Figura 11: Puntos óptimos de muestreo para el funcional (sup.) y el gradiente (inf.)

Se puede comprobar como la solución aproximada de u tiene una precisión máxima en los nodos, llegando a coincidir con la solución exacta en este caso. Sin embargo, si consideramos el gradiente de la solución $\frac{du}{dx}$, en estos puntos existe una diferencia muy grande entre los valores reales y los calculados. Para este segundo campo, los puntos óptimos de muestreo se encuentran en el interior del dominio de los elementos.

Al ir aumentando el orden de los elementos, se observa que la precisión de la solución sigue siendo máxima en los nodos del elemento mientras que los puntos óptimos de muestreo para el gradiente de este campo varían tanto en número como en posición. Al estudiar la variación de estas localizaciones se puede comprobar que se ajustan a los puntos de la cuadratura de Gauss.

Si aplicamos estas conclusiones al problema elástico lineal se pueden establecer los siguientes axiomas:

- Los desplazamientos se muestrearán de forma óptima en los nodos del elemento, independientemente del orden del mismo.
- Las deformaciones y tensiones calculadas a partir del campo de desplazamientos presentan mayor precisión en los puntos de Gauss que se corresponden al grado de los polinomios de interpolación de los desplazamientos.

Para el caso unidimensional, el orden de convergencia de la función y sus gradientes en estos puntos es un orden mayor de lo que cabría esperar teniendo en cuenta el grado del polinomio empleado y por ello se conocen como puntos de superconvergencia.

Cuando se intenta trasladar estos axiomas a los casos de dos y tres dimensiones, no es posible obtener una demostración teórica de su validez (en el caso de unidimensionales sí es posible). No obstante, la comunidad de usuarios e investigadores del MEF han utilizado los

puntos de Gauss para la evaluación de las tensiones en elementos cuadrados y cúbicos con muy buenos resultados. Para elementos triangulares y tetraédricos, los puntos de integración y los de mínimo error únicamente coinciden en el caso de funciones de forma lineales.

Técnica base de reconstrucción de tensiones: Superconvergent Patch Recovery

La técnica Superconvergent Patch Recovery fue desarrollada por Zienkiewicz y Zhu (1992) y es una técnica a posteriori basada en la reconstrucción de gradientes. Este tipo de técnicas han sido usadas de forma habitual en la comunidad ingenieril y se basan en un postprocesamiento de la solución con el objetivo de obtener una representación más precisa de su gradiente. En el caso del SPR, se acepta la propiedad de superconvergencia (errores de orden $O(h^{p+1})$) del campo de tensiones aproximado $\hat{\sigma}$ en una serie de puntos s del elemento; a partir de estos valores, se calcula un campo de tensiones alisado σ^* , siendo éste superconvergente en todos los puntos del elemento.

La técnica SPR ha mostrado ser una técnica muy robusta para la obtención de un campo de tensiones mejorado que permita obtener la estimación del error. Sus resultados son especialmente buenos en problemas con soluciones suaves y mallados con mallas uniformes.

Esta técnica define, en primer lugar, un dominio que denominaremos patch. Este dominio está formado por un conjunto de elementos contiguos que comparten un mismo nodo vértice, que es el nodo de ensamblado. A continuación, cada una de las componentes de σ^* se obtiene a través de una expansión polinómica del mismo orden que la interpolación de elementos finitos. De esta manera, cada una de las componentes del campo de tensiones σ^* puede representarse como:

$$\sigma_i^*(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{a}_i \quad (7)$$

donde $\mathbf{p}(x)$ contiene los términos del polinomio, los cuales varían en función del grado de las funciones de forma y del número de dimensiones del problema, y \mathbf{a}_i es el conjunto de coeficiente asociado a cada componente de tensión que se buscan determinar. En la **tabla** se muestran los valores para los casos más habituales:

	2D	3D
Elementos lineales	$\mathbf{p}(x) = \{1, x, y\}$ $\mathbf{a}_i = \{a_1, a_2, a_3\}^T$	$\mathbf{p}(x) = \{1, x, y, z\}$ $\mathbf{a}_i = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^T$
Elementos cuadráticos	$\mathbf{p}(x) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ $\mathbf{a}_i = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}^T$	$\mathbf{p}(x) = \{1, x, y, z, x^2, xy, y^2, yz, z^2, xz\}$ $\mathbf{a}_i = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}^T$

Finalmente, se ajusta el campo a los valores de las tensiones de elementos finitos en los puntos de superconvergencia del patch. Para ello, se hace uso de una técnica de ajuste por

mínimos cuadrados y esto supone minimizar el siguiente funcional para cada una de las componentes i de la tensión:

$$\phi_{SPR}(\mathbf{a}) = \sum_{gp}^{NGP} \left(\mathbf{p}(x_{gp}) \mathbf{a}_i - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(x_{gp})) \Big|_i \right)^2 \quad (8)$$

donde NGP es el número de puntos de Gauss asociados al patch que se está resolviendo.

Este funcional se minimiza obteniendo un sistema lineal de ecuaciones para cada una de las componentes de $\boldsymbol{\sigma}^*$. Cada uno de estos sistemas se resuelve de forma independiente y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_i = \mathbf{H}_i \quad (9)$$

donde \mathbf{M} y \mathbf{H}_i representan:

$$\mathbf{M} = \sum_{gp}^{NGP} \mathbf{p}(x_{gp})^T \mathbf{p}(x_{gp}) \quad (10)$$

$$\mathbf{H}_i = \sum_{gp}^{NGP} \mathbf{p}(x_{gp})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(x_{gp})) \Big|_i \quad (11)$$

Una vez obtenidos los valores para \mathbf{a}_i , se particulariza el valor de cada una de las tensiones reconstruidas en el nodo de ensamblaje. Si se aplica este procedimiento para cada uno de los patches de la malla, se obtiene una representación nodal de las tensiones. A partir de estos valores y usando los polinomios de interpolación de elementos finitos, es posible construir un campo de tensiones suavizado completo.

$$\boldsymbol{\sigma}^*(x)_{SPR} = \sum_n N_n(x) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^* \quad (12)$$

donde $N_n(x)$ es la función de forma asociada al nodo n y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^*$ es la tensión nodal asociada al mismo nodo.

En las figuras, se presenta de forma gráfica el procedimiento que establece la técnica SPR para la obtención del campo de tensiones alisado. El patch está formado por los siete elementos triangulares que comparten el nodo de ensamblaje i (representado en rojo). Estos elementos son de tipo lineal y con una cruz azul se representan los puntos óptimos de muestreo. A partir de las tensiones evaluadas en estos puntos se ajusta una superficie polinómica que en este caso es de grado uno, identificada en color azul. El valor de la superficie se particulariza en el nodo de ensamblaje (color rosa) y extendiendo el procedimiento y extrapolar los resultados se obtiene un campo de tensiones suavizado (color violeta).

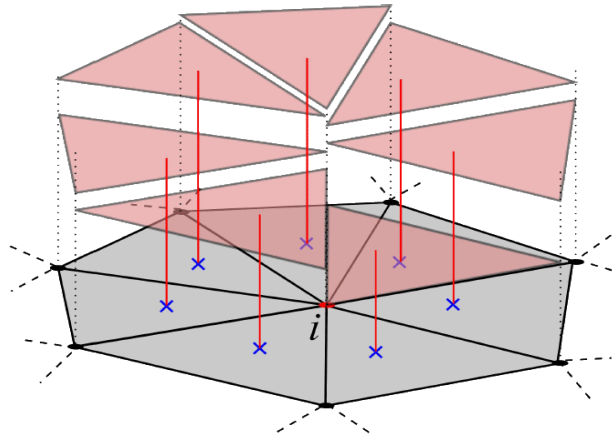


Figura 12: Representación de un patch de elementos triangulares. El punto rojo es el nodo de ensamblaje. Las superficies transparentes son las tensiones de elementos finitos. Las cruces azules son los puntos de superconvergencia

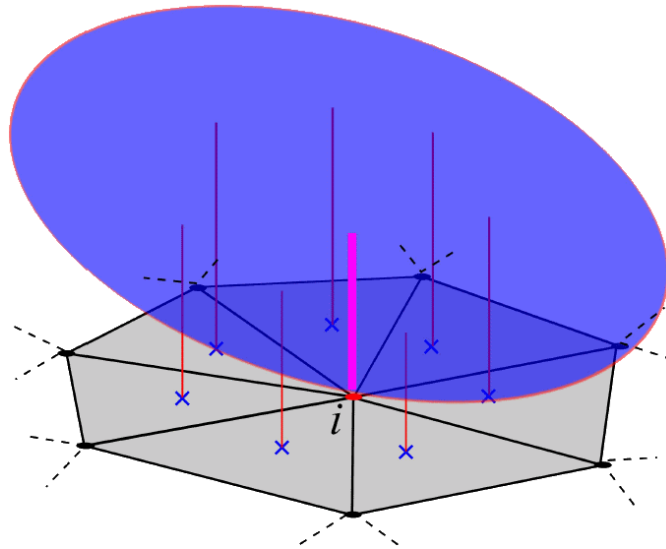


Figura 13: Representación de la superficie polinómica ajustada. En rosa la tensión evaluada en el nodo de ensamblado

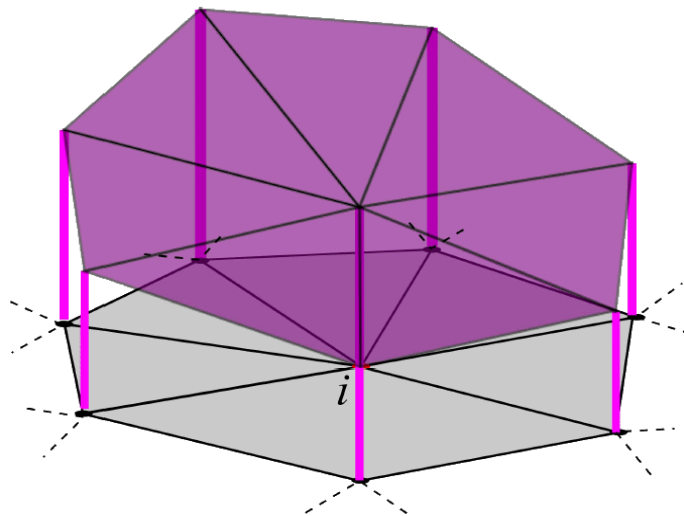


Figura 14: Representación del campo de tensiones reconstruido

Los sistemas de ecuaciones que se obtienen con este método están formados por tantas ecuaciones e incógnitas como términos tiene el polinomio ajustado. No obstante, para que la matriz de coeficientes del sistema sea de rango completo, deben considerarse al menos tantos puntos como grados de libertad tiene el sistema. La ecuación 10 se puede expresar como:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}(x_1)^T | \mathbf{p}(x_2)^T | \dots | \mathbf{p}(x_{NGP})^T] [\mathbf{p}(x_1) | \mathbf{p}(x_2) | \dots | \mathbf{p}(x_{NGP})] = \mathbf{A}_T \mathbf{A} \quad (13)$$

y si estudiamos los rangos de las matrices obtenemos que, para $\mathbf{a}_i = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}^T$:

$$\text{rango}(\mathbf{A}_T) = \text{rango}(\mathbf{A}) \leq \min(k, NGP) \quad (14)$$

$$\text{rango}(\mathbf{M}) \leq \text{rango}(\mathbf{A}) \leq \min(k, NGP) \quad (15)$$

Por lo tanto, los sistemas de ecuaciones que se resolverán serán siempre compatibles, mientras que para que sean determinados deberá realizarse el muestreo en un número de puntos suficiente y correctamente distribuidos. Es posible encontrar casos en los que el patch asociado al nodo de ensamblado no satisface estas exigencias. En estos casos, será necesario expandir el dominio del patch con elementos contiguos para aumentar el número de puntos y así conseguir un sistema de ecuaciones determinado.

Si consideramos un patch formado por dos elementos lineales y aplicamos la técnica SPR, el polinomio que queremos ajustar será de grado uno y, dado que solo tenemos dos puntos de muestreo, cualquier plano que pase por la recta que definen estos dos puntos sería solución. Si ahora ampliamos el patch, deberemos tener en cuenta que el nuevo punto no quede alineado con los dos anteriores y, de esta forma, podremos calcular los coeficientes del polinomio. En la Figura 15 se muestra esta situación, no siendo el elemento marcado en azul válido para la ampliación.

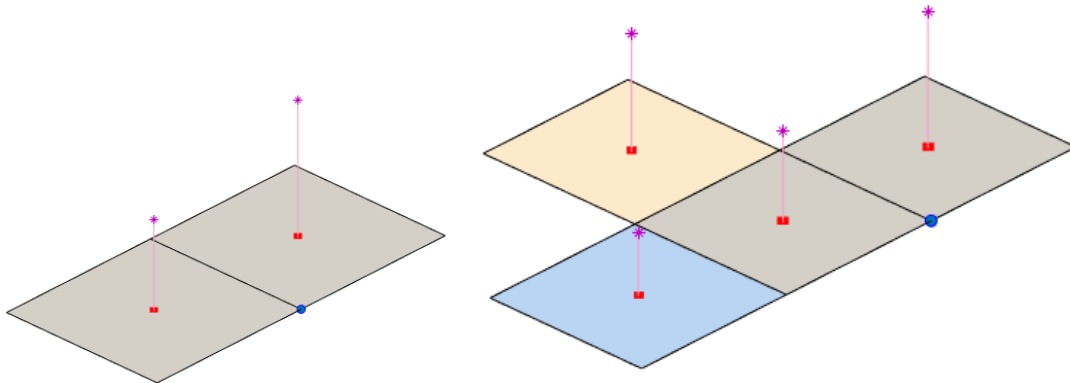


Figura 15: Patch con puntos de superconvergencia alineados y posibles elementos de ampliación del patch. El elemento azul no resuelve la linealidad, el naranja permite definir un plano

Incluso en aquellos casos en los que el sistema sea determinado, puede ser conveniente ampliar el dominio del patch. Para ciertas configuraciones, los valores de las tensiones nodales pueden ser muy sensibles a las variaciones a los valores de muestreo. Esto supone que pequeños errores en las tensiones de partida dan lugar a tensiones nodales con baja precisión. En estos casos, es conveniente aumentar el número de puntos para reducir los errores derivados del cálculo.

Hemos visto que la técnica SPR conlleva un proceso que tiene lugar a nivel local y que se basa en la resolución de sistemas de ecuaciones de un número reducido de incógnitas. Es por ello que su coste computacional es bajo. Esto unido a la robustez de la técnica hace que sea uno de los métodos más extendidos para la reconstrucción del campo de tensiones y la estimación del error de la solución de EF.

Limitaciones de la técnica SPR

La precisión de los resultados obtenidos mediante el SPR no es la misma para todo el dominio. Hay un claro contraste entre el error asociado a las tensiones nodales del interior del dominio y de la frontera, siendo notablemente superiores para este segundo caso. Esta diferencia de precisión hace que los cálculos del error en los elementos de contorno tengan una menor efectividad que para los elementos internos.

A continuación, se presenta un problema que muestra este comportamiento. Se trata de un cilindro sometido a presión interna (Figura 16). Teniendo en cuenta que este problema es simétrico con respecto a cualquier plano que pase por su centro, únicamente se ha modelado un cuarto de la sección. Para el análisis, se ha usado una malla de elementos cuadráticos triangulares y, posteriormente, se ha aplicado la técnica SPR para obtener un campo de tensiones suavizado.

