



**“ANÁLISIS CRÍTICO-HISTÓRICO
DE
LAS TEORÍAS PIONERAS
SOBRE LA
ESTABILIDAD LONGITUDINAL
DE LOS AVIONES”.**
(1799-1913)

Presentada por: José Pedro Magraner Rullán.

Dirigida por: Rodrigo Martínez-Val Peñalosa.

Dirigida por: Francisco Payri González.

Univèrsitat Politècnica de València

Julio de 2017

Resumen

El presente trabajo consiste en una investigación sobre las primeras teorías físico-matemáticas aplicadas al estudio del vuelo artificial con aeroplanos, y particularmente el tratamiento del problema de la estabilidad longitudinal. Se analizan las aportaciones mínimamente analítico-formales de G. Cayley, A. Pénaud, O. Lilienthal, A. Zahm y los hermanos W. & O. Wright. Se estudian también las publicaciones matemáticamente más sólidas de N. E. Zhukowsky, H. G. Bryan, F. Ferber, F. W. Lanchester, R. Soreau, P. Painlevé, G. de Bothezat y T. Von Kármán & E. Trefftz. Se incluye también el estudio de la aportación eminentemente divulgativa de E. A. Duchêne. El período analizado abarca desde 1799 hasta 1913.

Abstract

The present work consists of an investigation on the first physical-mathematical theories applied to the study of the artificial flight with airplanes, and in particular the treatment of the problem of longitudinal stability. The minimally analytical-formal contributions of G. Cayley, A. Pénaud, O. Lilienthal, A. Zahm and the W. & O. Wright brothers are analyzed. The mathematically stronger publications of N. E. Zhukowsky, H. Bryan, F. Ferber, F. W. Lanchester, R. Soreau, P. Painlevé, G. de Bothezat and T. Von Kármán & E. Trefftz, are also studied. Also included is the study of the eminently informative contribution of E. A. Duchêne. The period analyzed covers from 1799 to 1913.

Resum

El present treball consisteix en una investigació sobre les primeres teories físico-matemàtiques aplicades a l'estudi del vol artificial amb aeroplans, i particularment el tractament del problema de l'estabilitat longitudinal. S'analitzen les aportacions mínimament analítico-formals de G. Cayley, A. Pénaud, O. Lilienthal, A. Zahm i els germans W. & O. Wright. S'estudien també les publicacions matemàticament més sòlides de N.E. Zhukowsky, H.G. Bryan, F. Ferber, F.W. Lanchester, R.Soreau, P. Painlevé, G. de Bothezat y T. Von Kármán & E. Trefftz. S'inclou també l'estudi de l'aportació eminentment divulgativa d' E.A. Duchêne. El període analitzat abarca des de 1799 fins 1913.

A MIS ALUMNAS Y ALUMNOS.

“Ex Umbris et Imaginibus in Veritatem”
John Henry Newman.

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento al Prof. Rodrigo Martínez-Val, de la Universidad Politécnica de Madrid y al Prof. Francisco Payri, de la Universitat Politècnica de València, por haber aceptado dirigir este trabajo. Sin su benévola aceptación, su comprensión y su ocasionalmente compulsiva insistencia, no habría sido posible culminarla.

Debo agradecer también, al Prof. José María Desantes las facilidades que el DMMT me ha proporcionado, en muy diversos aspectos. El Prof. Antonio Torregrosa ha gestionado con eficacia la obtención de una bibliografía que, dado el carácter de la presente tesis, era imprescindible y frecuentemente de dificultosa localización. El DMMT ha proporcionado también traductores¹ de ruso y alemán cuando ha sido necesario.

Agradezco a los evaluadores externos Prof. Damián Rivas Rivas, de la Universidad de Sevilla, Dr. Jaime Cabezas Carrasco, del Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial “Esteban Terradas”, y al Prof. Pablo Fajardo Peña, de la Universidad Carlos III sus observaciones; todas ellas han sido tenidas en cuenta en la medida que nos ha resultado posible.

Estoy en deuda también con los evaluadores internos, Dr. Pedro Martí Gómez-Aldaraví y Dr. Marcos Carreres Talens, que han tenido la amabilidad de criticar diversos capítulos de la tesis, aportando valiosas sugerencias; no podría dejar de mencionar tampoco las que la Prof. Xandra Margot y el Prof. Andrés Tiseira me han proporcionado con sus consejos, así como el valioso trabajo que Pedro Quintero ha aportado. De muchas otras personas del Departamento de Máquinas y Motores Térmicos, en sus distintas dependencias, soy deudor. Su número es muy elevado y explica -aunque no la justifique- la ausencia de mención nominal.

En esa misma línea, siento también la necesidad de agradecer a las alumnas y a los alumnos de la asignatura “Mecánica de Vuelo” las sugerencias -entre otras cosas también valiosas- que me han proporcionado a lo largo de 8 años de docencia en la UPV.

Finalmente, agradezco también a mi familia el apoyo (y la paciencia) que han derrochado durante el tiempo en que he estado inmerso en la confección de este trabajo.

PS: no sería razonable omitir la mención de Stephen Wolfram. Gracias a “Mathematica ®” ha sido posible realizar este trabajo con una fiabilidad cuyos fallos son atribuibles únicamente al autor de la tesis.

¹ En el cuerpo de la Tesis se otorgan, nominal y oportunamente, los créditos debidos a los traductores.

INDICE

Índice General.....	11
Lista de Tablas	21
Lista de Figuras	23
Nomenclatura.....	33

Capítulo 1 39

Introducción.

- 1.1 Generalidades
- 1.2 Un problema de Aerodinámica.
- 1.3 Estabilidad Estática
- 1.4 Estabilidad Dinámica
- 1.5 Nota sobre las características del presente trabajo.
Bibliografía.

Capítulo 2 49

Teorías aerodinámicas a finales del siglo XIX, en los temas relacionados con el estudio de la estabilidad de aviones.

- 2.1 Introducción. Placa plana sometida a una corriente de aire.
- 2.2 La denominada “Resistencia Aerodinámica Específica del Aire”
- 2.3 La Resistencia aerodinámica de una placa plana con incidencia variable.

- 2.4 Relación entre la función $f(\alpha)$ y los coeficientes aerodinámicos asimilables a los clásicos $CL(\alpha)$ y $CD(\alpha)$
 - 2.5 La posición del centro de presión $x_{CP}(\alpha)$. Perfiles planos y perfiles con curvatura.
 - 2.5.1 Posición del centro de presión de una placa plana.
 - 2.5.2 Centro de presión de superficies curvas.
 - 2.6 Inicio de la teoría matemática de perfiles bidimensionales.
 - 2.7 Conclusiones.
 - 2.8 Anexo I. Centro Aerodinámico y Centro de presión.
 - 2.9 Anexo II. La Ley de Avanzini.
- Bibliografía.

Capítulo 3 George Cayley (1773-1854)

91

- 3.1 Nota biográfica.
 - 3.2 Documentos de referencia objeto de estudio.
 - 3.3 Descripción del contenido.
 - 3.3.1 “On Aerial Navigation”, Parte I.
 - 3.3.2 “On Aerial Navigation”, Parte II.
 - 3.4 El timón horizontal móvil.
 - 3.5 Sobre el Modelo de Planeador de 1804.
 - 3.6 Sobre el Modelo de Planeador de 1808.
 - 3.7 Sobre el Modelo de Planeador de 1818.
 - 3.8 Sobre el Modelo de Planeador de 1849 (1853).
 - 3.9 Sobre “*The Governable Parachute*” (1852)
 - 3.10 Conclusiones
- Bibliografía

Capítulo 4 Alphonse Pénaud (1850-1880)

109

- 4.1 Nota Biográfica.
 - 4.2 Documentos de Referencia.
 - 4.3 Descripción de contenido. El estabilizador automático.
 - 4.3.1 Otros proyectos.
 - 4.4 Conclusiones.
 - 4.5 Anexo I. La mecánica de vuelo estacionaria de A. Pénaud.
- Bibliografía

Capítulo 5 Otto Lilienthal (1848-1896)

125

- 5.1 Nota biográfica
- 5.2 Documento de referencia objeto de estudio.
- 5.3 Descripción del contenido.
 - 5.3.1 Las Gráficas Polares de la Fuerza Aerodinámica.
 - 5.3.2 La Posición del Centro de Presión.
 - 5.3.3 Control del Momento de Cabeceo.
- 5.4 Conclusiones.

Bibliografía.

Capítulo 6 Nicolai Egorovitch Zhukowsky (1847-1921) 137

- 6.1 Nota Biográfica.
 - 6.2 Documentos de referencia.
 - 6.3 Descripción de contenido.
 - 6.3.1 “Sobre el vuelo de planeo de las aves”. (1891)
 - 6.3.2 “Sobre el ángulo óptimo de vuelo de un aeroplano”. (1897)
 - 6.3.3 “Sobre la Caída en el Aire de Cuerpos Ligeros Alargados con Giro Alrededor de su Eje Longitudinal”. (1906)
 - 6.3.4 “Descripción elemental de la Dinámica de los Aeroplanos”. (1913)
 - 6.4 Estabilidad angular en cabeceo.
 - 6.5 Conclusiones
- Bibliografía

Capítulo 7 A. F. Zahm (1862-1954)

167

- 7.1 Nota Biográfica.
 - 7.2 Documento de referencia.
 - 7.3 Descripción de contenido.
 - 7.4 Conclusiones
- Bibliografía

- 10.3.1 Ley de equivalencia de las superficies.
- 10.3.2 Ecuaciones generales del movimiento.
 - 10.3.2.1 Ecuaciones de las fuerzas.
 - 10.3.2.2 Ecuaciones de los momentos.
 - 10.3.2.3 Nota complementaria: “Las velocidades angulares”.
- 10.3.3 Estudio del vuelo estacionario sin motor en un plano vertical.
 - 10.3.3.1 El “*Pseudo Teorema*” de Ferber.
- 10.3.4 Estudio de la Estabilidad.
- 10.4 Conclusiones.
- Bibliografía

Capítulo 11 F. W. Lanchester (1868-1946) 239

- 11.1 Nota Biográfica.
- 11.2 Documentos de Referencia.
- 11.3 Descripción de Contenido.
 - 11.3.1 “Aerodynamics” [1].
 - 11.3.1.1 Sobre la placa plana balastada.
 - 11.3.2 “Aerodnetics” [2].
 - 11.3.2.1 Trayectorias “Fugoides”.
 - 11.3.2.2 Efecto de la resistencia aerodinámica y del momento de inercia sobre la estabilidad.
 - 11.3.2.3 Ecuación completa de la Estabilidad.
 - 11.3.2.4 Ejemplo de aplicación. Análisis de la estabilidad de un planeador de Otto Lilienthal.
 - 11.3.2.5 Comentario.
- 11.4 Consideraciones Críticas.
- 11.5 Anexo. Introducción al Modelo Aerodinámico de Lanchester para la sustentación de un perfil.
 - 11.5.1 Sustentación de un ala finita sometida a un ángulo de ataque pequeño.
- Bibliografía.

Capítulo 12 Rodolphe Soreau (1865-1935) 267

- 12.1 Nota Biográfica.
- 12.2 Documento de Referencia.
- 12.3 Descripción del contenido. Introducción.

- 12.3.1 Forma matemática de la expresión $f(\alpha)$.
- 12.3.2 Efecto del alargamiento alar.
 - 12.3.2.1 Conclusión sobre la función $\lambda(\alpha)$
- 12.3.3 Sustentación y Resistencia de un ala plana inclinada un ángulo pequeño.
 - 12.3.3.1 Coeficiente de Eficacia K y Calidad Q del ala.
- 12.3.4 Sobre el Centro de Presión.
- 12.3.5 Introducción al estudio del vuelo estacionario en un plano vertical.
 - 12.3.5.1 Estudio del empenaje horizontal.
- 12.3.6 Mecánica del Vuelo en equilibrio.
 - 12.3.6.1 Consecuencia I.
 - 12.3.6.2 Consecuencia II.
- 12.4 Estudio de la Estabilidad de un aeroplano.
 - 12.4.1 Estabilidad Longitudinal Automática.
- 12.5 Consideraciones críticas.
 - Bibliografía

Capítulo 13 Paul Painlevé (1863-1933) 291

- 13.1 Nota Biográfica.
- 13.2 Documentación de referencia.
- 13.3 Descripción de contenido.
 - 13.3.1 Modelo aerodinámico.
 - 13.3.2 Estabilidad en vuelo de planeo de una placa plana.
 - 13.3.3 Vuelo estacionario en un plano vertical.
- 13.4 Estabilidad en ángulo de asiento longitudinal.
- 13.5 Estabilidad en velocidad.
- 13.6 Comentarios.
 - Bibliografía

Capítulo 14 G. de Bothezat (1882-1940) 307

- 14.1 Nota Biográfica.
- 14.2 Documento de Referencia.

- 14.3 Descripción de Contenido.
 - 14.3.1 Extracto del Prólogo de P. Painlevé.
- 14.4 Introducción.
 - 14.4.1 Fuerzas que actúan sobre el aeroplano.
 - 14.4.2 Efecto de una velocidad angular alrededor de un eje perpendicular a su plano de simetría (sobre un ala plana sometida a una corriente uniforme).
 - 14.4.3 Características fundamentales del aeroplano.
 - 14.4.3.1 Regímenes de traslación rectilínea de un aeroplano.
 - 14.4.3.2 Régimen de ascenso o descenso con pendiente pequeña.
- 14.5 Noción de Par (Momento) Central.
 - 14.5.1 Aparato sin empenajes horizontales.
 - 14.5.2 Aparato con superficie de cola.
 - 14.5.3 Aparato con empenaje horizontal delantero.
- 14.6 Análisis del fuselaje.
- 14.7 El problema general de la estabilidad del aeroplano. La Estabilidad Longitudinal.
 - 14.7.1 Conclusiones preliminares sobre la Estabilidad Longitudinal.
 - 14.7.2 Investigación por el Método de Klein.
 - 14.7.3 Conclusiones.
- 14.8 Ecuaciones generales de la dinámica de un aeroplano en tres dimensiones.
- 14.9 Conclusiones generales.
 - Bibliografía

Capítulo 15 G. H. Bryan (1864-1928)

& E. H. Harper (1880-1916)

339

-
- 15.1 Nota Biográfica.
 - 15.2 Documento de Referencia
 - 15.3 Descripción del contenido.
 - 15.3.1 Ecuaciones generales del movimiento.
 - 15.3.2 Concepto de “Derivada Aerodinámica”.
 - 15.3.3 Separación en dos sistemas no acoplados.
 - 15.3.4 Estudio del Sistema Simétrico.
 - 15.3.4.1 Los coeficientes del Polinomio Característico.
 - 15.3.5 Las denominadas “Primitivas Condiciones de Estabilidad”

- 15.4 Expresión de las derivadas aerodinámicas para alas planas.
 - 15.4.1 Derivadas Rotatorias.
 - 15.4.2 Derivadas Aerodinámicas.
- 15.5 Estudio de casos particulares para planos sustentadores estrechos.
- 15.6 Estabilidad longitudinal de un sistema de un plano sustentador.
 - 15.6.1 Separación de las oscilaciones largas y cortas.
 - 15.6.1.1 Oscilaciones Cortas.
 - 15.6.1.2 Oscilaciones Largas.
 - 15.6.2 Carácter de las oscilaciones.
 - 15.6.2.1 Oscilaciones cortas.
 - 15.6.2.2 Oscilaciones largas.
 - 15.6.3 Comparación de la parte real de las raíces.
- 15.7 Efecto de la inclinación de la trayectoria en la estabilidad.
- 15.8 Estudios complementarios y conclusiones sobre el movimiento Simétrico.
- 15.9 Problemas pendientes de estudio.
- 15.10 Análisis Crítico-Histórico
- 15.11 ANEXO I.
 - Bibliografía

Capítulo 16 Emile Auguste Duchêne (1869-1046) 391

- 16.1 Nota Biográfica.
- 16.2 Documento de referencia.
- 16.3 Descripción del contenido.
 - 16.3.1 Sobre la resistencia aerodinámica.
 - 16.3.2 Vuelo estacionario en un plano vertical.
 - 16.3.3 Vuelo Oblicuo: ascendente o descendente.
- 16.4 Centro de Presión.
- 16.5 Estabilidad (estática) Longitudinal.
- 16.6 Estabilidad Longitudinal Automática.
 - 16.6.1 Aviones consistentes en un solo plano.
 - 16.6.2 Aviones consistentes en dos planos
- 16.7 Función de la cola en el amortiguamiento de las oscilaciones.
- 16.8 Influencia del momento de inercia I_{yy} en la estabilidad.
- 16.9 Conclusiones
 - Bibliografía

Capítulo 17 T. Von Kármán (1881-1963)

& E. Trefftz (1888-1937)

413

17.1 Nota Biográfica.

17.2 Documento de referencia.

17.3 Descripción del contenido.

17.3.1 Estudio de la Estabilidad Estática.

17.3.1.1 Nota complementaria sobre la Curva
Metacéntrica.

17.3.2 Ecuaciones del movimiento. Ecuación de Estabilidad.

17.3.2.1 Estabilidad neutral.

17.3.2.2 Estabilidad muy grande.

17.3.3 Posibilidad de existencia de raíces reales de la ecuación
de Estabilidad. (Método de Klein).

17.3.3.1 Valores típicos de p y de q.

17.3.4 Estudio de la posibilidad de existencia de raíces reales
mediante las Envoltentes.

17.3.5 Raíces imaginarias. Estabilidad de las oscilaciones.

17.3.6 Zona Límite de Estabilidad.

17.3.7 Representación gráfica de las raíces.

17.3.8 Cálculo aproximado de las raíces de la Ecuación de
Estabilidad (raíces complejas).

17.3.9 Aplicaciones prácticas.

17.4 Conclusiones

17.5 Anexo.

Bibliografía.

Capítulo 18. Sinopsis de aportaciones.

465

- (1) G. Cayley.
- (2) A. Pénaud.
- (3) O. Lilienthal.
- (4) N. E. Zhukowsky.
- (5) A. F. Zahm.
- (6) W. Wright & O. Wright.
- (7) H. G. Bryan & W. E. Williams.
- (8) F. Ferber.
- (9) F. W. Lanchester.
- (10) R. Soreau.

- (11) P. Painlevé.
- (12) G. De Bothezat.
- (13) G. H. Bryan.
- (14) E. A. Duchêne.
- (15) T. V. Kármán & E. Trefftz.

- Conclusiones.
- Bibliografía
- Anexo. Selección de libros de referencia y autores citados

INDICE DE TABLAS

Tabla 2.1: Valores de K ; “Resistencia aerodinámica específica del aire”

Tabla 2.2: Valores de K ; “Resistencia aerodinámica específica del aire” (Cont.).

Tabla 2.3: Valores para la función $f(\alpha)$ según diversas fuentes.

Tabla 2.4: Valores para la función $\frac{x_{CP}(\alpha)}{c}$ según diversas fuentes.

Tabla 2.5. Datos del Perfil aerodinámico Royal Aircraft Factory 15. Ref. [114].

Tabla 2.6: Valores para la función $f(\alpha)$ según diversas fuentes, con α pequeño.

Tabla 2.8: Comparación entre los valores asumidos por los pioneros y los aceptados actualmente para algunas funciones aerodinámicas características.

Tabla 3.2: Planeador de 1804. Posición del centro aerodinámico del ala principal.

INDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1: Valores obtenidos y año de medición de la constante K “Resistencia Aerodinámica específica del aire”.

Fig. 2.2: Valores para $f(\alpha)$ desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = \pi/2$ para alas cuadradas, según distintos investigadores.

Fig. 2.3: Valores para $f(\alpha)$ para alas cuadradas y ángulos de ataque pequeños, según distintos investigadores.

Fig. 2.4: Valores para $f(\alpha)$ según Soreau [12] para alas rectangulares (Alargamiento alar entre 2 y 7) y ángulos de incidencia pequeños.

Fig. 2.5: Valores para $f(\alpha)$ para alas rectangulares (Alargamiento alar no definido) y ángulos de incidencia pequeños.

Fig. 2.6: Valor del coeficiente aerodinámico de fuerza normal a la placa según Ref. [36].

Fig. 2.7: Esquema de una placa plana sometida a una corriente de aire con velocidad V , ángulo de ataque α , centro de presión en x_{CP} , y fuerza aerodinámica resultante R , normal a la placa. (LE: borde de ataque; TE: borde de salida).

Fig. 2.8: Eficiencia Aerodinámica de una placa plana en función de α , según las condiciones indicadas por las ecuaciones (2.2).

Fig. 2.9: Datos experimentales del movimiento del centro de presión de una placa plana. (Ref. Eiffel [18])

Fig. 2.10: Datos experimentales del movimiento del centro de presión de una placa con curvatura. (Ref. Eiffel [18])

Fig. 2.11: Datos experimentales del movimiento del centro de presión de una placa con curvatura. (Ref. Eiffel [18] y Prandtl [78]).

Fig. 2.12: Variación del momento de cabeceo con α respecto de distintos puntos de la cuerda del perfil RAF 15.

Fig. 2.13: Movimiento del centro de presión de una placa plana con el ángulo de ataque para un perfil circular, según Eq. [2.6].

Fig. 2.14: Sustentación generada por un perfil curvo: un componente depende del ángulo de ataque: $CL_1 = CL_\alpha \alpha$; el otro componente es constante.

Fig. 2.15: Sustentaciones debidas al ángulo de ataque (L1) y a la curvatura (L2), con sus Líneas de acción (Aproximadas).

Fig. 2.16: Sistema equivalente para un perfil curvo.

Fig. 3.0: Esquema del Medallón de Cayley, mostrando la descomposición de la fuerza aerodinámica sobre la placa. (La velocidad aparece en forma de “flecha”).

Fig. 3.1: Composición de fuerzas establecida por Cayley para explicar la posibilidad del vuelo de planeo natural de un ave.

Fig. 3.2: Composición de fuerzas establecida por Cayley para explicar la posibilidad del vuelo artificial, sustancialmente idéntica a la Fig. 3.1, salvo por el hecho de incluir una barquilla con pasajero.

Fig. 3.3: Descripción de los elementos fundamentales que constituyen un aparato volador controlable, según Cayley.

Fig. 3.4: Cayley se inspira en las aves para fijar la forma geométrica y los elementos constitutivos de sus planeadores.

Fig. 3.5: Esquema básico para analizar el comportamiento longitudinal de un planeador, sometido a una corriente de velocidad V , con ángulo de ataque α , un ala de cuerda AB con su centro de presión en el punto C (Coordenada desde el punto B : xCA) y empenaje trasero FG , (con su centro de presión a una distancia xCA desde B), deflectable un ángulo $\pm\delta_E$. El peso $-mg$ situado en la vertical del punto C . El ángulo θ es el asiento longitudinal, tomado positivo hacia arriba. Ejes tierra X, Z .

Fig. 3.6: Plano y cotas del modelo de 1804. Se trata de un modelo reducido de planeador que Cayley utilizó para estudiar el vuelo de planeo.

Fig. 3.7: Modelo de 1804. La cola está unida al cuerpo del planeador mediante una varilla metálica que admite deformaciones en sentido vertical y lateral, y así permite estudiar el comportamiento del modelo frente a diferentes ángulos δ_E

Fig. 3.8: Boceto del modelo de 1808. La geometría del diseño aparece incompleta en el texto de Cayley; lo utiliza para describir aspectos parciales relacionados con el centro de presión.

Fig. 3.9: Boceto del modelo de 1818. Boceto de planeador del que se sirve Cayley para explicar la función de la cola, separada una cierta distancia del ala principal.

Fig. 3.10A: Explicación de la función equilibradora de la cola. (Centro de gravedad por delante de las superficies sustentadoras).

Fig. 3.10B: Explicación de la función equilibradora de la cola. (Centro de gravedad entre las superficies sustentadoras).

Fig. 3.11: Modelo de planeador de 1849/1853, usado por Cayley para investigar trayectorias.

Fig. 3.12: Modelo de planeador de 1852. El tamaño debía permitir la presencia en su interior de una persona. El ala y el conjunto estabilizador es similar al utilizado en el planeador de 1804. Se añaden ahora elementos de control accionados por el piloto.

Fig. 4.1A: Esquema geométrico utilizado por Pénaud para explicar su teoría sobre el efecto estabilizador de la cola.

Fig. 4.1B: Esquema geométrico utilizado por Pénaud para explicar su teoría sobre el efecto estabilizador de la cola, con indicación de los parámetros relevantes.

Fig. 4.2: Modelo de avión construido por Pénaud; con el que demostró la eficacia estabilizadora de la pequeña cola horizontal trasera.

Fig. 4.3: Bosquejo del avión, patentado por Pénaud y Gauchat, y constituido por una sola ala dotada de un muy pequeño empenaje. La situación relativa del CDG y del centro de presión debido al ángulo α y del debido a δ_E , se muestran en el dibujo.

Fig. 5.1: Ejemplo típico del modo que emplea Lilienthal para presentar gráficamente la relación entre la fuerza aerodinámica sobre una placa – en este caso plana – y el ángulo de ataque. El módulo de los vectores representa la magnitud de la fuerza aerodinámica y su inclinación (respecto de la velocidad) puede leerse directamente en el gráfico.

Fig. 5.2: La fuerza aerodinámica resultante es situada en el centro de la cuerda de la placa.

Fig. 5.3. Fuerza normal y tangencial de un perfil alar con curvatura sometido a una corriente con ángulo de ataque α .

Fig. 5.4, Coeficiente $\eta_{CL}(\alpha)$ correspondiente a la Tabla 5.1

Fig. 5.5. Coeficiente $\theta_{CL}(\alpha)$ correspondiente a la Tabla 5.1

Fig. 5.6 Eficiencia Aerodinámica correspondiente a la Tabla 5.1

Fig. 5.7: Lilienthal experimentó con formas voladoras -tipo cometa- inspiradas en las aves.

Fig. 5.8: El control longitudinal de los planeadores de Lilienthal se lograba mediante el desplazamiento del centro de gravedad del aparato; para lograrlo, el piloto tenía que desplazar sus piernas o su cuerpo en el grado necesario, hacia adelante o hacia atrás. (También hacia los lados para el control lateral)

Fig. 5.9: Boceto de planeador de Lilienthal; este es uno de los 19 diseños diferentes que llegó a realizar, y en los que efectuó numerosos vuelos. Puede verse el perfil alar curvo, y el curioso empenaje abatible en un solo sentido.

Fig. 6.1: Descripción esquemática para el estudio del vuelo planeado. El ala es asimilada a una placa plana AB.

Fig. 6.2: Esquema utilizado por Zhukowsky para establecer las ecuaciones de la dinámica del movimiento no estacionario de una placa plana en vuelo de planeo en un plano vertical.

Fig. 6.3: Distintas trayectorias que puede realizar una placa plana AB en vuelo planeado. La trayectoria recta (L) indica vuelo estrictamente estacionario; las demás trayectorias se diferencian unas de otras en las condiciones iniciales del vuelo, y no son estacionarias.

Fig. 6.4: Las condiciones iniciales del vuelo planeado se establecen en las variables γ_0 y V_0 . La variable V_0 es una magnitud vectorial, por tanto queda definido también, por las condiciones indicadas, el ángulo de ataque inicial. (Esto permite intuir lo delicado de las condiciones iniciales del lanzamiento para una placa plana).

Fig. 6.5: Distintas trayectorias, según sean las condiciones iniciales de integración de la ecuación diferencial [6.14].

Fig.: 6.6 Curva Polar de Lilienthal

Fig.: 6.7 Análisis geométrico de la Curva Polar de Lilienthal

Fig. 6.8 Ubicación geométrica del valor óptimo de β para mínima potencia consumida en el vuelo.

Fig.: 6.9 Análisis geométrico de $CA(\beta)\sin\beta\tan^2\beta$

Fig. 6.10: Reproducción del gráfico de Zhukowsky en el que se representa un cuerpo -la pequeña placa cuyo perfil lateral se observa en el dibujo- que cae en el aire girando alrededor del punto O. Las líneas de corriente en el punto A se bifurcan y se unen de nuevo en D. La línea cerrada conforma un perfil y se supone asimilable a una forma aerodinámica estándar.

Fig. 6.11: Dos superficies sustentadoras AB y DE, de áreas S_1, S_2 . La segunda realiza la función amortiguadora. La tracción pasa por el CDG.

Fig. 6.12. Oscilaciones de dos aeroplanos geoméricamente iguales, salvo en que tienen un parámetro L diferente.

Fig. 7.1: Placa plana con timón deflectado y CDG adelantado.

Fig. 7.2: Placa plana con timón deflectado y CDG entre las resultantes aerodinámicas.

Fig. 7.3: Distribución de sustentación para un perfil simétrico dotado de un timón: efecto de Angulo de ataque y efecto de deflexión del timón. (NACA RP 2348)*

Fig. 8.1: Representación gráfica del movimiento del centro de presión en función del ángulo de ataque. Es un ejemplo del tipo de experimentos que realizaron los Wright.

Fig. 8.2: Modelo de planeador de los Wright; versión sin propulsión, previa al “*Flyer*”. (1899).

Fig. 8.3: Evolución de los aviones de los Wright: de avión inestable a estable. . (Desplazamiento del Centro Aerodinámico por detrás del CDG).

Fig. 9.1: Sistema de ejes y nomenclatura utilizada por B&W para establecer las ecuaciones de la dinámica del vuelo de un planeador.

Fig. 9.2: Esquema para el estudio de una sola placa sustentadora

Fig. 9.3: Estudio de dos placas planas separadas con el mismo ángulo de ataque geométrico.

Fig. 9.4 Estudio de dos placas planas separadas con diferente ángulo de ataque geométrico.

Fig. 9.5: Parámetros y nomenclatura para el estudio de dos placas planas separadas con diferente ángulo de ataque geométrico.

Fig. 10.1: Esquema explicativo de las superficies equivalentes de Ferber.

Fig. 10.2: Aeroplano Equivalente completo, según Ferber.

Fig. 10.3: Aeroplano Equivalente: vista de perfil. Coordenadas geométricas de puntos relevantes.

Fig. 10.4: Aeroplano Equivalente: vista frontal. Coordenadas geométricas de puntos relevantes.

Fig. 10.5: Aeroplano Equivalente: línea de acción de la tracción F . El Punto G es el CDG.

Fig. 10.6: Sistema de Ejes Cuerpo de Referencia para el Aeroplano Equivalente.

Fig. 10.7: Evaluación aproximada del efecto de las velocidades angulares. Coordenadas relevantes.

Fig. 10.8: Esquema para análisis de vuelo estacionario en un plano vertical.

Fig. 11.1: Esquema genérico de una placa plana con ángulo de ataque.

Fig. 11.2: Esquema de Lanchester para el estudio de las trayectorias conservativas.

Fig. 11.3: Diferentes trayectorias Fugoides, obtenidas variando las condiciones iniciales del lanzamiento.

Fig. 11.4: Modelo de Planeador de Otto Lilienthal estudiado por Lanchester.

Fig. 11.5: Ubicación de los centros aerodinámicos del ala (x_{CA1}), de la cola (x_{CA2}), del centro de gravedad (x_{CDG}) y del Punto Neutro (x_{PN}). (En este caso x_{CDG} coincide con x_{CA1}).

Fig. 11.6: Definición del ángulo β según Lanchester.

Fig. 11.7: Definición de los ángulos β y α según Lanchester.

Fig. 12.1: Modelo de ala (Forma en planta y perfil) ensayada por Lilienthal.

Fig. 12.2: Curva Polar del ala de la Fig. 12.1

Fig. 12.3: Eficiencia Aerodinámica del ala de la Fig. 12.1, correspondiente a las ecuaciones [12.12].

Fig. 12.4: Esquema y nomenclatura para el análisis del vuelo no estacionario en un plano vertical.

Fig. 12.5: Esquema y nomenclatura para el análisis de la estabilidad de un aeroplano con propulsión en vuelo en un plano vertical.

Fig. 13.1: Esquema de placa sometida a una corriente con ángulo de ataque. Composición de Fuerzas.

Fig. 13.2: Placa en vuelo planeado. Estudio de la estabilidad.

Fig. 13.3: Placa en vuelo planeado. Estudio de la estabilidad (cont.)

Fig. 13.4: Placa en vuelo planeado. Estudio de la estabilidad (cont.).

Fig. 13.5: Placa en vuelo planeado en un plano vertical. Estudio de la estabilidad dinámica.

Fig. 13.6: Gráfico de la Eficiencia Aerodinámica y de su derivada respecto de la incidencia, para un caso particular. La zona A es estable, y la B inestable. Polar de coeficientes constantes.

Fig. 14.1: Esquema para el cálculo de la fuerza aerodinámica generada por la velocidad angular de una superficie que gira alrededor de un eje en el mismo plano, con el centro de giro fuera de la superficie.

Fig. 14.2: Esquema descriptivo de un aeroplano con tres superficies, una sustentadora principal (w') y dos de control longitudinal: una delantera (gg') y otra trasera (qq') con tracción central.

Fig. 14.3: La “Hipérbola de Pénauud”, según De Bothezat.

Fig. 14.4: Esquema para el estudio del Par Central de Cabeceo de un aeroplano con superficies de control delantera y trasera.

Fig. 14.5: Sistema de referencia de velocidades, ángulos y fuerzas para la obtención de las ecuaciones linealizadas de la dinámica de un aeroplano en un plano vertical.

Fig. 14.6: Ramas de la Ecuación Característica de Estabilidad para el aeroplano Ref. [14.36B], con indicación de asíntotas y definición de zonas según tangencias posibles.

Fig. 14.7: Ramas de la Ecuación Característica de Estabilidad para el aeroplano (Cfr. Nota 7) junto con la recta AB propia de este mismo avión. (Puede verse que apenas es visible y casi se confunde con el eje horizontal).

Fig. 14.8: Recinto para determinar el número de raíces de la Ecuación Característica por el Teorema de Cauchy.

Fig. 14.9: Esquema tridimensional de De Bothezat para el análisis de la estabilidad de un aeroplano.

Fig. 15.1: Sistema de Ejes de Referencia, ligados al aeroplano, utilizado por Bryan.

Fig. 15.2: Esquema de Ejes de referencia y nomenclatura para el estudio del vuelo de una placa plana. (No son ahora los de la Fig. 15.1). La velocidad U es paralela al eje X.

Fig. 15.3: Esquema y nomenclatura para el estudio del vuelo de una placa plana. (Detalle)

Fig. 15.4: Comparación entre el modelo aerodinámico para las fuerzas de Bryan (1911) y el modelo actual.

Fig. 15.5: Esquema de Aeroplano Elemental con estabilizador trasero estudiado por Bryan.

Fig. 16.1: Descomposición de fuerzas aerodinámicas y gravitatorias para una placa plana (equivalente) sometida a una corriente de aire.

Fig. 16.2: Flujo alrededor de una placa plana, según Duchêne (Parte II, Cap. IV, Fig. 37)

Fig. 16.3: Comparación del desplazamiento del centro de presión en un perfil plano (simétrico) y en un perfil con curvatura.

Fig. 16.4: Comparación del desplazamiento del centro de presión en un perfil plano (simétrico) y en un perfil con curvatura.

Fig. 16.5: Esquema para el análisis de la estabilidad estática. Sistema sustentador formado por dos alas a distinto ángulo de ataque geométrico.

Fig. 16.6: Sistema de dos alas con la línea de acción de resultante sustentadora R pasando por el CDG.

Fig. 16.7: Sistema de dos alas con la línea de acción de resultante sustentadora R no pasando por el CDG.

Fig. 16.8: Sistema de dos alas con la superficie de control delante de la principal. (Sistema "Flyer" de los Wright)

Fig. 16.9: Esquema de un Sistema formado por dos alas sustentadoras, con el CDG entre ellas. Sistema principal delantero.

Fig. 16.10: Esquema de un Sistema formado por dos alas sustentadoras, con el CDG entre ellas. Sistema principal trasero.

Fig. 16.11: Esquema explicativo de la estabilidad estática. Cambio generado en la posición del centro de presión de una sola ala por un incremento del ángulo de incidencia.

Fig. 16.12: Esquema explicativo de la estabilidad estática. Cambio generado en la posición del centro de presión de un conjunto de dos alas por un incremento del ángulo de incidencia.

Fig. 16.13: Esquema explicativo de la estabilidad estática. Conjunto de dos alas con el CDG por delante de las resultantes de sustentación de las dos alas.

Fig. 16.14: Esquema explicativo de la estabilidad estática. Aeroplano con dos elementos sustentadores: el plano principal no genera momento de cabeceo.

Fig. 16.15: Ejemplos de configuraciones estables.

Fig. 16.16: Ejemplos de configuraciones no estables.

Fig. 16.17: Esquema explicativo de la función estabilizadora de la cola.

Fig. 16.18: Ejemplo de diseño estable de un modelo sencillo de aeroplano. (Es visible la deflexión negativa de la superficie horizontal de la cola)

Fig. 17.1: Referencias de ejes, ángulos y fuerzas para un aeroplano propulsado, con dos elementos sustentadores.

Fig. 17.2: Referencias de ejes, ángulos y fuerzas para un aeroplano propulsado, con de dos elementos sustentadores, en vuelo horizontal.

Fig. 17.3: Modificación del momento de cabeceo al variar el ángulo de ataque. Curva metacéntrica.

Fig. 17.4: Curva metacéntrica de un perfil alar con curvatura.

Fig. 17.5: Curva metacéntrica de un perfil alar con curvatura. Representación tradicional.

Fig. 17.6: Representación gráfica genérica de la Curva de Estabilidad de VK&T.

Fig. 17. 7: Representación gráfica de la Curva de Estabilidad de VK&T para un caso particular. Los valores correspondientes de z aparecen indicados sobre la curva, así como los dos bucles característicos. (El bucle pequeño aparece en detalle ampliado).

Fig. 17.8: Ejemplo de un caso particular de Recta de Klein con las raíces de la Ecuación de Estabilidad indicadas sobre ella.

Fig. 17.9: La recta de Klein corta a la Curva de la Ecuación de Estabilidad en dos puntos para el bucle pequeño (raíces pequeñas) y dos puntos para raíces grandes (bucle grande). (Se trata del mismo caso particular del grafico 17.8)

Fig. 17.10; Curva de la Ecuación de Estabilidad para $b=0$ y valores diversos de “ a ” desde $a = 5$ hasta $a = 9$. El bucle pequeño no es visible. El parámetro “ p ” en abscisas, y “ q ” en ordenadas.

Fig. 17.11; Curva de la Ecuación de Estabilidad para $b=0$ y valores diversos de “ a ” desde $a = 5$ hasta $a = 9$. Sólo el bucle pequeño es visible entero. El bucle pequeño no es visible. El parámetro “ p ” en abscisas, y “ q ” en ordenadas.

Fig. 17.12: Curva de Estabilidad. (Repetida aquí por conveniencia).

Fig. 17.13: Gráfico de la Curva de Estabilidad con la recta de Klein correspondiente a $p=30$ y $q=100$). El parámetro “ p ” en abscisas, y “ q ” en ordenadas.

Fig. 17.14, a): 4 raíces reales

Fig. 17.14, b): 4 raíces reales

Fig. 17.14, c): 2 raíces reales y 2 imaginarias.

Fig. 17.14, d): 2 raíces reales y 2 imaginarias.

Fig. 17.15: 4 raíces imaginarias. Este es el caso habitual en los aeroplanos convencionales.

Fig. 17.16: Representación genérica de las envolventes de la Ecuación de Estabilidad de VK&T, en ejes (p, q) .

Fig. 17.17: Representación de las envolventes de la Ecuación de Estabilidad de VK&T para el caso particular descrito en el texto.

Fig. 17.18: Asignación de Zonas generadas por las envolventes de la Ecuación de Estabilidad de VK&T, para el estudio de las tangentes posibles.

Fig. 17.19: Estudio de tangentes. Lectura directa del valor del amortiguamiento en el punto de corte sobre el eje de abscisas.

Fig. 17.20: Puntos clave de la Zonificación de las envolventes de la Curva de Estabilidad.

Fig. 17.21: Evolución de tangentes a secantes en las Envolventes de la Curva de Estabilidad de VK&T, (1).

Fig. 17.22: La tangente (**bb'**) se convierte en secante y corta al eje $q=0$ más cerca del origen (menor amortiguamiento). La tangente (**aa'**) se convierte en secante y corta al eje $q=0$ más lejos del origen (mayor amortiguamiento) y (2).

Fig. 17.23: Curvas de elevado amortiguamiento para distintas frecuencias, en función de p y de q .

Fig. 17.24: Curvas de baja frecuencia para distintos valores (bajos) del amortiguamiento, en función de p y de q .

Fig. 17.25: Zona de Inestabilidad y Límite de Estabilidad, en función de p y q .

Fig. 17.26: Representación gráfica de la parte real y de la parte imaginaria de dos de las raíces (z_1, z_2) de la Ecuación de Estabilidad, para valores de $p=0$ y $\{0 \leq q \leq 4\}$

Fig. 17.27: Representación gráfica de la parte real y de la parte imaginaria de dos de las raíces (z_1, z_2) de la Ecuación de Estabilidad, para distintos valores de p y $\{0 \leq q \leq 20\}$

Fig. 17.28: Representación gráfica de la parte real y de la parte imaginaria de dos de las raíces (z_3, z_4) de la Ecuación de Estabilidad, para valores de $p=0$ y $\{0 \leq q \leq 4\}$

Fig. 17.29: Representación gráfica de la parte real y de la parte imaginaria de dos de las raíces (z_3, z_4) de la Ecuación de Estabilidad, para distintos valores de p y $\{0 \leq q \leq 20\}$

NOMENCLATURA²

Nota: algunos símbolos aparecen repetidos debido al diferente significado que tienen según el autor estudiado.

Símbolos

a	Semicuerda de un ala plana	(m)
α	Ángulo definatorio de superficie equivalente	([°] o rad.) (Ferber)
AR	Alargamiento alar	(b^2/S)
b	Envergadura alar	(m)
c	Cuerda alar	(m)
crw	Cuerda alar en la raíz	(m)
CL_α	Pendiente del coeficiente de sustentación respecto de α ($CL_\alpha = dCL/d\alpha$)	
CN	Coeficiente de Fuerza Aerodinámica normal a la superficie sustentadora.	
CL	Coeficiente de sustentación.	
CL_0	Coeficiente de sustentación con incidencia nula.	
CD	Coeficiente de Resistencia aerodinámica.	
CD_0	Coeficiente de resistencia aerodinámica parásita.	
CDG	Centro de gravedad de un aeroplano.	
CM	Coeficiente de Momento de Cabeceo de un aeroplano.	
CM_α	Derivada aerodinámica que representa el Momento de cabeceo respecto del ángulo de ataque	$(CM_\alpha = dCM/d\alpha)$
CM_q	Derivada aerodinámica adimensional que representa el coeficiente del Momento de cabeceo respecto generado por una velocidad angular q .	$\left(CM_q = \frac{c}{2V} \frac{dCM}{dq} \right)$
e_{Oswald}	Factor de Oswald.	
EA	Eficiencia Aerodinámica.	$(EA = CL/CD)$

² Para no generar excesiva incomodidad, no se han recogido aquí el significado de todos los símbolos que aparecen en el presente trabajo, aunque sí de la mayoría. Los que no lo han sido aquí, son claramente explicados en la parte del texto -o en las ecuaciones- del apartado correspondiente.

F	Fuerza aerodinámica normal a la trayectoria.	(N.)
F_N	Fuerza aerodinámica normal a la trayectoria.	(N.)
F_T	Fuerza aerodinámica tangencial a la trayectoria.	(N.)
f	Flecha geométrica de un perfil. (Utilizado para definir la curvatura).	(m)
f	Factor de resistencia parásita.	
$f_L(\alpha)$	Función de Langley para calcular la sustentación en función de α	
$f_{L\alpha}$	Derivada respecto de α de la Función de Langley.	
g	Aceleración de la gravedad	(m / s^2)
h	Factor de cabeceo generado por la velocidad angular q . (Painlevé)	(mL)
H_N	Altura Natural. Concepto de Lanchester.	(m)
I_{yy}	Momento de inercia respecto de un eje que pasa por el CDG y es perpendicular al plano de simetría de un aeroplano.	($kg m^2$)
I_{xx}	Momento de inercia respecto de un eje que pasa por el CDG según el eje OXb	($kg m^2$)
I_{zz}	Momento de inercia respecto de un eje que pasa por el CDG según el eje OZb	($kg m^2$)
K	Resistencia aerodinámica específica del aire	(kg / m^3)
K_i	Resistencia aerodinámica específica del elemento de subíndice (i) de un aeroplano.	(kg / m^3)
K	Constante de resistencia aerodinámica inducida $\left(K = \frac{1}{\pi AR e_{Oswald}} \right)$ para una curva Polar de resistencia aerodinámica de la forma:	$CD = CD_0 + KCL^2$
K	Constante adimensional de estabilidad de Lanchester.	
K	Coefficiente de Eficacia de un ala.	(Soreau)
K'	Coefficiente de resistencia específica del aire para $\alpha < 30^\circ$	(kg / m^3)

L	Sustentación	(N.)
L_{α}	Sustentación de un perfil alar 2D debida al ángulo de ataque. (N.) (Eq. 2.4)	
L_f	Sustentación de un perfil alar 2D debida a la curvatura. (N.) (Eq. 2.4)	
LE	Borde de ataque de un perfil aerodinámico (“ <i>Leading Edge</i> ”)	
LRH	En los gráficos, es la Línea de Referencia Horizontal, respecto de la que se mide la pendiente.	
M	Momento de cabeceo de un aeroplano.	(N. m)
m	Masa	(kg)
r	Radio de curvatura de la trayectoria de un aeroplano.	(m)
r	Velocidad angular de giro de un aeroplano alrededor de su eje OZb	(rad/s)
r	Factor de resistencia “inducida”.	
r_y	Radio de inercia correspondiente al eje	(m)
p	Velocidad angular de giro de un aeroplano alrededor de su eje OXb	(rad/s)
q	Velocidad angular de giro de un aeroplano alrededor de su eje OYb	(rad/s)
Q	Calidad de un ala. (Soreau)	
R	Resultante de la fuerza aerodinámica ($kg\ m / s^2 =$ Newton) y a veces también (N/g)	
S	Superficie	(m^2)
S_i	Superficie del elemento de subíndice (i) de un aparato volador.	(m^2)
T	Fuerza aerodinámica tangencial a la trayectoria.	(N.)
TE	Borde de salida de un perfil aerodinámico (“ <i>Trailing Edge</i> ”)	
u	Velocidad de vuelo según el eje X. (Bryan)	(m/s)
V	Velocidad de vuelo	(m / s)
V_N	Velocidad Natural. Concepto característico de Lanchester definido en el capítulo correspondiente a este autor.	(m/s)
V_Z	Velocidad vertical de descenso.	(m/s)
w	Velocidad de vuelo según el eje Z.	(Bryan)
xCP	Coordenada de la posición del centro de presión de una superficie sustentadora, medida positivamente desde el borde de ataque de la cuerda alar en la raíz en el sentido de la corriente de aire.	(m)

$x_{CP}(\alpha)$ Posición del centro de presión en función del ángulo de ataque. (m)

x_{CA_i} Posición del centro de presión del elemento correspondiente al subíndice (i)

x_{CA_α} Posición del centro de presión de un elemento sustentador correspondiente a la sustentación debida exclusivamente al ángulo de ataque α (Régimen aerodinámico lineal).

(Atención: $x_{CA_\alpha} \neq \frac{dx_{CA}}{d\alpha}$)

x_{CA_δ} Posición del centro de presión de un elemento sustentador correspondiente a la sustentación debida a exclusivamente a la deflexión δ (Régimen aerodinámico lineal)

(Atención: $x_{CA_\delta} \neq \frac{dx_{CA}}{d\delta}$)

X Coordenada horizontal en un sistema de ejes de referencia correspondiente al plano vertical.

Z Coordenada vertical en un sistema de ejes de referencia.

$2D$ Flujo Bidimensional

$3D$ Flujo Tridimensional.

Símbolos en griego.

α Incidencia; Ángulo de ataque ([°] o rad.)

α_{zL} Ángulo de ataque de sustentación nula. (Perfiles con curvatura)

β Ángulo de ataque geométrico de un ala (Bryan); ángulo geométrico de salida de un perfil 2D (Lanchester); ángulos característicos de un perfil 2D curvo (Soreau); Ángulo de derrape o resbalamiento (Aerodinámica).

ρ Densidad del aire. (kg / m^3)

θ Ángulo de asiento longitudinal de un aeroplano OX/LRH ([°] o rad.)

δ Deflexión angular de una superficie de control, positiva si el borde de fuga va hacia abajo. ([°] o rad.)

ε Ángulo de ataque geométrico de una superficie ([°] o rad.)

γ Pendiente de la trayectoria ([°] o rad.)

λ Variable de Laplace; Autovalor.

$\phi_j(\alpha)$ Función de Jöessel para calcular la posición del centro de presión en función de α

$\phi_{j\alpha}$ Derivada respecto de α de la Función de Jöessel.

- Φ Factor de Estabilidad (Lanchester).
- Φ Tracción de la hélice. (De Bothezat).
- ψ Ángulo de Euler. Azimut /Rumbo.
- θ Ángulo de Euler. Asiento Longitudinal.
- ϕ Ángulo de Euler. Asiento lateral/Balance.
- ω_i Frecuencia de oscilación de las soluciones imaginarias de la ecuación característica de un sistema lineal.
- σ Superficie equivalente de un aeroplano según el eje lateral Y, con el centro geométrico situado en el punto de coordenadas $\{\lambda, \eta\}$ del plano de simetría del aeroplano. (Ferber)
- σ Factor de nomenclatura particular de Soreau. (Dimensiones físicas de KS) (Kg/m)
- $\partial \varepsilon \partial \alpha$ Gradiente de desviación de la corriente al pasar por una zona en la que está presente un ala sustentadora.
- K Factor de “*Sweep*” (Lanchester).

Subíndices

- c Superficie tipo “canard”
- t Superficie de cola. (“*tail*”)
- w Superficie principal. (“*wing*”)

Capítulo 1

Introducción.

Contenido

- 1.1 Generalidades
 - 1.2 Un problema de aerodinámica.
 - 1.3 Estabilidad Estática.
 - 1.4 Estabilidad Dinámica.
 - 1.5 Nota.
-

1.1 Generalidades

El presente documento se propone el estudio crítico de los primeros intentos científicos para configurar un marco físico-matemático adecuado para la descripción de la dinámica del vuelo, con especial énfasis en el estudio de la estabilidad longitudinal.

La “*Estabilidad*” del movimiento de un avión es un tema que surge antes incluso del primer vuelo controlado y motorizado, y antes también de que la comunidad científica disponga de un modelo aerodinámico satisfactorio. La solución matemática de las ecuaciones se intenta incorporando métodos de probada eficacia en el campo de la ingeniería mecánica. Las aportaciones más sólidas son realizadas principalmente por matemáticos profesionales.

Hemos tratado de identificar aquellos autores que en los albores de la aviación y de forma significativamente relevante han aportado contenidos materialmente pertinentes y formalmente matemáticos al análisis de la mecánica del vuelo. Esto con independencia de que la línea por ellos incoada haya tenido o no continuidad; así pues se incorporarán también autores cuyas aportaciones no han pasado a formar parte del marco descriptivo aceptado, por diversas razones que se explican en los capítulos finales de la tesis. El primer

trabajo analizado³ es de 1809 y el último es de 1913. Abarcan, por tanto, algo más de un siglo de investigación aeronáutica, y nos ha conducido a 15 publicaciones de 17 autores, que trataremos en orden cronológico.

La decisión de terminar este estudio en los albores de la primera guerra mundial es un tanto convencional⁴, y no significa que se hubiera ya logrado una interpretación⁵ formal físico-matemática plenamente satisfactoria. Debemos reseñar que una teoría sólida y consistente de la estabilidad estática no fue lograda hasta los años 1920/30, por tanto no debe esperarse, como síntesis final de los autores aquí estudiados, un cuerpo compacto y coherente de doctrina sobre la estabilidad de los aviones.

A los capítulos dedicados al estudio de cada autor precede una breve síntesis de la situación de la ciencia aerodinámica a finales del siglo XIX (Cap. 2). Se verá que, incluso en problemas que están cerca del nivel observacional, aparecen significativas discrepancias en las mediciones y también en las formulaciones⁶. El cuerpo de doctrina admitido y sistematizado⁷ es precario. En particular no se dispone de una teoría ampliamente aceptada sobre el valor de la fuerza que el aire ejerce sobre el perfil del ala; prácticamente todos los autores suponen la fuerza perpendicular a la placa o cuerda del perfil, despreciando la inclinación de la sustentación; la resistencia de fricción es considerada irrelevante; y no disponen de un conocimiento preciso del comportamiento del centro de presión ni ha cuajado todavía el concepto de centro aerodinámico.

Los autores seleccionados⁸ son:

³ La razón por la que en el título de la tesis se menciona 1799 como año de comienzo del presente estudio es la siguiente: en ese año Cayley grabó en un medallón de plata la descomposición vectorial de fuerzas que, en su aparente sencillez, describe el problema fundamental del vuelo atmosférico con superficies sustentadoras; nos ha parecido inadecuado no mencionarlo. (Vid. Cap. 3)

⁴ Y, ciertamente, es objetable. La primera Guerra Mundial causó un impulso muy grande en la investigación aeronáutica de los países beligerantes. Nosotros cerramos este estudio sobre los pioneros precisamente en el umbral de este inmenso desarrollo posterior que abre varias líneas de trabajo independientes, aunque técnicamente convergentes, con una intensificación del aspecto institucional, sin que desaparecieran por completo las aportaciones personales. Un argumento secundario que también ha influido en nuestra decisión ha sido el tamaño que iba adquiriendo el presente trabajo, que parece estar pidiendo una segunda parte que no tendría el carácter de un mero anexo complementario, sino entitativamente sustancial.

⁵ Quedan así excluidas de este estudio aportaciones importantes cronológicamente no muy alejadas; por ejemplo, sin afán de exhaustividad: Glauert, H. “*Summary of the present state of Knowledge with regard to Stability and Control of Aeroplanes*”, Reports & Memoranda No. 710 (1920); Gates, S. B. “*A Survey of Longitudinal Stability below the Stall with an Abstract for Designer’s use*”, Reports & Memoranda No. 1118 (1927); Lyon, H. M. & Alia. “*A Theoretical Analysis of Longitudinal Dynamic Stability in Gliding Flight*”, R & M No. 2075 (1942); Gates, S. B. & Lyon, H. M. “*A Continuation of Longitudinal Stability and Control Analysis*”, Part I (General Theory) & Part II (Interpretation of Flight Tests). R&M No. 2017. (1944).

⁶ Un experimento es un método para interrogar a la naturaleza y obtener una respuesta, pero la naturaleza no responde con fórmulas matemáticas, sino con hechos, y son los científicos los que asignan al fenómeno observado los formulismos que consideran más ajustados a sus observaciones. Estos formulismos dependen también de la creatividad y de la capacidad de interpretación del investigador.

⁷ A partir de datos fragmentarios es difícil obtener nuevos conocimientos, se hace más difícil la crítica y la capacidad explicativa, y se complica también el trabajo posterior de otros estudiosos. Si no hay una base común conmensurable se vuelve complicado interrelacionar trabajos de distintos investigadores que trabajan sobre lo mismo.

⁸ G. H. Bryan aparece dos veces. Esto se debe a que se ha optado por un desarrollo basado en el orden cronológico de aparición de las publicaciones; Bryan intervino decisivamente en dos ocasiones. Se ha omitido el estudio de Quittner, V. “*Studies on the Stability of Aircraft*”; “*La technique Moderne*”; Oct. Dic.

- G. Cayley (1773-1857)
- A. Pénaud (1850-1880)
- O. Lilienthal (1848-1896)
- N. E. Zhukowsky (1847-1921)
- A. F. Zahm (1862-1954)
- W. Wright (1867-1912) & O. Wright. (1871-1948)
- G. H. Bryan (1864-1928) & W. E. Williams (1881-1962)
- F. Ferber (1862-1909)
- F. W. Lanchester (1868-1946)
- R. Soreau (1865-1935)
- P. Painlevé (1863-1933)
- G. de Bothezat (1882-1940)
- G. H. Bryan (1864-1928)
- E. A. Duchêne (1869-1946)
- T. V. Kármán (1881-1963) & E. Trefftz (1888-1937)

De cada uno de estos se ha elegido una⁹ publicación característica que aporta algo positivo al estudio de la estabilidad longitudinal. Esto deja fuera de nuestro estudio las contribuciones que el autor pudo hacer posteriormente.

Se ha realizado el estudio de cada una de ellas, subrayando los conceptos nuevos introducidos por cada autor. Según la ocasión, se mencionarán los que no han tenido continuidad y la causa, si nos resulta factible, sea al final del capítulo correspondiente o en las conclusiones. Se describen también en la medida necesaria las teorías aerodinámicas aceptadas por cada autor, como base previa necesaria para el análisis matemático del vuelo, procurando convertir los razonamientos o argumentos meramente verbales o geométricos en sus homólogos algebraicos. Se procura fijar de modo crítico los puntos de apoyo de las hipótesis utilizadas en los que las teorías y las conclusiones expuestas por el autor resultan fallidas, en los casos en que parezca ser así.

Se analiza el modo como plantea cada autor el problema de la estabilidad longitudinal, y siempre que lo admitan con razonable coherencia, se *vierten* los desarrollos matemáticos a una terminología¹⁰ actual apropiada, para que el texto de la tesis

(1910) y Feb. (1911). Cronológicamente le correspondía haber sido incluido aquí; sus aportaciones fundamentales fueron *recogidas* de forma inadvertida en el trabajo –analizado en el capítulo 17- de Von Karman & Trefftz, según él mismo indica, y sobre quienes reclama la correspondiente prioridad.

⁹ Ocasionalmente se ha analizado más de una publicación del mismo autor, cuando por las características del mismo o de las publicaciones, resultaba conveniente.

¹⁰ Aunque se trata de un problema menor, las diferentes nomenclaturas usadas, para los mismos conceptos o para diferentes, dificultan la comprensión. (“Una gran confusión se origina por el hecho de que cada autor elige diferentes términos y nombres para los mismos conceptos, y frecuentemente los presenta también de modo distinto –es decir, con adimensionalizaciones más o menos caprichosas: factores diversos,

tenga unidad. Esto puede requerir el desarrollo de conceptos de mecánica de vuelo que anteceden lógicamente al análisis de la estabilidad. Hemos tratado de ofrecer una síntesis de los axiomas o hipótesis que asume cada autor [4, 5, 6, 7], el modelo aerodinámico que acepta, las herramientas matemáticas que emplea, simplificaciones que realiza, etc... y también de las justificaciones, puntos eventualmente confusos, conclusiones particulares, titubeos, extrapolaciones, etc... Nos ha interesado particularmente rastrear¹¹ el contenido de su aportación científica consolidada, que ha pasado a constituir parte fundamental del paradigma científico vigente.

Cuando un autor considera suficientemente desarrollados sus cálculos matemáticos y alcanzadas las conclusiones que deseaba, normalmente se detiene en ese punto; en alguna ocasión nosotros trataremos de prolongar sus desarrollos y de explicitar conclusiones que pudieron permanecer latentes, siempre que sea factible sin deformar los conceptos o forzar la cronología. Análogamente, efectuaremos desarrollos paralelos en las ocasiones en las que el propio autor parezca sugerirlo, o sea oportuno por el tema tratado.

Todo esto realizado con el objetivo de determinar la novedad y el peso específico relativo de las aportaciones al estudio de la estabilidad, permanentes o no, de los pioneros de la teoría matemática de la mecánica del vuelo, así como eventuales cuestiones anejas de autoría, cronología y prioridades que puedan surgir.

Las ciencias físicas, en sus explicaciones, suelen acudir a representaciones esquemáticas o simplificadas de realidades más complejas. Las nociones de “cuerpo rígido”, “fluido sin viscosidad”, “centro de gravedad”, “gas perfecto”, “punto material”, etc... son abstracciones. La no inclusión en el estudio de un fenómeno físico de un efecto que realmente se da, pero cuyo efecto es –o se considera– pequeño, o inicialmente irrelevante, es una simplificación de una realidad más compleja. Las hipótesis que le parecen naturales al autor, asumidas no siempre de forma explícita, suelen incluir aspectos convencionales y esquemáticos.

Pongamos algunos ejemplos que se encuentran presentes en los trabajos de los pioneros estudiados.

- (1) Suponen que, si se somete una placa plana delgada a una corriente, la fuerza resultante será perpendicular a la placa. Esto evidentemente capta (en parte) un aspecto *bastante* real, fija el marco gráfico representativo para la sustentación;

longitudes multiplicadas o divididas – de modo que el lector podría sacar la impresión equivocada de estar trabajando con un montón de cosas diversas... Sería muy deseable que se llegase a un acuerdo sobre la designación y el nombre de las variables más importantes. Esto redundaría en beneficio de futuros investigadores y convertiría los resultados obtenidos en verdaderamente aplicables”). La cita –del año 1913– es del Prof. Quittner, de Berlín.

¹¹ Un indicativo hasta cierto punto cuantificador de la influencia de un pionero nos parece claro: el número de citas -relacionadas con los aspectos que estudiamos ahora- que aparecen en trabajos posteriores de otros autores. (Anexo final del Cap. 18)

muchos pioneros consideran que no omite nada esencial. A medida que las mediciones sean más precisas, el modelo será modificado, incorporando la resistencia debida a efectos viscosos y -muy limitadamente- desprendimientos de la corriente.

- (2) Se verá que, en todos¹² los casos estudiados, no se tiene en cuenta la desviación de la corriente que tiene lugar cuando esta atraviesa una zona en la que está presente un ala que genera sustentación. En el estudio de la estabilidad de los aviones, una de cuyas características más típicas es la presencia constante de relaciones entre ángulos de velocidades y superficies de incidencia, prescindir de esta desviación altera el aspecto formal matemático de las conclusiones de la estabilidad estática, aunque no siempre necesariamente el sentido. La estabilidad dinámica requeriría, además, la inclusión del efecto del retardo en esta desviación.
- (3) Todos consideran que la resistencia aerodinámica no es un factor relevante - salvo Ferber, que hace un uso muy peculiar de ella- en cuestiones relacionadas con la estabilidad longitudinal. Algunos lo indican expresamente, pero la mayoría lo dan por simplemente obvio o adquirido. Parece que influyen en esto dos cosas: (a) que la resistencia aerodinámica es (debe ser) pequeña comparada con la sustentación, o de otro modo el vuelo artificial no sería posible; (b) que las proyecciones sobre el plano de simetría de las dimensiones transversales (verticales y laterales) de un avión suelen ser pequeñas frente a las longitudinales). Quizás se podría añadir una tercera razón de menor entidad: es difícil de evaluar a priori la línea de acción¹³ de las resultantes de las resistencias aerodinámicas generadas por cada componente del aeroplano y las distancias que las separan del *CDG* del avión completo.

Como puede verse, el estudio que nos hemos propuesto apenas traspasa los umbrales de la naciente aviación. El año 1913 es simplemente una década posterior al primer vuelo propulsado y controlado de los Wright.

¹² Algunos pioneros -los que están en posesión de una formación físico-matemática más completa- conocen estas limitaciones, pero estiman que su inclusión -si fuese posible cuantificarla de alguna manera- no alteraría la “tendencia general del fenómeno” estudiado, aunque carecen de una verificación empírica suficiente. Lanchester es el único de los pioneros que estudiamos ahora que la introduce.

¹³ En algunos textos académicos de mecánica de vuelo se asumen líneas de acción de las resultantes de la resistencia aerodinámica de cada elemento constitutivo del avión y se calcula el momento total, lo que produce una expresión no lineal en α que se suele simplificar obviando los momentos generados por la resistencia aerodinámica, ya que normalmente son pequeños frente a los aerodinámicos y propulsivos y su presencia haría desaparecer el concepto simple de Punto Neutro, o Centro Aerodinámico del avión completo, que se ha demostrado muy útil. (Por ejemplo, las simplifica Schmidt, D. T. “Modern Flight Dynamics”, (Pág. 237 y ss.) McGraw-Hill. (2012); por el contrario, no las simplifica Phillips, W. F., “Mechanics of Flight”, Wiley & Sons, Pag. 407 y ss. (2004), pero este autor debe decidir categóricamente (por razones académicas) el valor de algunos factores geométricos, respecto de las líneas de acción de la resistencia, cuya fijación parece razonable y, a la vez, un poco discrecional.

1.2 Un problema de Aerodinámica.

El estudio de la estabilidad exige establecer el sistema de ecuaciones físico-matemáticas que describe el comportamiento, respecto del tiempo, de las variables que definen los grados de libertad del sistema físico analizado, y su dependencia de los parámetros de control. En este sistema deben aparecer necesariamente los modelos matemáticos de las fuerzas y de los momentos presentes.

En el caso de los aeroplanos, las fuerzas a tener en cuenta para su estudio son: la gravitatoria, la propulsiva, y la aerodinámica, por orden creciente de complejidad¹⁴ y de dificultad de determinación. La de máximo interés era la fuerza que genera una superficie formando un cierto ángulo con una corriente de aire (Cfr. Cayley, Cap. 3). La respuesta, de importancia determinante, fue de lenta gestación. Algunas teorías nacieron muy pronto. Los (aparentemente) erráticos datos que la ciencia aerodinámica del momento ofrecía no facilitaban el trabajo de los pioneros. Este panorama es descrito, como ya se ha dicho, en el Cap. 2.

La respuesta a la pregunta sobre el valor de una fuerza consta de dos partes inseparables: (1) debe predecir su módulo y (2) debe predecir la línea de acción según la que actúa. La respuesta aproximada a la primera pregunta se obtendrá con relativa claridad. Y sobre esto encontraremos diversas *variaciones*, en función de la *creatividad* de cada pionero. La respuesta a la segunda requerirá un esfuerzo de investigación más intenso. De hecho, en el año en el que termina nuestro estudio (1913) todavía no se ha conseguido un modelo satisfactorio ampliamente difundido y aceptado por la comunidad científica. Hay dos razones para esto:

- (1) Las placas con curvatura -para ángulos de ataque pequeños- proporcionan más sustentación y en mejores condiciones¹⁵ que las planas de la misma forma en planta. Esto afecta al módulo de la fuerza; ninguna de las explicaciones “teóricas” que se dan para explicar este hecho es correcta y algunas son pintorescas. Este efecto no causa gran dificultad práctica, incluso puede ser conveniente desde el punto de vista estructural, de no ser por la segunda razón.
- (2) La segunda razón es que el comportamiento de la línea de acción de la fuerza de sustentación, cuando varía el ángulo de ataque (dentro del intervalo de ángulos aceptables para la aviación convencional), es muy diferente en un caso y en el otro. Las teorías aerodinámicas vigentes no conocen explicación teórica que lo justifique¹⁶: Esto desconcierta a los pioneros, e incrementa la complejidad de sus ecuaciones, al intentar tener en cuenta todos los posibles

¹⁴ El comportamiento de las hélices fue también objeto de intensa investigación y dio lugar a muchas teorías. Zhukowsky, los Wright, Ferber, Soreau, Lanchester, Painlevé y De Bothezat se cuentan entre los pioneros aquí estudiados que desarrollaron una teoría sobre la hélice. Estos trabajos no son ahora objeto de nuestro estudio.

¹⁵ De desprendimiento de la corriente, por ejemplo.

¹⁶ Los trabajos de Kutta, cuya importancia no es posible minimizar para la solución del problema generado por el movimiento del centro de presión de las placas curvas, permanecen todavía prácticamente desconocidos.

comportamientos del centro de presión. En este aspecto resulta paradigmático De Bothezat (Cap. 14)

1.3 Estabilidad Estática

Algunos pioneros -(Cayley; 1808, Cap. 3), (Pénaud; 1872, Cap. 4), (Zahm; 1894, Cap. 7)- propusieron el plano de cola como un elemento básico para lograr dos objetivos: el equilibrado estático del aeroplano y el logro de la estabilización en cabeceo¹⁷; para aeroplanos sin cola (Lilienthal; 1889, Cap. 5); para aeroplanos con la cola por delante, (Wright W&O; 1899, Cap. 8). Una descripción divulgativa esencialmente *correcta* aparecerá en 1911, (Duchêne; Cap. 16).

En el campo de la aerodinámica teórica tuvo lugar un avance muy importante cuando se demostró que la sustentación debida al ángulo de ataque podía suponerse aplicada en el $\sim 25\%$ de la cuerda; y que esto era una propiedad de todos los perfiles sustentadores; la sustentación debida a la curvatura era función de ésta y actuaba aproximadamente en el 50% de la cuerda, es decir, creaba un par independiente del ángulo de ataque [1]. (Hacía años que esto era conocido, pues los ensayos en túneles aerodinámicos así lo mostraban). El desarrollo de la Teoría de la Estabilidad Estática adquiere carta de ciudadanía con las publicaciones de Gates (*RAE* Farnborough) [3], con la definición de Centro Aerodinámico y la posterior inclusión del plano de cola, que permite definir un Centro Aerodinámico del avión completo (Punto Neutro). Pero esto queda ya fuera de las fechas extremas que abarca nuestro estudio.

1.4 Estabilidad Dinámica

La expresión general de las ecuaciones dinámicas del movimiento con 6 grados de libertad (*GDL*) era conocida y utilizada para analizar el comportamiento de un sólido rígido. El estudio de la estabilidad dinámica de un aeroplano exige su uso. Esto es intentado por primera vez por Ferber (1908, Cap. 10), y posteriormente por De Bothezat (1911, Cap. 14) y Bryan (1911, Cap. 15). Todos ellos comprueban que -a partir de las ecuaciones para vuelo equilibrado en un plano vertical- el sistema de seis *GDL* se transforma en dos sistemas independientes de 3 *GDL*: uno describe la dinámica longitudinal (sistema simétrico), y otro la dinámica lateral direccional (sistema asimétrico). Nosotros nos centramos en el sistema simétrico.

El estudio matemático del vuelo con tres grados de libertad lo inicia Zhukowsky (1891, Cap. 6), y lo prosiguen Bryan y Williams (1904, Cap. 9), Lanchester (1907/8, Cap. 11), Soreau (1909, Cap. 12), y Painlevé (1909, Cap. 13). La aportación de Von Kármán & Trefftz (1913, Cap.17) se añade, de un modo más completo, a los anteriores.

¹⁷ “Equilibrado estático” y “Estabilización en cabeceo” son conceptos imprecisos aun no definidos. Pero los problemas físicos correspondientes, como es lógico, están ya presentes.

Las teorías desarrolladas por estos pioneros no resultaban de utilidad para los primeros diseñadores. El modelo matemático relacionado con la estabilidad estática no resultaba fácil de entender y la parte relativa a la estabilidad dinámica era difícil de aplicar.

Hoy, con un escenario matemático dominado por la computación y el software, puede resultar difícil captar el hecho siguiente: hace un siglo constituía un desafío formidable tratar de obtener conclusiones de valor general a partir de las soluciones de una ecuación polinómica de cuarto grado, con coeficientes simbólicos formados por coaliciones algebraicas de parámetros característicos del aeroplano y de las condiciones de vuelo. Los pioneros se centraron en dos métodos posibles para analizar el polinomio de estabilidad:

- (1) El primero de estos métodos consiste en aplicar las conclusiones de un trabajo de Routh que relaciona los signos de los coeficientes de los términos de una ecuación polinómica con los signos de las raíces. Es válido tanto para raíces reales como imaginarias. La dificultad estriba en que los coeficientes suelen tener forma complicada y no es fácil extraer conclusiones generales. Lo intenta primero Ferber (1908, Cap. 10), logrando un éxito parcial y limitado. Bryan (1911, Cap. 15), logra resultados más definitivos y consolidados de un modo elegante y -aparentemente- sin esfuerzo, aunque lejos de una eventual aplicación práctica.
- (2) El segundo método consiste en aplicar el de las Rectas de Klein (o de las Envolventes) para las raíces reales, complementado con el de Cauchy/Sturm para tratar de obtener información sobre las raíces imaginarias. Al igual que en el anterior método, es dificultoso llegar a conclusiones generales y debido a la mezcla de geometría, inecuaciones y zonas de validez, tampoco es cómodo. De Bothezat lo emplea con habilidad (Cap. 14). Los resultados de De Bothezat pasaron prácticamente inadvertidos. Este método es también utilizado por Von Kármán y Trefftz en 1913 (Cap. 17), cuando ya se habían publicado las investigaciones de De Bothezat y Bryan.

1.5 Nota sobre las características del presente trabajo.

Se podrá observar que el tamaño de los capítulos es variable. Algunos son cortos y otros más extensos. Esto viene exigido por la materia que ofrecen las diferentes publicaciones analizadas; en algunos casos, aun constituyendo material importante, no ocupa mucho espacio. En otros casos se requiere mayor extensión para describirlo apropiadamente.

Deseamos mencionar también que este trabajo conlleva la confrontación con antiguas fuentes históricas impresas, las más alejadas de nosotros con más de doscientos años de antigüedad, las más recientes con no menos de un siglo. Encontramos en ellas muy diversos formatos, con diferencias tanto en sus objetivos como en las metodologías, en el grado de completitud de sus desarrollos, en su coherencia respecto de los principios de la física vigente en su momento, en el rigor de sus métodos de manipulación algebraica y de sus cálculos matemáticos, en la claridad de los conceptos e hipótesis -frecuentemente solamente implícitos-, en las terminologías y nomenclaturas usadas por cada pionero, y

también, ocasionalmente, en la pérdida de parte de la documentación relevante o dificultades para localizar la complementaria, debido a la relativamente frecuente citación incompleta de las referencias.

Por lo que acabamos de mencionar resulta procedente informar al lector de lo siguiente: para la interpretación de los textos menos claros de algunos pioneros hemos optado por aquella exégesis que nos ha parecido más cercana a las soluciones aceptadas como definitivas después de ellos. Es decir, nos hemos inclinado por asignar en cada caso la interpretación que resultaba más acorde con la consideración de “pionero” que les hemos atribuido.

Resulta completamente superfluo añadir que ninguna de las eventuales críticas que puedan aparecer a lo largo de las páginas de este estudio puede interpretarse como una minusvaloración, por mínima que esta pudiera ser, del trabajo de unos adelantados que decidieron transitar, no siempre sin incomprendimientos, territorios inexplorados por la inteligencia humana.

Finalmente, añadamos que la idea que dio origen a este trabajo procede de lo que puede considerarse como un precedente aunque en un campo solo parcialmente coincidente: el de la aerodinámica: el libro de Ackroyd, J. A. D, Axcell, B. P. & Ruban, A. I.; “Early Developments of Modern Aerodynamics”. AIAA (Reston, USA) & Butterworth-Heinemann (Oxford, UK). (2001). Nosotros hemos intentado un trabajo análogo en el campo de la mecánica de vuelo, circunscrito exclusivamente al tema de la estabilidad dinámica longitudinal.

No hemos encontrado trabajos previos que pudieran considerarse precedentes directos del presente estudio considerado globalmente, aunque sí elaboraciones sobre algún autor individual. A estos trabajos se hace referencia explícita mediante una citación bibliográfica en el capítulo correspondiente, o en el cuerpo del propio capítulo, si el caso lo requiere.

Bibliografía.

- [1] Glauert, H. “The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory”. CUP; (1926).
- [2] Gibson, J. C. “The Definition, Understanding and Design of Aircraft Handling Qualities”; Series 03. Control and Simulation 01. Delft University Press/ (1997).
- [3] Gates, S. B., “A Survey of Longitudinal Stability below the Stall, with an Abstract for Designer’s Use”, R & M No. 1118. (1927).
- [4] Cfr. Rutherford A., “Mathematical Modeling”, Dover Pub. New York. (1978);

[5] Bender, E. A., “An Introduction to Mathematical Modeling”, Dover Pub. New York. (1978).

[6] Sanguinetti, J. J. “Lógica (de los principios físicos)”, Eunsa. España. (2004);

[7] Artigas, M. “Filosofía de la Ciencia”; Eunsa, España. (2005).

Capítulo 2

Teorías aerodinámicas a finales del siglo XIX, en los temas relacionados con el estudio de la estabilidad de aviones.

Contenido

- 2.1 Introducción. Placa plana sometida a una corriente de aire.
- 2.2 La denominada “*Resistencia Aerodinámica Específica del Aire*”.
- 2.3 La Resistencia aerodinámica de una placa con incidencia variable.
- 2.4 Relación entre la función $f(\alpha)$ y coeficientes aerodinámicos asimilables a los clásicos $CL(\alpha)$ y $CD(\alpha)$
- 2.5 La posición del centro de presión.
 - 2.5.1 Placas planas
 - 2.5.2 Placas curvas
- 2.6 Inicio de la teoría matemática de perfiles bidimensionales.
- 2.7 Conclusiones.
- 2.8 Anexo I. Sobre el modo de representar el momento de cabeceo de los perfiles aerodinámicos.
- 2.9 Anexo II. La Ley de Avanzini.

Bibliografía.

- 2.1 Introducción. Placa plana sometida a una corriente de aire.

Se ha considerado conveniente para el estudio crítico-histórico del análisis de la estabilidad de los aviones hacer una breve descripción de los resultados experimentales relevantes de la ciencia aerodinámica de finales del siglo XIX y de la primera teoría sobre perfiles compatible con los resultados experimentales. Esto nos permitirá introducir los modelos físico-matemáticos que, en los años iniciales de la aviación, intentaban predecir las fuerzas aerodinámicas sobre superficies delgadas y la posición del centro de presión, en función del ángulo de incidencia (α). Se trata de información imprescindible para el estudio del equilibrio y la estabilidad de una aeronave.

2.2 La denominada “Resistencia Aerodinámica Específica del Aire”

La palabra “*Resistencia*”, que actualmente se refiere exclusivamente a la parte de la fuerza aerodinámica que se opone al movimiento, se utiliza aquí referida a la fuerza aerodinámica total. En la mayoría de los experimentos iniciales se utilizaron placas planas¹⁸, de forma rectangular, cuadrada o circular, sometidas a una corriente de aire, y para calcular la fuerza aerodinámica $R(\alpha)$ se suponía válida la siguiente expresión, con independencia de la forma geométrica de la placa:

$$R(\alpha) = K S V^2 f(\alpha) \quad \text{con} \quad f(90^\circ) = 1 \quad R(90^\circ) = K S V^2 \quad [2.0]$$

Siendo R la fuerza aerodinámica total, la superficie alar (S), la velocidad (V) y una supuesta “constante” (K), que tiene dimensiones físicas de densidad en el S.I. La expresión $f(\alpha)$ modelizaba el comportamiento de R respecto de la incidencia.

Cuando la placa se ensaya¹⁹ en una corriente perpendicular a la misma, con $f(90^\circ) = 1$ aparentemente la única incógnita a determinar era el valor de K , que se suponía constante y se designó con el nombre de “*Resistencia Específica del Aire*”. Se trabaja con las siguientes hipótesis y convenciones:

- Se considera un dato experimental firme que la resistencia aerodinámica varía como el cuadrado de la velocidad [107], [44], [45], [46], salvo para regímenes muy bajos o muy altos [62], [63], [64]. La influencia de la densidad suele estar implícita,

¹⁸ La aerodinámica de una placa plana sometida a una corriente de aire a diferentes ángulos de ataque podría de entrada parecer un problema que no debiera presentar complicaciones. A título de ejemplo solamente, la simple inspección visual de un documento reciente, específicamente dedicado a este problema, permite desprenderse de una impresión demasiado simplista. (Cfr. “*Fluid Forces and moments on flat plates*”; ESDU 70015; Royal Aeronautical Society (1970).

¹⁹ Puede encontrarse en Ref. [105] una información muy completa sobre los experimentos acerca de la resistencia de las placas planas anteriores a 1780.

pero algunos investigadores las mencionan explícitamente cuando tratan con aire y no con agua [104].

- Con alguna excepción - Rayleigh [52], Lanchester [10]- no se suele considerar importante el efecto de la viscosidad.
- No sin discusión - [111], [48]-, se acepta que si la placa se mueve en el aire en reposo, o al contrario, el resultado no se ve afectado. (Principio del movimiento relativo).
- Curiosamente, para algunos investigadores era más importante la influencia del *perímetro* de la placa que la superficie [35].
- Se discute si la fuerza aerodinámica aumenta o disminuye con la forma de la superficie S . El problema surgía del hecho de que una misma *cantidad de superficie plana* -expuesta a un flujo normal- podía variar su resistencia aerodinámica según *la forma* que adoptase la superficie. Esto es reconocido como un punto importante, pero no existe una teoría que cuantifique la influencia de la “forma” de la superficie.
- La posición del Centro de Presión para una placa *normal* a la corriente, si la placa tenía simetría según dos ejes, coincide con el punto de intersección de los ejes.

Si la placa es plana, no hay ambigüedad en la determinación de la incidencia. Si tiene curvatura, se define un “plano equivalente” que contiene los bordes delantero y posterior del ala, habitualmente rectos y normales a la corriente. La incidencia generalmente se mide tomando como referencia el plano así definido. El espesor de la placa, no siempre mencionado, es pequeño.

La superficie S está perfectamente determinada para la placa plana. Para superficies curvas se considerará como superficie de referencia la del plano definido según el párrafo anterior. Los experimentos²⁰ con placas normales a la corriente, conducirán a diferentes resultados para la supuesta *constante* K . Para determinar su valor²¹ se hicieron

²⁰ Los procedimientos experimentales de los primeros investigadores abarcan un amplio espectro: desde artilugios rudimentarios, que materializan con más o menos destreza “una idea particular” de un investigador, hasta algunos (pocos) laboratorios aerodinámicos apoyados por instituciones privadas o estatales bien equipados: S. P. Langley (USA), Riabuchinsky (Rusia), G. Eiffel (Francia),... Entre un extremo y otro se pueden encontrar investigadores que muestran un notable ingenio para confeccionar sus útiles de experimentación con medios materiales muy limitados (Wright Brothers, (USA); M. Dines (UK). Esta variedad de métodos y procedimientos, de variables meteorológicas y hasta de circunstancias personales, explica en parte la gran dispersión de los resultados obtenidos. Pero sobre todo, la explica la falta de especificaciones claras de partida para la realización de los propios experimentos que, realizados sobre fenómenos aparentemente simples, esconden más variables de las que los investigadores suelen considerar.

²¹ El valor numérico de K depende del sistema de unidades utilizado. Esto propicia una cierta confusión, pues no siempre los diferentes trabajos en los que se basa un investigador son citados apropiadamente, indicando las unidades.

muchos experimentos²². Mencionamos aquí una serie de resultados [Eiffel, 18], [Sée, 35]

y [Cleveland, 40]. Nota: Unidades S.I. $\left(\frac{kg\ s^2}{m^4} = \left(\frac{kg}{m^3}\right) / \left(\frac{m}{s^2}\right)\right)$

Valor de K (S.I.)	[18]	[35]	[40]
Borda (1763) [81]	0.092	0.096	
Rouse (1782)	0.095		0.13
Smeaton (1782) [86]	0.095	0.13	0.1279
Hutton (1786) [83]	0.094	0.081	0.1108
Dines (1889) [89]	0.085/0.089	0.0732	0.0910
Langley (1889) [5]	0.084/0.089	0.08475	0.1011/0.0832
Van Lössl (1876) [59]	0.104/0.118	0.083 a 0.093	0.13
Reichel (1901) [91]	0.108	0.096	
Piobert, Morin (1842) [93]	0.094	0.084	
Ricour (1885) [97]	0.130	0.1296	
Desdouits (1886) [94]	0.13	0.13	
Cailletet & Co.(1892) [53]	0.070/0.68	0.071	0.0754
Le Dantec (1899) [98]	0.082/0.085	0.079	
Canovetti (1903) [56]	0.102/0.088	0.060 / 0.092	0.0754
Eiffel (1903/5)) [18]	0.068/0.079		0.0806
Stanton (1903) [60]	0.066		0.0702
Zossen/Mar. (1901)		0.0579	0.0702
Recknagel (1886) [50]		0.07	0.0746
Hagen (1860) [87]	0.075/0.076	0.075	0.0759
Renard (1887) [55]		0.07/0.09	0.0905
Poncelet [49]		0.088	0.0715

²²Algunas mediciones fueron realizadas sobre una placa sometida a un movimiento de giro circular. Un inconveniente de este procedimiento estriba en que el aire que la rodea adquiere también movimiento y la suposición de que permanece en reposo pierde validez.

Didion (1837)	[93]		0.110	0.0874
Thibault (1856)			0.110	0.1378
Goupil (1884)	[51]		0.13	0.1374
Lilienthal (1889)	[1]		0.13 /0.4	0.13
Riabouchinsky (1906)	[95]	0.081/0.103		

Tabla 2.1: Valores de K ; “Resistencia aerodinámica específica del aire”

Valor de K (S.I.)		Eiffel [18]	Sée [35]	Cleveland [40]
Mariotte (1690)	[104]	0.084		
Bouguer (1746)		0.082		
Coulomb (1780)		0.072		
Vinci (1782)		0.088		
Edgeworth (1783)	[82]	0.108		
Woltmann (1785)		0.088		
Finzi e Soldati (1903)	[92]	0.076/0.09		
Benet-Rivet			0.071	
Edge			0.071	
Le Dantec	[98]		0.08	
Dubuat	[111]		0.089	
Joëssel	[42]		0.102	
Dupré	[99]		0.1272	
Marey	[100]		0.13	
Fustegueras			0.132	
Chanute	[3]		0.162	
Seé	[35]		0.08	
Duchemin (1842)	[48,112]			0.1279
Lord Rayleigh (1876)	[85]			0.1430
Pole (1881)	[54]			0.0650
Hazen (1886)				0.0884

C. F. Marvin (1890)	[101]			0.1040
Voisin Brothers	[61]			0.0650
Wright Bros. (1901)	[38]			0.0858
Scott Russell (1846)				0.0650
J. Aspinall (1901)	[65]			0.0780

Tabla 2.2: Valores de K ; “Resistencia aerodinámica específica del aire” (Cont.).

Estas mediciones conducen a un valor medio²³ de $\bar{K} \approx 0.091 \pm 0.019 \text{ kg s}^2 / \text{m}^4$. Los resultados presentan dispersión. El gráfico adjunto (Fig. 2.1) muestra los valores obtenidos para K y el año de la medición. Muestra también el creciente número de publicaciones a finales del siglo XIX, aunque se mantiene un grado significativo de dispersión.

En 1910 Eiffel²⁴, mediante experimentos detallados y rigurosos, estableció definitivamente que K no puede considerarse constante, al depender de la cantidad de superficie y, para una misma cantidad de superficie, de la forma del contorno [18]. Marchis [116] considera que un valor medio de $K \approx 0.080$ es aceptable; menciona también la fórmula propuesta por Soreau para estimar el valor de K :

$$K \approx \frac{0.0888 S^{0.06}}{1 + 0.116 S^{0.06}} \quad \text{La superficie } S \text{ se expresa en } m^2 .$$

²³ Hubiera sido razonable para $\alpha = 90^\circ$ tratar de mostrar aquí los resultados para K en la forma habitual en que se presenta en aerodinámica el coeficiente adimensional de resistencia $CD = D / 0.5\rho SV^2$ esto no es posible más que en algunos casos, ya que los investigadores (o las fuentes que los citan) no siempre mencionan el valor de la superficie de la placa, o de la velocidad, o las condiciones atmosféricas durante los ensayos.

²⁴ Entre otros.

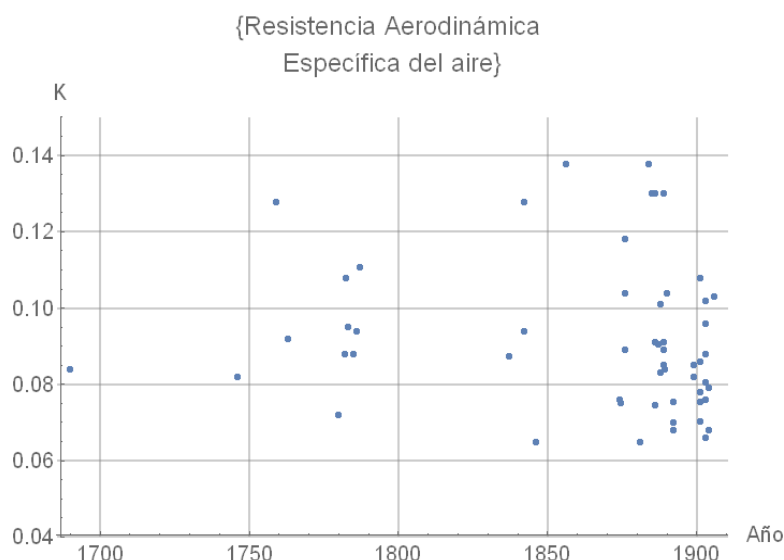


Figura 2.1: Valores obtenidos y año de medición de la constante K “Resistencia Aerodinámica específica del aire”.

Esto en cuanto a lo que respecta a la *constante* K , para la placa perpendicular a la corriente. En parte, el problema de estos primeros experimentos estriba en que estos no son adecuados para lograr un modelo aerodinámico completo del comportamiento de una superficie plana expuesta a una corriente normal; no son commensurables con la magnitud de conceptos físicos que involucra su objeto, pues no hay un único valor de K (Vid. Lanchester [10]). Depende de la geometría de la placa, del tipo de superficie y del régimen de la corriente de aire (Reynolds, Mach).

2.3 La Resistencia aerodinámica de una placa plana con incidencia variable.

El valor de K interviene en todas las mediciones correspondientes a ángulos diferentes de 90° , debido al modo de presentar los resultados. Por esta razón, la incertidumbre en el valor de K se ve transferida también al campo específicamente aeronáutico de incidencias pequeñas.

El problema aerodinámico fue dividido en dos partes. La primera consistió en la obtención de la fuerza para una incidencia de 90° . La segunda operaba disminuyendo progresivamente la incidencia de la placa, midiendo el valor de la fuerza aerodinámica resultante y la posición del centro de presión, hasta alcanzar incidencia nula (o negativa). Los primeros intentos se deben a Mariotte [104] y [105], que puso la placa formando 45° con la corriente, e interpretó el fenómeno como la percusión de muchas partículas (de aire).

Con un ángulo de incidencia comprendido entre $(0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$ la resultante R se solía expresar como el cociente entre la fuerza experimentada por la placa con un cierto ángulo α dividida por la fuerza obtenida en situación perpendicular, ya que esta última resultaba más fácil de medir experimentalmente. El problema era evaluar el cociente

$$\left(\frac{R(\alpha)}{R(90^\circ)} \right)$$

Se aceptaba que la dirección de la fuerza resultante aerodinámica en una placa plana sería la correspondiente a una distribución de presión sin esfuerzos tangenciales debidos a la viscosidad, y por ello normal a la misma, aunque se sospechaba que podría no serlo de modo riguroso. Langley [5] y Dines [58] consideran que la resultante aerodinámica es normal a la placa. Para Stanton [60] y Eiffel [18] la resultante no es normal a la placa, sino que forma un ángulo de $\sim 1^\circ/2^\circ$. Este tema no se esclarecerá hasta que no se incorpore al modelo la resistencia aerodinámica debida a la viscosidad.

Los experimentos de Lilienthal [1], -cuyas tablas fueron utilizadas por los Wright [38, Vol. II]-, demostraron dos cosas:

- (1) La posibilidad de volar con ángulos de incidencia pequeños, ya que se puede lograr sustentación suficiente manteniendo un valor bajo de la resistencia.
- (2) La necesidad de que esta incidencia no superase un cierto valor, pues a partir de este, la sustentación comenzaba a disminuir y aumentaba fuertemente la resistencia.

De todo el rango de valores de incidencia medidos, quedaba claro que solamente eran de interés aeronáutico los valores pequeños. Los experimentos con estos ángulos resultaban ser los que generaban más dificultades para medir los resultados con precisión. Lilienthal [1] mostró también que los perfiles con curvatura, comparados con los planos, poseían una mayor capacidad sustentadora para una misma incidencia, medida respecto del plano equivalente. La curvatura, por otra parte, complicaba la identificación rigurosa del comportamiento del centro de presión.

Si se acepta la perpendicularidad de la resultante al plano de la placa, las dos componentes de R -una tangencial y la otra normal a la trayectoria- son:

$$\begin{aligned} F_{Normal} &= R \cos \alpha = K S V^2 f(\alpha) \cos \alpha \\ F_{Tangencial} &= R \sin \alpha = K S V^2 f(\alpha) \sin \alpha \end{aligned} \quad [2.1]$$

Estas dos fuerzas, de acuerdo con la certera descripción realizada por Cayley [72] sobre las condiciones necesarias para el vuelo artificial, indican la sustentación necesaria para equilibrar el peso y la resistencia que necesitaríamos vencer mediante la generación de tracción en sentido tangencial al vuelo. De aquí proviene la importancia de conocer con precisión el comportamiento de la función $f(\alpha)$

Vemos que para obtener el valor de la fuerza resultante $R(\alpha) = K S V^2 f(\alpha)$ a partir de $f(\alpha)$ arrastramos la incertidumbre del valor de K .

La identificación de una expresión matemática para la función $f(\alpha)$ condujo a muy variadas propuestas. Mencionamos²⁵ las más relevantes. (El ángulo de incidencia α en rad; AR es el alargamiento alar).

Isaac Newton ²⁶ [37]:	$f(\alpha) \approx \sin^2 \alpha$ (placa cuadrada) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \left\{0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
L. Euler ²⁷ [108]	$f(\alpha) \approx k \sin^2 \alpha; \quad k = \left(1 + \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho V^2}\right)$ $p_1 =$ Presión estática delante de la placa $p_2 =$ Presión estática detrás de la placa $\rho =$ Densidad
Duchemin [48]	$f(\alpha) \approx \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \delta$ (placa cuadrada) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1 \quad \left\{0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ con: $\delta = \left(1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{6.48} + \frac{\cos^2 \alpha}{3.52}\right)$
Col. Renard [63]: ("a" es una constante de valor incierto, pero acotado)	$f(\alpha) \approx 2 \sin \alpha - \sin^3 \alpha$ (placa cuadrada) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1 \quad \left\{0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ $f(\alpha) \approx a \sin \alpha - (a-1) \sin^3 \alpha \quad \text{con: } 1 < a < 2$
Hastings [40]	$f(\alpha) \approx 2 \sin \alpha$ (placa cuadrada) $\alpha \approx$ pequeño
Riabuchinsky, Inst. de Koutchino [19]	$f(\alpha) \approx 2 \sin \alpha$ (placa cuadrada) $\alpha \approx$ pequeño
G. Eiffel [18], [19]	$f(\alpha) \approx 2.29\alpha; \quad ; f(\alpha) \approx 1.91\alpha$ (placa cuadrada) $\alpha \approx$ pequeño

²⁵ La geometría de la placa no siempre es mencionada en las fuentes.

²⁶ La Ref. [102] atribuye esta ley a Euler [103]. Robins [106] en 1742, la pone por primera vez en duda. Villamil lamenta su presunta influencia negativa en el desarrollo de la aviación [109] y Giacomelli & Pistolesi rechazan el cargo [110]. Para la historia de la "Teoría del Impacto" es muy completa la referencia [105].

²⁷ Pueden también encontrarse en Euler expresiones lineales con α para evaluar la fuerza en una placa plana sometida a una corriente; de hecho, él prefería la fórmula lineal, avalada por los experimentos, pero no (todavía) por la teoría. La incluimos ahora como un ejemplo de la "diversidad de oferta" que ofrecía la ciencia del momento. A título de ejemplo, el informe de Marchis [116], que resume la información disponible en 1917, muestra todavía no pocas discrepancias entre los resultados obtenidos por diferentes investigadores.

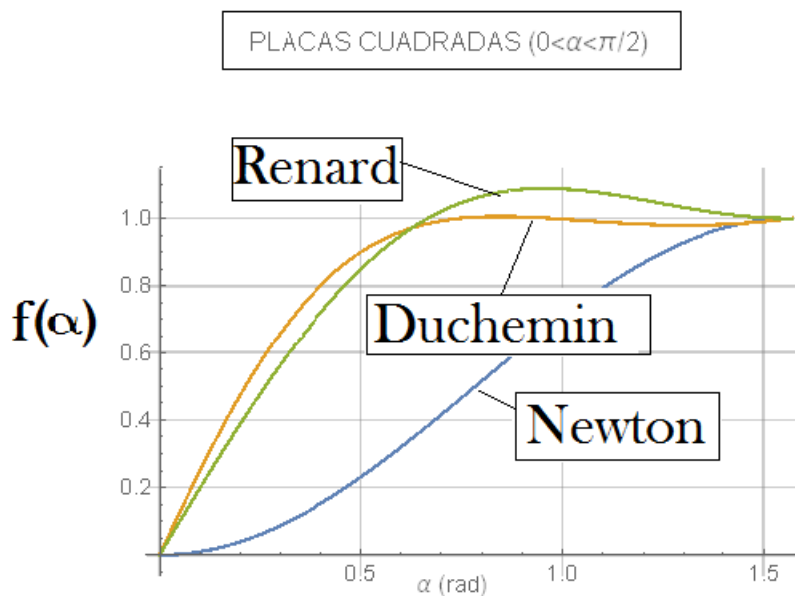


Figura 2.2: Valores para $f(\alpha)$ desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = \pi/2$ para alas cuadradas, según distintos investigadores.

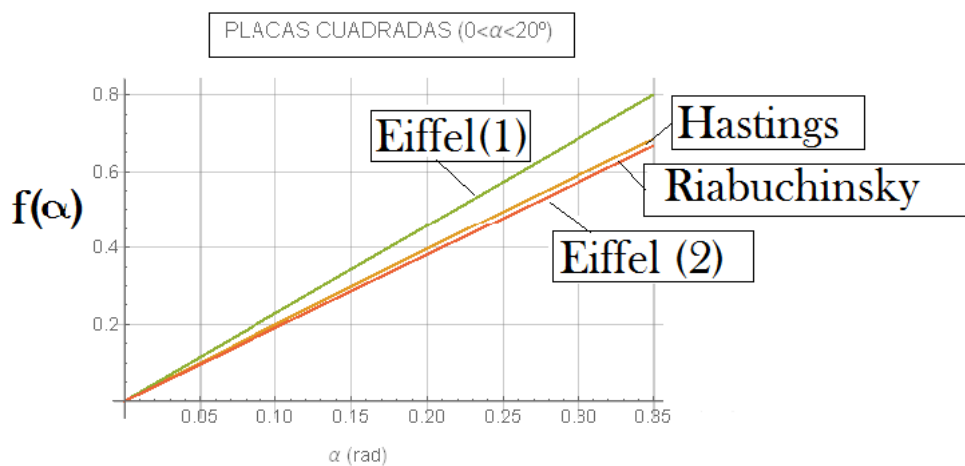


Figura 2.3: Valores para $f(\alpha)$ para alas cuadradas y ángulos de ataque pequeños, según distintos investigadores.

Como particularidad, pueden verse los valores que ofrece Soreau para alargamientos alares comprendidos entre 2 y 7 [12]. (Fig. 2.4)

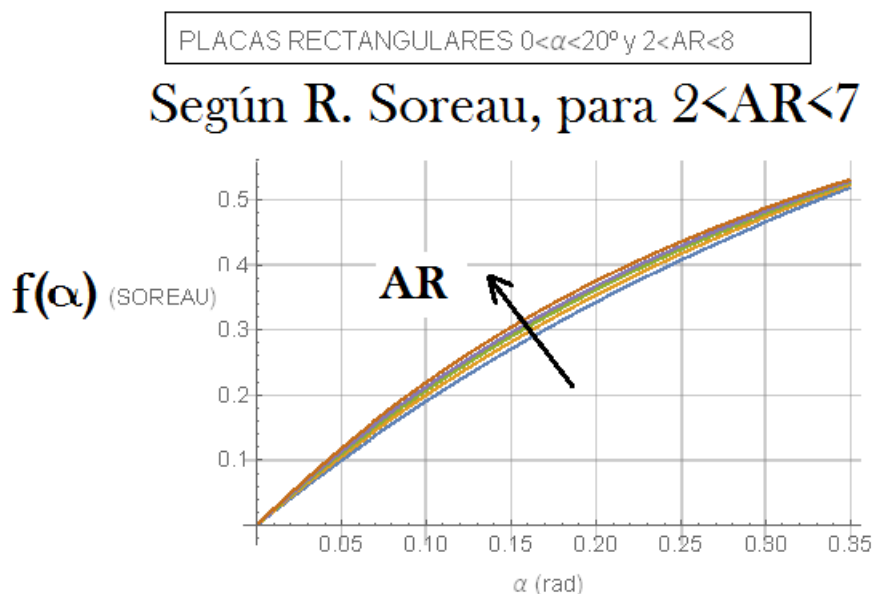


Figura 2.4: Valores para $f(\alpha)$ según Soreau [12] para alas rectangulares (Alargamiento alar entre 2 y 7) y ángulos de incidencia pequeños.

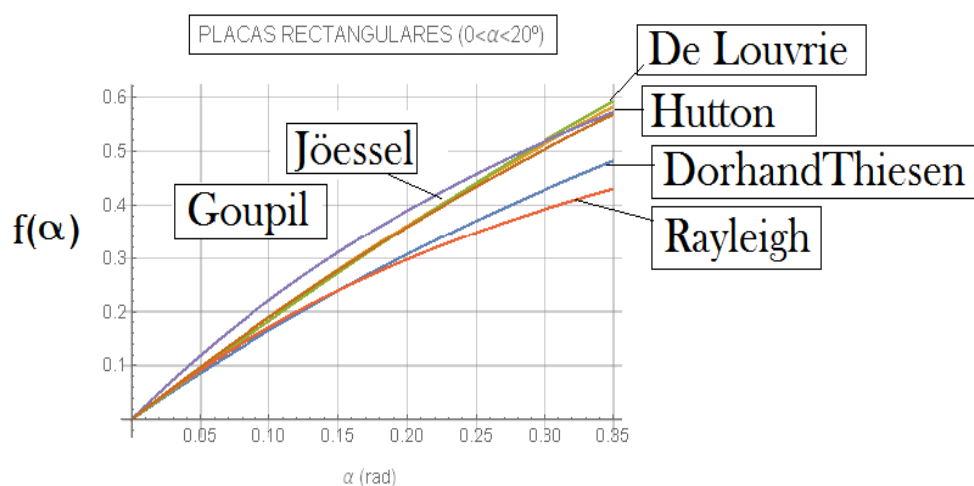


Figura 2.5: Valores para $f(\alpha)$ para alas rectangulares (Alargamiento alar no definido) y ángulos de incidencia pequeños.

La Figura (2.5) ofrece el valor de $f(\alpha)$ para placas rectangulares y ángulo de ataque pequeño según diversos investigadores. Obsérvese que las placas rectangulares no presentan muy significativas diferencias para la zona de ángulos de ataque prácticos para los aviones.

Los resultados experimentales “homologados” actuales, en un contexto de simplicidad, tienen el siguiente aspecto (Fig. 2.6) para el comportamiento del Coeficiente

de fuerza Normal de una placa plana cuadrada que forma un ángulo α con la corriente [36].

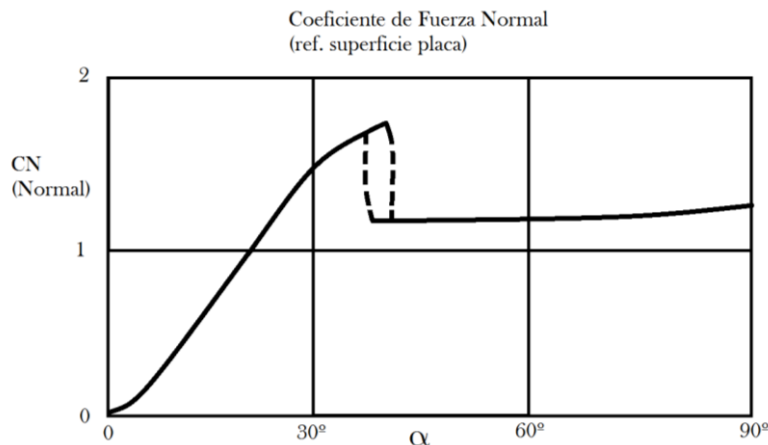


Figura 2.6: Valor del coeficiente aerodinámico de fuerza normal a la placa plana cuadrada según Ref. [36].

Puede verse que por encima de $\alpha \approx 45^\circ$ este coeficiente permanece prácticamente constante: $C_N \approx 1.17$ mientras que sigue una ley aproximadamente lineal para valores inferiores de la incidencia, desde $\alpha = 0$, hasta $\alpha \approx 45^\circ$, con una zona de histéresis de más compleja delimitación entre los dos regímenes.

2. 4 Relación entre la función $f(\alpha)$ y los coeficientes aerodinámicos asimilables a los clásicos $CL(\alpha)$ y $CD(\alpha)$

Consideremos ahora la relación que liga la función $f(\alpha)$ con los coeficientes aerodinámicos clásicos: $CL(\alpha)$, $CD(\alpha)$, y la Eficiencia Aerodinámica resultante EA, según los valores que toma el ángulo de incidencia α (Ref. 2.7):

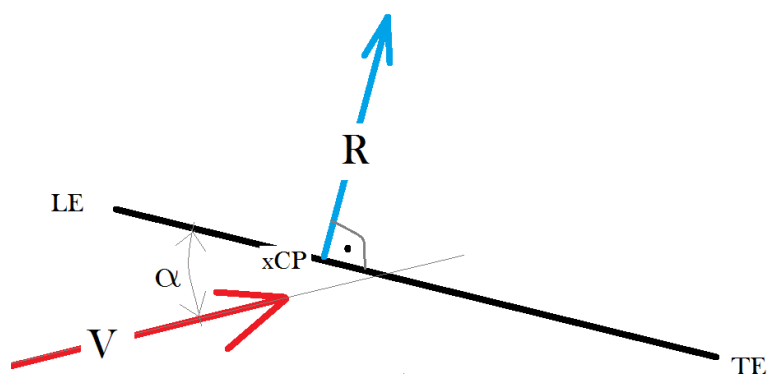


Figura 2.7: Esquema de una placa plana sometida a una corriente de aire con velocidad V , ángulo de ataque α , centro de presión en x_{CP} , y fuerza aerodinámica resultante R , normal a la placa. (LE: borde de ataque; TE: borde de salida).

$$F_N = R \cos \alpha = K S V^2 f(\alpha) \cos \alpha \Rightarrow C_N = C_L = f(\alpha) \cos \alpha$$

$$F_T = R \sin \alpha = K S V^2 f(\alpha) \sin \alpha \Rightarrow C_T = C_D = f(\alpha) \sin \alpha \quad [2.2]$$

$$EA = \frac{CL}{CD} = \cot \alpha$$

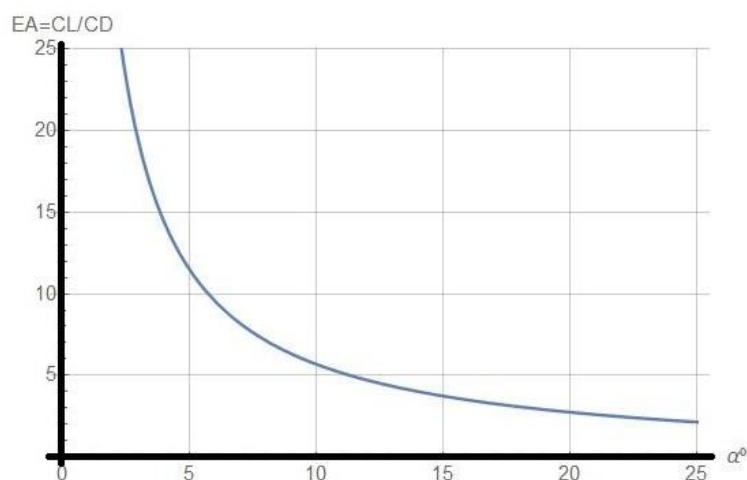


Figura 2.8: Eficiencia Aerodinámica de una placa plana en función de α , según las condiciones indicadas por las ecuaciones (2.2).

La Eficiencia Aerodinámica (Fig. 2.8) resulta ser independiente –según las hipótesis admitidas– del valor de la función $f(\alpha)$. Cosa lógica si recordamos que asumen la ausencia de resistencia aerodinámica tangencial a la placa. Resulta también evidente la conveniencia de utilizar ángulos de ataque pequeños, aunque la no inclusión de la resistencia parásita distorsiona los resultados, desplazando el óptimo de la EA hacia la zona de α nulo. En todo caso, resultó obvio que desde el punto de vista aeronáutico interesaba cuantificar correctamente el comportamiento aerodinámico con incidencias pequeñas. El problema del vuelo estribaba en lograr sustentaciones del orden de magnitud del peso del avión, con resistencias aerodinámicas lo más pequeñas posible y esto es factible solo si la relación $f(\alpha)$ lo permite.

Cuando la placa no era plana, sino con curvatura positiva (convexidad hacia arriba), se observó que con ángulo de ataque nulo –medido respecto de la cuerda– proporcionaba ya una significativa sustentación, debido a que la línea de sustentación nula no es ahora la que une el borde de ataque con el borde de salida, como sucede en la placa plana. Este efecto se consideró ventajoso y se impusieron los perfiles con curvatura, como ya se ha dicho.

2.5 La posición del centro de presión $x_{CP}(\alpha)$. Perfiles planos y perfiles con curvatura.

El comportamiento del centro de presión es un aspecto muy importante para el estudio de la estabilidad de un aeroplano. Se sabía que el centro de presión no coincidía necesariamente con el centro geométrico de la superficie y que su posición dependía del ángulo de incidencia. Los ensayos realizados establecían la posición del centro de presión para alas concretas de dimensiones particulares y no resultaba sencillo generalizar para formas alares diferentes.

2.5.1 Posición del centro de presión de una placa plana.

Recogemos en la Tabla 2.4 algunos resultados²⁸ acerca de la posición del centro de presión (en función del ángulo de incidencia α) en forma analítica. (La distancia se toma desde el borde delantero de la placa):

G. Avanzini, (1794) [2]	$x_{CP}(\alpha) \approx c(0.2 + 0.3 \sin \alpha)$
Thiesen [40] (Ala rectangular)	$\frac{x_{CP}(\alpha)}{c} \approx 0.5 - 0.2 \left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)$
Joëssel [42]	$x_{CP}(\alpha) \approx c(0.195 + 0.305 \sin \alpha)$
R. Soreau [12]	$\frac{x_{CP}(\alpha)}{c} \approx 0.5 - \frac{1}{4(1 + 2 \tan \alpha)}$
R. Soreau [12]. (Perfil circular) (No cualificada)	$\frac{x_{CP}(\alpha)}{c} \approx \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{2(a \tan \beta + b \tan \alpha + 2 \tan^2 \alpha)}$ $\{a, b \text{ CONSTANTES}\}$
G. Greenhill [22] Lord Rayleigh [52] (Flujo con discontinuidad)	$\frac{x_{CP}(\alpha)}{c} \approx \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{16} \cos \alpha}{1 + \frac{\pi}{4} \sin \alpha}$

Tabla 2.4: Valores para la función $\frac{x_{CP}(\alpha)}{c}$ según diversas fuentes.

²⁸ Según las fuentes, las expresiones correspondientes a un mismo concepto y de un mismo investigador pueden tomar formas ligeramente diferentes.

A título ilustrativo se muestran datos experimentales del movimiento del centro de presión de una placa plana, G. Eiffel [Fig. 2.9; 18]. Los círculos indican, para cada incidencia, la posición del centro de presión. Puede verse que para ángulos α muy pequeños, el centro de presión está cerca de $\frac{x_{CP}}{c} \approx 0.25$, y se aleja a medida que crece α :

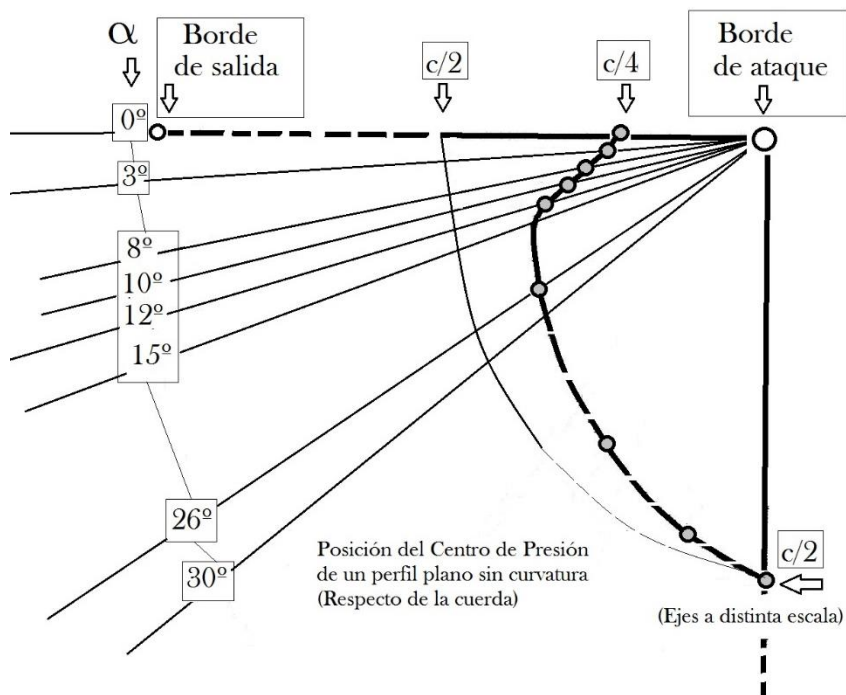


Figura 2.9: Datos experimentales del movimiento del centro de presión de una placa plana. (Ref. Eiffel [18])

2.5.2 Centro de presión de superficies curvas.

La incipiente investigación mostraba aparentes anomalías. Los primeros resultados son de Lilienthal [1], cuyas investigaciones, en la referencia mencionada ahora, se centraron en la determinación de la fuerza, pero no en el comportamiento del centro de presión [40]. Veamos, por ejemplo, resultados experimentales precisos del movimiento del centro de presión de una placa con curvatura [Fig. 2.10; Eiffel, 18] [Fig. 2.11; Eiffel, 19] y [Fig. 2.11; Prandtl, 78].

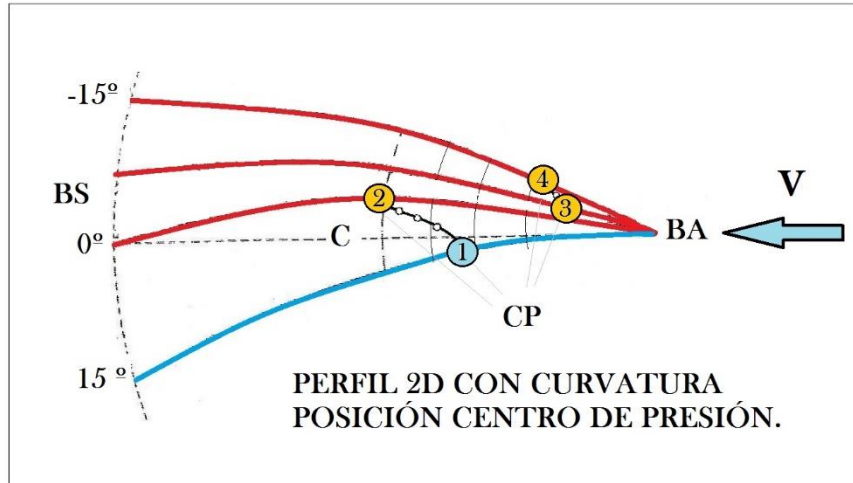
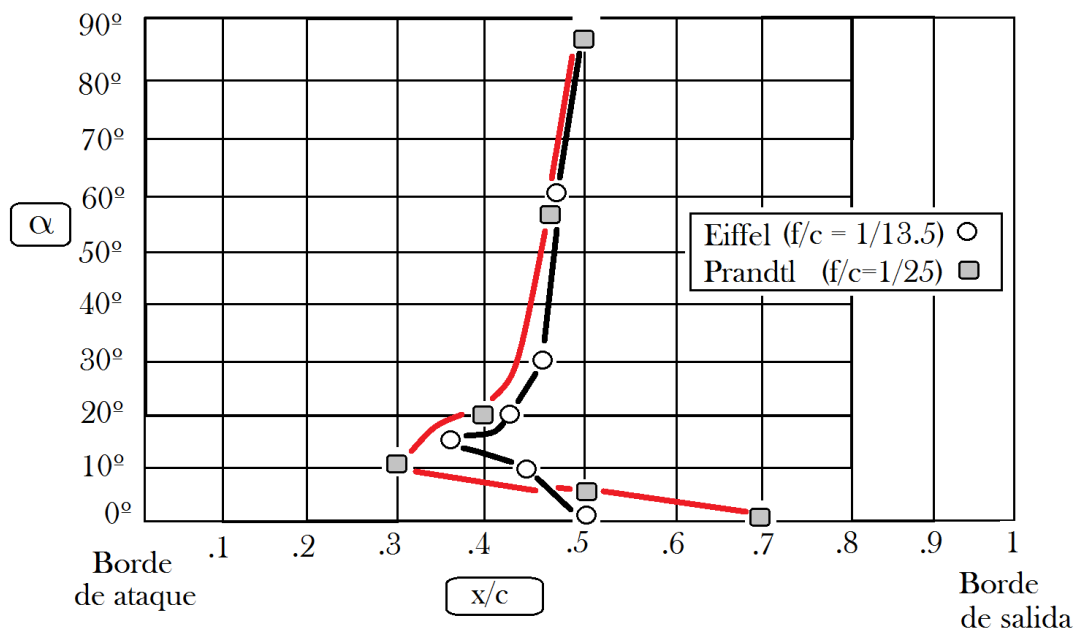


Figura 2.10: Datos experimentales del movimiento del centro de presión de una placa con curvatura. (Ref. Eiffel [18])

En el movimiento del x_{CP} del ala curva con la variación de la incidencia hay avance y retroceso con aumento uniforme de la incidencia, en contraste con lo que sucede en la placa plana. Para el perfil de la figura 2.10:

- (a) Perfil con sustentación positiva debida a la curvatura y $\alpha_1 > 0$ x_{CP} en (1)
- (b) Perfil con sustentación positiva debida a la curvatura y $\alpha_2 = 0$ x_{CP} en (2)
- (c) Perfil con sustentación positiva debida a la curvatura y $\alpha_3 < 0$ x_{CP} en (3)
- (d) Perfil con sustentación positiva debida a la curvatura y $\alpha_4 < \alpha_3 < 0$ x_{CP} en (4)



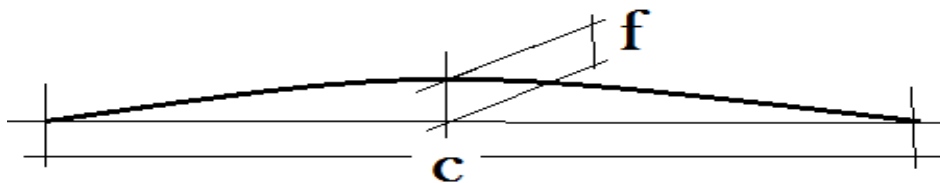


Figura 2.11: Datos experimentales del movimiento del centro de presión de una placa con curvatura. (Ref. Eiffel [18] y Prandtl [78]).

Este fenómeno resultaba desconcertante para los pioneros. Obsérvese que cuanto más alejada está la incidencia α (en positivo) del ángulo de sustentación nula, más se aproxima el centro de presión a $x_{CP} \approx 0.25c$ y esto significa predominio de sustentación debida a α ; a medida que disminuye la sustentación debida a α , el centro de presión se acerca a $x_{CP} \approx \infty$ pasando por $x_{CP} \approx 0.5c$ para $\alpha = 0$ cuando la sustentación se debe exclusivamente a la curvatura del perfil.

No obstante, este fenómeno que en los gráficos muestra tan extraño comportamiento, adquiere un aspecto diferente si se presenta de un modo ligeramente distinto, tal como hacemos a continuación.

La Tabla 2.5 muestra los valores del coeficiente de sustentación CL , la posición adimensional del centro de presión x_{CP}/c y el coeficiente de momento de cabeceo respecto del borde de ataque de un perfil Royal Aircraft Factory 15, ensayado en el National Physical Laboratory. Ref. [114]

$\alpha(^{\circ})$	CL	x_{CP}/c	$CM_{Leading_Edge}$
-6	-0.17	0.167	0.028
-4	-0.087	0.034	0.003
-2	-0.0163	-0.725	-0.011
-1	0.0173	0.822	-0.014
0	0.057	0.404	-0.023
1	0.107	0.362	-0.038
2	0.164	0.35	-0.057
3	0.203	0.327	-0.067
4	0.242	0.307	-0.075
6	0.312	0.278	-0.087
8	0.387	0.268	-0.104
10	0.454	0.274	-0.124
12	0.519	0.28	-0.145

Tabla 2.5. Datos del Perfil aerodinámico Royal Aircraft Factory 15. Ref. [114].

Calculamos ahora, a partir de los datos de la tabla, el coeficiente de momento de cabeceo respecto de diferentes puntos x del perfil, para todos los ángulos de ataque considerados:

$$CM_x = CL(xCP - x)$$

Obtendríamos gráficos tales como los mostrados a continuación (Fig. 2.12), para diferentes valores de x , que es la coordenada del punto respecto del cual calculamos el momento, medida desde el borde de ataque del perfil:

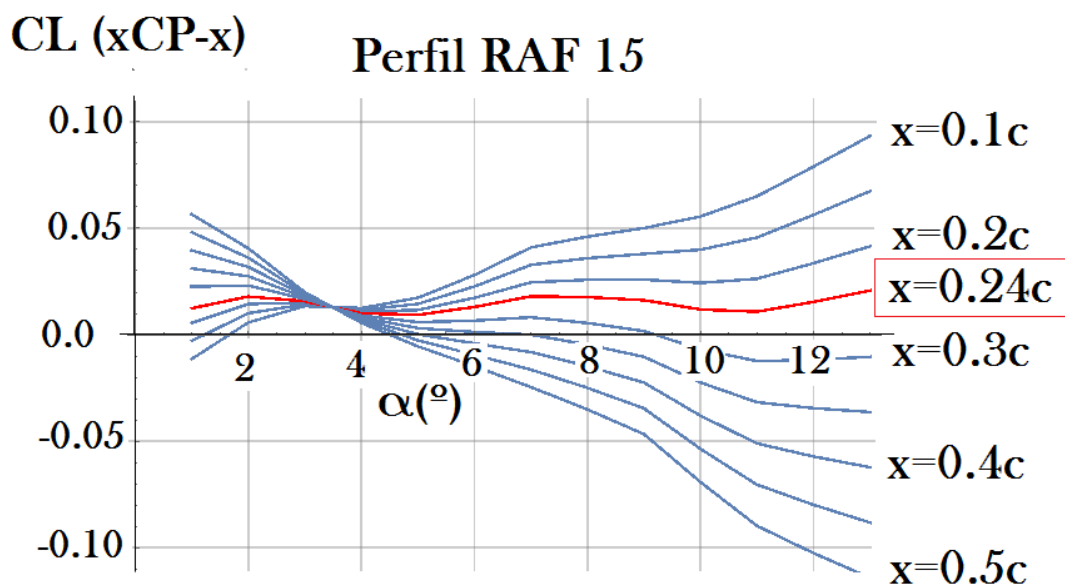


Figura 2.12: Variación del momento de cabeceo con α respecto de distintos puntos de la cuerda del perfil RAF 15.

Puede verse que, dentro de las limitaciones introducidas por los errores en las mediciones²⁹ -recordemos que trabajamos ahora con datos experimentales fruto de mediciones en túnel de ensayos- el momento de cabeceo para $x = 0.24c$ parece mantenerse prácticamente constante aunque varíe el ángulo de ataque.

Este comportamiento, que pronto se verá que es común a todos los perfiles útiles para los aeroplanos, tengan o no curvatura, es una pista que orienta claramente en la dirección de lo que terminará recibiendo el nombre de *centro aerodinámico* del perfil, que será también objeto de una notable predicción teórica, como veremos.

²⁹ Bairstow [114] sugiere -en 1920- que estos errores pueden llegar a ser del 28 % en mediciones que implican ángulos muy pequeños.

2.6 Inicio de la teoría matemática de perfiles bidimensionales⁸⁰.

En 1902 Kutta [31] realizó, para su Tesis de Habilitación en Múnich, un estudio teórico de la sustentación y la posición del centro de presión de un perfil curvo bidimensional. Elige un sector de arco circular (sin espesor), inmerso en una corriente uniforme, y superpone una circulación tal que la velocidad en el borde de salida sea tangente al perfil en ese punto, aunque no necesariamente nula; esto le permite obtener un valor para la sustentación y también la distribución de presión a lo largo de la cuerda. Como consecuencia, se puede calcular la posición del centro de presión. Ambas cosas resultaron aproximadamente coincidentes con los resultados experimentales para incidencias pequeñas.

No se conservan copias completas de la tesis de Kutta [31], pero el desarrollo de sus cálculos [74] conduce a las siguientes conclusiones, que aparecerán explícitamente en Kutta [32]. Inspirándose en Kutta [31], Zhukowsky [73] obtendrá el mismo resultado más sencillamente y con perfiles típicamente aeronáuticos. La aplicación práctica de estos importantes resultados no fue inmediata.

Si nos centramos en Kutta para ilustrar los resultados obtenidos, tenemos que para un perfil de segmento de círculo, de flecha f y cuerda c (Fig. 2.11), los valores de la sustentación L y de la posición del centro de presión³¹ x_{CP} respecto del borde de ataque, (con la nomenclatura habitual) [32], [74] son:

$$L = 2f\pi V^2 \rho \cos \alpha + c\pi V^2 \rho \sin \alpha \tag{2.3}$$

$$x_{CP} \approx c \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin \alpha}{4 \left(\left(\frac{f}{c} \right) 2 \cos \alpha + \sin \alpha \right)} - \left(\frac{f}{c} \right) \frac{\tan \alpha}{2} \right)$$

Esto sugiere que los centros de actuación de cada una de las componentes de la sustentación está -muy aproximadamente- en:

³⁰ Para un tratamiento relativamente completo y breve de esta cuestión, aunque no menciona el problema de la ubicación del centro aerodinámico, Ref. [113].

³¹ “*Centro de Presión*” es una expresión habitualmente utilizada que no debe tomarse como si fuese un punto sobre la cuerda en el que se produce la aplicación de la resultante de las fuerzas de presión que actúan sobre el perfil, pues en general no existirá tal punto, pero sí que habrá una línea de acción de la fuerza resultante [67]. A los efectos de la influencia en la estabilidad, hay que tener en cuenta que los cambios en la sustentación debida a α no actúan en el centro de presión sino en el centro aerodinámico, situado aproximadamente al 25% de la cuerda media aerodinámica. La sustentación debida a la curvatura actúa aproximadamente al 50% de la cuerda media aerodinámica y crea un momento independiente de α que cambia con el cuadrado de la velocidad. La conclusión es que el movimiento del centro de presión NO afecta a la estabilidad respecto de α ; pero esto no era conocido por los pioneros, que se inclinaban a pensar precisamente lo contrario, y aparentemente con buenas razones para ello. (Ver Anexo I)

$$L_f = 2f\pi V^2 \rho \cos \alpha \approx 2f\pi V^2 \rho \quad \text{situada en: } xCP_{\alpha=0} \approx \frac{c}{2} \quad [2.4]$$

$$L_\alpha = c\pi V^2 \rho \sin \alpha \approx c\pi V^2 \rho \alpha \quad \text{situada en: } xCP_{f=0} \approx \frac{c}{4}$$

Las dos componentes de la sustentación aparecen ahora nítidamente separadas:

- (1) La debida a la curvatura y la debida a la incidencia, así como las posiciones (prácticamente independientes de α) de los puntos de aplicación de las fuerzas aerodinámicas; esto permitirá establecer el concepto de Centro Aerodinámico: un “punto” -o línea de acción- respecto del cual es constante el coeficiente de momento aerodinámico.
- (2) Esto - que en principio es un resultado extraño, al ser independiente de la incidencia- fue suficientemente confirmado por prácticamente todos los experimentos, si nos mantenemos en el margen de α razonables para la aviación [34].
- (3) Así se obtiene una explicación sencilla a la aparente anomalía del comportamiento del centro de presión. Es obvia la causa del desconcierto de los pioneros. El momento de la fuerza de sustentación respecto de un punto x es:

$$M|_x = 2f\pi V^2 \rho \cos \alpha \left(x - \frac{c}{2} \right) + c\pi V^2 \rho \sin \alpha \left(x - \frac{c}{4} \right) \quad [2.5]$$

Obsérvese que la sustentación originada por la curvatura también depende del ángulo de incidencia, pero a través de $\cos \alpha \approx 1$, lo que virtualmente equivale a no serlo para los valores normales de α .

El centro de presión vendrá dado por la posición de x que anula el momento:

$$0 = \frac{2f}{c} \left(xCP - \frac{c}{2} \right) + \tan \alpha \left(xCP - \frac{c}{4} \right) \quad [2.6]$$

$$\Rightarrow xCP = \frac{f - \tan \alpha \left(\frac{c}{4} \right)}{\left(\frac{2f}{c} + \tan \alpha \right)} \approx \frac{f - \alpha \left(\frac{c}{4} \right)}{\left(\frac{2f}{c} + \alpha \right)}$$

Resulta inmediato evaluar el efecto de la curvatura y la reacción de xCP frente a las variaciones de la incidencia. (Fig. 2.12).

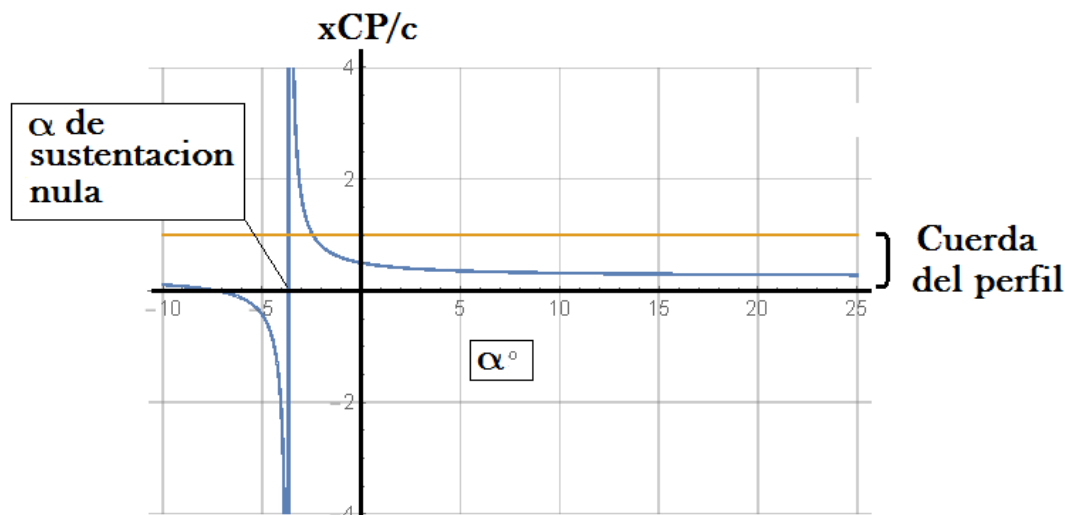


Figura 2.13: Movimiento del centro de presión de una placa plana con el ángulo de ataque para un perfil circular, según Eq. [2.6].

La gráfica (2.12) muestra el comportamiento con la variación del ángulo de ataque de la posición del centro de presión - $\frac{x_{CP}(\alpha)}{c}$ - para un perfil circular.

Se debe también mencionar que, independientemente del limitado grado de difusión de los trabajos de Kutta y de Zhukowsky, y de su continuación por otros estudiosos alemanes y rusos, la hipótesis de la aparición “ex novo” de un valor no nulo de la circulación en el seno de un fluido ideal en el que previamente no la había, se vio fuertemente contestada por la Escuela³² de Matemática Aplicada de Cambridge, que representaba un punto de vista intensamente teórico, y consideraba “arbitraria” la aparición de esa circulación cuya posibilidad parecía excluir la teoría aerodinámica vigente (Teorema de Kelvin, [75]).

El enfrentamiento [33] entre dos consolidadas tradiciones académicas, una británica y la otra alemana, más sensible ésta última a conformar modelos teórico-prácticos útiles en ingeniería, generó un enfrentamiento que ralentizó significativamente la aceptación en el Reino Unido de la teoría que desarrollaron Kutta, Zhukowsky, y también Prandtl [70], Munk [69] y Glauert [71]. En forma embrionaria, con sugerencias bien orientadas pero sin formato matemático, Lanchester había descrito en 1907 [9] una teoría que apuntaba en esa misma dirección.

³² Pertenecieron a esta escuela, entre otros, A. G. Greenhill, G. H. Bryan, L. Bairstow, H. Lamb, G. I. Taylor, H. Jeffreys y H. Glauert. Este último, al contrario que sus colegas -quizás por su formación en Gotinga-, apoyaba y difundió la teoría circulatoria.

2.7 Conclusiones.

- (1) Estas breves indicaciones permiten vislumbrar que en los años en los que da comienzo la investigación del vuelo artificial, los primeros estudiosos tenían dificultades para obtener datos aerodinámicos fiables a partir de las pocas y dispersas fuentes científicas disponibles. Y esto respecto de algunos puntos fundamentales:
- (2) Los primeros investigadores medían la fuerza aerodinámica para incidencias variables a partir de la placa sometida a una corriente perpendicular, e iban -como ya se ha dicho- disminuyendo gradualmente la incidencia y continuando sus mediciones, hasta llegar a valores pequeños de α . Así, durante estos experimentos, el flujo permanecía desprendido en buena parte del rango de incidencias analizadas. Sin embargo a partir de cierto valor de α , cambiaba el régimen aerodinámico y el flujo se adhería sustancialmente al perfil alar. El comportamiento de la placa se veía alterado en un sentido favorable para el vuelo. A partir de esa transición, se podía hablar de centro aerodinámico en el sentido moderno del término, aunque faltase todavía el concepto y su aplicabilidad.
- (3) Obsérvese que, de acuerdo con las teorías de Kutta y Zhukowsky, el efecto debido a la incidencia y el efecto sustentador debido a la curvatura, resultan ser aditivos, y si los resultados en dos dimensiones son, de alguna manera, extrapolables a un ala tridimensional, el diferente punto de aplicación de la fuerza resultante generada por cada uno de estos dos efectos insinúa inmediatamente un modo sencillo de tratar matemáticamente el problema de la expresión del centro de presión y también la controlabilidad del momento de cabeceo global.
- (4) Todo esto exige que se cumpla la condición de α pequeño para evitar el desprendimiento de la corriente. Este aspecto del problema -tratar de evitar el desprendimiento- está todavía en la prehistoria de su investigación. Se estudia la fuerza aerodinámica sobre la placa considerándolo un fenómeno físico dotado de "continuidad" desde $\alpha = 90^\circ$ hasta $\alpha = -90^\circ$. Evidentemente, existe continuidad física, pero el régimen aerodinámico no puede ser considerado del mismo tipo a lo largo de todo el margen de α .
- (5) No se tiene una teoría aerodinámica coherente con los experimentos y matemáticamente bien establecida, sobre la influencia de la forma en planta del ala sobre la fuerza de sustentación y de la resistencia aerodinámica, en función de la velocidad y de la incidencia, en particular para bajas incidencias. Tampoco es claro el comportamiento de la línea de acción de la resultante de la presión sobre el ala frente a las variaciones de la incidencia [79].

- (6) Por estas razones el estudio de la estabilidad, que exige trabajar con las ecuaciones dinámicas y con los factores físicos modelizados de forma realista, resultaba difícil.
- (7) No obstante, si incorporamos la hipótesis de incidencia pequeña a las fórmulas para $f(\alpha)$ en placas planas, mencionadas en la tabla (2.3), obtenemos:

Isaac Newton [37]:	$f(\alpha) \approx \alpha^2$ (placa cuadrada)
Duchemin [48]	$f(\alpha) \approx 2.57\alpha$ (placa cuadrada)
Col. Renard [63]:	$f(\alpha) \approx 2\alpha$
Hastings [40]	$f(\alpha) \approx 2\alpha$
Riabuchinsky, Inst. de Koutchino [19]	$f(\alpha) \approx 2\alpha$ (placa cuadrada)
G. Eiffel [18], [19]	$f(\alpha) \approx 2.29\alpha$; ; $f(\alpha) \approx 1.91\alpha$
R. Soreau [62], [12]	$f(\alpha) \approx \alpha \left(1 + \left(\frac{2AR}{AR+1} \right)^2 \right)$
S. P. Langley [5] (Cualitativa)	$f(\alpha) = C \alpha^n \quad n > 1 \quad AR < 1$ $f(\alpha) = C \alpha^n \quad n < 1 \quad AR > 1$
Lord Rayleigh [52]:	$f(\alpha) \approx 1.785 \alpha$
De Louvrie [40]	$f(\alpha) \approx 2\alpha$
Hutton [40]	$f(\alpha) \approx 1.84\alpha$
Dorhandt y Thiesen	$f(\alpha) \approx 2\alpha$
Joëssel	$f(\alpha) \approx 2.56\alpha$
Goupil [51] y Luyties [76]	$f(\alpha) \approx 2\alpha$

Tabla 2.6: Valores para la función $f(\alpha)$ según diversas fuentes, con α pequeño.

- (8) Haciendo lo mismo con las fórmulas para calcular x_{CP} de la tabla (2.4) obtendríamos la tabla (2.7):

G. Avanzini, (1794) [2], [80]	$x_{CP}(\alpha) \approx 0.2c$
Thiesen [40] (Ala rectangular)	$x_{CP}(\alpha) \approx 0.3c$
Joëssel [42]	$x_{CP}(\alpha) \approx 0.195c$

R. Soreau [12]	$x_{CP}(\alpha) \approx 0.25c$
R. Soreau [12]. (Perfil circular) ³³	$\frac{x_{CP}(\alpha)}{c} \approx \frac{\alpha - \tan \beta}{2(a \tan \beta + b\alpha)}$
G. Greenhill [22] ³⁴	$x_{CP}(\alpha) \approx 0.312c$

Tabla 2.7: Valores para la función $\frac{x_{CP}(\alpha)}{c}$ según diversas fuentes, con α pequeño.

(9) Es decir, las expresiones para $f(\alpha)$ y $x_{CP}(\alpha)$ de los primeros investigadores, - con las que pretenden abarcar -en algunos casos- el rango de ángulos de incidencia $\{0 \leq \alpha \leq 90^\circ\}$, - presentan un aspecto muy diversificado, pero las cosas se presentan con una uniformidad mucho mayor cuando se trata de los ángulos de incidencia apropiados para el vuelo. También, de modo muy conveniente, se puede subrayar que la posición del centro de presión para placas planas resulta prácticamente independiente de la incidencia, aunque no sea así desde un punto de vista estrictamente matemático-formal.

(10) Puede ser interesante mostrar las diferencias entre el modo de presentar el comportamiento aerodinámico por parte de los pioneros y el que terminó siendo adoptado, siempre para pequeñas incidencias. (Tabla 2.8)

Aquí la sustentación (L) es normal a la trayectoria, y la resistencia (D) es tangente a la trayectoria.

Expresiones iniciales de pioneros	Expresiones consolidadas
Resultante normal a la placa	R no necesariamente normal a la placa
$R = K S V^2 f(\alpha)$	$R = \frac{1}{2} \rho S V^2 \sqrt{(CD_0 + K CL^2)^2 + CL^2}$
Resultante Sustentación	Resultante sustentación
$F_N = R \cos \alpha = K S V^2 f(\alpha) \cos \alpha$ $C_N = f(\alpha) \cos \alpha \approx f(\alpha)$	$F_N = L = \frac{1}{2} \rho S V^2 CL$ $C_N = CL$
Resultante Resistencia	Resultante resistencia
$F_N = R \sin \alpha = K S V^2 f(\alpha) \sin \alpha$ $C_T = f(\alpha) \sin \alpha$	$F_T = D = \frac{1}{2} \rho S V^2 (CD_0 + K CL^2)$ $C_T = (CD_0 + K CL^2)$
Coefficiente Sustentación (Equivalente)	Coefficiente sustentación
$CL = f(\alpha) \cos \alpha$	$CL = \left(\frac{\partial CL}{\partial \alpha} \right) \alpha + CL_0$
Coefficiente Resistencia (Equivalente)	Coefficiente resistencia

³³ Constantes a, b y β no determinadas por Soreau.

³⁴ Teoría aerodinámica de flujo desprendido.

$CD = f(\alpha) \sin \alpha$	$CD = CD_0 + K \left(\left(\frac{\partial CL}{\partial \alpha} \right) \alpha + CL_0 \right)^2$
------------------------------	---

Tabla 2.8: Comparación entre los valores asumidos por los pioneros y los aceptados actualmente para algunas funciones aerodinámicas características.

- (11) Se observa que hoy tenemos una especificación más detallada en la identificación de los componentes de las fuerzas aerodinámicas. Esto, junto con la constatación experimental de que, para un ala sin curvatura y ángulos de incidencia pequeños, el movimiento del centro de presión es poco influyente, permitirá más adelante establecer una base conceptual sólida para el análisis de la estabilidad de los aviones. Sin embargo, para los pioneros, las cosas no se presentaban con tanta nitidez.
- (12) Naturalmente, a todo lo anterior se añade el hecho de que se omite la consideración de los efectos de compresibilidad cuya influencia, mencionada explícitamente por algunos investigadores, se estimaba irrelevante para las velocidades de vuelo alcanzables por los primeros aviones.

2.8 Anexo I. Centro Aerodinámico y Centro de presión.

Un perfil con curvatura genera sustentación por dos razones: (1) por ángulo de ataque (α) y (2) por curvatura. El coeficiente de sustentación acumula los dos efectos, pero uno de ellos varía con la incidencia y el otro no. La sustentación total variará también con el cuadrado de la velocidad y la densidad. (Fig. 2.14 y Fig. 2.15)

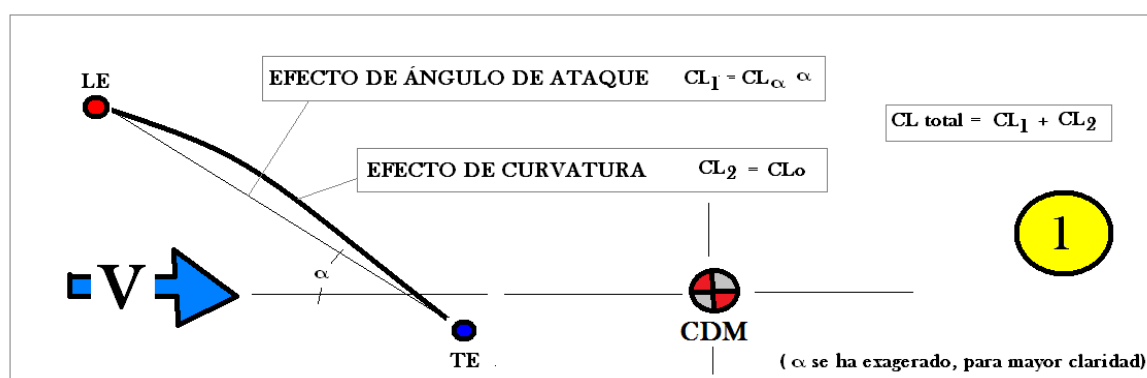


Figura 2.14: Sustentación generada por un perfil curvo: dos componentes; uno depende de (α): $CL_1 = CL_\alpha \alpha$; el otro $CL_2 = CL_0$ es constante.

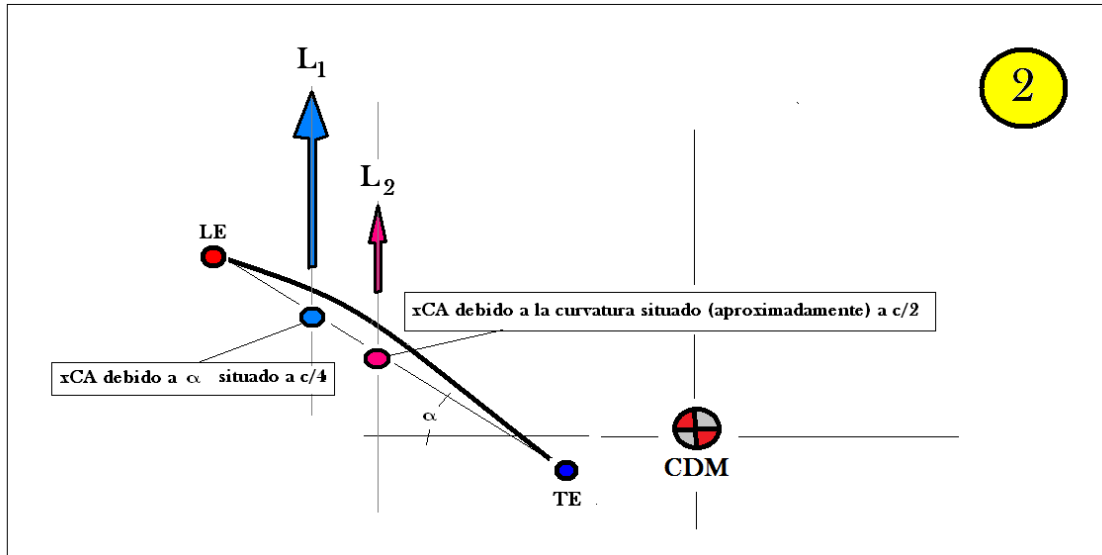


Figura 2.15: Sustentaciones debidas al ángulo de ataque (L_1) y a la curvatura (L_2), con sus Líneas de acción (Aproximadas).

Para establecer el equilibrio, desde el descubrimiento de la existencia del centro aerodinámico, se procede así: las sustentaciones se trasladan al punto aquel en el que se concentra la sustentación debida al ángulo de ataque- (Fig. 2.16) - y reflejamos también el momento que la sustentación debida a la curvatura genera respecto de ese mismo punto, que no cambia con (α) El esquema conceptual se simplifica notablemente.

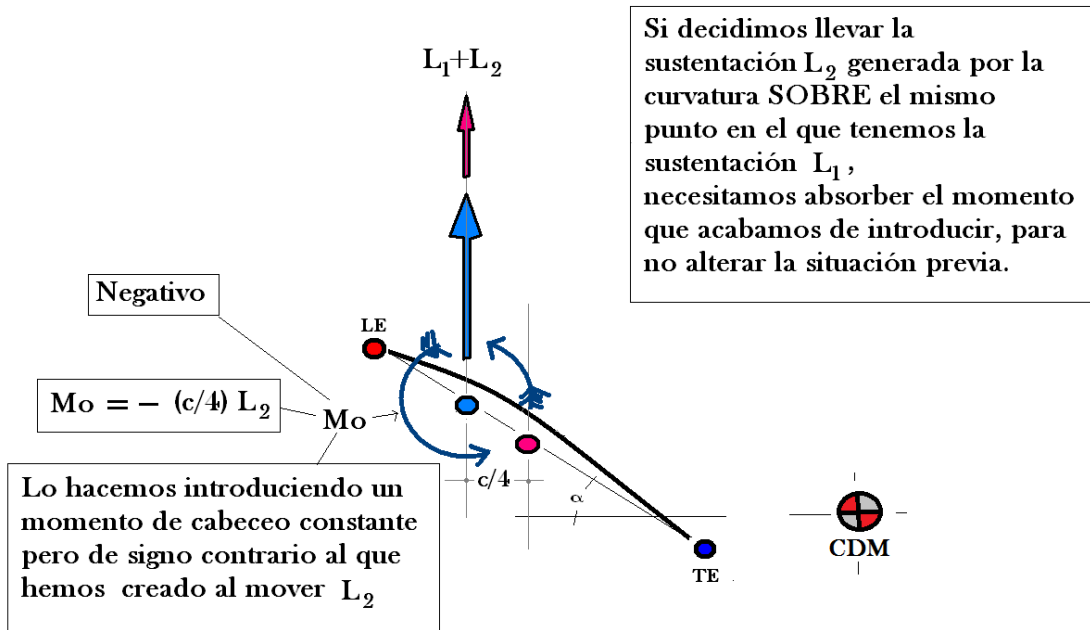


Figura 2.16: Sistema equivalente para un perfil curvo.

Se debe recordar que esto solamente es válido para el margen lineal de valores del ángulo de ataque.

2.9 Anexo II. La Ley de Avanzini.

Llama la atención el hecho de que un número muy elevado de pioneros considera oportuno aceptar la denominada Ley de Avanzini³⁵, que establece la dependencia de la posición del centro de presión de una placa plana en función del ángulo de ataque (medido desde el borde de ataque y siendo c la cuerda), según la expresión:

$$\frac{x_{CP}}{c} = (0.2 + 0.3 \sin \alpha) \quad [\text{Add.01_01}]$$

Según esto³⁶, para $\alpha = 0$ el centro de presión se halla en el punto $x_{CP} = 0.2c$ y retrocede a medida que el ángulo α aumenta. Se sobreentiende que los valores de α son positivos.

Desde el punto de vista aeronáutico, el valor máximo aceptable para α viene dado por aquel en el que comienza la entrada en pérdida, que denominamos α_{Stall} . Observemos que esta limitación no existe en la mente de Avanzini, que considera su ley aplicable hasta el punto correspondiente a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (90°) para el que tenemos, de acuerdo con los experimentos,

$$\frac{x_{CP}}{c} = (0.2 + 0.3 \sin \alpha) \Big|_{\alpha=90^\circ} = 0.5 \quad [\text{Add.01_02}]$$

Así sucede para una placa situada normalmente a la corriente. Para uso aeronáutico, restringiendo los valores del ángulo a α pequeños, podremos asumir:

$$\frac{x_{CP}}{c} \approx (0.2 + 0.3\alpha) \quad \text{con: } \alpha \leq \alpha_{Stall} \quad [\text{Add.01_03}]$$

³⁵ Giuseppe Avanzini, nacido en Gaino (Brescia, Italia) en 1753. Ordenado sacerdote católico en 1777; catedrático de física general y matemática aplicada en la universidad de Padua, presidente de la Facultad de Ciencias de esta Universidad y miembro de la *Accademia Nazionale delle Scienze*. Autor de relevantes trabajos experimentales sobre la dinámica de los fluidos y la aerodinámica. Falleció en Padua en 1827.

³⁶ Puede mencionarse también una ley cuya expresión matemática es muy parecida a la de Avanzini, debida a Jöessel, que es posterior al investigador italiano.

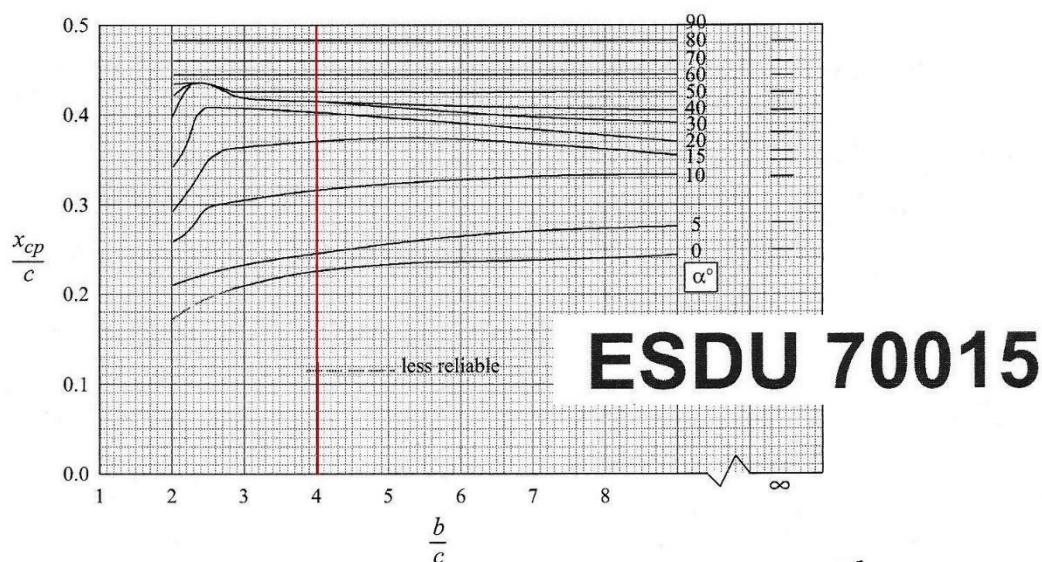
Si, por hacer más gráfico el argumento, nos ceñimos ahora en nuestro estudio a una placa tal como la que describe Lanchester³⁷ en “Aerodnetics” (1908), a la que denomina “*Ballasted Airplane*”, y que consiste en un pequeño rectángulo de mica, cuyas dimensiones son:

$$c = 5.08 \text{ cm} \quad b = 20.32 \text{ cm} \quad t = 0.01 \text{ cm}$$

Elegimos, para averiguar el comportamiento real del centro de presión de esta placa y poder efectuar comparaciones entre el comportamiento asumido por los primitivos y la realidad, a una fuente documental actual de reconocido prestigio³⁸, y un estudio CFD realizado³⁹ por el DMMT de la UPV.

El gráfico de x_{CP} en función de α se muestra, para diversas placas rectangulares, en el gráfico siguiente:

(Para nuestro caso, $b/c=4$; marcado en rojo)



VARIATION OF CENTRE OF PRESSURE POSITION WITH $\frac{b}{c}$ AND α ,
RECTANGULAR AND ELLIPTICAL PLATES, $\frac{b}{c} \geq 2$

Fig. Add.01_01

El comportamiento del centro de presión para esta placa, de acuerdo con la ley de Avanzini, comparado con ESDU 70015, y también con una versión de la Ley de Avanzini modificada por Eiffel, para valores aeronáuticamente aceptables de α , sería como se muestra en la figura (Add.01_02):

³⁷ Lanchester estudia el comportamiento en vuelo de planeo de la lámina descrita.

³⁸ ESDU 70015: “*Fluid forces and moments on flat plates*”. (1972).

³⁹ El trabajo CFD ha sido efectuado en su totalidad por P. Quintero Igeño, Ingeniero Aeroespacial por la Universitat Politècnica de València.

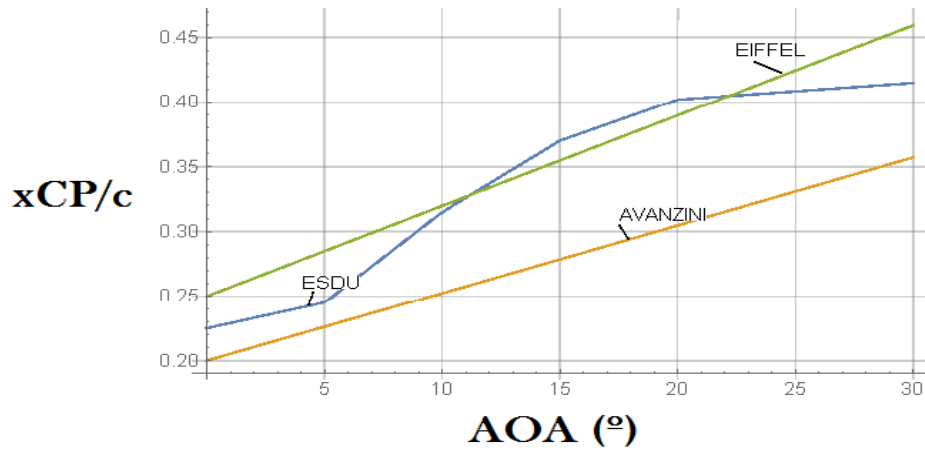


Fig. Add.01_02

Un indicativo del rango del comportamiento lineal de la sustentación viene dado por el coeficiente C_N de la misma placa anterior (en rojo), tal como puede verse en el siguiente gráfico (Fig. Add.01_03). Puede verse que para $\alpha \approx 12^\circ$ ya se pierde la linealidad con el ángulo de ataque.

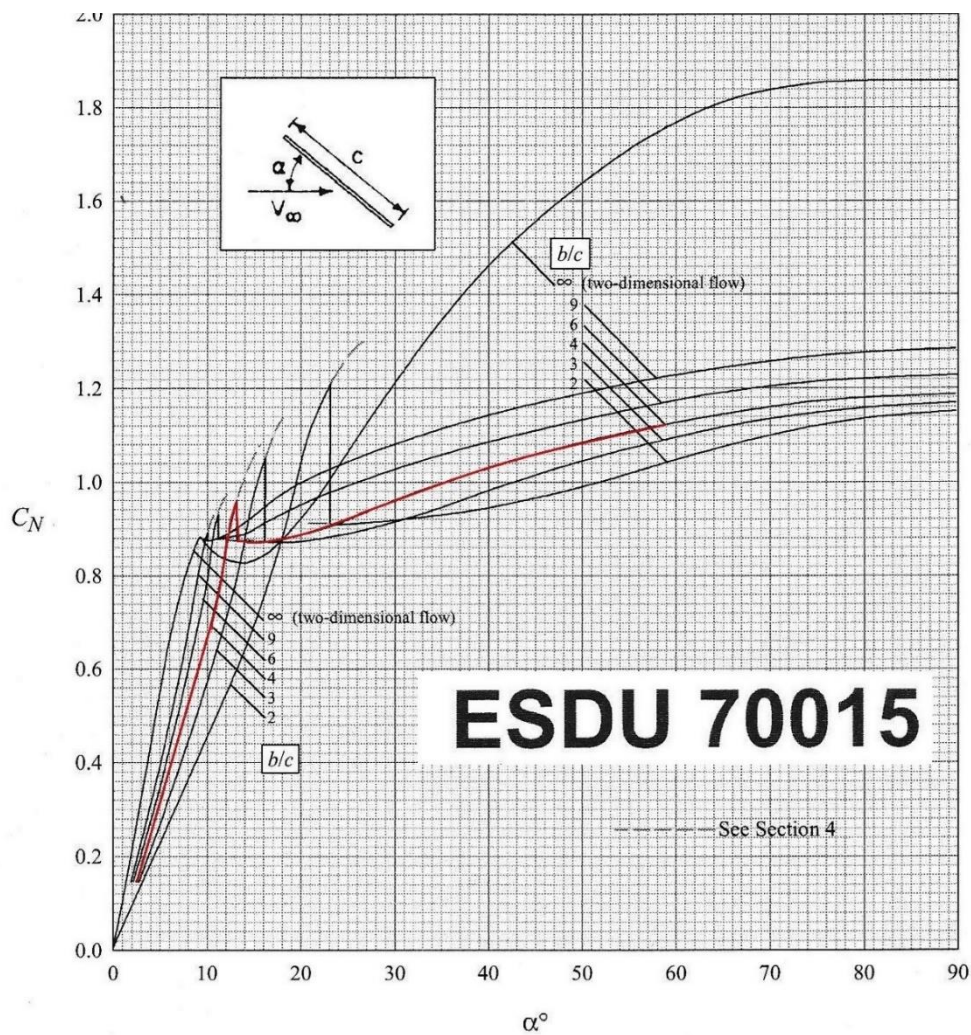


Fig. Add.01_03

Existe, en la Ref. ESDU 70015, una nota cautelar que indica que se deben considerar menos fiables los resultados de las mediciones realizadas con ángulos comprendidos entre $0^\circ \leq \alpha \leq 10^\circ$. Esto, lamentablemente, abarca una parte muy importante del rango de ángulos interesantes para la aviación.