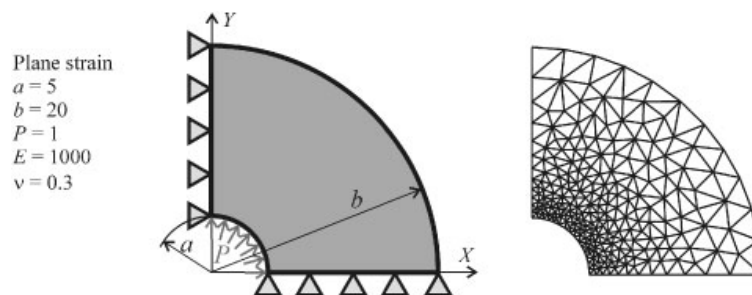


Figura 16: Modelo de un cilindro sujeto a presión interna y malla h-adaptada de triángulos cuadráticos

Los resultados que se muestran en la Figura 17 son los errores del campo σ_y^* con respecto a misma componente de la tensión exacta. Se puede ver fácilmente como el error en los elementos de contorno es mucho mayor que si se tienen en cuenta los del interior del dominio.

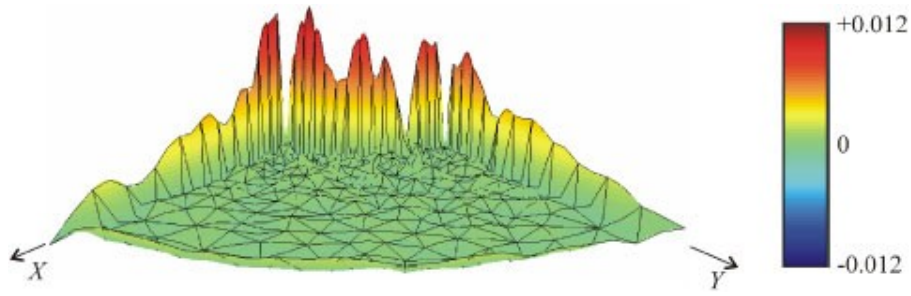


Figura 17: Cilindro sometido a presión interna. Error en la tensión recuperada σ_{YY}^*

Dada la difusión que tiene este procedimiento dentro de la comunidad de elementos finitos, numerosos investigadores han propuesto modificaciones para aumentar su robustez en estas zonas. Estas modificaciones buscan utilizar la información disponible de la propia definición del problema para mejorar el campo suavizado. De una u otra forma, se modifica la técnica SPR considerando la ecuación de equilibrio interno y las condiciones de contorno del problema para aumentar su calidad y robustez.

Para poder añadir las restricciones es necesario procesar la información de partida y resolver de forma acoplada las distintas componentes de la tensión. Este hecho supone que es más costoso configurar los sistemas de ecuaciones y que estos son mayores tanto en número de incógnitas como de ecuaciones. En consecuencia, el coste computacional aumenta.

Sin embargo, en ciertas aplicaciones, este incremento del tiempo de cálculo es justificado. Un ejemplo lo encontramos en la formulación de contacto planteada por el Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica de la Universidad Politécnica de Valencia:

$$opt \left\{ \begin{array}{l} \Pi(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\kappa_1} \int_{\Gamma_C^{(1)}} [\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}^{(1)} + \kappa_1 g_N]_-^2 - \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 d\Gamma + \\ + \frac{1}{2\kappa_1} \int_{\Gamma_C^{(1)}} \|P_B(\boldsymbol{\lambda} - \kappa_1 \mathbf{g})\|^2 d\Gamma - \frac{1}{2\kappa_2} \int_{\Gamma_C^{(1)}} \|\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{T}^*\|^2 d\Gamma \end{array} \right\} \quad (16)$$

En la que la que la velocidad de convergencia hacia la solución depende directamente de la calidad del campo de tensiones alisado en la zona de contacto por medio de \mathbf{T}^* .

Mejora de la reconstrucción de tensiones: técnica SPR-C

La técnica SPR-C es una modificación de la técnica SPR original con el objetivo de mejorar el valor de las tensiones nodales. Para ello, se aplican ecuaciones de restricción al cálculo de los coeficientes \mathbf{a} de tal manera que los polinomios ajustados satisfagan tanto las ecuaciones de equilibrio en el interior del dominio como las condiciones de contorno en la frontera, en la medida en que el grado de la representación de las tensiones lo permita. En términos generales, el polinomio no es lo suficientemente rico como para cumplir de forma completa las ecuaciones de equilibrio interno, compatibilidad, equilibrio en el contorno y contornos de simetría. En el caso de encontrar un campo que respete simultáneamente y de forma exacta todas estas restricciones, estaríamos ante el campo de tensiones real.

Al igual que la técnica SPR, la SPR-C parte de un conjunto de elementos contiguos que comparten un mismo nodo vértices, los cuales conforman el patch. Sobre cada patch, se realiza la expansión polinómica del campo de tensiones expresando cada una de sus componentes como de acuerdo con la ecuación $\sigma_i^*(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{a}_i$. Sin embargo, este nuevo procedimiento no resuelve de forma independiente los distintos términos del vector de tensiones, sino que todos ellos se consideran de manera simultánea para poder aplicar las ecuaciones de restricción. Por tanto, el campo de tensiones reconstruido se expresa en el caso de problemas 2D como:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(x) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^*(x) \\ \sigma_{yy}^*(x) \\ \sigma_{xy}^*(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{p}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{xx} \\ \mathbf{a}_{yy} \\ \mathbf{a}_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{P}(x)\mathbf{A} \quad (17)$$

y para problemas 3D:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(x) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^*(x) \\ \sigma_{yy}^*(x) \\ \sigma_{zz}^*(x) \\ \sigma_{xy}^*(x) \\ \sigma_{yz}^*(x) \\ \sigma_{xz}^*(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p}(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{p}(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{p}(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{p}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{p}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{xx} \\ \mathbf{a}_{yy} \\ \mathbf{a}_{zz} \\ \mathbf{a}_{xy} \\ \mathbf{a}_{yz} \\ \mathbf{a}_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{P}(x)\mathbf{A} \quad (18)$$

Para obtener los coeficientes \mathbf{A} de estos campos, se minimiza el siguiente funcional en el dominio del patch Ω_p :

$$\phi'_{SPR-C}(\mathbf{A}) = \int_{\Omega_p} \left(\mathbf{P}(x) \mathbf{A} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(x)) \right)^2 d\Omega \quad (19)$$

Como resultado se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que puede ser resuelto para cada patch:

$$\mathbf{MA} = \mathbf{H} \quad (20)$$

donde \mathbf{M} y \mathbf{H} representan:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_p} \mathbf{P}(x)^T \mathbf{P}(x) d\Omega \quad (21)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega_p} \mathbf{P}(x)^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(x)) d\Omega \quad (22)$$

que tras calcular la integral numéricamente quedan como:

$$\mathbf{M} = \sum_i^{NGP} \mathbf{P}(x_i)^T \mathbf{P}(x_i) \omega_i |\mathbf{J}(x_i)| \quad (23)$$

$$\mathbf{H} = \sum_i^{NGP} \mathbf{P}(x_i)^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(x)) \omega_i |\mathbf{J}(x_i)| \quad (24)$$

donde NGP es el número de puntos de integración en el dominio del patch, que no serán superconvergentes necesariamente, ω_i es el peso asociado a cada punto de integración x_i y $\mathbf{J}(x_i)$ es la matriz Jacobiana que permite la transformación de coordenadas para la integración numérica.

Hasta este momento, se ha obtenido un sistema de ecuaciones lineales que permite obtener las distintas componentes del campo de tensiones de una forma muy semejante a la técnica SPR original. A pesar de que hasta el momento no se ha añadido ninguna restricción adicional, el fundamento de la técnica SPR-C guarda una diferencia sustancial con respecto a su precursora. La formulación de la SPR-C en términos de integrales pone de manifiesto una aproximación continua al problema, mientras que la SPR discretiza el problema.

Desde esta nueva perspectiva, se busca calcular un campo de tensiones del mismo grado que el campo de desplazamiento que minimice el error con respecto a las tensiones de elementos finitos en el dominio del patch. Este planteamiento es más acertado cuando se utilizan métodos de elementos finitos con malla regular y geometría sumergida. Tal es el caso de cgFEM. La ponderación de los distintos puntos de integración x_i mediante unos pesos $\omega_i |\mathbf{J}(x_i)|$ permite tener en cuenta la diferente densidad de puntos de integración que se da entre los elementos internos y los de contorno. Una aproximación discreta en estos casos daría lugar a un campo de tensiones desplazado hacia los valores del elemento con mayor número de puntos.

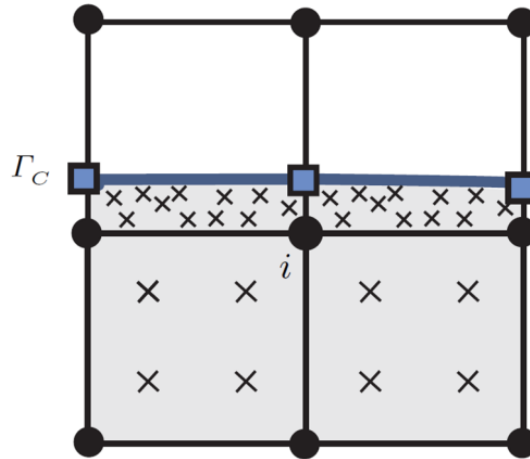


Figura 18: Diferente densidad de puntos entre los elementos de contorno e interiores.

Continuando con la reconstrucción según la técnica SPR-C, debemos formular las restricciones que consideren la información conocida del problema elástico lineal durante el proceso de recuperación de tensiones. Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange es posible obligar a que el campo de tensiones cumpla, al menos de forma parcial, las ecuaciones de equilibrio interno, compatibilidad, equilibrio en el contorno y contornos de simetría.

Centrándonos en el alisado para mallados cartesianos, es necesario mencionar que, en función del tipo de patch, las restricciones que se aplican son distintas. De esta forma distinguimos:

- Patches internos: todos sus elementos están completamente contenidos dentro del dominio del problema. Las restricciones que se les aplican son:
 - Ecuación de equilibrio interno
 - Ecuación de compatibilidad
- Patches de contorno: uno o más de los elementos que conforman el patch son intersectados por la frontera del problema. En función de las condiciones de contorno que se impongan en la frontera que intersecta el patch distinguiremos:
 - Patches con desplazamientos impuestos: las restricciones que se les aplican son:
 - Ecuación de equilibrio interno
 - Ecuación de compatibilidad
 - Patches con tracciones impuestas: las restricciones que se les aplican son:
 - Ecuación de equilibrio interno
 - Ecuación de compatibilidad
 - Ecuación de equilibrio en el contorno para tracciones impuestas
 - Patches de simetría: las restricciones que se les aplican son:
 - Ecuación de equilibrio interno
 - Ecuación de compatibilidad
 - Ecuación de contorno de simetría

- Patches de contacto: las restricciones que se les aplican son:
 - Ecuación de equilibrio interno
 - Ecuación de compatibilidad
 - Ecuación de equilibrio en el contorno para tracciones impuestas
 - Ecuación de equilibrio entre cuerpos

Puede darse el caso en el que dos fronteras con condiciones de contorno distintas intersecten un mismo patch de contorno. En estos casos se tendrá en cuenta la frontera que tenga una mayor longitud (2D) o área (3D) contenida en el patch. Una excepción ocurre cuando uno de los contornos es de contacto. En este caso, siempre se impondrán las restricciones para este tipo de frontera. Dado que esta técnica se aplicará para la obtención de un campo de tensiones que establezca la formulación de contacto, es esencial que la calidad del campo sea máxima en las zonas en que los cuerpos interactúan.

Pasamos a explicar de forma detallada como se aplica cada una de las distintas restricciones.

Imposición de ecuación de Equilibrio Interno

Consideremos un elemento diferencial contenido dentro del dominio de un problema elástico bidimensional. Para que este elemento se encuentre en equilibrio estático es necesario que el sumatorio de fuerzas y momentos que actúa sobre él sea nulo. Estas acciones provienen, bien del campo de tensiones $\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}$, bien de las fuerzas por unidad de volumen $\mathbf{b} = \{b_x, b_y\}$.

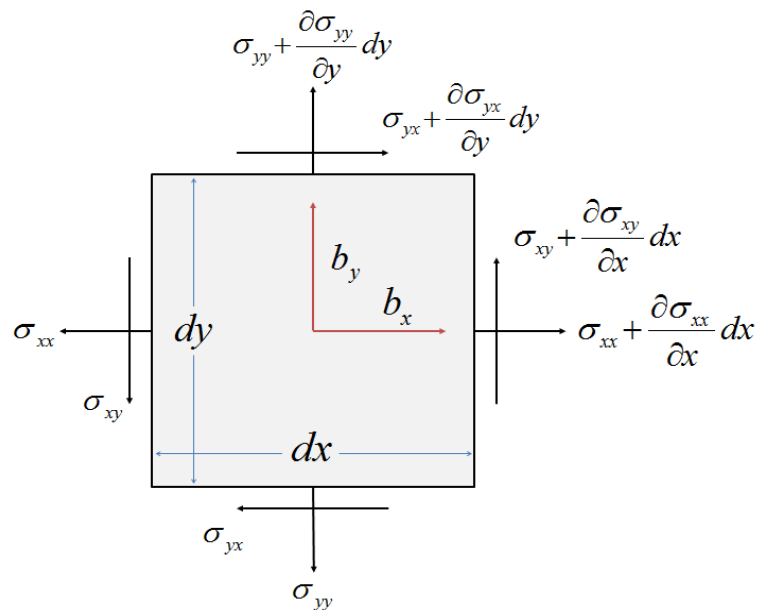


Figura 19: Cargas aplicadas sobre el elemento diferencial de volumen en el interior del dominio

Si consideramos el elemento diferencial de volumen $dV = t dx dy$, de espesor constante t , el equilibrio estático de fuerzas requerirá:

$$-\sigma_{xx} t dy - \sigma_{yx} t dx + \sigma_{xx} t dy + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} t dx dy + \sigma_{yx} t dx + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} t dx dy + b_x t dx dy = 0 \quad (24)$$

$$-\sigma_{yy} t dx - \sigma_{xy} t dy + \sigma_{yy} t dx + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} t dx dy + \sigma_{xy} t dx + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} t dx dy + b_y t dx dy = 0 \quad (25)$$

y simplificando:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + b_x = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + b_y = 0 \quad (27)$$

En lo que respecta a los momentos podemos tomar como referencia el centro del elemento diferencial para obtener que el equilibrio de momentos se cumplirá si:

$$\sigma_{xy} t dx dy + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \frac{t}{2} dx^2 dy - \sigma_{yx} t dx dy - \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \frac{t}{2} dx dy^2 = 0 \quad (28)$$

de donde se obtiene:

$$\sigma_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx - \sigma_{yx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy = 0 \rightarrow \sigma_{xy} - \sigma_{yx} = 0 \quad (29)$$

Combinando estas tres ecuaciones se obtiene que, para que exista equilibrio estático, el campo de tensiones tiene que cumplir:

$$c_{2D}^{int} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + b_y = 0 \end{array} \right\} \quad (30)$$

Procediendo de forma análoga, se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio interno para el caso tridimensional:

$$c_{3D}^{int} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \end{array} \right\} \quad (31)$$

Estas ecuaciones las podemos escribir de forma matricial como:

$$c^{int}(\mathbf{x}): \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (32)$$

donde \mathbf{L} es el operador diferencial,

$$\mathbf{L}_{2D} = \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \\ D_y & D_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_{3D} = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_z \\ D_y & D_x & 0 \\ 0 & D_z & D_y \\ D_z & 0 & D_x \end{bmatrix} \quad \text{con } D_i = \frac{\partial}{\partial i} \quad (33)$$

Una vez obtenida esta formulación, vamos a aplicarla a la técnica de reconstrucción del campo de tensiones. Si tenemos en cuenta la ecuación 17 podremos reescribir (32) como:

$$c^{int}(\mathbf{x}): \mathbf{L}^T \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{A} + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (34)$$

Al analizar esta ecuación nos damos cuenta que el campo de tensiones alisado podrá satisfacer de forma completa la ecuación de equilibrio interno siempre y cuando el orden del campo de fuerzas volumétricas sea menor que $p - 1$, siendo p el grado del polinomio de aproximación del vector de tensiones. En la gran mayoría de casos prácticos, las fuerzas volumétricas se toman como nulas o están asociadas a fuerzas gravitatorias que se consideran contantes para todo el volumen. Para todos estos casos, la ecuación de equilibrio interno se podrá cumplir de forma exacta.

No obstante, como el orden de las fuerzas volumétricas no se conoce a priori, la ecuación 34 no puede imponerse en esta forma. Si el polinomio de aproximación del campo de tensiones no es lo suficientemente rico, al evaluar la ecuación de equilibrio interno aparecerá necesariamente un residuo cuyo valor dependerá del punto considerado:

$$c^{int}(\mathbf{x}): \mathbf{L}^T \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{A} + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x})_{int} \quad (35)$$

Si tenemos en cuenta esta expresión, podemos plantearnos imponer una restricción que busque minimizar el error entre los campos: $\mathbf{L}^T \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{A}$ y $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ en el dominio del patch. Esto supone minimizar el funcional que se corresponde con la normal L^2 del residuo $\mathbf{r}(\mathbf{x})_{int}$:

$$\phi^{int}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_p} \mathbf{r}(\mathbf{x})_{int}^2 d\Omega = \int_{\Omega_p} (\mathbf{L}^T \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{A} + \mathbf{b}(\mathbf{x}))^2 d\Omega \quad (36)$$

Por tanto, la ecuación de equilibrio en su forma general quedaría como:

$$c^{int}(\mathbf{x}): \int_{\Omega_p} \mathfrak{I}'(\mathbf{x})^T (\mathfrak{I}'(\mathbf{x}) \mathbf{A} + \mathbf{b}(\mathbf{x})) d\Omega \quad (36)$$

donde $\mathfrak{I}'(\mathbf{x})$ es la matriz que contiene las derivadas de los términos del polinomio de interpolación:

$$\mathfrak{I}'(\mathbf{x})_{2D} = \begin{bmatrix} D_x \mathbf{p}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & D_y \mathbf{p}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} & D_y \mathbf{p}(\mathbf{x}) & D_x \mathbf{p}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathfrak{I}(\mathbf{x})_{3D} = \begin{bmatrix} D_x \mathbf{p}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_y \mathbf{p}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & D_z \mathbf{p}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} & D_y \mathbf{p}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & D_x \mathbf{p}(\mathbf{x}) & D_z \mathbf{p}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_z \mathbf{p}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & D_z \mathbf{p}(\mathbf{x}) & D_x \mathbf{p}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (39)$$

con:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy \ \dots \} \\ D_x \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 0 \ 1 \ 0 \ 2x \ 0 \ y \ \dots \} \\ D_y \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2y \ x \ \dots \} \end{array} \right\}_{2D} \quad (40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 1 \ x \ y \ z \ x^2 \ y^2 \ z^2 \ xy \ yz \ xz \ \dots \} \\ D_x \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2x \ 0 \ 0 \ y \ 0 \ z \ \dots \} \\ D_y \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2y \ 0 \ x \ z \ 0 \ \dots \} \\ D_z \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2z \ 0 \ y \ x \ \dots \} \end{array} \right\}_{3D} \quad (41)$$

Si ahora obtenemos la integral numérica de la ecuación 36, la ecuación de restricción se expresará finalmente como:

$$c^{int}(\mathbf{x}): \sum_j^{NGP} \mathfrak{T}'(\mathbf{x}_j)^T \mathfrak{T}'(\mathbf{x}_j) \omega_j |\mathcal{J}(\mathbf{x}_j)| \mathbf{A} = - \sum_j^{NGP} \mathfrak{T}'(\mathbf{x}_j)^T \mathbf{b}(\mathbf{x}_j) \omega_j |\mathcal{J}(\mathbf{x}_j)| \quad (42)$$

Al aplicar esta formulación se obtendrán tantas ecuaciones como coeficientes definen el campo de tensiones aproximado, lo que supondría que, al forzar su cumplimiento, los coeficientes de la interpolación quedarían completamente definidos. No obstante, el número de ecuaciones linealmente independientes es considerablemente menor. Para seleccionar las filas linealmente independientes de la matriz de coeficientes del sistema es posible utilizar la factorización QR, obteniendo finalmente un sistema de n_{int} ecuaciones. Para el caso tridimensional con elementos lineales y fuerzas volumétricas constantes, el número de coeficientes es 24, mientras que el rango del sistema es 3.

Imposición de la ecuación de compatibilidad

Las ecuaciones de compatibilidad establecen las relaciones que se deben dar entre las componentes del campo de tensiones o deformaciones de tal manera que éstas puedan corresponderse con la existencia de un campo continuo de desplazamientos en el interior del sólido elástico. Las componentes del vector de deformaciones están directamente relacionadas con los desplazamientos mediante:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (43)$$

Teniendo en cuenta estas expresiones resulta evidente que deberá existir una relación entre las componentes del campo de deformaciones de modo que se pueda obtener un campo de desplazamiento $\{u, v, w\}^T$ que satisfaga de forma simultánea todas las ecuaciones.

Para obtener estas relaciones es necesario derivar las ecuaciones presentadas anteriormente. Para el caso bidimensional únicamente se tienen en cuenta ε_{xx} , ε_{yy} y ε_{xy} y, derivando de forma apropiada obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (44)$$

Dado que nuestro objetivo es obtener una ecuación para ser aplicada en la recuperación del campo de tensiones, es necesario que expresemos esta función en términos de tensiones. Para ello, reorganizamos la ecuación anterior y aplicamos la Ley de elasticidad de Hooke obteniendo:

$$\mathcal{L}' \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (45)$$

donde \mathcal{L}' es un operador derivada de segundo orden, \mathbf{C} es la matriz de flexibilidad del material y $\boldsymbol{\sigma}$ es el campo de tensiones:

$$\mathcal{L}' = \{D_{yy}^2 \quad D_{xx}^2 \quad -D_{xy}^2\}; \quad \mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Desarrollando la expresión, la ecuación de compatibilidad en el caso bidimensional quedaría como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{xx} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sigma_{yy} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sigma_{xy} = 0 \quad (46)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathcal{L}_{tp} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (47)$$

con

$$\mathcal{L}_{tp} = \{D_{yy}^2 - \nu D_{xx}^2 \quad D_{xx}^2 - \nu D_{yy}^2 \quad -2(1+\nu)D_{xy}^2\} \quad (48)$$

Esta formulación sería la aplicable en los casos de tensión plana, mientras que para deformación plana se debería sustituir el operador \mathcal{L}_{tp} por \mathcal{L}_{dp} :

$$\mathcal{L}_{tp} = \{(1-\nu)^2(D_{yy}^2 - \nu D_{xx}^2) \quad (1+\nu)(D_{xx}^2 - \nu D_{yy}^2) \quad -2(1+\nu)D_{xy}^2\} \quad (49)$$

Si consideramos ahora la ecuación 17, para el campo de tensiones reconstruido la igualdad anterior se escribirá como:

$$\mathcal{L}_i \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad i = tp, dp \quad (50)$$

Calculamos ahora las derivadas de segundo orden del polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, las cuales formarán parte de la ecuación de compatibilidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy \ \dots \} \\ D_{xx}^2 \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ \dots \} \\ D_{yy}^2 \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ \dots \} \\ D_{xy}^2 \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \} \end{array} \right\}_{2D} \quad (51)$$

Se puede comprobar que, si la aproximación del campo de tensiones es lineal, la ecuación de compatibilidad se satisface independientemente del valor de los coeficientes. Por ello solo, será necesario aplicarla cuando el orden de polinomio sea mayor o igual que 2. Además, y al contrario que ocurría en el caso de la ecuación de equilibrio interno, la ecuación de compatibilidad siempre podrá satisfacerse de forma exacta. Esto es debido a que se estará ajustando un polinomio de grado $p - 2$, siendo p el grado del campo de tensiones, a un campo con valor contante nulo.

Para que el campo alisado de tensiones cumpla la condición de compatibilidad en cualquier punto del dominio, habrá que desarrollar la ecuación 50 de forma analítica y posteriormente igualar a cero cada uno de los coeficientes que multiplican a la parte literal del polinomio. Este procedimiento dará lugar a un sistema con tantas ecuaciones como términos integren el polinomio. Para la aproximación en elementos cuadráticos nos encontramos únicamente con el término constante y es posible expresar la ecuación de compatibilidad como:

- Considerando tensión plana:

$$c^{comp}: a_{xx5} - \nu a_{xx4} + a_{yy4} - \nu a_{yy5} - 2(1 + \nu)a_{xy6} = 0 \quad (52)$$

- Considerando deformación plana:

$$c^{comp}: (1 - \nu)(a_{xx5} - \nu a_{xx4}) + (a_{yy4} - \nu a_{yy5}) - 2a_{xy6} = 0 \quad (53)$$

en las que se ha tenido en cuenta:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{a}_{ij} = a_{ij1} + a_{ij2}x + a_{ij3}y + a_{ij4}x^2 + a_{ij5}y^2 + a_{ij6}xy \quad (54)$$

$$i = x, y \quad j = x, y$$

En el caso tridimensional, es necesario considerar todas las componentes del vector de deformaciones ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , ε_{xy} , ε_{yz} y ε_{xz} . Si derivamos convenientemente, llegamos a un conjunto de seis expresiones que constituyen las ecuaciones de compatibilidad. Éstas se pueden representar de forma resumida como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{nn}}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{pp}}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{np}}{\partial n \partial p} &= 0 \quad n = x, y, z \quad p = x, y, z \quad n \neq p \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{nn}}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{pq}}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{np}}{\partial n \partial q} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{nq}}{\partial n \partial p} &= 0 \quad n = x, y, z \quad p = x, y, z \quad q = x, y, z \quad n \neq p \neq q \end{aligned} \quad (55)$$

Procediendo del mismo modo que para el caso bidimensional, podemos utilizar la Ley de Hooke para expresar estas igualdades en función de las tensiones:

$$\mathcal{L}'\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (56)$$

con:

$$\mathcal{L}' = \begin{Bmatrix} D_{yy}^2 & D_{xx}^2 & 0 & -D_{xy}^2 & 0 & 0 \\ 0 & D_{zz}^2 & D_{yy}^2 & 0 & -D_{yz}^2 & 0 \\ D_{zz}^2 & 0 & D_{xx}^2 & 0 & 0 & -D_{xz}^2 \\ 2D_{yz}^2 & 0 & 0 & -D_{xz}^2 & D_{xx}^2 & -D_{xy}^2 \\ 0 & 2D_{xz}^2 & 0 & -D_{yz}^2 & -D_{xy}^2 & D_{yy}^2 \\ 0 & 0 & 2D_{xy}^2 & D_{zz}^2 & -D_{xz}^2 & -D_{yz}^2 \end{Bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz}\}^T$$

Sustituyendo el $\boldsymbol{\sigma}$ por el campo de tensiones reconstruido llegamos nuevamente a la expresión:

$$\mathcal{L}\mathbf{P}(x)\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (59)$$

donde:

$$\mathcal{L} = \begin{Bmatrix} D_{yy}^2 - \nu D_{xx}^2 & D_{xx}^2 - \nu D_{yy}^2 & -\nu(D_{xx}^2 + D_{yy}^2) & -2(1+\nu)D_{xy}^2 & 0 & 0 \\ -\nu(D_{yy}^2 + D_{zz}^2) & D_{zz}^2 - \nu D_{yy}^2 & D_{yy}^2 - \nu D_{zz}^2 & 0 & -2(1+\nu)D_{yz}^2 & 0 \\ D_{zz}^2 - \nu D_{xx}^2 & -\nu(D_{xx}^2 + D_{zz}^2) & D_{xx}^2 - \nu D_{zz}^2 & 0 & 0 & -2(1+\nu)D_{xz}^2 \\ 2\nu D_{yz}^2 & -2\nu D_{yz}^2 & -2\nu D_{yz}^2 & -2(1+\nu)D_{xz}^2 & 2(1+\nu)D_{xx}^2 & -2(1+\nu)D_{xy}^2 \\ -2\nu D_{xz}^2 & 2\nu D_{xz}^2 & -2\nu D_{xz}^2 & -2(1+\nu)D_{yz}^2 & -2(1+\nu)D_{xy}^2 & 2(1+\nu)D_{yy}^2 \\ -2\nu D_{xy}^2 & -2\nu D_{xy}^2 & 2\nu D_{xy}^2 & 2(1+\nu)D_{zz}^2 & -2(1+\nu)D_{xz}^2 & -2(1+\nu)D_{yz}^2 \end{Bmatrix} \quad (60)$$

Como para el caso bidimensional, en el espacio también se cumple que una reconstrucción lineal satisface implícitamente la ecuación de compatibilidad. Por lo que no

será necesario imponer la restricción de manera explícita. En el caso de polinomios de grado mayor, se procede de forma semejante a como se hizo en el caso de plano, resolviendo de forma analítica e igualando a cero los coeficientes de la parte literal del polinomio. Nuevamente, planteamos las ecuaciones que se obtendrían considerando un campo alisado de tensiones cuadrático y, por tanto, cuyas derivadas segundas son constantes. El resultado son tantas ecuaciones de restricción como ecuaciones de compatibilidad:

$$c^{comp}: \left\{ \begin{array}{l} a_{xx6} - \nu a_{xx5} + a_{yy5} - \nu a_{yy6} - \nu(a_{zz5} - \nu a_{zz6}) - 2(1 + \nu)a_{xy8} = 0 \\ -\nu(a_{xx6} - \nu a_{xx7}) + a_{yy6} - \nu a_{yy7} + a_{zz7} - \nu a_{zz6} - 2(1 + \nu)a_{yz9} = 0 \\ a_{xx7} - \nu a_{xx5} - \nu(a_{yy5} - \nu a_{zz7}) + a_{zz5} - \nu a_{zz7} - 2(1 + \nu)a_{xz10} = 0 \\ \nu(-a_{xx9} + a_{yy9} + a_{zz9}) + (1 + \nu)(a_{xy10} - a_{yz5} + a_{xy8}) = 0 \\ \nu(a_{xx10} - a_{yy10} + a_{zz10}) + (1 + \nu)(a_{xy9} + a_{yz8} - a_{xy6}) = 0 \\ \nu(a_{xx8} + a_{yy8} - a_{zz8}) + (1 + \nu)(-a_{xy7} + a_{yz10} + a_{xy9}) = 0 \end{array} \right. \quad (61)$$

donde se ha considerado:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{a}_{ij} = \\ &= a_{ij1} + a_{ij2}x + a_{ij3}y + a_{ij4}z + a_{ij5}x^2 + a_{ij6}y^2 + a_{ij7}z^2 + a_{ij8}xy + a_{ij9}yz + a_{ij10}xz \\ & \quad i = x, y, z \quad j = x, y, z \end{aligned} \quad (62)$$

Imposición de la ecuación de equilibrio en contornos con tracciones impuestas

Las tensiones en la frontera deben ser tales que se encuentren en equilibrio con las fuerzas de superficie que actúan en el contorno del cuerpo. Esto supone que en cualquier punto de la frontera debe cumplirse que el vector de fuerzas superficiales externas sea igual al vector de tracciones en dicho punto. Esta igualdad se podrá dar ya que las fuerzas de superficie tienen unidades de fuerza por unidad de superficie y por tanto de tensión.