El análisis CFD de la placa conduce a los siguientes resultados, graficados aquí solamente para una velocidad de la corriente de 3.5 m/s y $\alpha = 4^\circ$ (Fig. Add.01_04 a 09)

Para la presión extradós en la placa:

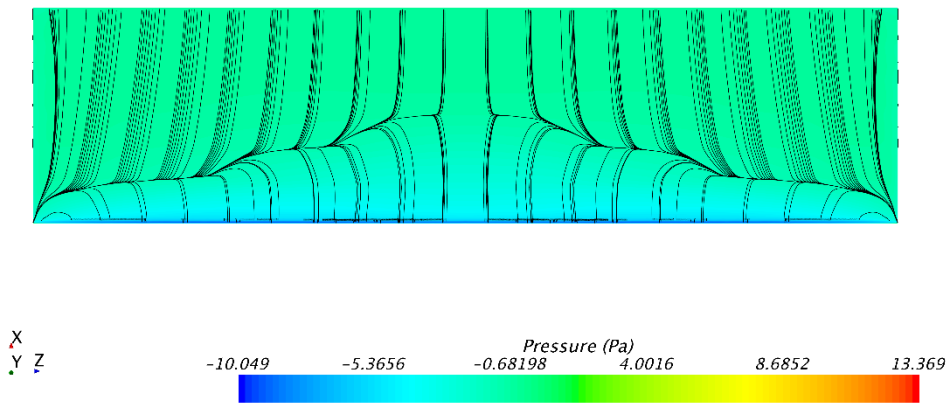


Fig. Add.01_04

Para la presión intradós en la placa:

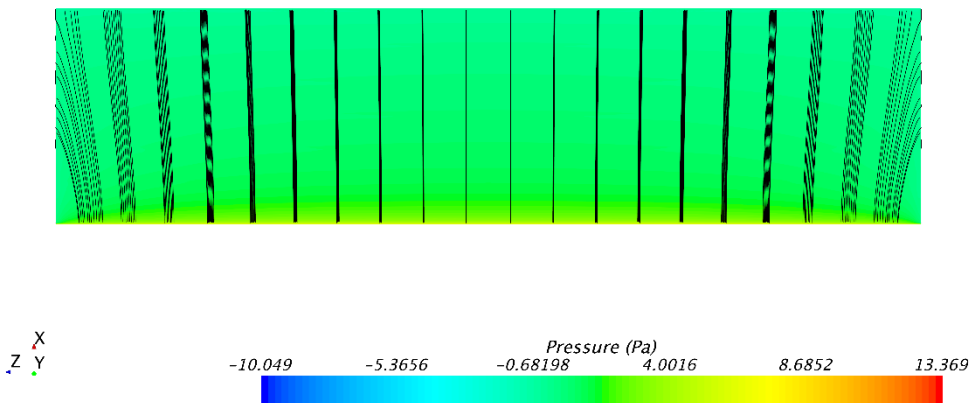


Fig. Add.01_05

Para la velocidad lateral cercana:

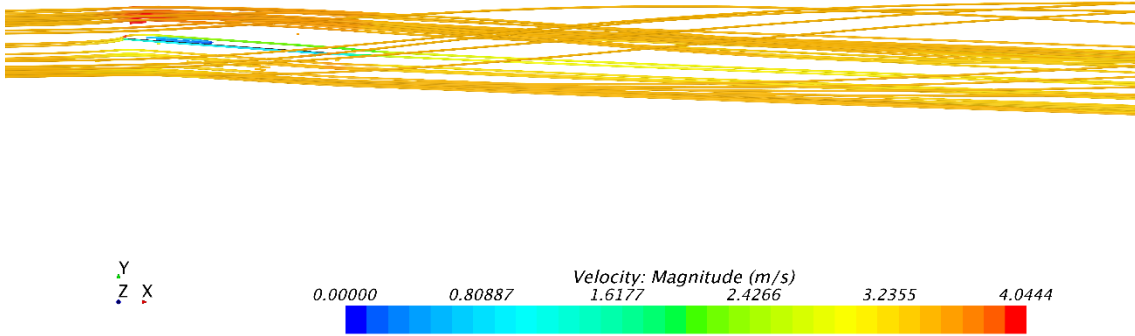


Fig. Add.01_06

Para la velocidad en el extradós:

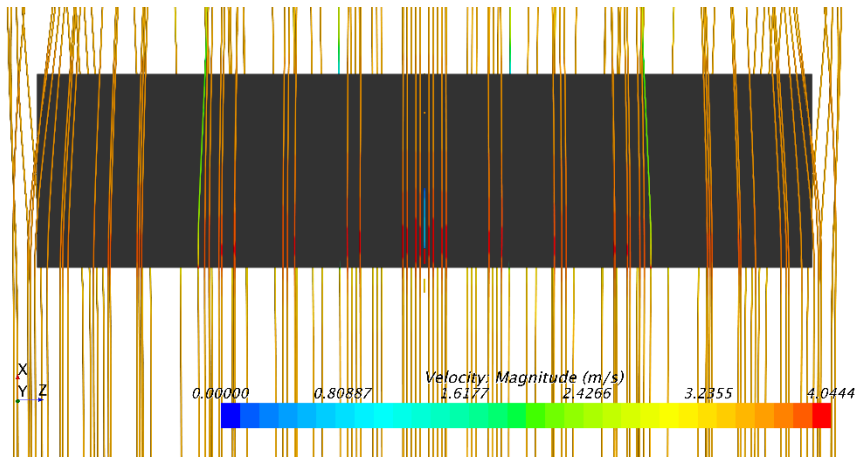


Fig. Add.01_07

Para la velocidad frontal:

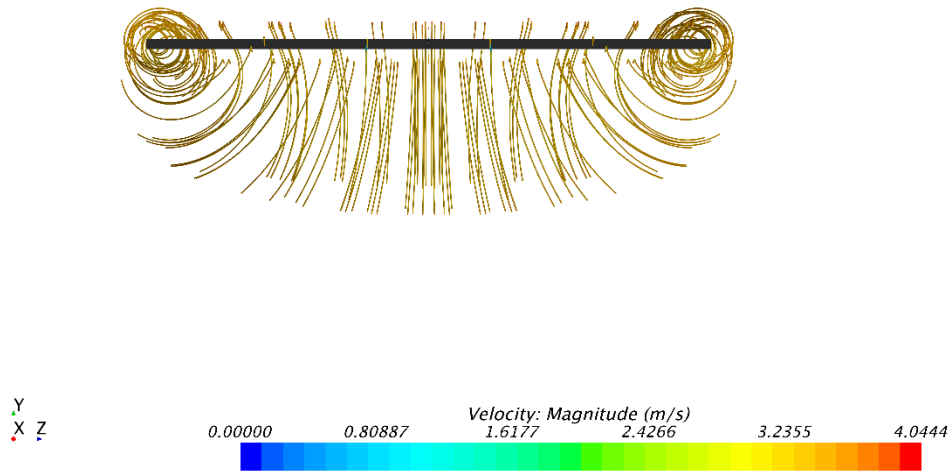


Fig. Add.01_07

Para la velocidad isométrica:

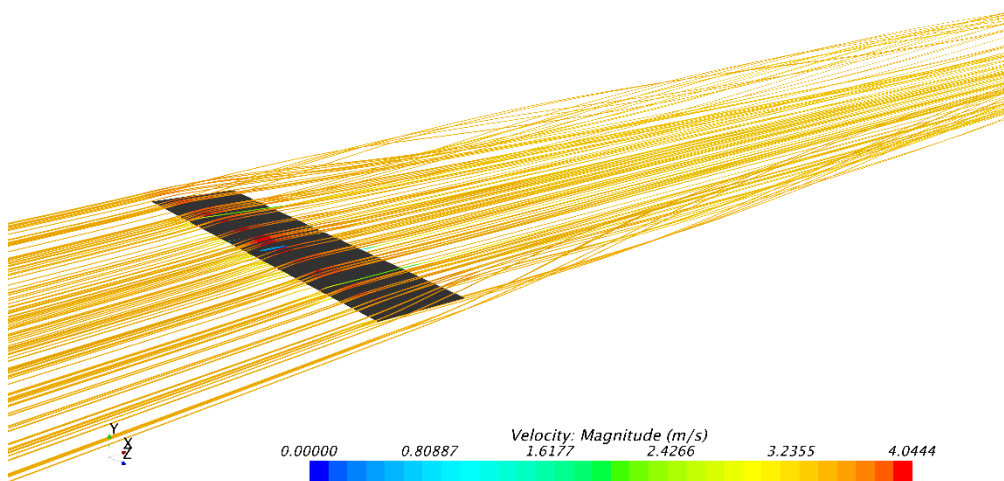


Fig. Add.01_08

Es llamativa la importancia de la burbuja de recirculación que aparece, en gran parte debida a la presencia del borde delantero no redondeado.

Los resultados numéricos correspondientes al x_{CP} se muestran en la Fig. Add.01_09:

Ballasted Airplane (W. F. Lanchester)

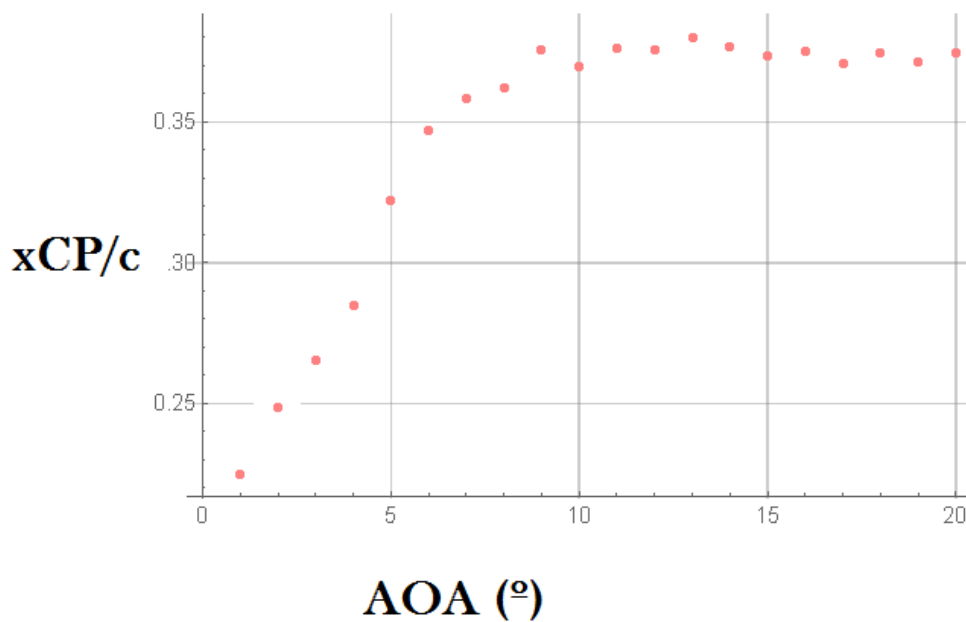


Fig. Add.01_09

Podemos concluir, por tanto, que los pioneros no andaban muy descaminados en su aceptación de la Ley de Avanzini, siempre que estuviesen trabajando con placas planas de espesor constante y pequeño.

La cuestión cambió radicalmente cuando los investigadores detectan que es posible mejorar mucho el comportamiento aerodinámico de la placa mediante su modificación y paulatina conversión en un perfil optimizado que evita los bordes frontales y finales bruscos.

La placa plana de espesor constante, que ha constituido durante mucho tiempo el modelo paradigmático para la investigación del comportamiento aerodinámico de las superficies, deja de verse favorecida como posible elemento de superficie sustentadora, pues prontamente se detecta la conveniencia de la adopción de una forma de perfil bidimensional fuselado (y también dotado de curvatura) que mejora el comportamiento real de la corriente de aire, aproximándolo al ideal, y permitirá detectar en experimentos en túneles de viento la independencia de la posición del centro de presión respecto de α -en perfiles sin curvatura- dentro del rango lineal del ángulo de ataque, y aceptar paulatinamente, no sin reticencias ya mencionadas en el Cap. 2, la verosimilitud de las hipótesis y la fiabilidad de los cálculos que realizó Kutta en 1902 y 1910.

Bibliografía.

- [1] Lilienthal, O. *“Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Ein Beitrag zur systematik der Flugtechnik”*. Berlin: R. Gaertners Verlagbuchhandlung. (Ed. de American Aeronautical Archives; Markowski International Publishers, One Oakglade Circle, Hummelstown, PA 17036 USA. Email: amaeroarch@aol.com) (1889).
- [2] Zhukowsky, N. E. “Collected Papers”; (Vol 5), 1891. *“On Soaring of Birds”* (22-10-1891). Boletín de la Sociedad Aeronáutica de Moscú. Núm. 1-3. (Reprint, de Bureau of Foreign Science and Technology, Berlin. (1922).
- [3] Chanute, O. “Progress in Flying Machines”, 1894. Ed. Lorenz & Herweg, Publishers. Long Beach, CA. (1976).
- [4] Langley, S. P. “Langley Memoir on Mechanical Flight”, Part. I (1887 to 1896). Smithsonian Contributions to Knowledge, Vol. 27, No 3. Washington, (1911).
- [5] Langley, S. P. “Experiments in aerodynamics”, Smithsonian contribution to Knowledge, No 801. Washington. (1902).
- [6] Bryan, G. H. & Williams, W. “The longitudinal stability of aerial gliders”. *“Proc. Roy. Soc. London”*, ser. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).

- [7] Ferber, F. “L’AVIATION, Ses debuts-son développement”. Berger-Levrault & Cie Éditeurs. Paris/Nancy. (1909).
- [8] Moedebeek, H. W. L. & Chanute, O. & others. “Pocket-Book of Aeronautics”. London. Whittaker & Co. 2 White Hart Street, Paternoster Square, E. C. and 64 & 66 Fifth Avenue, New York. (1907).
- [9] Lanchester, F. W. “Aerodynamics, constituting the first volume of a complete work on Aerial flight”. D. VAN NOSTRAND COMPANY. London. (1907).
- [10] Lanchester, F. W. “Aerodnetics, constituting the second volume of a complete work on Aerial flight”. Archibald Constable & CO. LTD. Orange Street Leicester Square. London. (1908).
- [11] Maxim, H. “Natural and artificial flight”, 1908. (Trad. “Le vol naturel et le vol artificiel”, Maxim-Espitallier, Dunod et Pinat, Paris (1909).
- [12] Soreau, R. “L’Aviation”, 1908. “État actuel et avenir de l’aviation”, Librairie des sciences aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS. (1908).
- [13] Baden-Powell, B. “Practical Aerodynamics and the Theory of the Aeroplane”. Aeronautics Office: 27, Chancery Lane, London, W. C. (1909).
- [14] Loughheed, V. “Vehicles of the Air”, a Popular Exposition of Modern Aeronautics with Working Drawings; Publishers: The Reilly and Britton Co. Chicago; USA. (1909).
- [15] Ferber, F. “L’AVIATION. Ses Débuts-son développement”. Berger-Levrault & Cie. Éditeurs. Paris. Nancy; 5^a Ed. (1909).
- [16] Wright, W. & O. “The early history of the Airplane”, Pub. The Dayton-Wright Airplane Co. Dayton-OHIO. (1909).
- [17] Chanute, O. Jackman W. J. & Russell Thos. H. “Flying Machines: Construction and Operation”; The Charles C. Thompson CO. (Not. Inc.) Chicago. USA. (1910).
- [18] Eiffel, G. “La Résistance de l’Air et l’Aviation”; Expériences effectuées au Laboratoire du Champ-De_Mars. H. Dunod et E. Pinat, Éditeurs. Paris (1910).
- [19] Eiffel, G. “La Résistance de l’Air”, Examen des Formules et des Expériences, H. Dunod et E. Pinat, Éditeurs. Paris (1910).
- [20] Gaston, X. “Les Aeroplanes de 1910”, Étude technique avec plans cotés pour la plupart des principaux Aeroplanes existant au début de 1910. Librairie Aeronautique, 32 Rue Madame, Paris. (1911).
- [21] Bryan, G. H. “Stability in Aviation”. “*An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motions of Airplanes*”. By G. H. Bryan⁴⁰, Sc. D., F. R. S. MACMILLAN AND CO. LTD; ST. MARTIN`S STREET, LONDON, (1911).

⁴⁰ Con la colaboración -dadas las características del texto, nada despreciable- de G. H. Harper.

[22] Greenhill, G. “The Dynamics of Mechanical Flight”, Lectures delivered at the Imperial College of Science and Technology, March 1910 and 1911. London. Constable and Company Ltd. (1912).

[23] Hubbard, T O’B; Ledeboer, J. H; Turner, C. C. “The Aeroplane”, an elementary text-book of the principles of mechanical flight. Longmans, Green & CO. 39 Paternoster Row, London. (1911).

[24] Painlevé, P. & Borel, E. “L’Aviation”, Librairie Félix Alcan; Boulevard Saint-Germain, Paris. (1911).

[25] De Bothezat, G. “Étude de La Stabilité de l’Aeroplan”, Thèse pour le Doctorat présentée a la Faculté des Sciences de L’Université de Paris. H. Dunod et E. Pinat, Éditeurs. (1911).

[26] Hubbard, T. O., Ledeboer, J. H. & C. C. Turner, C. C. “The Aeroplane”, Longmans, Green & CO. 39 Paternoster Row, London. (1911).

[27] Duchêne, E. A. “The Mechanics of the Aeroplane” a Study of the Principles of Flight (Traducida del francés por Ledeboer, J. H.); Longmans, Green & CO. 39 Paternoster Row, London. (1912).

[28] Lanchester, F. W. “The Flying Machine from an engineering standpoint”, (James Forrest Lecture 1914). D. Van Nostrand Company. 25 Park Place, 1918.

[29] Hunsaker, J. “Dynamical Stability of Airplanes”, Proceedings of the American Academy; Boston. (1916).

[30] De Villamil, R. “Resistance of Air”, E. & F. N. Spon, Ltd., 57 Haymarket, S. W. 1. London. (1917).

[31] Kutta, W. M. “Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten”; Illustrierte Aeronautische Mitteilungen, 6, (133-135),. Tesis de Habilitación para la Technische Hochschule de Múnich. (No existen copias. Se conserva un sumario publicado en 1902). (1902).

[32] Kutta, W. M. “Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung”, Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang, 2. Abhandlung. (1910).

[33] Bloor, D. “The Enigma of the Aerofoil”; Univ. of Chicago Press, (2011).

[34] Von Mises, R. “*Theory of Flight*”, McGraw Hill, New York. (1945).

[35] Sée, A. “Les Lois Expérimentales de L’Aviation”, Gauthiers-Villars, Imprimeur-Librairie, du Bureau des Longitudes, de L’École Polytechnique de Paris. (1912).

[36] Hoerner, S. F. “Fluid Dynamic Drag”, Publ. by the Author. New Jersey. USA. (1965).

[37] Newton, I. “Philosophia Naturalis Principia Mathematica”; Prop. XXXVII, Book II, (Ed. Daniel Adee, 45 Liberty Street. New York). (1678).

[38] Wright, W. & O. “The Papers of Orville & Wilbur Wright”; Vol I, 1899- 1905. Including the Chanute- Wright letters and other papers of Octave Chanute. Sponsored by Oberlin College on the Wilbur-Orville Wright Memorial Fund and

prepared for the Press with notes, appendices, and bibliography by the Aeronautics Division of the Library of Congress. Mervin McFarlan, Editor. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York. (1953).

[39] Toussaint, A. "L'Aviation Actuelle"; Librairie Félix Alcan, 108 Boulevard Saint-Germain, 108. Paris. (1928).

[40] Cleveland, G. & Loening, G. C. "Monoplanes and Biplanes", New York, Munn & Company, Inc. (1911).

[41] Gibbs-Smith, C. H. "The invention of the Aeroplane"; (1799-1909); Faber and Faber. 24 Russell Square. London. (1966).

[42] Joëssel. "Rapport sur des expériences relatives aux gouvernails"; Repport 9; "Mémorial du Génie Maritime", 1873. Como curiosidad merece la pena mencionar que la fórmula de Joëssel para el centro de presión es mencionada como referencia complementaria para cálculos hidrodinámicos de timones de barcos en textos tan relativamente recientes como el de K. J. Rawson & E. C. Tuper, "Basic Ship Theory", LONGMAN, USA. (1983).

[43] Kummer, E. E. "Über die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt ins besondere sauch auf die Geschosse", Berlin. Bachdruckerei der Königl. Akademie der Wissenschaften; (G. Vogt), Universitäts -strassen, 8, (1875).

[44] Beaufoy, Col. M. "Nautical and Hydraulic Experiments, with numerous Scientific Miscellanies", Vol. I. Private Press of Fleury Beaufoy. London, (1834).

[45] Lagerhjelm, P. Forselles & Kallstenius. Incluido en Ref. [44]. (1811).

[46] Rennie, "On Resistance of Bodies in Air", Trans. Royal Society, p.423. (1831).

[47] Didion, I. "Traité de Balistique", J. Dumaine, Librairie-Éditeur de L'Empereur / Mallet-Bachelier, Imprimeur-Librairie de L'École Polytechnique du Bureau de Longitudes. Paris, (1860).

[48] Duchemin, N. V. "Récherches expérimentales sur les Lois de la Résistance des Fluides". (Mémorial de l'Artillerie, V). Imp. Bachelier, Paris. (1842).

[49] Poncelet, J. V. "Introduction à la mécanique industrielle, physique ou expérimentale; Imp. Gauthier-Villars (Paris) (1870).

[50] Recknagel, G. "Über Luftwiderstand", Annalen der Physik, Vol 246, Is. 8, (677-694); 1880./ Zeit. Ver. Deut. Ing. (1886).

[51] Goupil, "Au tour du coefficient K. Pour le calcul d'un Aéroplane". L'Aérophile, 16^o année, No. 23, pp. 484-485. Paris. (1908).

[52] Rayleigh, L. "On the Resistance of Fluids", Philosophical Magazine, Vol 2; 13. Edinburgh. (1876).

[53] Cailletet, L. P; Collardeau, E. "Recherches expérimentales sur la chute des corps et sur la résistance de l' air à leur mouvement. Expériences exécutées à la Tour Eiffel". L'Aéronaute, 25^o année, No. 7, Paris. (1892).

- [54] Pole, W. “Sur la Resistance de l’air au point de vue de la navigation aérienne”. Proc. Inst. Civ. Eng. Vol. 69, Pág. 205. (1886). [*]
- [55] Renard, Ch. “Nouvelles expériences sur la Resistance de l’Air”, Rev. L’Aéronautique, año 2, Enero, Pág. 31. Paris. (1889).
- [56] Canovetti, C. “Études sur la Résistance de l’air”. “L’Aerophile”, año 10, No. 6. Pág. 140-144. Paris. (1902).
- [57] Hazen, A. “American Journal of Science”, Vol. 234, Pág. 241. [*] (1894).
- [58] Dines, W. H. “On wind-pressure upon an inclined surface”; Proc. Roy. Soc. Vol. 48, Pág. 252. (1890).
- [59] Loessl F. R. Von, . “Die Luftwiderstand-gesetze der Fall durch die Luft und die Vogelflug”, Viena, Zeitschrift für Luftschiffahrt. Vol. 1, (1886).
- [60] Stanton, T. E. “Experiments on Wind Pressure”; Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Eng. Vol. 171; Part I. London. (1907-1908)
- [61] Voisin, G et C; Ferber, F et Joliot, A. “Sur le valeur de “K” en matière d’ Aviation”; “La Revue d’Aviation”, 2e année, p. 5, Paris. (1907).
- [62] Soreau, R. “Nouvelle Loi de la Resistance de l’Air”, Soc. Ing. Civ. Pag. 464, v. 2, Paris. (1902).
- [63] Renard, C. “L’Aviation”; Scientific American Supplement. Vol. 34, p. 12819. New York. (1892).
- [64] Zahm, A. F. “Resistance of the Air at speeds below one thousand feet a second”. Philosophical Magazine; Ser. 6. Vol 1, No 1. London. (1901).
- [65] Aspinall, J. A. F. “Train Resistance”, Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Vol. 147, p.155.
- [66] Russell, S. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, V. 5, p. 288.
- [67] Karamcheti, K. “*Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*”; 474 y ss. Krieger Publishing Company (1966).
- [68] Munk, M. “General Theory of thin wing sections”; NACA Report No. 142. (1921).
- [69] Munk, M. “The Determination of the Angles of Attack of zero Lift and of zero Moment based on Munk’s integrals”; NACA Technical Note No 122. (1923).
- [70] Prandtl, L. “Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics”, NACA Report 116. (1923).
- [71] Glauert, H. “The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory”. Cambridge. (1926). (Trad. “Fundamento de la Teoría del Ala y de la Hélice”; Pub. I. N. T. A. Madrid, 1946).
- [72] Cayley, G. “ON AERIAL NAVIGATION (I), (II), & (III)”, “*A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*” (London, (I) Nov. 1809, (II) Feb. 1810, Mar. 1810)
- [73] Zhukowsky, N. E. “Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger”, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt; (1910).

- [74] Fuch, R. Hopf y Seewald. "Aerodinámica", 1936. (INTA, Madrid, 1945)
- [75] Milne-Thomson, L. M. "Theoretical Aerodynamics", (Págs. 166, 184) DOVER, NY. USA. (1958).
- [76] Luyties, O. G. "On the resistance of air to the motion of plane surfaces", "American Magazine of Aeronautics, Vol 1, No. 3, pp. 10-13; New York. (1907).
- [77] Rateau, "Recherches Dynamiques". Aerophile, V. 17, P. 338. Paris.
- [78] Prandtl, L. "Mitt. Goettingen Aerodyn. Lab; Zeit. Für Flug. V." (1910).
- [79] Bothezat, Georges de. "Étude de la Stabilité de L' Aeroplane"; Thèse présentée a la Faculté des Sciences de Paris. Dunod et Pinat. (1911).
- [80] Avanzini, G. "Nuove riserche sulla resistenza de' fluidi"; Saggi scientifici e letterari dell' Academia di Padova; Padova; pp. 96-113. Contiene la famosa "Ley de Avanzini", sobre la posición del centro de presión de una placa. (1794).
- [81] De Borda, J. C. "Expériences sur la Résistance des fluides". Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Paris. (1763 y 1767).
- [82] Edgeworth, R. L. "Experiments upon the resistance of the air". Phil. Trans. Roy. Soc. 73. London (1782).
- [83] Hutton, C. "Abstract of experiments made to determine the true resistance of the air to the surfaces of bodies, of various figures, and moved through it with different degrees of velocity". Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 11. (1790).
- [84] Mouillard, L. P. "L'empire de l'air; essai d'ornithologie appliquée a la Aviation". Masson Editeur, Librairie de l'Académie de Medicine, 120. Boulevard Saint-Germain. Paris (1881).
- [85] Rayleigh, Lord. "On the resistance of fluids", Phil. Mag. Ser. 5. (1876).
- [86] Smeaton, "The Natural Powers of Water and Wind"; Philosophical Transactions, Vol. LI. (1759).
- [87] Hagen, G. "Messung des Widerstandes den Planscheiben erfhren wenn sie in normalen Richtung gegen ihre Ebene durch die Luft bewegt werden". Berlin. Akad. Anhandl. (1874).
- [88] Dines, W. H. "Some experiments made to investigate the connection between the pressure and the velocity of the wind". Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. Vol. XV. No. 72. London. (1889)
- [89] Dines, W. H. "On wind pressure upon an inclined surface". Proceedings of the Royal Society. Vol XLVIII.) London. (1890).
- [90] Mannesmann, O. "Messungen des Luftwiderstandes durch ein neues Rotationsapparat". (Trad. "Messure de la Résistance de l'air avec un nouvel appareil de rotation"). Annales de Wiedemann, Vol. LXVII. (1899).
- [91] Reichel, M. W. "Train électrique a marche rapide, par M. W. reichel, ingénieur chef de la société Siemens and Halske". Elektrotechnische Zeitschrift, (1901).

- [92] Finzi, G. e Soldati, N. “Experimenti sulla dinámica dei fluidi”. Milan. (1903).
- [93] Piobert, Morin et Didion, J. Mémorial de l’Artillerie, No 5. 1842. / Didion, J. “Recherches sur la plus grande vitesse que l’on peut obtenir par la navigation aérienne”; Metz. (1838).
- [94] Desdouits. “Application de la méthode rationnelle aux études dynamométriques, Appareils et procédés d’expériences. Resultats obtenus dans l’étude de la résistance des trains”. Annales des Ponts et Chaussées, 1, (1889).
- [95] Riabouchinsky. Bulletin de l’Institut aérodynamique de Koutchino. Golicke and Wiltborg. Saint Petersburg. Rusia. (1906).
- [96] Marchis, M. L. “Le navire Aérien”. Dunod et Pinat, Paris. (1909).
- [97] Ricour. “Experiments conducted in 1885 on the resistance of the air par Ricour”. L’Aéronaute, 30^e année, No. 5, pp. 110-112, Paris (1887).
- [98] Altmann, J., “Über die luftwiderstandsversuche des M. Canovetti und des M. L’Abbé Le Dantec”. Illustr. Mitt. No. 3. (Jul.) pp. 173-176. Strassburg. (1901).
- [99] Dupré, P., “La Résistance de l’air sur un plan augmente lorsque ce plan subit un déplacement lateral. Cause de cette augmentation”. L’Aéronaute, année 25, Abril pp. 75-82. Paris. (1892).
- [100] Marey, E. J. “Changement de direction et de vitesse d’un courant d’air qui rencontre des corps de forms diverses”. Comp. Rend. Acad. Sci. T. 132 (Junio, pp. 1291). Paris. (1901).
- [101] Marvin, C. F., “Wind Pressures and the measurement of wind velocity”. Amer. Meteor. Journ. Vol. 7. (pp. 487-497) Ann Arbor, Michigan. USA. (1891).
- [102] Ackroid, J. A., “Sir George Cayley, the father of aeronautics. Part 1. The invention of the aeroplane”. Notes Rec. R. Soc. London, 56. 167-181. (2002).
- [103] Euler, L., “Neue Grundsätze der Artillerie, aus dem Englischen des Herrn Benjamin Robins übersetz und mit vielen Anmerkungen Versegen” (Traducción del inglés al alemán de un documento de Benjamin Robins sobre los nuevos fundamentos de la Artillería, con muy abundantes comentarios de Euler). Berlin. (1745).
- [104] Mariotte, E. “Traité du mouvement des eaux”, Paris. (1686).
- [105] Simón Calero, J. “La Génesis de la Mecánica de Fluidos”, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid. (1996).
- [106] Robins, B. “New Principles of Gunnery”. Londres, (Vid. [103]) (1742).
- [107] Huygens, C. “Oeuvres Complètes”, Paris, (1735).
- [108] Euler, L., “Recherches plus exactes sur l’effect des moulins à vent”. Mém. Acad. Berlín, Vol 12. Citado por [105]. (1756).
- [109] Villamil, Col. R. de. “The Sine Square Law”, Aeronautics, Pág. 55-56. London. (1913).

[110] Giacomelli, R. y Pistolesi, E. “Aerodynamic Theory”; Vol. I. D. Historical Sketch; California Institute of Technology. (1934).

[111] Dubuat. “Principes d’hydrodynamique et d’hydraulique verifiés par un grand nombre d’expériences faites par ordre du gouvernement”; Paris. (1779).

[112] Duchemin, N. V., “Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents”. Société Française de Physique. (1801).

[113] Durand W. F. (Ed.). “Aerodynamic Theory”; Vol. 1, Part. D. Historical Sketch. Giacomelli, R. y Pistolesi, E. California Institute of Technology. (1934).

[114] Bairstow, L. “Applied Aerodynamics”; Longmans, Green & Co. London. (1920)

[115] Engineering Sciences Data Unit (ESDU). HIS Group. “Fluid Forces and Moments on Flat Plates”, No. 70011. (1970).

[116] Marchis, L., “Experimental Researches on the Resistance of Air”; NACA REPORT No. 12. (1917).

Capítulo 3

George Cayley (1773-1857)



41

*“You, to whom it may concern when I am gone,
may find the seeds of thought in these scrawls”*

Proemio del primer Cuaderno de Notas
de George Cayley, (Sin fecha; circa 1801)

Contenido

3.1 Nota biográfica

3.2 Documentos de referencia objeto de estudio.

⁴¹ <http://www.ctie.monash.edu.au/hargrave/cayley.html> (14/06/2017)

3.3 Descripción del contenido.

3.3.1 “*On Aerial Navigation*”, Parte I. (1809)

3.3.2 “*On Aerial Navigation*”, Parte II. (1810)

3.4 El timón horizontal móvil.

3.5 Sobre el planeador de 1804.

3.6 Sobre el planeador de 1808.

3.7 Sobre el planeador de 1818.

3.8 Sobre el planeador de 1849 (1858)

3.9 Sobre el “Governable Parachute”

3.10 Conclusiones.

Bibliografía.

3.1 Nota biográfica

George Cayley, nacido en Yorkshire (UK), estudió matemáticas y física con G. Walker, de Nottingham, y posteriormente con G. C. Morgan, en Hacknell College (London). Fue el primer investigador que comprendió los principios y las fuerzas que intervienen en el fenómeno del vuelo. Cayley en 1838 ayudó a la fundación del primer Instituto Politécnico del Reino Unido, *The Royal Polytechnic Institution* (actualmente pertenece a la Universidad de Westminster) y fue su director durante años. Miembro fundador de la *British Association for the Advancement of Science*, intervino en una amplia variedad de proyectos: botes salvavidas, ruedas de tensión, tractores, señalética automática para trenes, cinturones de seguridad, modelos de helicópteros. También hizo contribuciones en los campos de la electricidad, balística y óptica.

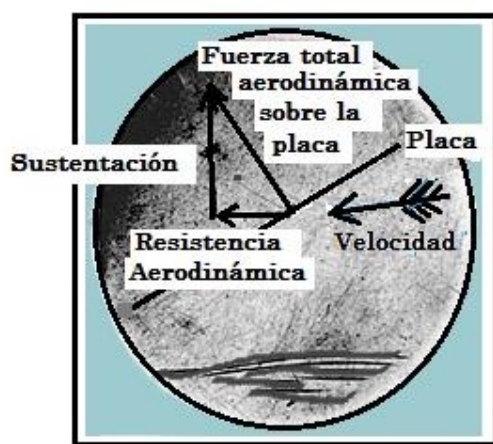
3.2 Documentos de referencia objeto de estudio.

“ON AERIAL NAVIGATION (I) y (II)”; “*A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*” (London, (I) Nov. 1809, (II) Feb. 1810).

3.3 Descripción del contenido.

Cayley, a partir de la observación de las aves, con certero sentido físico, instrumental propio y experimentos sencillos estableció una base aerodinámica racional para sus aparatos voladores, separando el problema sustentador del propulsivo (1799) (Fig.

3.0). No consideró acorde con la experiencia la difundida ley⁴² de sustentación proporcional a $\sin^2 \alpha$, tácitamente vigente desde Newton, y aceptó la del $\sin \alpha$, tal como preconiza –según afirma Cayley– la Academia de las Ciencias de Francia. Con un instrumento denominado “Brazo Giratorio” midió la posición del centro de presión de una placa plana, estudiando someramente la estabilidad longitudinal (1808). La configuración geométrica de algunos de sus modelos es precursora de los diseños actuales.



Medallón de Cayley (1799)
(Science Museum, London)

Figura 3.0: Esquema del Medallón de Cayley, mostrando la descomposición de la fuerza aerodinámica sobre la placa. (La velocidad aparece en forma de “flecha”).

3.3.1 “On Aerial Navigation”, Parte I. (1809)

Desarrollamos ahora el contenido de la Parte I, con referencia a la Fig. 3.1.

Tesis I. Para vuelo estacionario horizontal de un ave en un plano vertical, la velocidad, representada por el vector cd , incide sobre un ala que se considera plana y cuyo perfil visto lateralmente es ab y genera una fuerza aerodinámica resultante representada por el vector de , que Cayley supone perpendicular al ala plana.

Si el movimiento es estacionario la componente vertical de la fuerza de -el vector fe - deberá equilibrar el peso; por otra parte, la componente tangencial de la fuerza de Resistencia fd deberá ser contrarrestada mediante algún procedimiento propulsivo.

Cayley describe así⁴³ la dificultad fundamental que plantea el vuelo artificial (en cuanto a la fuerza necesaria): “El problema consiste enteramente en lo siguiente: en *hacer que una superficie sustente un determinado peso mediante la aplicación de una cierta potencia para vencer la resistencia del aire*” [1].

⁴² Siendo α el ángulo de ataque.

⁴³ Este es el contenido del famoso “Medallón de Cayley” (1799) que puede verse esquematizado en Fig. 03.0

Observemos que Cayley representa el sistema sustentador de un ave, que posee habitualmente dos superficies sustentadoras, aunque de muy diferente tamaño, mediante una sola placa plana, no dos. Esto significa que Cayley concentra la función sustentadora en el ala principal y responsabilizará -como explicará más adelante- a la cola de una cierta función de “control”. Por tanto, todo el peso deberá ser equilibrado por el ala “grande”. Este planteamiento se convertirá casi en norma general, y será adoptado por muchos pioneros posteriores.

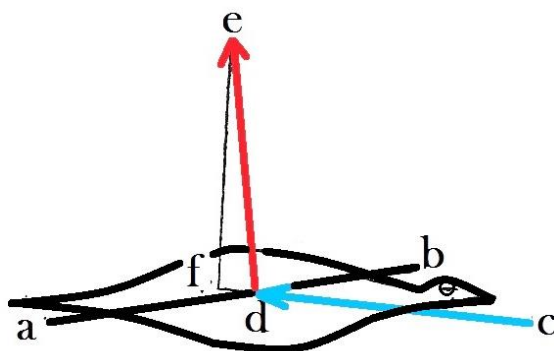


Figura 3.1: Composición de fuerzas establecida por Cayley para explicar la posibilidad del vuelo de planeo natural de un ave.

A continuación, aplica la misma idea a un objeto volador fabricado por el hombre, del que muestra un sencillo esquema. (Ref. Figura 3.2) Puede verse que el dibujo de la Fig. 3.2 se diferencia del de la Fig. 3.1 en que el “cuerpo” del ave, claramente insinuado, ha sido sustituido por un cuerpo fusiforme colgante de índole artificial.

“ON AERIAL NAVIGATION”
By Sir GEORGE CAYLEY
(Journal of Natural Philosophy,
Chemistry, and the Arts;
London, 1809)

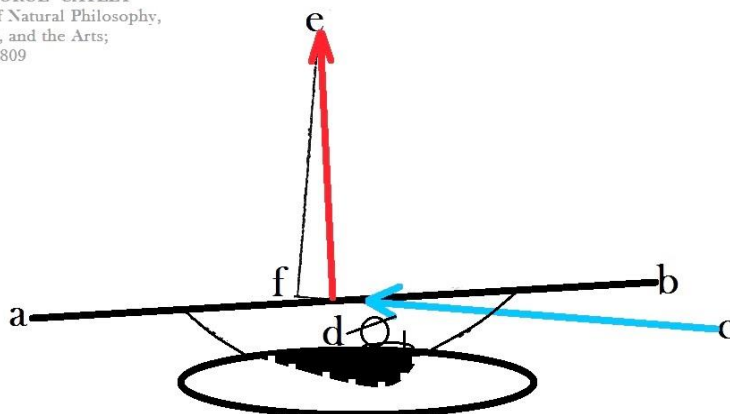


Figura 3.2: Composición de fuerzas establecida por Cayley para explicar la posibilidad del vuelo artificial, sustancialmente idéntica a la Fig. 3.1, salvo por el hecho de incluir una barquilla con pasajero.

Los experimentos de Cayley le llevaron a la conclusión de que el centro de presión está por delante de la mitad del perfil de la superficie AB y supone que se produce un desplazamiento monótono hacia atrás del centro de presión conforme el ángulo de ataque

crece, hasta llegar a estar en el centroide de la superficie alar para una incidencia de 90° . Las alas que utiliza son de bajo alargamiento. Basándose en el punto de vista descrito, Cayley concluye que el aparato volador será estable⁴⁴ frente a variaciones de la incidencia, como explicará en la parte II.

3.3.2 “On Aerial Navigation”, Parte II. (1809)

En esta segunda parte Cayley introduce el estudio de la estabilidad y el control de un aparato volador artificial. (Ref. Figura 3.3).

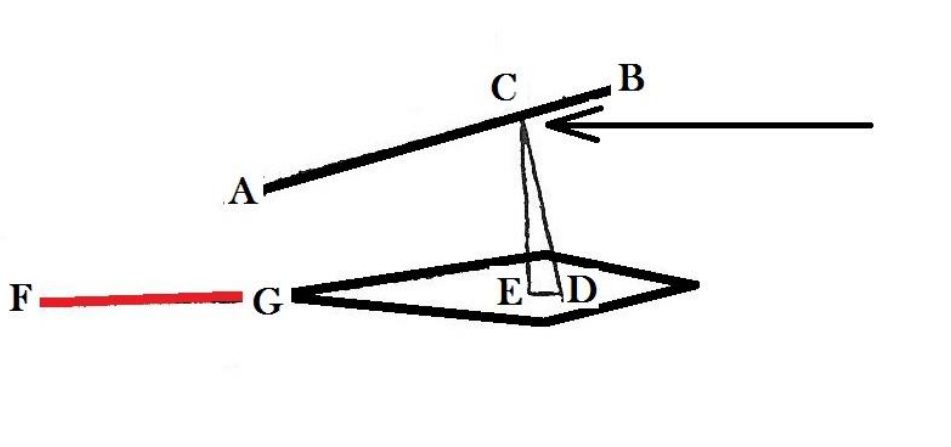


Figura 3.3: Descripción de los elementos fundamentales que constituyen un aparato volador controlable, según Cayley.

Sea AB el perfil de un ala plana -la distancia AB equivale a la cuerda alar- cuya superficie es (S) y el punto C es el centro de presión. Como ya se ha dicho, Cayley afirma que el punto C se halla más cerca del borde delantero B que del centro geométrico del ala, y esto es acorde con la realidad. Cayley no especifica características geométricas 3D del ala.

La línea CD representa la resultante aerodinámica -Cayley la dibuja hacia abajo, tal como muestra la Fig. 3.3- y se supone perpendicular al ala; la línea de acción de esta resultante pasa por el punto C y también por el centro de gravedad CDG , que está, por ejemplo, en D . Cayley hace pasar la línea de acción de la resultante de la fuerza aerodinámica sobre el ala AB por el CDG del aparato de manera que esta fuerza en condiciones de equilibrio no genera momento de cabeceo. Por definición tampoco lo genera el peso.

Si el vector CE representa el peso (mg), y la fuerza de resistencia aerodinámica opuesta al movimiento- representada por el vector ED - es contrarrestada mediante una

⁴⁴ Nota. Esta suposición no se adaptará bien a un ala con curvatura: el desplazamiento del centro de presión puede ser en sentido contrario y causar un momento desestabilizador que requeriría una superficie complementaria para compensarlo. Allora aquí un punto oscuro relacionado con el comportamiento del centro de presión de una superficie sustentadora.

cierta tracción (T), el movimiento será estacionario mientras se mantengan las mismas condiciones.

Cayley piensa que si el ángulo de ataque α -el que forma la velocidad con el perfil del ala AB - aumenta, el punto C (centro de presión) retrocede, con lo que este desplazamiento de la fuerza aerodinámica origina un momento de cabeceo que se opone “*grosso modo*” al incremento del ángulo de ataque y tiende a restaurar el equilibrio. Análogamente en sentido contrario: una disminución del ángulo de ataque mueve la resultante aerodinámica originando un momento que tiende a incrementarlo, debido al desplazamiento del centro de presión hacia adelante. Tácitamente asume que se cumplirá la condición de estabilidad que acabamos de mencionar, que aparece aquí mencionada con claridad por primera vez.

Cayley no ofrece una expresión matemática ni gráficos experimentales del comportamiento del centro de presión con α , sino que procede a partir de experiencias concretas, de cuyos resultados extrae conclusiones.

La descripción de Cayley establece un precedente para el planteamiento inicial del análisis del problema del vuelo que será adoptado por la mayoría de los estudiosos posteriores a él. Los pioneros supondrán, sin apenas excepciones, que la línea de acción de la resultante de la fuerza de sustentación del ala principal debe pasar por el centro de masas del avión. Aunque no lo exigen las argumentaciones de Cayley, los pioneros casi siempre tenderán a situar el centro de masas *por debajo*⁴⁵ del perfil alar.

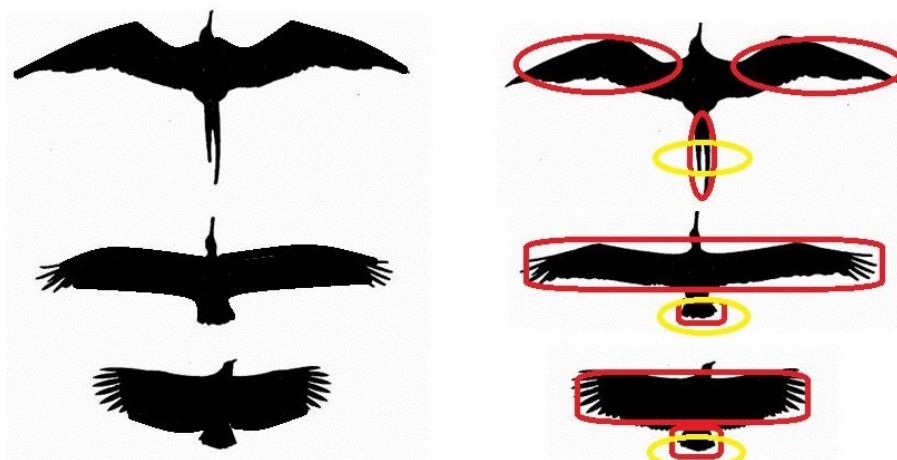


Figura 3.4: Cayley se inspira en las aves para fijar la forma geométrica y los elementos constitutivos de sus planeadores.

3.4 El timón horizontal móvil.

Cayley completa lo anterior con un importante y nuevo concepto: añade un timón horizontal móvil FG (Cfr. Fig. 3.3 y 3.4) en una posición similar a la de la cola en los pájaros, con la posibilidad de girar alrededor del punto G subiendo o bajando el punto F ,

⁴⁵ Esta tendencia parece provenir de la extrapolación al campo aeronáutico de algo propio de la aerostación.

pudiendo también permanecer fijo en cualquier posición entre sus límites superior e inferior. Y esto, según Cayley, por dos razones:

- (1) Para que el vuelo sea perfectamente estacionario.
- (2) Para tener la opción de alterar la trayectoria ascendiendo o descendiendo.

El modo de actuar de esta superficie complementaria es descrito como sigue.

Inicialmente, la posición de FG es fija paralela a la velocidad. Esto significa que no causa sustentación. (El concepto de desviación de la corriente causada por el ala sustentadora no forma parte del marco aerodinámico de Cayley).

Cayley supone que cualquier alteración de sobrepresión sobre la parte superior o inferior del timón FG , es decir, la presencia de un cierto ángulo de ataque de la velocidad respecto de la superficie FG , cosa que puede ser originada por una actuación del piloto, causará el ascenso o el descenso del aparato, en la medida en que siga disponiendo de la necesaria propulsión. En realidad el avión no necesariamente responderá como asume Cayley.

El esquema matemático podría intentar describirse como sigue (Ref. Fig. 3.5)

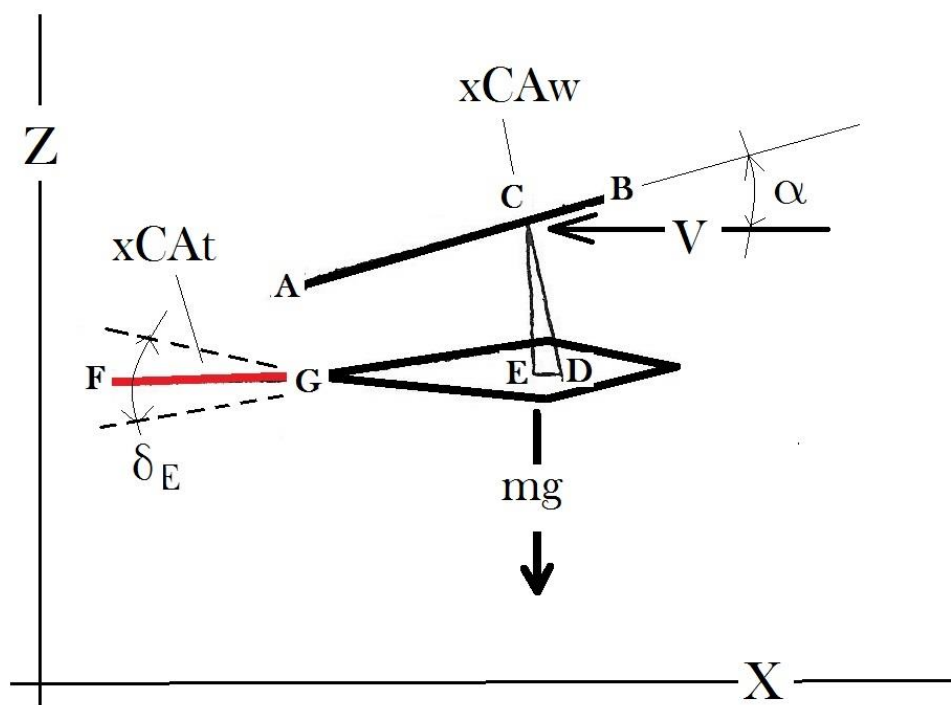


Figura 3.5: Esquema básico para analizar el comportamiento longitudinal de un planeador, sometido a una corriente de velocidad V , con ángulo de ataque α , un ala de cuerda AB con su centro de presión en el punto C (Coordenada desde el punto B : xCA_w) y empenaje trasero FG , (con su centro de presión a una distancia xCA_t desde B), deflectable un ángulo $\pm\delta_E$. El peso $-mg$ situado en la vertical del punto C . El ángulo θ es el asiento longitudinal, tomado positivo hacia arriba. Ejes tierra X, Z .

La fuerza aerodinámica la suponemos -adelantando ideas- expresable de la forma siguiente: $F = K_1 S_1 V^2 \sin \alpha$, siendo K_1 la “Resistencia Específica del Aire” y S_1 el área del ala AB . La pendiente de la trayectoria se supone muy pequeña. Las ecuaciones del movimiento en un plano vertical serán:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} &= K_1 S_1 V^2 \sin \alpha \cos \alpha - mg \\
 [2] \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} &= T - K_1 S_1 V^2 \sin^2 \alpha \\
 [3] \quad I_{yy} \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= K_1 S_1 V^2 \sin \alpha (x_{CDG} - x_{CPw}(\alpha)) + \dots \\
 &\quad \dots + K_2 S_2 V^2 (x_{CDG} - x_{Cpt}(\alpha)) \sin(\alpha - \delta_E) = 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Las condiciones estacionarias iniciales son:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{t=0} &= K_1 S_1 V^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - mg = 0 \\
 [2] \quad m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)_{t=0} &= K_1 S_1 V^2 \sin^2 \alpha_0 - T = 0 \\
 [3] \quad I_{yy} \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right)_{t=0} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

La ecuación [3] de [3.1] es nula debido a que en condiciones estacionarias se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
 x_{CDG} &= x_{CPw}(\alpha_0) \\
 \alpha_0 &= \delta_{E0}
 \end{aligned}$$

Cayley parece sugerir que un incremento de ángulo de ataque proporcionará, para una misma velocidad, una sustentación mayor, y por eso un ascenso. La conclusión de Cayley no es necesariamente válida, ya que un aumento de la sustentación genera también un aumento de la resistencia y la velocidad, en general, no permanecerá constante durante el transitorio; el hecho de que al desaparecer este la velocidad final sea la misma que antes del cambio del valor de α no es imposible, pero se corresponde con el caso particular de vuelo estacionario en condiciones de mínima resistencia aerodinámica (Suponiendo válida una curva polar de coeficientes constantes).

Si aceptamos un “modus” lineal algo simple, tendríamos:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad m \left(\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} \right) &= K_1 S_1 V^2 \Delta \alpha \\
 [2] \quad m \left(\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} \right) &= -2\alpha_0 K_1 S_1 V^2 \Delta \alpha
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Esta derivación contiene además el supuesto implícito de la estabilidad longitudinal intrínseca del movimiento, que depende funcionalmente de la forma matemática de la función $xCP(\alpha)$. Si es aceptable linealizarla, podemos poner:

$$xCPw(\alpha) \approx xCPw(\alpha_0) + \frac{\partial xCPw(\alpha)}{\partial \alpha} \Delta \alpha$$

Entonces, de la ecuación [3] de [3.1], linealizada obviando términos en $(\Delta \alpha)^2$:

$$\Delta \alpha \approx \frac{K_2 S_2 (xCPt - xCPw)}{K_2 S_2 (xCPt - xCPw) + K_1 S_1 \alpha_0 \left(\frac{\partial xCPw}{\partial \alpha} \right)} \Delta \delta_E \quad [3.4]$$

Si el centro de presión del ala no se moviera con el ángulo de ataque, una modificación de la deflexión del empenaje repercutiría exactamente en la misma variación del ángulo de ataque. El movimiento del centro de presión de la cola da lugar a incrementos cuadráticos despreciables en primera aproximación. (Recordemos que, para Cayley, se cumple que $xCDG = xCAw$)

Sobre la estabilidad del movimiento Cayley no menciona nada en particular. Podemos tratar de explicitar algo más la idea que subyace. La ecuación del momento de cabeceo, aplicando los conceptos que verbaliza Cayley, linealizada para ángulos α pequeños, sería:

$$\frac{I_{yy}}{V^2} \left(\frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} \right) = K_1 S_1 \left(\left(- \frac{\partial xCPw(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \alpha_0 + \frac{K_2 S_2}{K_1 S_1} (xCDG - xCPt) \right) \Delta \alpha \quad [3.5]$$

Resulta evidente la importancia del signo de la expresión de la derecha de la ecuación para la estabilidad en cabeceo.

La explicación de Cayley sobre la influencia de las deflexiones del empenaje en el comportamiento y la actitud del aparato es pionera y –como Cayley mismo afirma– le fue sugerida por la naturaleza⁴⁶. Establece también que la pendiente de la trayectoria estacionaria de vuelo de un planeador depende de la deflexión del empenaje horizontal, sin llegar a formalizar una teoría. Su análisis no considera la dinámica no estacionaria que requeriría, normalmente, el uso de todas ecuaciones diferenciales propias del movimiento,

⁴⁶ Cayley sugiere que “copiar a la naturaleza” es un camino excelente para avanzar en la consecución del vuelo artificial. Este consejo será seguido por Lilienthal 80 años después.

que son también imprescindibles para el estudio riguroso de la estabilidad dinámica del mismo.

Incluye también la instalación de una deriva vertical, para lograr un completo control del aparato. La concepción del pilotaje lateral que tiene Cayley se aproxima a la que posteriormente se denominará propia de “pilotos *chauffeurs*”: aquellos que tratan de modificar el rumbo del avión sin inclinarlo lateralmente, como se haría con un barco.

3.5 Sobre el Modelo de Planeador de 1804 (Figuras 3.6 y 3.7)

Las características del modelo de planeador de 1804 eran las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{Peso} &= 1.062 \text{ Newton} & x_{CDG} &= 18.07 \text{ cm} & c_{raiz} &= 48.28 \text{ cm} \\
 b_{wing} &= 35.6 \text{ cm} & S_{wing} &= 1040.93 \text{ cm}^2 & AR_{wing} &= 1.217 \\
 S_{tail} &= 195.77 \text{ cm}^2 & AR_{tail} &= 1.186 & \varepsilon_0 &= 6^\circ
 \end{aligned}$$

Tabla 3.1: Datos del modelo de Planeador de 1804

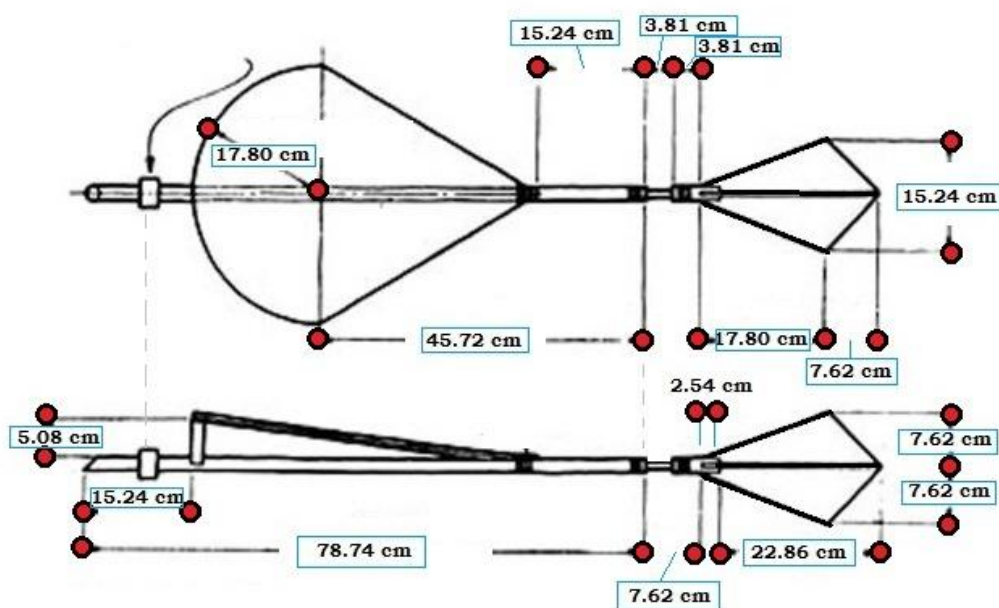


Figura 3.6: Plano y cotas del modelo de 1804. Se trata de un modelo reducido de planeador que Cayley utilizó para estudiar el vuelo de planeo.

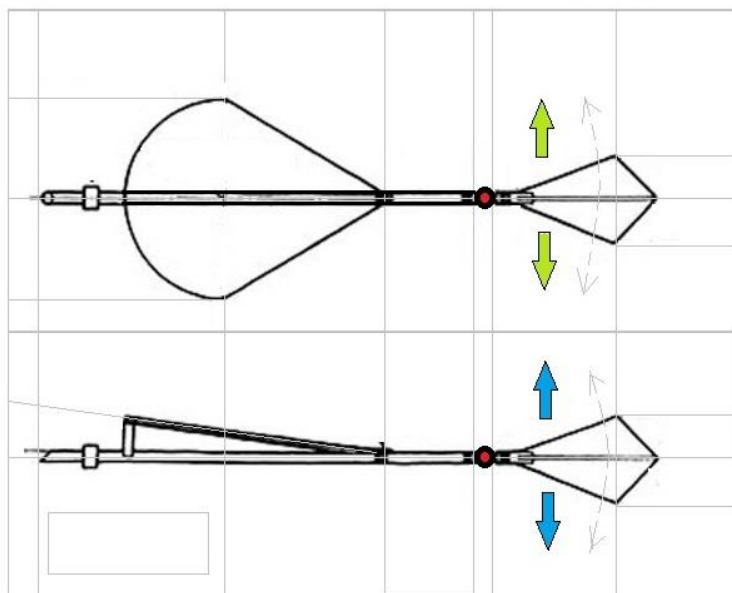


Figura 3.7: Modelo de 1804. La cola está unida al cuerpo del planeador mediante una varilla metálica que admite deformaciones en sentido vertical y lateral, y así permite estudiar el comportamiento del modelo frente a diferentes ángulos δ_E

El ala del planeador es de muy bajo alargamiento. Lo mismo sucede con el ala del empenaje horizontal trasero, que es, básicamente, la cola de una flecha que se lanza mediante un arco. Los elementos con los que trabaja Cayley parecen surgir de una combinación entre “algo que se sostiene en el aire” (una cometa) y algo que “surca (velozmente) el aire” (una flecha). Cayley considera explícitamente el efecto equilibrador de este conjunto de dos superficies sustentadoras. El *CDG* es situado [2] en el centroide de la superficie alar. Cayley no comenta nada acerca de la anulación del momento de cabeceo que el equilibrio exige.

El ala en forma de cometa no tiene la forma aerodinámicamente más eficiente y la predicción del comportamiento del centro de presión con las variaciones de α no es sencilla. Investigaciones en túnel aerodinámico [9] lo sitúan cerca de $x_{CP} \approx 0.15 crw$ para baja incidencia, llegando a $x_{CP} \approx 0.30 crw$ para $\alpha \approx 30^\circ$.

Los resultados de un estudio CFD [7] de este modelo de planeador obtienen un desplazamiento del centro de presión con el ángulo de ataque, medido en % de la cuerda en la raíz, tal como se indica en la Tabla 3.2, muy similares a los datos experimentales:

α	0	6°	10°	15°
$\frac{x_{CP}}{crw}$ (1804)	0.140	0.206	0.219	0.230

Tabla 3.2: Planeador de 1804. Posición del centro aerodinámico del ala principal.

La suposición de Cayley respecto del comportamiento del centro de presión parece correcta, y el modo de estabilizarlo mediante una cola de incidencia adaptable también.

3.6 Sobre el Modelo de Planeador de 1808 (Fig. 3.8)

Cayley construyó en 1808 un modelo con mayor alargamiento y perfil curvo, a partir de un hexágono regular con un suplemento alar, fijando el centro de gravedad en la relación:

$$\frac{x_{CDG}}{crw} \approx \frac{3}{7} = 0.4286$$

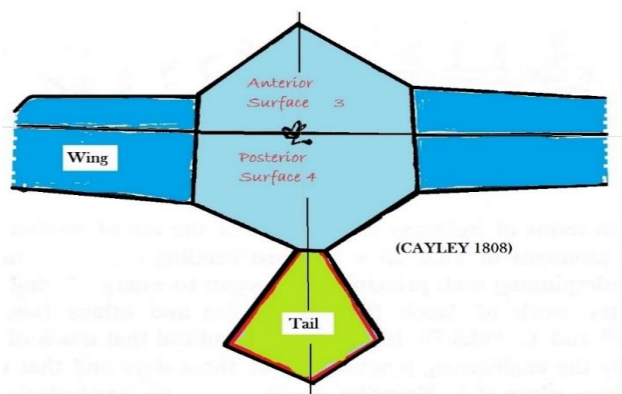


Figura 3.8: Boceto del modelo de 1808. La geometría del diseño aparece incompleta en el texto de Cayley; lo utiliza para describir aspectos parciales relacionados con el centro de presión.

Cayley sitúa la cola con una incidencia respecto de la corriente de manera que genere un momento de cabeceo negativo (morro hacia abajo). Le llama la atención la posición tan adelantada del centro de presión respecto del centroide del área.

3.7 Sobre el Modelo de Planeador de 1818 (Figura 3.9)

Sobre este modelo de planeador, del que muestra solamente un bosquejo, Cayley explica la relación que debe existir entre los ángulos geométricos del ala y de la cola para que pueda existir equilibrio, según la posición del centro de gravedad.

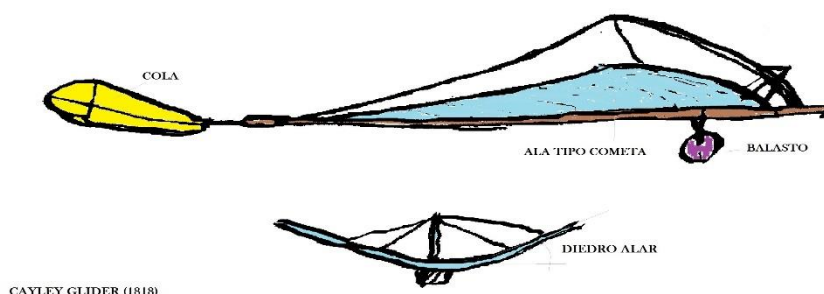


Figura 3.9: Boceto del modelo de 1818. Boceto de planeador del que se sirve Cayley para explicar la función de la cola, separada una cierta distancia del ala principal.

El esquema es el descrito gráficamente a continuación (Fig. 3.10A y 3.10B) sobre el modelo de 1804 (Fig. 3.7):

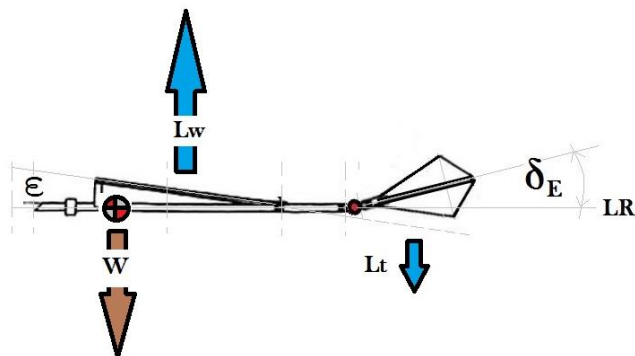


Figura 3.10A: Explicación de la función equilibradora de la cola. (Centro de gravedad por delante de las superficies sustentadoras).

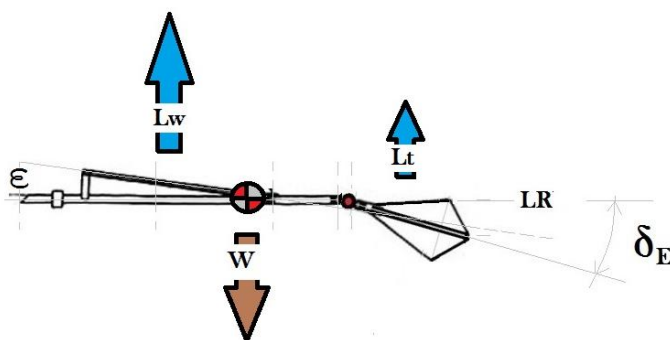


Figura 3.10B: Explicación de la función equilibradora de la cola. (Centro de gravedad entre las superficies sustentadoras).

Vemos que el momento de cabeceo respecto del CDG podría ser equilibrado, en principio, mediante deflexiones de la cola en un sentido o en el otro. La capacidad de equilibrado de la cola tendrá obvias limitaciones, pero ahora lo importante es reseñar que Cayley comprendió el mecanismo de compensación del par creado por la sustentación principal, que para Cayley era toda la sustentación relevante, y por esa razón la superficie de cola que utiliza es muy pequeña; esto es así porque de esta cola solamente le interesa el momento que causa, no la sustentación propiamente dicha, aunque - obviamente- es la sustentación de la cola la que causa el momento.

3.8 Sobre el Modelo de Planeador de 1849⁴⁷ (1853) (Figura 3.11)

Con este modelo Cayley pretendía indagar sobre la pendiente estacionaria de la trayectoria de un planeador que soporta una carga y la potencia consumida.

CAYLEY (1849 & 1853)

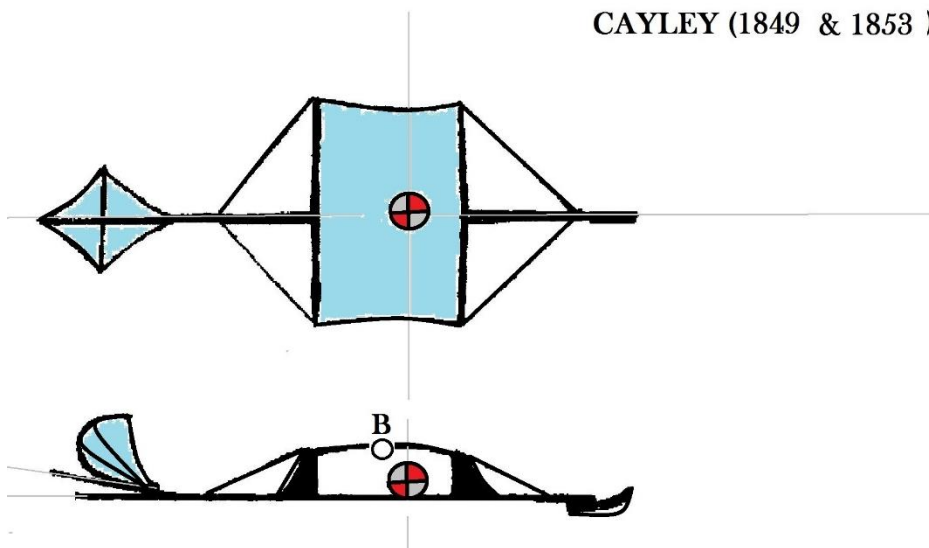


Figura 3.11: Modelo de planeador de 1849/1853, usado por Cayley para investigar trayectorias.

Según la descripción de Cayley, el centro de presión del ala (Punto B, Fig. 3.11) aparece dibujado sensiblemente en la mitad de la cuerda alar en la raíz, aunque esto contrasta con las conclusiones a las que había llegado en 1818. La posición real del centro de presión, para un ala de tan bajo alargamiento, se sitúa⁴⁸ en $x_{CAW} = 0.205 crw$ y está, contrariamente a lo dibujado por Cayley, por delante del CDG.

En cambio, la posición verdadera del punto neutro del modelo conduce a situarlo en: $x_{PN} = 0.90 crw$ de manera que, aunque Cayley considera solamente la posición del centro de presión del ala principal, lo supone fijo y lo sitúa incorrectamente por detrás del CDG, en realidad el conjunto de la aportación de la sustentación de las dos superficies, ala principal y cola, sitúa el punto neutro de modo adecuado para lograr la estabilidad del planeador. La aportación del empenaje no es realmente importante para la sustentación global, pero es necesaria para lograr la estabilidad frente a variaciones de la incidencia.

3.9 Sobre “The Governable Parachute” (1852)

⁴⁷ Aparecen dos fechas debido a que Cayley analizó este modelo en esos años.

⁴⁸ La dimensión crw es la cuerda alar en la raíz, x_{CAW} es la posición del centro aerodinámico del ala, y x_{PN} es la del Punto Neutro, ambas medidas desde el borde delantero de crw

Este planeador, de tamaño relativamente grande y apto para transportar a una persona pequeña, es relevante por el hecho de que, al parecer, voló brevemente de modo efectivo. (Fig. 3.12)

G. Cayley

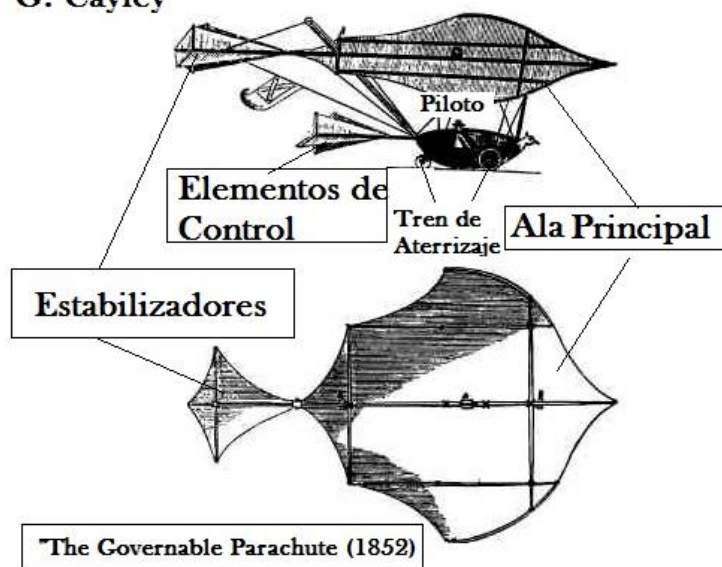


Figura 3.12: Modelo de planeador de 1852. El tamaño debía permitir la presencia en su interior de una persona. El ala y el conjunto estabilizador es similar al utilizado en el planeador de 1804. Se añaden ahora elementos de control accionados por el piloto.

3.10 Conclusiones

- (1) Los tres breves capítulos del notable escrito de Cayley constituyen el primer documento que aborda el estudio del vuelo artificial con acierto en lo fundamental y con visión de futuro⁴⁹. Su importancia es indiscutible. Cayley construye modelos voladores con la configuración completa y adecuada –estabilizador de cola y deriva vertical- para el vuelo estabilizado y sustancia de modo correcto los argumentos de índole física sobre los que se apoya. La separación del sistema sustentador del sistema propulsivo introduce el concepto de avión propulsado de ala fija.
- (2) Las razones de Cayley para justificar sus diseños muestran elementos de una razonable base aerodinámica, lograda a partir de sus lecturas y de los datos obtenidos a partir de sus propios experimentos, con instrumentos por él diseñados y construidos; fue el primero en utilizar un brazo giratorio para estudiar el comportamiento sustentador de una placa a diversos ángulos de ataque, y descubrió

⁴⁹ Por contraste, véanse las siguientes palabras de C. L. Navier, que estudia la posibilidad del vuelo muscular humano: “Attribuer à l’homme la faculté de traverser les airs est une idée qui a toujours plu à l’imagination: mais elle n’a pu être réalisée que dans des êtres poétiques, auxquels on attribuait un caractère divin, et par conséquent des forces sans limites et une vigueur inépuisable”; *Note sur l’évaluation approximative de la quantité d’action nécessaire pour le vol des oiseaux et pour la direction des aérostats*. Histoire de l’Académie des Sciences; Paris. 1830.

que el ala con perfil curvo genera más sustentación. Analizó también el comportamiento del centro de presión sin llegar a establecer con precisión los parámetros que permiten fijarlo. El modelo físico que utiliza es sobrio y no hay en él tratamientos matemáticos complicados, pero identifica claramente las cuatro fuerzas que intervienen en el problema del vuelo: el peso, la sustentación, la resistencia y la tracción, y las describe en términos de ingeniería.

- (3) Los modelos fueron probados exhaustivamente y Cayley realizó muchas mediciones: velocidades y ángulos de trayectoria, en particular. Esto permite “reproducir” sus experiencias y captar cómo interpretaba, desde el punto de vista de la mecánica de vuelo, las actuaciones de sus modelos. Es, probablemente, la primera vez que se trata de medir y analizar científicamente el comportamiento empírico de un aparato volador artificial (1804). Cayley suele, en general, describir la geometría, masa y posición del centro de gravedad de sus modelos escrupulosamente. Se puede llegar a verificar la coherencia de las mediciones de Cayley, que son relativamente precisas para los medios de que disponía.
- (4) No valoró la importancia del alargamiento alar (La característica fundamental de un ala para Cayley es la *magnitud* de la superficie alar, pero no su forma geométrica). Parece que no llega a considerar la posibilidad de la entrada en pérdida. No confió nunca en la hélice como medio de obtener tracción tangencial a la trayectoria, porque prefería alas batientes, como las aves. En cambio, preconizaba las hélices para el vuelo vertical. La eventual relevancia de estas “limitaciones” queda muy mitigada si tenemos en cuenta que el primer vuelo propulsado y controlado (Wright Brothers) tuvo lugar unos 100 años después. Cayley tenía conciencia de trabajar para tiempos todavía por llegar. Se le suele designar como “El Padre de la Navegación Aérea” [4]. Curiosamente, sus trabajos despertaron más interés en Francia que en su propia nación [8].
- (5) Desde el punto de vista de la estabilidad estática longitudinal, y tomando su inspiración de las aves; describe cualitativa y correctamente las razones de la eficacia de un dispositivo tipo empenaje trasero y el modo de actuación de este sistema como posible controlador del ángulo de ataque. No desarrolla la posibilidad de que esa misma superficie realice una función de estabilización estática, de su relación con la posición del *CDG*, y tampoco efectúa una investigación de la estabilidad dinámica longitudinal, aunque sí que subraya la importancia de la determinación suficientemente precisa del centro de presión.

Bibliografía

- [1] Cayley, G. “ON AERIAL NAVIGATION (I), (II), & (III)”, “*A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*” (London, (I) Nov. 1809, (II) Feb. 1810, Mar. 1810)

- [2] Gibbs-Smith, C. H. *Sir George Cayley's Aeronautics 1796-1855*. London. Her Majesty's Stationery Office. (1962).
- [3] Sproule, John R. *Cayley's 1853 Aeroplane*; FLIGHT International, 13 Dec. (1973).
- [4] Ackroid, J. A. D. *Sir George Cayley, the father of aeronautics. (Part 1). "The invention of the Aeroplane"*. Notes Rec. R. Soc. London. 2002 56, 167-181. (Part 2); Cayley's Aeroplanes. Notes Rec. R. Soc. Lond. 2002 56. (2002).
- [5] Ackroid, J. A. D. *Sir George Cayley: "The Invention of the Aeroplane near Scarborough at the Time of Trafalgar"*. Journal of Aeronautical History. Paper No. 2011/6
- [6] Hansen, J. R., Ed. *"The Wind and Beyond"*, Vol. 1. NASA History Series. (2003).
- [7] Burgos Moreno, L. "Estudio Aerodinámico CFD del primer modelo de planeador de G. Cayley (1804)". (Trabajo Fin de Grado Aeroespacial). Universidad Politécnica de València. (2015).
- [8] Hasenfeld. "Sur la navigation aérienne par Sir George Cayley"; L'Aéronaute, 10^e année, No. 6 (pp. 179-182); No. 7 (pp. 203-209); No. 8 (pp.235-236); No. 9 (pp. 256-260); No. 10 (289-293) y No.11 (pp. 317-329). Paris. (1877).
- [9] Potter, G. T. "Investigation of the Aerodynamic characteristics of Cayley's glider wing". Project Report, Manchester School of Engineering, University of Manchester. (2001).

Capítulo 4

Alphonse Pénaud (1850-1880)



50

Contenido

4.1 Nota Biográfica

4.2 Documentos de Referencia.

4.3 Descripción de contenido. Estabilización automática del ángulo de ataque.

4.3.1 Otros proyectos.

4.4 Conclusiones

4.5 La mecánica de vuelo estacionaria de A. Pénaud.

Bibliografía.

⁵⁰ <http://www.flyingmachines.org/pend.html>. (14.06.2017)

4.1 Nota Biográfica

Desde muy joven una enfermedad le obligó a llevar muletas. Sus intereses eran variados: el vuelo de las aves, los globos, la balística, las matemáticas, la meteorología, la fotografía, la hidrodinámica, los cohetes, la aerodinámica... y tenía la habilidad de reducir a términos sencillos ideas complejas y mostrarlas en forma de modelos reducidos, pero ilustrativos. En 1876 diseñó, junto con Paul Gauchot, un ala volante con tren retráctil, cabina cerrada, instrumentación –como un incipiente variómetro de propio diseño- y piloto automático. Fue Vicepresidente de la Société Française de Navigation Aérienne y miembro del Comité de Redacción de L’Aéronaute. En 1878 el obispo⁵¹ Milton Wright compró un helicóptero de juguete de Pénaud y se lo regaló a sus hijos pequeños Wilbur y Orville [7].

4.2 Documento de Referencia.

“L’ Aeroplane Automoteur avec équilibre automatique”. “L’Aéronaute”, Bulletin Mensuel International de la NAVIGATION AÉRIENNE; 5^o ANNEÉ, N^o 1-12 (1872) Paris.

4.3 Descripción de contenido. Estabilizador automático de un aeroplano.

Pénaud encontró un modo muy sencillo de estabilizar automáticamente un aeroplano, y estableció la primera *teoría* embrionaria de la estabilidad longitudinal automática cuyo núcleo fundamental describimos a continuación⁵². Pénaud pensaba que el esquema estabilizador que proponía era novedoso.

El sistema estabilizador que propone Pénaud consiste en “un *órgano muy sencillo, que logra el objetivo deseado: un pequeño timón horizontal*”.

⁵¹ De la *United Bethren Church*, una denominación de la rama Evangélica del protestantismo americano.

⁵² Como curiosidad, digamos que esta propuesta de Pénaud fue recogida literalmente por Lanchester en su libro “AERODONETICS”, de 1908, lo que indica el alto concepto en que Lanchester tuvo este primer intento del pionero francés.

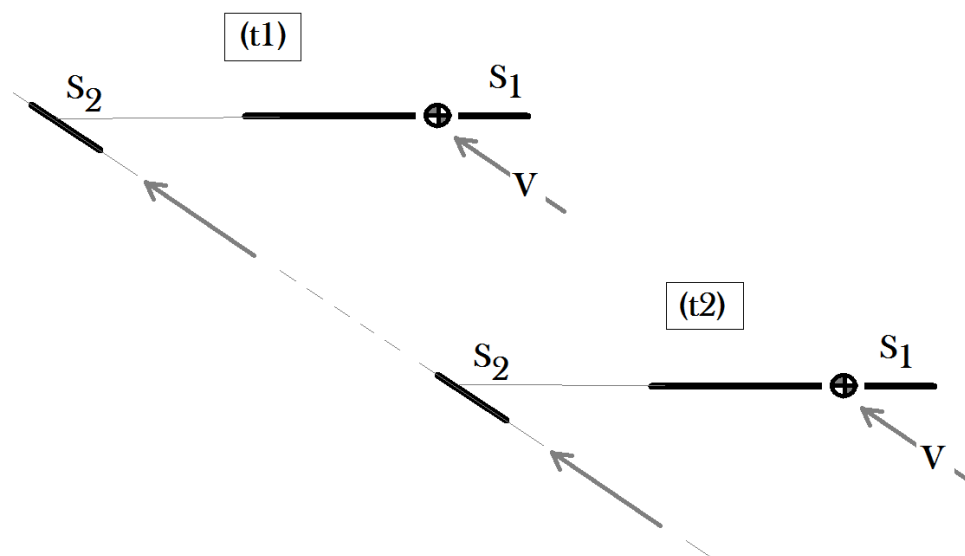


Figura 4.1A: Esquema geométrico utilizado por Pénaud para explicar su teoría sobre el efecto estabilizador de la cola.