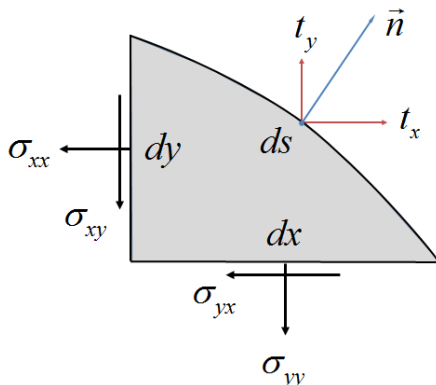


Figura 20: Elemento diferencial sometido a cargas externas

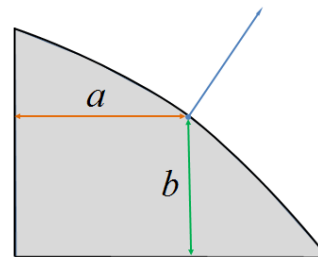


Figura 21: Distancias a y b del elemento diferencial

Consideremos un elemento diferencial en el contorno del dominio para un problema bidimensional. Las fuerzas debidas a las acciones externas serán iguales al valor de las fuerzas superficiales $t = \{t_x, t_y\}$ por el área sobre la que actúan dA , que considerando un espesor t constante se puede escribir como $dA = tds$.

A partir de este planteamiento escribimos el balance de fuerzas y momentos para el elemento diferencial:

$$\sum F_x = -\sigma_{xx}tdy - \sigma_{yx}tdx + t_x tds = 0 \quad (63)$$

$$\sum F_y = -\sigma_{yy}tdx - \sigma_{xy}tdy + t_y tds = 0 \quad (64)$$

$$\sum M = a\sigma_{xy}tdy + \left(a - \frac{dx}{2}\right)\sigma_{yy}tdx - b\sigma_{yx}tdx - \left(b - \frac{dy}{2}\right)\sigma_{xx}tdy = 0 \quad (65)$$

Dado que las dimensiones del elemento son de orden diferencial, puede despreciarse la curvatura que la frontera ds . Esto supone que $a = dx/2$ y que $b = dy/2$. Tenemos en cuenta esta consideración y reescribimos las ecuaciones:

$$\sigma_{xx} \frac{dy}{ds} + \sigma_{xy} \frac{dx}{ds} = -t_x \quad (66)$$

$$\sigma_{yy} \frac{dx}{ds} + \sigma_{xy} \frac{dy}{ds} = -t_y \quad (67)$$

$$\sigma_{xy} \frac{dx}{2} dy - \sigma_{yx} dx \frac{dy}{2} = 0 \rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (68)$$

Al despreciar la curvatura de ds , los términos dy/ds y dx/ds tienen un significado geométrico, ya que estos coeficientes se corresponden con los cosenos directores de la normal exterior al contorno. Esto es que $\mathbf{n} = \{dy/ds \ dx/ds\}^T = \{n_x \ n_y\}^T$, pudiendo replantearse las ecuaciones como:

$$n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} = -t_x \quad (69)$$

$$n_y \sigma_{yy} + n_x \sigma_{xy} = -t_y \quad (70)$$

Si planteamos el sistema de ecuaciones de forma matricial podemos obtener la expresión general de las ecuaciones de equilibrio en el contorno:

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} \quad (71)$$

donde \mathbf{G} es la matriz de rotación de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de tensiones en el punto y \mathbf{t} es el vector de fuerzas superficiales. La forma de la matriz de rotación para problemas bidimensionales y tridimensionales será, respectivamente:

$$\mathbf{G}_{2D} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (72)$$

y

$$\mathbf{G}_{3D} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (73)$$

donde n_x , n_y y n_z son los cosenos directores de la normal exterior al contorno.

Se podría haber llegado a la misma relación igualando el vector tensor al de fuerzas de superficie. Este vector de tracciones lo podemos calcular a partir del tensor de tensiones de Cauchy. Con este planteamiento, la formulación quedaría:

$$[\mathbf{T}]\mathbf{n} = \mathbf{t} \quad (74)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal al contorno y $[\mathbf{T}]$ es el mencionado tensor de tensiones, que tiene la forma:

$$[\mathbf{T}]_{3D} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (75)$$

para el caso plano y para el espacial:

$$[\mathbf{T}]_{3D} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Esta última formulación del equilibrio en el contorno nos será útil más adelante. Sin embargo, para establecer las ecuaciones de restricción en el caso de tracciones impuestas utilizaremos la que hace uso de la matriz de rotación. Consideramos la forma polinómica de $\sigma^*(\mathbf{x})$ utilizada en la reconstrucción del campo de tensiones y pasamos los términos a la izquierda de la igualdad para obtener la expresión:

$$c^{ext}(\mathbf{x}): \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A} - \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (77)$$

La capacidad del polinomio de aproximación para satisfacer la ecuación dependerá tanto del grado de las tracciones impuestas como de la geometría de la frontera. Esto hace necesaria la obtención de una ecuación alternativa que pueda ser aplicada a cualquier problema.

Recurrimos a un planteamiento como el que se ha seguido para los casos anteriores, en el que buscamos ajustar el campo de tensiones reconstruido de tal manera que el error que se comete en la ecuación de equilibrio en el contorno sea mínimo considerando el dominio del patch. Para ello es necesario añadir a la ecuación 77 un término que recoja este error y, el cual será variable con la posición:

$$c^{ext}(\mathbf{x}): \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A} - \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x})_{ext} \quad (78)$$

Teniendo en cuenta esta igualdad, la cual se cumple para cualquier problema, buscaremos minimizar la norma L^2 del residuo. Siendo este funcional:

$$\phi^{ext}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_p} \mathbf{r}(\mathbf{x})_{ext}^2 d\Gamma = \int_{\Gamma_p} (\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A} - \mathbf{t}(\mathbf{x}))^2 d\Gamma \quad (79)$$

En comparación con los funcionales considerados hasta el momento, es importante destacar que, en este caso, el dominio de integración ha cambiado. Hasta ahora las integrales eran del mismo número que dimensiones que el problema considerado, mientras que para el caso del equilibrio en el contorno ésta es una dimensión menor. El motivo es evidente, ya que la ecuación que se está considerando solo tiene aplicación en la frontera del dominio, la cuál será una superficie en el caso tridimensional, una línea en el bidimensional o un punto en el unidimensional.

Si minimizamos el funcional e integramos numéricamente el resultado obtenemos la ecuación matricial:

$$c^{ext}(\mathbf{x}): \sum_j^{ngps} \mathbf{E}(\mathbf{x}_j)^T \mathbf{E}(\mathbf{x}_j) \omega_j |\mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_j))| \mathbf{A} = \sum_j^{ngps} \mathbf{E}(\mathbf{x}_j)^T \mathbf{t}(\mathbf{x}_j) \omega_j |\mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_j))| \quad (80)$$

donde $\mathbf{E}(\mathbf{x}_j)$ es la matriz que resulta de multiplicar cada uno de los términos de la matriz de rotación de Cauchy por $\mathbf{p}(\mathbf{x}_j)$ (ecuación 81-82), ω_j es el peso asociado a cada uno de los puntos de integración, $\mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_j))$ es la matriz de Jacobinada para la transformación de coordenadas, $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j)$ son las coordenadas en el dominio de la frontera asociada a \mathbf{x}_j y cada uno de los términos se evalúa en $ngps$ puntos contenidos en la frontera del problema que queda recogida dentro del dominio del patch.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})_{2D} = \begin{bmatrix} n_x(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) & 0 & n_y(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) \\ 0 & n_y(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) & n_x(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})_{3D} = \begin{bmatrix} n_x(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) & 0 & 0 & n_y(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) & 0 & n_z(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) \\ 0 & n_y(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) & 0 & n_x(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) & n_z(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & n_z(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) & 0 & n_y(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) & n_x(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (82)$$

Cabe mencionar que el cálculo la ecuación que se ha planteado obliga a realizar dos transformaciones de coordenadas. Al estar $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ definido en el dominio del problema, es necesario realizar una primera transformación al dominio de la frontera y posteriormente a un espacio apropiado para realizar la integración numérica.

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u} \rightarrow \xi$$

El resultado que obtenemos finalmente es, como ocurría en los casos anteriores, un sistema de ecuaciones compatible indeterminado. Cuando estudiamos las filas linealmente independientes de la matriz de coeficientes del sistema, vemos que varía en función de la geometría de la frontera. Esto es así ya que la definición del contorno afecta tanto a los vectores normales como a la relación entre las componentes de \mathbf{x} . El cumplimiento de estas ecuaciones por parte de campo de tensiones reconstruido se impondrá usando multiplicadores de Lagrange.

Imposición de la ecuación de equilibrio en contornos de simetría

Los contornos de simetría se aplican a aquellas fronteras que se corresponden con un eje (problemas bidimensionales) o un plano (problemas tridimensionales) de simetría reflexiva tanto a nivel de la morfología y propiedades del cuerpo como a nivel de las condiciones de contorno cinemáticas o de cargas aplicadas. Como consecuencia, los campos de desplazamientos que aparecen tienen unas propiedades específicas.

Consideremos un elemento diferencial en un contorno de simetría correspondiente a un problema bidimensional. Definiremos un sistema dextrógiro de coordenadas ortogonales $\{\xi, \eta\}$ sobre la frontera del dominio de tal forma que la dirección del eje ξ sea coincidente con la de la normal al contorno.

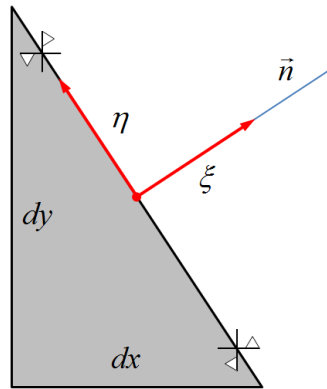


Figura 22: Elemento diferencial sobre el contorno de simetría. Sistema de referencia local $\{\xi, \eta\}$

Teniendo en cuenta este sistema de coordenadas, la condición de simetría establece que:

$$u_{\xi,\eta}(\xi, \eta) = -u_{\xi,\eta}(-\xi, \eta) \quad ; \quad v_{\xi,\eta}(\xi, \eta) = v_{\xi,\eta}(-\xi, \eta) \quad (83)$$

donde $u_{\xi,\eta}$ es el campo de desplazamientos en la dirección perpendicular a la frontera y $v_{\xi,\eta}$ es el campo de desplazamientos en la dirección tangente a la frontera. De la segunda expresión es posible deducir una nueva condición procediendo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Delta v_{\xi,\eta}^{\xi+} &= v_{\xi,\eta}(\xi_0 + \Delta\xi, \eta) - v_{\xi,\eta}(\xi_0, \eta) \\ \Delta v_{\xi,\eta}^{\xi-} &= v_{\xi,\eta}(-\xi_0, \eta) - v_{\xi,\eta}(-\xi_0 - \Delta\xi, \eta) = v_{\xi,\eta}(\xi_0, \eta) - v_{\xi,\eta}(\xi_0 + \Delta\xi, \eta) = -\Delta v_{\xi,\eta}^{\xi+} \\ \frac{\partial v_{\xi,\eta}^{\xi+}}{\partial \xi} &= \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\xi,\eta}^{\xi+}}{\Delta\xi} = - \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\xi,\eta}^{\xi-}}{\Delta\xi} = - \frac{\partial v_{\xi,\eta}^{\xi-}}{\partial \xi} \end{aligned}$$

donde el superíndice positivo y negativo representan que el campo se evalúa para valores positivos y negativos de ξ . Esta última condición se puede reescribir como:

$$\frac{\partial v_{\xi,\eta}}{\partial \xi}(\xi, \eta) = -\frac{\partial v_{\xi,\eta}}{\partial \xi}(-\xi, \eta) \quad (84)$$

Si evaluamos estas expresiones sobre el contorno de simetría, esto es cuando $\xi = 0$ obtendremos que:

$$u_{\xi,\eta}(0, \eta) = 0 \rightarrow \frac{\partial u_{\xi,\eta}}{\partial \eta}(0, \eta) = 0 \quad (85)$$

$$\frac{\partial v_{\xi,\eta}}{\partial \xi}(0, \eta) = 0 \quad (86)$$

Teniendo en cuenta la formulación de las componentes del campo de deformaciones en función de los desplazamientos podemos determinar:

$$\varepsilon_{\xi\eta}(0, \eta) = \frac{\partial u_{\xi,\eta}}{\partial \eta}(0, \eta) + \frac{\partial v_{\xi,\eta}}{\partial \xi}(0, \eta) = 0 \quad (86)$$

y considerando la relación entre tensiones y deformaciones:

$$\sigma_{\xi\eta}(0, \eta) = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{\xi\eta}(0, \eta) = 0 \quad (87)$$

Esta última ecuación representa la condición de simetría expresada en términos de tensiones y establece que las tensiones tangenciales al plano de simetría son nulas en la frontera. Este enunciado también es válido para el caso tridimensional y se formularía como:

$$\sigma_{\xi i}(0, \eta, \tau) = 0 \quad i = \eta, \tau \quad (88)$$

Para poder imponer que el campo de tensiones reconstruido cumpla esta restricción es necesario cambiar la orientación del tensor de tensores de Cauchy para expresar el campo según los ejes del sistema de referencia $\{\xi, \eta\}$, $\{\xi, \eta, \tau\}$. La formulación que debemos usar con este objetivo es:

$$[\mathbf{T}]_{\xi,\eta} = \mathbf{R}_{2D}^T [\mathbf{T}]_{x,y} \mathbf{R}_{2D} \quad ; \quad [\mathbf{T}]_{\xi,\eta,\tau} = \mathbf{R}_{3D}^T [\mathbf{T}]_{x,y,\tau} \mathbf{R}_{3D} \quad (89)$$

donde $[\mathbf{T}]_{x,y}$ es el tensor de tensiones expresadas en el sistema de referencia $\{x, y\}$, $[\mathbf{T}]_{\xi,\eta}$ es el vector de tensiones expresadas en el sistema de referencia $\{\xi, \eta\}$ y \mathbf{R}_{2D} es la matriz de cambio de ejes (de forma equivalente para el caso tridimensional). La matriz de cambio de ejes es una matriz cuadrada que se forma de la siguiente manera:

$$\mathbf{R}_{2D} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\xi,\eta}^{x,y} & \mathbf{j}_{\xi,\eta}^{x,y} \end{bmatrix} \quad (92) \quad ; \quad \mathbf{R}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\xi,\eta,\tau}^{x,y,z} & \mathbf{j}_{\xi,\eta,\tau}^{x,y,z} & \mathbf{k}_{\xi,\eta,\tau}^{x,y,z} \end{bmatrix} \quad (91)$$

donde $\mathbf{i}_{\xi,\eta}^{x,y}, \mathbf{j}_{\xi,\eta}^{x,y} \mid \mathbf{i}_{\xi,\eta,\tau}^{x,y,z}, \mathbf{j}_{\xi,\eta,\tau}^{x,y,z}, \mathbf{k}_{\xi,\eta,\tau}^{x,y,z}$ (en adelante $\mathbf{n}, \mathbf{s} \mid \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$) son los vectores unitarios que definen el sistema de coordenadas $\{\xi, \eta\} \mid \{\xi, \eta, \tau\}$ expresados en el sistema de referencia $\{x, y\} \mid \{x, y, z\}$. Si desarrollamos la ecuación 89 y nos fijamos únicamente en los valores de las tensiones tangenciales paralelas a la frontera:

$$\sigma_{\xi\eta} = \{n_x s_x \quad n_y s_y \quad n_y s_x + n_x s_y\} \sigma = \mathbf{g}_{2D} \sigma \quad (92)$$

y para el caso tridimensional:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\xi\tau} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x s_x & n_y s_y & n_z s_z & n_y s_x + n_x s_y & n_z s_y + n_y s_z & n_z s_x + n_x s_z \\ n_x t_x & n_y t_y & n_z t_z & n_y t_x + n_x t_y & n_z t_y + n_y t_z & n_z t_x + n_x t_z \end{Bmatrix} \sigma = \mathbf{g}_{3D} \sigma \quad (93)$$

Como consecuencia de la condición de simetría, las tensiones tangenciales que se la han calculado deberán ser nulas y ello nos lleva a una formulación que podemos considerar para el cálculo del campo de tensiones reconstruido. La ecuación quedaría:

$$c^{ext}(\mathbf{x}): \mathbf{gP}(\mathbf{x})\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (94)$$

Esta ecuación es de la misma forma que la que se obtuvo para el caso de la ecuación de compatibilidad (ecuación 59) y, al igual que ésta, es posible imponer su cumplimiento de forma exacta. En este caso estaremos ajustando un polinomio de grado p , siendo p el orden del campo de tensiones reconstruido, a un campo nulo y, por tanto, de grado 0. Sin embargo, en este caso es necesario darnos cuenta de que la ecuación únicamente tendrá validez en el dominio de la frontera.