El pequeño timón horizontal es la superficie S_2 , inclinado hacia la parte inferior del plano sustentador S_1 , que es el plano principal, y situado por detrás de él. (Fig. 4.1A). Su funcionamiento Pénaud lo describe como se indica a continuación.

El plano principal (“*Superficie sustentadora S_1* ”) soporta un peso situado en la vertical de su centro de presión. Este plano está unido rígidamente al pequeño plano posterior (“*Superficie directora S_2* ”). De un modo exclusivamente verbal a partir del gráfico Pénaud indica que cualquier alteración en el ángulo de ataque del Plano S_1 repercute en la sustentación de S_2 , por la rígida unión que tienen y precisamente en el sentido de causar una sustentación que se opone a esa alteración. Por esta razón, el ángulo de ataque del plano principal en el instante (t1) es igual al del instante (t2): se mantiene constante. No hay comentarios respecto de la inevitable parte transitoria del movimiento.

El razonamiento es escueto, la formulación geométrica, y sin complemento aerodinámico o matemático. Añade el comentario de que el centro de gravedad no tiene por qué estar necesariamente en el centro de presión del ala principal, sino que el estabilizador puede soportar también parte de la carga sin merma de su capacidad estabilizadora. Esta última observación es de gran interés, aunque no se detiene a explicar cómo actuaría el estabilizador en este hipotético caso.

Pénaud no tiene en cuenta la desviación de la corriente, ni especifica detalles respecto de la posición del centro de presión de las superficies sustentadoras, ni considera la posibilidad de que este varíe su ubicación cuando lo hace el ángulo de ataque. No obstante, sus afirmaciones tienen sentido, como vamos a ver a continuación. (Fig. 4.1B)

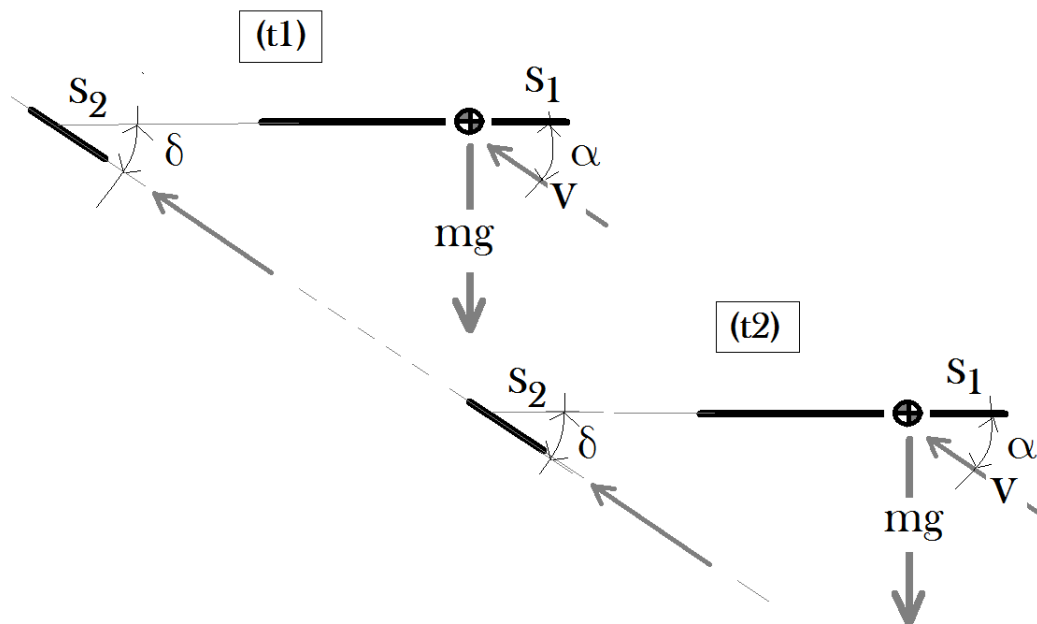


Figura 4.1B: Esquema geométrico utilizado por Pénau para explicar su teoría sobre el efecto estabilizador de la cola, con indicación de los parámetros relevantes.

Con nomenclatura y conceptos actuales la derivada respecto del ángulo de ataque del Momento de Cabeceo⁵³ M_α del conjunto alar de Pénau, determinante de la estabilidad estática del conjunto alar, tendría el valor aproximado de:

$$M_\alpha = \frac{1}{2} \rho V^2 CL\alpha_{S1} S_1 \left(xCDG \left(1 + \frac{CL\alpha_{S2} S_2}{CL\alpha_{S1} S_1} \right) - xCA_{S2} \left(\frac{xCA_{S1}}{xCA_{S2}} + \frac{CL\alpha_{S2} S_2}{CL\alpha_{S1} S_1} \right) \right) \quad [4.1]$$

Con:

$CL\alpha_{S1}, CL\alpha_{S2}$ = Pendientes de la curva de sustentación de cada ala.

xCA_{S1}, xCA_{S2} = Distancias entre el borde de ataque del ala S1 y los centros aerodinámicos de cada ala.

$xCDG$ = Distancia entre el borde de ataque del ala S1 y el CDG del sistema.

S_2, S_1 = Superficies alares.

Eligiendo un valor adecuado de xCA_{S2} - lo que equivale a situarlo una cierta distancia por detrás de S_1 - podremos obtener un $CM_\alpha < 0$ que tenga eficacia estabilizadora. El ángulo de ataque al que se estabilizará el conjunto, tomado como sentido

⁵³ El coeficiente $M_\alpha = \frac{dM}{d\alpha}$ debe tener un valor tal que una modificación en α cause un cambio en el M de manera que el Momento de Cabeceo tienda a oponerse a ese cambio experimentado en α

positivo para δ (la deflexión del estabilizador de cola) el que establece el dibujo de Pénaud, viene dado⁵⁴ por:

$$\alpha \approx \frac{\left(\frac{CL\alpha_{S_2}}{CL\alpha_{S_1}}\right)\left(\frac{S_2}{S_1}\right)\left(\frac{xCA_{S_2} - xCDG}{xCA_{S_1} - xCDG}\right)}{1 + \left(\frac{CL\alpha_{S_2}}{CL\alpha_{S_1}}\right)\left(\frac{S_2}{S_1}\right)\left(\frac{xCA_{S_2} - xCDG}{xCA_{S_1} - xCDG}\right)} \delta \quad [4.2]$$

Si, tal como insinúan los dibujos de su “*Planophore*” (Fig. 4.2), Pénaud considera que las alas delantera y trasera son geoméricamente semejantes, aunque de distinto tamaño, la igualdad de los $CL\alpha$ de sus alas permitiría escribir una expresión más simple:

$$M_\alpha = \frac{1}{2} \rho V^2 CL\alpha_{S_1} S_1 \left(xCDG \left(1 + \frac{S_2}{S_1} \right) - xCA_{S_2} \left(\frac{xCA_{S_1}}{xCA_{S_2}} + \frac{S_2}{S_1} \right) \right) \quad [4.3]$$

Esto permite mantener fijo el ángulo de ataque en función de la deflexión δ

$$\alpha \approx \frac{\left(\frac{S_2}{S_1}\right)\left(\frac{xCA_{S_2} - xCDG}{xCA_{S_1} - xCDG}\right)}{1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)\left(\frac{xCA_{S_2} - xCDG}{xCA_{S_1} - xCDG}\right)} \delta \quad [4.4]$$

La descripción que hace Pénaud de la acción del estabilizador no se basa en una teoría aerodinámica reglada, sino que parece hacer uso de una intuición física elemental. El modelo explicativo matemático-geométrico es simple, y la representación gráfica que ilustra el proceso no es generalizable (Fig. 4.1A) pues sugiere que el empenaje posterior se desplaza tangencialmente a su propia superficie, lo que se corresponde con un caso particular. No obstante la idea subyacente es acertada. Esta capacidad estabilizadora de un empenaje posterior se encuentra mencionada explícitamente en Cayley, que la utiliza en sus planeadores.

Pénaud hace coincidir el centro aerodinámico del ala S_1 con el CDG del avión completo, aunque –como hemos dicho– no considera que esto sea estrictamente necesario. De esta manera, las ecuaciones arriba obtenidas se simplifican, y se cumple la condición que muestra el dibujo de Pénaud (Fig. 4.1A): α y δ coinciden.

$$M_\alpha = \frac{1}{2} \rho V^2 S_2 CL\alpha_{S_2} (xCDG - xCA_{S_2}) \quad \alpha \approx \delta \quad [4.5]$$

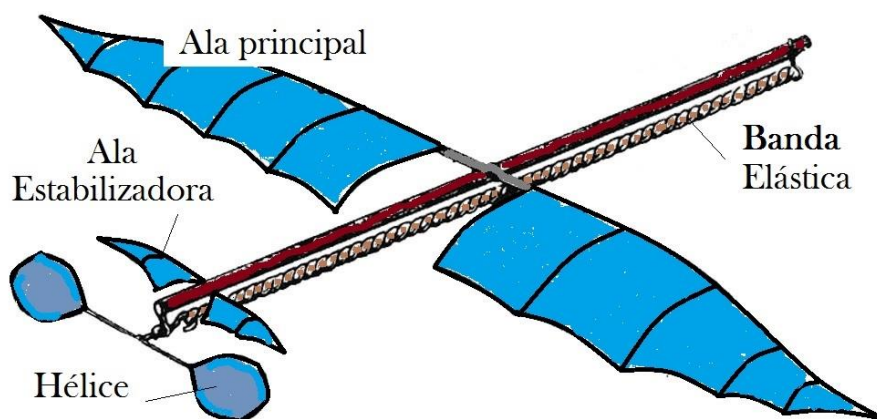
Luego la pendiente de la trayectoria sería, en este caso, exactamente la indicada por Pénaud en su dibujo. Se evidencia, aunque de modo condicionado, la visión

⁵⁴ Pénaud, como la mayoría de los pioneros, no tiene en cuenta la desviación de la corriente generada por el ala delantera, ni el retardo correspondiente entre el ala delantera y el empenaje.

sustancialmente acertada que tenía el pionero francés de la función del estabilizador posterior. (Eq. 4.5)

Resulta también así más evidente la necesidad de situar el estabilizador detrás del ala principal para obtener la condición matemática de estabilidad estática que actualmente se describe expresando que la derivada respecto del ángulo de ataque del Coeficiente de Momento de Cabeceo debe ser negativa, con el convenio habitual de signos. ($CM_{\alpha} < 0$).

Pénaud construyó y voló el modelo descrito en la Figura Núm. 4.2, propulsado por bandas elásticas, al que llamó “*Planophore*”.



"Planophore", de A. Pénaud

Figura 4.2: Modelo de avión construido por Pénaud; con el que demostró la eficacia estabilizadora de la pequeña cola horizontal trasera.

Resumiendo: el timón horizontal es una aportación significativa (y definitiva) de Pénaud para la solución del problema de estabilizar el vuelo de un avión, identificando y tratando esta dificultad de modo directo y específico. Una genuina justificación fisico-matemática no puede todavía ofrecerla, debido a la inmadurez de la ciencia aerodinámica del momento.

4.3.1 Otros proyectos.

Pénaud patentó, en colaboración con Paul Gauchat [6], un modelo de aeroplano consistente esencialmente en un ala volante (Fig. 4.3) Un somero estudio aerodinámico permite situar los centros de presión de las sustentaciones debidas a la incidencia y a la

deflexión del empenaje tal como indica la figura, lo que no es irrazonable; la eficacia del mando de profundidad es menos marginal⁵⁵ de lo que podría pensarse de entrada.

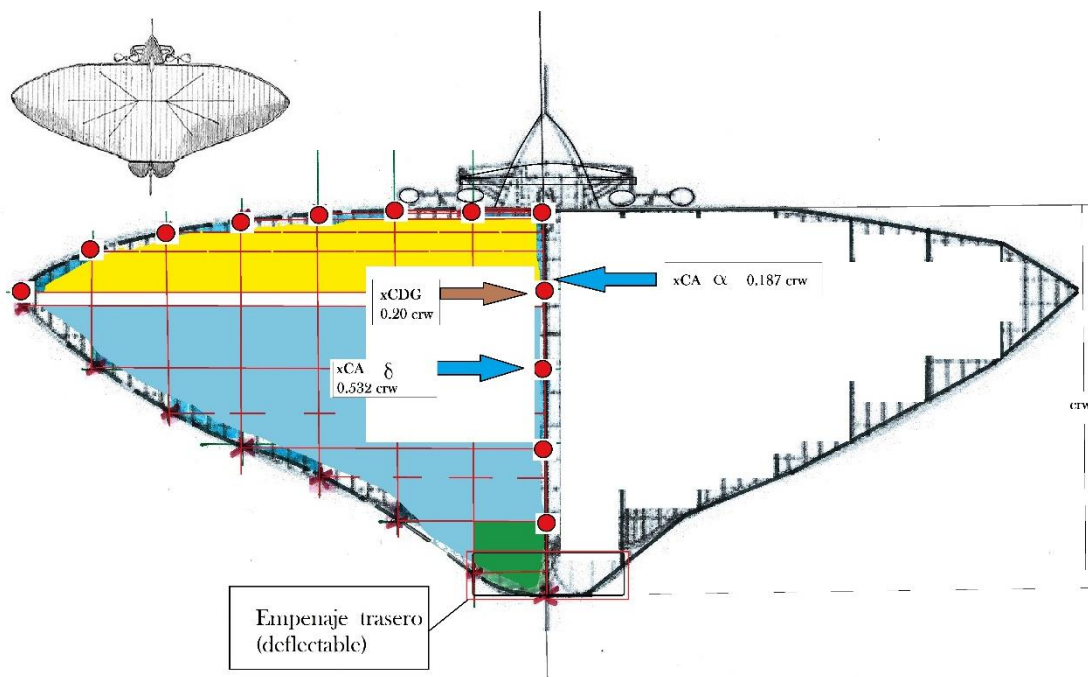


Figura 4.3: Bosquejo del avión, patentado por Pénaud y Gauchat, y constituido por una sola ala dotada de un muy pequeño empenaje. La situación relativa del CDG y del centro de presión debido al ángulo α y del debido a δ_E , se muestran en el dibujo.

Estableció también Pénaud dos “teoremas” de la mecánica del vuelo de planeo que son interesantes para la historia del análisis matemático del vuelo, y serán asumidos y desarrollados formalmente por investigadores posteriores⁵⁶, pero no afectan directamente a la estabilidad. Publicó también algún trabajo de investigación básica sobre la resistencia aerodinámica [5].

4.4 Conclusiones

- (1) El concepto teórico y la aplicación práctica fundamental de Pénaud es el estabilizador horizontal. Pénaud conoció algunos trabajos de Cayley, pero no

⁵⁵ El coeficiente de sustentación debido a la deflexión del empenaje es -para el rango lineal- de $0.37\delta_E$. Esto, junto con una distancia $(x_{CDG} - x_{CA_{\delta_E}}) \approx (0.20 - 0.53)crw = -0.33crw$ conduce a un valor del coeficiente $CM_{\delta_E} \approx -0.115 \delta_E$ (Con referencia a la superficie alar y a la cuerda en la raíz). Método Numérico de Superficie Sustentadora de Hoskyns University.

⁵⁶ De entre estos, Painlevé, Soreau y Ferber formalizan con más claridad los desarrollos de Pénaud; y todos ellos atribuyen a Pénaud la autoría indiscutida. Estos desarrollos serán estudiados más adelante en este mismo trabajo.

consta que se inspirase en este último, ya que afirma desconocer⁵⁷ precedente alguno.

- (2) La incorporación de un empenaje horizontal es una aportación importante para resolver el problema de la estabilidad longitudinal, siempre que la posición del CDG se mantenga dentro del margen adecuado. De hecho, esto es así en su modelo “*planóphore*”; Pénaud no analiza los márgenes de validez, quizás porque no dispone de los fundamentos aerodinámicos básicos que le permitiría intentarlo.
- (3) Pénaud no incluye en su descripción el hecho de que el timón horizontal recibe el flujo desviado por la presencia sustentadora del ala delantera, ni tampoco el retardo en esa desviación. La ausencia de estos dos conceptos físicos será usual en la mayoría de los pioneros que estudiaremos.

4.5 Anexo. La mecánica de vuelo estacionario de A. Pénaud.

El punto de vista formal de este trabajo aconsejaba enfatizar la aportación conceptual más importante de Pénaud: el plano estabilizador. No obstante, el pionero francés realizó también relevantes y originales aportaciones en campo de la mecánica del vuelo estacionario de un aeroplano. Esta parte es la que vamos a considerar ahora.

El documento base es “*Lois du Glissement dans l’air*”, aparecido en “*L’AERONAUTE*”, de enero de 1873. [2].

Comienza su descripción con la denominada *Ley de Newton* para el cálculo de la resistencia que ofrece un fluido al desplazamiento de un plano en su seno. Newton -afirma Pénaud- la hace depender de cinco cosas:

1. La superficie (S)
2. La densidad del fluido. (ρ)
3. La velocidad al cuadrado. (V^2)
4. El $\sin^2 \alpha$, siendo α el ángulo de incidencia.
5. La resistencia es perpendicular al plano.

Pénaud dice que son aceptables las (2) y la (5); la (3) lo es salvo para velocidades como las típicas de la artillería y la (1) requiere muchas especificaciones complementarias para poder ser considerada válida⁵⁸. La (4) es incorrecta.

⁵⁷ Aunque este hecho no sea por sí solo determinante, la publicación de Pénaud precede en 5 años a la serie de 6 artículos publicados en 1877 por Hasenfeld en *L’Aéronaute*, sobre los trabajos de Cayley.

⁵⁸ De una manera todavía algo vaga, Pénaud parece aquí referirse a los problemas que genera la falta de caracterización científica clara de la influencia de la forma de la superficie.

Debido al error mencionado en último lugar, algunos cálculos que pretendían estudiar el vuelo de las aves -Pénaud cita explícitamente a Navier⁵⁹- han resultado “exorbitantes” y han lanzado sobre la aviación considerable descrédito. Con base en los trabajos de M. de Louvrié, acepta la ley del seno simple para ángulos de ataque comprendidos entre 0 y 20°.

A partir de aquí, Pénaud establece algunos teoremas para el vuelo sin propulsión, que primero enuncia y demuestra después. Nosotros seguiremos el camino contrario, tratando de convertirlos a la nomenclatura actual.

Teorema I

Pénaud asimila un ala a una placa plana inclinada un ángulo θ respecto de la horizontal, y sometida a un ángulo de ataque α . El peso del ave es P , y la superficie alar es S , (que también podría interpretarse como la superficie proyectada en el plano de la velocidad). Pénaud llama S' a la superficie frontal del ave, en el sentido del movimiento.

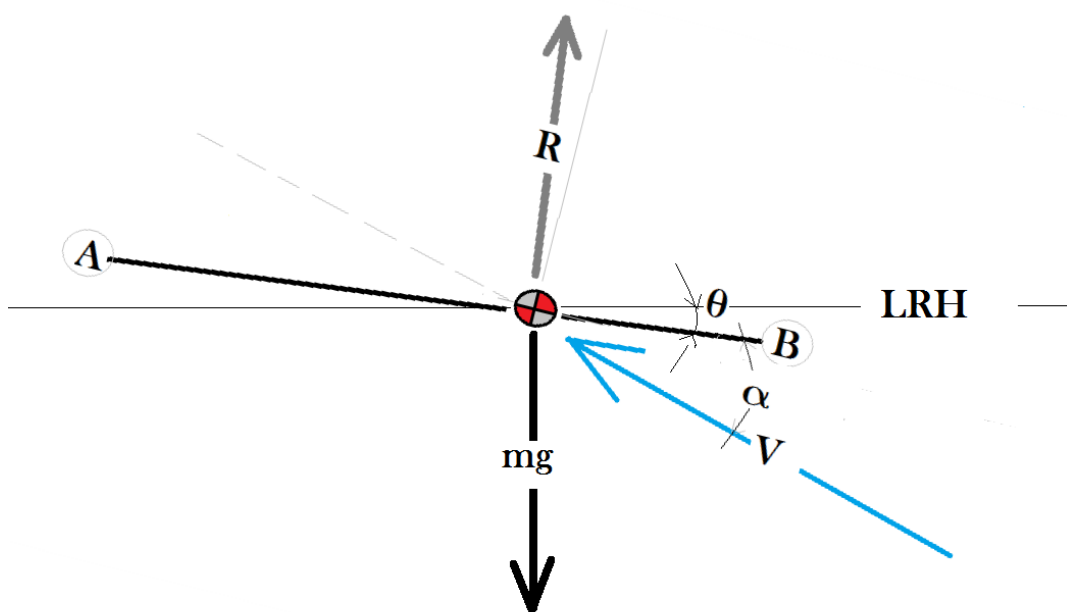


Fig. Add.02_01

La fuerza aerodinámica - Pénaud la denomina “Résistance” y es normal a la placa- necesaria para equilibrar el peso será, siendo “ c ” una constante:

⁵⁹ “Note de Mr. Navier *Sur l'évaluation approximative de la quantité d'action nécessaire pour le vol des oiseaux, et pour la direction des aérostats*”. Académie des Sciences. Paris, 6 de septiembre de 1830.

$$P = cSV^2 \sin \alpha \cos \theta$$

[Add.02_01]

Debido a que Pénaud supone que θ es pequeño, la expresión anterior quedará de un modo más simple:

$$P = cSV^2 \sin \alpha$$

[Add.02_02]

La constante “ c ” viene definida por Pénaud como la resistencia aerodinámica que experimentaría una placa de un metro cuadrado de superficie, a una velocidad de 1 m/s y sometida a un ángulo de ataque de 1° .

La constante “ c' ”, de un modo análogo al caso anterior, es la resistencia al avance con una velocidad de 1 m/s y una superficie frontal de 1 metro cuadrado. Ahora se trata de *resistencia* al avance en sentido estricto y trata de evaluar una resistencia que actualmente englobaríamos bajo la calificación de “parásita, y no incluye componentes debidos a la sustentación.

El trabajo -que es una magnitud escalar- será la suma de los trabajos de la *Sustentación* (T1) y del de *progresión* (T2) (o propulsión, como también lo denomina). Este trabajo Pénaud lo concibe por unidad de tiempo; es decir, que en realidad se trata de la potencia.

El “Trabajo de Sustentación” vendrá dado por la fuerza sustentadora multiplicado por la velocidad normal a la placa:

$$T1 = (cSV^2 \sin \alpha)(V \sin \alpha) = cSV^3 \sin^2 \alpha$$

[Add.02_03]

Si sustituimos en [Add.02_03] el valor de la velocidad extraído de [Add.02_02], obtenemos:

$$V = \sqrt{\frac{P}{cS \sin \alpha}} \Rightarrow T1 = P \sqrt{\frac{P \sin \alpha}{cS}}$$

[Add.02_04]

Pénaud extrae la siguiente conclusión, que le parece notable: para el movimiento uniforme de un plano que se desliza por el aire el trabajo necesario para mantenerle en suspensión disminuye según la raíz cuadrada del seno del ángulo de ataque. Si la velocidad crece indefinidamente, el trabajo necesario tiende a cero.

En cuanto al “Trabajo de Progresión” (T2) tenemos:

$$T2 = \left(c' S' V^2 \sin \frac{\pi}{2} \right) \left(V \sin \frac{\pi}{2} \right) = c' S' V^3$$

[Add.02_05]

La suma de ambos -recordemos que en realidad se trata de una potencia- es:

$$T = T1 + T2 = cSV^3 \sin^2 \alpha + c' S' V^3$$

[Add.02_06]

De [Add.02_02] obtenemos:

$$P = cSV^2 \sin \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{P^2}{c^2 S^2 V^4} \quad [\text{Add.02_07}]$$

La sustitución en (T) Ref. [Add.02_06] conduce a:

$$T = \frac{P^2}{cSV} + c'S'V^3$$

[Add.02_07]

Podemos ahora calcular sencillamente la velocidad para la que se obtiene el mínimo de potencia consumida por el vuelo:

$$\frac{dT}{dV} = -\frac{P^2}{cSV^2} + 3c'S'V^2 = 0 \Rightarrow V = \sqrt[4]{\frac{P^2}{3cSc'S'}} \quad [\text{Add.02_08}]$$

Luego ahora tenemos también, para el ángulo de ataque de mínima potencia, el valor:

$$\sin \alpha = \sqrt{3} \sqrt{\frac{c'S'}{cS}} \quad [\text{Add.02_09}]$$

Dado que la resistencia al avance equivale a la componente del peso según la dirección de avance, tenemos también:

$$c'S'V^2 = P \sin \theta \quad [\text{Add.02_10}]$$

Por tanto:

$$\sin^2 \theta = \frac{c'S'}{3cS} \quad [\text{Add.02_11}]$$

Lo que implica que, para el vuelo con mínima potencia, se cumple la relación:

$$\sin \theta = 3 \sin \alpha \quad [\text{Add.02_12}]$$

El trabajo total es:

$$T = \frac{4}{3} \sqrt[4]{3} P \sqrt{\frac{P}{cS}} \sqrt[4]{\frac{c'S'}{cS}} \approx 1.7548P \sqrt{\frac{P}{cS}} \sqrt[4]{\frac{c'S'}{cS}} \quad [\text{Add.02_13}]$$

Luego, para vuelo de mínima potencia se cumple que:

$$\left(\frac{T1}{T2} \right) = 3 \quad [\text{Add.02_14}]$$

El Teorema I de Pénaud⁶⁰ afirma que, como se acaba de demostrar, “Un pájaro que planea, desciende con la menor velocidad posible cuando emplea en el avance la cuarta parte del total del trabajo (\approx Potencia) invertido en el vuelo”.

Comentario

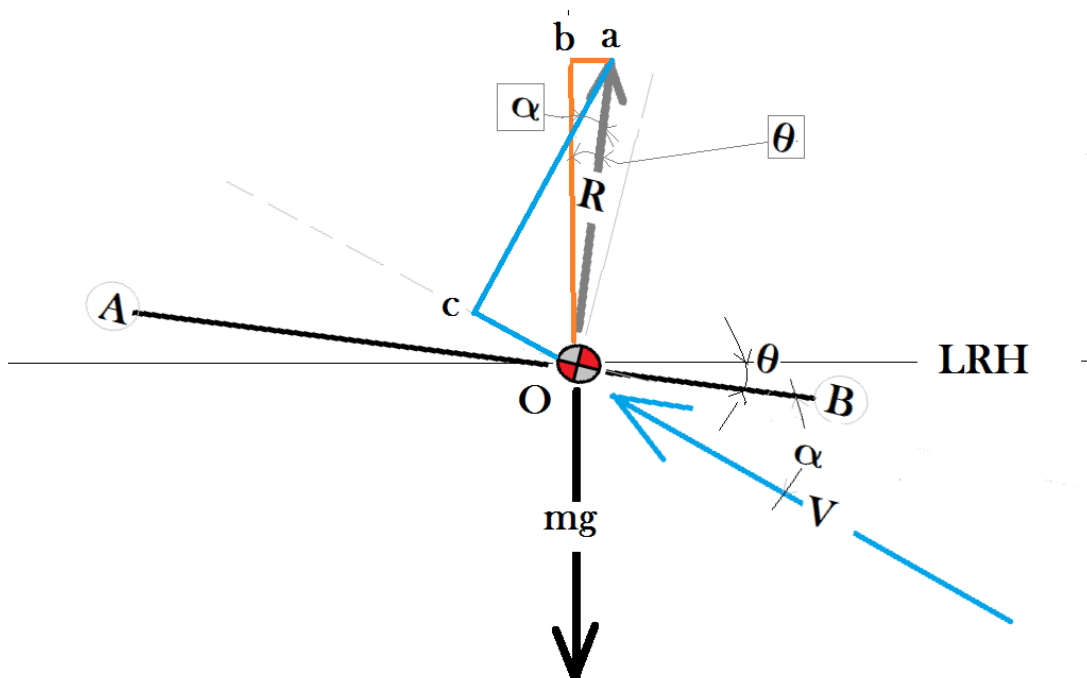


Fig. Add.02_02 (Con $mg = \text{Peso} = P$)

Las equivalencias⁶¹ que podemos establecer con el sistema actual (Cfr. Fig. Add.02_02), y que nos deberían servir para aquilatar los aciertos de Pénaud, son:

$$mg = \frac{1}{2} \rho SV^2 CL_\alpha \alpha \cos \theta = cSV^2 \sin \alpha \cos \theta \Rightarrow \frac{1}{2} \rho CL_\alpha \approx c \quad [\text{Add.02_15}]$$

Y también:

$$c'S'V^2 \approx \frac{1}{2} \rho SV^2 CD_0 \Rightarrow c'S' \approx \frac{1}{2} \rho S CD_0 \quad [\text{Add.02_16}]$$

Para lo que ya podemos denominar potencia total, tenemos, según Pénaud, pero con nomenclatura actual:

⁶⁰ Pénaud demuestra también que, si se aceptase la ley de Newton del seno cuadrado, el planeo más económico sería “la caída vertical”.

⁶¹ Respetamos ahora la decisión de Pénaud de considerar la fuerza aerodinámica total perpendicular a la placa para no complicar las expresiones comparativas.

$$Pot = \frac{1}{2} \rho CL_{\alpha} S V^3 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \rho S CD V^3 \approx \frac{1}{2} \rho S V^2 CL (V \alpha) + \frac{1}{2} \rho S V^2 CD_0 V$$

[Add.02_17]

Esta expresión puede compactarse algo más:

$$Pot = \frac{1}{2} \rho S V^2 (CL_{\alpha} \alpha^2 + CD_0) V$$

[Add.02_18]

La expresión correcta aceptada actualmente es:

$$Pot = \frac{1}{2} \rho S V^2 (K CL_{\alpha}^2 \alpha^2 + CD_0) V$$

[Add.02_19]

Observamos que la tendencia fundamental coincide con la correcta, aunque no existe, comprensiblemente, un acuerdo pleno. La fórmula de Pénaud aumenta excesivamente la parte de resistencia que actualmente denominamos *inducida* por la sustentación, ya que normalmente para alas rectas se cumple que:

$$KCL_{\alpha} \approx \left(\frac{1}{\pi AR e_{Oswald}} \right) \left(\frac{2\pi AR}{2 + \sqrt{4 + AR^2}} \right) = \left(\frac{1}{e_{Oswald} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{AR}{2} \right)^2} \right)} \right) < 1 .$$

[Add.02_20]

Las soluciones óptimas que calcula para la velocidad y los ángulos de mínima potencia adolecerán de esta limitación. No obstante, el modo de acometer el estudio de este tipo de problemas es básicamente correcto y se ha mantenido hasta hoy, resultando también útil en la mecánica de vuelo cuasiestacionario.

Teorema II

Pénaud se plantea ahora las condiciones estacionarias para máximo alcance, que -afirma- son las de mínima pendiente, que ahora considera pequeña. El proceso es algo menos claro que en el teorema anterior.

Siendo “*t*” el tiempo total invertido, la distancia horizontal recorrida será:

$$e \approx Vt$$

[Add.02_21]

Y siguen manteniendo su validez las siguientes ecuaciones ya obtenidas:

$$V^2 = \frac{P}{cS \sin \alpha}$$

[Add.02_22]

$$T = T1 + T2 = cSV^3 \sin^2 \alpha + c' S' V^3 \quad [\text{Add.02_23}]$$

Multiplicando [Add.02_21] por [Add.02_22] obtenemos:

$$V^3 t = \frac{eP}{cS \sin \alpha} \quad [\text{Add.02_24}]$$

Y sustituyendo en [Add.02_23] obtenemos, para la potencia (“Pot”) convertida ahora en trabajo realizado durante un tiempo “t”:

$$Pot = Tt = eP \sin \alpha + \frac{c' S'}{cS} \frac{eP}{\sin \alpha} = eP \left(\sin \alpha + \left(\frac{c' S'}{c S} \right) \frac{1}{\sin \alpha} \right) \quad [\text{Add.02_25}]$$

El mínimo se obtiene para:

$$\sin^2 \alpha = \frac{c' S'}{c S} \quad [\text{Add.02_26}]$$

El procedimiento que utiliza Pénaud equivale a minimizar la suma de los ángulos $\alpha + \theta$ y es lo mismo que hacerlo con la pendiente de la trayectoria $\gamma = \alpha + \theta$. De este modo se logra el máximo alcance. El cálculo de Pénaud es menos obvio, pero equivalente. Ahora trabajamos considerando los ángulos pequeños:

$$\theta \approx \frac{c' S' V^2}{P}; \quad \alpha \approx \frac{P}{c S V^2} \quad [\text{Add.02_26}]$$

El mínimo de γ se obtiene para:

$$V = \sqrt[4]{\frac{P^2}{c c' S S'}} \quad [\text{Add.02_27}]$$

Esto conduce a:

$$\frac{T2}{T1} = 1; \quad \alpha \approx \theta \quad [\text{Add.02_28}]$$

El teorema II queda establecido como sigue: “Un pájaro animado de un movimiento uniforme, en vuelo de planeo, tiene un alcance máximo con el mínimo descenso posible cuando el trabajo de “suspensión” es sensiblemente igual al trabajo de “traslación”. El plano de las alas divide entonces en dos partes iguales al ángulo formado por el horizonte y la dirección del movimiento, siendo, a la vez, el más pequeño posible”.

Consecuencias

Pénaud analiza los resultados de los cálculos que acaba de hacer, y trata de establecer algunas conclusiones de validez general. La única hipótesis que menciona es que se cumple la condición:

$$\frac{c' S'}{c S} \ll 1 \quad [\text{Add.02_29}]$$

Pénaud piensa que esto se cumple para todos los “*seres voladores*” salvo para algunos insectos. Piensa que pueden obtenerse indicaciones muy útiles sobre los pájaros y también para la mayoría de los “*sistemas de aviación*”-

Consecuencia 1. Hasta cierto punto, los teoremas I y II Pénaud los considera aplicables también al vuelo de un pájaro con batimiento de las alas, aunque afirma que los coeficientes deberían sufrir algunos cambios.

Consecuencia 2. Dado que los coeficientes “*c*”, “*c'*”, “*S*”, “*S'*” son muy similares para pájaros de una misma especie, se puede suponer que las velocidades ordinarias serán muy parecidas o incluso las mismas; podrá decirse que tienen una “*velocidad propia*”, como así parece ser la realidad. Esta velocidad será mayor cuanto mayor sea el peso y menores sean los coeficientes “*c*”, “*c'*”, “*S*”, “*S'*”. Es decir: cuanto mayor sea el pájaro y menores sean sus alas: cuanto más se parezca a un proyectil. No obstante, los pájaros pueden dotar a sus alas de actitudes y ángulos muy variados, mucho más que los murciélagos o los insectos. Por esto son tan versátiles y elegantes en sus movimientos.

Consecuencia 3. El trabajo necesario para mantener el vuelo es tanto menor cuanto mayor sea el producto “*c S*” respecto del Peso. Este -dice Pénaud- es el gran escollo de la aviación. No obstante, considera que el objetivo de la navegación aérea debe ser alcanzar velocidades muy superiores a las que ofrecen los actuales medios de locomoción, y así relativiza la objeción recién mencionada.

Consecuencia 4. El trabajo necesario para el vuelo depende mucho del producto “*c' S'*”. Por eso los pájaros tienen formas más o menos fuseladas: para ofrecer el aspecto de buenos proyectiles. Incluso algunos pliegan sus patas y las pegan a la cola. Todos los pájaros que tiene que efectuar migraciones tienen las alas grandes.

Consecuencia 5. Los ángulos de ataque y de asiento longitudinal óptimos son independientes del peso del pájaro.

Consecuencia 6. Para pájaros parecidos, la velocidad de vuelo es proporcional a la raíz cuadrada de las dimensiones homólogas,

Consecuencia 7. Estas consideraciones no se aplican directamente a las hélices. Todo ascenso o descenso modifica las condiciones motoras del vuelo estacionario del pájaro.

Consecuencia 8. Los cálculos realizados no se aplican solamente a los pájaros. Sirven también para cualquier plano inclinado dotado de un propulsor. (Aquí Pénaud menciona el modelo de avión “*Planophore*” de su invención) La *capacidad* de los motores -en este caso- deberá ser proporcional a la resistencia que se opone a la marcha -basada en “*c' S'*” y no es función del peso, que tampoco influirá en las dimensiones de los timones.

Pénaud parece afirmar que tampoco influirá la densidad del medio fluido en el que se desplaza el avión y de la velocidad. Estas últimas afirmaciones no pueden sostenerse actualmente.

Consecuencia 9. Alrededor de sus valores óptimos, las potencias necesarias aumentan lentamente, lo que es favorable para un transporte aéreo económico.

Pénaud efectúa finalmente, un intento de cálculo de los coeficientes “ c ” y “ c' ”, y - resulta interesante mencionarlo- dice haber obtenido mediciones parecidas a las que obtuvo Cayley, a partir de una recopilación de las geometrías y las masas de cierto número de pájaros, y de estimaciones de algunos datos característicos del modo de vuelo que manifestaban. Menciona, de pasada, la necesidad de que la cola esté menos inclinada que el ala principal. Obtiene algunas cifras que, debido a la gran dificultad de las mediciones y a su escaso número, no considera fiables. Termina insistiendo en la necesidad de abandonar la ley del seno cuadrado, y de proseguir con una experimentación que no pierda de vista lo mucho que podemos aprender de las aves. Esta recomendación final será seguida muy literalmente por Otto Lilienthal.

Bibliografía

- [1] Pénaud, A. “*L’ Aeroplane Automoteur avec équilibre automatique*”. *L’Aéronaute*”, Bulletin Mensuel International de la NAVIGATION AÉRIENNE; 5º ANNEÉ, N° 1-12. Paris. (1872).
- [2] Pénaud, A. “*Lois du Glissement dans l’Air*”. *L’Aéronaute*”, Bulletin Mensuel International de la NAVIGATION AÉRIENNE; 6º ANNEÉ, N° 1, Paris (1873).
- [3] Pénaud, A. “*Sur la forcé des étres volants*”. Communication faite á la Société Philomatique. (1876).
- [4] Pénaud, A. “*Discours prononcé le 14 de mars de 1878 dans la séance générale de la Société de Navigation Aérienne*”. Paris. (1878).
- [5] Pénaud, A. “*Recherches sur la résistance des fluides*”. Bulletin de la Societé Philomatique de Paris. (1878).
- [6] Pénaud, A; Gauchat, P. “*Un brevet d’aeroplane*”. *L’Aeronaute*, 10 année, No 10. Pp. 274-289. Paris. (1877).
- [7] Wright, W & O. “*The Papers of Wilbur and Orville Wright*”; Vol. 1, 1899-1905. Pág. 3. (1953).

Capítulo 5

Otto Lilienthal (1848-1896)



Contenido

5.1 Nota biográfica

⁶² <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/lilienthal.htm>. (14.06.2017)

5.2 Documento de referencia objeto de estudio.

5.3 Descripción del contenido.

5.3.1 Las Gráficas Polares de la Fuerza Aerodinámica.

5.3.2 La Posición del Centro de Presión.

5.3.3 Control del Momento de Cabeceo.

5.4 Conclusiones.

Bibliografía.

5.1 Nota biográfica

Nacido en Anklam, cerca del Báltico. Desde su infancia, junto con su hermano Gustav, se interesó por el vuelo de los pájaros. Trabajó como aprendiz en la Ingeniería L. Schwarzkopff. Comenzó sus estudios en la *Königliche Geberbeakademie* (Berlín). Como joven ingeniero, trabajó para la empresa *Carl Hoppe*. En 1873 diseñó un aparato volador de alas batientes. Se independizó profesionalmente montando una empresa de generadores de vapor: "*Maschinenfabrik Otto Lilienthal*". Estudió la posibilidad de la turbina de vapor ("*Dampfstrahlrad*") para propulsar barcos, y obtuvo varias patentes. Realizó más de 2000 vuelos con planeadores de su invención. Murió en accidente aéreo en Berlín-Lichterfelde. Las causas no han sido determinadas: problemas de estabilidad o de ráfagas, rotura de un larguero alar, o una combinación de varias. [4].

5.2 Documento de referencia objeto de estudio.

"Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Ein Beitrag zur systematik der Flugtechnik". Berlín: R. Gaertners Verlagbuchhandlung. (1889).

5.3 Descripción del contenido.

Lilienthal observa que hay significativas diferencias entre las fórmulas ofrecidas por diversos investigadores para estimar la fuerza aerodinámica que se ejerce sobre una placa delgada sumergida en una corriente de aire, cuando la corriente es perpendicular a la placa. Si la superficie tiene curvatura, los resultados son aún menos fiables. No obstante, considera firmemente establecido que la resistencia depende del cuadrado de la velocidad.

5.3.1 Las Gráficas Polares de la Fuerza Aerodinámica sobre un perfil.

Cuando el ángulo de incidencia es distinto de 90° , la cuestión se complica. Lilienthal sabe que influye mucho la forma en planta del ala respecto de la corriente, pero no conoce el modo de cuantificarla. Con estas y otras parecidas limitaciones, una aportación muy importante de Lilienthal, y que influirá mucho en estudios posteriores, es su análisis de la fuerza aerodinámica resultante sobre placas, planas o curvas, en función del ángulo de ataque. Los gráficos en los que plasma sus resultados son fruto de un trabajo concienzudo y riguroso. El gráfico de la Fig. 5.1 reproduce el modo de representar los resultados de sus experimentos.

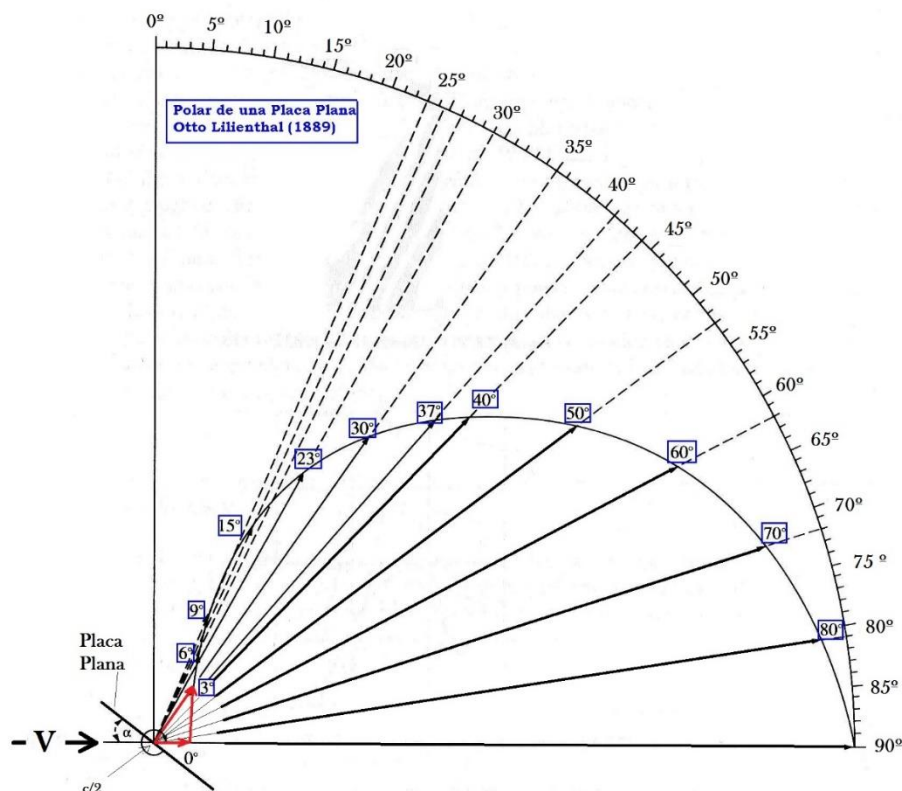


Figura 5.1: Ejemplo típico del modo que emplea Lilienthal para presentar gráficamente la relación entre la fuerza aerodinámica sobre una placa - en este caso plana - y el ángulo de ataque. El módulo de los vectores representa la magnitud de la fuerza aerodinámica y su inclinación (respecto de la velocidad) puede leerse directamente en el gráfico.

Para una placa plana -tal como puede verse en el extremo inferior izquierdo de la Fig. 5.1- cuyo alargamiento no siempre indica, y para diferentes valores del ángulo de ataque α , grafica el valor de la resultante R que permite conocer las dos componentes fundamentales de la resistencia aerodinámica global: sustentación (normal a la velocidad) y resistencia (opuesta a la velocidad). Es un modo cómodo, claro y eficaz de mostrar cuánto vale la fuerza que se opone al movimiento, y qué fuerza útil se obtiene en la dirección normal al mismo para sustentar el peso. Obviamente, ya no puede mantenerse la consideración de que la Fuerza Aerodinámica total es perpendicular a la placa.

Una limitación importante, desde el punto de vista del presente estudio, reside en que Lilienthal sitúa siempre -para cualquier ángulo de ataque-, la fuerza resultante en el

50% de la cuerda alar. Esto es correcto cuando el ángulo de incidencia es 90° , pero no se puede suponer lo mismo para todo el rango de variación de α . Teniendo en cuenta el rigor con el que habitualmente Lilienthal trabaja, pensamos que esto no puede ser casual (Cfr. Fig. 5.2), pero no hemos hallado un tratamiento específico de este aspecto del problema en la referencia aquí estudiada.

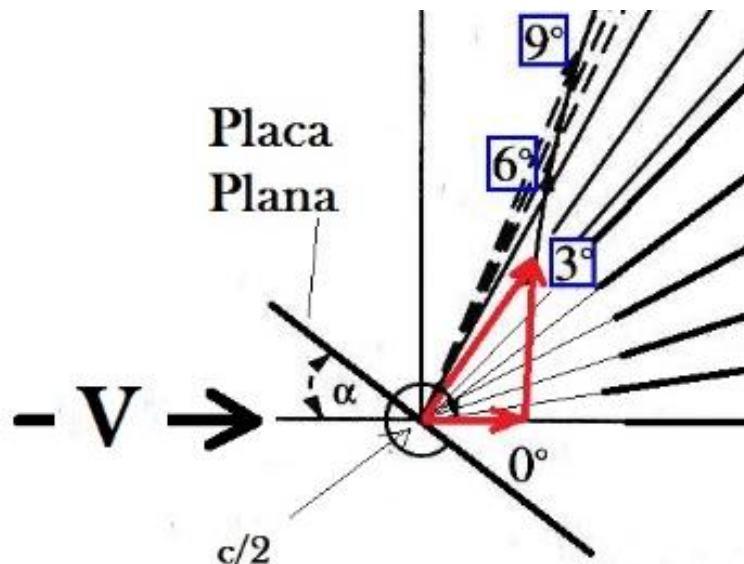


Figura 5.2: La fuerza aerodinámica resultante es situada en el centro de la cuerda de la placa.

En la Fig. 5.3, reproducción de la que Lilienthal muestra en Ref. [2], puede verse el esquema de un perfil alar ab sometido a una velocidad V con ángulo de ataque α . Lilienthal sitúa la resultante en la mitad de la cuerda alar; esto sería aproximadamente correcto solamente si el ángulo de ataque fuese nulo respecto de la línea ab , lo que no sucederá, en general.

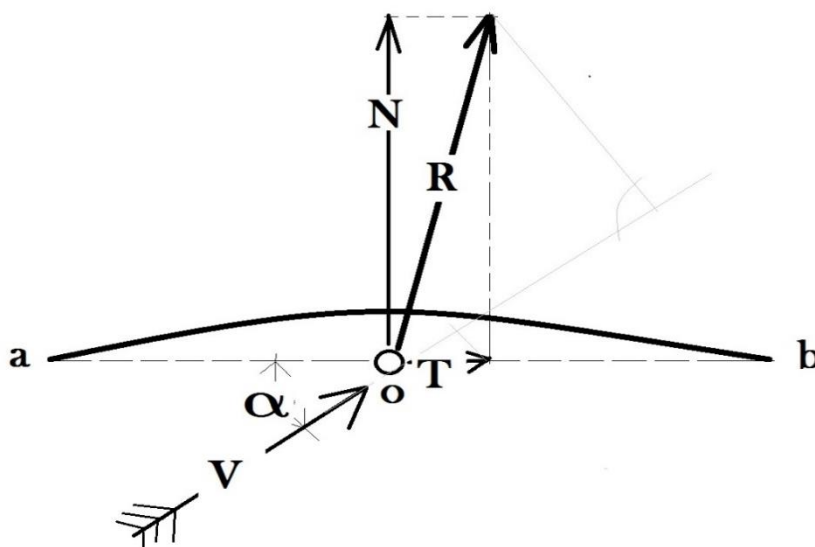


Figura 5.3. Fuerza normal y tangencial de un perfil alar con curvatura sometido a una corriente con ángulo de ataque α .

Lilienthal efectuó medidas de las componentes tangencial T , según la cuerda ab tal como aparece en la figura, y normal N . La suma vectorial de ambas es la fuerza aerodinámica total R .

Por ejemplo para un perfil delgado curvo según Ref. [1], Diagrama VI, Lilienthal expresa la fuerza Normal y la Tangencial del modo siguiente (Vid. Tabla 5.1):

$$N = 0.13 S V^2 \eta(\alpha), \quad T = 0.13 S V^2 \theta(\alpha)$$

Las funciones $\eta(\alpha)$, $\theta(\alpha)$ aparecen tabuladas en función del ángulo de ataque.

" α ($^\circ$)"	" $\eta(\alpha)$ de N"	$\theta(\alpha)$ de T	" α ($^\circ$)"	" $\eta(\alpha)$ de N"	" $\theta(\alpha)$ de T"
-9	0	-0.07	16	0.909	0.075
-8	0.04	-0.067	17	0.915	0.073
-7	0.08	-0.064	18	0.919	0.07
-6	0.12	-0.06	19	0.921	0.065
-5	0.16	-0.055	20	0.922	0.059
-4	0.2	-0.049	21	0.923	0.053
-3	0.242	-0.043	22	0.924	0.047
-2	0.286	-0.037	23	0.924	0.041
-1	0.332	-0.031	24	0.923	0.036
0	0.381	-0.024	25	0.922	0.031
1	0.434	-0.016	26	0.92	0.026
2	0.489	-0.008	27	0.918	0.021
3	0.546	0	28	0.915	0.016
4	0.6	0.007	29	0.912	0.012
5	0.65	0.014	30	0.91	0.008
6	0.696	0.021	32	0.906	0
7	0.737	0.028	35	0.896	-0.01
8	0.771	0.035	40	0.89	-0.016
9	0.8	0.042	45	0.888	-0.02
10	0.825	0.05	50	0.888	-0.023
11	0.846	0.058	55	0.89	-0.026
12	0.864	0.064	60	0.9	-0.028
13	0.879	0.07	70	0.93	-0.03
14	0.891	0.074	80	0.96	-0.015
15	0.901	0.076	90	1	0

Tabla 5.1

Se puede observar que Lilienthal efectúa mediciones variando de grado en grado, desde $\alpha = -9^\circ$ hasta $\alpha = 30^\circ$ en que comienza a hacerlo de dos en dos grados, y va aumentando paulatinamente el tamaño de los intervalos, hasta hacerlo de 10 grados en 10 grados en la zona final cercana a la perpendicularidad del ala respecto de la corriente. Esto es lógico, ya que Lilienthal sabe que los ángulos de interés para los planeadores están mucho más cerca de $\alpha = 0$ que de $\alpha = 90^\circ$

La información que proporcionan los datos que Lilienthal muestra en sus tablas es de gran utilidad, y será altamente valorada por muchos pioneros, y se servirán de ella Zhukowsky y los Wright, independientemente de que detectasen inexactitudes y decidieran construir un túnel aerodinámico básico para sus propios ensayos.

La conversión de la fuerza Normal a la cuerda y Tangencial a la cuerda en Sustentación (normal a la velocidad) y Resistencia según la velocidad es inmediata y, para el ejemplo que estamos mostrando conduciría a los siguientes resultados, expresados en forma adimensional, asimilando unos coeficientes a los otros mediante las siguientes transformaciones:

$$\eta_{CL}(\alpha) = \eta(\alpha) \cos \alpha - \theta(\alpha) \sin \alpha$$

$$\theta_{CD}(\alpha) = \eta(\alpha) \sin \alpha + \theta(\alpha) \cos \alpha$$

La tabla 5.1 se corresponde con los gráficos 5.4, 5.5 y 5.6.

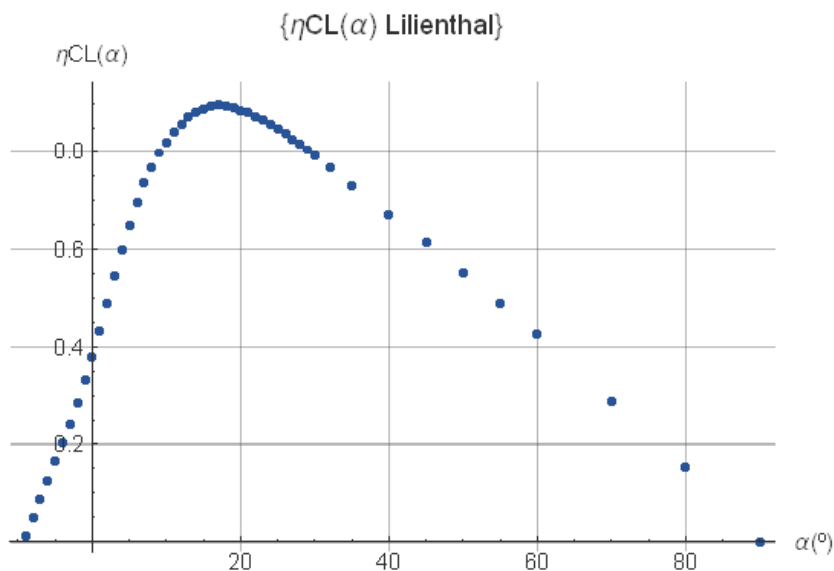


Figura 5.4, Coeficiente $\eta_{CL}(\alpha)$ correspondiente a la Tabla 5.1

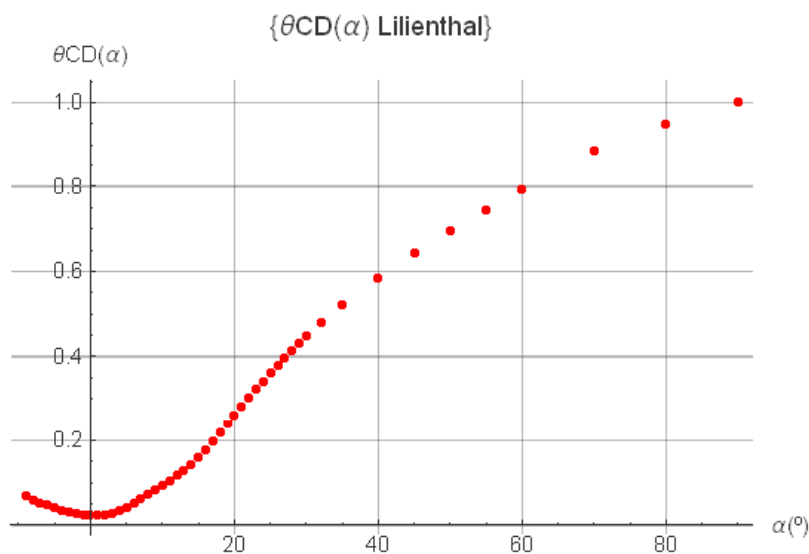


Figura 5.5. Coeficiente $\theta_{CL}(\alpha)$ correspondiente a la Tabla 5.1

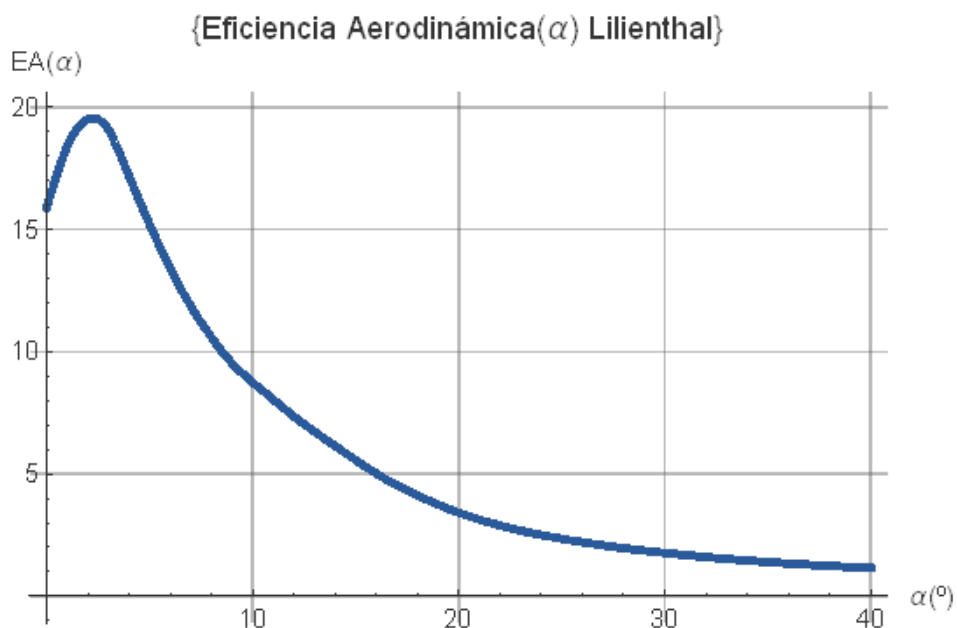


Fig. 5.6 Eficiencia Aerodinámica correspondiente a la Tabla 5.1

Se comprende la inestimable ayuda que esta información proporcionaba a los estudiosos del vuelo artificial, con independencia de las limitaciones propias del procedimiento utilizado por Lilienthal para obtenerlas, pues ofrecía un conjunto de datos numéricos experimentales revestidos de la autoridad técnica de que les proporcionaba el hecho de que su *descubridor* los aplicaba en la práctica con éxito a sus propios modelos de planeadores. Frente a este hecho, que es una primicia en el ámbito de la aeronáutica, resultan de importancia menor las inexactitudes que existían en las tablas.

También resultó inmediatamente comprensible para los pioneros que los ángulos de ataque útiles para la aviación eran solamente los ángulos pequeños, que proporcionaban una relación *Sustentación / Peso* apta para el vuelo. Especialmente si tomamos en consideración que los valores de la tracción disponible que proporcionaban inicialmente los motores de la época eran bajos.

5.3.2 La posición del Centro de Presión.

No obstante, deseamos subrayar ahora -en este estudio- el hecho de que Lilienthal sitúa, sin mencionarlo explícitamente, la resultante de la fuerza aerodinámica en el centro de la cuerda del ala. Esto no es un problema serio si solamente nos interesa saber cómo varía el módulo las fuerzas Tangencial y Normal con el ángulo de ataque, pero pasa a serlo de primera magnitud cuando se trata de estudiar el equilibrio de un sistema sustentador formado por alas como la estudiada por Lilienthal. Y lo es particularmente si solamente se trata de un ala.

El problema de la posición de la resultante de la fuerza aerodinámica parece no haber constituido para Lilienthal un punto importante de su teoría, pues no se detiene a verificar este aspecto que, desde el punto de vista de la estabilidad longitudinal, es del mayor interés.

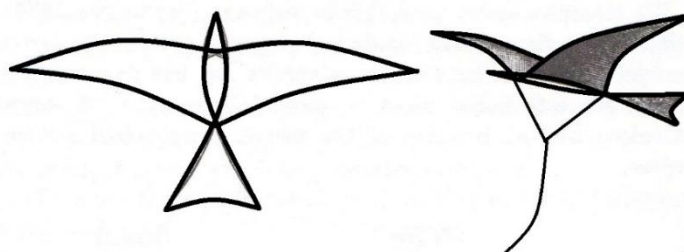


Figura 5.7: Lilienthal experimentó con formas voladoras -tipo cometa- inspiradas en las aves.

Su libro incluye la Figura 5.7, en la que puede verse la estructura clásica de un avión, con ala principal y cola estabilizadora; Lilienthal la estudia sólo sometida a las condiciones de vuelo de una cometa, sujeta a tierra por un cable, sin comentarios; no se detiene en analizar el papel que realiza en este caso la cola, aunque admite que este diseño logra volar casi horizontalmente, es decir, con un ángulo de ataque que es muy pequeño. Esto podía haberle sugerido el tipo de acción que la cola podría realizar.

5.3.3 Control del Momento de Cabeceo.

Uno de sus planeadores servirá para ilustrar lo que acabamos de mencionar.

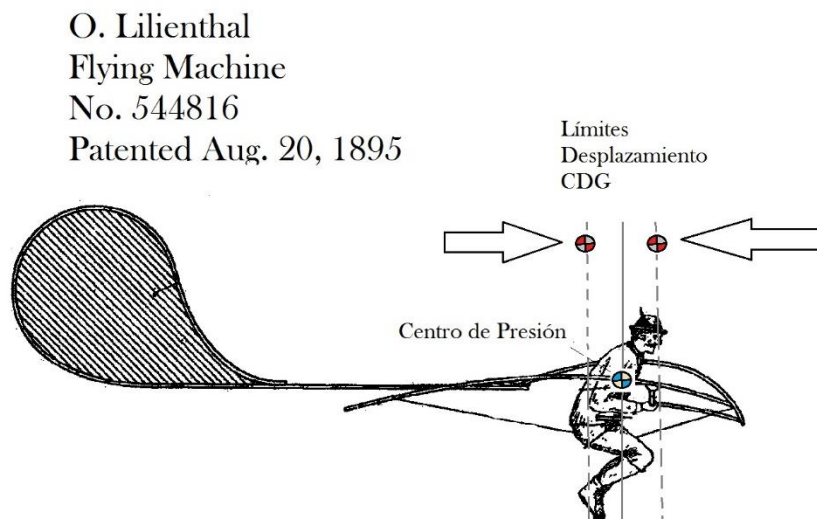


Figura 5.8: El control longitudinal de los planeadores de Lilienthal se lograba mediante el desplazamiento del centro de gravedad del aparato; para lograrlo, el piloto tenía que desplazar sus piernas o su cuerpo en el grado necesario, hacia adelante o hacia atrás. (También hacia los lados para el control lateral)

El modelo de la Fig. 5.8 muestra parte⁶³ de los dibujos de la Patente 544816 de 1895 (USA). Carece de empenaje horizontal. El control longitudinal lo realizaba Lilienthal mediante el desplazamiento del centro de gravedad del conjunto aeronave-tripulante, alterando la actitud y posición del piloto. Este debería desplazar sus piernas hacia adelante o hacia atrás para modificar la posición del *CDG* y, como consecuencia, variar el momento de cabeceo en el sentido deseado para influir en la dinámica longitudinal.

Es un sistema arriesgado si no se conocen bien los límites aerodinámicos del avión y si se carece de un indicador de la actual situación del avión respecto de estos límites. Estos límites son, básicamente, la relación adecuada entre la velocidad necesaria para mantener el vuelo y el ángulo de ataque.

La ecuación simplificada del coeficiente de momento de cabeceo, para un modelo de planeador sin cola horizontal y con la nomenclatura habitual, puede escribirse como:

$$CM = CL_{\alpha} (x_{CDG} - x_{CP}) \alpha \quad [5.1]$$

⁶³ El dibujo muestra solamente las partes del planeador relevantes a efectos de la explicación del tipo de control usado por Lilienthal.

Vemos que la condición de vuelo estacionario, que exige que se cumplan simultáneamente dos condiciones: por una parte, expresado ahora con nomenclatura antigua, $\alpha \approx \frac{mg}{KSV^2} \neq 0$ y también $CM = 0$. Esto solamente puede cumplirse si ($x_{CDG} = x_{CP}$) y la generación de momentos de cabeceo de control, unas veces positivos y otras negativos, exige movimientos del x_{CDG} .

Este es el rudimentario sistema que utilizaba Lilienthal para controlar en cabeceo. Es generalmente aceptado que, por alguna perturbación atmosférica o de otro tipo, su avión se desplomó, resultando mortalmente herido.

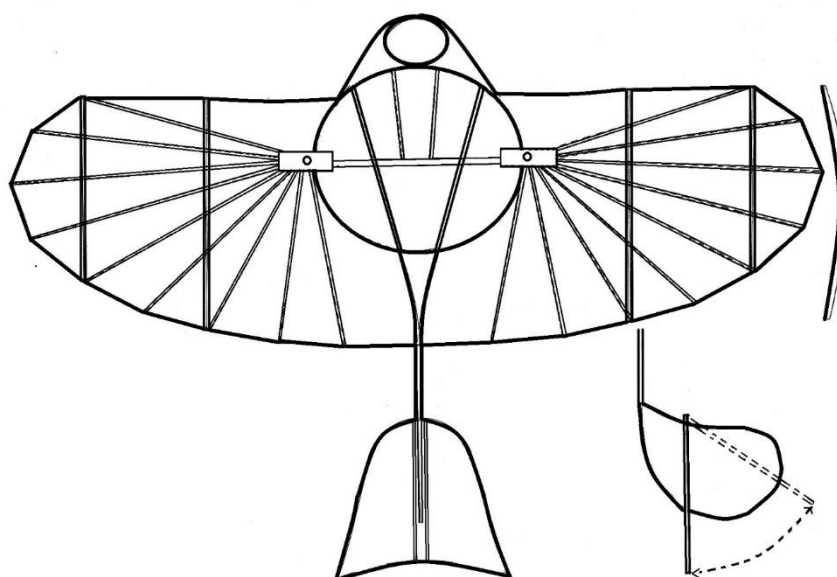


Figura 5.9: Boceto de planeador de Lilienthal; este es uno de los 19 diseños diferentes que llegó a realizar, y en los que efectuó numerosos vuelos. Puede verse el perfil alar curvo, y el curioso empenaje abatible en un solo sentido.

El modelo de planeador de la Fig. 5.9 incorpora un empenaje posterior basculante que tiene la particularidad de soportar solamente cargas hacia abajo, y esto solamente a partir de la posición extrema inferior. Lilienthal suponía que si el planeador entraba en pérdida⁶⁴, el empenaje recibía el flujo de aire desde abajo y giraba, y de este modo no generaba sustentación y el aparato debía “*descender como un paracaídas*”, en palabras de Lilienthal. Se trataba -según esto- de un empenaje estabilizador, pero sólo limitada y marginalmente.

Para Lilienthal parece haber sido de importancia secundaria -para obtener la sustentación deseada- el que el planeador tenga o no cola, aunque acepta que la posibilidad del vuelo de planeo no depende de la capacidad de mover las alas con la

⁶⁴ Lilienthal no utiliza esta terminología.

potencia necesaria, sino de adoptar una adecuada dirección de las alas respecto del viento incidente. Pero no desarrolla esta intuición en la línea de comprender el efecto estabilizador de un empenaje fijo.

5.4 Conclusiones.

- (1) La cuestión de la estabilidad intrínseca de sus planeadores no parece haber preocupado a Lilienthal, que lograba controlarlos satisfactoriamente⁶⁵, gracias a la destreza adquirida a lo largo de los más de 2000 vuelos de planeo que realizó.
- (2) Lilienthal se centró -en el texto que ahora analizamos- fundamentalmente en establecer las fuerzas aerodinámicas, pero no en la cuestión correlativa de su línea de acción, y de cómo variaba con las condiciones de vuelo. En los gráficos en los que se muestra la representación polar de la fuerza aerodinámica total, la línea de acción correspondiente aparece sistemáticamente pasando por el punto medio de la cuerda, sin comentarios explicativos. Los modelos de planeador de Lilienthal, además, tenían la cuerda de longitud variable según la envergadura.
- (3) Su aportación técnica fundamental estriba en haber clarificado el concepto aerodinámico, y tabulado, para distintos tipos de placas, la fuerza aerodinámica resultante, y sus componentes según la sustentación y la resistencia. Y esto de un modo claro, práctico y bien adaptado a su aplicación directa. Eventualmente, algunos de los cálculos de Lilienthal resultaron incorrectos. Los hermanos Wright conocían el libro de Lilienthal, y la vida (y muerte) de este pionero les inspiró las primeras ideas de dedicarse seriamente a estudiar la posibilidad del vuelo artificial.
- (4) Desde un punto de vista diferente, la difusión mundial que alcanzaron los logros de Lilienthal supuso para muchos, también en el ámbito científico, el despertar de un interés por el vuelo artificial cuyo alcance es difícil sobrevalorar [3]. No hemos encontrado pioneros de la aviación que, de un modo u otro, no lo consideren una figura que inspiró su propio trabajo.

⁶⁵ De un modo parecido, los Wright tendrán que familiarizarse con el control activo de un avión -el *Flyer*- que era inestable longitudinalmente. Para pilotarlo se necesitaba haber adquirido mucha destreza *volándolo*.

Bibliografía

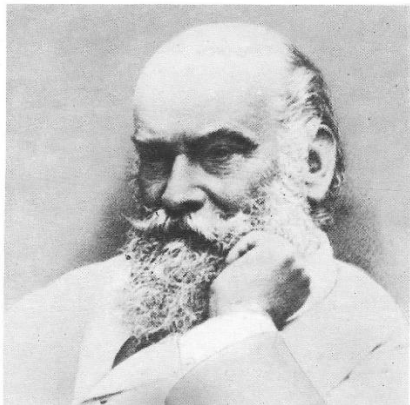
- [1] Lilienthal, O. (1889). “Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Ein Beitrag systematik der Flugtechnik”. Berlin: R. Gaertners. Verlagbuchhandlung.
- [2] Lilienthal, O. (1889). “Artificial Flight”. Moedebeck, H. Taschenbuch zum praktischen Gebrauch für Flugtechniker und Luftschiffer, unter Mitwirkung von Ingenieur O. Chanute, Dr. R. Emden, K. u. K. Hauptmann, H. Hoernes, Prof. Dr. W. Köppen, Prof. Kremser, Dr. W. Kutta, Ingenieur O. Lilienthal, et Alia. W. H. Küllhs Verlag. Berlin. (1909).
- [3] Brockett, P. Bibliography of Aeronautics; Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 55. Publication No. 1920. Washington. USA. (1910)⁶⁶
- [4] Hirschel, E. H. Prem, H., Madelung, G. “Aeronautical Research in Germany”. Springer. Berlin. (2004).

⁶⁶

Este documento recoge más de 13.500 títulos bibliográficos, relacionados directamente con la Aeronáutica. Desde el siglo XV hasta el año de 1909. Es interesante mencionar que más de 100 referencias corresponden a Otto Lilienthal; las hay en alemán, francés e inglés.

Capítulo 6

N. E. Zhukowsky (1847-1921)



67

Contenido

6.1 Nota Biográfica

⁶⁷ https://en.wikipedia.org/wiki/Nikolay_Yegorovich_Zhukovsky. (14.06.2017)

6.2 Documentos de referencia.

6.3 Descripción de contenido.

6.3.1. “*Sobre el Vuelo de Planeo de las Aves*” (1891).

6.3.2 “*Sobre el ángulo óptimo de vuelo de un aeroplano*” (1897)

6.3.3. “*Sobre la Caída en el Aire de Cuerpos Ligeros Alargados con Giro Alrededor de su Eje Longitudinal*” (1906)

6.3.4. “*Descripción Elemental de la Dinámica de los Aeroplanos*” (1913)

6.4 Estabilidad angular en cabeceo.

6.5 Conclusiones

Bibliografía

6.1 Nota Biográfica.

Nicolai Egorovitch Zhukowsky nació en Orekhovo (Rusia), y se graduó en 1868 en Matemática Aplicada en la Facultad de Física y Matemática de Moscú. Profesor de matemática y mecánica teórica en la Escuela Técnica de Moscú. Obtuvo el doctorado por la Universidad de Moscú con una tesis sobre Estabilidad. Director del Departamento de Mecánica (1886) de esta universidad. Premio N. D. Brashman (1885) por sus trabajos teóricos sobre la dinámica de los fluidos. Publicó más de 200 trabajos sobre mecánica, y es considerado el padre de la aeronáutica rusa por sus trabajos en hidromecánica y aerodinámica. (En 1885 visitó a Lilienthal en Berlín y le compró un planeador). Su trabajo se concentró en los aspectos teóricos y prácticos de la hidrodinámica, teoría de la sustentación, vórtices, estabilidad longitudinal y lateral de los aeroplanos, transformación conforme, ondas de choque, presas hidráulicas, etc.... En 1918 organizó el Instituto Aero Hidrodinámico Central⁶⁸, siendo su primer director.

6.2 Documentos de referencia.

(1) “*Sobre el vuelo de planeo de las aves*” (1891). Boletín de la Sociedad Aeronáutica de Moscú. [1].

(2) “*Sobre el óptimo ángulo de vuelo de un aeroplano*”. (1897). [29]

(3) “*Sobre la caída en el aire de cuerpos ligeros alargados con giro alrededor de su eje longitudinal*” (1906). [2]

(4) “*Descripción elemental de la dinámica de los aeroplanos*” (1913). [3]

⁶⁸ En 1922 se le puso el nombre de “*Academia Zhukowsky de Ingeniería Militar y Aeronáutica*”.

6.3 Descripción de contenido.

6.3.1 Primer documento. О ПАРЕНИИ ПТИЦ “*Sobre el vuelo de planeo de las aves*”. (1891).⁶⁹

(1) En primer lugar, para el análisis del vuelo de planeo de las aves Zhukowsky [1] acepta la ley del seno y asimila el ave a una sola placa plana delgada de superficie S . Denomina α al ángulo que forma la placa con el viento relativo, (afirma que no debe superar los 15°); la resultante aerodinámica total $\{R\}$, que supone perpendicular a la placa, tendrá el valor:

$$R = 0.13 S V^2 \sin \alpha \quad [6.1]$$

La constante 0.13 proviene de Coupil [5] y tiene dimensiones de densidad. Puede verse que Zhukowsky no considera relevante la forma de la superficie.

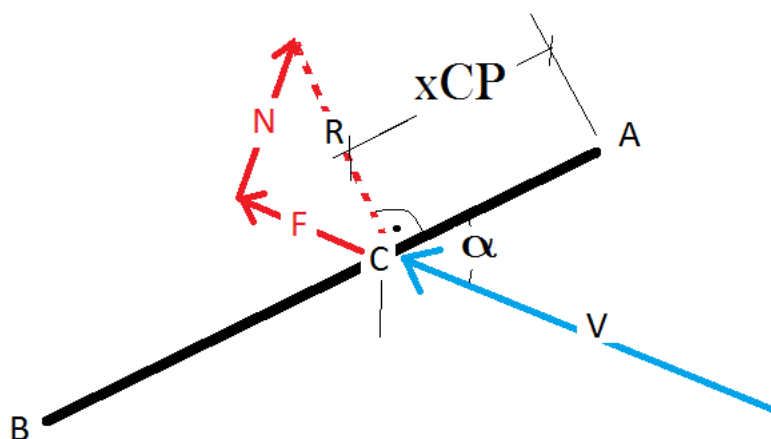


Figura 6.1: Descripción esquemática para el estudio del vuelo planeado. El ala es asimilada a una placa plana AB.

Esta fuerza puede descomponerse en dos (Ref. Fig. 6.1): tangente a la trayectoria (según la velocidad) “F” y normal a la trayectoria “N”. Su valor⁷⁰ es:

$$\begin{aligned} F &= R \sin \alpha = 0.13 S V^2 \sin^2 \alpha \\ N &= R \cos \alpha = 0.13 S V^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad [6.2]$$

⁶⁹ Traducido del original ruso por Artem Dombrovsky, Ingeniero Aeronáutico por la Universitat Politècnica de València (España), a quien el autor agradece cordialmente su desinteresada colaboración.

⁷⁰ Cfr. Ref. [6], Pág. 12 y ss.

Las dos fuerzas N y F podrán ser obtenidas -afirma Zhukowsky- a partir de las Tablas que Lilienthal había publicado dos años antes [6].

(2) En segundo lugar, Zhukowsky acepta a la “*Ley del Centro de Presión*”, de Avanzini [7] y Joëssel [8]⁷¹, para la ubicación del centro en función del ángulo α , siendo c la cuerda de una placa rectangular, y medido desde el borde de ataque A (Ref. Fig. 6.1):

$$\left(\frac{x_{CP}}{c} \right) = 0.2 + 0.3 \sin \alpha \quad [6.3]$$

Se puede observar que la ubicación del centro de presión para $\alpha = 0$ es:

$$\left(\frac{x_{CP}}{c} \right) = 0.2$$

Avanzini y Joëssel trabajaron con agua. Kummer [9] con aire, y Zhukowsky realizó sus propios experimentos con aire.

A cada posición del centro de presión sobre la placa le corresponde un solo ángulo α de la dirección del viento incidente sobre la placa, y viceversa.

El vuelo de planeo estacionario exige que en cualquier momento el ave debe estar en equilibrio respecto de su centro de gravedad. Esto significa que la dirección de la fuerza aerodinámica resultante debe pasar por ese punto. Asimilando el elemento sustentador de un ave a una placa plana, la idea que acabamos de mencionar exige que el centro de gravedad coincida con el centro de presión. Para lograrlo, según Zhukowsky, el ave cambia la posición de su centro de gravedad sin alterar la posición de sus alas, o al revés, modifica la posición de sus alas y de la cola.

El estudio del vuelo de planeo en un plano vertical e integración de las ecuaciones conduce a la primera aparición en una publicación científica de la oscilación de largo período que, años después, Lanchester [10] estudiará y denominará “Fugoide”.

El sistema que describe Zhukowsky es el siguiente. (Ref. Fig. 6.2)

⁷¹ Una y otra difieren en muy poco.

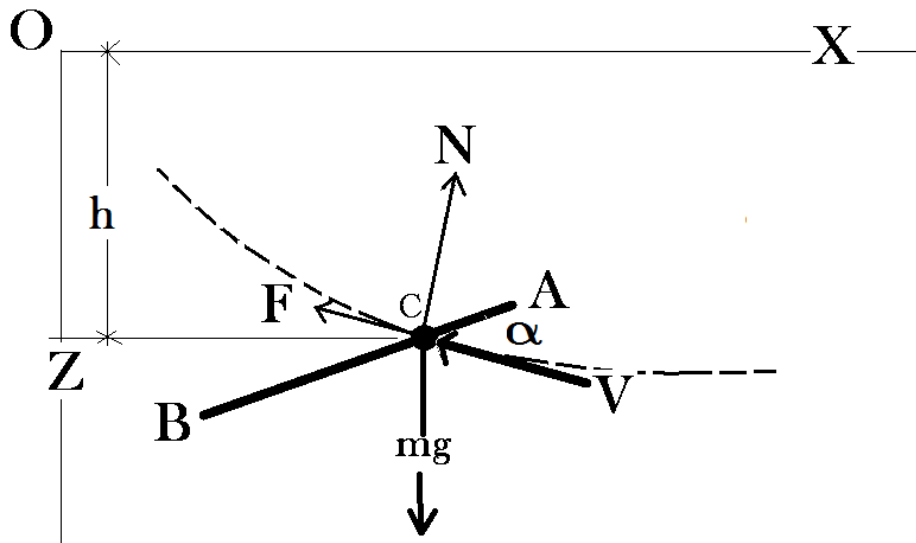


Figura 6.2: Esquema utilizado por Zhukowsky para establecer las ecuaciones de la dinámica del movimiento no estacionario de una placa plana en vuelo de planeo en un plano vertical.