Para obtener las ecuaciones que debe cumplir el campo de tensiones, en primer lugar, es necesario establecer la relación que guardan las distintas coordenadas espaciales en la frontera. En el caso de los contornos de simetría, esta relación es trivial ya que estas coordenadas respetarán la ecuación de la recta (bidimensional) o el plano. Por tanto, se podrá establecer:

$$n_x x + n_y y = c \quad ; \quad n_x x + n_y y + n_z z = c \quad (95)$$

donde el valor de c es posible calcularlo considerando un punto cualquiera del contorno.

Vamos a obtener la ecuación de equilibrio considerando el problema bidimensional resuelto con elementos lineales. En primer lugar expresaremos la coordenada x en función de la coordenada y . De esta manera, al sustituir en $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ obtendremos:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \left\{ 1 \quad \frac{c}{n_x} - \frac{n_y}{n_x} y \quad y \right\} \quad (96)$$

A continuación, sustituimos en la ecuación 94, calculamos, separamos los distintos términos del polinomio resultante e igualamos a cero cada uno de ellos para así satisfacer la ecuación de equilibrio en cualquier punto de la frontera:

$$c^{ext}(\mathbf{x}):$$

$$\begin{cases} n_x s_x \left(a_{xx1} + a_{xx2} \frac{c}{n_x} \right) + n_y s_y \left(a_{yy1} + a_{yy2} \frac{c}{n_x} \right) + (n_y s_x + n_x s_y) \left(a_{xy1} + a_{xy2} \frac{c}{n_x} \right) = 0 \\ n_x s_x \left(a_{xx3} - a_{xx2} \frac{n_y}{n_x} \right) + n_y s_y \left(a_{yy3} - a_{yy2} \frac{n_y}{n_x} \right) + (n_y s_x + n_x s_y) \left(a_{xy3} - a_{xy2} \frac{n_y}{n_x} \right) = 0 \end{cases} \quad (97)$$

Estas dos restricciones serán las que se añadirán usando multiplicadores de Lagrange al funcional para el cálculo del campo de tensión reconstruidas.

Las ecuaciones para el resto de casos se obtendrán siguiendo el mismo procedimiento:

○ Elementos cuadráticos - 2D:

$$1 - axy4*d^2*(nx*sy + ny*sx) - axy6*d*(nx*sy + ny*sx) - axx6*d*nx*sx - ayy6*d*ny*sy + axx4*d^2*nx*sx + ayy4*d^2*ny*sy = 0$$

$$2 - axy3*(nx*sy + ny*sx) + axy5*(nx*sy + ny*sx) + axy6*c*(nx*sy + ny*sx) - axy2*d*(nx*sy + ny*sx) + axx3*nx*sx + axx5*nx*sx + ayy3*ny*sy + ayy5*ny*sy + axx6*c*nx*sx + ayy6*c*ny*sy - axx2*d*nx*sx - ayy2*d*ny*sy - 2*axy4*c*d*(nx*sy + ny*sx) - 2*axx4*c*d*nx*sx - 2*ayy4*c*d*ny*sy = 0$$

$$3 - axy1*(nx*sy + ny*sx) + axy2*c*(nx*sy + ny*sx) + axy4*c^2*(nx*sy + ny*sx) + axx1*nx*sx + ayy1*ny*sy + axx2*c*nx*sx + ayy2*c*ny*sy + axx4*c^2*nx*sx + ayy4*c^2*ny*sy = 0$$

○ Elementos lineales - 3D:

$$1 - axy3*(nx*sy + ny*sx) + axz3*(nx*sz + ny*sz) + ayz3*(ny*sz + nz*sy) - axy2*d*(nx*sy + ny*sx) - axz2*d*(nx*sz + ny*sz) - ayz2*d*(ny*sz + nz*sy) + axx3*nx*sx + ayy3*ny*sy + azz3*nz*sz - axx2*d*nx*sx - ayy2*d*ny*sy - azz2*d*nz*sz = 0$$

$$2 - axy4*(nx*sy + ny*sx) + axz4*(nx*sz + ny*sz) + ayz4*(ny*sz + nz*sy) - axy2*e*(nx*sy + ny*sx) - axz2*e*(nx*sz + ny*sz) - ayz2*e*(ny*sz + nz*sy) + axx4*nx*sx + ayy4*ny*sy + azz4*nz*sz - axx2*e*nx*sx - ayy2*e*ny*sy - azz2*e*nz*sz = 0$$

$$3 - axy1*(nx*sy + ny*sx) + axz1*(nx*sz + ny*sz) + ayz1*(ny*sz + nz*sy) + axy2*c*(nx*sy + ny*sx) + axz2*c*(nx*sz + ny*sz) + ayz2*c*(ny*sz + nz*sy) + axx1*nx*sx + ayy1*ny*sy + azz1*nz*sz + axx2*c*nx*sx + ayy2*c*ny*sy + azz2*c*nz*sz = 0$$

$$4 - axy3*(nx*ty + ny*tx) + axz3*(nx*tz + ny*tz) + ayz3*(ny*tz + nz*ty) - axy2*d*(nx*ty + ny*tx) - axz2*d*(nx*tz + ny*tz) - ayz2*d*(ny*tz + nz*ty) + axx3*nx*tx + ayy3*ny*ty + azz3*nz*tz - axx2*d*nx*tx - ayy2*d*ny*ty - azz2*d*nz*tz = 0$$

$$5 - axy4*(nx*ty + ny*tx) + axz4*(nx*tz + ny*tz) + ayz4*(ny*tz + nz*ty) - axy2*e*(nx*ty + ny*tx) - axz2*e*(nx*tz + ny*tz) - ayz2*e*(ny*tz + nz*ty) + axx4*nx*tx + ayy4*ny*ty + azz4*nz*tz - axx2*e*nx*tx - ayy2*e*ny*ty - azz2*e*nz*tz = 0$$

$$6 - axy1*(nx*ty + ny*tx) + axz1*(nx*tz + ny*tz) + ayz1*(ny*tz + nz*ty) + axy2*c*(nx*ty + ny*tx) + axz2*c*(nx*tz + ny*tz) + ayz2*c*(ny*tz + nz*ty) + axx1*nx*tx + ayy1*ny*ty + azz1*nz*tz + axx2*c*nx*tx + ayy2*c*ny*ty + azz2*c*nz*tz = 0$$

o Elementos cuadráticos - 3D:

- 1 - $axy6*(nx*sy + ny*sx) + axz6*(nx*sz + ny*sz) + ayz6*(ny*sz + nz*sy) - axy8*d*(nx*sy + ny*sx) - axz8*d*(nx*sz + ny*sz) - ayz8*d*(ny*sz + nz*sy) + axy5*d^2*(nx*sy + ny*sx) + axz5*d^2*(nx*sz + ny*sz) + ayz5*d^2*(ny*sz + nz*sy) + axx6*nx*sx + ayy6*ny*sy + azz6*nz*sz - axx8*d*nx*sx - ayy8*d*ny*sy - azz8*d*nz*sz + axx5*d^2*nx*sx + ayy5*d^2*ny*sy + azz5*d^2*nz*sz = 0$
- 2 - $axy9*(nx*sy + ny*sx) + axz9*(nx*sz + ny*sz) + ayz9*(ny*sz + nz*sy) - axy10*d*(nx*sy + ny*sx) - axz10*d*(nx*sz + ny*sz) - ayz10*d*(ny*sz + nz*sy) - axy8*e*(nx*sy + ny*sx) - axz8*e*(nx*sz + ny*sz) - ayz8*e*(ny*sz + nz*sy) + axx9*nx*sx + ayy9*ny*sy + azz9*nz*sz - axx10*d*nx*sx - ayy10*d*ny*sy - azz10*d*nz*sz - axx8*e*nx*sx - ayy8*e*ny*sy - azz8*e*nz*sz + 2*axy5*d*e*(nx*sy + ny*sx) + 2*axz5*d*e*(nx*sz + ny*sz) + 2*ayz5*d*e*(ny*sz + nz*sy) + 2*axx5*d*e*nx*sx + 2*ayy5*d*e*ny*sy + 2*azz5*d*e*nz*sz = 0$
- 3 - $axy3*(nx*sy + ny*sx) + axz3*(nx*sz + ny*sz) + ayz3*(ny*sz + nz*sy) + axy8*c*(nx*sy + ny*sx) + axz8*c*(nx*sz + ny*sz) + ayz8*c*(ny*sz + nz*sy) - axy2*d*(nx*sy + ny*sx) - axz2*d*(nx*sz + ny*sz) - ayz2*d*(ny*sz + nz*sy) + axx3*nx*sx + ayy3*ny*sy + azz3*nz*sz + axx8*c*nx*sx + ayy8*c*ny*sy + azz8*c*nz*sz - axx2*d*nx*sx - ayy2*d*ny*sy - azz2*d*nz*sz - 2*axy5*c*d*(nx*sy + ny*sx) - 2*axz5*c*d*(nx*sz + ny*sz) - 2*ayz5*c*d*(ny*sz + nz*sy) - 2*axx5*c*d*nx*sx - 2*ayy5*c*d*ny*sy - 2*azz5*c*d*nz*sz = 0$
- 4 - $axy7*(nx*sy + ny*sx) + axz7*(nx*sz + ny*sz) + ayz7*(ny*sz + nz*sy) - axy10*e*(nx*sy + ny*sx) - axz10*e*(nx*sz + ny*sz) - ayz10*e*(ny*sz + nz*sy) + axy5*e^2*(nx*sy + ny*sx) + axz5*e^2*(nx*sz + ny*sz) + ayz5*e^2*(ny*sz + nz*sy) + axx7*nx*sx + ayy7*ny*sy + azz7*nz*sz - axx10*e*nx*sx - ayy10*e*ny*sy - azz10*e*nz*sz + axx5*e^2*nx*sx + ayy5*e^2*ny*sy + azz5*e^2*nz*sz = 0$
- 5 - $axy4*(nx*sy + ny*sx) + axz4*(nx*sz + ny*sz) + ayz4*(ny*sz + nz*sy) + axy10*c*(nx*sy + ny*sx) + axz10*c*(nx*sz + ny*sz) + ayz10*c*(ny*sz + nz*sy) - axy2*e*(nx*sy + ny*sx) - axz2*e*(nx*sz + ny*sz) - ayz2*e*(ny*sz + nz*sy) + axx4*nx*sx + ayy4*ny*sy + azz4*nz*sz + axx10*c*nx*sx + ayy10*c*ny*sy + azz10*c*nz*sz - axx2*e*nx*sx - ayy2*e*ny*sy - azz2*e*nz*sz - 2*axy5*c*e*(nx*sy + ny*sx) - 2*axz5*c*e*(nx*sz + ny*sz) - 2*ayz5*c*e*(ny*sz + nz*sy) - 2*axx5*c*e*nx*sx - 2*ayy5*c*e*ny*sy - 2*azz5*c*e*nz*sz = 0$
- 6 - $axy1*(nx*sy + ny*sx) + axz1*(nx*sz + ny*sz) + ayz1*(ny*sz + nz*sy) + axy2*c*(nx*sy + ny*sx) + axz2*c*(nx*sz + ny*sz) + ayz2*c*(ny*sz + nz*sy) + axy5*c^2*(nx*sy + ny*sx) + axz5*c^2*(nx*sz + ny*sz) + ayz5*c^2*(ny*sz + nz*sy) + axx1*nx*sx + ayy1*ny*sy + azz1*nz*sz + axx2*c*nx*sx + ayy2*c*ny*sy + azz2*c*nz*sz + axx5*c^2*nx*sx + ayy5*c^2*ny*sy + azz5*c^2*nz*sz = 0$

- 7 - $axy6*(nx*ty + ny*tx) + axz6*(nx*tz + ny*tz) + ayz6*(ny*tz + nz*ty) - axy8*d*(nx*ty + ny*tx) - axz8*d*(nx*tz + ny*tz) - ayz8*d*(ny*tz + nz*ty) + axy5*d^2*(nx*ty + ny*tx) + axz5*d^2*(nx*tz + ny*tz) + ayz5*d^2*(ny*tz + nz*ty) + axx6*nx*tx + ayy6*ny*ty + azz6*nz*tz - axx8*d*nx*tx - ayy8*d*ny*ty - azz8*d*nz*tz + axx5*d^2*nx*tx + ayy5*d^2*ny*ty + azz5*d^2*nz*tz = 0$
- 8 - $axy9*(nx*ty + ny*tx) + axz9*(nx*tz + ny*tz) + ayz9*(ny*tz + nz*ty) - axy10*d*(nx*ty + ny*tx) - axz10*d*(nx*tz + ny*tz) - ayz10*d*(ny*tz + nz*ty) - axy8*e*(nx*ty + ny*tx) - axz8*e*(nx*tz + ny*tz) - ayz8*e*(ny*tz + nz*ty) + axx9*nx*tx + ayy9*ny*ty + azz9*nz*tz - axx10*d*nx*tx - ayy10*d*ny*ty - azz10*d*nz*tz - axx8*e*nx*tx - ayy8*e*ny*ty - azz8*e*nz*tz + 2*axy5*d*e*(nx*ty + ny*tx) + 2*axz5*d*e*(nx*tz + ny*tz) + 2*ayz5*d*e*(ny*tz + nz*ty) + 2*axx5*d*e*nx*tx + 2*ayy5*d*e*ny*ty + 2*azz5*d*e*nz*tz = 0$
- 9 - $axy3*(nx*ty + ny*tx) + axz3*(nx*tz + ny*tz) + ayz3*(ny*tz + nz*ty) + axy8*c*(nx*ty + ny*tx) + axz8*c*(nx*tz + ny*tz) + ayz8*c*(ny*tz + nz*ty) - axy2*d*(nx*ty + ny*tx) - axz2*d*(nx*tz + ny*tz) - ayz2*d*(ny*tz + nz*ty) + axx3*nx*tx + ayy3*ny*ty + azz3*nz*tz + axx8*c*nx*tx + ayy8*c*ny*ty + azz8*c*nz*tz - axx2*d*nx*tx - ayy2*d*ny*ty - azz2*d*nz*tz - 2*axy5*c*d*(nx*ty + ny*tx) - 2*axz5*c*d*(nx*tz + ny*tz) - 2*ayz5*c*d*(ny*tz + nz*ty) - 2*axx5*c*d*nx*tx - 2*ayy5*c*d*ny*ty - 2*azz5*c*d*nz*tz = 0$
- 10 - $axy7*(nx*ty + ny*tx) + axz7*(nx*tz + ny*tz) + ayz7*(ny*tz + nz*ty) - axy10*e*(nx*ty + ny*tx) - axz10*e*(nx*tz + ny*tz) - ayz10*e*(ny*tz + nz*ty) + axy5*e^2*(nx*ty + ny*tx) + axz5*e^2*(nx*tz + ny*tz) + ayz5*e^2*(ny*tz + nz*ty) + axx7*nx*tx + ayy7*ny*ty + azz7*nz*tz - axx10*e*nx*tx - ayy10*e*ny*ty - azz10*e*nz*tz + axx5*e^2*nx*tx + ayy5*e^2*ny*ty + azz5*e^2*nz*tz = 0$
- 11 - $axy4*(nx*ty + ny*tx) + axz4*(nx*tz + ny*tz) + ayz4*(ny*tz + nz*ty) + axy10*c*(nx*ty + ny*tx) + axz10*c*(nx*tz + ny*tz) + ayz10*c*(ny*tz + nz*ty) - axy2*e*(nx*ty + ny*tx) - axz2*e*(nx*tz + ny*tz) - ayz2*e*(ny*tz + nz*ty) + axx4*nx*tx + ayy4*ny*ty + azz4*nz*tz + axx10*c*nx*tx + ayy10*c*ny*ty + azz10*c*nz*tz - axx2*e*nx*tx - ayy2*e*ny*ty - azz2*e*nz*tz - 2*axy5*c*e*(nx*ty + ny*tx) - 2*axz5*c*e*(nx*tz + ny*tz) - 2*ayz5*c*e*(ny*tz + nz*ty) - 2*axx5*c*e*nx*tx - 2*ayy5*c*e*ny*ty - 2*azz5*c*e*nz*tz = 0$
- 12 - $axy1*(nx*ty + ny*tx) + axz1*(nx*tz + ny*tz) + ayz1*(ny*tz + nz*ty) + axy2*c*(nx*ty + ny*tx) + axz2*c*(nx*tz + ny*tz) + ayz2*c*(ny*tz + nz*ty) + axy5*c^2*(nx*ty + ny*tx) + axz5*c^2*(nx*tz + ny*tz) + ayz5*c^2*(ny*tz + nz*ty) + axx1*nx*tx + ayy1*ny*ty + azz1*nz*tz + axx2*c*nx*tx + ayy2*c*ny*ty + azz2*c*nz*tz + axx5*c^2*nx*tx + ayy5*c^2*ny*ty + azz5*c^2*nz*tz = 0$

Considerando: $c = C/nx$ $d = ny/nx$ $e = nz/nx$

La formulación para el contorno de simetría se ha presentado en su caso más general. No obstante, si el vector perpendicular al contorno coincide con alguno de los ejes de coordenadas del sistema, la ecuación se simplifica notablemente. Esto es debido a que una de las variables espaciales se hace constante y aparecen una gran cantidad de términos nulos como consecuencia de que los vectores sólo tienen una componente. Si consideramos el problema bidimensional con polinomio lineal y contorno de simetría paralelo al eje y , las ecuaciones se reducirán a:

$$c^{ext}(\mathbf{x}): \begin{cases} a_{xy1} + a_{xy2}c = 0 \\ a_{xy3} = 0 \end{cases} \quad (98)$$

Formulación del SPR-C en problemas sin contacto

Hemos establecido las restricciones que debe cumplir el campo de tensiones alisado para satisfacer, en la medida que el grado de aproximación lo permita, las ecuaciones de equilibrio interno, equilibrio en el contorno, bien sea para tracciones impuestas o contornos de simetría, y compatibilidad. Para aquellos problemas elásticos en los que no exista interacción entre cuerpo, éstas ecuaciones serán las que deberán tenerse en cuenta para completar el funcional que plantea la técnica SPR-C.

Partiendo del funcional ecuación 19, vamos a utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para añadir al sistema las distintas ecuaciones del problema elástico:

$$\begin{aligned} \phi'_{SPR-C}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\lambda}) = & \int_{\Omega_p} \left(\mathbf{P}(x) \mathbf{A} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(x)) \right)^2 d\Omega \\ & + \boldsymbol{\lambda}^{int} c^{int}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^{comp} c^{comp}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^{ext} c^{ext}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (99)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}^{int}$, $\boldsymbol{\lambda}^{comp}$ y $\boldsymbol{\lambda}^{ext}$ son vectores formados por tantos multiplicadores de Lagrange como ecuaciones linealmente independientes introduzcan la ecuación de equilibrio interno, la de compatibilidad y la de equilibrio en el contorno, respectivamente. Debido a como se han definido cada una de las restricciones, $\boldsymbol{\lambda}^{int}$ será un vector disperso, $\boldsymbol{\lambda}^{comp}$ será completo y $\boldsymbol{\lambda}^{ext}$ será disperso para el caso de tracciones impuestas y completo para contornos de simetría.

Cuando minimizamos el funcional con respecto a los coeficientes del polinomio \mathbf{A} y los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} = \{\boldsymbol{\lambda}^{intT} \boldsymbol{\lambda}^{compT} \boldsymbol{\lambda}^{extT}\}^T$ se obtiene un sistema lineal de ecuaciones compatible determinado que, expresado de forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} \quad (100)$$

donde \mathbf{C} representa las matrices de coeficientes de las ecuaciones de restricción y $\boldsymbol{\Lambda}$ son los términos a la derecha de la igualdad de estas mismas ecuaciones. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene el vector de coeficientes \mathbf{A} que define el polinomio de aproximación del campo de tensiones en el dominio del patch y el vector de multiplicadores de Lagrange.

Con estos valores de \mathbf{A} es posible evaluar el valor del vector de tensiones en el nodo de ensamblado y a partir de las tensiones nodales interpolar el campo de tensiones suavizado:

$$\sigma_{SPR}^*(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^{n_v} N_J(\mathbf{x}) \hat{\sigma}_J^* - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}) \quad (101)$$

donde N_J es la función de forma asociada al nodo J utilizada para la interpolación de los desplazamientos, $\hat{\sigma}_J^*$ es el valor del campo de tensiones suavizado en este mismo nodo J y n_v es el número de nodos vértice.

Esta interpolación ha sido la empleada habitualmente por la técnica SPR. Sin embargo, la técnica SPR-C propone utilizar, no solo el valor nodal del polinomio ajustado, sino el propio polinomio para la interpolación. De esta manera, el campo suavizado del problema en el interior de un elemento se calcularía como:

$$\sigma_{SPR-C}^*(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^{n_v} N_J(\mathbf{x}) \hat{\sigma}_J^*(\mathbf{x}) - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}) \quad (102)$$

siendo N_J la función de forma lineal asociada al nodo J y $\hat{\sigma}_J^*(\mathbf{x})$ el campo de tensiones ajustado para el patch asociado a este mismo nodo.

Si estudiamos ambas fórmulas comprobamos que, siguiendo el primer planteamiento, el campo de tensiones en el interior del elemento será del mismo grado que las funciones de forma mientras que, según la última expresión, sería un orden mayor. No obstante, esta diferencia de orden no se traduce en un incremento de la precisión del campo, ya que la calidad de éste depende del grado de la interpolación a nivel del patch.

La siguiente figura muestra gráficamente como las diferentes aproximaciones dan lugar a campos reconstruidos ligeramente distintos. Se consideran dos nodos (1, 2), cada uno de los cuales tiene asociado un campo de tensiones reconstruido en el dominio del patch definido por el nodo ($\sigma_1^*(x)$, $\sigma_2^*(x)$). Teniendo en cuenta estas tensiones, se interpola para obtener el campo de tensiones en el elemento definido por los nodos 1, 2.

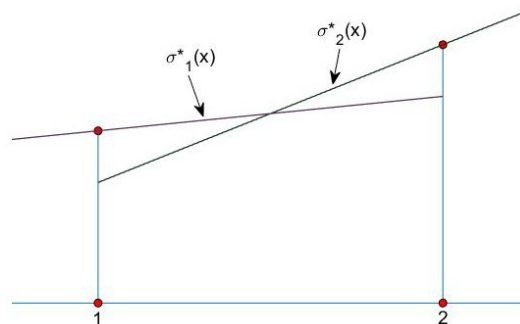


Figura 23: Valores nodales y campos de tensiones asociados a los nodos 1 y 2

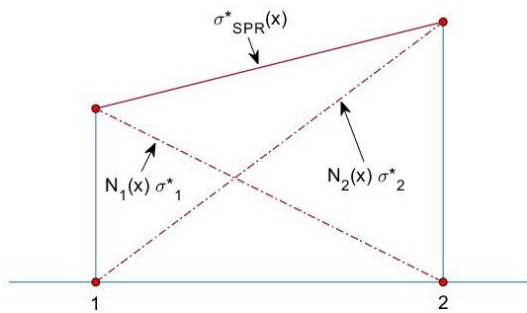


Figura 24: Interpolación SPR. Interpolación de los valores nodales

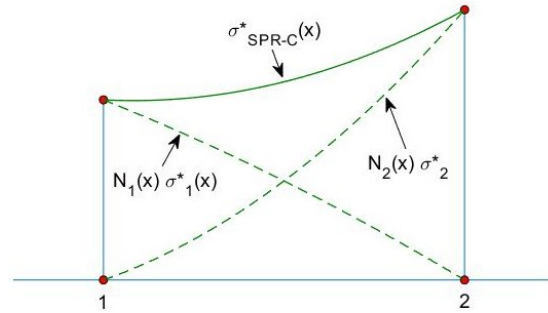


Figura 25: Interpolación SPR-C. Unión polinómica

Por su parte, los valores de los multiplicadores de Lagrange nos dan una idea de lo sensible que es la solución con respecto a cada una de las ecuaciones de restricción. De manera que, cuanto mayor es el multiplicador asociado a una cierta restricción, mayor será la variación que experimenta el vector \mathbf{A} frente a un cambio en la restricción. Por tanto, son útiles para conocer de forma cualitativa cómo afecta al campo reconstruido un error en alguna de las restricciones.

Imposición de la ecuación de equilibrio en superficies de contacto

Para este trabajo se han tenido en cuenta tres tipos de contacto. Éstos se han definido en función de la relación que existe entre las componentes normal y tangencial de la fuerza de contacto en cada punto de la superficie de contacto. Esta relación la establece el coeficiente de rozamiento μ y nos lleva a distinguir:

- Contacto sin deslizamiento: $\mu = 0$. No se tiene en cuenta el desplazamiento relativo entre los cuerpos en la dirección tangencial a la superficie de contacto. Por tanto, la fuerza de contacto únicamente tendrá componente normal a esta superficie. Este caso aparece cuando en la formulación únicamente se considera la no penetración de un cuerpo en otro.
- Contacto con deslizamiento: $\mu = \mu_e$. La componente de la fuerza de contacto está relacionada con el coeficiente estático de fricción. La fuerza de rozamiento estático se opone al movimiento relativo entre cuerpos a lo largo de la superficie de contacto. Al considerar grandes deformaciones para la formulación del contacto es necesario tener en cuenta el desplazamiento relativo que puede aparecer entre los puntos de la superficie de contacto de ambos cuerpos.
- Contacto con adhesión: $\mu < \mu_e$. El valor de μ es desconocido y, por tanto, no se puede establecer a-priori una relación entre las componentes de la fuerza de contacto. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en el contacto sin deslizamiento, la componente

tangencial de esta fuerza puede ser no nula. Esta situación se da en el caso de problemas de contacto con pequeñas deformaciones, en los que se desprecia el deslizamiento entre las superficies de contacto de los cuerpos, y en la formulación para grandes deformaciones en aquellas zonas donde no llega a existir deslizamiento.

Una vez establecidos los distintos tipos de contacto, estudiaremos la condición de equilibrio en estos contornos. Consideremos nuevamente el esquema empleado para establecer la formulación de contacto (Figura 26). En éste se establecen dos dominios $\Omega^{(1)}$ y $\Omega^{(2)}$ asociados a los cuerpos deformables $^{(1)}$ y $^{(2)}$, respectivamente. El contorno de cada cuerpo $\Gamma^{(i)}$ se subdivide en tres superficies no superpuestas, $\Gamma_D^{(i)}$ sobre la que se atribuyen las condiciones de contorno de Dirichlet, $\Gamma_N^{(i)}$ donde se imponen las condiciones de contorno de Neumann y $\Gamma_C^{(i)}$ que es la superficie donde puede ocurrir el contacto entre cuerpos.

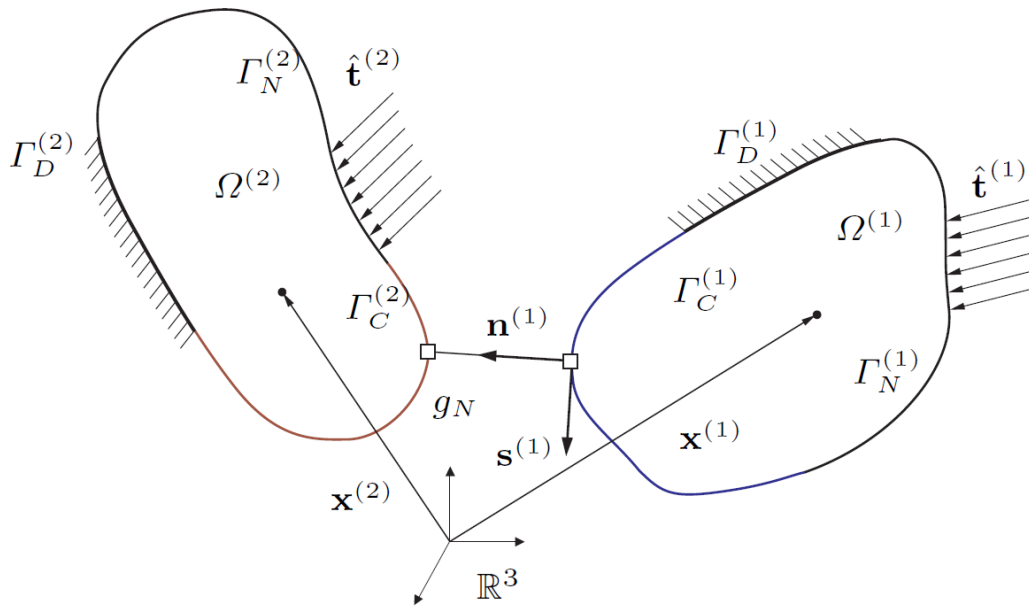


Figura 26: Esquema de dos cuerpos deformables en contacto

En la configuración deformada, $\Gamma_C^{(1)}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}^{(1)}))$ y $\Gamma_C^{(2)}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}^{(2)}))$ son las superficies de contacto de cada uno de los cuerpos, las cuales se superponen espacialmente (a esta geometría la denominaremos Γ_C^d). Consideremos ahora un elemento diferencial de volumen sobre la zona de contacto entre cuerpos. Descomponemos este volumen según los diferentes dominios y obtenemos dos diferenciales de volumen $d\Omega^{(1)}$ y $d\Omega^{(2)}$, los cuales interactúan a través de un diferencial de superficie $d\Gamma_C^d = d\xi d\eta$.