Zhukowsky desea averiguar la trayectoria descrita por el centro de gravedad de la placa, con los ejes según la Fig. 6.2. Supongamos que el centro de presión -punto C- está en el eje de simetría de la placa AB y más cerca de A que de B, siendo el ángulo α pequeño: el equilibrio estacionario exige que el centro de presión coincida con el CDG.

Si durante el vuelo de planeo el ave no altera la posición de sus alas y de la cola y la posición del CDG respecto de los dos anteriores, el ángulo α permanecerá constante durante todo el tiempo de vuelo.

Esta última afirmación establece de forma implícita: (1) que la estabilidad del movimiento, en lo que respecta a la ecuación del momento de cabeceo, se da por supuesta; (2) insinúa la existencia de una posible relación entre las relativas posiciones angulares del ala y de la cola y el mantenimiento del ángulo de ataque, pero no la desarrolla matemáticamente.

El análisis de Zhukowsky se plantea analizar con cierto rigor sólo una faceta del vuelo de planeo de las aves: la que permite analizar en un plano vertical las dos ecuaciones de las fuerzas según dos ejes mutuamente perpendiculares, admitiendo tácitamente que la información que se podría obtener de la ecuación del momento, suponiendo que fuese posible establecerla sobre una base físico-matemática realista, no afectaría seriamente a la información que proporcionan las otras dos ecuaciones. Esto le parece admisible, ya que *el vuelo de los pájaros es un hecho*.

Zhukowsky establece así las dos ecuaciones de las fuerzas en ejes viento (Fig. 6.2):

$$\begin{aligned}
 [1] \quad N + m \frac{V^2}{r} &= mg \cos \gamma \\
 [2] \quad d \left(\frac{mV^2}{2} \right) &= mg dz - F ds
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

El significado de los términos que aparecen en las ecuaciones [1] y [2] de [6.4] es el siguiente:

$N \approx L$ (*sustentación aerodinámica*)

$F \approx D$ (*resistencia aerodinámica*)

$r = \left(\frac{ds}{d\gamma} \right)$ (*radio de curvatura de la trayectoria*)

$\gamma =$ *pendiente de la trayectoria*

$ds =$ *diferencial de espacio*

Además, para simplificar la nomenclatura, introduce las siguientes asignaciones, que permanecen constantes mientras lo sea el ángulo de ataque α :

$$A = \frac{0.13S \sin \alpha \cos \alpha}{m} \quad B = \frac{0.13S \sin^2 \alpha}{m}
 \tag{6.5}$$

Observa también que se cumple

$$ds = \frac{dz}{\sin \gamma} \Rightarrow r = \frac{ds}{d\gamma} = \frac{dz}{\sin \gamma d\gamma}
 \tag{6.6}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, y siendo h la altura que corresponde a la velocidad inicial, las dos ecuaciones de [6.4] pueden escribirse así:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad A + \sin \gamma \frac{d\gamma}{dz} &= \frac{g \cos \gamma}{V^2} \\
 [2] \quad V^2 &= 2g(z+h) - 2B \int \frac{V^2 dz}{\sin \gamma}
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

Las ecuaciones planteadas por Zhukowsky, en contraste con las que publicará Lanchester 17 años después, no suponen inicialmente que el movimiento es conservativo, y se establecen de manera que tienen en cuenta la influencia del término disipativo debido a la resistencia aerodinámica a través del coeficiente B de la ecuación [2] de [6.7].

Zhukowsky analiza el comportamiento estacionario que implica que la velocidad V y la pendiente γ son constantes⁷². $V = V_0$, $\gamma = \gamma_0$:

⁷² También deberá serlo el ángulo de ataque α

$$\begin{aligned}
 [1] \quad A &= \frac{g \cos \gamma_0}{V_0^2} \\
 [2] \quad V_0^2 &= 2g(z+h) - \frac{2BV_0^2}{\sin \gamma_0} \int dz = 2z \left(g - \frac{BV_0^2}{\sin \gamma_0} \right) + 2gh
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

Dado que V_0 es constante, el factor que multiplica la variable zeta en la ecuación [2] de [6.8] debe ser nulo. Llegamos así a:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad A &= \frac{g \cos \gamma_0}{V_0^2} \\
 de [2] \quad \left(g - \frac{BV_0^2}{\sin \gamma_0} \right) &\Rightarrow B = \frac{g \sin \gamma_0}{V_0^2}
 \end{aligned}
 \tag{6.9}$$

Si ahora introducimos los valores de A y de B obtenemos:

$$A = \frac{g \cos \gamma_0}{V_0^2} = \frac{0.13S \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{m} \quad B = \frac{g \sin \gamma_0}{V_0^2} = \frac{0.13S \sin^2 \alpha_0}{m}
 \tag{6.10}$$

Vemos que inmediatamente puede concluirse que:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad \tan \gamma_0 &= \tan \alpha_0 \Rightarrow \gamma_0 = \alpha_0 \\
 [2] \quad V_0^2 &= \frac{mg}{0.13 S \sin \alpha_0}
 \end{aligned}
 \tag{6.11}$$

Zhukowsky demuestra de este modo que el descenso planeado se efectúa según una recta inclinada, manteniendo las alas en un plano horizontal y muestra también que a cada ángulo de inclinación de esta línea -o sea, a cada pendiente de la trayectoria- le corresponde una velocidad estacionaria de descenso.

El plano de la placa permanece sensiblemente horizontal siempre. La razón por la que el ángulo de la pendiente coincide necesariamente con el ángulo de ataque procede del hecho de que en el movimiento estacionario la única fuerza gravitatoria debe ser exactamente equilibrada por la única fuerza aerodinámica, que es perpendicular a la placa. La ausencia de aceleración en todas direcciones así lo exige. Con esto termina la descripción del movimiento estacionario.

El dibujo siguiente (Fig. 6.3) reproduce aproximadamente el que aparece en el trabajo de Zhukowsky, y muestra la trayectoria recta que acabamos de describir según OL , con el perfil de la placa "ab" visible, en posición sensiblemente horizontal, sin oscilaciones y con velocidad constante. El ángulo de ataque es también igual a la pendiente. La placa desciende según el eje Z y avanza según el eje X manteniéndose paralela a sí misma.

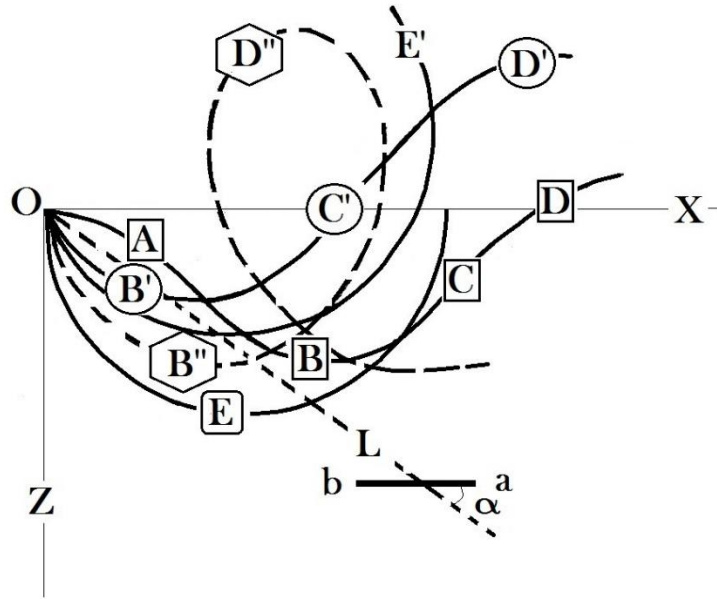


Figura 6.3: Distintas trayectorias que puede realizar una placa plana AB en vuelo planeado. La trayectoria recta (L) indica vuelo estrictamente estacionario; las demás trayectorias se diferencian unas de otras en las condiciones iniciales del vuelo, y no son estacionarias.

Zhukowsky supondrá también que, si el ángulo α es pequeño, entonces la constante $B \ll A$ (Ecuación [6.10]) y sugiere que una integración sólo aproximada (con $B = 0$) puede proporcionar información relevante, aunque tomará la precaución de no aplicarla más allá de un semiperíodo. Posteriormente investigará el efecto real de $B \neq 0$ sobre la trayectoria por efecto de la disipación de energía que genera la resistencia aerodinámica y relacionará esta pérdida de energía con una correspondiente disminución de la velocidad inicial de la siguiente semionda de la trayectoria.

Para la integración de la trayectoria conservativa procede como sigue, a partir de las ecuaciones iniciales simplificadas:

$$[1] \quad A + \sin \gamma \frac{d\gamma}{dz} = \frac{g \cos \gamma}{V^2} \quad [2] \quad V^2 = 2g(z+h) \quad [6.12]$$

Inmediatamente puede escribir:

$$A + \sin \gamma \frac{d\gamma}{dz} = \frac{g \cos \gamma}{2g(z+h)} \quad [6.13]$$

Equivalente a la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{d(\cos \gamma)}{dz} + \frac{\cos \gamma}{2(z+h)} = A \quad [6.14]$$

Zhukowsky integra la ecuación obteniendo finalmente:

$$\cos \gamma \sqrt{z+h} = \frac{2A}{3} (z+h)^{\frac{3}{2}} + C \quad [6.15]$$

El valor de la constante de integración “C” puede determinarse mediante la condición inicial que proporciona el conocimiento del ángulo de inclinación de la velocidad del ave en ese instante (Fig. 6.4):

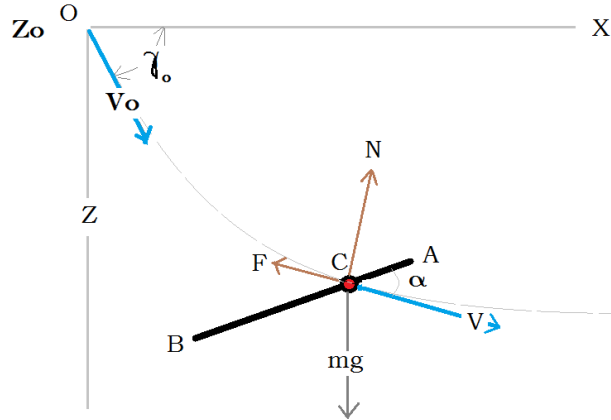


Figura 6.4: Las condiciones iniciales del vuelo planeado se establecen en las variables γ_0 y V_0 . La variable V_0 es una magnitud vectorial, por tanto queda definido también, por las condiciones indicadas, el ángulo de ataque inicial. (Esto permite intuir lo delicado de las condiciones iniciales del lanzamiento para una placa plana).

$$\cos \gamma_0 \sqrt{h} = \frac{2A}{3} (h)^{\frac{3}{2}} + C \Rightarrow C = \sqrt{h} \left(\cos \gamma_0 - \frac{2A}{3} h \right) \quad [6.16]$$

La forma general de la integral será:

$$\cos \gamma = \frac{2A}{3} (z+h) + \frac{\sqrt{h} \left(\cos \gamma_0 - \frac{2A}{3} h \right)}{\sqrt{z+h}} \quad [6.17]$$

Esta ecuación permite expresar $\cos \gamma$ en función de $\frac{dz}{dx}$ y a continuación se puede proceder a integrar directamente:

$$\frac{dz}{dx} = \tan \gamma = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}}{\cos \gamma}$$

$$\text{con : } \cos \gamma = \frac{2A}{3} (z+h) + \frac{\sqrt{h} \left(\cos \gamma_0 - \frac{2A}{3} h \right)}{\sqrt{z+h}} \quad [6.18]$$

Zhukowsky muestra que la obtención por integración numérica de las coordenadas rectangulares es posible, pero no sencilla, y prefiere deducir las trayectorias analizando directamente la ecuación obtenida para $\cos \gamma$.

En primer lugar, se detiene en la consideración de dos casos particulares: los que anulan la constante "C".

Son los dos siguientes, que conducen a dos valores para h:

$$C = \sqrt{h} \left(\cos \gamma_0 - \frac{2A}{3} h \right) = 0 \Rightarrow h_1 = 0 \quad y \quad h_2 = \frac{3 \cos \gamma_0}{2A} \quad [6.19]$$

La ecuación queda en las dos posibles formas siguientes:

Caso[1]

$$(\cos \gamma)_{h_1} = \frac{2A}{3} z \Rightarrow [1] \quad z = \frac{3}{2A} (\cos \gamma)_{h_1} \quad [6.20]$$

Caso[2]

$$(\cos \gamma)_{h_2} = \frac{2A}{3} z + \cos \gamma_0 \Rightarrow [2] \quad z = \frac{3}{2A} \left((\cos \gamma)_{h_2} - \cos \gamma_0 \right)$$

Zhukowsky obtiene las dos trayectorias: ambas son circunferencias; la primera es:

$$\begin{aligned} \text{Caso[1]} \quad \frac{2Az_1}{3} &= (\cos \gamma)_{h_1} \quad \frac{dx_1}{dz} = \cot \gamma_{h_1} = \frac{(\cos \gamma)_{h_1}}{\sqrt{1 - (\cos \gamma)_{h_1}^2}} = \frac{\frac{2Az_1}{3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2Az_1}{3}\right)^2}} \\ x_1 &= \int \frac{\left(\frac{2Az_1}{3}\right) dz_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2Az_1}{3}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{9 - 4A^2 z_1^2}}{2A} \Rightarrow x_1^2 + z_1^2 = \left(\frac{3}{2A}\right)^2 \end{aligned} \quad [6.21]$$

La segunda es:

$$\text{Caso[2]} \quad \frac{2Az_2}{3} + \cos \gamma_0 = (\cos \gamma)_{h_2} \quad \frac{dx_2}{dz} = \frac{\frac{2Az_2}{3} + \cos \gamma_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{2Az_2}{3} + \cos \gamma_0\right)^2}}$$

$$x_2 = \int \frac{\left(\frac{2Az_2}{3} + \cos \gamma_0\right) dz_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2Az_2}{3} + \cos \gamma_0\right)^2}} = -\frac{3\sqrt{1 - (\cos \gamma_0 + 3A z_2)^2}}{2A}$$

$$\Rightarrow x_2^2 + z_2^2 + 2\left(3\frac{\cos \gamma_0}{2A}\right)z_2 + \left(3\frac{\cos \gamma_0}{2A}\right)^2 = \left(\frac{3}{2A}\right)^2$$

[6.22]

La primera corresponde al dibujo (E) y la segunda a la (E') de la figura (6.3), cuyo centro está por encima del eje OX una distancia:

$$\frac{3}{2A}(\cos \gamma_0)$$

El primero de estos dos círculos será identificado también por Lanchester, pero no el segundo.

Para Zhukowsky la aparición de trayectorias *circulares* o *semicirculares* no parece presentar problema alguno relacionado con la estabilidad. Se limita a mencionar que este tipo de trayectoria se parece mucho a la que realizaría un murciélago que cuelga verticalmente y que arranca a volar con velocidad nula según una trayectoria inicialmente estrictamente vertical. Para Lanchester, en cambio, la aparición de trayectorias con un punto de retroceso supondrá la aparición de un problema de estabilidad [10].

En el desarrollo subsiguiente Zhukowsky estudia diferentes trayectorias que pueden obtenerse según sean las condiciones iniciales (Fig. 6.5). Este análisis no necesitamos seguirlo aquí hasta el último detalle, pues no presenta particularidades relacionadas con la estabilidad. Es significativa la ausencia, en todo este desarrollo, de una ecuación que cuantifique la influencia del momento de cabeceo.

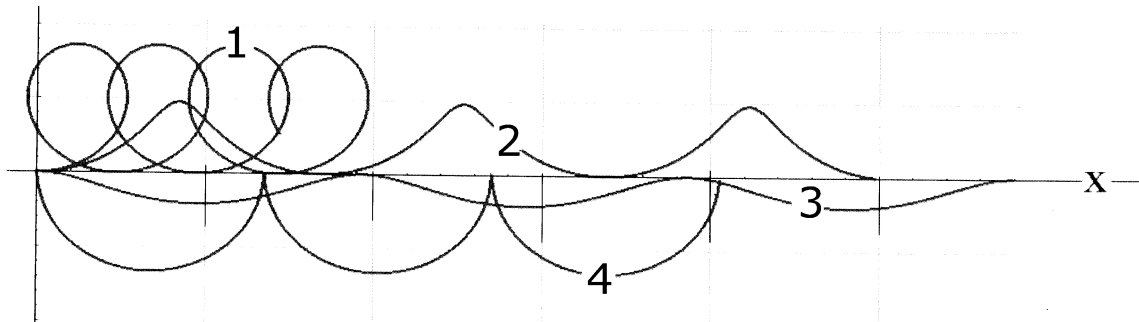


Figura 6.5: Distintas trayectorias, según sean las condiciones iniciales de integración de la ecuación diferencial [6.14].

Las trayectorias indicadas con el Núm. 4 de la Figura 6.5, al tener un punto de retroceso, no son analizables de modo realista solamente con las dos ecuaciones de las fuerzas.

6.3.2. Segundo⁷⁸ Documento. “*On the most expedient angle of the aeroplane inclination*”. (1897) **О НАИВЫГОДНЕЙШЕМ УГЛЕ НАКЛОНА АЭРОПЛАНОВ**

En esta breve publicación Zhukowsky utiliza los gráficos de Lilienthal de la representación gráfica de la fuerza aerodinámica sobre una placa sometida a una corriente con ángulo de ataque α para calcular algunos puntos de funcionamiento óptimo de un aeroplano.

Los dos casos que analiza son:

- (1) Determinación del ángulo α con el que hay que volar horizontalmente para que la potencia necesaria sea mínima. (Aeroplano).
- (2) Determinación del ángulo α con el que hay que volar para hacerlo aprovechando al máximo la energía disponible (Ave en vuelo). En este caso Zhukowsky analiza la potencia consumida por el aleteo de un ave, con las alas batiendo alternativamente hacia arriba y hacia abajo. Efectúa algunas hipótesis en cuya aplicabilidad no entramos ahora, ya que este problema no entra dentro del campo de nuestro estudio.

⁷⁸ Traducido del ruso por Karen Nagapetyan Eliseykyna; Ing. Agr. Academia de Timiziarev, Erivan. (Dep. Moscow) a quien el autor agradece su amable colaboración.

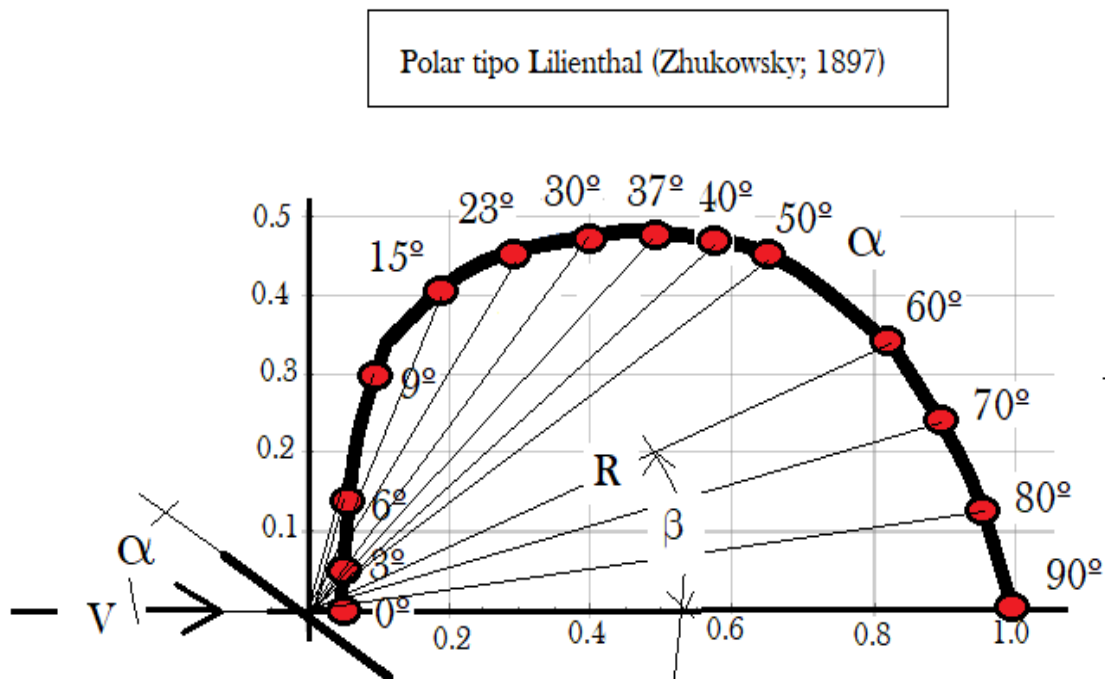


Figura: 6.6 Curva Polar de Lilienthal

Para el primer caso Zhukowsky parte de un gráfico tal como el mostrado en la Fig. 6.6, en el que, de acuerdo con el sistema introducido por Lilienthal [6], la fuerza aerodinámica resultante R para cada valor de α es representada por un vector que arranca del origen de coordenadas, cuyo módulo es la magnitud de la fuerza y forma un ángulo β con el viento incidente. Lilienthal en sus curvas polares consideraba valores de α entre 0° y 90° .

El desarrollo parte de expresión habitual en esa época para la fuerza aerodinámica (Ref. Fig. 6.7):

$$R = 0.13 S V^2 \left(\frac{CA}{CB} \right)$$

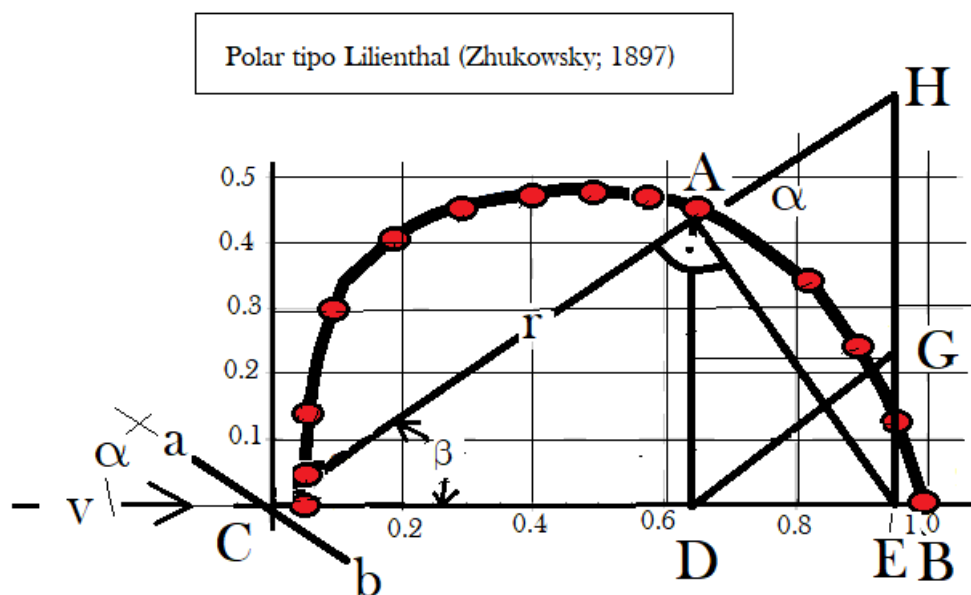


Figura: 6.7 Análisis geométrico de la Curva Polar de Lilienthal

El peso del aeroplano W debe ser equilibrado por la componente vertical de la fuerza aerodinámica:

$$W = 0.13 S V^2 \left(\frac{CA}{CB} \right) \sin \beta$$

De esta expresión se obtiene el valor de la velocidad:

$$V = \sqrt{\frac{W}{0.13 S \left(\frac{CA}{CB} \right) \sin \beta}}$$

La potencia necesaria para mantener el vuelo es el producto de la resistencia aerodinámica por la velocidad de vuelo:

$$P = 0.13 S V^2 \left(\frac{CA}{CB} \right) \cos \beta V = 0.13 S V^3 \left(\frac{CA}{CB} \right) \cos \beta$$

En definitiva, la potencia necesaria por unidad de peso será:

$$\frac{P}{W} = \sqrt{\frac{W}{S} \frac{CB}{0.13 (CA \sin \beta \tan^2 \beta)}}$$

Los valores de CB y de CA se toman de los gráficos de Lilienthal, y ambos dependen del ángulo β : $CB(\beta)$ y $CA(\beta=90^\circ)=Cte$. En definitiva, Zhukowsky obtiene una expresión exclusivamente función de β y cuyo valor mínimo depende de maximizar $CA(\beta)\sin\beta\tan^2\beta$

Zhukowsky lo hace mediante un procedimiento geométrico-gráfico, pues las curvas polares de Lilienthal son experimentales, abarcan un rango de α desde valores muy bajos, eventualmente negativos si el ala tiene curvatura, y llegan hasta $\alpha=90^\circ$. No tienen expresión analítica sencilla. (Fig. 6.8)

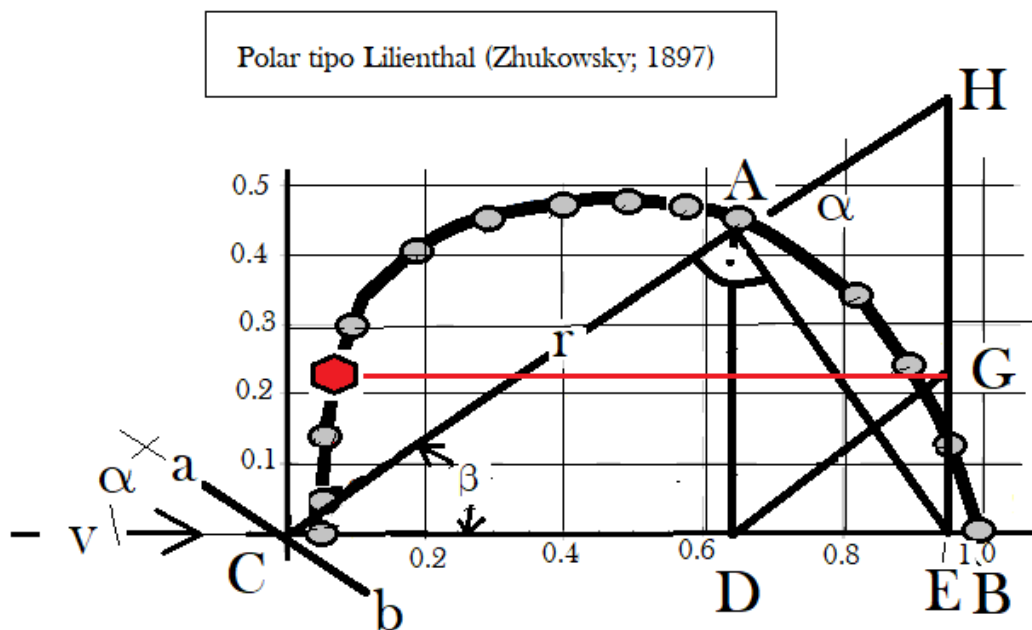


Figura 6.8 Ubicación geométrica del valor óptimo de β para mínima potencia consumida en el vuelo.

Zhukowsky parte de un punto cualquiera A de la Polar de Lilienthal - recordemos que esta curva es el resultado empírico de experimentos y no tiene forma matemática⁷⁴analítica- y la recta $CA = r$ indica la fuerza aerodinámica correspondiente a un cierto ángulo de ataque α . Esta fuerza forma un ángulo β con la dirección del vuelo.

La expresión $CA(\beta)\sin\beta\tan^2\beta$ puede construirse geoméricamente del modo siguiente:

⁷⁴ Más adelante terminará dando lugar a la conocida forma Polar de la expresión matemática de la resistencia aerodinámica, para ángulos de ataque pequeños. Es claro que el problema que ahora estudia Zhukowsky, si la curva polar tuviera forma analítica, sería muy sencillo. Muestra, una vez más, que para el vuelo artificial solamente interesa la zona de ángulos pequeños.

La recta AD -obsérvese que el punto B no coincide necesariamente con el punto A . El triángulo CAE es rectángulo, y la recta AD es su altura. Por otra parte, AD es sabido que es la media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa CA :

$$\frac{r \sin \beta}{CD} = \frac{DE}{r \sin \beta}$$

Equivalente a:

$$\frac{r \sin \beta}{r \cos \beta} = \frac{DE}{r \sin \beta} \Rightarrow \tan \beta = \frac{DE}{r \sin \beta}$$

Luego:

$$\tan \beta = \frac{DE}{r \sin \beta} \Rightarrow DE = r \sin \beta \tan \beta$$

Es decir: $GE = r \sin \beta \tan^2 \beta$

Por tanto, maximizar $CA(\beta) \sin \beta \tan^2 \beta$ equivale a maximizar el segmento GE de la Fig. 6.8. Zhukowsky estudia, en términos generales las posibilidades geométricas, de las que la siguiente figura (Fig. 6.9) muestra esquemáticamente dos ejemplos:

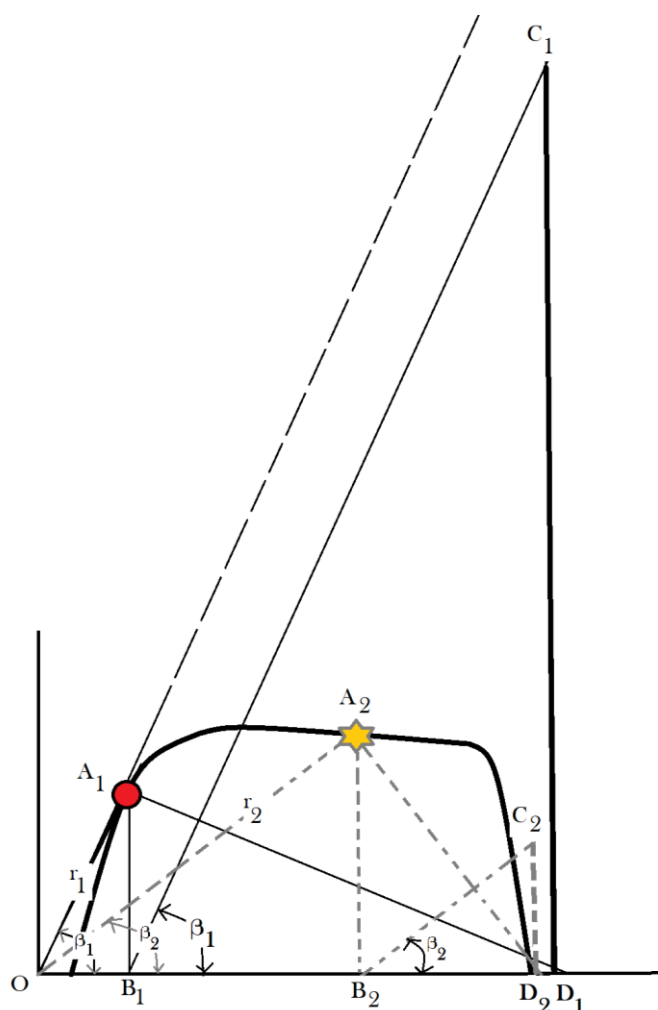


Figura: 6.9 Análisis geométrico de $CA(\beta)\sin\beta\tan^2\beta$

Elegimos los dos puntos en principio arbitrarios $A1$ y $A2$ sobre la Curva de Lilienthal y efectuando sobre el dibujo el trazado que fija el segmento GE llegamos a la conclusión, por observación directa de la geometría, de que el valor óptimo de β viene dado por el correspondiente a la curva tangente OAI , pues le corresponde para el segmento GE el segmento $DICI$. Cualquier otra elección -por ejemplo, el punto $A2$ - conduce a segmentos $GE: C2D2$ de menor longitud que el que se corresponde con la tangente desde O .

Zhukowsky no puede tratar este problema analíticamente, porque no existe todavía una teoría clara sobre la relación entre el coeficiente de sustentación y el de resistencia de un ala, sino solamente mediciones hasta cierto punto rigurosas aunque no libres de incertidumbres. Pero la solución que el pionero ruso ofrece va en la dirección correcta y la única posible habida cuenta de los datos que posee. Lógicamente, solamente hace referencia a un ala: no tiene en cuenta ningún otro elemento que necesariamente tendría que poseer un aeroplano real: fuselaje, tren, etc...

6.3.3. Tercer Documento⁷⁵.

О ПАДЕНИИ В ВОЗДУХЕ ЛЕГКИХ ПРОДОЛГОВАТЫХ ТЕЛ. ВРАЩАЮЩИХСЯ ОКОЛО СВОЕЙ ПРОДОЛЬНОЙ ОСИ. “Sobre la Caída en el Aire de Cuerpos Ligeros Alargados con Giro Alrededor de su Eje Longitudinal” (1906).

Zhukowsky analiza ahora el movimiento de una placa giratoria en descenso. Como puede verse en la Figura 6.10, que reproduce aproximadamente el dibujo⁷⁶ del autor, la línea de corriente, cerrada y permanente, cuyo descenso considera Zhukowsky estacionario, tiene forma de perfil aerodinámico. Zhukowsky calcula las fuerzas aerodinámicas que intervienen, y no asume ninguna hipótesis que convierta sus cálculos en no aplicables al movimiento de planeo normal de esa línea de corriente cerrada.

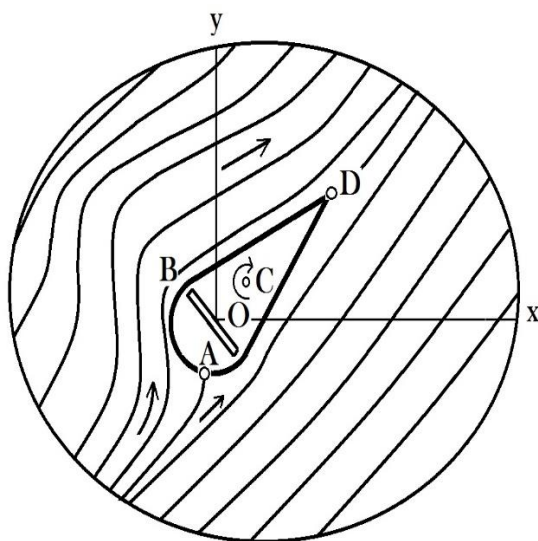


Figura 6.10: Reproducción del gráfico de Zhukowsky en el que se representa un cuerpo - la pequeña placa cuyo perfil lateral se observa en el dibujo- que cae en el aire girando alrededor del punto O. Las líneas de corriente en el punto A se bifurcan y se unen de nuevo en D. La línea cerrada conforma un perfil y se supone asimilable a una forma aerodinámica estándar.

Zhukowsky establece una ecuación diferencial lineal para la trayectoria de la línea de corriente cerrada, y estudia “la importante cuestión de la estabilidad del movimiento del vuelo rectilíneo” (sic) examinando el movimiento perturbado del centro de la placa. Es la primera vez, según pensamos, que en modo de formulación matemática aparece una condición de estabilidad de vuelo.

El procedimiento, descrito con nomenclatura actual y con un desarrollo algo más detallado del ofrecido por Zhukowsky, es como sigue:

Establece dos ecuaciones que procederá a linealizar:

⁷⁵ Traducido del original ruso por Artem Dombrowsky, Ingeniero Aeronáutico por la Universitat Politècnica de València (España), a quien el autor agradece cordialmente su desinteresada colaboración.

⁷⁶ Las letras que aparecen en el interior del perfil AB carecen ahora de relevancia para nuestro objeto. Se han incluido por respetar el dibujo original de Zhukowsky.

(1) La primera es la de la Fuerza centrífuga en sentido normal a la trayectoria. Ecuación [1] de [6.23].

(2) La segunda es el teorema de las fuerzas vivas en sentido tangencial, con la fuerza aerodinámica descompuesta en sustentación (L) y resistencia (D) según el sistema habitual, con la pendiente γ tomada positiva hacia abajo. Ecuación [2] de [6.23].

$$[1] \quad \frac{mV^2}{r} = mg \cos \gamma - L \quad [2] \quad m \frac{d\left(\frac{V^2}{2}\right)}{dx} = mg \sin \gamma - D \quad [6.23]$$

Las condiciones estacionarias son:

$$[1est] \quad \frac{mV^2}{r = \infty} = 0 = mg \cos \gamma_0 - L_0 \quad [2est] \quad m \frac{dV^2}{2dx} = 0 = mg \sin \gamma_0 - D_0 \quad [6.24]$$

Zhukowsky admite algunas aproximaciones para la expresión del radio de curvatura “r” y la pendiente de la trayectoria:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \Delta \gamma \approx \frac{dy}{dx} \quad [6.25]$$

Las ecuaciones perturbadas son ahora:

$$[1per] \quad \left(\frac{mV^2}{r = \infty}\right) + \Delta\left(\frac{mV^2}{r}\right) = mg \cos\left(\gamma_0 + \frac{dy}{dx}\right) - \frac{L_0}{V_0^2}(V_0 + \Delta V)^2 \quad [6.26]$$

$$[2per] \quad m \frac{d(V_0 + \Delta V)^2}{2dx} = mg \sin\left(\gamma_0 + \frac{dy}{dx}\right) - \frac{D_0}{V_0^2}(V_0 + \Delta V)^2$$

Con alguna manipulación llegamos a:

$$[1Lin] \quad V^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = -g \sin \gamma_0 \frac{dy}{dx} - \frac{2L_0}{mV_0} \Delta V \quad [6.27]$$

$$[2Lin] \quad V_0 \frac{d(\Delta V)}{dx} = g \cos \gamma_0 \frac{dy}{dx} - \frac{2D_0}{mV_0} \Delta V$$

Combinando [1Lin] y [2Lin]:

$$\Delta V = -\frac{mV_0}{2L_0} \left(V^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) + g \sin \gamma_0 \frac{dy}{dx} \right) \quad [6.28]$$

Esta expresión es introducida ahora en la ecuación [2Lin] de [6.27], y derivando respecto de la variable x en la medida necesaria, obtiene:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{3g \sin \gamma_0}{V_0^2} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{2g^2}{V_0^4} \right) \frac{dy}{dx} = 0 \quad [6.29]$$

De esta ecuación lineal Zhukowsky deducirá la condición para la estabilidad del movimiento, pues la solución para la pendiente tendrá la forma:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Y los autovalores son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{g}{V_0^2} \left(-\frac{3}{2} \sin \gamma_0 \pm \sqrt{\frac{9}{4} \sin^2 \gamma_0 - 2} \right) \quad [6.30]$$

La conclusión de Zhukowsky, puesto que el vuelo es de descenso y la pendiente es positiva hacia abajo, es que este movimiento es siempre estable.

Si establecemos ahora un modo equivalente de escribir la condición de estabilidad descrita para el vuelo planeado en descenso con la nomenclatura actual, tendríamos:

$$\tan \gamma_0 = \frac{CD}{CL} \Rightarrow \sin \gamma_0 = \frac{CD}{\sqrt{CD^2 + CL^2}} \quad [6.31]$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{g}{V_0^2} \left(-\frac{3}{2} \frac{CD}{\sqrt{CD^2 + CL^2}} \pm \sqrt{\frac{9}{4} \left(\frac{CD^2}{CD^2 + CL^2} \right) - 2} \right)$$

Es decir, los dos autovalores muestran con claridad una oscilación amortiguada:

$$\lambda_{1,2} \approx -\frac{3}{2} \frac{g}{V_0^2} \frac{CD}{CL} \left(1 \pm i \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{CL}{CD} \right) = -\frac{3}{2} \frac{g}{V_0^2} \frac{CD}{CL} \pm i \frac{g\sqrt{2}}{V_0^2} \approx \left(-\frac{3}{4} \frac{\rho S}{m} CD \pm i \frac{g\sqrt{2}}{V_0^2} \right) \quad [6.32]$$

El período de la oscilación $T_{2\pi}$ será:

$$\lambda_{1,2} \approx \left(-\frac{3}{4} \frac{\rho S}{m} CD \pm i \frac{g\sqrt{2}}{V_0^2} \right) \quad [6.33]$$

$$\frac{g\sqrt{2}}{V_0^2} X_T = 2\pi \Rightarrow X_T = \frac{2\pi V_0^2}{g\sqrt{2}} \Rightarrow T_{2\pi} = \frac{X_T}{V_0} = \pi\sqrt{2} \frac{V_0}{g}$$

Este es exactamente el valor del período de la oscilación de Largo Período que Lanchester publicará, bajo el nombre de Oscilación Fugoide, dos años después de Zhukowsky, quien no llega a extraer explícitamente este resultado. Muestra también el

valor de la frecuencia –coincidente con Lanchester- y también del amortiguamiento, cuyo valor no llega a establecer Lanchester.

Estos dos resultados no son mencionados por Zhukowsky, pero están latentes en sus ecuaciones.

No hay ninguna alusión en el desarrollo matemático del investigador ruso a una ecuación que describa el comportamiento de las variables correspondientes al momento de cabeceo. La razón es doble: en el caso de que se tratase de una simple lámina, ya hemos visto que la considera automáticamente estable. Pero además, para el caso que estudia en este documento, la placa desciende a la vez que gira alrededor de un eje perpendicular al plano vertical de descenso.

En la descripción de las líneas de corriente generadas por una placa giratoria, se observa que Zhukowsky tiene *in mente* una forma aerodinámica fuselada en forma sustancialmente parecida a la de un perfil, tal como sus ensayos en el laboratorio de Fluido Dinámica le mostraban que sucedía con una placa giratoria sumergida en una corriente uniforme; por esta razón comenta que una placa giratoria, en cuanto a sus efectos, se parece más a un cilindro giratorio que a una placa inmóvil en la misma corriente, descendente en este caso.

En esa forma fuselada constituida por una única línea de corriente introdujo Zhukowsky un conjunto de manantiales y sumideros, junto con los torbellinos necesarios para simular el efecto de giro de la placa. La fuerza normal a la velocidad incidente afecta a la línea de corriente en la que está la placa giratoria y cuya forma se considera ahora estacionaria aunque no lo sea la superficie frontal que la placa ofrece al flujo incidente.

El famoso teorema en el Zhukowsky demuestra la vinculación entre la sustentación de un ala bidimensional con la circulación (matemática) está también contenido en este artículo.

6.3.4. Cuarto Documento⁷⁷.

ДИНАМИКА АЭРОПЛАНОВ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ “Descripción elemental de la Dinámica de los Aeroplanos” (1913).

En este documento Zhukowsky estudia conceptos básicos de la mecánica de vuelo cuasiestacionario y la estabilidad.

En primer lugar, desarrolla⁷⁸ el denominado Teorema de *Painlevé* [11] sobre la estabilidad de la velocidad en la trayectoria en un plano vertical. Este teorema establece la

⁷⁷ Incluido por entrar dentro del período cronológico de estudio. Traducido del original ruso por Artem Dombrovsky, Ingeniero Aeronáutico por la Universitat Politècnica de València (España), a quien el autor agradece cordialmente su desinteresada colaboración.

⁷⁸ Zhukowsky desarrolla brevemente en este documento una teoría de la estabilidad longitudinal en cabeceo, sin tener en cuenta el movimiento del *CDG*. Sus conclusiones establecen la importancia de obtener un

condición siguiente: “*La estabilidad en régimen de velocidad depende del signo de la derivada de la Eficiencia Aerodinámica: cuando es positiva, es estable y es inestable en el caso contrario*” El autor ruso comienza esta parte de su estudio escribiendo las ecuaciones del movimiento según la coordenada longitudinal, que denominamos L :

$$\begin{aligned}
 [1] \quad \frac{dV}{dL} &= -\frac{a_x V}{\cos \theta} - \frac{g}{V} \tan \theta & \text{con: } a_x &= \frac{\rho S C D}{2m} \\
 [2] \quad \frac{d\theta}{dL} &= \frac{a_y}{\cos \theta} - \frac{g}{V^2} & \text{con: } a_y &= \frac{\rho S C L}{2m} \\
 [3] \quad \frac{dH}{dL} &= \tan \theta
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Las ecuaciones linealizadas alrededor de un punto de equilibrio en una trayectoria estacionaria descendente son obtenidas a partir de las anteriores, en las que incluye la variación de los coeficientes aerodinámicos en función del ángulo de ataque:

$$\begin{aligned}
 [1Lin] \quad \frac{d\Delta V}{dL} &\approx \Delta V \left(-\frac{a_x}{\cos \theta_0} + \frac{g}{V_0^2} \tan \theta_0 \right) + \Delta \theta \left(-\frac{g}{\cos^2 \theta_0 V_0} - a_x V_0 \frac{\tan^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right) + \Delta \alpha \left(-\frac{V_0}{\cos \theta_0} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha} \right) \\
 [2Lin] \quad \frac{d\Delta \theta}{dL} &\approx \Delta V \left(\frac{2g}{V_0^3} \right) + \Delta \theta \left(a_y \frac{\tan^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right) + \Delta \alpha \left(\frac{1}{\cos \theta_0} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha} \right) \\
 [3Lin] \quad \frac{d\Delta H}{dL} &\approx \frac{\Delta \theta}{\cos^2 \theta_0}
 \end{aligned}$$

[6.35]

Para lograr estabilizar una trayectoria según una determinada pendiente de descenso constante y sin propulsión, Zhukowsky supondrá que actúa sobre el mando de profundidad de tal manera que la variación del ángulo de ataque anule las variaciones de pendiente. Esto equivale a una ley de pilotaje en α que anule el segundo miembro de la ecuación [2Lin] de [6.35]:

$$\Delta V \left(\frac{2g}{V_0^3} \right) + \Delta \alpha \left(\frac{1}{\cos \theta_0} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha} \right) = 0 \Rightarrow \Delta \alpha = -\frac{2}{V_0 \left(\frac{\partial a_y}{\partial \alpha} \right)} \left(\frac{g \cos \theta_0}{V_0^2} \right) \Delta V = -\frac{2 a_y}{V_0 \left(\frac{\partial a_y}{\partial \alpha} \right)} \Delta V$$

[6.36]

momento restaurador debido a α y uno amortiguador debido a la presencia del empenaje trasero. Analiza también un supuesto *teorema* de Bothezat, que afirma que es posible eliminar las oscilaciones longitudinales de un aeroplano siempre que la distancia entre el empenaje trasero y el ala principal sea suficientemente grande. El modelo matemático de aeroplano que utiliza Zhukowsky es el de Soreau [28]. Obtiene también la Ley de la “ V ” longitudinal como condición de estabilidad; la condición que establece es la misma que obtuvo De Bothezat en su tesis de 1911.

La sustitución de este valor de $\Delta\alpha$ en la ecuación [1Lin] de [6.35] nos permite ver cómo son las variaciones de la velocidad que ocasiona el intento de mantener la pendiente de la trayectoria:

$$[1Lin] \quad \frac{d\Delta V}{dL} \approx \frac{\Delta V}{\cos\theta_0} \left(-a_x + \frac{g}{V_0^2} \sin\theta_0 + 2a_y \frac{\left(\frac{\partial a_x}{\partial \alpha}\right)}{\left(\frac{\partial a_y}{\partial \alpha}\right)} \right) = \frac{\Delta V}{\cos\theta_0} \left(-2a_x + 2a_y \frac{\left(\frac{\partial a_x}{\partial \alpha}\right)}{\left(\frac{\partial a_y}{\partial \alpha}\right)} \right) \quad [6.37]$$

Esta expresión puede reducirse a:

$$[1Lin] \quad \frac{d\Delta V}{dL} \approx \frac{2}{\cos\theta_0} \frac{a_y^2}{\left(\frac{\partial a_y}{\partial \alpha}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{a_x}{a_y} \right) \right) \Delta V \quad [6.38]$$

Un somero estudio indica que el signo de la variación de la velocidad dependerá del signo de $\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{a_x}{a_y} \right) \right)$. Esta expresión, traducida a la nomenclatura actual, es equivalente a calcular la derivada del inverso de la Eficiencia Aerodinámica, que suele crecer inicialmente con el ángulo de ataque α hasta alcanzar un máximo, para decrecer conforme α sigue aumentando. Es decir, que su derivada cambia de signo para algún valor característico del ángulo de ataque.

Por esta razón, si se está volando en la zona del primer régimen, con $\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{a_x}{a_y} \right) \right) < 0$ obtenemos un amortiguación en la velocidad, pero no sucede así en el caso contrario, $\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{a_x}{a_y} \right) \right) > 0$ en el que se obtendría un incremento de la velocidad y la perturbación del régimen de descenso. Esto establece la condición de Estabilidad de la Velocidad para el caso de descenso con pendiente constante.

En la realidad, las cosas no se presentan tan críticas como sugiere el Teorema que desarrollo Painlevé, a quien estudiaremos en el Cap. 13.

6.4. Estabilidad angular en cabeceo.

Respecto de la estabilidad angular en cabeceo, Zhukowsky distingue entre “*momentos recuperadores*” cuando tienden a devolver al aeroplano a su posición de vuelo normal y “*amortiguadores*” a aquellos que siempre se oponen al movimiento angular.

Con una adecuada geometría del aeroplano –según Zhukowsky- siempre se puede conseguir que el avión recupere su posición de vuelo normal, incluso sin realizar oscilaciones -movimiento sobre amortiguado- si el par amortiguador es suficientemente elevado.

Zhukowsky parece aceptar el modelo de Soreau [28] para las fuerzas aerodinámicas en el avión, y también la simplificación de suponer la resultante total perpendicular al ala *equivalente*, que supone plana.

En primer lugar, asume que la fuerza aerodinámica y la tracción pasan por el *CDG* y demuestra la “*Regla de la Cifra Romana V*”: “*Para que durante el giro del aeroplano alrededor de un eje que pasa por el CDG y es normal al plano de simetría del avión se consiga un momento recuperador es necesario que el observador, mirando desde el lateral, vea un ángulo inferior a 180° entre el ala principal y el estabilizador*”. Esta regla es válida también si el estabilizador está por delante del ala. El esquema es como muestra la Fig. 6.11.

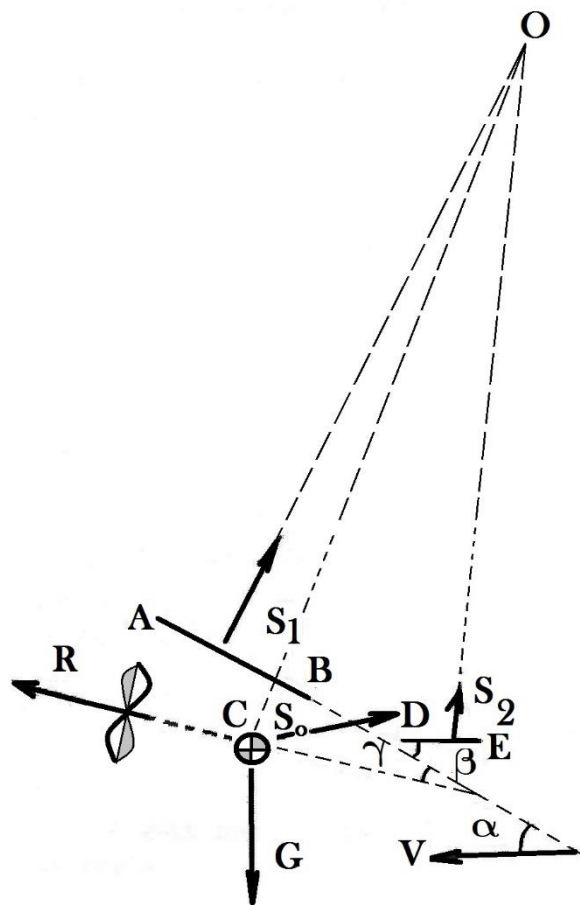


Figura 6.11: Dos superficies sustentadoras AB y DE, de áreas S_1, S_2 . La segunda realiza la función amortiguadora. La tracción pasa por el CDG.

Nomenclatura:

α : Ángulo de ataque de la superficie principal.

β : Ángulo geométrico de la superficie S_2 respecto de la S_1

γ : Ángulo formado por la tracción respecto de S_1

C : CDG ;

G : *Peso del aeroplano.*

V : *velocidad de vuelo*

S_o : *Resistencia aerodinámica no dependiente de α*

Cuando, por la razón que sea, se incrementa el ángulo de ataque un valor $\Delta\alpha$ la fuerza generada en la superficie S_1 respecto de la que tenía antes de la perturbación está en la relación siguiente:

$$S_1 \left(\frac{\alpha + \Delta\alpha}{\alpha} \right) \quad (6.39)$$

Y la misma relación respecto de la generada en la superficie de cola será:

$$S_2 \left(\frac{\alpha - \beta + \Delta\alpha}{\alpha - \beta} \right) \quad (6.40)$$

Vemos claramente que la fracción de (6.40) es mayor que la de (6.39), luego aparecerá una fuerza adicional en la superficie S_2 que causa un momento cuyo valor relativo puede establecerse:

Con $\Delta\alpha = 0$ el par resultante era nulo:

$$k_1 S_1 \left(\frac{\alpha}{\alpha} \right) - k_2 S_2 \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} \right) = 0 \quad (6.41)$$

Ahora aparece una fuerza adicional en S_2

$$S_2 \left(\frac{\alpha - \beta + \Delta\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha + \Delta\alpha}{\alpha} \right) = S_2 \left(\frac{\beta \Delta\alpha}{\alpha(\alpha - \beta)} \right) \quad (6.42)$$

Y el momento correspondiente a esta fuerza adicional es:

$$\xi \propto S_2 \frac{\beta \Delta\alpha}{\alpha(\alpha - \beta)} L \quad (6.43)$$

L es la distancia entre la línea de acción de la resultante aerodinámica en S_2 y el CDG del aeroplano. Análogamente, si el estabilizador está por delante del ala.

Lo anterior hace referencia a la estabilidad estática.

Respecto de la estabilidad dinámica y el eventual movimiento oscilatorio del aeroplano Zhukowsky desprecia el efecto del ala principal, y asumiendo un momento restaurador tal como indica (6.43), proporcional a la velocidad de vuelo al cuadrado, y un momento amortiguador debido a $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ proporcional linealmente a la velocidad de vuelo, establece una ecuación diferencial lineal de segundo orden para el momento de cabeceo:

$$(I_0 + mL^2)\lambda^2 + kf_1VL^2\lambda + \xi = 0 \quad (6.44)$$

En esta ecuación, I_0 es el momento de inercia del avión (sin estabilizador). Los valores de f_1 y de k proceden del modelo de Soreau y caracterizan el comportamiento aerodinámico de la cola. El comportamiento dinámico del $\Delta\alpha$ viene dado por:

$$\Delta\alpha(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} \quad (6.45)$$

Los autovalores, a partir de la ecuación [6.44], son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{kfV}{2\left(m + \frac{I_0}{L^2}\right)} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\xi\left(m + \frac{I_0}{L^2}\right)}{k^2 f_1^2 V^2 L^2}} \right)$$

(6.46)

La condición de estabilidad queda así:

$$\frac{4S_2\beta\left(m + \frac{I_0}{L^2}\right)}{\alpha(\alpha \pm \beta)k^2 f_1^2 V^2 L} < 1 \quad (6.47)$$

El signo positivo se aplica a aviones con estabilizador delantero, y el negativo para aviones con estabilizador trasero.

Esta expresión permite confirmar la afirmación de De Bothezat: “*La ausencia de movimientos oscilatorios de un avión no depende de la velocidad de vuelo y siempre puede ser conseguida (esta ausencia) aumentando la distancia que separa el estabilizador del CDG*”.

Zhukowsky considera interesante tratar de averiguar la magnitud de la desviación que recibe un aeroplano cuando se le saca bruscamente de su posición de equilibrio, y considera un factor de mérito importante si se logra que, con $t = 0$ se obtenga $\Delta\alpha = 0$

Para esto es necesario que se cumpla:

$$\Delta\alpha(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 \quad (6.48)$$

$$\text{Es decir: } \Delta\alpha(t) = C(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \quad (6.49)$$

Zhukowsky determina la constante C de (6.49) a partir de la velocidad angular ω_0 comunicada al aeroplano en el instante inicial, de modo que puede escribir:

$$\Delta\alpha(t) = \frac{\omega_0}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \quad (6.50)$$

En el instante inicial esta desviación es nula, y con el tiempo va aumentando hasta un cierto $\Delta\alpha_{\max}$. Al ser los autovalores negativos, el transitorio finalmente desaparece. El máximo $\Delta\alpha_{\max}$ es:

$$\Delta\alpha_{\max} = -\frac{\omega_0}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}} \quad (6.51)$$

Si ahora, aceptando que el aeroplano es estable, llamamos a:

$$\frac{4S_2\beta \left(m + \frac{I_0}{L^2} \right)}{\alpha(\alpha \pm \beta) k^2 f_1^2 V^2 L} = 1 - \mu^2 \quad (6.52)$$

Entonces podemos representar el valor de $\Delta\alpha_{\max}$ como:

$$\Delta\alpha_{\max} = \frac{\omega_0}{V} \sqrt{\alpha \left(\frac{I_0 + mL^2}{kf_1\beta L} \right) \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^{\frac{1}{2\mu}}} \quad (6.53)$$

Zhukowsky deduce que un aumento de la velocidad de vuelo hace menores las desviaciones máximas de $\Delta\alpha_{\max}$

En la figura 6.12 puede verse el resultado comparativo de las oscilaciones de dos aeroplanos situados en un túnel aerodinámico a la misma velocidad, con las mismas superficies S_1 y S_2 pero con dos distancias L muy distintas entre sí.

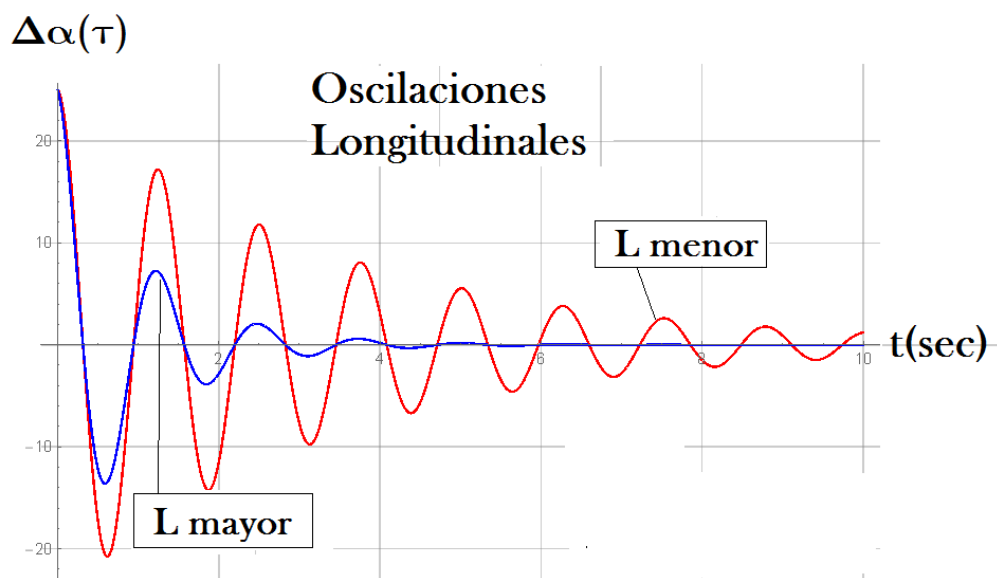


Figura 6.12. Oscilaciones de dos aviones geoméricamente iguales, salvo en que tienen un parámetro L diferente.

Zhukowsky indica que se debe tener presente que las condiciones establecidas lo han sido limitando seriamente los grados de libertad del aeroplano, al que solamente se le ha permitido girar alrededor de un eje normal al plano de simetría y que pasa por el *CDG*. Pero estima que sustancialmente son aceptables.

Podemos ver que Zhukowsky ha desarrollado aquí una interesante aproximación al modo oscilatorio Corto Período. Este trabajo de 1913 completa -con limitaciones- la obtención de los modos oscilatorios posibles para un avión. La aparición del modo Largo Período fue obtenida implícitamente por el ruso en 1906 y ya ha sido comentada aquí.

6.5. Conclusiones

- (1) Zhukowsky realiza el primer estudio matemático del vuelo de planeo de las aves en un plano vertical mediante la modelización matemática con ecuaciones diferenciales no estacionarias (1891).
 1. Supone la estabilidad asegurada y que el ángulo de ataque permanece constante, debido a que *la observación muestra que las aves lo logran*.
 2. Por esta razón, y quizás también por la dificultad de modelizar matemáticamente el momento de cabeceo, solamente utilizará las

ecuaciones de las fuerzas, de las que obtendrá las conocidas trayectorias que, años después, Lanchester⁷⁹ denominará *Fugoides*.

- (2) La descripción matemática de las trayectorias *Fugoides* de Zhukowsky incluye implícitamente la influencia de la resistencia aerodinámica y es más completa que la de Lanchester.
- (3) El hecho de que algunas trayectorias muestren tener puntos de retroceso no le causa inquietud, pues no lo relaciona con eventuales pérdidas de estabilidad (como hará Lanchester); comprende que las ecuaciones de las que se ha servido no pueden proporcionar información sobre la dinámica rotacional del planeador.
- (4) A partir de la expresión Polar (empírica) de Lilienthal -correspondiente a un perfil determinado- obtiene gráficamente el ángulo óptimo de mínima potencia requerida para el vuelo (1897). Es un resultado establecido previamente (1870) por Pénaud en términos matemático-simbólicos a los que todavía no se puede asignar valores numéricos fiables. Zhukowsky, gracias a la Polar empírica de Lilienthal, lo hace y obtiene gráficamente valores concretos y sustancialmente coincidentes con los calculables actualmente.
- (5) En 1906 llegará a establecer -solamente con las ecuaciones de las fuerzas y en parte de modo implícito- que un planeador estable en cabeceo desciende con un modo oscilatorio cuya expresión matemática da lugar a la forma simplificada actual del modo Fugoide, del que fija las componentes real e imaginaria. Muestra la influencia de la velocidad en la frecuencia de oscilación, y la de la resistencia aerodinámica en el amortiguamiento. Debido a la presencia de este amortiguamiento el movimiento resulta estable en velocidad.
- (6) En 1913—siguiendo a Painlevé, que es el primero en establecer este “*teorema*” en 1908- mostrará que la estabilidad en velocidad del descenso planeado, con pendiente fija, depende del signo de la derivada de la eficiencia aerodinámica respecto del ángulo de ataque. Esto establecía una separación entre dos regímenes diferentes de vuelo, ambos posibles. Dado que la trayectoria de aproximación con intención de aterrizaje es básicamente del tipo descrito, el “*teorema*” parecía merecer la atención de los expertos.
- (7) Realiza también un estudio bastante detallado del modo Corto Período (que todavía no ha recibido este nombre), y establece de modo matemáticamente coherente y físicamente bien fundado una condición de estabilidad semejante a las obtenidas por Lanchester, Ferber, Soreau y Bryan.
- (8) Cita a O. Lilienthal [6] de entre los pioneros ahora estudiados. También menciona a Jöessel [8]; Kummer [9]; Avanzini [7]; Mouillard [16]; H. Airy [17]; S. E. Peal [13]; Brétonniere [14]; Davidson [15]; Dzhevetskiy [18]; M. Blix [19]; Weylher [20]; Marey [21]; Rayleight [22]; Parseval [23]; Goupil [5];

⁷⁹ Lanchester, con toda probabilidad, no tenía noticia alguna del trabajo de Zhukowsky.

- (9) Zhukowsky es citado -de entre los pioneros que ahora estudiamos- solamente por los hermanos Wright. [12]

Bibliografía

- [1] Zhukowsky, N. E. “*On Soaring of Birds*” (22-10-1891). Boletín de la Sociedad Aeronáutica de Moscú. Núm. 1-3. (Reprint, de Bureau of Foreign Science and Technology, Berlin. (1922).
- [2] Zhukowsky, N. E. “*On Fall of Light Oblong Bodies Rotating about their longitudinal axes in Air (Second Paper)*” de. N. E. Zhukowsky “Collected Papers”; (Vol 5). (1906).
- [3] Zhukowsky, N. E. “*Dynamics of Airplanes in Elementary Description (First Paper)*”. N. E. Zhukowsky “Collected Papers”; (Vol 5). (1913).
- [4] Yaroshevsky, V. A. “On the Investigations of N. E. Zhukowsky Devoted to Flight Dynamics”; International Journal of Fluid Mechanics Research, Vol. 26, No. 4, (1999).
- [5] Goupil, “La Locomotion Aérienne”, Imp. De A. Pouillard. Charleville (1884).
- [6] Lilienthal, O. “*Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Ein Beitrag zur systematik der Flugtechnik*”. Berlin: R. Gaertners Verlagbuchhandlung. (Ed. de American Aeronautical Archives; Markowski International Publishers, One Oakglade Circle, Hummelstown, PA 17036 USA. Email: amaeroarch@aol.com). (1889).
- [7] Avanzini, G. “Nuove riserche sulla resistenza de “fluidi”; Saggi scientifici e letterari dell’ Academia di Padova; Padova; pp. 96-113. (1794).
- [8] Joëssel. “Rapport sur des expériences relatives aux gouvernails”; Repport 9; “Mémoial du Génie Maritime”; (1873).
- [9] Kummer, E. E. “Über die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt ins besondere sauch auf die Geschosse”, Berlin. Bachduckerei der Köningl. Akademie der Wissenschaften; (G. Vogt), Universitats -strassen, 8, (1875).
- [10] F. W. Lanchester. “Aerodnetics”, 1908. Constable. London. Lanchester, F. W. “Aerodynamics, constituting the second volume of a complete work on Aerial flight”. D. VAN NOSTRAND COMPANY. London. (1907).
- [11] Painlevé, P. & Borel, E. “*L`Aviation*”. Imp. Felix Alcan. Paris. (1911).
- [12] Brockett, P. Bibliography of Aeronautics; Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 55. Publication No. 1920. Washington. USA. (1910)⁸⁰

⁸⁰ Este documento, como ya se ha dicho, menciona más de 13.500 referencias aeronáuticas, desde el siglo XV hasta el año de 1909. Zhukowsky no aparece en él.

- [13] Peal, S. E., “Soaring of Birds”; *Nature*, Vol. XXIII, 1.11.
- [14] Bretonnière, J. “Deux réponses explicatives au sujet de notre étude sur le vol plané”. *L’Aéronaute*, 24 année, No. 3. Pp. 58-63. Paris (1891).
- [15] Davidson, R. O., “A new theory of the flight of birds”; H. Polkinhorn Printer, Washington. (1858); ver también *Scientific American*, 27 Marzo. (1871).
- [16] Mouillard, L. P. “L’empire de l’air; essai d’ornithologie appliquée a la aviation”. Masson Editeur, Librairie de l’Académie de Medicine, 120. Boulevard Saint-Germain. Paris (1881).
- [17] Airy, H., “The soaring of birds”. *Nature*, XXVIII, 1.596.
- [18] Dzhevetskiy, S. “Theoretical solution of the problema of soaring of birds” (en ruso). San Peterburgo. (1891)
- [19] Blix, M. “Une nouvelle théorie sur le vol à voile des oiseaux”. *Revue générale des sciences pures et appliquées*. Pag. 787. (1890).
- [20] Weylher; “Observations sur le vol plané par orbes”. *L’Aéronaute*. (1890).
- [21] Marey, E. J. “La Machine Animale. Locomotion terrestre et aérienne”. Bibliothèque scientifique Internationale. Germer-Bailliére. Paris. (1882).
- [22] Rayleigh; “The soaring of birds”; *Nature*, Vol. XXVIII, 1.53 1.
- [23] Parseval, A. Von; “Die Mechanik des Vogelfluges”; Wiesbaden. (1889).
- [24] Mendelejev, D. I., “De la Résistance des fluides et de la navigation Aérienne”. San Peterburgo, (1880).
- [25] Köppen, W. “Beiträge zur Mechanik des Fluges und schwebenden Falles”; *Illustrierte Aeronautische Mittellungen*, No. 4. Strassburg. (1901). También: “*Illustrierte Aeronautische Mittellungen*, No. 4”. (1904);
- [26] Maewsky, “Cours de Balistique extérieure“. San Peterburgo, (1870).
- [27] Tchapyguine, S. A., “Des jets des fluides gazeux”, Pág. 105. Moscú. (1902).
- [28] Soreau, R. “*État actuel et avenir de l’aviation*”, Librairie des Sciences Aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS. (1908).
- [29] Zhukowsky, N. E. “*On the most expedient angle of Aeroplane inclination*” (1897). *Boletín de la Sociedad Aeronáutica de Moscú*. Núm. 1-3. (Reprint, de Bureau of Foreing Science and Technology, Berlin. (1922).

Capítulo 7

A. F. Zahm (1862-1954)



⁸¹

Contenido

7.1 Nota Biográfica

7.2 Documento de referencia.

7.3 Descripción de contenido.

7.4 Conclusiones

Bibliografía

7.1 Nota Biográfica

Nació en Ohio. Se graduó en la Universidad de Notre Dame, donde descubrió su pasión por el vuelo. Hizo un Master en Cornell University. En 1895 fue contratado como profesor de mecánica de la Universidad Católica de América, adquiriendo el grado de doctor en la John Hopkins University en 1898. Publicó importantes estudios sobre la

⁸¹ <http://laetare.nd.edu/assets/156739/fullsize/azahm.png>. (14.06.2017).

viscosidad del aire. Desde 1916 a 1929 fue director del Laboratorio de Aerodinámica de la U. S. Navy, y desde 1929 a 1946 rigió la Guggenheim Cátedra de Aeronáutica de la Librería del Congreso. Fue observador cualificado en las “*Guerras de las patentes*” entre Curtiss y los Wright, testimoniando en favor del primero.

7.2 Documento de referencia objeto de estudio.

“STABILITY OF AEROPLANES AND FLYING MACHINES”. PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON AERIAL NAVIGATION. (Chicago, 1893). Aeronautics, Vol. 1, No. 11; pp. 143-147. New York. (1894).

7.3 Descripción de contenido.

Zahm define “*estabilidad*” de un aeroplano como aquella característica que hace que la aeronave: (1) Lanzada de cualquier manera, automáticamente se oriente en contra de la velocidad incidente del viento. (2) Cuando es desplazada o girada (de la posición anterior) recupera prontamente su posición de equilibrio. (3) Mantiene de modo uniforme la trayectoria media predeterminada que se le ha prescrito y su actitud durante el vuelo.

A Zahm le interesa el análisis de la estabilidad longitudinal respecto de un eje normal al plano de simetría, que considera de la mayor importancia y más dificultosa. Acepta la Ley de Jöessel para el centro de presión [2]. Supone un aeroplano (en el sentido de un solo plano volador) en descenso con velocidad constante. Zahm analiza un ala dotada de un timón deflectable⁸², y distingue entre la parte fija -que denomina ala- y la móvil, o timón.

Denomina presión sustentadora a la sustentación generada por el ala principal (*Lw*: “*Sustaining Pressure*”), y presión guía a la generada por un timón de borde de salida (*Lt*: “*Guiding Pressure*”); las sitúa como puede verse en la Figura 7.1, y analiza dos posibles posiciones del CDG respecto de las dos fuerzas sustentadoras mencionadas.

La representación de la sustentación *Lt* tiene el sentido correcto -la curvatura disminuye la sustentación total- pero no es correcta la suposición de que la línea de acción está en la parte móvil, pues está *aproximadamente* hacia el 50% de la cuerda total. (Aunque en el caso mostrado en la figura -con el CDG adelantado- esto no altera los sentidos de los momentos causados por las “dos” sustentaciones.

⁸² Tipo “*flap*” plano.

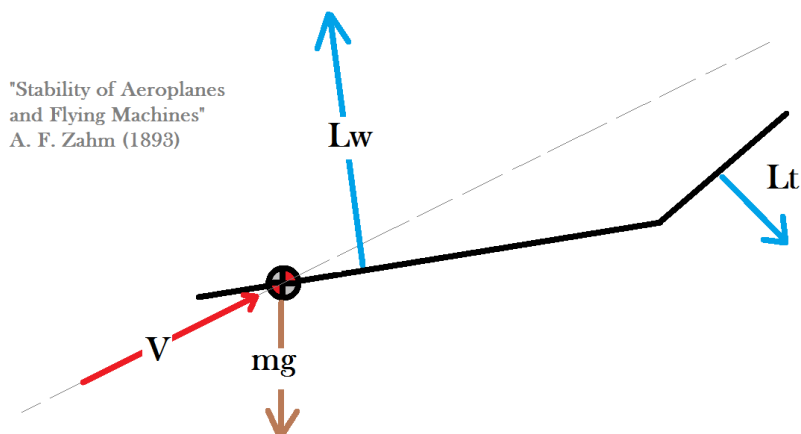


Figura 7.1: Placa plana con timón deflectado y CDG adelantado. (Ref. [1])

El monoplano -dotado de un timón movable- se supone en equilibrio para una velocidad particular. Zahm afirma, sin demostración, que un pequeño incremento de la velocidad disminuirá la pendiente de descenso, pero no podrá mantenerla y regresará a su posición inicial. Zahm asegura que existe estabilidad, pero admite que aparecen oscilaciones, que interpreta como una cierta “falta de estacionariedad”.

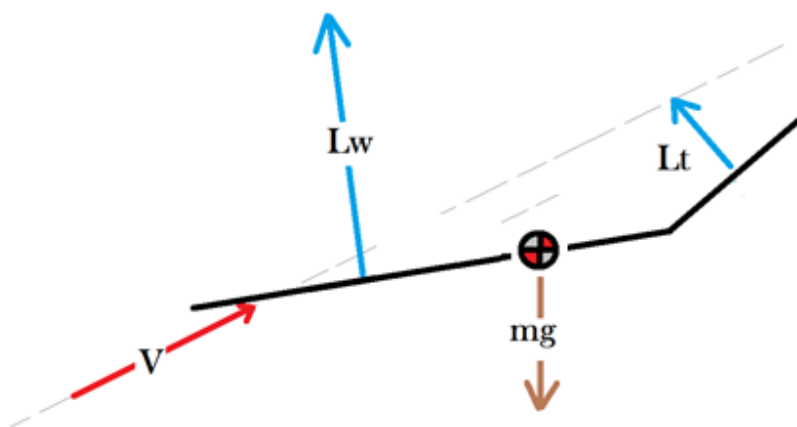


Figura 7.2: Placa plana con timón deflectado y CDG entre las resultantes aerodinámicas. (Ref. [1])

Un análisis similar aplicado al mismo plano, pero con una posición retrasada del CDG, le conduce a las mismas conclusiones, (Figura 7.2) pero con un “tempo” distinto, sin especificar más. La realidad, en este caso, es que no se puede suponer que el momento de cabeceo se anule. Tal como dibuja Zahm las fuerzas de sustentación debidas al perfil y al timón parece no haber problema, pero no es así. La razón se expone a continuación.

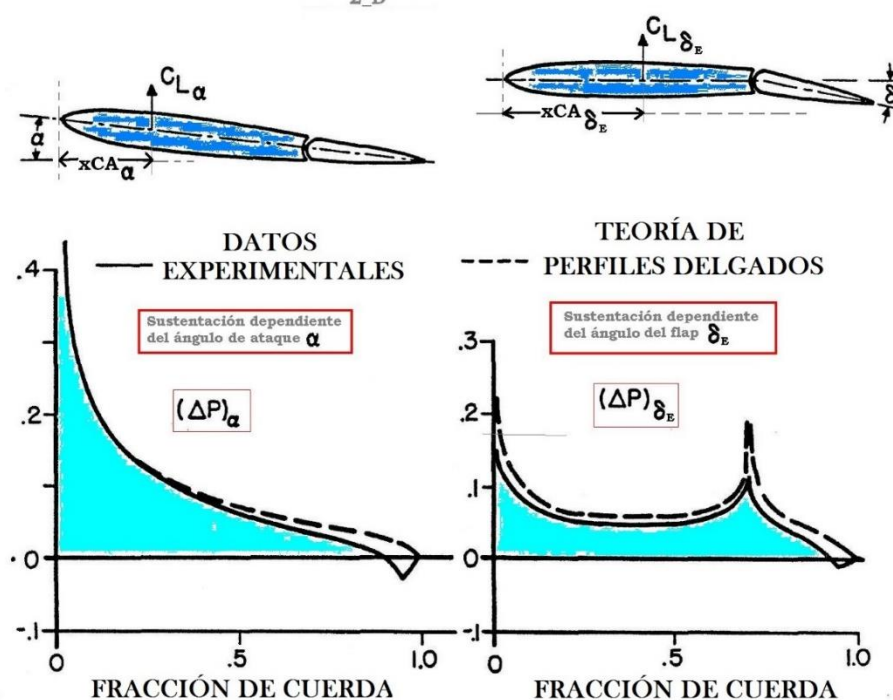


Figura 7.3: Distribución de sustentación para un perfil simétrico dotado de un timón: efecto de Angulo de ataque y efecto de deflexión del timón. (NACA RP 2348) *

Hoy nos resulta obvio que los gráficos que muestran la representación y ubicación de las resultantes de las fuerzas que actúan sobre un plano con una cierta curvatura debida a la deflexión de un timón según las muestra Zahm en las figuras (7.1) y (7.2) no son las correctas ya que la resultante de la sustentación por la deflexión del timón no está en la zona deflectada (Fig. 7.3), sino más adelantada. La representación de la figura (7.2) podría no admitir el equilibrio.

7.4 Conclusiones

(1) Zahm hace afirmaciones que considera de elemental sentido físico aplicado a los aeroplanos (Una frase recurrente es: “*Sin embargo, esto es evidente por sí mismo*”). No hay formulaciones matemático-físicas o aerodinámicas, que pudieran resultar aptas para cualificar las afirmaciones que considera evidentes sobre la estabilidad, salvo la aceptación de la Ley de Jöessel [2].

(2) Zahm estudia una sola placa dotada de un timón -o flap- en el borde de salida. En esa época no es raro considerar frecuentemente que un aeroplano es un plano (sólo uno) que vuela planeando sin propulsión. Un análisis como el que intenta requeriría más datos experimentales acerca del comportamiento aerodinámico del “aeroplano”: sustentaciones, movimiento del centro de presión con el ángulo de ataque y con la curvatura (deflexión del timón). No obstante, sus comentarios, todavía fundamentalmente literarios, van en la dirección correcta, considerados en un sentido amplio.

(3) Esta aportación de Zahm al estudio del problema de la estabilidad de los aeroplanos es algo prematura y aparentemente con escaso apoyo experimental; sin embargo tiene el mérito de ser de las primeras exposiciones de tipo científico específicamente dedicadas a la cuestión de la estabilidad.

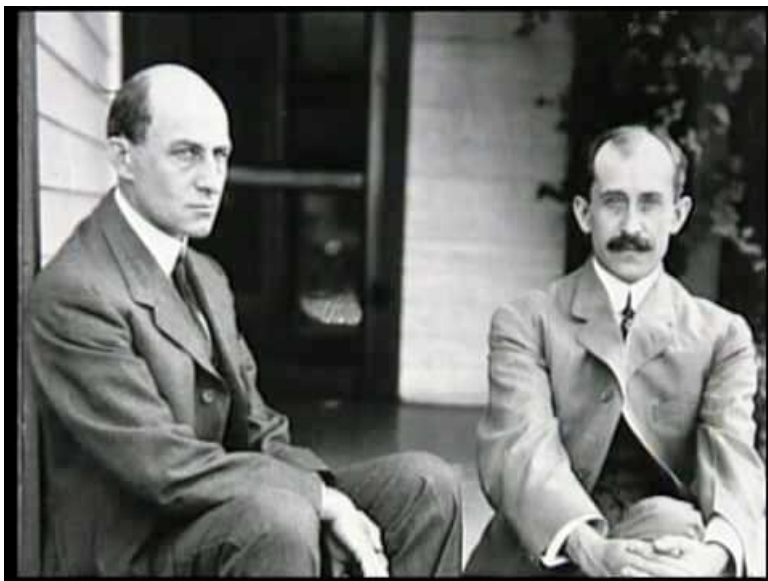
Bibliografía

[1] A. F. Zahm. “STABILITY OF AEROPLANES AND FLYING MACHINES”, PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON AERIAL NAVIGATION. (Chicago, August 1893). “The American Engineer and Railroad Journal”, 47 Cedar Street, New York, (1894).

[2] Joëssel. “Rapport sur des expériences relatives aux gouvernails”; Repport 9; “Mémorial du Génie Maritime”, (1873).