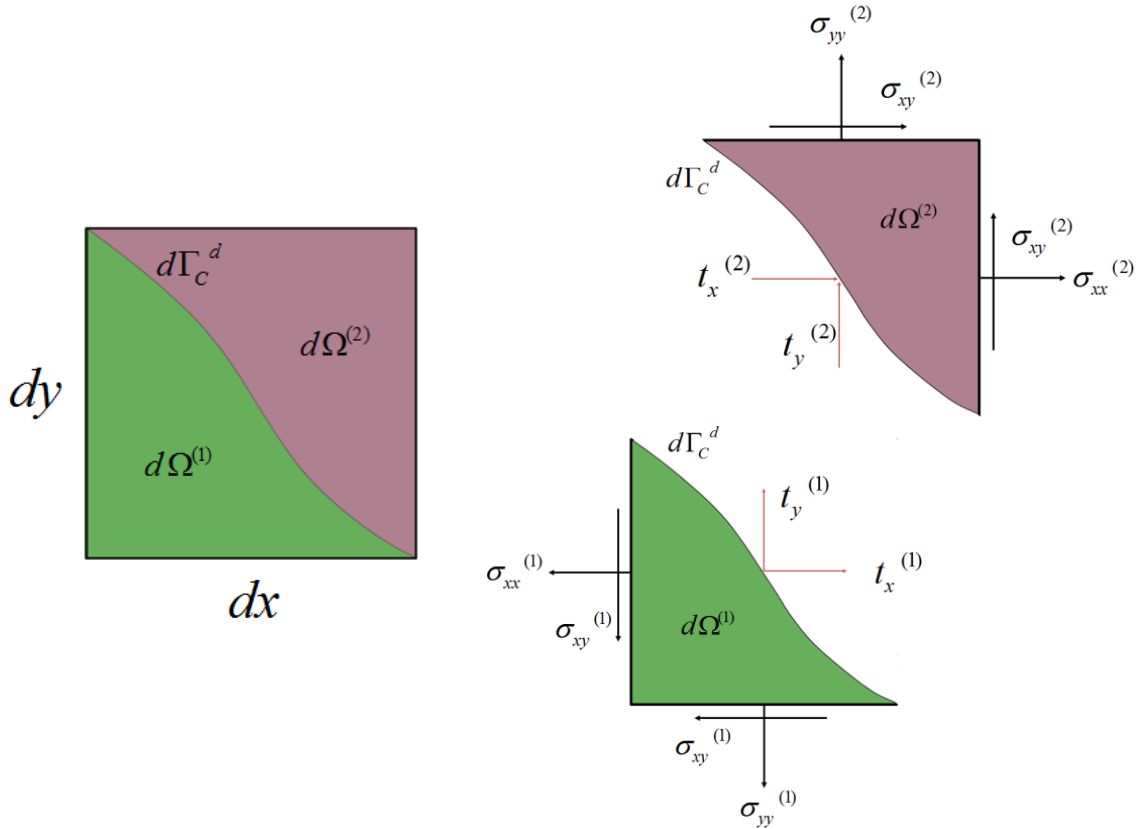


Figura 27: Elemento diferencial intersectado por la superficie de contacto (izquierda). Cargas sobre los subdominios $d\Omega^{(1)}$ (inf.) y $d\Omega^{(2)}$ (sup.)

Sobre cada uno de los subdominios en que se ha dividido el elemento diferencial podemos aplicar la ecuación de equilibrio en contornos con tracciones impuestas. De esta manera:

$$[\mathbf{T}]^{(1)} \mathbf{n}^{(1)d} = \mathbf{t}^{(1)} \quad (103)$$

$$[\mathbf{T}]^{(2)} \mathbf{n}^{(2)d} = \mathbf{t}^{(2)} \quad (104)$$

donde $[\mathbf{T}]^{(i)}$ es el tensor de tensiones de Cauchy, $\mathbf{t}^{(i)}$ es la fuerza superficial aplicada sobre el contorno $d\Gamma_C^d$ y $\mathbf{n}^{(i)d}$ es el vector normal a la superficie de contacto en la configuración deformada. Nótese que este último término ha cambiado con respecto al de la ecuación 74. Por el principio de acción y reacción podemos relacionar ambas expresiones obteniendo:

$$\mathbf{t}^{(1)} - \mathbf{t}^{(2)} = \mathbf{0} \quad (105)$$

$$[\mathbf{T}]^{(1)} \mathbf{n}^{(1)d} + [\mathbf{T}]^{(2)} \mathbf{n}^{(2)d} = \mathbf{0} \quad (106)$$

y si tenemos en cuenta que $\mathbf{n}^{(1)d} = -\mathbf{n}^{(2)d}$:

$$[\mathbf{T}]^{(1)} \mathbf{n}^{(1)d} - [\mathbf{T}]^{(2)} \mathbf{n}^{(1)d} = \mathbf{0} \quad (107)$$

Esta ecuación establece la condición de continuidad que deben cumplirse entre los campos de tensiones de los dos cuerpos en contacto. No obstante, en función de si se trata de un

caso sin deslizamiento, con deslizamiento o con adhesión, la relación entre las componentes del vector $\mathbf{t}^{(i)}$ y, por ende, entre las componentes del tensor de tensiones $[\mathbf{T}]^{(i)}$, será distinta.

Para formular estas las restricciones de cada tipo de contacto de una forma más sencilla, vamos a cambiar el sistema de referencia en que se ha expresado el vector tensión por uno cuyos ejes coincidan con las direcciones normal $\mathbf{n}^{(i)d}$ y tangentes $\mathbf{s}^{(i)d}, \mathbf{p}^{(i)d}$ a la superficie de contacto. Mientras la dirección normal estará definida por la geometría deformada, las direcciones tangentes solo estarán restringidas en el caso de problemas con deslizamiento, donde la dirección de deslizamiento $\mathbf{s}^{(i)d}$ coincidirá con uno de los ejes. Si expresamos los vectores de tensiones de los dos cuerpos en el sistema de coordenadas asociado al cuerpo ⁽¹⁾ obtenemos:

$$\mathbf{R}^{(1)T} [\mathbf{T}]^{(1)} \mathbf{n}^{(1)d} = \mathbf{t}_{nsp}^{(1)} = \begin{Bmatrix} t_n^{(1)} \\ t_s^{(1)} \\ t_p^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (108)$$

$$\mathbf{R}^{(1)T} [\mathbf{T}]^{(2)} \mathbf{n}^{(1)d} = \mathbf{t}_{nsp}^{(2)} = \begin{Bmatrix} t_n^{(2)} \\ t_s^{(2)} \\ t_p^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (109)$$

$$\mathbf{R}^{(1)T} [\mathbf{T}]^{(1)} \mathbf{n}^{(1)d} - \mathbf{R}^{(1)T} [\mathbf{T}]^{(2)} \mathbf{n}^{(1)d} = \mathbf{0} \quad (110)$$

con:

$$\mathbf{R}_{2D}^{(1)} = [\mathbf{n}^{(1)d} \quad \mathbf{s}^{(1)d}] \quad (111)$$

$$\mathbf{R}_{3D}^{(1)} = [\mathbf{n}^{(1)d} \quad \mathbf{s}^{(1)d} \quad \mathbf{p}^{(1)d}] \quad (112)$$

donde $\mathbf{R}^{(1)}$ es la matriz de cambio del sistema de referencia y $\mathbf{t}_{nsp}^{(i)}$ es el vector de tracciones de forma que $t_n^{(i)}$ es la tensión normal al plano de contacto y $t_s^{(i)}$ y $t_p^{(i)}$ son las tensiones tangenciales paralelas a la superficie de contacto.

A continuación, se establecen las restricciones que deben cumplir el vector de tracciones en función del tipo de contacto considerado:

- Contacto sin deslizamiento: las componentes tangenciales a la superficie de contacto son nulas:

$$t_s^{(1)} = t_p^{(1)} = t_s^{(2)} = t_p^{(2)} = 0 \quad (113)$$

- Contacto con deslizamiento: la componente tangencial de la tensión en la dirección del deslizamiento es igual a la tensión normal al contorno por el coeficiente estático de fricción. Las tensiones perpendiculares al plano formado por estos dos vectores son nulas:

$$t_s^{(1)} = \mu_e t_n^{(1)} = t_s^{(2)} = \mu_e t_n^{(2)} \quad (114)$$

$$t_p^{(1)} = t_p^{(2)} = 0 \quad (115)$$

- Contacto con adhesión: las componentes del vector tensión pueden tomar cualquier valor.

Una vez planteadas las ecuaciones que debe cumplir el campo de tensiones en los contornos de contacto, trataremos su aplicación en la técnica de reconstrucción.

El primer aspecto en el que deparamos es que la condición de equilibrio en el contorno implica a dos campos de tensiones distintos, cada uno de ellos definido sobre uno de los cuerpos en contacto. Por tanto, para poder implementar esta restricción dentro del SPR-C, será necesario plantear un procedimiento que, para un patch de contorno del cuerpo $\Omega^{(1)}$, permita tener en cuenta un campo de tensiones definido sobre el cuerpo $\Omega^{(2)}$. Considerando un patch de contacto en el dominio $\Omega^{(1)}$, el procedimiento que se presenta a continuación establece un subdominio sobre $\Omega^{(2)}$, el cual se tiene en cuenta para obtener un campo de tensiones mediante una aproximación polinómica.

Consideremos el patch de contacto definido por el nodo de ensamblado i , el cual pertenece a la malla de cálculo asociada al dominio $\Omega^{(1)}$. La superficie de contacto $\Gamma_C^{(1)}$ intersecta con los límites del patch dando lugar un dominio $\Gamma_C^{(1)p}$ contenido en el interior de éste.

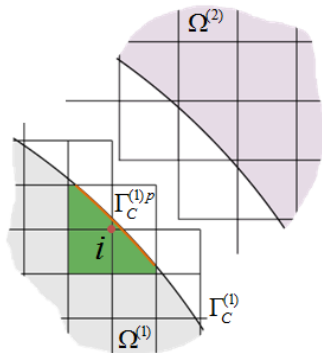


Figura 28: Patch de contorno definido por el nodo i .
Superficie de contacto $\Gamma_C^{(1)p}$

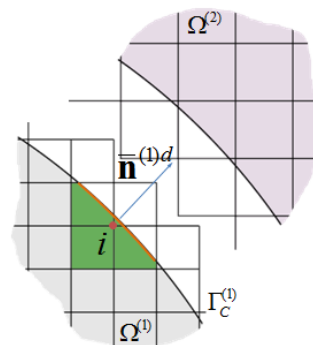


Figura 29: Vector normal promedio a la superficie deformada $\bar{n}^{(1)d}$

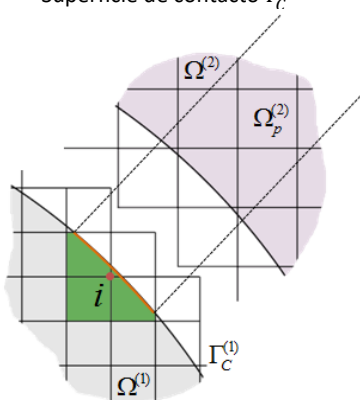


Figura 30: proyección del perímetro de $\Gamma_C^{(1)p}$ en la dirección $\bar{n}^{(1)d}$

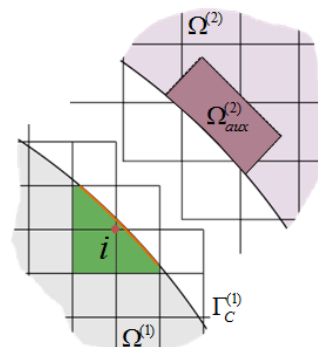


Figura 31: Definición del dominio $\Omega_{aux}^{(2)}$

En primer lugar se establece un vector $\bar{\mathbf{n}}^{(1)d}$, que es normal predominante con respecto a la superficie de contacto en la posición de equilibrio. Para lo que se utiliza la expresión:

$$\bar{\mathbf{n}}^{(1)d} = \frac{\int_{\Gamma_c^p} \mathbf{n}^{(1)d} d\Gamma}{\int_{\Gamma_c^p} d\Gamma} \quad (116)$$

A continuación, se determina la geometría que define el perímetro de $\Gamma_c^{p(1)}$ y se calcula su deformada interpolando los desplazamientos nodales. Si se proyecta este contorno en la dirección del vector normal promedio $\bar{\mathbf{n}}^{(1)d}$, se obtiene una superficie cerrada que delimita un subdominio prismático $\Omega_p^{(2)}$ dentro del dominio $\Omega^{(2)}$. Para realizar la intersección entre la superficie y el cuerpo, se tiene en cuenta el campo de desplazamientos en $\Omega^{(2)}$. De esta manera es posible considerar los movimientos relativos que pudieran aparecer entre cuerpos. Por último, se establece un dominio $\Omega_{aux}^{(2)}$ contenido dentro de $\Omega_p^{(2)}$ que estará delimitado por la superficie prismática, en contorno de contacto y un plano perpendicular al vector normal $\bar{\mathbf{n}}^{(1)d}$. Una vez establecido $\Omega_{aux}^{(2)}$ es posible aplicar sobre este dominio una técnica de reconstrucción como el SPR-C para obtener $[\mathbf{T}]^{(2)}$.

Es importante señalar que la calidad del tensor de tensiones $[\mathbf{T}]^{(2)}$ dependerá de la correcta definición de $\Omega_{aux}^{(2)}$. Unos volúmenes demasiado pequeños pueden restringirse únicamente a elementos de contorno, donde la precisión de la solución del MEF es menor, y si son demasiado grandes pueden llevar a un suavizado excesivo del campo de tensiones. Dado que el objetivo final del cálculo de $[\mathbf{T}]^{(2)}$ es mejorar la calidad de la reconstrucción de $[\mathbf{T}]^{(1)}$, resulta fundamental que $[\mathbf{T}]^{(2)}$ lleve asociado el mínimo error posible.

Por otra parte, aunque se aplique la técnica SPR-C al dominio $\Omega_{aux}^{(2)}$, éste no constituye un patch. De hecho, su definición es completamente distinta. Mientras un patch lo constituyen un conjunto de elementos que comparten un mismo nodo ensamblador, el dominio $\Omega_{aux}^{(2)}$ se obtiene a partir de un procedimiento geométrico y es independiente de la estructura de la malla.

Volviendo a la formulación de la condición de equilibrio en el contacto (ecuación 110), es necesario replantearla para poder expresar el campo de tensiones como una aproximación de la forma $\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A}$. Como paso previo, vamos a presentar las ecuaciones ecuación 110 como el producto de una matriz por el vector de tensiones:

$$\mathcal{H}\sigma^{(i)} = \mathbf{t}_{nsp}^{(i)} \quad (117)$$

donde:

$$\mathcal{H}_{2D} = \begin{bmatrix} n_x^d n_x^d & n_y^d n_y^d & n_x^d n_y^d \\ n_x^d s_x^d & n_y^d s_y^d & n_x^d s_y^d + n_y^d s_x^d \end{bmatrix} \quad (118)$$

$$\mathcal{H}_{3D} = \begin{bmatrix} n_x^d n_x^d & n_y^d n_y^d & n_z^d n_z^d & 2n_x^d n_y^d & 2n_y^d n_z^d & 2n_x^d n_z^d \\ n_x^d s_x^d & n_y^d s_y^d & n_z^d s_z^d & n_x^d s_y^d + n_y^d s_x^d & n_y^d s_z^d + n_z^d s_y^d & n_x^d s_z^d + n_z^d s_x^d \\ n_x^d p_x^d & n_y^d p_y^d & n_z^d p_z^d & n_x^d p_y^d + n_y^d p_x^d & n_y^d p_z^d + n_z^d p_y^d & n_x^d s_z^d + n_z^d s_x^d \end{bmatrix} \quad (119)$$

y por simplicidad $X^{(i)d} = X^d$.

Aplicando esta nueva formulación, la ecuación de equilibrio en contornos de contacto se expresará como:

$$\mathcal{H}\sigma^{(1)} - \mathcal{H}\sigma^{(2)} = \mathbf{0} \quad (120)$$

Sin embargo, los diferentes tipos de contacto introducen nuevas restricciones que debemos tener en cuenta en la formulación. Por este motivo se modifica el segundo término, quedando la ecuación como:

$$\mathcal{H}\sigma^{(1)} - \mathcal{H}'_t\sigma^{(2)} = \mathbf{0} \quad (121)$$

donde los distintos valores que toma \mathcal{H}'_t son:

- Contacto sin deslizamiento:

$$\mathcal{H}'_{2Dfl} = \begin{bmatrix} n_x^d n_x^d & n_y^d n_y^d & n_x^d n_y^d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (122)$$

$$\mathcal{H}'_{3Dfl} = \begin{bmatrix} n_x^d n_x^d & n_y^d n_y^d & n_z^d n_z^d & 2n_x^d n_y^d & 2n_y^d n_z^d & 2n_x^d n_z^d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (123)$$

- Contacto con deslizamiento:

$$\mathcal{H}'_{2Df} = \begin{bmatrix} n_x^d n_x^d & n_y^d n_y^d & n_x^d n_y^d \\ \mu_e n_x^d n_x^d & \mu_e n_y^d n_y^d & \mu_e n_x^d n_y^d \end{bmatrix} \quad (124)$$

$$\mathcal{H}'_{3Df} = \begin{bmatrix} n_x^d n_x^d & n_y^d n_y^d & n_z^d n_z^d & 2n_x^d n_y^d & 2n_y^d n_z^d & 2n_x^d n_z^d \\ \mu_e n_x^d n_x^d & \mu_e n_y^d n_y^d & \mu_e n_z^d n_z^d & 2\mu_e n_x^d n_y^d & 2\mu_e n_y^d n_z^d & 2\mu_e n_x^d n_z^d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (125)$$

- Contacto con adhesión:

$$\mathcal{H}'_{2Ds} = \begin{bmatrix} n_x^d n_x^d & n_y^d n_y^d & n_x^d n_y^d \\ n_x^d s_x^d & n_y^d s_y^d & n_x^d s_y^d + n_y^d s_x^d \end{bmatrix} \quad (126)$$

$$\mathcal{H}'_{3Ds} = \begin{bmatrix} n_x^d n_x^d & n_y^d n_y^d & n_z^d n_z^d & 2n_x^d n_y^d & 2n_y^d n_z^d & 2n_x^d n_z^d \\ n_x^d s_x^d & n_y^d s_y^d & n_z^d s_z^d & n_x^d s_y^d + n_y^d s_x^d & n_y^d s_z^d + n_z^d s_y^d & n_x^d s_z^d + n_z^d s_x^d \\ n_x^d p_x^d & n_y^d p_y^d & n_z^d p_z^d & n_x^d p_y^d + n_y^d p_x^d & n_y^d p_z^d + n_z^d p_y^d & n_x^d s_z^d + n_z^d s_x^d \end{bmatrix} \quad (127)$$

Si tenemos en cuenta que el campo de tensiones se calcula como una aproximación polinómica, podremos expresar la ecuación 121 como:

$$\mathcal{H}(x^{(1)})P(x^{(1)})A^{(1)} - \mathcal{H}'_t(x^{(1)})P(x^{(2)})A^{(2)} = \mathbf{0} \quad (128)$$

donde $P(x^{(i)})$ es la matriz de términos del polinomio de aproximación evaluadas en la superficie de contacto del cuerpo ⁽ⁱ⁾ y $A^{(i)}$ es el vector de coeficientes para el cuerpo ⁽ⁱ⁾.

Dado que la geometría del contorno de contacto no se puede generalizar sino que será una en particular para cada problema, no es posible imponer la ecuación 128 de forma exacta en toda la superficie. En su lugar, debemos plantear una formulación alternativa que pueda ser aplicada como restricción durante el proceso de reconstrucción.

El planteamiento que se seguirá será el que se ha utilizado en secciones anteriores. Dado que el no cumplimiento de la ecuación de equilibrio en la superficie de contacto origina un residuo en la ecuación, podemos replantear la ecuación de equilibrio como una minimización de ese error considerando el dominio de la superficie de contacto. Esto supone añadir el término residual a la ecuación 128:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{P}(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{A}^{(1)} - \mathcal{H}'_t(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{P}(\mathbf{x}^{(2)})\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{r}(\mathbf{x})_{ct} \quad (129)$$

Partiendo de esta expresión, planteamos la minimización de la norma L^2 del residuo en el dominio del contorno de contacto que queda dentro del patch Γ_C^p :

$$\phi^{ctc}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_C^p} \mathbf{r}(\mathbf{x})_{ct}^2 d\Gamma = \int_{\Gamma_C^p} (\mathcal{H}(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{P}(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{A}^{(1)} - \mathcal{H}'_t(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{P}(\mathbf{x}^{(2)})\mathbf{A}^{(2)})^2 d\Gamma \quad (130)$$

el cual se puede formular de forma más compacta como:

$$\phi^{ctc}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_p} (\mathbf{Z}(\mathbf{x}) \mathbf{A}')^2 d\Gamma \quad (131)$$

donde \mathbf{A}' es la concatenación de los vectores de coeficientes de ambos cuerpos y \mathbf{Z} es:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = [\langle \mathcal{H}(\mathbf{x}^{(1)}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}^{(1)}) \rangle \quad -\langle \mathcal{H}'_t(\mathbf{x}^{(1)}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}^{(2)}) \rangle] \quad (132)$$

representando la operación $\langle \cdot \rangle$ una multiplicación de matrices donde cada submatriz se considera como un elemento de la matriz superior.

Si minimizamos el funcional con respecto de \mathbf{A}' e integramos numéricamente la superficie, el resultado que obtenemos es la ecuación matricial:

$$c^{ctc}(\mathbf{x}): \sum_j^{ngps} \mathbf{Z}(\mathbf{x})^T \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \omega_j \left| \mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_j)) \right| \mathbf{A}' = \mathbf{0} \quad (133)$$

donde ω_j es el peso asociado a cada de los $ngps$ puntos de integración, $\mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_j))$ es la matriz de Jacobinada y $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j)$ son las coordenadas locales sobre la superficie de contacto asociadas a \mathbf{x}_j .

Como se ha comentado en otros apartados, el resultado que obtenemos es un sistema de ecuaciones compatible indeterminado. Sin embargo, si comparamos el número de incógnitas con los demás casos en los que se ha aplicado esta metodología, vemos que en este caso es el doble. Este resultado es lógico ya que, en realidad, se están ajustando dos polinomios del mismo grado a la vez. Para introducir estas ecuaciones dentro del funcional de cálculo del SPR se utilizará el método de los multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, el ajuste simultáneo de dos campos de

tensiones distintos conlleva tener que realizar una serie de modificaciones sobre la estructura del funcional. Estos cambios serán tratados en la siguiente sección.

Formulación del SPR-C en contacto

La formulación del SPR-C para los patch de contacto es una extensión de la formulación empleada para los patch convencionales a fin de permitir el ajuste simultáneo de dos campos de tensiones en dominios diferentes.

En primer lugar vamos a plantear cómo sería el sistema de ecuaciones del SPR-C considerando el cálculo en paralelo de dos patches i, j . Como ocurre para el caso aislado, cada dominio tendrá asociado un funcional en el cual se consideran una aproximación ponderada del polinomio a los valores de tensión del MEF en los puntos de superconvergencia y las restricciones debidas a la ecuación de equilibrio interno, la de compatibilidad y la de equilibrio en el contorno:

$$\begin{aligned} \phi'_{SPR-C}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\lambda}) &= \int_{\Omega_p} \left(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{A} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) \right)^2 d\Omega \\ &+ \boldsymbol{\lambda}^{int} c^{int}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^{comp} c^{comp}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^{ext} c^{ext}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

La minimización de estos funcionales da lugar a sistemas de ecuaciones que, expresados matricialmente, tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix}$$

Para considerar un mayor número de dominios el procedimiento es muy sencillo. Consideremos los sistemas de ecuaciones A y B con m y n incógnitas, respectivamente. Para resolverlos de forma simultánea primero deberíamos crear una matriz cuadrada de ceros de orden $m + n$ y dos vectores con $m + n$ elementos. A continuación, se colocarían los elementos de la matriz de coeficientes de A con su diagonal de la $(1,1)$ a la (m,m) y los de B yendo de $(m + 1, m + 1)$ a la $(m + n, m + n)$, mientras que los vectores de A ocuparían las posiciones de la 1 a la m y los de B de la $m + 1$ a la $m + n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \boldsymbol{\Lambda}_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{M}_2 & \mathbf{C}_2^T \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_2 \\ \boldsymbol{\Lambda}_2 \end{Bmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{C}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{C}_2^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \boldsymbol{\Lambda}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \boldsymbol{\Lambda}_2 \end{Bmatrix} \quad (134)$$

A fin de agrupar el vector de incógnitas en coeficientes y multiplicadores de Lagrange es habitual reordenar el sistema como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_2^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{Bmatrix} \quad (135)$$

A esta misma ecuación llegamos cuando sumamos los funcionales de los patches y minimizamos para obtener los campos de coeficientes y desplazamientos:

$$\begin{aligned} \phi'_{SPR-C}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\lambda})_{1,2} &= \sum_{1,2} \int_{\Omega_p} \left(\mathbf{P}(x_i) \mathbf{A} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(x_i)) \right)^2 d\Omega \\ &+ \lambda_i^{int} c^{int}(x_i) + \lambda_i^{comp} c^{comp}(x_i) + \lambda_i^{ext} c^{ext}(x_i) \end{aligned} \quad (136)$$

La imposición de la condición de equilibrio en el contorno de contacto supone añadir a este último funcional un término que relaciona los campos de tensiones de los dos dominios y, por tanto, enlaza los dos sistemas de ecuaciones. Añadir estas restricciones supone aumentar el número de multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \phi'_{SPR-C}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\lambda})_{1,2}^{ctc} &= \lambda_{1-2}^{ctc} c^{ctc}(x_{1-2}) + \sum_{1,2} \int_{\Omega_p} \left(\mathbf{P}(x_i) \mathbf{A} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(x_i)) \right)^2 d\Omega \\ &+ \lambda_i^{int} c^{int}(x_i) + \lambda_i^{comp} c^{comp}(x_i) + \lambda_i^{ext} c^{ext}(x_i) \end{aligned} \quad (137)$$

En este caso el sistema de ecuaciones queda como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{1-2}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_2^T & \mathbf{C}_{1-2}^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{1-2} & \mathbf{C}_{1-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_{1-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (138)$$

donde \mathbf{C}_{1-2} son las restricciones contacto entre los cuerpos 1 y 2, λ_{1-2} son los multiplicadores de Lagrange asociados a estas restricciones

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene los coeficientes \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 de los polinomios que definen los campos de tensiones de contacto en los dominios 1 y 2, así como los campos de coeficientes de Lagrange.

Conclusiones

En este Trabajo Final de Grado se ha desarrollado una técnica de reconstrucción de tensiones en mallados cartesianos independientes de la geometría denominada SPR-C. Partiendo de las bases de la técnica SPR se han propuesto un conjunto de restricciones que debe cumplir la solución exacta a fin de obtener un campo de tensiones mejorado con respecto al que ofrece el método de elementos finitos. Los procedimientos empleados durante este trabajo se han seguido para formular las expresiones que permitan obtener un campo de tensiones que cumpla las condiciones de equilibrio interno y compatibilidad en todo el dominio. Debido a la mala precisión de la solución en el contorno del dominio, se ha prestado especial atención a los elementos de contorno. En este caso, además de aplicarse las ecuaciones de equilibrio interno y compatibilidad, se ha obtenido la formulación para que el campo de tensiones reconstruido satisfaga la ecuación en el contorno considerando tracciones impuestas y simetría. Para el problema de contacto se ha propuesto un procedimiento para establecer la continuidad del campo de tensiones entre cuerpos y se han formulado las ecuaciones de restricción para que el campo recuperado satisfaga las características de la zona de contacto.

La técnica se ha desarrollado para el caso 2D y 3D. Se han mostrado las diferencias en la formulación y se ha buscado una formulación generalista que pueda aplicarse al caso bidimensional y tridimensional.

Bibliografía

- Ainsworth M, Tinsley Oden J (1997). A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 142, 1-88.
- Demkowicz L (1991). A Note on Symmetry Boundary Conditions in Finite Element Methods. *Applied Mathematics Letters* 4(5), 27-30.
- Gasch I, Gasch Salvador M, Galdón Ribes JL, Martín Concepción PE, Ferrer Ballester I (2013). *Resistencia de Materiales*. Valencia, Editorial Universitat Politècnica de València.
- Gasch Salvador M, Gasch I, Galdón Ribes JL, Martín Concepción PE, Ferrer Ballester I (2012). *Elasticidad*. Valencia, Editorial Universitat Politècnica de València.
- Gilat A (2006). *MATLAB®. Una introducción con ejemplos prácticos*. Barcelona, Editorial Reverté.
- Goicolea Ruigómez JM (2007). *Mecánica de Medios Continuos: Resumen de Álgebra y Cálculo Tensorial*. Madrid, Editorial Universidad Politécnica de Madrid.
- Kattan PI (2007). *MATLAB® guide to finite elements: an interactive approach*. Segunda edición. Berlin, Springer.
- Laursen TA (2003). *Computational Contact and Impact Mechanics. Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Berlin, Springer.
- Louf F, Combe JP, Pelle JP (2003). Constitutive error estimator for the control of contact problems involving friction. *Computer and Structures* 81, 1759-1772.
- Marco O, Sevilla R, Zhang Y, Ródenas JJ, Tur M (2015). Exact 3D boundary representation in finite element analysis based on Cartesian grids independent of the geometry. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 103, 445-468.
- MathWorks (2016). *MATLAB®. Capítulos "Function Reference", "Programming Fundamentals", "Graphics" y "Primer"*. <https://es.mathworks.com/help/matlab/index.html>
- Moore H (2007). *MATLAB® para ingenieros*. Primera edición. México, Pearson Prentice Hall.
- Nadal Soriano E (2014). *Cartesian grid FEM (cgFEM): High performance h-adaptive FE analysis with efficient error control. Application to structural shape optimization*. Universitat Politècnica de València, Valencia.
- Navarro-Jiménez JM (2014). *Optimization of a finite element code implemented in MATLAB®. On the use of GPUs for High Performance Computing*. Universitat Politècnica de València, Valencia.

- Navarro-Jiménez JM, Tur M, Ródenas JJ (2017). Large deformation frictional contact analysis with immersed boundary method. *Computational Mechanics*. En prensa.
- Ródenas JJ, Tur M, Fuenmayor FJ, Vercher A (2007). Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equation: The SPR-C technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 70, 705-727.
- Sevilla R, Fernández-Méndez S, Huerta A (2011). NURBS-Enhanced Finite Element Method (NEFEM). A seamless bridge between CAD and FEM. *Archives of Computational Methods in Engineering* 18, 441-484.
- Sevilla R, Fernández-Méndez S, Huerta A (2011). 3D-NURBS-Enhanced Finite Element Method (NEFEM). *Archives of Computational Methods in Engineering* 88, 103-125.
- Tejero Escribano L, Romera Carrión C, Díaz Hernández AM (2002). *Álgebra Lineal, Segunda Edición*. Madrid, Sanz y Torres.
- Timoshenko S, Goodier JN (1951). *Theory of Elasticity*. Nueva York, McGraw-Hill.
- Tur M, Albelda J, Navarro-Jiménez JM, Ródenas JJ (2015). A modified perturbed Lagrangian formulation for contact problems. *Computational Mechanics* 55(4), 737-754.
- Wriggers P (1996). Finite element methods for contact problems with friction. *Tribology International* 29(8), 651-658.
- Zienkiewicz OC, Taylor RL (2000). *The Finite Element Method. Volume 1: The Basis*. Oxford, Butterworth-Heinemann.
- Zienkiewicz OC, Zhu JZ (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24, 337-357.
- Zienkiewicz OC, Zhu JZ (1992). The superconvergent patch recovery an a-posteriori error estimate. Part I: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33, 1331-1364.