Capítulo 8

Wilbur Wright (1867-1912) & Orville Wright (1871-1948)



Contenido

8.1 Nota Biográfica

8.2 Documento de referencia.

8.3 Descripción de contenido.

8.4 Conclusiones

Bibliografía

⁸³ https://www.capmembers.com/media/cms/Orville__Wilbur_Wright_1jpg_C38BA53F99252.jpg.
(14.06.2017)

8.1 Nota Biográfica. [18]

Wilbur Wright, nació en Milville (Indiana). Realizó estudios equivalentes a la Enseñanza Secundaria. Murió de fiebres tifoideas a los 45 años.

Orville Wright, nació en Dayton (Ohio). Realizó estudios aproximadamente equivalentes a la Enseñanza Secundaria.

Ambos se interesaron en el vuelo desde muy jóvenes. Fundaron la “Wright Cycle Co.” (Venta y reparación de bicicletas). Poseían notables dotes para la mecánica y una tenacidad a toda prueba. La *Smithsonian Institution* les facilitó información sobre los trabajos de Langley, Lilienthal, Mouillard y otros. En Octave Chanute encontraron un mentor y amigo que les alentó, y les mantuvo informados de los acontecimientos mundiales aeronáuticamente relevantes.

Comenzaron sus ensayos probando los planeadores por ellos diseñados en las playas de Kitty Hawk (Carolina del Norte). Diseñaron y construyeron un motor de combustión interna alternativo de 8 kW. El primer vuelo controlado y propulsado de la historia tuvo lugar en el biplano “*Flyer*” el 17 de diciembre de 1903. Este avión era estáticamente inestable. Los aviones Wright se construyeron bajo licencia en Francia y Alemania. En 1909 fundaron la “Wright Company”, con Wilbur como presidente y Orville como vicepresidente. En 1915, después de la muerte de Wilbur, Orville liquidó sus intereses en la compañía.

8.2 Documento de referencia objeto de estudio.

“THE PAPERS OF WILBUR & ORVILLE WRIGHT”. Including the Chanute-Wright letters and other papers of Octave Chanute. (VOL I; 1899-1905 & VOL II; 1906-1948). Sponsored by Oberlin College on the Wilbur-Orville Wright Memorial Fund and prepared for the Press with notes, appendices, and bibliography by the Aeronautics Division of the Library of Congress. Mervin McFarlan, Editor. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York. (1953)

8.3 Descripción del Contenido

El estudio que ahora realizamos de los “Papers” de los Wright es muy limitado, solamente relacionado con algunos aspectos de la estabilidad longitudinal.

Los Wright se inspiraron en los trabajos de Cayley [3], de Pénaud [4] y de Lilienthal [5], que estudiaron con seriedad.

Para hacerse una idea de hasta qué punto los dos hermanos habían captado la complejidad del problema, puede merecer la pena citar unas palabras de Wilbur en 1901: “*Las dificultades que obstruyen la construcción de una máquina voladora que tenga éxito son de tres clases:*

- *Las relacionadas con la construcción de alas sustentadoras,*

- *Las relacionadas con la generación y la aplicación de potencia para mover el aparato por el aire,*
- *Las relacionadas con el equilibrado y control de la máquina una vez en vuelo.*
- *De las tres, está muy avanzada, hasta cierto punto, la solución de las dos primeras; pero la tercera, la incapacidad de equilibrarla y guiarla todavía desafía a los estudiosos del vuelo.*
- *Cuando esto se haya logrado, la edad de las máquinas voladoras habrá llegado, pues todas las demás dificultades son de importancia menor” [1].*

Estas pocas palabras iluminan claramente la lucidez con la que los Wright acometieron el estudio y solución de los problemas del vuelo artificial.

Consecuencia de lo anterior es que se muestran preocupados por el equilibrio de su (futura) máquina (1899). “*Lilienthal se mató por ser incapaz de equilibrar adecuadamente su máquina en el aire... Trataba de hacerlo desplazando el peso de su cuerpo...* ”.

Describen también la función del plano horizontal, complementario del principal, de un modo algo críptico: “*The object of the tail is... to preserve the center of pressure...*” (1900). Parece una manera indirecta de indicar que, para lograr que el momento de cabeceo se mantenga nulo, se necesita una superficie distinta del ala principal que genere un momento, compensador de la perturbación que causa el movimiento del centro de presión con α .

Para justificar la decisión de situar el empenaje móvil por delante del ala principal mencionan la razón siguiente: pensaban así obtener un grado elevado de estabilidad inherente⁸⁴. Se debía también, en parte, a la incertidumbre que les causaba el comportamiento del centro de presión para un perfil alar con curvatura $CP(\alpha)_{\text{camber}\neq 0}$ y pensaban que, con un empenaje tipo “canard” el control longitudinal era más eficaz que con ningún otro.

La “teoría” básica que aplicaban, compartida por todos los pioneros, era la siguiente: para equilibrar el planeo de una máquina voladora basta con hacer coincidir el CDG con el Centro de Presión, pero –son sus palabras– “*parece que estos dos puntos no son capaces de estar juntos pacíficamente ni un instante...*” (1901)

Veamos, de un modo algo deslavazado, algunos puntos relevantes de sus investigaciones:

⁸⁴ No parece claro, en esas fechas, lo que entendían los Wright por “*estabilidad inherente*”. De hecho el “Flyer” resultó ser “*inherentemente inestable*”.

- Se plantearon realizar el control mediante el movimiento del CDG –o sea, en su caso, del piloto- pero la experiencia de Lilienthal les llevó a la conclusión de que no era un buen sistema.
- Constataron la aparición de una trayectoria “Ondulante”... Debido a que su modelo propulsado de 1903 –el Flyer- no era estable, estas oscilaciones podrían deberse a sucesivas tendencias a divergir, corregidas por el piloto.
- Lamentan encontrarse -en la bibliografía técnica de la que disponían- con más de 50 valores distintos para la supuesta constante de resistencia aerodinámica del aire K , mencionan valores desde 0.0027 hasta 0.0054. (Cfr. Cap. 2)
- Comprueban que no les sirve una sola tabla aerodinámica, correspondiente a un perfil alar y con un alargamiento (AR) fijo, para extrapolar conclusiones respecto de un perfil diferente y un AR distinto. Definen el ángulo de ataque equivalente para un perfil curvo.
- Confirman que el centro de presión de un ala plana se aproxima al borde delantero a medida que α se acerca a cero. Se sirven de los trabajos de Kummer [6], Zahm [7] y F. Von Lössl [8].
- Veamos un ejemplo de las mediciones efectuadas en el túnel aerodinámico diseñado por los Wright acerca del movimiento del centro de presión con el ángulo de ataque en la Figura 8.1

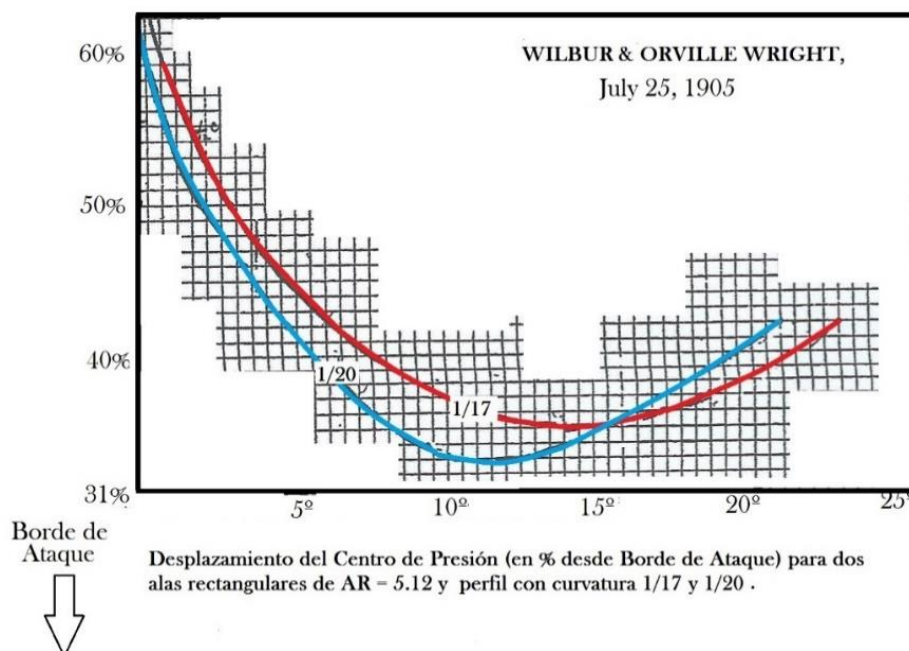


Figura 8.1: Representación gráfica del movimiento del centro de presión en función del ángulo de ataque. Es un ejemplo del tipo de experimentos que realizaron los Wright.

- Estudiaron⁸⁵ trabajos de diversos pioneros: Zhukowsky [9], Ferber [10], Painlevé [11], Langley [12], [13], Eiffel [14], Marey, E. J. [15].
- Se plantearon también la posibilidad de lograr la estabilidad automática de un avión.

Finalmente, los Wright se decantaron por una configuración que primaba el control frente a la estabilidad; esto era estrictamente hablando un imperativo, pues el “Flyer” de 1903 era un avión altamente inestable y se necesitaba una pericia que no era posible improvisar y que los Wright fueron adquiriendo paulatinamente, a lo largo de muchos vuelos⁸⁶.

Desde el primer vuelo hasta la realización del primer círculo completo en vuelo horizontal trascurrió más de un año. Muchos pilotos consideraban que el avión de los Wright era difícil de dominar. El vuelo controlado era posible, pero esto no se consideraba suficiente. Por ejemplo, para un avión de observación era necesario que el piloto pudiera, hasta cierto punto, desentenderse de controlar continuamente el avión para concentrarse en su misión. Esto no era posible con el “Flyer” monoplaza. (Fig. 8.3. (1903)).

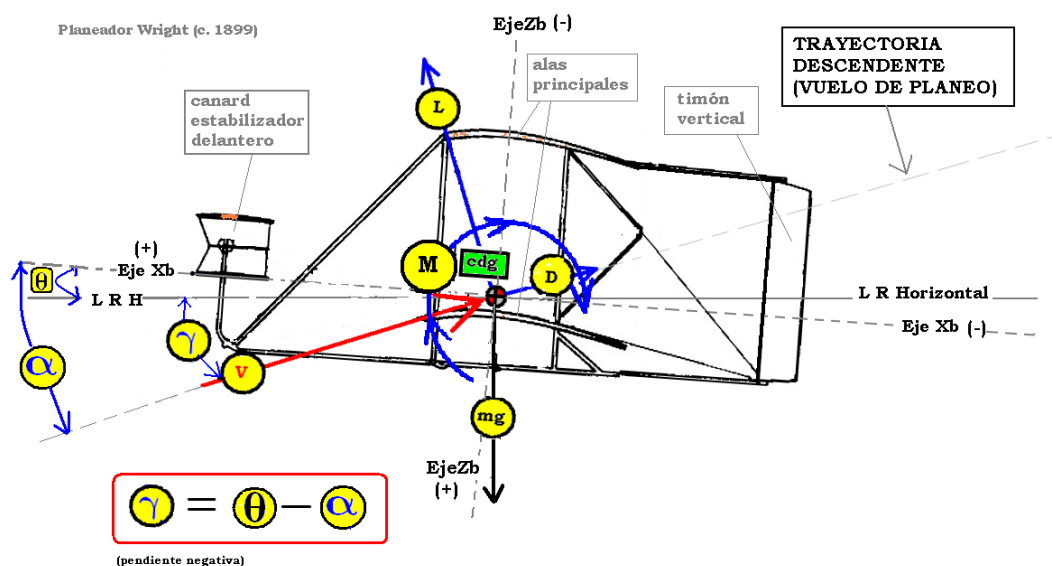


Figura. 8.2: Modelo de planeador de los Wright; versión sin propulsión, previa al “Flyer”. (1899).

⁸⁵ Esta información les llega habitualmente a través de Octave Chanute, que durante un tiempo fue algo así como su mentor. Los Wright no siempre especifican de qué documento se trata; no rara vez las Notas son simples apuntes de campo, sucintos y resumidos.

⁸⁶ En 1908 trataron de vender su avión al US Army Signal Corps. El contrato exigía que el avión pudiera ser manejado cómodamente en todas direcciones con facilidad, perfectamente controlado y equilibrado. El piloto al que se asignó la evaluación declaró que era “aproximadamente tan estable (y previsible) como un caballo salvaje” [17].

La fig. 8.2. muestra el perfil de un planeador de 1899. Se trata de un biplano con alas delgadas de gran curvatura -lo que suponía una complicación a efectos de control del momento de cabeceo- elegido así por la mayor sustentación que proporcionaban frente a las alas planas. Para los Wright, toda la sustentación eficaz proviene de estas alas principales, mientras que el pequeño conjunto delantero está pensado para el control del momento de cabeceo. Propiamente hablando, el que fuese un conjunto estabilizador o desestabilizador dependía de las posiciones relativas del *CDG* y del centro aerodinámico del avión completo.

Los Wright eran plenamente conscientes de la inestabilidad inherente a su avión. No lograron subsanarla hasta que no transfirieron los planos delanteros hacia la cola del avión.

La Fig. 8.3 muestra un breve resumen de la evolución que la exigencia de estabilidad intrínseca -por la que se inclinaban, de un modo natural, la mayoría de los constructores europeos- impuso a los Wright.

En el ínterin, las actuaciones de su avión fueron alcanzadas y superadas por modelos coetáneos de otros fabricantes.

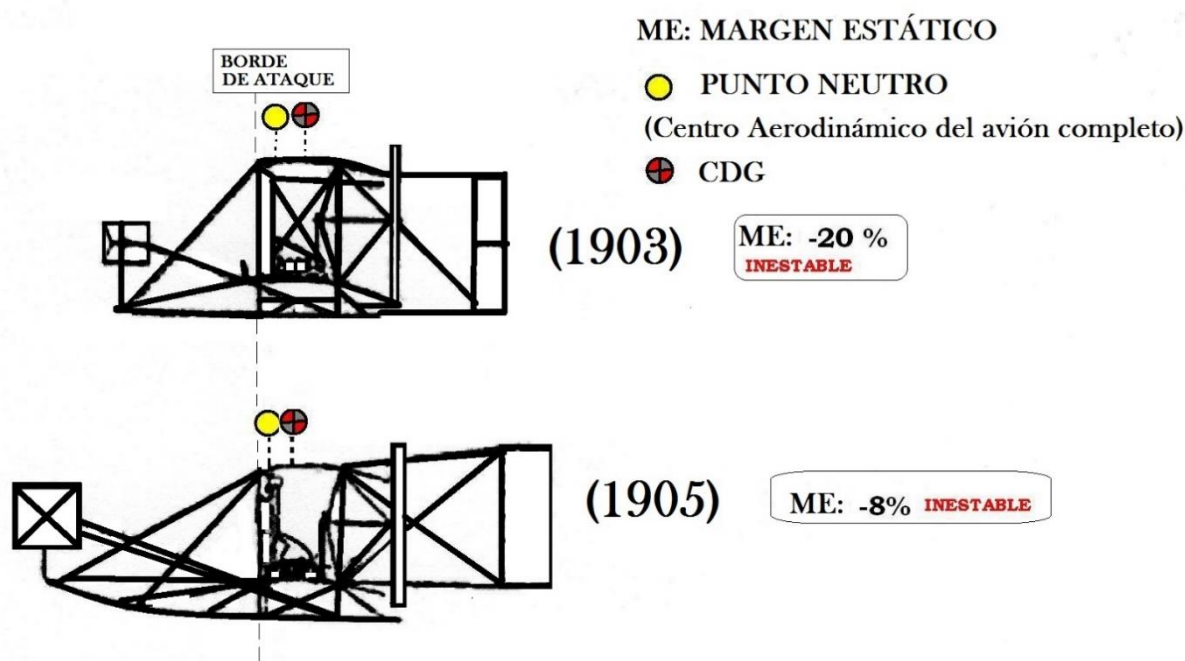


Figura 8.3: Evolución de los aviones de los Wright: de avión inestable a estable. . (Centro Aerodinámico por delante del CDG).

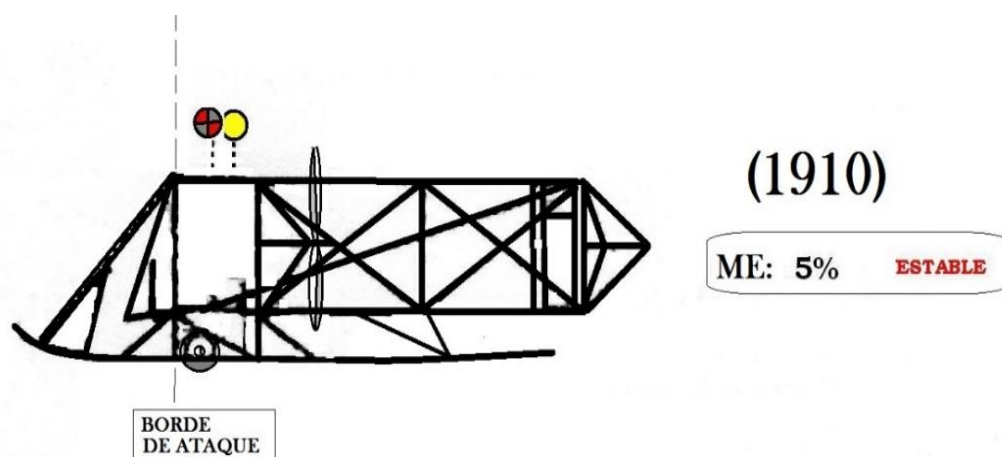


Figura 8.3 bis: Evolución de los aviones de los Wright: de avión inestable a estable. . (Centro Aerodinámico por detrás del CDG).

8.4 Conclusiones

Los Wright sólo realizaron un tipo de análisis fenomenológico y empírico, pero escasamente analítico, pues carecían de la base matemática *reglada* necesaria⁸⁷ para plantear las ecuaciones correspondientes [16]. A lo largo de un laborioso proceso de experimentos, en laboratorio y a escala real, tripulando ellos mismos sus planeadores y aplicando reiteradamente el método de “ensayo- error” obtuvieron un notable sentido físico de los problemas y de sus eventuales soluciones.

Resulta difícil no sentirse positivamente impresionados por su tenacidad, su metódico y bien orientado trabajo; por la lucidez y claridad mental con la que dispusieron sus rudimentarios medios; por las sensatas provisiones que tomaron ante las múltiples incógnitas a las que se enfrentaron.

⁸⁷ Una excepción parece ser el estudio que realizaron sobre la hélice. (Ref. [1], Págs. 611 y ss.)

Bibliografía

- [1] "THE PAPERS OF WILBUR & ORVILLE WRIGHT" (VOL I; 1899-1905) MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. NEW YORK. (1953)
- [2] "THE PAPERS OF WILBUR & ORVILLE WRIGHT" (VOL II; 1906-1948). MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. NEW YORK, (1953)
- [3] Cayley, G. "ON AERIAL NAVIGATION (I), (II), & (III)", "*A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*" (London, (I) Nov. 1809, (II) Feb. 1810, Mar. 1810)
- [4] Pénaud, A. "*L' Aeroplane Automoteur avec équilibre automatique*". "L'Aéronaute", Bulletin Mensuel International de la NAVIGATION AÉRIENNE; 5^o ANNEE, N^o 1-12 (1872) Paris.
- [5] Lilienthal, O. (1889). "*Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Ein Beitrag zur systematik der Flugtechnik*". Berlin: R. Gaertners Verlagbuchhandlung. (1889)
- [6] Kummer, H. "Über die Wirkung des Luftwiderstandes", Berlin Akad-Abhandlungen, 1875.
- [7] Zahm, A. F. "STABILITY OF AEROPLANES AND FLYING MACHINES". PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON AERIAL NAVIGATION. (Chicago, 1893). Aeronautics, Vol. 1, No. 11; pp. 143-147. New York. (1894)
- [8] Loessl F. R. Von . "Die Luftwiderstand-gesetze der Fall durch die Luft und die Vogelflug", Viena, Zeitschrift für Luftschiffahrt. Vol. 1, 1886
- [9] Zhukowsky, N. E. "*On Soaring of Birds*" (22-10-1891). Boletín de la Sociedad Aeronáutica de Moscú. Núm. 1-3. (Reprint, de Bureau of Foreign Science and Technology, Berlin, 1922).
- [10] Ferber, F. "Les Progrés de L'AVIATION depuis 1891 par le vol plané". Extrait de la Revue d'Artillerie. Paris. (Mars 1904)
- [11] Painlevé, P. "Cours de Mécanique et Machines"; Théorie de L' Aeroplane. Ecole Polytechnique de Paris. (1908)
- [12] Langley, S. P. "LANGLEY MEMOIR ON MECHANICAL FLIGHT" Part I. 1887 to 1896. Part II. 1897 to 1903; Ch. M. Manly. (No. 1948). Washington. Smithsonian Institution. (1911)
- [13] Langley, S. P. "Experiments in aerodynamics", Smithsonian contribution to Knowledge, No 801. Washington. 1902.

[14] Eiffel, G. “La Résistance de l'Air et l' Aviation”, Expériences effectuées au Laboratoire du Champ-De_Mars. H. Dunod et E. Pinat, Éditeurs. Paris (1910).

[15] Marey, E. J. “La Machine Animale. Locomotion terrestre et aérienne”. Bibliothèque scientifique Internationale. Germer-Bailliére. Paris. (1882)

[16] Culick, F. E. G. “What the Wright Brothers Did and Did Not Understand About Flight Mechanics-In Modern Terms”. AIAA-2001-3385. (2001).

[17] Gibson, J. C. “The Definition, Understanding and Design of Aircraft Handling Qualities”; Delft University Press. 1997.

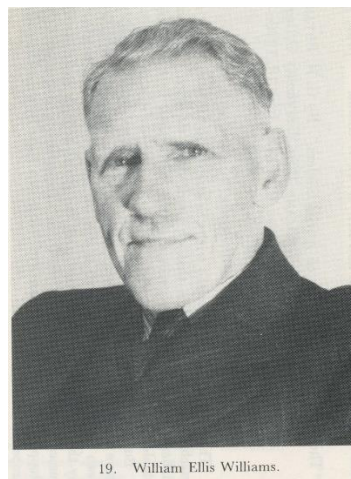
[18] Garriga-Jové, X. “Enciclopedia de Aviación y Astronáutica”; Vol. 8. (1972).

Capítulo 9

H. G. Bryan (1864-1928) & W. E. Williams (1881-1962)



88



19. William Ellis Williams.

89

Contenido

9.1 Nota Biográfica.

⁸⁸ https://en.wikipedia.org/wiki/George_H._Bryan#/media/File:George_Hartley_Bryan_1864-1928.JPG. (14.06.2017)

⁸⁹ Por gentileza de Gwynn Williams (The University College of North Wales Foundations 1884-1927) y Sue Barton, Public Lectures Liaison, Bangor University College.

9.2 Documentos de Referencia.

9.3 Descripción de contenido.

9.3.1 Obtención del Polinomio Característico del Sistema Lineal.

9.3.2 Derivadas Aerodinámicas.

9.3.3 Condición Fundamental de Estabilidad.

9.3.4 Cálculo de las Derivadas Aerodinámicas.

9.3.5 Hipótesis Aerodinámicas.

9.3.6 Formulación genérica de las Derivadas Aerodinámicas.

9.3.7 Aplicaciones Numéricas a casos particulares.

9.3.7.1 Planeador formado por un solo plano.

9.3.7.2 Planeador formado por dos planos unidos.

9.3.8 Efecto del momento de inercia sobre la estabilidad.

9.3.9 Carácter de las oscilaciones alrededor del equilibrio.

9.4 Conclusiones.

9.5 Resumen Crítico.

Bibliografía.

9.1 Nota biográfica

Hartley George Bryan Nació en Cambridge (UK) el 1 de marzo de 1864, falleció en Bordighera (Italia) el 13 de octubre de 1928. Su padre, Robert Purdie Bryan, falleció tempranamente. Su madre y abuela asumieron su educación. Se formó con tutores privados en Italia, Francia y Alemania. Fue admitido en Cambridge (1883) y se graduó en 1886, siendo elegido *fellow* de Peterhouse en 1889. Profesor de Matemática Pura y Aplicada en el *University College* de North Wales, de Bangor, donde permaneció –salvo un período entre 1917-1920- hasta su jubilación en 1926. Miembro de la *Royal Society* (1895) por sus trabajos sobre la teoría cinética de los gases y miembro honorario de Peterhouse (1915). Se interesó por la física estadística y la termodinámica, con valiosas publicaciones en estos campos; entre sus amigos y conocidos se contaron L. Boltzmann, A. Sommerfeld, Planck, E. Mach y Van der Waals. Conoció las publicaciones de O.

Lilienthal y las investigaciones de N. E. Zhukowsky sobre el vuelo de planeo de las aves. La enfermedad final fue breve; la noche anterior a su fallecimiento participó en el Congreso Matemático Internacional de Bolonia.

William Ellis Williams fue profesor de Ingeniería Industrial en el University College of North Wales, Bangor. Sus intereses profesionales fueron muy variados: desde la aeronáutica, hasta la radio y televisión, pasando por la producción de electricidad por medios hidráulicos. En 1910, junto con H. G. Bryan, diseñó y construyó -en los sótanos del departamento de Física de la Universidad de Bangor- un avión que probó en una playa de Anglesey. Trabajó sobre los rayos-X en el laboratorio Roentgen de Munich. Escribió en revistas aeronáuticas artículos relacionados con la importancia del centro de gravedad (1909), los esfuerzos estructurales (1911), un nuevo método para medir la resistencia del aire en superficies planas y curvas (1911) y la distribución de presión en un ala en un avión (1914), los tres primeros en “*Aeronautics*”, y el último en “*The Aeronautical Journal*”. Realizó un notable currículo académico en el ámbito de la Ingeniería Eléctrica.

9.2 Documento de Referencia

“*The Longitudinal Stability of Aerial Gliders*”, Bryan, G. H. & Williams, W. E. “*Proceedings of the Royal Society. London*”, S. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).

9.3 Descripción de contenido.

En el documento de referencia se analiza matemáticamente la estabilidad de un planeador en vuelo estacionario en un plano vertical mediante la linealización de las ecuaciones diferenciales del movimiento. Se establece el concepto de “*derivada aerodinámica o de estabilidad*”. Se asume un modelo aerodinámico basado en Langley [4] y Jöessel [5], y se estudia el carácter de las oscilaciones. Finalmente se establecen condiciones para la estabilidad del movimiento.

Los autores consideran que la principal dificultad práctica relacionada con los primeros intentos de vuelo estriba en lograr garantizar la estabilidad longitudinal. Piensan que el problema no será resuelto mientras no se estudie de modo rigurosamente matemático.

Para mostrar el modo de hacerlo los autores analizan matemáticamente la estabilidad de un planeador y también abogan por lograr un conocimiento experimental más amplio de los parámetros relevantes, apenas estudiados hasta el momento.

9.3.1 Obtención del Polinomio Característico del Sistema Lineal.

Bryan & Williams comienzan considerando un elemento sustentador sin curvatura en un plano vertical. Para especificarlo eligen dos ejes perpendiculares fijos al cuerpo, con el origen en el *CDG*. El ángulo θ es que el eje *OX* forma con la horizontal local. (Figura Núm. 9.1).⁹⁰

Nomenclatura:

- Se definen unos ejes *OX*, *OZ* con el origen *O* en el CDG de la placa y fijos a la misma (Ejes cuerpo). El eje *OX* forma un ángulo θ con la Línea de Referencia Horizontal (*LRH*), y es positivo por encima de ella (En el sentido de *OZ* negativo).
- Una placa plana rectangular *S*, de cuerda $2a$, está situada en el sistema de referencia descrito y su punto medio tiene como coordenadas $\{x_0, z_0\}$
- La placa está sometida a una corriente de aire de velocidad *V*, y la fuerza aerodinámica resultante *R* es perpendicular a la placa y su línea de acción pasa por un punto que dista $a\phi_j(\alpha)$ del punto medio de la placa. Este punto es el “centro de presión”, y la función $\phi_j(\alpha)$ expresa la dependencia de su posición respecto del ángulo de ataque α .
- La fuerza *R* tiene la componente *X* según el eje *OX*, y la componente *Z* respecto de *OZ*
- La placa forma un ángulo geométrico fijo β respecto del eje *OX*, positivo en el mismo sentido que θ .
- La velocidad *V* respecto del centro de gravedad tiene dos componentes en el sistema de ejes *OXZ*: una componente “*u*” paralela a *OX* y una componente “*w*” paralela a *OZ*. El ángulo de ataque α_A se define como $\alpha_A = \arctan\left[\frac{w}{u}\right]$ El ángulo aerodinámico total que ve la placa es $\alpha = \beta + \arctan\left[\frac{w}{u}\right]$

⁹⁰ Modificamos, en todo lo que sigue, la nomenclatura utilizada por Bryan ajustándola al modo actual; al ser esto así, las expresiones matemáticas que obtenemos nosotros no coincidirán literalmente con las suyas.

- La línea de acción de la resultante aerodinámica R pasa a una distancia ξ del centro O , de coordenadas (x_{CDG}, z_{CDG}) , y genera un momento M , positivo en el sentido de θ creciente, siendo la distancia ξ :

$$\xi = x_0 \cos \beta + z_0 \sin \beta + a \phi_f(\alpha) \quad [9.1]$$

- El momento generado será $M = R(x_0 \cos \beta + z_0 \sin \beta + a \phi_f(\alpha))$, positivo cuando tiende a levantar el eje OX .
- La inercia se establece respecto del centro de masas $\{x_{CDG}, z_{CDG}\}$

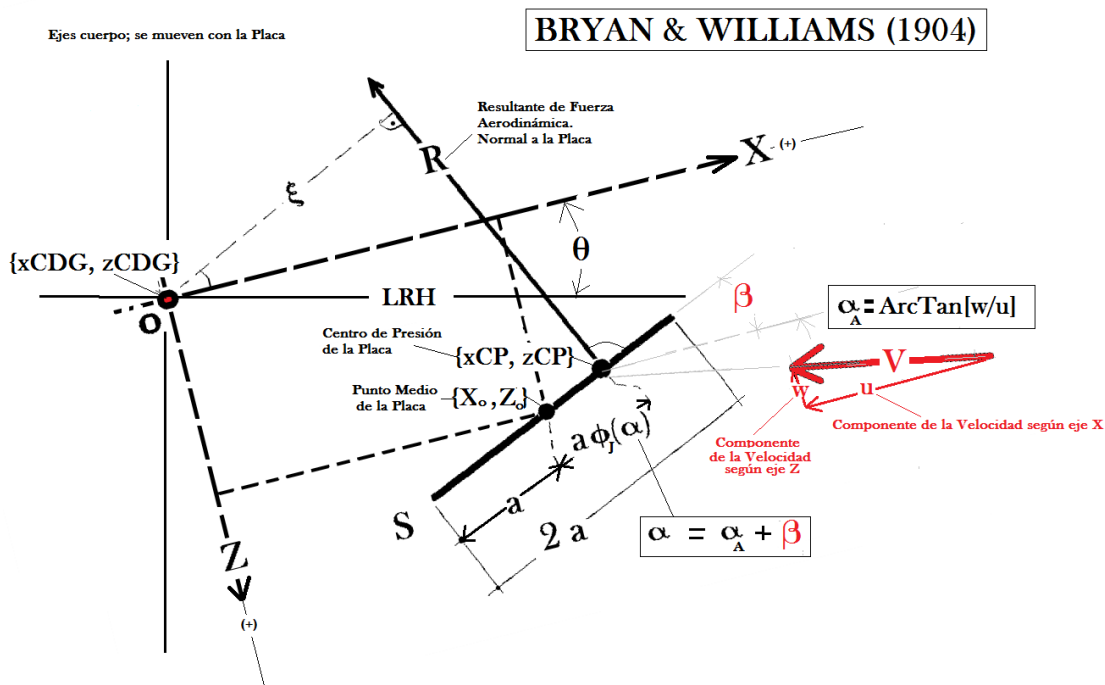


Figura 9.1: Sistema de ejes y nomenclatura básica utilizada por B&W para establecer las ecuaciones de la dinámica del vuelo de un planeador.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento son, siguiendo a Routh [2]:

$$\begin{aligned}
 [1OX] \quad m \left(\frac{du}{dt} + w \frac{d\theta}{dt} \right) &= -mg \sin \theta + X \\
 [2OZ] \quad m \left(\frac{dw}{dt} - u \frac{d\theta}{dt} \right) &= mg \cos \theta + Z \\
 [3] \quad I_{yy} \frac{d^2\theta}{dt^2} &= M
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

B&W aceptan la hipótesis de que X , Z y M habrán de ser función cuadrática de las velocidades lineales $\{u, w\}$ y de la velocidad angular $q = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$

Las condiciones de equilibrio estacionario se obtienen con la anulación de los primeros miembros de las ecuaciones [1OX], [2OZ] y [3] de [9.2] con $u = u_0$, $w = w_0$ y $\theta = \theta_0$

$$\begin{aligned}
 [1eq] \quad 0 &= X_0 - mg \sin \theta_0 \\
 [2eq] \quad 0 &= Z_0 - mg \cos \theta_0 \\
 [3eq] \quad 0 &= M_0
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Se trata de tres ecuaciones independientes que deben ser suficientemente significativas⁹¹. Si se conoce la geometría del planeador y la ley que gobierna la generación de las fuerzas aerodinámicas y la línea de aplicación de las mismas, se calcularían los valores de u_0 , w_0 y θ_0 del movimiento estacionario. B&W no se detienen en este cálculo; las leyes aerodinámicas todavía no han sido establecidas.

A continuación B&W se proponen estudiar las oscilaciones alrededor del punto de equilibrio. Lo hacen acudiendo al procedimiento clásico, mediante una expansión lineal de las fuerzas y del momento. Suponen pequeños incrementos Δu , Δw , $\Delta \theta$ de las variables alrededor del punto de equilibrio:

$$u = u_0 + \Delta u \quad w = w_0 + \Delta w \quad \theta = \theta_0 + \Delta \theta,$$

Las fuerzas y el momento son desarrollados alrededor de sus valores de equilibrio, despreciando órdenes superiores al primero:

$$\begin{aligned}
 X(u, w, \dot{\theta}) &\approx X_0(u_0, w_0, 0) + \frac{dX}{du} \Delta u + \frac{dX}{dw} \Delta w + \frac{dX}{d\dot{\theta}} \Delta \dot{\theta} + \dots \\
 Z(u, w, \dot{\theta}) &\approx Z_0(u_0, w_0, 0) + \frac{dZ}{du} \Delta u + \frac{dZ}{dw} \Delta w + \frac{dZ}{d\dot{\theta}} \Delta \dot{\theta} + \dots \\
 M(u, w, \dot{\theta}) &\approx M_0(u_0, w_0, 0) + \frac{dM}{du} \Delta u + \frac{dM}{dw} \Delta w + \frac{dM}{d\dot{\theta}} \Delta \dot{\theta} + \dots
 \end{aligned}$$

⁹¹ En particular, esto es importante respecto de la ecuación del momento de cabeceo M en el caso de una sola placa. Esta es la ecuación que planteó más dificultades a los pioneros, al analizar el movimiento longitudinal.

Que escribirán de acuerdo con la siguiente nomenclatura:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{du} &= X_u & \frac{dX}{dw} &= X_w & \frac{dX}{d\dot{\theta}} &= X_{\dot{\theta}} \\ \frac{dZ}{du} &= Z_u & \frac{dZ}{dw} &= Z_w & \frac{dZ}{d\dot{\theta}} &= Z_{\dot{\theta}} \\ \frac{dM}{du} &= M_u & \frac{dM}{dw} &= M_w & \frac{dM}{d\dot{\theta}} &= M_{\dot{\theta}}\end{aligned}$$

Después de efectuar las correspondientes sustituciones, obtienen el sistema [9.4]:

$$\begin{aligned}[1Lin] \quad m \left(\frac{d\Delta u}{dt} + w_0 \frac{d\Delta\theta}{dt} \right) &= -mg \cos \theta_0 \Delta\theta + X_u \Delta u + X_w \Delta w + X_{\dot{\theta}} \Delta\dot{\theta} \\ [2Lin] \quad m \left(\frac{d\Delta w}{dt} - u_0 \frac{d\Delta\theta}{dt} \right) &= -mg \sin \theta_0 \Delta\theta + Z_u \Delta u + Z_w \Delta w + Z_{\dot{\theta}} \Delta\dot{\theta} \\ [3Lin] \quad I_{yy} \frac{d^2 \Delta\theta}{dt^2} &= M_u \Delta u + M_w \Delta w + M_{\dot{\theta}} \Delta\dot{\theta}\end{aligned} \quad [9.4]$$

Suponen también, de acuerdo con el ya mencionado método clásico, que las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes son funciones exponenciales del tiempo:

$$\Delta u(t) = P e^{\lambda t} \quad \Delta w(t) = Q e^{\lambda t} \quad \Delta\theta(t) = R e^{\lambda t}$$

Siendo P , Q y R constantes que dependen de las condiciones iniciales del movimiento. Efectuadas sustituciones y reordenando, obtienen:

$$\begin{aligned}[1] \quad P(m\lambda - X_u) - QX_w - R(\lambda m X_{\dot{\theta}} - \lambda w_0 - mg \cos \theta_0) &= 0 \\ [2] \quad -PZ_u + Q(\lambda m - Z_w) - R(\lambda m Z_{\dot{\theta}} + \lambda u_0 - mg \sin \theta_0) &= 0 \\ [3] \quad -PM_u - QM_w + R(\lambda^2 I_{yy} - \lambda M_{\dot{\theta}}) &= 0\end{aligned}$$

Eliminando P , Q y R :

$$\begin{bmatrix} (m\lambda - X_u) & -X_w & -(\lambda X_{\dot{\theta}} - \lambda m w_0 - mg \cos \theta_0) \\ -Z_u & (\lambda m - Z_w) & -(\lambda Z_{\dot{\theta}} + \lambda m u_0 - g \sin \theta_0) \\ -M_u & -M_w & (\lambda^2 I_{yy} - \lambda M_{\dot{\theta}}) \end{bmatrix} = 0 \quad [9.5]$$

Si el determinante es desarrollado en potencias de λ obtenemos la ecuación característica del sistema:

$$A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0 \quad [9.6]$$

Los coeficientes tienen los valores siguientes⁹²:

$$\begin{aligned}
 A_4 &= 1 \\
 A_3 &= -\left(\frac{M_q}{I_{yy}} + \frac{X_u + Z_w}{m}\right) \\
 A_2 &= \frac{M_u w_0 - U_0 M_w}{I_{yy}} + \frac{-M_u X_q + M_q X_u - M_w Z_q + M_q Z_w}{I_{yy} m} + \frac{X_u Z_w - X_w Z_u}{m^2} \\
 A_1 &= U_0 \left(\frac{M_w X_u - M_u X_w}{I_{yy} m}\right) + w_0 \left(\frac{M_w Z_u - M_u Z_w}{I_{yy} m}\right) + \frac{M_w X_u Z_q}{I_{yy} m^2} - \frac{M_u X_w Z_q}{I_{yy} m^2} - \frac{M_w X_q Z_u}{I_{yy} m^2} + \dots \\
 &\dots + \frac{M_q X_w Z_u}{I_{yy} m^2} + \frac{M_u X_q Z_w}{I_{yy} m^2} - \frac{M_q X_u Z_x}{I_{yy} m^2} + g \left(\frac{M_u \cos \theta_0 - M_w \sin \theta_0}{I_{yy}}\right) \\
 A_0 &= g \frac{\cos \theta_0}{m I_{yy}} (M_w Z_u - M_u Z_w) + g \frac{\sin \theta_0}{m I_{yy}} (M_u X_w - M_w X_u)
 \end{aligned}$$

[9.7]

Con el objeto de simplificar estas expresiones, B & W suponen que en muchos casos *puede elegirse* un sistema de referencia en el que:

- (1) El ángulo de asiento longitudinal inicial sea nulo: $\theta_0 = 0$
- (2) La fuerza correspondiente al coeficiente X sea nula y también lo sean sus diferenciales, lo que equivale a suponer $\beta = 0$ junto con lo anterior.

$$\left(\frac{dX}{du} = 0, \frac{dX}{dw} = 0, \frac{dX}{d\theta} = 0\right).$$

Si se cumplen estos dos supuestos, los coeficientes de la ecuación característica del sistema admiten una expresión más simple:

⁹² B & W omitieron un par de términos del coeficiente A_2 , concretamente $(+M_\theta X_u + M_\theta Z_w)$. Esto afecta a los resultados numéricos de los ejemplos que ellos proponen, pero no a la validez del procedimiento.

$$\begin{aligned}
 A_4 &= 1 \\
 A_3 &= -\left(\frac{M_q}{I_{yy}} + \frac{Z_w}{m}\right) \\
 A_2 &= \frac{M_u w_0 - U_0 M_w}{I_{yy}} + \frac{-M_w Z_q + M_q Z_w}{I_{yy} m} \\
 A_1 &= w_0 \left(\frac{M_w Z_u - M_u Z_w}{I_{yy} m}\right) + g \left(\frac{M_u}{I_{yy}}\right) \\
 A_0 &= \frac{g(M_w Z_u - M_u Z_w)}{m I_{yy}}
 \end{aligned} \tag{9.8}$$

La ecuación bicuadrada $A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0$ con los coeficientes ya descritos es la que permitirá determinar las características de las oscilaciones para pequeños movimientos alrededor del equilibrio.

Para el análisis de la estabilidad del movimiento B&W utilizan las condiciones de E. J. Routh [3]. Estas exigen que los coeficientes $\{A_4, A_3, A_2, A_1, A_0\}$, y el discriminante de $[R] = A_1(A_2 A_3 - A_1) - A_0 A_3^2$ tengan el mismo signo. Dado que A_4 es la unidad positiva, los otros coeficientes deben ser también positivos.

9.3.2 Derivadas Aerodinámicas.

Para el análisis de los coeficientes simples, B&W establecen un “*Teorema*”, que afirma que las nueve derivadas $(X_u, X_w, X_{\dot{\theta}}, Z_u, Z_w, Z_{\dot{\theta}}, M_u, M_w, M_{\dot{\theta}})$ son funciones lineales⁹³ de la velocidad de vuelo V_0 .

Según esto podríamos escribir:

$$(X_u, X_w, X_{\dot{\theta}}, Z_u, Z_w, Z_{\dot{\theta}}, M_u, M_w, M_{\dot{\theta}}) \propto V_0 \tag{9.11}$$

A continuación, afirman que *siendo el peso exactamente igual a la resistencia vertical en el movimiento estacionario, se deduce que el peso es proporcional a V_0^2* . De donde:

⁹³ La verdad de este aserto resulta de la dependencia cuadrática de la velocidad de las fuerzas y momentos aerodinámicos.

$$mg \propto V_0^2 \quad \Rightarrow m \propto \frac{V_0^2}{g} \quad [9.11B]$$

De la afirmación⁹⁴ que acabamos de mencionar, B & W deducen que deberá cumplirse la siguiente relación de proporcionalidad:

$$\left(\frac{1}{m}\right)(X_u, X_w, X_{\dot{\theta}}, Z_u, Z_w, Z_{\dot{\theta}}, M_u, M_w, M_{\dot{\theta}}) \propto V_0 \left(\frac{1}{m}\right) \quad [9.12]$$

Y, si introducimos la proporcionalidad establecida para la masa [9.11B], tenemos:

$$(X_u, X_w, X_{\dot{\theta}}, Z_u, Z_w, Z_{\dot{\theta}}, M_u, M_w, M_{\dot{\theta}}) \propto V_0 \left(\frac{1}{\frac{V_0^2}{g}}\right) = \left(\frac{g}{V_0}\right)$$

Conclusión: *las derivadas aerodinámicas son inversamente proporcionales a la velocidad:*

$$(X_u, X_w, X_{\dot{\theta}}, Z_u, Z_w, Z_{\dot{\theta}}, M_u, M_w, M_{\dot{\theta}}) \propto \frac{1}{V_0} \quad [9.13]$$

Este *resultado* es la base para la investigación de las condiciones de estabilidad que realizan B&W.

9.3.3 Condición Fundamental de Estabilidad.

Aplicando esta conclusión a los coeficientes de la ecuación característica B&W establecen una dependencia particular respecto de la velocidad para cada uno de ellos:

$$A_4 = 1 \quad \Rightarrow \textit{independiente_de_} V_0$$

$$A_3 = -\left(\frac{M_q}{I_{yy}} + \frac{Z_w}{m}\right) \textit{ es_de_la_forma } \propto \frac{a}{V_0} \quad \left(\textit{Dim: } \frac{1}{T}\right)$$

⁹⁴ Nosotros, con lógica causal quizás más coherente, estaríamos inclinados a decir que la velocidad estacionaria V_0 tendrá que ser proporcional al peso del aparato volador para lograr sustentarlo.

$$A_2 = \frac{M_u w_0 - U_0 M_w}{I_{yy}} + \frac{-M_w Z_q + M_q Z_w}{I_{yy} m} \quad \text{es_de_la_forma} \quad \propto b + \frac{c}{V_0^2} \quad \left(\text{Dim: } \frac{1}{T^2} \right)$$

$$A_1 = w_0 \left(\frac{M_w Z_u - M_u Z_w}{I_{yy} m} \right) + g \left(\frac{M_u}{I_{yy}} \right) \quad \text{es_de_la_forma} \quad \propto \frac{d}{V_0} \quad \left(\text{Dim: } \frac{1}{T^3} \right)$$

$$A_0 = g \frac{(M_w Z_u - M_u Z_w)}{m I_{yy}} \quad \text{es_de_la_forma} \quad \propto \frac{d}{V_0^2} \quad \left(\text{Dim: } \frac{1}{T^4} \right)$$

Y el discriminante de Routh, que tiene un aspecto incómodo:

$$[R] = A_1 (A_3 A_2 - A_1) - A_3^2 A_0 \quad \text{es_de_la_forma} \quad \frac{1}{V_0^2} \left(f + \frac{g}{V_0^2} \right) \quad \left(\text{Dim: } \frac{1}{T^6} \right) \quad [9.14]$$

Siendo a, b, c, d, e, f, g constantes que dependen de las características de la placa y de las condiciones de vuelo.

Las aparición de inestabilidad en el movimiento, afirman B&W, viene determinada por los coeficientes de los que resulta obvio, en principio, que podrían llegar a cambiar de signo en función del valor de la velocidad V_0 . Para B & W los únicos coeficientes susceptibles de llegar a ser negativos son A_2 y el discriminante de Routh, debido a la forma matemática de su dependencia de V_0 .

La conclusión inmediata es que la estabilidad implica que se cumplan simultáneamente las dos condiciones:

$$A_2 \propto b + \frac{c}{V_0^2} > 0$$

$$[R] \propto \frac{1}{V_0^2} \left(f + \frac{g}{V_0^2} \right) > 0 \quad [9.15]$$

B & W concluyen: “*Solamente ciertos valores de la velocidad V_0 permiten obtener un movimiento de planeo estacionario estable. Las restantes condiciones solamente dependen de la forma y dimensiones del aparato y del ángulo de descenso*”.

Queda así establecida matemáticamente una condición de estabilidad, si bien la enuncian valiéndose de una variable -la velocidad de vuelo- cuyo uso, a efectos de significación de márgenes de estabilidad, se ha visto desplazado posteriormente por el uso de otros parámetros, igualmente relacionados en parte con las condiciones de vuelo como es lógico, pero más significativos desde el punto de vista de ingeniería y diseño.

Supone también la aplicación de un procedimiento matemático que, aunque bien conocido y ampliamente utilizado en el campo de la mecánica, es la primera vez -según pensamos- que se destina al análisis de un ingenio aeronáutico a partir de las ecuaciones generales, aunque limitadas al vuelo en un plano vertical.

9.3.4 Cálculo de las Derivadas Aerodinámicas.

Sin solución de continuidad, B&W pasan a mostrar cómo podrían ser calculados los nueve coeficientes $(X_u, X_w, X_{\dot{\theta}}, Z_u, Z_w, Z_{\dot{\theta}}, M_u, M_w, M_{\dot{\theta}})$ para un conjunto de planos sustentadores, si se conocen las leyes para calcular la resultante de las presiones y la posición de los centros de presión. Seguiremos detalladamente el proceso conceptual de B & W.

Con el objetivo de poder aplicar la teoría desarrollada obteniendo conclusiones numéricas, B&W aceptan dos hipótesis aerodinámicas fundamentales, basadas en los datos experimentales de que disponían y que les ofrecían garantías de cierta fiabilidad.

9.3.5 Hipótesis Aerodinámicas

- (A) Hipótesis de Langley [4] sobre el valor de la fuerza aerodinámica experimentada por una placa plana sometida con un ángulo α a una corriente de aire.

La fuerza producida es perpendicular a la placa, y su valor viene dado por:

$$R = K S V^2 f_L(\alpha) \quad [9.16]$$

Con:

K : CONSTANTE S : SUPERFICIE _ ALAR

V : VELOCIDAD _ DE _ VUELO $f_L(\alpha)$: FUNCIÓN _ DE _ LANGLEY

La función de Langley $f_L(\alpha)$ admite diversas expresiones que B&W fijarán más adelante, al aplicar numéricamente la teoría a algunos casos particulares.

- (B) Hipótesis de Jöessel [5] sobre la posición del centro de presión de la fuerza aerodinámica.

La posición del Centro de Presión varía con el ángulo α según la función.

$$x_{CP} = \frac{c}{2} \phi_J(\alpha) = 0.3(1 - \sin \alpha) c$$

[9.17]

Con:

x_{CP} : POSICIÓN _ DEL _ CENTRO _ DE _ PRESIÓN
DESDE _ EL _ CENTRO _ DE _ LA _ PLACA
(Hacia _ el _ Borde _ de _ ataque)

c : CUERDA _ ALAR = $2a$

$\phi_J(\alpha)$: FUNCIÓN _ DE _ JOËSSEL

Estas dos fórmulas proporcionan a B&W la información aerodinámica necesaria para proceder al cálculo de los coeficientes que permitirán analizar la estabilidad de un planeador.

9.3.6 Formulación genérica de las Derivadas Aerodinámicas.

Aplicamos en primer lugar la teoría de Langley para obtener las fuerzas X, Z. El subíndice $()_i$ hace referencia a cada una de las diferentes láminas sustentadoras, unidas rígidamente entre sí, de las que se presume un comportamiento aditivo sin interferencias. El símbolo \sum indica el sumatorio extendido a todas ellas, que debe ser aplicado con cautela. (Es práctico ahora pensar en dos placas, cada una de ellas con S, α , y β , x_0, z_0 diferentes)

Obsérvese que para los autores la constante K tiene un valor único y el mismo para todas las posibles formas de placas sustentadoras, al no tener en cuenta el efecto de la forma en planta; esta particularidad lastra significativamente sus conclusiones para el caso de un sistema sustentador de más de una placa, si no son idénticas.

$$[1] \quad X = \sum_i K S_i V^2 f_L(\alpha_i) \sin \beta_i \quad [2] \quad Z = \sum_i K S_i V^2 f_L(\alpha_i) \cos \beta_i \quad [9.18]$$

Completamos el sistema con la ecuación del momento M:

$$[3] \quad M = \sum_i K S_i V^2 f_L(\alpha_i) (p_i + a_i \phi_J(\alpha_i)) \quad [9.19]$$

Con:

$$\alpha_i = \text{ArcTan} \left(\frac{w}{u} \right) + \beta_i \quad p_i = x_{0i} \cos \beta + z_{0i} \sin \beta$$

Las velocidades lineales que resultan en el punto medio de las placas⁹⁵ como consecuencia de la velocidad angular $\dot{\theta}$ son:

$$u_{1i} = u + z_{0i} \dot{\theta} \quad w_{1i} = w - x_{0i} \dot{\theta}$$

Si efectuamos las sustituciones correspondientes:

$$[1] \quad X = \sum_i K S_i (u_{1i}^2 + w_{1i}^2) f_L \left\{ \text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] + \beta_i \right\} \sin \beta_i$$

$$[2] \quad Z = \sum_i K S_i (u_{1i}^2 + w_{1i}^2) f_L \left\{ \text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] + \beta_i \right\} \cos \beta_i$$

$$[3] \quad M = \sum_i K S_i (u_{1i}^2 + w_{1i}^2) f_L \left\{ \text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] + \beta_i \right\} \left(p_i + a_i \phi_J \left\{ \text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] + \beta_i \right\} \right)$$

Equivalentes⁹⁶ a:

⁹⁵ Son calculadas en el punto medio de la lámina sin mencionar ninguna explicación que lo justifique. Así lo hizo Lilienthal, como hemos visto.

⁹⁶ Los paréntesis que aparecen en las expresiones de Joëssel y Langley tales como

$$\phi_J \left\{ \text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] + \beta_i \right\}, \quad f_L \left\{ \text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] + \beta_i \right\}$$

indican que las funciones

$$\phi_J, \quad f_L \text{ tienen como variable independiente el argumento } \left(\text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] + \beta_i \right),$$

que es el ángulo aerodinámico total.

$$\begin{aligned}
 [1] \quad X &= \sum_i K S_i \left((u + z_{0i} \dot{\theta})^2 + (w - x_{0i} \dot{\theta})^2 \right) f_L \left\{ \text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] + \beta_i \right\} \sin \beta_i \\
 [2] \quad Z &= \sum_i K S_i \left((u + z_{0i} \dot{\theta})^2 + (w - x_{0i} \dot{\theta})^2 \right) f_L \left\{ \text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] + \beta_i \right\} \cos \beta_i \\
 [3] \quad M &= \sum_i K S_i \left((u + z_{0i} \dot{\theta})^2 + (w - x_{0i} \dot{\theta})^2 \right) f_L \left\{ \text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] + \beta_i \right\} \dots \\
 &\quad \dots \left(p_i + a_i \phi_j \left\{ \text{ArcTan} \left[\frac{w - x_{0i} \dot{\theta}}{u + z_{0i} \dot{\theta}} \right] - \beta_i \right\} \right)
 \end{aligned}$$

[9.20]

Con:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d(\alpha)_i}{du} \right)_{\dot{\theta}=0} &= \left(\frac{-w}{u^2 + w^2} \right); \\
 \left(\frac{d(\alpha)_i}{dw} \right)_{\dot{\theta}=0} &= \left(\frac{u}{u^2 + w^2} \right); \\
 \left(\frac{d(\alpha)_i}{d\dot{\theta}} \right)_{\dot{\theta}=0} &= - \left(\frac{w z_{0i} + u x_{0i}}{u^2 + w^2} \right)
 \end{aligned}$$

[9.21]

La velocidad angular $\dot{\theta}$ del conjunto alrededor del CDG altera el ángulo de ataque aerodinámico de las placas, y B&W asumen -ya lo hemos visto- que puede tomarse el punto medio de cada lámina para evaluar este efecto.

B&W aceptan la simplificación siguiente, consecuencia de linealizar la velocidad:

$$(u + z_{0i} \dot{\theta})^2 + (w - x_{0i} \dot{\theta})^2 \approx u^2 + w^2 + 2u z_{0i} \dot{\theta} - 2w x_{0i} \dot{\theta} + \dots$$

Así llegan a las expresiones generales para los valores de las fuerzas y del momento en función de las variables características: $X(u, w, \dot{\theta}, (\alpha)_i, \beta_i)$, $Z(u, w, \dot{\theta}, (\alpha)_i, \beta_i)$
 $M(u, w, \dot{\theta}, (\alpha)_i, \beta_i)$

$$\begin{aligned}
 [1Lin] \quad X &\approx \sum_i K S_i \left(u^2 + w^2 + 2u z_{0i} \dot{\theta} - 2w x_{0i} \dot{\theta} \right) f_L(\alpha + \beta)_i \sin \beta_i \\
 [2Lin] \quad Z &\approx \sum_i K S_i \left(u^2 + w^2 + 2u z_{0i} \dot{\theta} - 2w x_{0i} \dot{\theta} \right) f_L(\alpha + \beta)_i \cos \beta_i \\
 [3Lin] \quad M &\approx \sum_i K S_i \left(u^2 + w^2 + 2u z_{0i} \dot{\theta} - 2w x_{0i} \dot{\theta} \right) f_L(\alpha + \beta)_i \left(p_i + a_i \phi_J(\alpha + \beta)_i \right)
 \end{aligned}
 \tag{9.22}$$

Aplicando la definición de las derivadas aerodinámicas, evaluadas para $\dot{\theta}=0$ obtenemos, con la nomenclatura $f_{L\alpha}(\alpha)_i = \left(\frac{df_L(\alpha)_i}{d(\alpha)_i} \right)$ y $\phi_{J\alpha}(\alpha)_i = \left(\frac{d\phi_J(\alpha)_i}{d(\alpha)_i} \right)$

$$X_u \approx \sum_i K S_i \sin \beta_i \left(2u f_L(\alpha + \beta)_i - w f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i \right)$$

$$Z_u \approx \sum_i K S_i \cos \beta_i \left(2u f_L(\alpha + \beta)_i - w f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i \right)$$

$$M_u \approx \sum_i K S_i \left(w \left(a_i f_L(\alpha + \beta)_i \phi_{J\alpha}(\alpha + \beta)_i + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i \left(p_i + a_i \phi_J(\alpha + \beta)_i \right) \right) - 2u f_L(\alpha + \beta)_i \left(p_i + a_i \phi_J(\alpha + \beta)_i \right) \right)$$

$$X_w \approx \sum_i K S_i \sin \beta_i \left(2w f_L(\alpha + \beta)_i + u f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i \right)$$

$$Z_w \approx \sum_i K S_i \cos \beta_i \left(2w f_L(\alpha + \beta)_i + u f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i \right)$$

$$M_w \approx - \sum_i K S_i \left(\begin{aligned} &u \left(a_i f_L(\alpha + \beta)_i \phi_{J\alpha}(\alpha + \beta)_i + f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i \left(p_i + a_i \phi_J(\alpha + \beta)_i \right) \right) + \dots \\ &2w f_L(\alpha + \beta)_i \left(p_i + a_i \phi_J(\alpha + \beta)_i \right) \end{aligned} \right)$$

$$X_{\dot{\theta}} \approx - \sum_i K S_i \sin \beta_i \left((2u x_{0i} - 2w z_{0i}) f_L(\alpha + \beta)_i + (w x_{0i} + u z_{0i}) f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i \right)$$

$$Z_{\dot{\theta}} \approx -\sum_i K S_i \cos \beta_i \left((-2u z_{0i} + 2w x_{0i}) f_L(\alpha + \beta)_i + (wz_{0i} + ux_{0i}) f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i \right)$$

$$M_{\dot{\theta}} \approx -\sum_i K S_i (wz_{0i} + ux_{0i}) \left(f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i (p_i + a_i \phi_J(\alpha + \beta)_i) + a_i f_L(\alpha + \beta)_i \phi_{J\alpha}(\alpha + \beta)_i \right) + \dots$$

$$\dots + \sum_i 2K S_i (-u z_{0i} + w x_{0i}) f_L(\alpha + \beta)_i (p_i + a_i \phi_J(\alpha + \beta)_i)$$

[9.23]

NOTA: El valor numérico de los diversos parámetros aerodinámicos de tipo experimental que aparecen explícitamente en las ecuaciones anteriores, es decir: $f_L(\alpha + \beta)_i$, $f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i$, $\phi_J(\alpha + \beta)_i$, $\phi_{J\alpha}(\alpha + \beta)_i$ son tomados por B&W directamente de Langley [4] y Jöessel [5]

9.3.7 Aplicaciones numéricas a casos particulares.

9.3.7.1 Una sola lámina sustentadora.

Puesto que la lámina desciende estacionariamente, su plano debe ser necesariamente horizontal, pues la resultante aerodinámica debe equilibrar exactamente al peso. De lo contrario, habría aceleraciones en sentido transversal al descenso. Comenzamos por obtener las condiciones de equilibrio. (Fig. 9.2)

Tomamos el eje OX paralelo a la lámina. Como consecuencia, $\theta = 0$, $\beta = 0$ El equilibrio exige que el coeficiente X sea idénticamente nulo. Además es necesario que el momento sea nulo:

$$M \approx K S (u^2 + w^2) f_L(\alpha) (p + a \phi_J(\alpha)) = 0 \quad [9.24]$$

Por tanto:

$$p = x_0 \cos \beta + z_0 \sin \beta = x_0$$

$$d = (x_0 + a \phi_J(\alpha)) = 0 \Rightarrow x_0 = p = -a \phi_J(\alpha)$$

$$x_{CDG} = \{0, x_0 + a \phi_J(\alpha)\} = \{0, 0\}$$

Vemos que para que exista equilibrio, el CDG debe coincidir con el Centro de Presión de la resultante aerodinámica. Las coordenadas del punto medio de la placa, respecto del origen (que es el CDG), son:

$$\{x_0, z_0\} = \{-a \phi_J(\alpha), 0\}$$

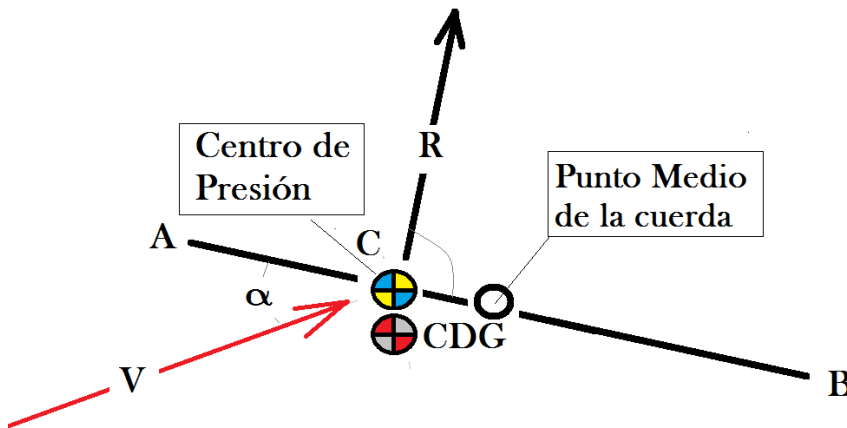


Figura 9.2: Estudio de una sola placa sustentadora.

En estas condiciones, vemos que sólo 6 de los nueve coeficientes no son nulos:

$$X_u \approx 0; \quad Z_u \approx K S (2u f_L(\alpha) - w f_{L\alpha}(\alpha)); \quad M_u \approx K S a w f_L(\alpha) \phi_{J\alpha}(\alpha);$$

$$X_w \approx 0; \quad Z_w \approx K S (2w f_L(\alpha) + u f_{L\alpha}(\alpha)); \quad M_w \approx -K S a u f_L(\alpha) \phi_{J\alpha}(\alpha);$$

$$X_{\dot{\theta}} \approx 0; \quad Z_{\dot{\theta}} \approx -K x_0 S (2w f_L(\alpha) - u f_{L\alpha}(\alpha)); \quad M_{\dot{\theta}} \approx -K S x_0 a u f_L(\alpha) \phi_{J\alpha}(\alpha)$$

[9.25]

Una vez llegados hasta aquí B&W tienen ya la base necesaria para analizar este caso particular de vuelo.

B&W estudian en primer lugar el caso de una placa plana cuadrada que desciende equilibrada sin velocidad angular y con un ángulo de ataque de $\alpha = 10^\circ$ con $x_o = -a \phi_J(\alpha)$ como hemos visto

Para este caso, tomando los valores numéricos de Langley [4] y Jöessel [5], como ya se ha mencionado, obtienen:

$$\begin{aligned} u_o &= V_o \sin 10^\circ = 0.17V_o & w_o &= V_o \cos 10^\circ = 0.98V_o \\ f_L|_{\alpha=10^\circ} &= 0.3, & f_{L\alpha}|_{\alpha=10^\circ} &= 1.6, & \phi_J|_{\alpha=10^\circ} &= 0.49, & \phi_{J\alpha}|_{\alpha=10^\circ} &= -0.59 \quad [9.26] \\ x_o &= -a \phi_J(10^\circ) = -0.49a \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las derivadas aerodinámicas obtenemos para nuestro caso:

$$\begin{aligned} Z_u &\approx K S (2u f_L(\alpha) - w f_{L\alpha}(\alpha)) = 0.316K S V_o \\ M_u &\approx K S a w f_L(\alpha) \phi_{J\alpha}(\alpha) = -0.30K S a V_o \\ Z_w &\approx K S (2w f_L(\alpha) + u f_{L\alpha}(\alpha)) = 1.67K S V_o \quad [9.27] \\ M_w &\approx -K S a u f_L(\alpha) \phi_{J\alpha}(\alpha) = -0.177K S a V_o \\ Z_{\dot{\theta}} &\approx -K x_o S (2w f_L(\alpha) - u f_{L\alpha}(\alpha)) = -0.291 K a S V_o \\ M_{\dot{\theta}} &\approx -K S x_o a u f_L(\alpha) \phi_{J\alpha}(\alpha) = -0.0849K S a^2 V_o \end{aligned}$$

Una vez obtenidos estos valores, se evalúan los coeficientes del polinomio característico que significan restricciones a la estabilidad, con:

$$\begin{aligned} M_u &\approx -0.30K S a V_o & M_w &\approx -0.177K S a V_o & Z_{\dot{\theta}} &\approx -0.291 K a S V_o & Z_w &\approx 1.67K S V_o \\ M_{\dot{\theta}} &\approx -0.0849K S a^2 V_o & Z_{\dot{\theta}} &\approx -0.291 K a S V_o \end{aligned}$$

Los coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 A_4 = 1 \quad A_3 &= \left(0.085 \frac{a^2 K S V_0}{I_{yy}} - 0.67 \frac{K S V_0}{m I_{yy}} \right) \quad A_2 = \left(0.126 \frac{a K S V_0^2}{I_{yy}} - 0.193 \frac{a^2 K^2 S^2 V_0^2}{m I_{yy}} \right) \\
 A_1 &= \left(-0.3 \frac{a g K S V_0}{I_{yy}} + 0.075 \frac{a K^2 S^2 V_0^3}{m I_{yy}} \right) \quad A_0 = 0.44 \frac{a g K^2 S^2 V_0^2}{m I_{yy}} \\
 [R] &= \left(-0.09 \frac{a^2 g^2 K^2 S^2}{I_{yy}^2} \right) V_0^2 + \Psi_1(a, g, K, S, I_{yy}, m) V_0^4 + \Psi_2(a, g, K, S, I_{yy}, m) V_0^6
 \end{aligned}
 \tag{9.28}$$

Las funciones ψ_1 y ψ_2 del discriminante de Routh son demasiado complicadas para ser escritas explícitamente.

Es fácil ver que algunos de los coeficientes del polinomio característico pueden tomar valores positivos o negativos según sea el valor de la velocidad V_0 . Para el caso estudiado son coeficientes influyentes los siguientes,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left(-0.3 \frac{a g K S}{I_{yy}} + 0.075 \frac{a K^2 S^2 V_0^2}{m I_{yy}} \right) V_0 \\
 Routh &= \left(-0.09 \frac{a^2 g^2 K^2 S^2}{I_{yy}^2} \right) V_0^2 + \Psi_1(a, g, K, S, I_{yy}, m) V_0^4 + \Psi_2(a, g, K, S, I_{yy}, m) V_0^6
 \end{aligned}$$

Para completar el argumento, aunque B&W no lo hacen, ahora nosotros insertamos la condición estacionaria inicial:

$$mg = K S V_0^2 f_L(10^\circ) \Rightarrow V_0^2 = \frac{mg}{0.3 K S}$$

El coeficiente A_1 resulta ser:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left(-0.3 \frac{a g K S}{I_{yy}} + 0.075 \frac{a K^2 S^2}{m I_{yy}} \left(\frac{mg}{0.3 K S} \right) \right) V_0 \\
 A_1 &= (-0.3 + 0.25) \frac{a g K S}{I_{yy}} V_0 = -0.050 \frac{a g K S}{I_{yy}} V_0 < 0
 \end{aligned}
 \tag{9.29}$$

Vemos que es negativo con independencia del valor que pueda tomar la velocidad V_0 , que es siempre positiva.

La manipulación del discriminante de Routh es mucho más incómoda, pero puede verse que es posible establecerlo sin la velocidad de vuelo:

$$\begin{aligned}
 [R] = & \left(-0.09 \frac{a^2 g^2 K^2 S^2}{I_{yy}^2} \right) \left(\frac{mg}{0.3K S} \right) + \Psi_1(a, g, K, S, I_{yy}, m) \left(\frac{mg}{0.3K S} \right)^2 + \dots \\
 & \dots + \Psi_2(a, g, K, S, I_{yy}, m) \left(\frac{mg}{0.3K S} \right)^3
 \end{aligned}
 \tag{9.30}$$

La posibilidad de formular las condiciones de estabilidad de dos modos: (1) en función de la velocidad de vuelo V_0 o bien (2) en función de las características geométricas y másicas e inerciales propias del planeador (a, S, I_{yy}, m) son completamente equivalentes, como es lógico, pero en la práctica resulta más intuitiva la que condiciona la estabilidad a las características del planeador (a, S, I_{yy}, m) y menos útil la que lo hace a la velocidad, ya que son muchas las velocidades posibles para un aeroplano que mantenga fijas sus características y, si el aeroplano es estable por sus rasgos propios, lo será a cualquier velocidad *compatible con el vuelo*, en el contexto aerodinámico aplicable a este trabajo.

9.3.7.2 Dos planos.

Resulta particularmente interesante el análisis de B&W aplicado a un conjunto de dos planos delgados. En principio considera el sistema con⁹⁷ $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y supone irrelevante el desplazamiento de los centros de presión, $\phi_{1,2}(\alpha) = 0$ lo cual justifica por la estrechez de los planos (Fig. 9.3). Esta simplificación es importante.

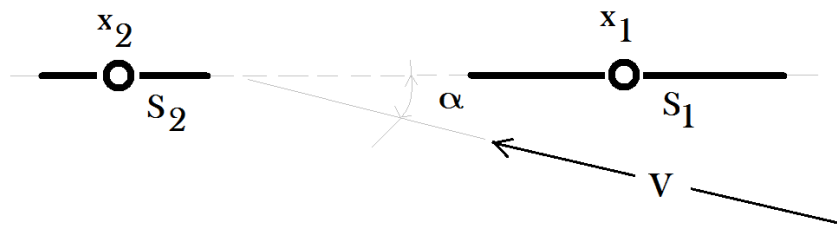


Figura 9.3: Estudio de dos placas planas separadas con el mismo ángulo de ataque geométrico.

⁹⁷ Obsérvese que esto implica que los dos planos son paralelos.

Aplicando el mismo procedimiento suponiendo las derivadas aerodinámicas aditivas, la ausencia de interferencias entre planos y la igualdad de la constante K , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 X_u &= 0 \\
 Z_u &\approx K (S_1 + S_2)(2u f_L(\alpha) - w f_{L\alpha}(\alpha)) \\
 M_u &\approx K (S_1 x_1 + S_2 x_2)(w f_{L\alpha}(\alpha) - 2u f_L(\alpha)) \\
 X_w &\approx 0 \\
 Z_w &\approx K (S_1 + S_2)(2w f_L(\alpha) + u f_{L\alpha}(\alpha)) \\
 M_w &\approx -K (S_1 x_1 + S_2 x_2)(u f_{L\alpha}(\alpha) + 2w f_L(\alpha)) \quad [9.31] \\
 X_{\dot{\theta}} &\approx 0 \\
 Z_{\dot{\theta}} &\approx -K (S_1 x_1 + S_2 x_2)(2w f_L(\alpha) + u f_{L\alpha}(\alpha)) \\
 M_{\dot{\theta}} &\approx -K (S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2)(u f_{L\alpha}(\alpha) + 2w f_L(\alpha))
 \end{aligned}$$

Con la condición de equilibrio del momento:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= x_1, \quad p_2 = x_2 \\
 M_0 &= K S_1 V_0^2 x_1 f_L \{\alpha_A\} + K S_2 V_0^2 x_2 f_L \{\alpha_A\} = (S_1 x_1 + S_2 x_2) K V_0^2 f_L \{\alpha_A\} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Es decir: } (S_1 x_1 + S_2 x_2) = 0$$

Vemos que se anulan también M_u, M_w y Z_q . Esto conduce a que algunos coeficientes del polinomio característico sean nulos: A_0, A_1 y el discriminante de Routh. Por tanto, concluimos que la estabilidad para este caso de dos planos coplanarios será crítica o neutra.

B&W proponen analizar la estabilidad del mismo sistema después de haber introducido una ligera inclinación entre las placas, manteniendo la no variación del centro de presión. Las expresiones de las derivadas aerodinámicas se complican debido a que $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$, y no resulta práctico analizarlas en directo.

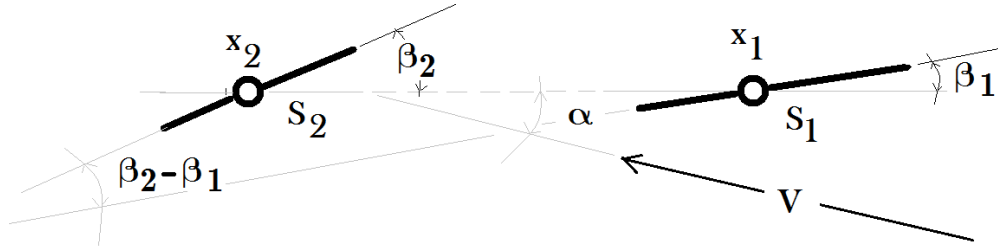


Figura 9.4 Estudio de dos placas planas separadas con diferente ángulo de ataque geométrico.

El procedimiento que siguen B&W para este caso, que es más importante, es el siguiente (Fig. 9.4 y Fig. 9.5):

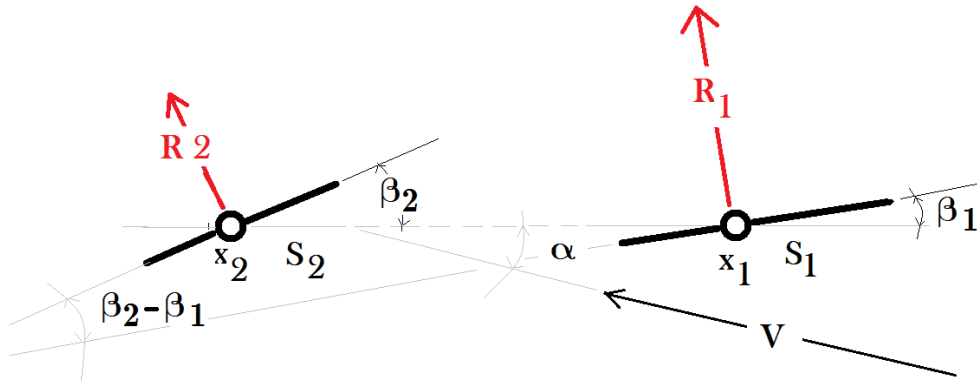


Figura 9.5: Parámetros y nomenclatura para el estudio de dos placas planas separadas con diferente ángulo de ataque geométrico.

Las condiciones estacionarias prescriben que:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad X_0 &= K S_1 V_0^2 f_L \{\alpha + \beta_1\} \sin \beta_1 + K S_2 V_0^2 f_L \{\alpha + \beta_2\} \sin \beta_2 = 0 \\
 [2] \quad Z_0 &= K S_1 V_0^2 f_L \{\alpha + \beta_1\} \cos \beta_1 + K S_2 V_0^2 f_L \{\alpha + \beta_2\} \cos \beta_2 = mg \quad [9.32] \\
 [3] \quad M_0 &= K x_1 S_1 V_0^2 f_L \{\alpha + \beta_1\} \cos \beta_1 + K x_2 S_2 V_0^2 f_L \{\alpha + \beta_2\} \cos \beta_2 = 0
 \end{aligned}$$

De [2] y [3] de [9.32] se obtiene:

$$\cos \beta_1 = \frac{mg}{K S_1 V_0^2 f_L \{\alpha + \beta_1\}} \left(\frac{x_2}{x_2 - x_1} \right) \quad \cos \beta_2 = \frac{-mg}{K S_2 V_0^2 f_L \{\alpha + \beta_2\}} \left(\frac{x_2}{x_2 - x_1} \right)$$

Si estas expresiones se sustituyen en, por ejemplo, el coeficiente Z_q [9.23] obtenemos:

$$Z_{\dot{\theta}} \approx -\sum_i K S_i \cos \beta_i \left((-2u z_{0i} + 2w x_{0i}) f_L(\alpha + \beta)_i + (w z_{0i} + u x_{0i}) f_{L\alpha}(\alpha + \beta)_i \right)$$

$$\frac{Z_q}{mu} = -\frac{g x_1 x_2}{V_0^2 (x_2 - x_1)} \left(\left(\frac{f_{L\alpha}(\alpha + \beta_1)}{f_L(\alpha + \beta_1)} \right) - \left(\frac{f_{L\alpha}(\alpha + \beta_2)}{f_L(\alpha + \beta_2)} \right) \right) \quad [9.33]$$

Para los demás coeficientes se puede demostrar que también aparece el factor

$$\left(\left(\frac{f_{L\alpha}(\alpha + \beta_1)}{f_L(\alpha + \beta_1)} \right) - \left(\frac{f_{L\alpha}(\alpha + \beta_2)}{f_L(\alpha + \beta_2)} \right) \right)$$

B&W indican que la función $\left(\frac{f_{L\alpha}(\alpha + \beta)}{f_L(\alpha + \beta)} \right)$ suele ser decreciente a medida que

α aumenta, por tanto su valor depende fuertemente del punto de la función en que se evalúa. Esto sugiere a B&W una relación entre los ángulos β_1 y β_2 para que la derivada aerodinámica tenga un valor positivo o negativo, y B&W deducen algunas consecuencias. Por otra parte, esto puede verse mejor si en el margen lineal suponemos válida la siguiente

expresión para la diferencia $\left(\left(\frac{f_{L\alpha}(\alpha)}{f_L(\alpha)} \right)_{\alpha_1} - \left(\frac{f_{L\alpha}(\alpha)}{f_L(\alpha)} \right)_{\alpha_2} \right)$:

$$f_L(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) f_{L\alpha}(\alpha + \beta);$$

$$\left(\left(\frac{f_{L\alpha}(\alpha)}{f_L(\alpha)} \right)_{\alpha_1} - \left(\frac{f_{L\alpha}(\alpha)}{f_L(\alpha)} \right)_{\alpha_2} \right) \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{(\alpha + \beta_1)(\alpha + \beta_2)} \quad [9.34]$$

La conclusión es que el signo de los coeficientes dependerá fuertemente de la diferencia de ángulos $(\beta_2 - \beta_1)$. Esta es una importante conclusión, aunque resulta evidente la limitación que introduce, para la validez de las conclusiones, el hecho de haber asumido un valor único para la constante K . Aparece aquí expresada un tanto oscuramente, la ley de la “V” longitudinal para la estabilidad longitudinal.

No resulta necesario seguir el desarrollo pormenorizado del trabajo de B&W.

9.3.8 Efecto del Momento de Inercia sobre la estabilidad.

La inercia aparece explícitamente solamente en los coeficientes A_4, A_3, A_2 aunque en los que hemos mostrado más arriba aparece en todos por la adimensionalización realizada en cada uno de ellos dividiendo por A_4 .

$$\begin{aligned}
 A_4 &= 1, \\
 A_3 &= -\left(\frac{M_q}{I_{yy}} + \frac{Z_w}{m}\right) = -\frac{1}{m}\left(\frac{M_q}{r_y^2} + Z_w\right) \\
 A_2 &= \left(\frac{M_u w_0 - U_0 M_w}{I_{yy}} + \frac{-M_w Z_q + M_q Z_w}{I_{yy} m}\right)
 \end{aligned}
 \tag{9.35}$$

Resulta obvio que cuanto menor sea el momento de inercia, mayores son los coeficientes en valor absoluto y eso implica aumento de la estabilidad, considerando que la inercia es expresable como $I_{yy} = m r_y^2$ (Suponemos ahora positivos todos los coeficientes como condición previa de estabilidad)

Para el análisis del discriminante de Routh la cuestión no es tan obvia, y B&W la aplican solamente a un caso particular, que no detallamos.

9.3.9. Carácter de las oscilaciones alrededor del equilibrio

El carácter de las oscilaciones depende de la naturaleza de las raíces de la ecuación característica. Los valores de $u(t)$, $w(t)$ y de $\theta(t)$ tendrían la siguiente forma posible:

- (1) Para cuatro raíces reales.... $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 e^{\lambda_4 t}$
- (2) Dos raíces reales y dos imaginarias $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{nt} \cos(\omega t + \omega_0)$
- (3) Cuatro raíces imaginarias $c_3 e^{nt} \cos(\omega_1 t + \omega_{01}) + c_4 e^{nt} \cos(\omega_2 t + \omega_{02})$

B&W resaltan la importancia de que todas las partes reales sean negativas, y subrayan el hecho de que no es suficiente con que un planeador tenga algunas raíces con amplitud decreciente, si otras raíces de la ecuación característica convierten el movimiento en inestable.

9.4 Conclusiones.

Las conclusiones mencionadas por B&W son las siguientes:

- (1) Para un planeador en un plano vertical las pequeñas oscilaciones alrededor del movimiento rectilíneo y uniforme vienen determinadas por una ecuación (algebraica) de cuarto grado, y las condiciones para que el movimiento estacionario sea estable pueden obtenerse a partir de los criterios de Routh [3]. Esta correcta afirmación es la primera vez que se hace aplicada al ámbito aeronáutico, y ha permanecido de modo definitivo.

- (2) Los coeficientes de esta ecuación cuadrática (Vid. (1)) involucran, junto con los parámetros másicos y geométricos propios del sistema, a nueve cantidades, a las que B&W asignan una nomenclatura que en cierto modo también ha perdurado, (aunque no lo han hecho necesariamente todas las letras que ellos utilizaron para significar fuerzas y momentos): $(X_u, X_v, X_{\dot{\theta}}, Y_u, Y_v, Y_{\dot{\theta}}, G_u, G_v, G_{\dot{\theta}})$ Estas cantidades, cuando son establecidas respecto de ejes rectangulares fijos al cuerpo, representan los coeficientes diferenciales de las fuerzas y del momento, debidos a las resistencias aerodinámicas con respecto a los componentes lineales y rotatorios de la velocidad. Es una conclusión correcta y asumida de modo definitivo.
- (3) En el caso de un sistema de planos estas nueve cantidades pueden ser expresadas para cada uno de los planos por separado en términos de $df_L(\alpha)/d\alpha$ y de $d\phi_J(\alpha)/d\alpha$, en las que $f_L(\alpha)$ y $\phi_J(\alpha)$ son funciones que determinan la fuerza aerodinámica, y la posición del centro de presión cuando la dirección del movimiento relativo del aire forma un ángulo α_A con el plano. Si se trata de varios planos, el tratamiento preconizado por B&W es simplemente aditivo. Estas funciones han sido tabuladas por algunos (pocos) investigadores para algunas superficies de diferentes formas, y estos datos están disponibles. No obstante, B&W consideran extremadamente urgente conseguir más datos. Es una conclusión sustancialmente correcta y la sugerencia pertinente.
- (4) *La estabilidad longitudinal de los planeadores admite ser investigada matemáticamente*, y resulta de la mayor importancia que los métodos presentados por B&W sean aplicados de modo práctico a cualquier máquina aérea que pueda ser diseñada o construida antes de intentar realizar con ella cualquier vuelo planeado. Es una sugerencia plausible, aunque de alguna dificultad práctica, debido a la relativa complejidad algebraica de algunas expresiones, y más profundamente, a la incertidumbre en la que se mueven en esa época los diversos parámetros aeronáuticos y los conceptos aerodinámicos correspondientes, y al hecho de que la mayoría de los diseñadores pioneros no tenían formación técnica o científica.
- (5) La condición para que cualquier movimiento estacionario rectilíneo pueda ser estable asume, en los casos examinados por B&W, la forma de $V^2 > k a$, siendo a una constante que depende de las dimensiones lineales del planeador, y k una constante que depende del aspecto alar, del ángulo de planeo y de la ley de resistencia aerodinámica. Es una conclusión correcta, que debe completarse con la mención de que NO es el único modo de expresar las condiciones de estabilidad, ni generalmente el más práctico, y por esta razón no ha sido finalmente adoptado para calificar la estabilidad de un aeroplano. Por otra parte, no se efectúa una detallada consideración del signo que correspondería a todos coeficientes, asignando la problematicidad de la estabilidad sólo a aquellos que, por su forma matemática, parecen admitir en teoría una inversión del signo en función de la velocidad.
- (6) Inclinando uno de los planos un pequeño ángulo respecto del otro, se incrementa la posibilidad de lograr estabilidad. Es una conclusión sustancialmente correcta.

- (7) En general, la estabilidad aumenta a medida que disminuye el momento de inercia. Es una conclusión sustancialmente correcta.

9.5 Resumen Crítico

- (1) El trabajo de B&W puede ser considerado históricamente como el punto de partida de la investigación científica de la estabilidad del vuelo. Es original por el tema que trata y certero en la elección de sistemas de referencia y principios físicos que utiliza. Es riguroso en los procedimientos matemáticos que aplica, que no son específicos para problemas aeronáuticos, sino importados del ámbito de la mecánica racional vigente desde hacía más de un siglo, pero muy pertinentemente usados.
- (2) Dada la situación dispersa e incierta que ofrecía el panorama de la ciencia aerodinámica (Cfr. Cap. 2), la elección del modelo matemático de las fuerzas y del centro de presión, respectivamente de Langley [4] y Jöessel [5], resulta una opción muy razonable.
- (3) Al aceptar, como era habitual en su época, un valor constante y único de K para cualquier superficie sustentadora, con independencia de su forma, y caracterizarla únicamente por la medida de la superficie, introducen una ambigüedad que propicia que las expresiones desarrolladas por B&W, tal como literalmente las escriben, resulten de escasa aplicabilidad. Desde este punto de vista el análisis que efectúan resulta “*idealizado*” en exceso.
- (4) Esto es tanto más de lamentar cuanto que B&W deseaban que su aportación al estudio de la estabilidad de los aeroplanos tuviera una inmediata utilidad práctica⁹⁸ para los diseñadores. Este inconveniente podría haberse atenuado distinguiendo diferentes constantes de resistencia aerodinámica; por ejemplo, K_1 para una superficie, y K_2 para otra. O, equivalentemente, haciendo lo mismo con la función $f_{L1}(\alpha)$ para una superficie, distinguiéndola de $f_{L2}(\alpha)$ para otra diferente. No obstante, los correspondientes conceptos aerodinámicos estaban todavía inmaduros, a la vez que su introducción complicaría algebraicamente las fórmulas, ya de por sí incómodas.
- (5) La difusión de la publicación no parece haber ido más allá de algunos círculos reducidos de unos pocos especialistas dedicados al estudio de la naciente

⁹⁸ Bryan estaba convencido que un buen número de los numerosos accidentes aéreos que acontecían en aquellos tiempos primerizos se debían a un desconocimiento de las condiciones que debía cumplir un aeroplano para ser estable.

aviación; puede haber sido considerado de interés exclusiva y eminentemente académico.

- (6) El eco y alcance logrado fueron escasos en los ámbitos de “producción” estrictamente aeronáutica, que se mantiene en esa época alejada de la investigación teórica.
- (7) Puede merecer la pena mencionar que el trabajo de B&W fue enviado para publicación en junio de 1903, seis meses antes del famoso primer vuelo controlado y propulsado de los hermanos Wright.

Bibliografía

[1] Bryan, G. H. & Williams, W. E. “*The Longitudinal Stability of Aerial Gliders*”, “*Proc. Roy. Soc. London*”, ser. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).

[2] Routh, E. J. “*Dynamics of a System of Rigid Bodies*”; MacMillan & Co. London. (1892).

[3] Routh, E. J. “*A Treatise on the Stability of a given state of Motion. Particularly Steady Motion*”. Cambridge. MacMillan & Co. (1877).

[4] Langley, S. P. “*Experiments in aerodynamics*”, Smithsonian contribution to Knowledge, No 801. Washington. (1902).

[5] Joëssel. “*Rapport sur des expériences relatives aux gouvernails*”; Repport 9; “*Mémorial du Génie Maritime*”, (1873).

Capítulo 10

F. Ferber (1862-1909)



99

Contenido

10.1 Nota Biográfica.

10.2 Documento de Referencia.

10.3 Descripción de contenido.

10.3.1 Ley de equivalencia de las superficies.

10.3.2 Ecuaciones generales del movimiento.

⁹⁹ http://www.ctic.monash.edu.au/hargrave/images/ferber_portrait_1_1908_200.jpg. (14.06.2017)

- 10.3.2.1 Ecuaciones de las Fuerzas
- 10.3.2.2 Ecuaciones de los momentos.
- 10.3.2.3 Procedimiento aproximado para calcular la influencia de las velocidades angulares.
- 10.3.2.4 El “Pseudo Teorema de Ferber”

10.3.3 Estudio del vuelo estacionario sin motor en un plano vertical.

10.3.4 Estudio de la Estabilidad.

10.4 Conclusiones.

Bibliografía.

10.1 Nota Biográfica

Ferdinand Ferber nació en Lyon (Francia). Estudió en la Escuela Politécnica antes de ingresar en el Ejército. Instructor en la Escuela de Artillería Aplicada de Fontainebleau. Supo de Otto Lilienthal, a través de un artículo en el *Illustruete Zeitung*. Experimentó primero con modelos, y llegó a construir varios planeadores tripulados, con poco éxito. En 1901 contactó con Octave Chanute, quien le puso al corriente de los experimentos de los Wright, en cuyos diseños trató de inspirarse. En 1905 intentó comprar una de las máquinas de los ya famosos hermanos, pero los Wright consideraron que no había llegado todavía el momento de difundir su invento. En 1908 fundó la *Ligue Nationale Aérienne*. Murió en accidente de aviación en Boulogne cuando, rodando en tierra, su avión cayó en un terraplén.

10.2 Documento de referencia.

Ferdinand Ferber, “L’AVIATION, Ses debuts-son développement”. Berger-Levrault & Cie Éditeurs. Paris/Nancy. (1909) [1]¹⁰⁰

10.3 Descripción de contenido.

Ferber acepta la ley que expresa la fuerza normal ejercida sobre un plano delgado según la conocida fórmula: $R = KSV^2 \sin \alpha$ Para la posición del centro de presión, aunque menciona la aparición de una reciente fórmula de R. Soreau [2], se inclina por utilizar la de Avanzini [3], debido a su mayor sencillez. Ferber sabe que esta expresión

¹⁰⁰ El prólogo es de 1908.

solamente es válida para alas planas; la acepta porque le sirve para introducirse en el estudio del problema matemático del vuelo.

10.3.1 Ley de equivalencia de las superficies.

Una original aportación de Ferber, importante para comprender su concepción de un aeroplano y el desarrollo que efectuará a continuación, consiste en el establecimiento de una denominada “*Ley de equivalencia*” de las superficies del avión, que pasamos a describir.

Supongamos una superficie plana AB que recibe una corriente de aire V con un ángulo de ataque α (Ref. Figura 10.1) La fuerza resultante es $F1$. Ferber postula que este sistema es equivalente a otro constituido por dos superficies imaginarias AC y CB que forman un ángulo recto en C . Obsérvese que esta descripción no fija el punto C ni el ángulo a .

La fuerza generada sobre CB es $F3$ y la generada sobre AC es $F2$. La suma vectorial de ambas es la resultante $F1$.

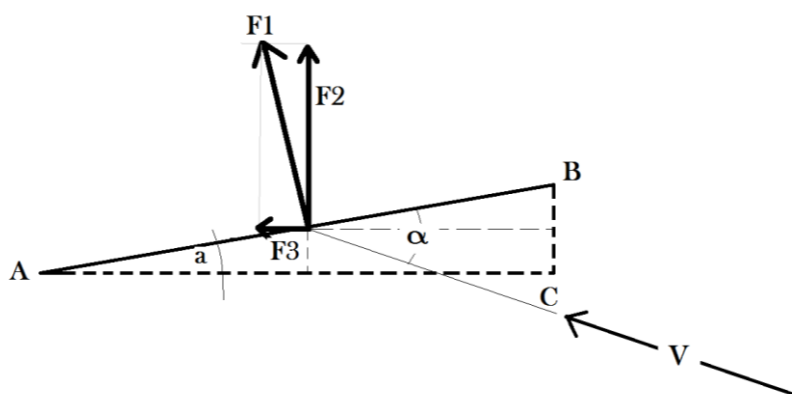


Figura 10.1: Esquema explicativo de las superficies equivalentes de Ferber.

El sistema equivalente consiste en descomponer una superficie en dos superficies que faciliten el análisis: $S_{AC} = S_{AB} \cos a$ y $S_{BC} = S_{AB} \sin a$ ambas sometidas a la misma corriente de aire.

Ferber es consciente de que esto realmente no es así, pero supone que, si el ángulo “ a ” -equivalente a una cierta modalidad de ángulo de ataque geométrico, de imprecisa definición- es pequeño *respecto del ángulo de ataque*, puede aceptarse como primera aproximación. (Recordemos que la fuerza generada es considerada normal a la superficie).

Parece que la idea de Ferber descansa sobre la (supuesta) intuición de que debe ser posible describir aerodinámicamente un aeroplano mediante tres planos mutuamente perpendiculares. El resultado -como veremos- es que Ferber, a los efectos de equilibrar el

momento de cabeceo respecto de las variaciones de α , trabajará con un aeroplano que consiste en un solo plano, lo que complicará el problema.

Naturalmente, el ángulo de ataque de la superficie CB ya no será pequeño, pero Ferber supone que en este caso se está sirviendo de una superficie ficticia que solamente genera resistencia al avance y *cuya magnitud verdadera se tendrá que calcular por medios experimentales más fiables*. Conviene retener esta definición imprecisa de la superficie que denominamos más adelante s_2

Establece de este modo lo que él denomina “*Aeroplano Teórico Equivalente*”. La Fig. 10.2¹⁰¹, ilustra el resultado, mostrando cada una de las superficie equivalentes.

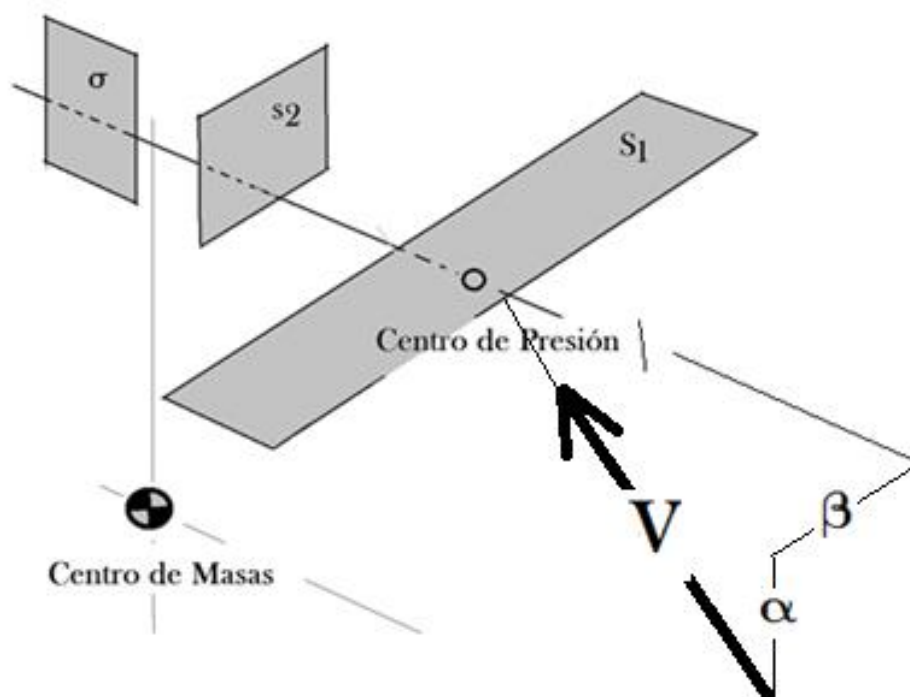


Figura 10.2: Aeroplano Equivalente completo, según Ferber.

Los parámetros geométricos determinantes de las superficies equivalentes se muestran en los dibujos siguientes en los que se puede ver la posición relativa de los planos respecto del centro de masas G y la situación de la línea de acción de la propulsión o tracción (Fig. 10.5), en vistas de perfil (Fig. 10.3) y frontal (Fig. 10.4).

¹⁰¹ La posición del CDG en el dibujo es convencional. Normalmente no estará tan retrasado respecto del conjunto alar.

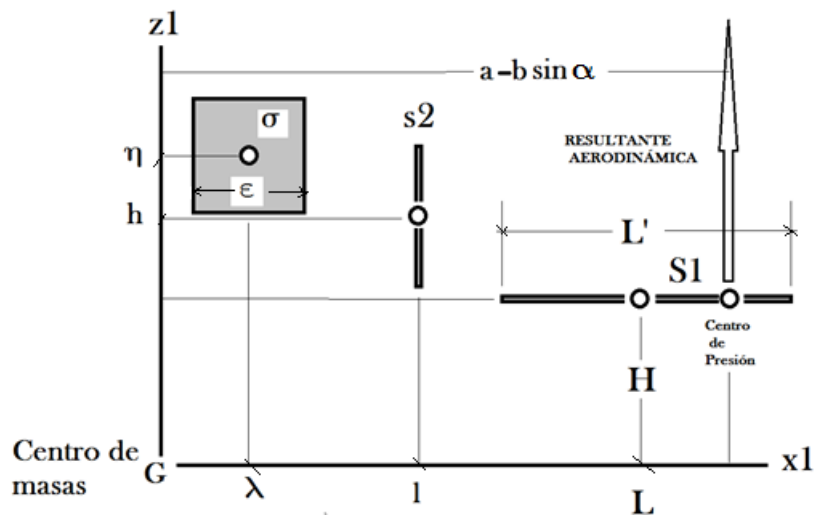


Figura 10.3: Avión Equivalente: vista de perfil. Coordenadas geométricas de puntos relevantes.

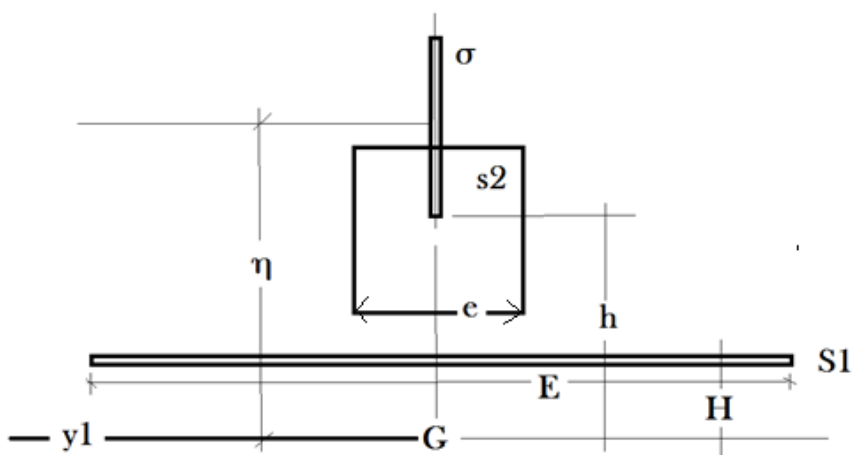


Figura 10.4: Avión Equivalente: vista frontal. Coordenadas geométricas de puntos relevantes.

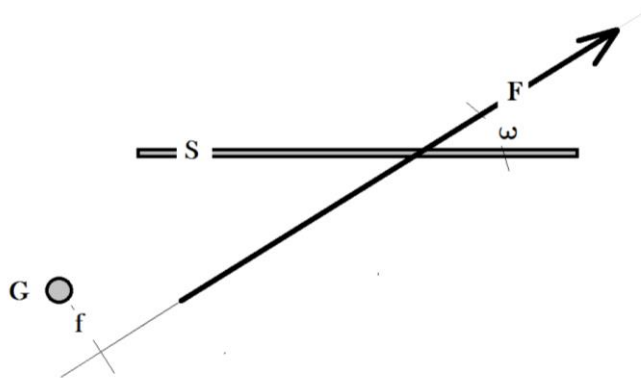


Figura 10.5: Avión Equivalente: línea de acción de la tracción F . El Punto G es el CDG .

Hay que añadir la importante advertencia de suponer que las superficies s_2 y σ , que son las superficies equivalentes que es necesario suponer para obtener el “avión equivalente” completo, se suponen lo suficientemente pequeñas como para no dar lugar en ellas a modificaciones de la fuerza aerodinámica aunque varíe el ángulo de ataque.

Este ingenioso procedimiento, de incierta aplicabilidad, será utilizado por Ferber para establecer las ecuaciones del movimiento en tres dimensiones. Según nuestros datos es la primera vez que se acomete el intento con el sistema completo de las ecuaciones de la dinámica. Ferber aceptará hipótesis que restarán generalidad a sus soluciones.

10.3.2 Ecuaciones generales del movimiento.

10.3.2.1 Ecuaciones de las fuerzas.

Tal como lo describe Ferber, el tratamiento más general considera dos movimientos: el de traslación del centro de gravedad y el de rotación alrededor de ese mismo punto.

Las fuerzas que intervienen son: la gravedad, la fuerza propulsiva (T) y las denominadas “resistencias” aerodinámicas de las tres superficies equivalentes $\{\sigma, s_2, s_1\}$. Ferber establece tres ejes fijos en tierra $\{OXYZ\}$. (Ref. Fig. 10.6)

El movimiento de traslación del CDG podrá establecerse como:

$$\begin{aligned}
 \text{[e1]} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X_{mg} + X_T + X_\sigma + X_s + X_S \\
 \text{[e2]} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y_{mg} + Y_T + Y_\sigma + Y_s + Y_S \\
 \text{[e3]} \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z_{mg} + Z_T + Z_\sigma + Z_s + Z_S
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Los diversos coeficientes son las proyecciones según los tres ejes de las fuerzas, y los subíndices indican la superficie equivalente o el factor físico causante.

El movimiento de rotación viene dado con referencia a un sistema de ejes $\{Ox_1y_1z_1\}$ que pasan por el *CDG* del aeroplano y son paralelos a los ejes de referencia fijos $\{OXYZ\}$ que acaba de mencionar. Los ejes fijos al avión son $\{OX_1Y_1Z_1\}$. (Fig. 10.6).

Para esta representación Ferber elige los ángulos de Euler $\{\psi, \phi, \theta\}$. El plano OX_1Y_1 es paralelo al plano alar, y el OX_1Z_1 es plano de simetría del avión. Si denominamos $\{p, q, r\}$ a los componentes de la velocidad angular instantánea tenemos las clásicas ecuaciones diferenciales de la dinámica de un sólido (rígido). Ferber supone despreciable el producto de inercia. No utilizaremos la nomenclatura de Ferber, sino que adaptaremos todos sus cálculos a los sistemas de referencia y nomenclaturas actuales.

Según esto, para las ecuaciones de las velocidades angulares tenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{[e4]} \quad I_{xx} \frac{dp}{dt} + (I_{zz} - I_{yy})qr &= L \\
 \text{[e5]} \quad I_{yy} \frac{dq}{dt} + (I_{xx} - I_{zz})pr &= M \\
 \text{[e6]} \quad I_{zz} \frac{dr}{dt} + (I_{yy} - I_{xx})qp &= N
 \end{aligned} \tag{10.2}$$

Los momentos principales de inercia son I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} y L, M y N son los momentos de las fuerzas aplicadas con respecto a los ejes $\{OX_1Y_1Z_1\}$. Se completan con las 3 relaciones de Euler para las velocidades angulares:

$$\begin{aligned}
 \text{[7]} \quad p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\
 \text{[8]} \quad q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\
 \text{[9]} \quad r &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

Para evaluar todas las fuerzas y sus proyecciones hay que utilizar las fórmulas para pasar del sistema de referencia $\{OX_1Y_1Z_1\}$ al sistema $\{OXYZ\}$. Para ello Ferber utilizará unas

fórmulas (de uso habitual en astronomía, según afirma) que permiten efectuar esta operación. Nosotros seguiremos el procedimiento actual.

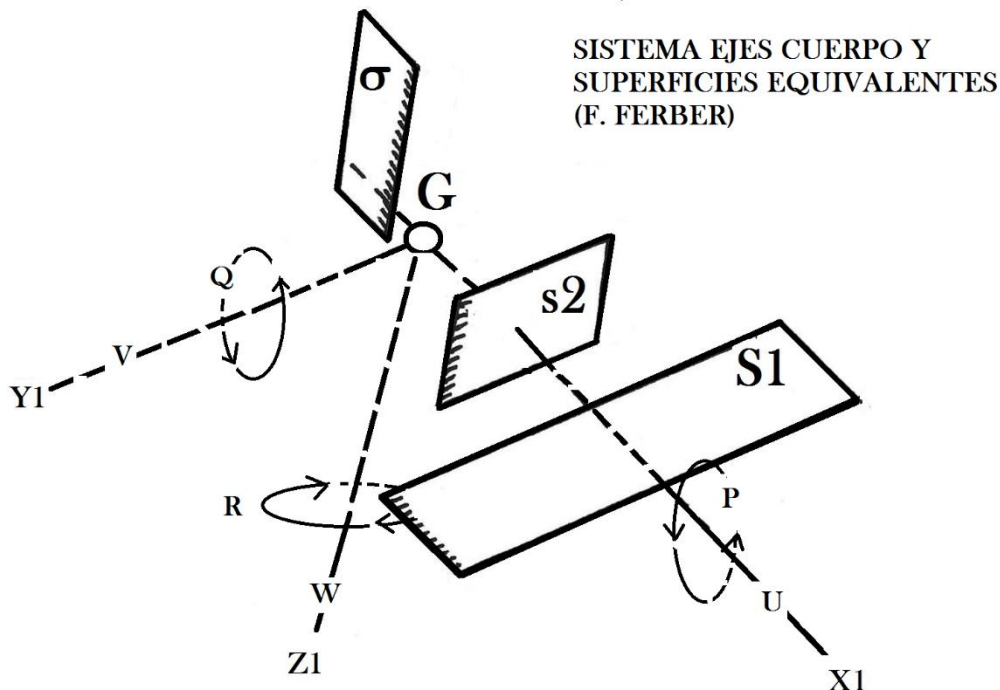


Figura 10.6: Sistema de Ejes Cuerpo de Referencia para el Aeroplano Equivalente.

Sea el vector V la velocidad del centro de gravedad G del aeroplano respecto de un sistema de ejes tierra (Considerado Inercial). Escribimos los componentes de la velocidad $^{102}\{u, v, w\} = \{V, \beta V, \alpha V\}$ en ejes cuerpo a partir de la matriz de transformación de los ángulos de Euler a ejes tierra:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ \beta V \\ \alpha V \end{Bmatrix}$$

[10.4]

Las aceleraciones se obtendrían diferenciando las ecuaciones anteriores en ejes tierra:

¹⁰² Suponiendo ángulos aerodinámicos α, β pequeños. (β es el ángulo de derrape)

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[V (\cos \theta \cos \psi - \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta \cos \psi) \right] \\
 \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[V (\alpha \cos \theta \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi + \beta (\cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi)) \right] \\
 \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[V (\alpha \cos \theta \cos \phi + \beta (-\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) + (\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi)) \right]
 \end{aligned}$$

[10.5]

Obsérvese que, al haber decidido trabajar con los ángulos de Euler, las expresiones de la derecha de las ecuaciones [10.5] muestran un aspecto que presagia complicaciones¹⁰³.

Por otra parte, el valor absoluto de las tres “resistencias” aerodinámicas, -nosotros supondremos ahora vuelo planeado, sin propulsión-, cada una de ellas normal a su propia superficie, resulta ser:

$$\begin{aligned}
 R_{S_1} &= -KS_1V^2 \sin \alpha \\
 R_{S_2} &= -KS_2V^2 \cos \alpha \cos \beta \\
 R_{\sigma} &= -K\sigma V^2 \cos \alpha \sin \beta
 \end{aligned}$$

[10.6]

Estas serán proyectadas sobre cada uno de los tres ejes para obtener las tres componentes

$$\{X_{\sigma}, X_{S_2}, X_{S_1}\}, \quad \{Y_{\sigma}, Y_{S_2}, Y_{S_1}\}, \quad \{Z_{\sigma}, Z_{S_2}, Z_{S_1}\}$$

[10.7]

Llegaríamos a las siguientes expresiones para las fuerzas:

- (1) La resistencia debida a S_1 se ejerce según el eje z_1 positivo, debido a que esa fuerza es normal al plano, de modo coherente a como Ferber ha descompuesto las superficies.

$$\left\{ \begin{aligned}
 X_{S_1} &= KS_1V^2 \sin \alpha \sin \theta \\
 Y_{S_1} &= -KS_1V^2 \sin \alpha \sin \alpha \sin \phi \\
 Z_{S_1} &= -KS_1V^2 \sin \alpha \cos \theta \cos \phi
 \end{aligned} \right\},$$

[10.8]

- (2) Análogamente, la resistencia debida a la superficie S_2 se ejerce según el eje x_1 negativo:

$$\left\{ \begin{aligned}
 X_{S_2} &= -KS_2V^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \theta \cos \psi \\
 Y_{S_2} &= -KS_2V^2 \cos \alpha \cos \beta (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi) \\
 Z_{S_2} &= -KS_2V^2 \cos \alpha \cos \beta (\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi)
 \end{aligned} \right\},$$

[10.9]

¹⁰³ “El uso de las coordenadas angulares de Euler se puede considerar desafortunado ya que (...) este sistema resulta poco apto para investigar las oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio”. Se trata de una cita literal de Bryan s-en 1911- obre el procedimiento utilizado por Ferber [6] que estamos describiendo.

(3) La resistencia ejercida por el plano ficticio σ se ejerce según Y1 negativo

$$\left. \begin{aligned} X_\sigma &= -KV^2\sigma \cos \alpha \cos \theta \sin \beta \sin \psi \\ Y_\sigma &= -KV^2\sigma \cos \alpha \sin \beta (\cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi) \\ Z_\sigma &= -KV^2\sigma \cos \alpha \sin \beta (-\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) \end{aligned} \right\} \quad [10.10]$$

10.3.2.2 Ecuaciones de los momentos.

Momento alrededor del eje X1 y de Z1.

Solamente la fuerza aerodinámica alrededor de la superficie σ podría generarlo. Luego, teniendo en cuenta la geometría del avión: η es la coordenada z del centro de la superficie σ respecto y λ según el eje x respecto del CDG

$$\begin{aligned} L &= -\eta K\sigma V^2 \cos \alpha \sin \beta \\ N &= +\lambda K\sigma V^2 \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad [10.11]$$

Momento alrededor del eje Y1.

Las resistencias aerodinámicas debidas a S_1, S_2 pueden generar momentos alrededor de ese eje. Por tanto, podemos escribir, incluyendo la posición del centro de presión en función del ángulo de ataque:

$$M = -\left(KS_1 V^2 \sin \alpha (a - b \sin \alpha) + hKS_2 V^2 \cos \alpha \cos \beta \right) \quad [10.12]$$

Ya es posible establecer el sistema completo de las 6 ecuaciones, que quedaría como sigue:

Para las fuerzas:

$$[e1] \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = KS_1 V^2 \sin \alpha \sin \theta - KS_2 V^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \theta \cos \psi - KV^2 \sigma \cos \alpha \cos \theta \sin \beta \sin \psi$$

$$[e2] \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -KS_1 V^2 \sin \alpha \sin \alpha \sin \phi - KS_2 V^2 \cos \alpha \cos \beta (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi) + \dots \\ \dots - KV^2 \sigma \cos \alpha \sin \beta (\cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi)$$

$$[e3] \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -KS_1 V^2 \sin \alpha \cos \theta \cos \phi - KS_2 V^2 \cos \alpha \cos \beta (\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi) + \dots \\ \dots - KV^2 \sigma \cos \alpha \sin \beta (-\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi)$$

[10.13]

Para los Momentos:

$$[e4] \quad I_{xx} \frac{dp}{dt} + (I_{zz} - I_{yy})qr = -\eta K \sigma V^2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$[e5] \quad I_{yy} \frac{dq}{dt} + (I_{xx} - I_{zz})pr = -(KS_1 V^2 \sin \alpha (a - b \sin \alpha) + hKS_2 V^2 \cos \alpha \cos \beta)$$

$$[e6] \quad I_{zz} \frac{dr}{dt} + (I_{yy} - I_{xx})qp = \lambda K \sigma V^2 \cos \alpha \sin \beta$$

[10.14]

En el desarrollo anterior, como hace notar Ferber y ya hemos mencionado, no se han tenido en cuenta las velocidades lineales inducidas por las rotaciones del sistema. Ferber supone que serán pequeñas y que pueden despreciarse en una primera aproximación. De este modo Ferber también evita tener que pronunciarse sobre la posición del punto de aplicación de las fuerzas generadas por una velocidad angular cuando el centro de giro está situado sobre la cuerda alar.

Las ecuaciones que ha obtenido Ferber no son integrables analíticamente aun prescindiendo de las componentes de rotación. Ferber sugiere la pesada operación de utilizar desarrollos en serie para resolverlas.

10.3.2.3 Nota complementaria: “Procedimiento aproximado para incorporar la aportación de las velocidades angulares a las fuerzas”.

Ferber sugiere que el efecto de las velocidades angulares puede introducirse del modo siguiente. (Fig. 10.7)

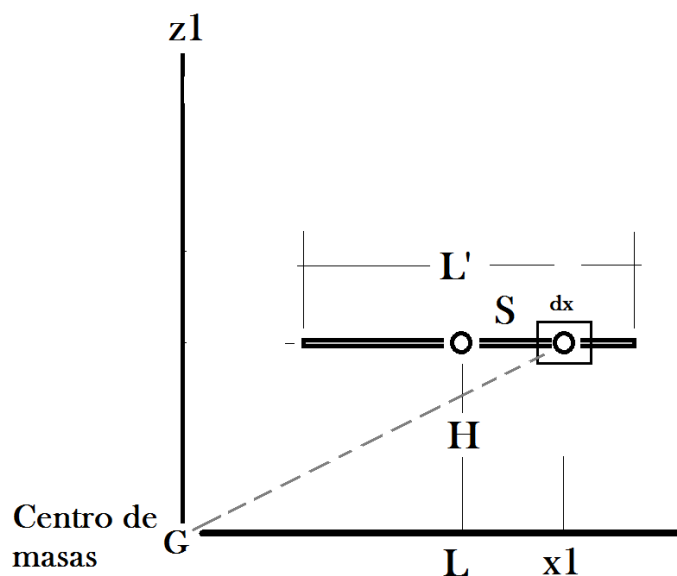


Figura 10.7: Evaluación aproximada del efecto de las velocidades angulares. Coordenadas relevantes.

Supongamos que la superficie S gira alrededor del eje GY_1 perpendicular al plano GZ_1X_1 (Ref. Fig. 10.7). La velocidad de traslación tiene por componentes:

$$V_{x_1} = V \cos \alpha \cos \beta; \quad V_{y_1} = V \cos \alpha \sin \beta; \quad V_{z_1} = -V \sin \alpha; \quad [10.15]$$

La velocidad de rotación q genera las siguientes componentes de velocidad lineal correspondiente al punto dx , cuyas coordenadas son $\{H, x_1\}$:

$$\Delta V_{x_1} = qH; \quad \Delta V_{y_1} = 0; \quad \Delta V_{z_1} = -qx_1; \quad [10.16]$$

La velocidad resultante de ese elemento diferencial es:

$$V_{dx_1}^2 = (V \cos \alpha \cos \beta + qH)^2 + (V \cos \alpha \sin \beta)^2 + (V \sin \alpha + qx_1)^2 \quad [10.17]$$

Ferber considera pequeña la velocidad angular q , de modo que omite todos los términos en q^2 :

$$V_{dx_1}^2 \approx V^2 + 2Vq(H \cos \alpha \cos \beta + x_1 \sin \alpha) \quad [10.18]$$

El nuevo ángulo de ataque -del elemento dx - sería:

$$V_{dx_1} \sin \alpha_{dx_1} \approx V \sin \alpha + qx_1 \quad [10.19]$$

Multiplicando:

$$V_{dx_1}^2 \sin \alpha_{dx_1} \approx (V^2 \sin \alpha + 2qVx_1 \sin^2 \alpha + qV(x_1 + H \cos \beta \sin 2\alpha)) \quad [10.20]$$

Finalmente, integrando para toda la superficie S , Ferber llega a:

$$KSV^2 \sin \alpha \approx KS(V^2 \sin \alpha + qV(a(2 \sin^2 \alpha + 1) + H \cos \beta \sin 2\alpha)) \quad [10.21]$$

Ferber concluye que sería necesario complementar las expresiones con un término proporcional a la velocidad de vuelo y a la velocidad angular, si se quiere incluir el efecto de las rotaciones:

$$\Delta KSV^2 \sin \alpha \approx qVKS((a(2 \sin^2 \alpha + 1) + H \cos \beta \sin 2\alpha)) \quad [10.22]$$

Lo que se ha mostrado respecto de la velocidad angular q , debe completarse con las aportaciones de las otras dos velocidades angulares p y r

Este procedimiento rudimentario quizás podría ser aceptable si el eje alrededor del cual gira la superficie está suficientemente alejado de la placa y las velocidades lineales de todos los puntos de la placa tienen el mismo signo.

Bryan (1911) [6] utilizará un procedimiento más sencillo, al calcular el efecto de las rotaciones en las velocidades lineales solamente en el punto medio de la cuerda alar, y haciendo la suposición de que ciertas “*derivadas aerodinámicas rotatorias*” podrían asumir el efecto del giro de la placa alrededor de su punto medio.

Ferber no hará uso de las “*aproximaciones*” que ha desarrollado en este apartado.

10.3.2.4. El “Pseudo Teorema” de Ferber.

El denominado “Pseudo Teorema de Ferber” consiste en lo siguiente: “*El hecho de que una superficie se mueva bien sea perpendicularmente o bien sea tangencialmente a su trayectoria no modifica la resistencia aerodinámica que el aire le opone, que es la misma en los dos casos*” La supuesta justificación de este “pseudo teorema” estriba en lo siguiente: para ángulos de ataque pequeños, Ferber ha obtenido $K = 0.7 \text{ kg} / \text{m}^3$ y para el movimiento ortogonal de la misma placa “los más recientes investigadores” han obtenido $K = 0.07 \text{ kg} / \text{m}^3$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{ala inclinada} &\Rightarrow 0.7SV^2 \sin \alpha \approx 0.7SV^2 0.1 = 0.07SV^2 \\ \text{ala normal} &\Rightarrow 0.07SV^2 \end{aligned}$$

(Ver nota¹⁰⁴)

10.3.3 Estudio del vuelo estacionario sin motor en un plano vertical.

Si se supone un movimiento estacionario en un plano vertical, tal como el descrito en el gráfico siguiente (Fig. 10.8), (utilizando ahora α para designar el ángulo de ataque y γ para la pendiente de la trayectoria) podemos escribir de modo inmediato las ecuaciones, según los ejes que muestra la figura 10.8, sin necesidad de recurrir al sistema completo; así lo hace Ferber:

¹⁰⁴ Este “pseudo teorema” quizás pueda provenir de la siguiente constatación: para una placa plana bidimensional, el coeficiente de resistencia aerodinámica sometida a flujo perpendicular ($\alpha = 90^\circ$) es del orden de $CD_{90^\circ} \approx 1.17$. Esa misma placa necesita solamente un $\alpha \approx 11^\circ$ para producir una sustentación igual a la resistencia que se obtiene con $\alpha = 90^\circ$. Pero las dos fuerzas se diferencian en un aspecto muy importante: su dirección difiere en 90° . En aviación, una de ellas es muy útil, la otra generalmente perjudicial. Por alguna razón, esto resultaba chocante a Ferber. La palabra “Resistencia” engloba aquí toda la fuerza aerodinámica generada por el ala.

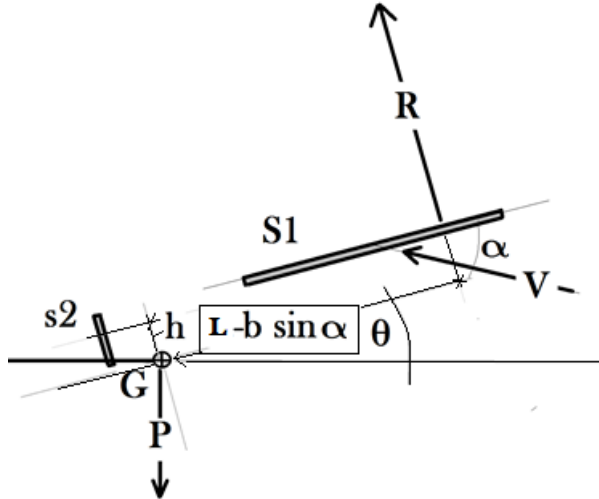


Figura 10.8: Esquema para análisis de vuelo estacionario en un plano vertical.¹⁰⁵

$$\begin{aligned}
 [e1est] \quad KS_1V^2 \sin \alpha &= P \cos \theta \\
 [e2est] \quad Ks_2V^2 \cos \alpha &= -P \sin \theta \\
 [e3est] \quad KS_1V^2 \sin \alpha (L - b \sin \alpha) + Khs_2V^2 \cos \alpha &= 0
 \end{aligned} \tag{10.23}$$

La ecuación [e3est] $S_1 \sin \alpha (L - b \sin \alpha) + hs_2 \cos \alpha = 0$ permite fijar el ángulo de ataque, que no depende de la velocidad. Es interesante notar que el momento estacionario consta de dos partes, una de ellas sensible a α y la otra viene generada por la resistencia aerodinámica de una placa plana equivalente, de difícil evaluación, y se supone que no depende de α (Resulta llamativo; ningún otro pionero de los que hemos estudiado ha optado por introducir una resistencia aerodinámica como causa directa de parte del momento de cabeceo). L es la distancia entre el CDG y el xCP alar con $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{[e2est]}{[e1est]} &\Rightarrow \left(\frac{s_2}{S_1} \right) \tan \alpha = -\tan \theta \\
 [e3est] \quad \sin \alpha (L - b \sin \alpha) + h \left(\frac{s_2}{S_1} \right) \cos \alpha &= 0 \approx \alpha (L - b\alpha) + h \left(\frac{s_2}{S_1} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{10.24}$$

El ángulo de ataque de equilibrio admite dos soluciones:

$$\alpha_1 = \frac{L}{2b} \left(1 - \sqrt{1 + 4 \left(\frac{bh}{L^2} \right) \frac{s_2}{S_1}} \right) \quad \alpha_2 = \frac{L}{2b} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{bh}{L^2} \right) \frac{s_2}{S_1}} \right) \tag{10.25}$$

¹⁰⁵ Puede verse que, tal como se han dibujado aquí las superficies equivalentes, el equilibrio en cabeceo sería imposible.

Puede verse que si $h > 0$ uno de los dos ángulos de equilibrado es negativo. En el caso contrario, $h < 0$ pueden existir dos ángulos de ataque positivos reales o imaginarios. Todo depende de relaciones geométricas cuyo estudio¹⁰⁶ general no acometemos ahora.

Como consecuencia de lo que acabamos de ver, Ferber establece lo que denomina Consecuencia I:

“Un aeroplano sin motor desciende estacionariamente según una trayectoria rectilínea y su ángulo de ataque es constante e independiente de la velocidad. El piloto puede controlar el ángulo de ataque de dos modos: o bien modificando el reparto de masas en el avión (cambia la posición del *CDG* y esto altera el valor de la distancia “*L*”), o bien modificando la posición y/o el valor de s_2 ”. Ninguno de los dos modos parece razonablemente apto para la controlabilidad de la aeronave, aunque ambos han sido intentados.

Combinando las dos primeras ecuaciones de [10.23] se obtiene el siguiente cociente que relaciona la pendiente de la trayectoria con el ángulo de ataque

$$\frac{[e1est]}{[e2est]} \Rightarrow \tan(\gamma + \alpha) \tan \alpha = -\left(\frac{s_2}{S_1}\right) = cte \quad [10.26]$$

Esto da lugar a la Consecuencia II¹⁰⁷:

“La pendiente de la trayectoria varía en relación directa con el cociente $\left(\frac{s_2}{S_1}\right)$

(A este cociente Ferber lo llama: “*Surface nuisible/Surface portante*”)”

De la ecuación $\frac{[e1est]}{[e2est]}$ podemos deducir, por cálculo elemental, el ángulo de

ataque óptimo que hace mínima la pendiente: $\alpha_{optimo} = -\frac{\gamma_{min}}{2}$ por lo tanto, para el valor

del ángulo tenemos: $\alpha_{optimo} = \sqrt{\left(\frac{s_2}{S_1}\right)}$

De donde se obtiene la Consecuencia III:

El ángulo de ataque “mejor” (el que produce la mínima pendiente y por ello el de máximo alcance) es la mitad de la mínima pendiente.

¹⁰⁶ La superficie S_1 es conocida, pero S_2 no lo es, ni resulta fácil de evaluar, a efectos de momento de cabeceo. Su analogado con el modelo actual, aunque de dudosa utilidad, puede intentar obtenerse a partir de igualar $KhS_2V_0^2$ a $1/2 \rho c S_1 V_0^2 CM_0$, lo que conduce a: $S_2 = \frac{\rho S_1 c}{Kh} CM_0$

¹⁰⁷ Ferber atribuye la prioridad de esta afirmación a Pénaud (1870) y a Renard (1871)

Si se realizan experimentos rigurosos con un aeroplano concreto (como era el caso de Ferber, que fabricó sus propios prototipos) y se mide la pendiente y la velocidad estacionaria podríamos obtener, en teoría, los “*valores desconocidos*” de s_2 y K mediante las fórmulas correspondientes al movimiento estacionario. Ferber supone que son valores constantes. Sus experimentos le llevan a establecer para s_2 el valor $s_2 = S_1 \tan^2 \alpha_{optimo}$ y obtiene para K un valor de $K = 0.7 \text{ kg} / \text{m}^3$. Ferber trabaja con el sistema S.I. aunque no menciona explícitamente las unidades.

No nos detenemos ahora en el análisis de las consecuencias que Ferber extrae de estas ecuaciones que pertenecen más bien al capítulo de los primeros pasos de la mecánica de vuelo quasi estacionaria y no tanto al de la estabilidad. Debido al defectuoso modelo equivalente de aeroplano que utiliza, no son muy útiles.

10.3.4 Estudio de la Estabilidad

Ferber comienza el estudio de la estabilidad, que denomina “*automática*”, de los aviones citando el trabajo de Bryan (1904) [4] que analiza la estabilidad restringiendo el movimiento del avión a su plano de simetría. Ferber se propone hacer lo mismo ampliando el estudio al caso general tridimensional.

Comienza fijando las condiciones del vuelo estacionario, asumiendo simplificaciones razonables, y situando el CDG en el centro de presión del ala, ubicado según la ley de Avanzini [3], y fijando también el ángulo de ataque y la velocidad de vuelo.

A partir de las ecuaciones generales (Eq. [10.1] & [10.2]), Ferber perturba las variables del sistema, que son las nueve siguientes: $\{u, v, w, \theta, \phi, \psi, p, q, r\}$ en todos los términos de las fuerzas (Eq. [10.13]) y de los momentos (Eq. [10.14]), juntamente con los términos correspondientes a las velocidades lineales (Eq. [10.5]) y las relaciones de Euler para las velocidades angulares (Eq. [10.3])

A continuación suprime todos los términos en los que intervienen los cuadrados y los dobles productos de las perturbaciones, y considerando las condiciones iniciales del movimiento estacionario, obtiene las ecuaciones linealizadas para los momentos y para las fuerzas, mediante un proceso de manipulación algebraica complicado en el que abundan formatos visuales poco gratos.

Acepta, como ya se ha dicho, la hipótesis de suponer que las velocidades angulares no afectan a la dinámica perturbada. Esto significa que las 3 ecuaciones de las fuerzas, que en la forma cartesiana habitual actual debieran ser:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad m(\dot{u} + q.w - r.v) &= T_x + X - m g \sin \theta \\
 [2] \quad m(\dot{v} + r.u - p.w) &= T_y + Y + m g \cos \theta \sin \phi \\
 [3] \quad m(\dot{w} + p.v - q.u) &= T_z + Z + m g \cos \theta \cos \phi
 \end{aligned}
 \tag{10.27}$$

Para Ferber son:

$$p \approx q \approx r \approx 0$$

$$[1] \quad m \dot{u} = T_x + X - m g \sin \theta$$

$$[2] \quad m \dot{v} = T_y + Y + m g \cos \theta \sin \phi \quad [10.28]$$

$$[3] \quad m \dot{w} = T_z + Z + m g \cos \theta \cos \phi$$

Aunque, como hemos visto, sugiere un modo de introducir correcciones, no las incorpora en sus ecuaciones; esto conduce a conclusiones sin validez general. No obstante, algunos resultados mantienen su validez, a pesar de la mencionada limitación.

Las 6 ecuaciones linealizadas a las que conduce el proceso mencionado son¹⁰⁸:

$$[e1] \quad \cos \theta_0 \left(m \left(\frac{d\Delta V}{dt} - V_0 \alpha_0 \frac{d\Delta \theta}{dt} + g \Delta \theta \right) + 2Ks_2 V_0 \cos \alpha_0 \Delta V - KV_0^2 (s_2 \Delta \alpha + S_1 \Delta \theta) \sin \alpha_0 \right) = \\ = \sin \theta_0 \left(m \left(V_0 \frac{d\Delta \alpha}{dt} + V_0 \frac{d\Delta \theta}{dt} + \alpha_0 \frac{d\Delta V}{dt} \right) + KV_0^2 (S_1 \Delta \alpha + s_2 \Delta \theta) \cos \alpha_0 + 2KS_1 V_0 \sin \alpha_0 \Delta V - \right) \quad [10.29]$$

$$[e2] \quad mV_0 \left(\frac{d\Delta \beta}{dt} - \frac{d\Delta \psi}{dt} + \alpha_0 \cos \theta_0 \frac{d\Delta \phi}{dt} \right) + \frac{d\Delta \phi}{dt} \sin \theta_0 = \dots \\ \dots \cos \theta_0 (gm - KS_1 V_0^2 \sin \alpha_0) \Delta \phi + KV_0^2 \cos \alpha_0 (s_2 \Delta \psi - \sigma \Delta \beta - s_2 \sin \theta_0 \Delta \phi) \quad [10.30]$$

$$[e3] \quad \cos \theta_0 \left(m \left(\alpha_0 \frac{d\Delta V}{dt} + V_0 \frac{d\Delta \theta}{dt} + V_0 \frac{d\Delta \alpha}{dt} \right) + KV_0^2 (S_1 \Delta \alpha + s_2 \Delta \theta) \cos \alpha_0 + 2KS_1 V_0 \sin \alpha_0 \Delta V \right) = \\ = -\sin \theta_0 \left(m \left(g \Delta \theta - \alpha_0 V_0 \frac{d\Delta \theta}{dt} + \frac{d\Delta V}{dt} \right) - KV_0^2 (s_2 \Delta \alpha + S_1 \Delta \theta) \sin \alpha_0 + 2Ks_2 V_0 \cos \alpha_0 \Delta V \right) \quad [10.31]$$

$$[e4] \quad \frac{d^2 \Delta \phi}{dt^2} - \sin \theta_0 \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} = -\eta \frac{KV_0^2 \sigma \cos \alpha_0}{I_{xx}} \Delta \beta \quad [10.32]$$

$$[e5] \quad I_{yy} \frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} = 2KV_0 (hs_2 \cos \alpha_0 + S_1 (a - b \sin \alpha_0) \sin \alpha_0) \Delta V + \dots \\ \dots - KV_0^2 (-aS_1 \cos \alpha_0 + hs_2 \sin \alpha_0 + bS_1 \sin 2\alpha_0) \Delta \alpha$$

¹⁰⁸ Recordemos que $a = L$.

[10.33]

$$[e6] \quad \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} = \lambda \frac{KV_0^2 \sigma \cos \alpha_0}{I_{zz}} \Delta \beta \quad [10.34]$$

Ferber obtiene dos sistemas de ecuaciones independientes, pues las variables longitudinales de las ecuaciones [1], [3] y [5] y las laterales de [2], [4] y [6] de [10.34] se separan en bloques sin interferirse.

Esto es cierto siempre que se parte del vuelo equilibrado en un plano vertical, y es la primera vez que se obtiene explícitamente para un sistema completo que abarca las tres dimensiones, aunque en el caso presente podría objetarse que Ferber no puede generalizar esta conclusión pues no han sido retenidos todos los términos de las ecuaciones generales. Su propuesta es válida, no obstante, si son nulos los valores *iniciales* de las velocidades angulares, como suele ser el caso cuando se analiza la estabilidad partiendo del vuelo equilibrado en estacionario en un plano vertical.

Puede verse que las ecuaciones, aunque en las etapas intermedias de los cálculos tienen un aspecto incómodo, finalmente son abordables. Si se añade la suposición de elegir ejes viento, con $\theta_0 = 0$ y se tienen en cuenta las condiciones estacionarias, se simplifican más:

$$[e1] \quad m \left(\frac{d\Delta V}{dt} - V_0 \alpha_0 \frac{d\Delta \theta}{dt} + g \Delta \theta \right) + 2Ks_2 V_0 \cos \alpha_0 \Delta V - KV_0^2 (s_2 \Delta \alpha + S_1 \Delta \theta) \sin \alpha_0 = 0$$

$$[e2] \quad mV_0 \left(\frac{d\Delta \beta}{dt} - \frac{d\Delta \psi}{dt} + \alpha_0 \frac{d\Delta \phi}{dt} \right) = KV_0^2 \cos \alpha_0 (s_2 \Delta \psi - \sigma \Delta \beta)$$

$$[e3] \quad m \left(\alpha_0 \frac{d\Delta V}{dt} + V_0 \frac{d\Delta \theta}{dt} + V_0 \frac{d\Delta \alpha}{dt} \right) + KV_0^2 (S_1 \Delta \alpha + s_2 \Delta \theta) \cos \alpha_0 + 2KS_1 V_0 \sin \alpha_0 \Delta V = 0$$

$$[e4] \quad \frac{d^2 \Delta \phi}{dt^2} = -\eta \frac{KV_0^2 \sigma \cos \alpha_0}{I_{xx}} \Delta \beta$$

$$[e5] \quad I_{yy} \frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} = 2KV_0 (hs_2 \cos \alpha_0 + S_1 (a - b \sin \alpha_0) \sin \alpha_0) \Delta V + \dots \\ \dots - KV_0^2 (-aS_1 \cos \alpha_0 + hs_2 \sin \alpha_0 + bS_1 \sin 2\alpha_0) \Delta \alpha$$

$$[e6] \quad \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} = \lambda \frac{KV_0^2 \sigma \cos \alpha_0}{I_{zz}} \Delta \beta$$

[10.35]

En este caso (Eq. [10.35]) la matriz del sistema homogéneo correspondiente a la dinámica longitudinal es:

$$M_{Long} = \begin{bmatrix} -ms - 2KV_0 s_2 \cos \alpha_0 & Ks_2 V_0^2 \sin \alpha_0 & m \alpha_0 V_0 s \\ -m \alpha_0 s - 2KV_0 S_1 \alpha_0 & -m V_0 s - KS_1 V_0^2 & m V_0 s - KS_2 V_0^2 \\ \frac{2KV_0 (hs_2 \cos \alpha_0 + S_1 \sin \alpha_0 (a - b \sin \alpha_0))}{I_{yy}} & -\frac{KV_0^2 (-aS_1 \cos \alpha_0 + hs_2 \sin \alpha_0 + b \sin 2\alpha_0)}{I_{yy}} & -s^2 \end{bmatrix} \quad [10.36]$$

Ferber obtiene el polinomio¹⁰⁹ característico:

$$A_0 = \frac{2K^3 S_1 s_2^2 V_0^4}{m^2 I_{yy}} (a(1 + \alpha_0^2) - b\alpha_0(2 + \alpha_0^2)) \quad [10.37]$$

$$A_0 \approx \frac{2K^3 S_1 s_2^2 V_0^4}{m^2 I_{yy}} (a - 2b\alpha_0) \approx \frac{2K^3 S_1 s_2^2 V_0^4}{m^2 I_{yy}} a$$

$$A_1 = \frac{K^2 V_0^3}{m I_{yy}} (aS_1 s_2 (3 + 2\alpha_0^2) - \alpha_0 (hs_2 (s_2 + 2S_1 (1 + \alpha_0^2)) + 2bS_1 (S_1 \alpha_0^2 + s_2 (3 + \alpha_0^2))))$$

$$A_1 \approx \frac{K^2 V_0^3}{m I_{yy}} (3aS_1 s_2 - \alpha_0 (hs_2 (s_2 + 2S_1))) \approx 3a \frac{K^2 V_0^3 S_1 s_2}{m I_{yy}} \quad [10.37]$$

$$A_2 = \frac{KV_0^2}{m^2 I_{yy}} (-am^2 S_1 (\alpha_0^2 - 1) + 2KS_1 s_2 I_{yy} (1 + \alpha_0^2) - m^2 \alpha_0 (2bS_1 + hs_2 (3 + \alpha_0^2)))$$

$$A_2 \approx \frac{KV_0^2}{m^2 I_{yy}} (am^2 S_1 + 2KS_1 s_2 I_{yy} - m^2 \alpha_0 (2bS_1 + 3hs_2)) \approx \frac{KV_0^2}{m^2 I_{yy}} (am^2 S_1 + 2KS_1 s_2 I_{yy}) \quad [10.38]$$

$$A_3 = \frac{KV_0}{m} (S_1 + s_2 (2 + \alpha_0^2)) \approx \frac{KV_0}{m} (S_1 + 2s_2) \quad [10.39]$$

$$A_4 = 1 \quad [10.40]$$

Ferber indica que sus coeficientes son todos positivos, como de hecho sucede si el ángulo de ataque se considera despreciable, tal como muestran las ecuaciones [10.37] a [10.40], y por esta razón se centra en el análisis del determinante de Routh.

¹⁰⁹ Suponemos ahora $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$

En realidad, si mantenemos la presencia de α despreciando los términos de orden superior, de los coeficientes surgen ciertas condiciones que limitan el valor del ángulo de ataque, que complementan a la que indicará el discriminante de Routh:

$$\begin{aligned}
 A_0 &\approx \frac{2K^3 S_1 s_2^2 V_0^4}{m^2 I_{yy}} (a - 2b\alpha_0) > 0 \Rightarrow \alpha_0 > \frac{a}{2b} \\
 A_1 &\approx \frac{K^2 V_0^3}{m I_{yy}} (3aS_1 s_2 - \alpha_0 (hs_2 (s_2 + 2S_1))) > 0 \Rightarrow \alpha_0 < \frac{3aS_1}{h(s_2 + 2S_1)} \\
 A_2 &\approx \frac{KV_0^2}{m^2 I_{yy}} (am^2 S_1 + 2KS_1 s_2 I_{yy} - m^2 \alpha_0 (2bS_1 + 3hs_2)) > 0 \Rightarrow \alpha_0 < \frac{S_1 (am^2 + 2Ks_2 I_{yy})}{m^2 (2bS_1 + 3hs_2)}
 \end{aligned}
 \tag{10.41}$$

Este aspecto es importante, en el sistema de Ferber, ya que su “avión equivalente” no dispone de un elemento tipo empenaje que, variando la sustentación, pueda equilibrar las variaciones del momento de cabeceo generadas por el movimiento del centro de presión asociadas a los cambios en α . Así, un cambio en α modifica uno de los dos sumandos de la ecuación [e3est] de [10.23], pero no el otro.

La condición de estabilidad que surge del discriminante de Routh, reteniendo solamente términos lineales en α , toma el aspecto siguiente:

$$\begin{aligned}
 [R] > 0 &\Rightarrow \\
 \alpha_0 &< \frac{a(S_1 - s_2)(3am^2 S_1 + 4I_{yy} Ks_2 (S_1 + 2s_2))}{2(I_{yy} Ks_2 (S_1 + 2)s_2 (4b(S_1 - s_2) + h(2S_1 + s_2)) + am^2 (6bS_1 (S_1 - s_2) + h(S_1^2 + S_1 s_2 + 7s_2^2)))}
 \end{aligned}
 \tag{10.42}$$

Se comprende que este conjunto de condicionantes poco transparentes no permita generalizar condiciones de estabilidad de un aeroplano tal como el que Ferber describe.

No obstante, Ferber considera que todos los coeficientes del polinomio característico son positivos.

Sin embargo, la condición del discriminante¹¹⁰ de Routh adquiere para Ferber el siguiente (Poco grato¹¹¹) aspecto:

$$\frac{mgbV_0^2 \sin \alpha_0}{2I_{yy}g^2 \cos \theta_0} > \dots$$

$$\dots > \frac{(1 + \tan^2 \alpha_0)^2 ((1 - \tan \alpha_0 \tan \theta_0)(1 + 4 \tan^2 \alpha_0 + \tan^4 \alpha_0) - \tan \alpha_0 (1 + \tan^2 \alpha_0)(5 \tan \alpha_0 - \tan \theta_0))}{(5 \tan \alpha_0 - \tan \theta_0)(1 + \tan \alpha_0 (\tan \theta_0 - \tan \alpha_0) + \tan^4 \alpha_0)}$$

[10.43]

A partir de este momento Ferber inicia un proceso muy elaborado de análisis de la expresión [10.43] suponiendo valores¹¹² diversos para los parámetros que intervienen en ella. Para ángulos pequeños y vuelo horizontal toma la forma siguiente:

$$\frac{mgbV_0^2}{I_{yy}g^2} > 2$$

[10.44]

Con la condición de vuelo estacionario queda:

$$\frac{KS_1 \alpha_0}{m^2 b} < \frac{1}{2I_{yy}}$$

[10.45]

Como puede verse, la condición de estabilidad que obtiene Ferber a partir exclusivamente del discriminante de Routh es mucho más sencilla que la que nosotros hemos obtenido.

Una vez llegado a este punto, Ferber menciona que Bryan & Williams, en su trabajo de 1904 [4], utilizando una notación distinta (lo que en mecánica de vuelo puede no ser una cuestión trivial) llegan a una condición análoga. La realidad es que el modelo que utilizan Bryan & Williams de dos superficies sustentadoras, la segunda de las cuales realiza la función estabilizadora, no tiene un comportamiento aerodinámico asimilable al “aeroplano equivalente” que ha definido Ferber.

Ferber añade que no comparte la conclusión de los dos investigadores anglosajones [4] acerca de que la velocidad de vuelo debe ser mayor que una cierta cantidad para que el vuelo sea estable. En opinión de Ferber, lo único que se podría afirmar es que la velocidad estacionaria de funcionamiento del avión debe cumplir la citada condición:

¹¹⁰ No nos ha sido posible reproducir el resultado que obtiene Ferber. Tampoco partiendo de las ecuaciones inmediatas que, en principio y según Ferber, dan lugar a esa expresión.

¹¹¹ Ferber es muy sensible a la belleza. De hecho, en carta a los Wright [5], dirá que se fía poco de su propio avión (el de Ferber) porque “*es muy poco hermoso*”...

¹¹² Los supuestos que asume podría dar la impresión de tener un fuerte componente contingente y/o discrecional, lo que reduce de modo significativo la validez general de sus *Conséquences XV, XVI, XVII y XVIII*, (Pág. 211 y ss.) sobre la estabilidad longitudinal.

“Debido a que esta velocidad de régimen estacionario es la consecuencia de las características del aeroplano, es mejor eliminar de la condición de estabilidad la velocidad como tal, y obtener la relación que las características deben cumplir. Así, sustituiremos la velocidad V_0 donde esta aparezca mediante la ecuación de la sustentación en vuelo estacionario¹¹³” (Esta conclusión, y la justificación particular que le dio Bryan, ha sido ya tratada en el presente trabajo en la discusión sobre Bryan & Williams [4]).

Esto, sin embargo, no sucede así para el sistema de Ferber, ya que, aunque la sustentación principal del sistema S_1 varía con α y correspondientemente lo hace también el momento de cabeceo causado por esta superficie, el momento de cabeceo causado por la superficie equivalente s_2 no se ve afectado sustancialmente por el ángulo de ataque. Por esta razón, aparecen limitaciones a la estabilidad de modo explícito en α , como hemos visto.

Para lidiar con el “intratable” discriminante de Routh que ha obtenido, Ferber asumirá simplificaciones que se correspondan razonablemente con condiciones verosímiles de vuelo, obteniendo algunas conclusiones de alcance limitado que no mencionamos ahora.

10.4 Conclusiones

- (1) Puede objetarse el procedimiento de suponer que un avión acepta ser reemplazado por un sistema equivalente de tres superficies ficticias orto normales; estas superficies serían generadas por las proyecciones de las superficies reales en planos mutuamente perpendiculares, modificadas por los resultados experimentales adecuados. Es cierto que podría encontrarse un sistema más o menos equivalente –en fuerzas y momentos estáticos– eligiendo adecuadamente las superficies y su posición respecto del centro de masas. Pero este modelo no tiene en cuenta que para las rotaciones ya no existe esta posible equivalencia. Las rotaciones no tenidas en cuenta vician todo el desarrollo de Ferber. Esta crítica observación la menciona Bryan [6] en 1911.
- (2) Estudia las trayectorias posibles y menciona en el texto como un embrión de las oscilaciones características de un avión, sin cualificar específica y directamente esos comportamientos. Ferber construyó y “voló” planeadores de tela y perfiles alares de gran curvatura que, sin llegar a constituir avances claros o éxitos rotundos, le hicieron profundizar en los fenómenos problemáticos

¹¹³ En una comunicación privada a Ferber, Bryan le informa de que está plenamente de acuerdo con él; el mejor modo de relacionar la estabilidad de un aeroplano no es con la velocidad, sino con las características del aeroplano, y que el no haberlo expresado así en su trabajo de 1904 ha sido simplemente por “falta de tiempo”.

propios del vuelo, aunque finalmente optó por abandonar su línea personal de investigación.

- (3) El modo de abordar el problema, inspirado en Bryan & Williams (1904), es más amplio que el de los anglos, pues trabaja en 3 dimensiones, pero para avanzar a través de la selva que le plantean las ecuaciones por el camino que se ha propuesto, efectúa simplificaciones que le apartan del problema. Al elegir los ángulos de Euler como variables sobre las que edificar la estructura formal matemática, se complican las expresiones, y disminuye la posibilidad de mantener una visión intuitiva de lo que acontece. No obstante, es el primero en acometer la aplicación de las ecuaciones generales de la dinámica de un sólido (rígido) a un avión en las tres dimensiones espaciales y en obtener, como consecuencia de la linealización de las ecuaciones en un punto de vuelo en un plano vertical estacionario, los dos sistemas independientes: el sistema longitudinal, y el sistema lateral direccional.
- (4) Ferber transcribe un número relativamente alto de “*consecuencias*” en términos categóricos que, debido a las simplificaciones¹¹⁴ asumidas, quizás tienen importancia desde el punto de vista histórico –como *paleo-ingeniería*– pero no constituyen aportaciones significativas y válidas para el estudio de la estabilidad de los aviones.

¹¹⁴ Hay también algunos errores de manipulación algebraica sobre los que ya llamó la atención Soreau [7].

Anexo A

Consideraciones sobre el “Aeroplano Equivalente” de Ferber.

Las configuraciones posibles para el aeroplano equivalente de Ferber, según la posición del CDG y la de la superficie S2 son las siguientes (Fig. Add. 10_01):

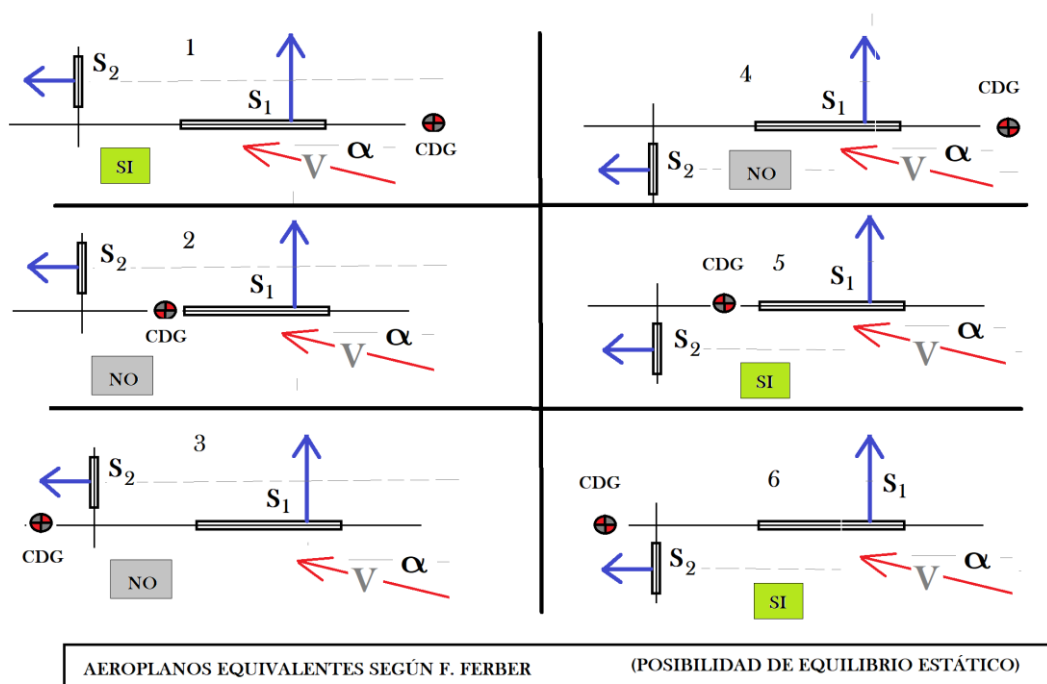


Fig. Add. 10_01. Indicación de posibilidad de equilibrado estático para diversas configuraciones del aeroplano equivalente de Ferber.

El caso de equilibrio estático que resulta más razonable analizar por la posición del CDG, aunque no es el único posible, es el Núm. 5 de la Fig. _____. Según eso, aceptando la Ley de Avanzini y el modelo de aeroplano equivalente de Ferber, tendríamos, para el equilibrio estático del momento de cabeceo respecto del CDG:

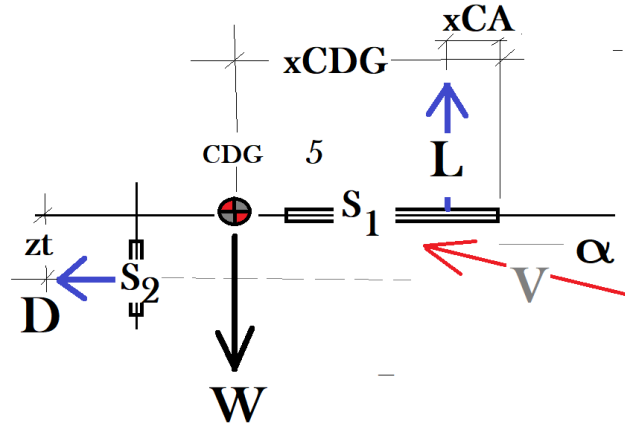


Fig. Add. 10_02. Esquema para el estudio del equilibrio estático del aeroplano equivalente de Ferber en un plano vertical.

$$I_{yy} \frac{d^2\theta}{dt^2} = KS_1 V^2 \alpha (x_{CDG} - c(0.2 + 0.3\alpha)) - KS_2 V^2 zt = 0 \quad [\text{Add.10_01}]$$

Y el equilibrio vertical, en primera aproximación, exige que:

$$W = KS_1 V^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{W}{KS_1 V^2} \quad [\text{Add.10_02}]$$

Por tanto:

$$\left(\frac{W}{KS_1 V^2} \right) \left(\frac{x_{CDG}}{c} - 0.2 - 0.3 \left(\frac{W}{KS_1 V^2} \right) \right) = \frac{S_2}{S_1} \frac{zt}{c} \quad [\text{Add.10_03}]$$

Para un peso, posición del CDG y geometría fijas del avión equivalente de Ferber, solamente hay unos ciertos valores de la velocidad para los cuales el avión está estáticamente equilibrado, con una sustentación que permite el vuelo estacionario horizontal:

$$\left(\frac{x_{CDG}}{c} - 0.2 \right) V^2 - 0.3 \left(\frac{W}{KS_1} \right) - \left(\frac{S_2}{S_1} \frac{zt}{c} \right) \frac{KS_1 V^4}{W} = 0 \quad [\text{Add.10_04}]$$

Es decir:

$$V^4 - \frac{W}{KS_1} \left(\frac{S_1 c}{S_2 zt} \right) \left(\frac{x_{CDG}}{c} - 0.2 \right) V^2 + 0.3 \left(\frac{S_1 c}{S_2 zt} \right) \left(\frac{W}{KS_1} \right)^2 = 0 \quad [\text{Add.10_05}]$$

Una ecuación bicuadrada en la que los valores de la velocidad son función exclusiva de la geometría y el peso del avión. No existe control posible sobre el ángulo de ataque, salvo que se modifique algún parámetro de la geometría del avión o la posición del CDG.

Esto contrasta radicalmente con el procedimiento habitual de equilibrado -normal ya en su época- mediante un elemento sustentador complementario y diferente del ala principal. Así siempre es posible, para cualquier velocidad, anular el momento de cabeceo mediante una combinación de un cierto ángulo de ataque y una adecuada deflexión del empenaje.

Pero Ferber ha elegido, para su avión equivalente, tres superficies fijas perpendiculares entre sí, y una de ellas -la normal a la velocidad- es además particularmente imprecisa en su definición; esto limita enormemente las posibilidades de controlar de manera práctica su aeroplano.

Es muy posible que, de no haber truncado prematuramente su vida un accidente, Ferber habría reconsiderado la definición de su "*aeroplano equivalente*". Murió poco después de publicar el libro que estamos analizando.

La sustentación total de un avión convencional con superficie sustentadora principal S_1 y superficie trasera S_2 -supuesta esta última ahora completamente deflectables, de acuerdo con la nomenclatura habitual y sin suponer desviación de la corriente:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S_1 CL\alpha_1 \alpha + \frac{1}{2} \rho V^2 S_2 CL\alpha_2 (\alpha + \delta_2) \quad [\text{Add.10_06}]$$

Y el momento de cabeceo, suponiendo que las superficies sustentadoras son placas planas, viene dado por:

$$M_{CDG} = \frac{1}{2} \rho V^2 (S_1 CL\alpha_1 \alpha (x_{CDG} - x_{CA_1}) + S_2 (x_{CDG} - x_{CA_2}) CL\alpha_2 (\alpha + \delta_2)) \quad [\text{Add.10_07}]$$

Para el avión equivalente de Ferber tenemos, para la sustentación y para el momento, los valores:

$$L = K S_1 V^2 \alpha \quad [\text{Add.10_08}]$$

$$M = K S_1 V^2 \alpha (x_{CDG} - x_{CA_1}) - K S_2 V^2 z t = 0$$

$$\text{con: } x_{CA_1} = c(0.2 + 0.3\alpha)$$

Es decir:

$$M = K c V^2 S_1 \left(\alpha \left(\frac{x_{CDG}}{c} - 0.2 - 0.3\alpha \right) - \frac{S_2 z t}{S_1 c} \right) \quad [\text{Add.10_09}]$$

Comparando la expresión [Add.10_06] con la [Add.10_08] y también la [Add.10_07] con la [Add.10_09] resulta inmediato captar las limitaciones del modelo de Ferber: carece de capacidad de control y no es lineal en α

	Ferber S1 +S2 (Normal Fija)	S1 + S2 Deflectable (Mismo plano S1)
L	$KS_1V^2\alpha$	$\frac{1}{2}\rho V^2 S_1 CL\alpha_1 \alpha + \frac{1}{2}\rho V^2 S_2 CL\alpha_2 (\alpha + \delta_2)$
M	$KcV^2S_1\left(\alpha\left(\frac{xCDG}{c}-0.2-0.3\alpha\right)-\frac{S_2zt}{S_1c}\right)$	$\frac{1}{2}\rho V^2\left(S_1 CL\alpha_1 \alpha(xCDG-xCA_1)+\dots\right)$ $\left(\dots+S_2(xCDG-xCA_2)CL\alpha_2 (\alpha + \delta_2)\right)$

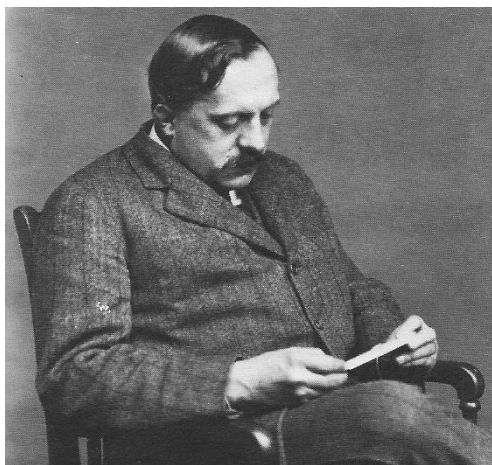
Tabla Add.10_01. Comparación entre las expresiones de Ferber y las actuales, para aviones convencionales.

Bibliografía

- [1] Ferber, F. “L’AVIATION, Ses debuts-son développement”. Berger-Levrault & Cie Éditeurs. Paris/Nancy. (1909).
- [2] Soreau, R. “Nouvelle Loi de la Resistance de l’Air”, Soc. Ing. Civ. Pag. 464, v. 2, (1902).
- [3] Avanzini, G. “Nuove riserche sulla resistenza de’fluidi”; Saggi scientifici e letterari dell’ Academia di Padova; Padova; (1794).
- [4] Bryan, G. H. & Williams, W. E. “The Longitudinal Stability of Aerial Gliders”, “Proc. Roy. Soc. London”, ser. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).
- [5] Wright, W & O. “THE PAPERS OF WILBUR & ORVILLE WRIGHT” (VOL I; 1899-1905), (VOL II; 1906-1948). MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. NEW YORK, (1953).
- [6] Bryan, G. H. “STABILITY IN AVIATION” “An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motions of Airplanes”. Sc. D., F. R. S. MACMILLAN AND CO., LIMITED. ST. MARTIN’S STREET, LONDON. (1911).
- [7] Soreau, R. “État actuel et avenir de l’aviation”, Librairie des Sciences Aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS. (1908).

Capítulo 11

F. W. Lanchester (1868-1946)



115

Contenido

11.1. Nota Biográfica

11.2 Documentos de Referencia.

11.3 Descripción de Contenido.

11.3.1 “Aerodynamics” [1]. Sobre la placa balastada.

11.3.2 “Aerodnetics” [2]

11.3.2.1 Trayectorias “Fugoides”

11.3.2 2. Efecto de la resistencia aerodinámica y de la inercia.

¹¹⁵ <http://lp.costasschuler.com/wp-content/uploads/2014/03/F.W.Lanchester-New-Lanchester-strategy-1.jpg>. (14.06.2017)

11.3.2.3. Ecuación de la Estabilidad

11.3.2.4 Ejemplo de aplicación. Estabilidad de un modelo de planeador de Otto Lilienthal.

11.3.2.5 Comentario

11.4 Consideraciones Críticas

11.5 Anexo A. Modelo Aerodinámico de Lanchester

Bibliografía.

11.1 Nota Biográfica.

Estudió en el Royal College of Science. Diseñador y constructor del primer automóvil británico de gasolina. Durante 20 años fue asesor de las compañías Daimler y BSA. Inventó y patentó importantes mecanismos para la mejora de los automóviles. En 1891 comenzó a interesarse por el vuelo artificial. Poseedor de la Medalla de Oro de la Royal Aeronautical Society, de la Fundación Guggenheim. Fue uno de los primeros miembros del Aeronautical Research Committee (1909), para el estudio de los problemas relacionados con el vuelo, de la Royal Society [23], [24]. Sus publicaciones “Aerodynamics” (1907) y “Aerodnetics” (1908), marcadas ambas por una impronta personal peculiar y característica, han marcado una época en la ciencia aerodinámica y en su aplicación a la mecánica del vuelo.

11.2 Documentos de Referencia.

[1] AERODYNAMICS, CONSTITUTING THE FIRST VOLUMEN OF A COMPLETE WORK ON AERIAL FLIGHT”. D. VAN NOSTRAND COMPANY. London. (1907).

[2] AERODNETICS, CONSTITUTING THE SECOND VOLUMEN OF A COMPLETE WORK ON AERIAL FLIGHT. Archibald Constable & CO. LTD. Orange Street Leicester Square. London (1908)

11.3 Descripción de Contenido.

11.3.1 “Aerodynamics” [1].

Lanchester [1] estudia en primer lugar la estabilidad del vuelo de planeo de una placa rectangular plana adecuadamente balastada. El equilibrio en cabeceo exige que el centro de masas de la placa (x_{CDG}) coincida con el centro de presión aerodinámico. Para situarlo acepta la teoría de Joëssel [6] sobre la posición del centro de presión en función del ángulo de ataque.

Joëssel situaba el centro de presión según la fórmula siguiente:

$$x_{CP}(\alpha) \approx c(a + b \sin \alpha)$$

con c : cuerda

$$a \approx 0.2$$

$$b \approx 0.3$$

[11.1]

De este modo quedaba establecida necesariamente una correspondencia biunívoca entre el ángulo α y la posición x_{CDG}

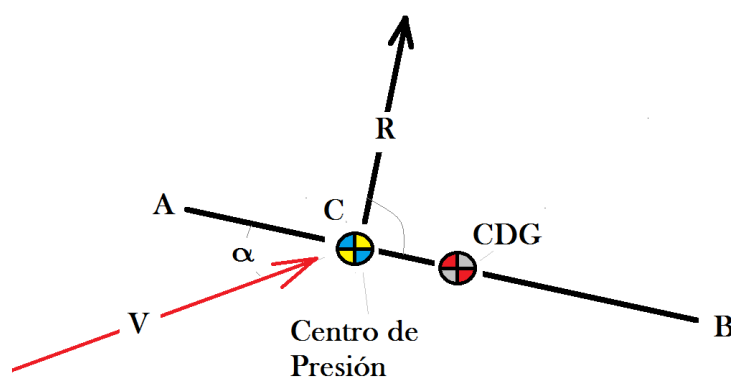


Figura 11.1: Esquema genérico de una placa plana con ángulo de ataque.

Así, (Ref. Fig. 11.1) un incremento negativo de α genera un desplazamiento hacia adelante del centro de presión, y por ello un momento de cabeceo positivo y viceversa. Gracias a sus experimentos Lanchester cree poder afirmar que el movimiento de la placa plana puede ser estable¹¹⁶, y lo explica teóricamente con la razón aducida.

¹¹⁶ “It has long been known that an Aeroplane suitably ballasted will exhibit a certain degree of stability, and may be regarded in fact as a rudimentary aerodrome” ([1], Pág. 233). Aquí “Aeroplane” es sencillamente un plano rectangular, y por “aerodrome” se entiende un “aparato volador”.

El análisis de la dinámica lineal sencilla del movimiento de planeo de una sola placa plana con las mencionadas hipótesis y nomenclatura¹¹⁷ actual, conduce a los siguientes valores para los coeficientes del polinomio característico de la ecuación del sistema lineal:

$$\begin{aligned}
 Pol &= A_0 + A_1s + A_2s^2 + A_3s^3 + A_4s^4 \\
 A_0 &= b \frac{c CL g (\rho SV)^2}{2 m I_{yy}} (CL \cos \gamma - CD \sin \gamma) \\
 A_1 &= b \frac{c CL (\rho SV)}{2 m I_{yy}} (\rho SV^2 CD - g m \sin \gamma) \\
 A_2 &= \frac{\rho S \left(V^2 CL_\alpha (bc m^2 \alpha + \rho I_{yy} S (CD_0 - k \alpha^2)) + 2mg I_{yy} (CL \cos \gamma - CD \sin \gamma) \right)}{2 m^2 I_{yy}} \\
 A_3 &= \frac{\rho SV^2 (2CD + CL_\alpha) - 2mg \sin \gamma}{2mV} \\
 A_4 &= 1 > 0 \\
 [R] &= A_1 (A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_3^2 A_0
 \end{aligned}
 \tag{11.2}$$

Se observa que, al ser la pendiente γ negativa, pues se trata de planeo estacionario, siendo el parámetro b es positivo -lo que significa que el centro de presión se retrasa al aumentar α - los coeficientes $A_0, A_1, A_3,$ y A_4 son necesariamente positivos. El coeficiente A_2 lo será siempre que se cumpla:

$$(CD_0 - k \alpha^2) > 0 \quad \text{con:} \quad k = \frac{CL_\alpha^2}{\pi AR e_{Oswald}}
 \tag{11.3}$$

Esta condición implicaría volar en la zona de segundo régimen de velocidades, pero no es determinante por sí sola.

No obstante, la condición de que sea también positivo el discriminante de Routh -demasiado complicado para obtener condiciones prácticas de estabilidad-, no se cumple para cualquier valor del momento de inercia. El análisis¹¹⁸ numérico con las ecuaciones diferenciales completas confirma estos resultados.

Con las limitaciones indicadas, la afirmación de Lanchester acerca de la estabilidad de la placa plana tiene sentido, siempre de acuerdo con las hipótesis que acepta. La teoría aerodinámica de Lanchester descansa en las afirmaciones de Joëssel [6] y Kummer [5] sobre el comportamiento del Centro de presión con la incidencia. Las deducciones de Lanchester, de acuerdo con estas teorías, son formalmente impecables y, según ellas, el vuelo del aeroplano es estable de forma automática. De hecho, lo considera el más simple objeto volador posible dotado de estabilidad automática. Su comportamiento parecía

¹¹⁷ Ocasionalmente nos desviaremos de este procedimiento, no sin advertirlo oportunamente.

¹¹⁸ Se ha incluido, para estas comprobaciones numéricas, una derivada aerodinámica de amortiguamiento en cabeceo para una placa rectangular plana (CM_q) calculada de acuerdo con los métodos preconizados por DATCOM [7].

coincidir con lo que Lanchester había observado directamente en sus experimentos con pequeños modelos voladores de alas muy delgadas, construidas de mica.

Lanchester distingue dos aspectos de la estabilidad:

(a) Uno que responde de la conservación del ángulo de ataque.

(b) Otro que mantiene el equilibrio entre energía potencial y cinética, y que asegura la constancia del ángulo de descenso y de la velocidad. Lanchester afirma que lo considera válido para el sencillo modelo de la placa balastada y extrapolable a cualquier otro planeador mayor y más complicado. En todo caso, Lanchester parece tener apoyo teórico al afirmar que, lanzada adecuadamente, la placa plana cuyo $x_{CDG} = x_{CA}$ realizará un movimiento estacionario estable. Garantizar que la realización práctica tenga éxito y el vuelo se produzca tal como describe Lanchester es menos sencillo de lograr.

De hecho, en una publicación posterior [21] Lanchester describirá lo que denomina “*Inestabilidad Catastrófica*”, aplicándolo a una placa plana lanzada con unas condiciones iniciales inadecuadas. Estas consisten esencialmente en un ángulo inicial de ataque negativo, lo que conduce a una trayectoria anómala –diferente de la normal- y potencialmente peligrosa.

11.3.1.1. Sobre la placa plana balastada.

Es conveniente establecer algunos hechos básicos del comportamiento de este “aeroplano” porque Lanchester lo utiliza frecuentemente como referencia.

Se trata de una placa rectangular a la que se le ha adherido un balasto de modo que el CDG tiene una posición determinada, fija, y no centrada en la placa, sino más cerca del borde de ataque. Las condiciones de equilibrio, en vuelo estacionario, son: V_0, α_0, γ_0 y θ_0

De acuerdo con la Ley de Jöessel, solamente se anula el momento de cabeceo para un ángulo de ataque que cumpla la condición:

$$x_{CDG} - c(0.2 + 0.3 \sin \alpha_0) \approx x_{CDG} - c(0.2 + 0.3 \alpha_0) = 0,$$

Por consiguiente, el ángulo de ataque, constante mientras no cambie la posición del x_{CDG} , será:

$$\alpha_0 = \left(\frac{\frac{x_{CDG}}{c} - 0.2}{0.3} \right) = 3.33 \left(\frac{x_{CDG}}{c} \right) - 0.666$$

Este ángulo de ataque proporciona unos valores, determinados y fijos, para los dos coeficientes aerodinámicos CL y CD , manteniendo nulo el coeficiente CM . A partir de ellos puede obtenerse la Velocidad estacionaria de vuelo V_0 , el valor de γ_0 y, por tratarse de un movimiento en el plano vertical, la obtención de θ_0 es inmediata.

En cuanto a la estabilidad del movimiento -aceptando la hipótesis de Jöessel - puede demostrarse que es estable.

Establecemos las ecuaciones de la dinámica en un plano vertical, en un formato sencillo y con la nomenclatura habitual actual:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad m \left(\frac{dV}{dt} \right) &= -\frac{1}{2} \rho S V^2 C D - m g \sin \gamma \\
 [2] \quad m V \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) &= \frac{1}{2} \rho S V^2 C L - m g \cos \gamma \\
 [3] \quad I_{yy} \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) &= \frac{1}{2} \rho S V^2 C L (x_{CDG} - c(a + b \sin \alpha))
 \end{aligned} \tag{11.4}$$

Estas ecuaciones [11.4] linealizadas para el sistema en las variables: $\Delta V(t)$, $\Delta \alpha(t)$, $\Delta \gamma(t)$ y $\Delta \theta(t)$ conduce a los siguientes autovalores, que caracterizan la dinámica:

$$\begin{aligned}
 s_{1,2} &= \pm i V_0 \sqrt{\frac{\rho b c S}{2 I_{yy}}} \\
 s_{3,4} &= \frac{\rho S V_0^2 C D - m g \sin \gamma_0}{2 m V_0} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 m g \rho S V_0^2 (C L - C D \sin \gamma_0)}{(\rho S V_0^2 C D - m g \sin \gamma_0)^2}} \right)
 \end{aligned} \tag{11.5}$$

Los dos últimos valores de [11.5] para trayectorias de pendiente pequeña, conducen al modo Largo Período.

$$\begin{aligned}
 (s_{3,4})_{\gamma \approx 0} &= \frac{\rho S V_0 C D}{2 m} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 m g \rho S V_0^2 (C L)}{(\rho S V_0^2 C D)^2}} \right) = \\
 &= \frac{\rho S V_0 C D}{2 m} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{2 C L^2}{C D^2}} \right) \approx \left(-\frac{\rho S V_0 C D}{2 m} \pm \frac{g}{\sqrt{2} V_0} i \right)
 \end{aligned} \tag{11.6}$$

Los autovalores s_1, s_2 del modo Corto Período muestran una oscilación no amortiguada, pero no divergente debido al signo positivo de la constante b. (De haber introducido un valor razonable de la derivada aerodinámica CM_q , el movimiento Corto Período sería amortiguado).

El modo Largo Período (s3, s4) aparece porque, en primera aproximación, depende solamente de las dos ecuaciones de las fuerzas.

Si no se acepta la hipótesis de Jöessel y se mantiene fijo el centro de presión para ángulos pequeños las ecuaciones del movimiento, en teoría, quedan sometidas al albur de las condiciones iniciales del lanzamiento de la placa y solo hay estabilidad en la medida en que x_{CDG} y x_{CP} coinciden y el ángulo α es el adecuado. Un lanzamiento del planeador (con la condición inicial de $x_{CP} = x_{CDG}$) debería tratar de fijar las condiciones iniciales de la Velocidad impartida ($V_{inicial}$), la dirección en la que se ha impartido esa velocidad, que indica la pendiente inicial ($\gamma_{inicial}$), el ángulo que forma el eje X del planeador con la velocidad, que indica la incidencia ($\alpha_{inicial}$) y el ángulo del eje X con la horizontal, que indica el asiento longitudinal inicial ($\theta_{inicial}$). Esas condiciones iniciales, dado que teóricamente la ecuación del momento de cabeceo, en el instante inicial, indicará que este momento es nulo, pueden ser o no coherentes con las ecuaciones de las fuerzas; es decir, las condiciones iniciales deberían coincidir con las estacionarias para garantizar la estabilidad, en ausencia de un valor apropiado de la derivada CM_q .

Lanchester considera que la cuestión de la estabilidad es, en general, poco comprendida por los diseñadores de aviones. Menciona que parece ser opinión general que el equilibrio de un pájaro en vuelo se debe a su capacidad de adoptar formas diferentes y adaptables, pero él afirma que *“Una estructura rígida adecuadamente dispuesta es capaz de mantener su propio equilibrio y posee completa estabilidad dentro de ciertos límites”*.

Lanchester realizó experiencias con planeadores, y trató de describirlas en clave matemática sencilla, o incluso ausente. Introdujo una velocidad característica, que denominó *“velocidad natural”*, llamando así a aquella con que el avión planea estacionariamente sin oscilaciones, según una trayectoria recta¹¹⁹. Observó que cuando aparecían oscilaciones, estas podían considerarse superpuestas a una trayectoria rectilínea y estaban débilmente amortiguadas. Sospechó que su estudio podía intentarse suponiendo que se trataba de un intercambio entre energía cinética y energía potencial. A partir de aquí, con ciertas hipótesis complementarias, estableció un sistema de ecuaciones diferenciales que describen una oscilación de largo período. Por un malentendido¹²⁰ asignó el nombre de Fugoide a este tipo de trayectorias.

Lanchester pensaba que era necesario tener en cuenta esta característica dinámica del vuelo en el diseño de los aviones. Atribuía muchos accidentes a la falta¹²¹ de atención de los diseñadores a este modo oscilatorio, al que consideraba, en sus primeros estudios, responsable único de la estabilidad del aeroplano.

Su libro *“Aerodynamics”* describe detalladamente una recopilación muy completa de los conocimientos aerodinámicos del momento (1907), y abarca múltiples aspectos. Incluye también muy originales aportaciones a la teoría de los perfiles, y menciona el

¹¹⁹ Cuando el movimiento es NO disipativo, la trayectoria teórica puede mantenerse horizontal.

¹²⁰ Al asignar el nombre de Fugoide a este tipo de oscilación, Lanchester pensaba que la palabra griega “ $\phi\upsilon\gamma\eta$ ” significa “vuelo”. Realmente significa “huida”. Lanchester admitió posteriormente que no resultaba completamente apropiado. Sugirió que podría entenderse como “vuelo de huida”. (Cfr. [2], Pág. 348).

¹²¹ Trató de demostrar que el mortal accidente de Otto Lilienthal (1896) se debió a una inestabilidad Fugoide. Más tarde admitió que probablemente fue originado por una entrada en pérdida.

fenómeno físico que ocasiona la sustentación alar mostrando cómo aparece un flujo de aire “*cíclico*” –es la palabra que utiliza para describir el comportamiento del aire que ahora relacionamos con la existencia de “circulación” en el seno del fluido. Las descripciones de las causas a las que atribuye los efectos no siempre son nítidamente inteligibles. En el ámbito anglosajón se le atribuye la creación, hasta donde puede interpretarse así, de la teoría que relaciona la sustentación con la circulación.

11.3.2 “*Aerodnetics*” [2].

11.3.2.1. Trayectorias “Fugoides”.

Lanchester desea enfatizar la importancia de lograr la estabilidad¹²² longitudinal automática del vuelo, y considera que el movimiento que denominó Fugoide es la clave que permite el estudio cuantitativo de la estabilidad longitudinal.

“¿Qué es exactamente lo que Lanchester se propone investigar?” Le respuesta es: la dependencia de la estabilidad respecto de los órganos funcionales del avión: cómo gestiona los grados de libertad que posee para que no crezcan desviaciones indeseables de las variables del vuelo y su valor se mantenga dentro de márgenes de seguridad.

A partir de experimentos con aeromodelos de su propio diseño, y con velocidades del orden de los 10/ 20 m/s, dedujo que:

- (1) Si se lanza el aeroplano con un cierto ángulo de pendiente (Lanchester lo denomina “*ángulo natural de planeo*”) y cierta velocidad (que Lanchester denomina “*velocidad natural*”), el aeroplano continuará indefinidamente su vuelo rectilíneo. Equivale a decir que existen una velocidad de vuelo y una pendiente tales que el planeador describirá una trayectoria recta siempre que vuele con esa pendiente y con esa velocidad.
- (2) Si la velocidad y el ángulo de lanzamiento no son los “*naturales*”, cuyo valor Lanchester todavía no ha especificado, el planeador oscilará alrededor de la trayectoria rectilínea correspondiente a su velocidad natural, amortiguándose las oscilaciones hasta llegar al planeo uniforme y recto que le corresponde “*naturalmente*”.
- (3) La velocidad natural de un aeroplano depende de su peso y de la posición de su centro de gravedad, siendo mayor cuanto mayor sea el peso. Lanchester supone

¹²² Lanchester utiliza la palabra “estabilidad”, sin definirla, aparentemente en la acepción que el sentido corriente le otorga: algo que se mueve se comporta de modo “estable” si, en algún sentido, mantiene sin alteraciones sustanciales las magnitudes propias de su movimiento. No aparece una definición unívoca, y lógicamente, tampoco un modo de cuantificarla. Se menciona con frecuencia la “estabilidad”, en un contexto descriptivo que parece no requerir mayor precisión.

ahora que el ángulo que forma el plano posterior con el plano del ala delantera es constante, lo que fija de hecho el ángulo de ataque estacionario. Por esta razón puede hablar de modo consistente de *una* sola velocidad natural, y no de muchas, que serían las velocidades naturales correspondientes a diversos ángulos de ataque. Este punto lo explicará de modo más claro Lanchester en trabajos posteriores [21]

- (4) Hay una posición particular del *CDG* que conduce a una trayectoria de mínima pendiente, ya que existe una relación directa entre x_{CDG} y α
- (5) El ángulo γ (la pendiente de la trayectoria estacionaria) depende del diseño geométrico del aeroplano.
- (6) A mayor velocidad, mayor estabilidad, en el sentido de hacer que la estabilidad sea más independiente de las ráfagas de viento.

Lanchester menciona diversos modelos de planeadores. Cita, en particular el “*planóforo*” de Alphonse Pénaud [9] al que considera el primer modelo que voló establemente y del que Pénaud menciona oscilaciones como las que describirá con más precisión Lanchester.

Denomina “Teoría Fugoide” a su tratamiento matemático de las trayectorias y de la estabilidad longitudinal. La estabilidad de actitud la considera de sencilla explicación. La estabilidad en velocidad la considera fruto de un más complejo sistema de equilibrio entre las energías potencial y cinética, que, en principio y debido a sus observaciones, piensa que puede suponer normalmente estable.

Las ecuaciones de las trayectorias posibles serán obtenidas mediante la solución de las ecuaciones de la dinámica, aplicadas al vuelo de planeo¹²³. (Ref. Fig. 11.2)

De la deducción matemática de las trayectorias que Lanchester denominará del tipo “Fugoide”, destacamos ahora las hipótesis¹²⁴ que asume:

- (1) Vuelo en un plano vertical, con tres grados de libertad: dos de traslación y uno de rotación. (Realmente trabajará solamente con dos ecuaciones).
- (2) El movimiento es conservativo y no hay resistencia aerodinámica, o bien esta es siempre exactamente anulada por la tracción según la tangente a la trayectoria. Esta

¹²³ NOTA: este análisis es realizado por Lanchester con aparente completo desconocimiento de las ecuaciones publicadas por Zhukowsky en 1891 [10]. El trabajo de Zhukowsky es matemáticamente más completo, más claro, no tan restrictivo en las hipótesis simplificadoras, y no se ciñe exclusivamente al vuelo en un plano vertical. Contiene también muchas referencias a estudios sobre el mismo tema de autores anteriores y contemporáneos, fundamentalmente europeos y americanos, cuyas teorías analiza y critica con sobrios comentarios, aceptando también aportaciones valiosas que en ellos encuentra.

¹²⁴ El concepto aerodinámico de “*Onda de Soporte*”, característico de la teoría aerodinámica de la sustentación de Lanchester, no requiere ser analizado ahora [1].

hipótesis liga directamente la velocidad de vuelo con la variación de la coordenada vertical.

- (3) Momento de Inercia nulo. Esto permite prescindir de la ecuación de rotación del aeroplano alrededor de su eje “OY” (normal al plano del movimiento), e implica que el ángulo de ataque permanece constante a lo largo de la trayectoria.
- (4) Pequeño tamaño del aeroplano respecto del mínimo radio de curvatura de la trayectoria. Esta hipótesis, que parece un poco anómala, tiene un claro sentido si la relacionamos con el punto anterior. Su sentido resultará más obvio cuando analicemos las trayectorias Fugoides con punto de retroceso.

Al prescindir de la ecuación ligada al grado de libertad de giros alrededor del eje “OY” las conclusiones sobre estabilidad obtenidas mediante las dos ecuaciones de las fuerzas tendrán condicionada su validez a lo que, en interacción con ellas, pudiera aportar la ecuación excluida, si se tuviera en cuenta. Se trata, por tanto, de analizar la dinámica de un punto material sometido a su peso y a una fuerza cuadrática con la velocidad y normal a la trayectoria.

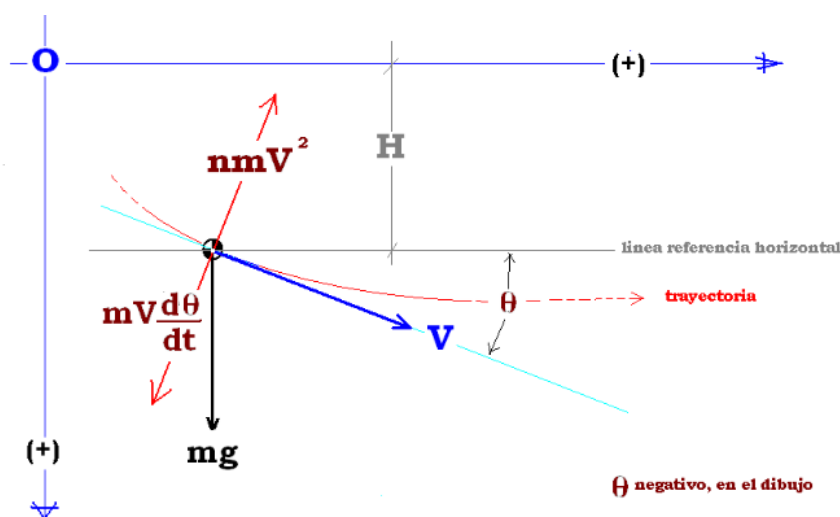


Figura 11.2: Esquema de Lanchester para el estudio de las trayectorias conservativas.

Descripción de la Figura 2.

- Ejes perpendiculares: X positivo hacia la derecha, Z positivo hacia abajo.
- Aeroplano considerado masa puntual.
- Coordenada H medida desde el nivel $z = 0$ El valor H es la distancia vertical desde una cierta referencia fija, y es positivo hacia abajo.
- El ángulo que forma la velocidad con la horizontal es θ (Pendiente de la trayectoria, positiva hacia arriba)

- Las fuerzas que intervienen son: el peso mg , la fuerza centrípeta $mV \frac{d\theta}{dt}$ y la sustentación, que Lanchester expresa como un cierto coeficiente¹²⁵ n multiplicado por mV^2
- No se supone resistencia aerodinámica, o bien esta siempre es compensada exactamente por la tracción.

Hemos visto que Lanchester define una velocidad que denomina “Velocidad Natural (V_N)” de un planeador como aquella que equilibraría¹²⁶ exactamente el peso.

Esta definición le permite expresar el valor de n en función de esta velocidad:

$$nmV_N^2 = mg \quad \Rightarrow \quad n = \frac{g}{V_N^2} \quad [11.7]$$

También puede expresar n en función de una cierta altura H_N , a la que denomina “Altura Natural”, ya que la velocidad V obedece siempre a la relación $V^2 = 2gH$, pues el movimiento es conservativo por hipótesis.

$$V_N^2 = 2gH_N$$

$$n = \frac{g}{V_N^2} \Rightarrow \frac{1}{2H_N}$$

Equivale a decir que si se lanza el planeador horizontalmente con una velocidad igual a V_N , proseguirá indefinidamente una trayectoria horizontal, con $F = mg$. (Recordemos que hemos aceptado la hipótesis de ausencia de resistencia aerodinámica) Tanto V_N como H_N son características propias del vuelo concreto que esté realizando el planeador, y permanecen constantes para ese vuelo determinado.

El coeficiente n liga la sustentación a la velocidad, y es supuesto constante: $n = \frac{F}{V^2}$

Estableciendo el equilibrio entre las fuerzas normales y tangenciales a la trayectoria,

$$nV^2 + V \frac{d\theta}{dt} = g \cos \theta \quad \text{con: } V = \sqrt{2gH} \quad [11.8]$$

¹²⁵ Las dimensiones físicas de n son: L^{-1}

¹²⁶ Esta definición, desde la perspectiva actual, parece contener una ambigüedad. No obstante, si suponemos -como hemos mencionado ya- que la incidencia alar viene fijada por el ángulo del ala trasera, la definición de “Velocidad Natural” de Lanchester tiene sentido.

Lanchester llega a la siguiente ecuación diferencial lineal con la variable H :

$$\frac{d(\cos \theta(H))}{dH} = \frac{\cos \theta(H)}{2H} - n$$

La solución es:

$$\cos \theta(H) = \frac{2}{3} n H + \frac{C}{\sqrt{H}} \quad [11.9]$$

Esta relación liga el valor del coseno de la pendiente de la trayectoria con la distancia respecto de una cierta referencia vertical. C es una constante que depende de las condiciones iniciales. Esta constante adquirirá una importancia particular para Lanchester, por la relación que le asigna respecto a la estabilidad del sistema.

Para diversos valores de C , las trayectorias adquieren formas como las siguientes (Fig. 11.3):

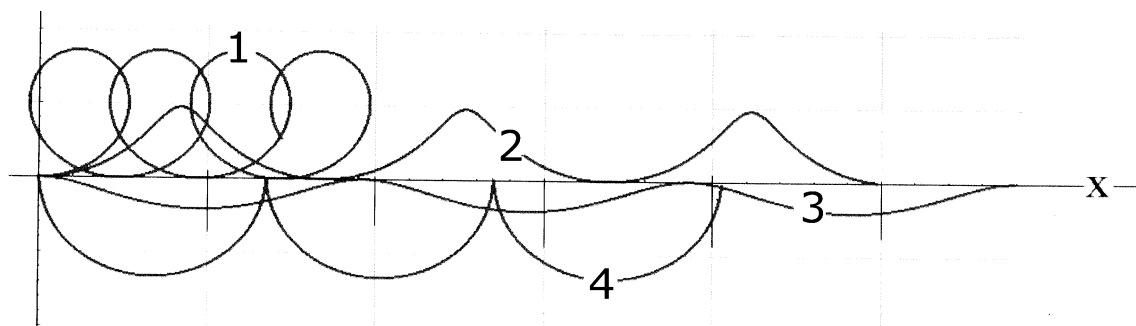


Figura 11.3: Diferentes trayectorias Fugoides, obtenidas variando las condiciones iniciales del lanzamiento.

Las trayectorias tipo A son giros verticales cerrados, las del tipo B y C son oscilatorias, la de tipo D son semicirculares. Son exactamente las mismas que Zhukowsky obtuvo [10]. Es lógico, ya que se trata exactamente de las mismas ecuaciones diferenciales analizando el mismo caso.

Desde el punto de vista que nos interesa ahora, Lanchester piensa que las trayectorias tipo “D” son muy peligrosas para la estabilidad del vuelo. La razón se expone a continuación.

Estas trayectorias se corresponden con el caso de que la constante C tome un valor nulo: en este caso la trayectoria sería semicircular. Esto, según Lanchester, indica que la trayectoria es discontinua, en el sentido de que presenta puntos de retroceso verticales, o cúspides, y para que esto sea posible –afirma– se requeriría una intervención artificial externa sobre el planeador para que este recuperase una actitud adecuada y pasase describir un nuevo semicírculo, que a su vez, requeriría también una intervención análoga.

En definitiva, según Lanchester, dado que la trayectoria se aproxima a una cúspide a medida que la constante C se acerca a cero, la constante C de integración de la ecuación diferencial de la Fugoide puede considerarse como un indicador cuantitativo de la estabilidad del movimiento. Aunque, dado que no existe un índice de estabilidad conocido, lo único que podemos decir está más bien en la línea de indicar una tendencia: un aumento en C implica un aumento en la estabilidad. Con este propósito Lanchester

define una constante K cuya definición es $K = \frac{C}{\sqrt{H_n}}$ que tiene la ventaja de ser adimensional.

Profundizando algo más en el razonamiento de Lanchester, si expresamos el valor de la constante C en función de las condiciones iniciales del movimiento, obtendríamos:

$$C = \sqrt{\frac{V_0^2}{2g} + z_0} \left(\cos \theta_0 - \left(\frac{\frac{V_0^2}{2g} + z_0}{3H_n} \right) \right) \quad [11.10]$$

$$K = \frac{C}{\sqrt{H_n}} = \sqrt{x_0} \left(\cos \theta_0 - \frac{x_0}{3} \right) \quad \text{con} \quad x_0 = \left(\frac{\frac{V_0^2}{2g} + z_0}{H_n} \right)$$

Se observa que una determinada combinación de altura y velocidad iniciales componen un solo parámetro influyente C o bien K .¹²⁷

Se obtienen valores nulos para C cuando se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes:

$$[1] \quad \frac{V_0^2}{2g} + z_0 = 0 \quad [2] \quad \cos \theta_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{V_0^2}{2g} + z_0}{H_n} \right)$$

En ambos casos obtenemos el coseno de la pendiente en función de la coordenada vertical:

$$\cos \theta(H) = \frac{H}{3H_n}$$

A partir de esta expresión obtenemos la trayectoria correspondiente a este caso:

$$\cos \theta(H) = \frac{H}{3H_n} \Rightarrow \sin \theta(H) = \sqrt{1 - \left(\frac{H}{3H_n} \right)^2}$$

Por tanto:

¹²⁷ Curiosamente, este concepto que engloba en un solo parámetro una combinación de velocidad y altura - proporcional a la energía total- allorará de nuevo en los estudios de Kaiser (1944) al tratar de determinar un perfil de velocidad ascensional óptimo para los primeros cazas a reacción alemanes producidos por Willy Messerschmitt.

$$\frac{dx}{dH} = \frac{\frac{H}{3H_n}}{\sqrt{1 - \left(\frac{H}{3H_n}\right)^2}} \Rightarrow x^2 + H^2 = (3H_n)^2 \quad [11.11]$$

Lanchester observa que se trata de semicírculos, pues H no admite valores negativos. Los puntos de retroceso que aparecen, suponen una anomalía del comportamiento regular del planeador que se vería obligado a incrementar instantáneamente un ángulo de 180° la pendiente de su trayectoria. Esto hace decir a Lanchester: “*Se han excedido los límites de estabilidad*”. Extiende, además, la consideración de trayectorias peligrosas a las trayectorias que, sin tener puntos de riguroso retroceso, se parecen en mayor o menor grado a estas.

Para el caso en el que $\theta_1 = 0^\circ$ y si la velocidad de lanzamiento difiere poco de la Velocidad Natural, las curvas se muestran muy planas y a Lanchester le resulta impracticable dibujarlas, y estudia este caso particular mediante un *razonamiento heurístico verbal*, que estimamos equivalente al que aquí mostramos con nomenclatura matemática:

- (1) La ecuación de la fuerza/aceleración vertical, al tratarse de un vuelo con trayectoria muy plana y horizontal, admite la expresión:

$$m \frac{d^2 \Delta h}{dt^2} = 0 = mg - \frac{1}{2} \rho S V_n^2 CL = mg - \frac{1}{2} \rho S (2g H_n) CL \quad [11.12]$$

- (2) El coeficiente de sustentación es:

$$CL = \frac{2mg}{\rho S V_n^2}$$

- (3) La misma ecuación en pequeños incrementos será:

$$m \frac{d^2 \Delta h}{dt^2} = mg - \frac{1}{2} \rho S (2g (H_n + \Delta h)) \frac{2mg}{\rho S V_n^2}$$

- (4) Esto conduce a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 \Delta h}{dt^2} = \left(\frac{-2g^2}{V_n^2} \right) \Delta h \quad [11.13]$$

Lanchester concluye: “*Por lo tanto, para pequeñas oscilaciones el componente vertical del movimiento del aeroplano¹²⁸ es armónica*” y establece el período de la oscilación en

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{H_n}{g}} = \pi\sqrt{2}\left(\frac{V_n}{g}\right) \quad [11.14]$$

Esto es la conocida expresión para el modo Largo Período que denominará “Fugoide”. Lanchester considera la teoría que acaba de desarrollar como la demostración de la condición de estabilidad de un planeador. Posteriormente, en el mismo libro, llevará más lejos esta afirmación, complementándola con la denominada “Ecuación de Estabilidad”

11.3.2.2. Efecto de la resistencia aerodinámica y del momento de inercia sobre la estabilidad.

La influencia de estos dos parámetros es tenida en cuenta en forma de “correcciones” a la dinámica ya descrita, pues la inclusión formal de sus términos propios en las ecuaciones del movimiento conduce a un sistema matemáticamente intratable, pero Lanchester anticipa el resultado: la resistencia aerodinámica amortigua las oscilaciones. La razón es la siguiente: Lanchester supone que varía la velocidad y, por tanto, también la resistencia aerodinámica, según el cuadrado de aquella. El resultado es que el movimiento deja de ser conservativo y hay una disminución a lo largo del tiempo de la energía inicial disponible: el factor $\frac{V_0^2}{2g} + z_0$ mengua continuamente y consecuentemente el valor de la constante C aumenta (si las variaciones de z y V son pequeñas, como Lanchester supone).

El momento de inercia, en cambio, las amplifica. El razonamiento de Lanchester parece indicar lo siguiente: si comparamos diferentes movimientos entre sí, para varios planeadores con las mismas características aerodinámicas, en aquellos cuyo momento de inercia es mayor aparecen oscilaciones de mayor amplitud que en los demás. Esto indica que un aumento de la inercia empeora el comportamiento respecto de la estabilidad. No obstante, al no haber intervenido en el razonamiento de Lanchester en ningún instante una ecuación correspondiente al momento de cabeceo, la interpretación de la estabilidad vuelve a basarse en las trayectorias descritas y en el grado de aproximación a aquella en la que la constante C es nula.

La manera de estudiar la influencia de la Resistencia Aerodinámica y del Momento de inercia es ingeniosa, pero se mueve en un terreno en el que no se puede concluir con

¹²⁸ Lanchester utiliza el neologismo “*aerodone*”, creado por él, para designar lo que ahora llamamos “aeroplano”

rigor, ya que la asignación de inestabilidad a la trayectoria Fugoide Núm. 7 es, en el fondo, deducida algo arbitrariamente a partir de la impresión visual que produce.

Las ecuaciones utilizadas para obtener esas trayectorias, aunque se limite el estudio del movimiento a un plano vertical, son insuficientes para concluir con garantía sobre la estabilidad en cabeceo. Esta es fuertemente dependiente del momento. Sobre estos se han admitido hipótesis que establecen que la ecuación del momento está siempre satisfecha de modo automático, manteniendo al planeador con su eje longitudinal tangente a la trayectoria.

11.3.2.3. Ecuación completa de la Estabilidad.

Esta ecuación es particularmente importante para el tema que nos ocupa. Parte de un modelo aerodinámico muy personal [1], aunque quizás admite *traducción* al paradigma teórico actual [11] con limitaciones, tal como se muestra en anexo. Lanchester menciona, como predecesores de los estudios que él realiza, a Pénaud [19], Mouillard [4] y Marey [20] entre otros muchos.

La condición de estabilidad que hemos visto más arriba, Lanchester la obtiene a partir del comportamiento de la trayectoria Fugoide y surge del análisis de las dos ecuaciones de las fuerzas de la dinámica en un plano vertical, sin utilizar la ecuación del momento de cabeceo.

Lanchester establece ahora una nueva condición matemática de estabilidad, de la que afirma que está vinculada con la anterior, pero es sustancialmente nueva. El proceso deductivo mediante el cual Lanchester obtendrá esta nueva condición de estabilidad es notable¹²⁹. Su argumentación evita el uso de la ecuación diferencial¹³⁰ correspondiente a la dinámica generada por el momento de cabeceo. Supone que el movimiento será muy aproximadamente armónico y trabaja con el *efecto medio* del par sobre cada semi-

¹²⁹ Mencionemos, a este respecto, algunos cualificados comentarios: H. G. Bryan [13]: “*It is probably correct to say that the method of obtaining it (i. e. the Stability Equation) has an appearance of being wanting in rigour (sic)*”; T. Von Kármán [18]: “*Lanchester used rather non-conventional mathematical methods (...), so much so that, for example, it took me several days to understand his deduction of the same stability equation which Bryan gave in his book “Stability in Aviation” in 1911, and Trefftz and I gave in 1914 as a first approximation*”; L. Prandtl [25]: “*Lanchester treatment is difficult to follow, since it makes a very great demand on the reader’s intuitive perceptions...*”. Todos ellos estudiaron detenidamente los trabajos de Lanchester.

¹³⁰ Bryan [26] escribió una reseña de libro “Aerodnetics” en la que criticaba la falta de rigor matemático de las argumentaciones de Lanchester. Se detiene -como ejemplo concreto- en el modo de argumentar la Condición de Estabilidad, de la que considera que contiene “pasos injustificables”, tanto matemáticos, como físicos: “*Es como si en el estudio matemático de un péndulo compuesto por dos masas, se omitiera el efecto de una de ellas sobre el período, o la velocidad y los desplazamientos y solamente se considerase influyente sobre la amplitud*”. Tampoco omite mencionar el disgusto que le produce la nomenclatura particular que Lanchester elige para desarrollar su teoría Fugoide, tan alejada de la habitual en el campo de la ingeniería inglesa de la época. Compara las conclusiones de Lanchester con la teoría desarrollada por Williams y él mismo en 1904 [26] sobre la estabilidad de los aviones, y un lector actual podría detectar -en la reseña que citamos- la perplejidad que le produce a Bryan el hecho de que, obviando por completo la ecuación de cuarto grado que permite estudiar las condiciones de estabilidad longitudinal, Lanchester llega a una conclusión que, según el propio Bryan admitirá en 1911 [13], coincide con la suya que es, al contrario de la de Lanchester, resultado de un análisis mucho más “científico”.

oscilación, y la nomenclatura en la que se plasman sus razonamientos al expresarlos en forma matemática es, cuando menos, sorprendente. Digamos solamente, a título de ejemplo, que para un aeroplano cuya masa no varía, aparecen en los cálculos de Lanchester diferenciales del peso no nulos $dW \neq 0$ y diversas atribuciones de valores a cantidades *evanescentes*, y relaciones cuantitativas entre ellas, que dificultan el seguimiento de la argumentación. Para fijar la condición límite de estabilidad iguala el efecto estabilizador de la variación de la resistencia, calculado según el método de las trayectorias Fugoides, con el efecto desestabilizador del momento de inercia, analizado a partir de consideraciones conceptuales sobre los factores que afectan al equilibrio del momento de cabeceo. Es llamativo que establezca la ecuación de estabilidad mediante consideraciones que ligan la inercia con la resistencia aerodinámica. Pensamos que se puede afirmar que Lanchester aplica un cierto tipo de proceso heurístico, con base en el fenómeno real, no fácil de asimilar para una persona superficialmente inmersa en el conocimiento de las causas físicas que influyen en el fenómeno.

La razón por la que Lanchester, a pesar de trabajar “*por bloques relativamente discontinuos, o incluso heterogéneos, del movimiento*” obtiene resultados correctos se nos hará algo más evidente cuando estudiemos el trabajo de Bryan [13], que obtiene casi la misma ecuación, salvo pequeños detalles, a partir del Discriminante de Routh del polinomio característico del sistema lineal completo. Es decir, con ausencia absoluta de razonamientos basados en principios físicos.

La fórmula que expresa la condición de estabilidad a la que llega Lanchester, con la nomenclatura del Anexo A de esta capítulo, siendo γ la “pendiente natural” correspondiente al vuelo no propulsado, es:

$$\Phi = \frac{(xCA_2 - xCA_1) V_0^4 \tan \gamma}{g^2 I_{yy} \left(\frac{1}{\rho c_1 C S_1 \alpha} + \frac{1}{\rho c_2 C S_2 \alpha (1 - \partial \varepsilon \partial \alpha)} \right)} > 1 \quad [11.15]$$

Es digno de mención el hecho de que supone distintos valores para la constante¹³¹ $c(AR)$, según se trate del ala principal (S1) o de la cola (S2). Asimismo, incluye un factor que es consecuencia de la desviación de la corriente $(1 - \partial \varepsilon \partial \alpha)$. La distancia entre los centros de presión de las dos alas es $(xCA_2 - xCA_1)$.

Si suponemos idénticos los coeficientes aerodinámicos, y nula la desviación de la corriente, se puede también escribir como:

$$\Phi = \frac{\rho c C \alpha V_0^2 (xCA_2 - xCA_1) V_0^2 \tan \gamma}{g^2 I_{yy} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right)} > 1$$

Es decir:

¹³¹ Siendo $AR = b^2/S$, con b = envergadura alar y S la superficie de referencia del aeroplano.

$$\frac{\rho c C \alpha S_1 V_0^2 (xCA_2 - xCA_1) V_0^2 \tan \gamma}{g^2 I_{yy}} > \frac{S_1 + S_2}{S_2}$$

Y si se tiene en cuenta la condición de vuelo estacionario:

$$\left(\frac{V_0^2}{g} \right) > \left(\frac{S_1 + S_2}{S_2} \right) \left(\frac{I_{yy}}{m} \right) \frac{1}{(xCA_2 - xCA_1) \tan \gamma}$$

O también:

$$\frac{m^2}{\rho I_{yy}} > \left(\frac{S_1 + S_2}{2(xCA_2 - xCA_1)} \right) \left(\frac{S_1}{S_2} \right) \left(\frac{CL_\alpha \alpha}{\tan \gamma} \right) \quad [11.16]$$

Esta es una condición de estabilidad equivalente a la que obtendrá Bryan [11] en 1911, tres años después de Lanchester, si se supone que el ángulo de ataque α es igual que el de la “pendiente natural” de la trayectoria γ .

Obsérvese que, para afirmar la igualdad de ambas condiciones, Bryan supone que el ángulo de incidencia aerodinámica -el ángulo que genera sustentación- es igual a la “pendiente natural”, lo que en principio no es generalizable, pero es verdad que ambos ángulos serán normalmente pequeños. También supone que los coeficientes aerodinámicos de las dos superficies tienen el mismo valor, y que no hay desviación de la corriente.

Incorporando el conocido valor aproximado $\tan \gamma \approx CD/CL$ para el vuelo de planeo expresado en formato actual, tendríamos, como expresión alternativa para la condición de estabilidad de Lanchester:

$$\frac{2m^2}{\rho I_{yy}} \left(\frac{CD}{CL^2} \right) \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \left(\frac{xCA_2 - xCA_1}{S_1 + S_2} \right) > 1$$

La expresión de Lanchester es más completa que la de Bryan, pues tiene en cuenta algunos de los factores que influyen realmente en la estabilidad, y que no autorizan las simplificaciones que Bryan en 1911 aceptará para mantener niveles bajos de *turbulencia algebraica*, razonablemente aceptables para la manipulación humana. En esa misma medida, los resultados de Bryan se alejarán de la aplicabilidad real. No obstante, debido al modo operativo de Lanchester, que evita el uso de la ecuación diferencial correspondiente al momento de cabeceo, no obtendrá ni implícita ni explícitamente las oscilaciones del corto período, a pesar de que estas “*están sumergidas*” en su modo heurístico de razonar la condición de estabilidad y no andarán lejos de factores en los que aparece la inercia del aeroplano. Obsérvese que esta condición de Lanchester ofrece una curiosa y atractiva mezcla de parámetros geométricos, aerodinámicos, inerciales y de condiciones de vuelo.

Veamos la Ecuación de Estabilidad de Lanchester desarrollada:

$$\Phi = \frac{mV_0^2 \tan \gamma \left\{ (xCA_2 - xCA_1) \left(\rho V_0^2 S_2 CL_{\alpha_2} \alpha (1 - \partial \varepsilon \partial \alpha) \right) \right\}}{g I_{yy} \left(\rho S_2 V_0^2 CL_{\alpha_2} \alpha (1 - \partial \varepsilon \partial \alpha) + \rho S_1 V_0^2 CL_{\alpha_1} \alpha \right)} > 1$$

En ella pueden identificarse algunos elementos con sentido físico claro, por ejemplo, la aceleración angular causada por la superficie de cola es:

$$\Delta\ddot{\theta} \approx \frac{\{(xCA_2 - xCA_1)(\rho V_0^2 S_2 CL_{\alpha_2} \alpha (1 - \partial\epsilon\partial\alpha))\}}{I_{yy}}$$

Y la sustentación total generada por el ala junto con la cola, teniendo en cuenta que el ángulo α solamente es activo en la cola cuando hay oscilaciones debido a la particular elección del sistema sustentador que ya hemos mencionado, será:

$$L + \Delta L \approx (\rho S_2 V_0^2 CL_{\alpha_2} \Delta\alpha (1 - \partial\epsilon\partial\alpha) + \rho S_1 V_0^2 CL_{\alpha_1} (\alpha + \Delta\alpha))$$

Con todo lo anterior llegamos a:

$$m \left(\frac{CD}{CL} \right) \Delta\ddot{\theta} > g \rho S_1 CL_{\alpha_1} \left(1 + \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \left(\frac{CL_{\alpha_2}}{CL_{\alpha_1}} \right) (1 - \partial\epsilon\partial\alpha) \right) \quad [11.17]$$

Cuyas dimensiones físicas parecen sugerir algo aparentemente tan peregrino como que “*La aceleración angular de la fracción de la masa retardante del avión causada por el momento aerodinámico de la cola ante un incremento del ángulo de ataque, debe ser superior a la aceleración lineal de una cierta cantidad de masa equivalente, establecida según los parámetros que fijan la sustentación del ala y de la cola, ante ese mismo incremento de ángulo de ataque generado por una ráfaga o por cualquier otra razón*” Naturalmente, no nos atrevemos a considerar esta “interpretación” como dotada de sentido físico claro. Casi contemporáneamente, Soreau llegará a una conclusión similar (Cap. 12).

Como muestra de la utilidad de la Ecuación de Estabilidad, Lanchester la aplica a algunos casos de aves y aeroplanos. Mencionemos también que Lanchester solamente considera estrictamente aplicable la Ecuación de Estabilidad a trayectorias oscilatorias de muy pequeña amplitud.

El autor recoge en un anexo de su libro [2] la Teoría de la Estabilidad Longitudinal que desarrolló en su patente 3608 (1897) y que es la base de la que desarrolla aquí.

Posteriormente [21] desarrollará un concepto de Inestabilidad Catastrófica y Notas sobre Estabilidad y Control que no añaden nada relevante a lo ya descrito.

11.3.2.4. Ejemplo de aplicación. Análisis de la estabilidad de un planeador de Otto Lilienthal.

Elegimos ahora, para ilustrar con un ejemplo el proceso de aplicación de la Condición de Estabilidad de Lanchester, un caso que él mismo consideró particularmente interesante.

Las características del planeador (Figura 11.4) fueron tomadas por Lanchester directamente de un modelo adquirido¹³² a Lilienthal, y adecuadamente completadas¹³³.

$$CL_{\alpha 1} \approx 3.26 \quad CL_{\alpha 2} \approx 2.28 \quad \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \approx -0.56$$

Es importante notar que Lanchester introduce una estimación geométrica del ángulo¹³⁴ β a partir del ángulo de la tangente respecto de la cuerda alar en el borde de ataque del perfil y evalúa el ángulo γ y la velocidad según los datos aportados por los vuelos del aeroplano: $\tan \gamma = 0.18$; $V_0 = 10.36 \text{ m/s}$

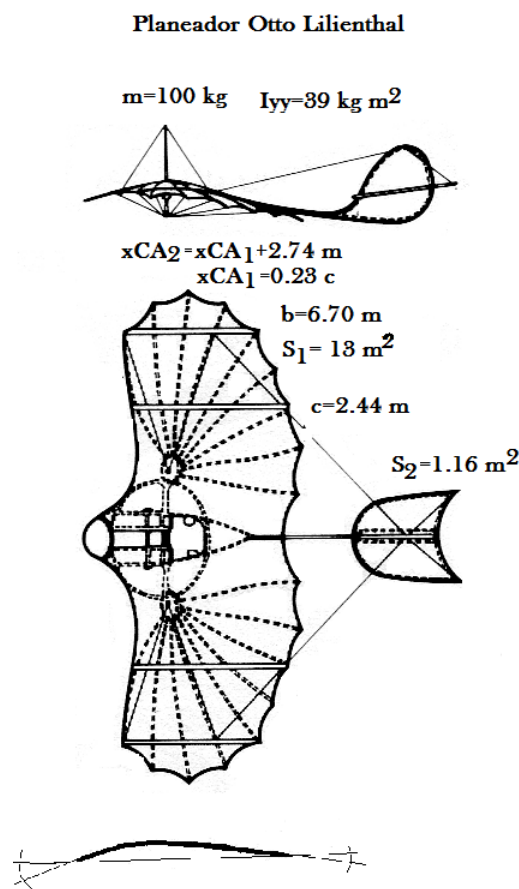


Figura 11.4: Modelo de Planeador de Otto Lilienthal estudiado por Lanchester.

Con estos datos Lanchester llega a un valor para el factor de estabilidad de $\Phi \approx 0.4 < 1$ Por lo tanto, de acuerdo con su teoría, el avión de Lilienthal sería inestable. La teoría de Lanchester supone que el centro de presión del ala delantera coincide con el

¹³² Propiedad de T. J. Bennet, de Oxford [2].

¹³³ Para la ubicación de los centros aerodinámicos de las superficies S1 y S2, y del Punto Neutro se ha utilizado un sencillo programa Vortex_Lattice.

¹³⁴ Una particularidad de la teoría aerodinámica de Lanchester. Ver Anexo A.

centro de gravedad y que la cola no asume carga sustentadora, sino solamente estabilizadora.

11.3.2.5 Comentario

(1) Actualmente estableceríamos la estabilidad estática del planeador del modo siguiente, tomando como origen el centro de gravedad, y eje X según la figura:

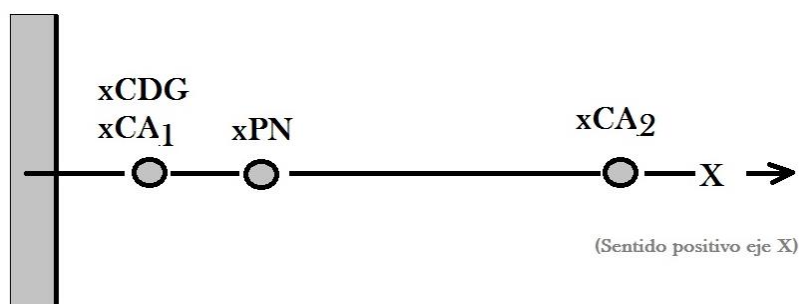


Figura 11.5: Ubicación de los centros aerodinámicos del ala (xCA_1), de la cola (xCA_2), del centro de gravedad ($xCDG$) y del Punto Neutro (xPN). (En este caso $xCDG$ coincide con xCA_1).

$$x_{CDG} = x_{CA_1} = 0$$

$$x_{PN} = \frac{CL_{\alpha_1} x_{CA_1} + CL_{\alpha_2} x_{CA_2} \frac{S_2}{S_1} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)}{CL_{\alpha_1} + CL_{\alpha_2} \frac{S_2}{S_1} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)} = \frac{CL_{\alpha_2} x_{CA_2} \frac{S_2}{S_1} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)}{CL_{\alpha_1} + CL_{\alpha_2} \frac{S_2}{S_1} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)}$$

$$CM_{\alpha} = \left(CL_{\alpha_1} + CL_{\alpha_2} \frac{S_2}{S_1} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) \right) (x_{CDG} - x_{PN}) = -CL_{\alpha_2} x_{CA_2} \frac{S_2}{S_1} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)$$

Por tanto, vemos que no hay razón para declararlo estáticamente inestable, salvo que se prescindiera, como en algunos de los modelos de Lilienthal, del empenaje posterior, en cuyo caso se anula el $CM_{\alpha} = 0$ y todo depende de la pericia del piloto para, moviendo su cuerpo, situar el centro de gravedad del aeroplano del modo adecuado al movimiento pretendido. Este tipo de control es precario, como hemos visto en el Cap. 5.

(2) Si analizamos, de modo simplificado, la estabilidad dinámica correspondiente al modo que vincula la inercia con la estabilidad, tenemos:

$$[e1] \quad I_{yy} \ddot{\theta}(t) = k \left(CM_{\alpha} \theta(t) + \frac{2c}{V} CM_q \dot{\theta}(t) \right) \quad \text{con: } k = \frac{1}{2} \rho c S V^2$$

Los dos autovalores son:

$$s_{1,2} = \frac{\rho c^2 S V}{2 I_{yy}} CM_q \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 I_{yy} CM_{\alpha}}{c^3 S \rho CM_q^2}} \right)$$

Los valores habituales para las derivadas aerodinámicas CM_α , CM_q en aviones convencionales con cola posterior, son:

$$CM_\alpha = \left(CL_{\alpha 1} + CL_{\alpha 2} \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) \right) \left(\frac{x_{CDG} - x_{PN}}{c} \right);$$

$$CM_q = 2CL_{\alpha 2} \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \left(\frac{x_{CDG} - x_{CA t}}{c} \right)$$

Consecuencias:

- Siempre que la cola esté por detrás del CDG entonces $CM_\alpha < 0$
- Si, a la vez, el radicando de los autovalores es negativo: $\left(1 + \frac{2I_{yy}}{c^3 S \rho} \frac{CM_\alpha}{CM_q^2} \right) < 0$ el movimiento será una oscilación amortiguada.
- Si, a la vez, el radical de los autovalores es positivo, pero menor que la unidad, $\sqrt{1 + \frac{2I_{yy}}{c^3 S \rho} \frac{CM_\alpha}{CM_q^2}} < 1$ el movimiento será también amortiguado, pero sin oscilaciones.
- Cualquier otra posibilidad da lugar a un movimiento inestable.

Esto nos permitiría aquilatar los detalles de nuestras conclusiones.

Observamos que los parámetros aerodinámicos, geométricos y de inercia son verdaderamente los que influyen en la determinación de la estabilidad, tal como indica Lanchester, pero de una manera algo más articulada de la que él considera.

11. 4 Consideraciones Críticas.

(1) Para poder considerar coherente el tratamiento de la estabilidad a partir de las trayectorias Fugoides, hubiera sido conveniente incluir la ecuación correspondiente al momento de cabeceo. Desde este punto de vista, más que una teoría cuantitativa de la estabilidad, Lanchester ha desarrollado una muestra del aspecto que podrían ofrecer algunas trayectorias conservativas de un planeador que tuviese la característica de ser estable.

(2) Lanchester considera que mientras las hipótesis aceptadas mantengan su validez solamente un caso presenta indeterminación respecto de la estabilidad. Como ya se ha mencionado, se trata de la trayectoria circular que presenta cúspides o puntos de retroceso. Precisamente en ese punto, cuyo radio de curvatura es nulo, Lanchester supone que el planeador debe ser “artificialmente girado”.

(3) La interpretación que ofrece Lanchester para asignar carencia de estabilidad a esta trayectoria descansa en el supuesto de que el planeador -en la cúspide de su trayectoria semicircular- comenzará a volar en sentido contrario a aquella para la que ha sido diseñado, y esto debe interpretarse como: “denotando que se han excedido los límites de estabilidad”.

A través de esta peculiaridad define la inestabilidad como asimilada a movimiento de retroceso del planeador, aunque no dice que sea este el único modo posible de ser inestable.

(4) Afirma Lanchester que a mayor velocidad de vuelo en horizontal, mayor estabilidad. Esta afirmación proviene del estudio que Lanchester realiza sobre la influencia de las ráfagas tangenciales a la trayectoria del planeador: el efecto aerodinámico de una ráfaga horizontal equivale a un incremento de velocidad, con lo que se produce una modificación de los parámetros de integración que permiten obtener la trayectoria. Esta podría eventualmente aproximarse a la que Lanchester considera peligrosa. El riesgo es menor cuanto mayor sea H_N , pues entonces es menor la probabilidad de afectarla seriamente y llegar a anular la constante C.

(5) Lanchester aludirá a diversos factores de amortiguamiento de la dinámica oscilatoria que estudiará más adelante y cuyo efecto global se resume en reducir la peligrosidad que atribuye a las trayectorias ondulantes: la inercia y la resistencia aerodinámica.

(6) Respecto de la Ecuación de Estabilidad que Lanchester deduce del modo que ya ha sido comentado, se puede mencionar que es un notable intento de solucionar un aspecto importante del vuelo artificial, que requeriría seria atención por parte de los diseñadores. No obstante al no recoger en su formulación los factores realmente influyentes de un modo suficientemente preciso e indicar su correspondencia con la geometría real sin ambigüedades, no pudo alcanzar una significativa utilidad práctica.

11.5 Anexo. Introducción al Modelo Aerodinámico de Lanchester para la sustentación de un perfil.

La concepción de la aerodinámica de Lanchester [1], [14], [15], [16], vista retrospectivamente, es original. Veamos algunos elementos necesarios para interpretar correctamente la Ecuación de la Estabilidad.

- **Sustentación de un ala finita sometida a un ángulo de ataque pequeño.**

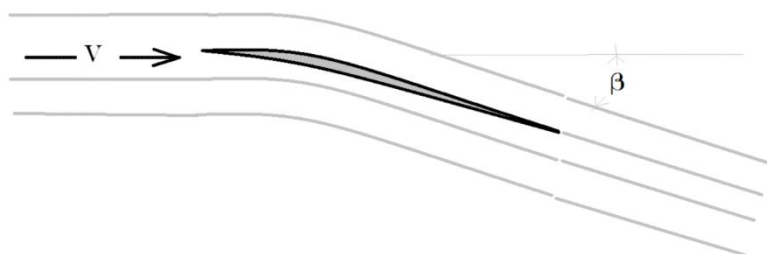


Figura 11.6: Definición del ángulo β según Lanchester.

- (1) Lanchester asume convencionalmente que la profundidad de la capa de aire afectada (desviada) por un plano de determinadas dimensiones depende de las

dimensiones lineales de ese plano y es independiente del ángulo de incidencia siempre que este sea pequeño. Le asigna un valor directamente proporcional al área del plano, medida esta sección recta y en sentido vertical: κS

- (2) Según Lanchester, Langley [3] ha efectuado mediciones superponiendo alas una encima de otras, en número relativamente elevado, y parece haber comprobado que a cierta distancia entre ellas ya no se producen interferencias. Encuentra en esto el fundamento para el particular concepto que acabamos de mencionar y que denomina “*Sweep*¹³⁵”, al que asigna un espesor del orden de 0.1 m (aprox. 4 pulgadas)
- (3) Asume también que las líneas de corriente siguen una trayectoria básicamente paralela al perfil de la superficie del plano. Así, la desviación de la corriente viene marcada directamente por la geometría del perfil alar.
- (4) Estas suposiciones le permiten establecer que la velocidad vertical de desviación, entre la “entrada en el perfil” y la salida, tiene el valor de $v \approx V \sin \alpha$, siendo la masa de aire afectada (por unidad de tiempo) por esta desviación la correspondiente a su “Sweep”: $\rho \kappa S V$
- (5) La sustentación, desde este punto de vista, sería el producto de la masa desviada por la desviación que ha sufrido: $\rho \kappa S V^2 \sin \beta$ (Fig. 11.6)

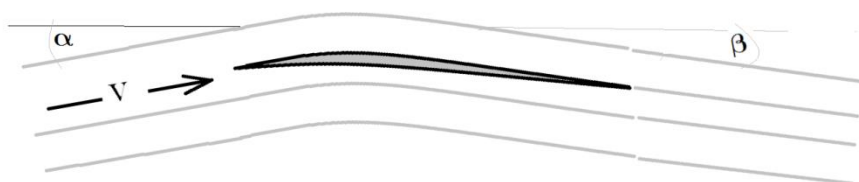


Figura 11.7: Definición de los ángulos β y α según Lanchester.

- (6) Debido a la aparición de un movimiento cíclico -concepto de la teoría de Lanchester que insinúa la idea matemática de “circulación”- el aire que se encuentra por delante del ala sufre un movimiento hacia arriba (Fig. 11.7). De aquí que pueda establecer que la sustentación generada es $\rho \kappa S V^2 \sin(\alpha + \beta)$. Este punto no aparece cuantificado con detalle en Lanchester, que es consciente de que hay puntos oscuros en su teoría.

¹³⁵ El concepto de “*Sweep*” está relacionado con la cantidad de masa que es desviada -acelerada- hacia abajo por un ala sustentadora. Este concepto llegó a ser popular entre los estudiosos, pero a pesar de los muchos ensayos aerodinámicos que se hicieron no resultó posible identificarlo cuantitativamente de modo experimental [22]

- (7) A la vez, sabe que los (múltiples) experimentos con placas planas permiten afirmar que, para ángulos pequeños, se cumple $P_\beta = P_{90^\circ} c(AR)\beta$, siendo $c(AR)$ una constante que no depende del ángulo de incidencia β sino del Alargamiento Alar AR. Dado que $F_{90^\circ} = KSV^2$, entonces:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} \approx \frac{c(AR) K}{\kappa} \Rightarrow \alpha \approx \beta \left(\frac{c(AR) K}{\kappa} - 1 \right)$$

- (8) Según esto, si se conocen los valores experimentales de $c(AR)$ y K , y se estiman los de κ a partir de ensayos con alas superpuestas, podemos calcular el valor del ángulo α causado por el movimiento “cíclico” del aire. Esto permitiría obtener el valor de la sustentación.
- (9) Lanchester es consciente de las incertidumbres que su teoría genera sobre las conclusiones a las que llega. Ha comprobado también que no resisten la comparación con algunos resultados experimentales disponibles, por otra parte algo erráticos. Sabe que el valor de la sustentación deberá proceder de la integración de la presión sobre el ala. No obstante, le parece que su teoría no desmerece si se la compara con otras teorías aerodinámicas más o menos vigentes de la misma época.

Bibliografía¹⁸⁶.

- [1] AERODYNAMICS, CONSTITUTING THE FIRST VOLUMEN OF A COMPLETE WORK ON AERIAL FLIGHT”. D. VAN NOSTRAND COMPANY. London. (1907).
- [2] AERODONETICS, CONSTITUTING THE SECOND VOLUMEN OF A COMPLETE WORK ON AERIAL FLIGHT. Archibald Constable & CO. LTD. Orange Street Leicester Square. London (1908)
- [3] Langley, S. P. “*Experiments in Aerodynamics*” (1903). Smithsonian Institution. No 801. Washington. (1902)
- [4] Mouillard, L. P. “L’empire de l’air; essai d’ornithologie appliquée a la aviation”. Masson Editeur, Librairie de l’Académie de Medicine, 120. Boulevard Saint-Germain. Paris (1881)
- [5] Kummer, E. E. “Über die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt ins besondere sauch auf die Geschosse”, Berlin. Bachdruckerei der Köningl. Akademie der Wissenschaften; (G. Vogt), Universitäts -strassen, 8, (1875).

¹⁸⁶ De un número elevado de citas Lanchester no menciona la fuente particular de donde la toma.

- [6] Joëssel. “Rapport sur des expériences relatives aux gouvernails”; Repport 9; “Mémorial du Génie Maritime”, (1873).
- [7] U.S.A.F. STABILITY AND CONTROL DATCOM, by Hoak & Alia. Flight Control Division. Air Force Flight Dynamics Laboratory. Wright-Patterson AFB. Ohio. USA. (1978)
- [8] F. W. Lanchester; Paper to the Birmingham Natural History and Philosophical Society (1894)
- [9] Pénaud, A. “L’ Aeroplane Automoteur avec équilibre automatique”. “L’Aéronaute”, Bulletin Mensuel International de la NAVIGATION AÉRIENNE; 5^o ANNEÉ, N^o 1-12 (1872) Paris.
- [10] Zhukowsky, N. E. “*On Soaring of Birds*” (22-10-1891). Boletín de la Sociedad Aeronáutica de Moscú. Núm. 1-3. (Reprint, de Bureau of Foreign Science and Technology, Berlin, 1922).
- [11] Ackroyd, J. A. D, Axcell, B. P. & Ruban, A. I.; “Early Developments of Modern Aerodynamics”. AIAA (Reston, USA) & Butterworth-Heinemann (Oxford, UK). (2001)
- [12] Langley, S. P. “Langley Memoir on Mechanical Flight”, Part. I (1887 to 1896). Smithsonian Contributions to Knowledge, Vol. 27, No 3. Washington, 1911.
- [13] Bryan, G. H. “Stability in Aviation”. “*An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motions of Airplanes*”. By G. H. Bryan¹³⁷, Sc. D., F. R. S. MACMILLAN AND CO., LIMITED. ST. MARTIN`S STREET, LONDON, 1911.
- [14] Lanchester, F. W. “Laws of Flight”. Paper read before the British Association of Dublin. (Sept, 8, 1908)
- [15] Lanchester, F. W. “Flight according to Lanchester”, Flight, May 22, 1909. (Págs. 292-298)
- [16] Lanchester, F. W. “Lanchester Hypothesis, Langley error and a review of their Theories”, Flight, Jun 19, 1909. (Págs. 357-359)
- [17] Jarrett, Ph; “F. W. Lanchester and the Great Divide”. Journal of Aeronautical History. Paper No. 2014/02.
- [18] Von Kármán, T.; “Lanchester’s Contributions to the Theory of Flight and Operational Research”; The First Lanchester Memorial Lecture; The Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 62, No 566. (1958)
- [19] Pénaud, A. L’ Aeroplane Automoteur avec équilibre automatique”. “L’Aéronaute”. NAVIGATION AÉRIENNE; 5^o ANNEÉ, N^o 1-12 (1872) Paris.
- [20] Marey, E. J. “La Machine Animale. Locomotion terrestre et aérienne”. Bibliothèque scientifique Internationale. Germer-Bailliére. Paris. (1882)
- [21] Lanchester, F. W. “The Flying-machine from an Engineering Standpoint. “JAMES FORREST” Lecture. (May 1914) Institution of Civil Engineers;

¹³⁷ Con la colaboración -dadas las características del texto, nada despreciable- de G. H. Harper.

- [22] Bloor, D. “The Enigma of the Aerofoil. Rival Theories in Aerodynamics 1909-1930”; Chicago Press. (2011).
- [23] Kingsford, P. W. “F. W. Lanchester. A Life of an Engineer”. Edward Arnold (Publishers) Ltd. London. (1960).
- [24] Garriga-Jové, X. “Enciclopedia de Aviación y Astronáutica”; Vol. 5.
- [25] Prandtl, L., “Wilbur Wright Memorial Lecture”; Journal of the Royal Aeronautical Society. No. 200. Vol. 31. (1927).
- [26] Bryan, G. H. “Aviation, Mathematical and Otherwise”. Nature. London. (1909).
- [27] “*The Longitudinal Stability of Aerial Gliders*”, Bryan, G. H. & Williams, W. E. “*Proceedings of the Royal Society. London*”, S. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).
- [28] Lamb, H. “HydroDynamics”, Cambridge University Press, (1879). (Ed. 1906)
- [29] Newton, I. “Philosophia Naturalis Principia Mathematica”; Prop. XXXIV; Book II. Enunciation. (1687).
- [30] Rankine, “Principles Relating to Stream Lines”; The Engineer, (Oct. 16, 1868) y Phil. Trans. London. (1864). Y también: “Miscellaneous Scientific Papers”, XXXIII.
- [31] Dines, “On Wind Pressure upon an inclined surface”. Proc. Royal Soc. (1890). “On the Variations of Pressure caused by the wind blowing across the Mouth of a Tube”; Quaterly Journal, Royal Mat. Soc. XVI, No 76. (1890); “Some Experiments made to Investigate the Connection between the Pressure and the Velocity of the Wind”, Quat. Journ. Royal Met. Soc. Vol XV, (1889). “Mutual Influence of two Pressure Plates upon each other”, Quaterly Journal, Royal Mat. Soc. XVI. (1890)
- [32] Allen, H. S. “~ *Normal Law of skin friction*”; Phil. Mag. (1900).
- [33] Maxim, H., “Century Mag.”, xlii, Págs. 829 y 836. (1891).
- [34] Poynting & Thomson, “Properties of the matter”; Cap. XVIII.
- [35] Love, “Theory of Discontinuous Fluid Motion”, Proc. Cambridge Phil. Soc. VII. (1891)
- [36] Stokes, “Stokes Scientific Papers”, Vol iii:
- [37] Thompson, J. J. “Motion of Vortex Rings”; Nature, XXIV, P. 47.
- [38] Love, “Theory of Discontinuous Fluid Motion”, Proc. Cambridge Phil. Soc. VII. (1891).
- [39] También menciona a O. Chanute, H. Phillips, Vince, O. Reynolds, Froude, Regnault, Hargraves, Boys, Runge, A. Santos Dumont y C. Darwin, sin indicar la Fuente concreta.

Capítulo 12

R. Soreau (1865-1935).



138

Contenido

12.1. Nota Biográfica

12.2. Documentos de Referencia.

12.3. Descripción de Contenido.

12.3.1 Forma de la función $f(\alpha)$

¹³⁸ <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b9031394j.thumbnail>. (14.06.2017)

12.3.2 Influencia del alargamiento alar.

12.3.2.1 Conclusión sobre la función $\lambda(\alpha)$

12.3.3 Sustentación y resistencia de una placa inclinada un ángulo pequeño.

12.3.3.1 Eficacia y Calidad de un ala.

12.3.4 Sobre el centro de presión.

12.3.5 Vuelo estacionario en un plano vertical.

12.3.5.1 Estudio del empenaje horizontal.

12.3.5.2. Mecánica del vuelo equilibrado.

12.4 Estudio de la Estabilidad de un aeroplano

12.4.1 Estabilidad Automática.

12.5 Consideraciones críticas.

Bibliografía.

12.1 Nota Biográfica.

Ingeniero por Escuela Politécnica de Paris, comenzó su carrera profesional en los ferrocarriles. Entusiasta de la aviación, será el primer titular de la Cátedra de Aeronáutica del Conservatorio de Artes y Oficios, presidente de la Sociedad Francesa de Navegación Aérea, presidente de la Comisión del Aeroclub de Francia y primer presidente de la Federación Francesa de la Aeronáutica (1929). Presidente de la Sociedad de Ingenieros Civiles de Francia, jugó un papel muy importante en la Asociación Francesa para el Avance de las Ciencias, y fundó la Federación de Sociedades, Asociaciones y Sindicatos de Ingenieros Franceses. Sus publicaciones fundamentales versan sobre la aviación, siendo cronológicamente la primera de ellas la estudiada aquí.

12.2 Documento de Referencia.

“*État actuel et avenir de l’aviation*”. (1908). Librairie des Sciences Aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS.

12.3 Descripción de Contenido.

Introducción.

Soreau acepta que la fuerza aerodinámica sobre un ala plana inclinada respecto de una corriente de aire, siendo α el ángulo de ataque, es expresable del modo siguiente, ya

visto anteriormente: $R = KSV^2 f(\alpha)$ La función $f(\alpha)$ será definida más adelante y Soreau acepta también *inicialmente* que R es normal a la placa.

En vuelo horizontal equilibrado (con pendiente de trayectoria nula¹³⁹, $\gamma = 0$) el equilibrado de la componente vertical del peso exige que se cumpla la condición:

$$mg = KSV^2 f(\alpha) \cos \alpha \quad [12.1]$$

Aceptando que α es pequeño, podemos suponer $\cos \alpha \approx 1$:

$$mg \approx KSV^2 f(\alpha)$$

La componente aerodinámica horizontal que se opone al movimiento será:

$$D = KSV^2 f(\alpha) \sin \alpha \quad [12.2]$$

Esto permite a Soreau estimar la potencia P necesaria para el vuelo:

$$P = DV = KSV^3 f(\alpha) \sin \alpha \quad [12.3]$$

Combinando las dos expresiones [12.1] y [12.3] y eliminando la velocidad V obtiene una expresión que relaciona la potencia (P) necesaria para el vuelo respecto al peso de la aeronave.

$$\begin{aligned} mg \approx KSV^2 f(\alpha) &\Rightarrow V = \sqrt{\frac{mg}{K S f(\alpha)}} \\ P = KSV^3 f(\alpha) \sin \alpha & \\ \frac{P}{mg} = V \sin \alpha &\Rightarrow \sin \alpha \sqrt{\frac{mg}{K S f(\alpha)}} \end{aligned} \quad [12.3]$$

Estos resultados fueron ya obtenidos por Pénaud.

12.3.1 Forma matemática de la expresión $f(\alpha)$.

Soreau descalifica¹⁴⁰ la expresión proporcional al seno cuadrado de α y adopta, de modo básicamente heurístico, la fórmula siguiente, producto de dos funciones de α :

$$f(\alpha) = \lambda(\alpha) \sin \alpha \quad [12.4]$$

¹³⁹ Se puede observar que, puesto que $\gamma = 0$ entonces $\theta = \alpha$. Pero esto es una particularidad del vuelo horizontal en un plano vertical. La expresión general sería $mg = KSV^2 f(\alpha) \cos \theta$. La aerodinámica es función de α , la geometría viene dada por la elección de los ejes, que fija la definición del ángulo θ de asiento longitudinal respecto de la línea de referencia horizontal.

¹⁴⁰ En las fechas en las que escribe Soreau, esa antigua expresión ya no es utilizada por nadie.

Observamos que el nuevo parámetro $\lambda(\alpha)$ introducido por Soreau equivale aproximadamente al coeficiente actualmente denominado CL_α pero con la particularidad de suponerlo función del ángulo de ataque.

De este modo, tendríamos, para la potencia necesaria para vuelo horizontal estacionario (Ref. Ec. 12.3):

$$\frac{P}{mg} = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\lambda(\alpha)} \frac{mg}{K S}} \quad [12.5]$$

Esto explica, afirma Soreau, la conclusión de Langley [4] respecto de la potencia necesaria para el vuelo estacionario, que resultaría ser decreciente a medida que aumenta la velocidad de vuelo y como consecuencia, puede disminuir α manteniendo la sustentación. Soreau menciona explícitamente lo erróneo de esta precipitada conclusión, que se debe a que Langley consideró irrelevante la resistencia parásita.

12.3.2 Efecto del alargamiento alar.

La importancia de la función $\lambda(\alpha)$ es grande y lamentablemente -afirma Soreau- hay una gran variedad de expresiones disponibles - "las hay para todos los gustos" [Pág. 30 y ss.]- precisamente porque los experimentadores han trabajado indistintamente con planos de muy diferentes formas, y se han aventurado a comparar resultados de experimentos que no son estrictamente comparables.

Para *planos cuadrados*, Soreau menciona dos fórmulas que son utilizadas con mucha frecuencia y que considera bastante ajustadas a la realidad, de las que ya se ha hecho mención en el Cap. 2:

- a. (Duchemin) $\lambda(\alpha) \approx \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha} \approx 2$
- b. (Renard) $\lambda(\alpha) \approx a - (a-1)\sin^2 \alpha \approx a$ (Soreau sugiere que un valor aceptable¹⁴¹ sería: $\lambda(\alpha) \approx a \approx 2$, pero no justifica esta elección)

Pero Soreau desea introducir una fórmula *racional* que tenga en cuenta todo el posible campo de observaciones, abarcando no solamente planos no cuadrados y grandes inclinaciones, sino también el efecto del alargamiento. Su aportación a este (en su época) discutido asunto es la siguiente:

¹⁴¹ El valor de $(CL_\alpha)_{AR=1}$ según la teoría ideal e incompresible es: $(CL_\alpha)_{AR=1} = 1.483$

$$\lambda(\alpha) = 1 + \frac{1 - m \tan \alpha}{\frac{1}{(1+m)^2} + \frac{2m}{1+m} \tan \alpha + 2 \tan^2 \alpha} \quad [12.6]$$

Con:

$$m = \frac{b-c}{b+c} = \frac{AR-1}{AR+1}$$

Para un ala rectangular, c es la cuerda y b es la envergadura. AR es el alargamiento, definido como $AR = b^2 / S$ siendo S la superficie de referencia alar.

Soreau menciona que esta expresión representa bien los puntos obtenidos por Langley [4] para alas de alargamiento elevado, como son las alas de los pájaros. Este tipo de alas representa -para Soreau- el caso más interesante para la aviación.

Como ejemplo para algunos casos particulares significativos tenemos, según la expresión de Soreau [12.6]:

Para alargamientos muy bajos (alas cuadradas) o muy elevados (2D), $\lambda(\alpha)$ no es constante sino función de α :

$$\lambda(\alpha)_{AR=1} = 1 + \frac{1}{1 + 2 \tan^2 \alpha} \Rightarrow \lambda(\alpha)_{AR=\infty} = \frac{5 + 8 \tan^2 \alpha}{1 + 4 \tan \alpha + 8 \tan^2 \alpha} \quad [12.7A]$$

Y para ángulos de ataque nulos, y alargamientos extremos:

$$\lambda(\alpha)_{\alpha=0} = 1 + \left(\frac{2AR-1}{AR+1} \right)^2 \Rightarrow \lambda(\alpha)_{\alpha=0, AR=1} = 2 \Rightarrow \lambda(\alpha)_{\alpha=0, AR=\infty} = 5 \quad [12.7B]$$

Puede verse que los valores que proporciona la fórmula de Soreau conducen a estimaciones no disparatadas, crecientes en exactitud con el alargamiento alar AR .

12.3.2.1 Conclusión sobre la función $\lambda(\alpha)$

Soreau considera que la dependencia de $\lambda(\alpha)$ respecto del ángulo de ataque, que en un régimen aerodinámico lineal normalmente no existe, puede tomarse como irrelevante, ya que se vuela siempre con incidencias pequeñas, y decide adoptar un cierto valor medio para $\bar{\alpha}$ que tomará como referencia para fijar $\lambda_0 \approx \lambda(\bar{\alpha})$. Las mediciones

directas que Soreau ha realizado en sus experimentos parecen confirmar que $\lambda(\alpha)$ apenas cambia con la incidencia.

Esto le lleva a pensar -aunque no es la única conclusión posible ni quizás tampoco la que actualmente tenderíamos a aceptar- que existe un ángulo de ataque del que apenas se apartan los aviones cuando vuelan de modo equilibrado. Soreau sabe que “*sic et simpliciter*” esto no puede ser correcto, pero el efecto práctico le parece pequeño. Estas afirmaciones no son sustanciadas por Soreau mediante cálculos numéricos o comparaciones con resultados experimentales.

12.3.3 Sustentación y Resistencia de un ala plana inclinada un ángulo pequeño.

Para la fuerza aerodinámica total, normal al plano del ala:

$$R = KSV^2\alpha = kSV^2\lambda_0\alpha \quad \text{con: } K = k\lambda_0 \quad [12.7C]$$

Obsérvese que la formulación que ofrece Soreau tiene un sentido moderno. Hasta el momento la expresión¹⁴² $R = KSV^2\alpha$ viene siendo utilizada (casi) universalmente para representar la fuerza aerodinámica normal a la placa, siendo la constante **K** la misma para todas las formas de superficie. Para Soreau esta constante no es tal, y depende de una auténtica constante **k** (con dimensiones físicas de densidad) y de un parámetro que tiene en cuenta la forma alar, aunque no todavía perfectamente estudiado y definido.

Las componentes de la fuerza aerodinámica total en la dirección del movimiento (Resistencia estrictamente hablando, “*D*”) y en dirección normal a la velocidad (Sustentación, “*L*”) son:

$$\begin{aligned} L &= KSV^2\alpha \cos\alpha \approx KSV^2\alpha \\ D &= KSV^2\alpha \sin\alpha \approx KSV^2\alpha^2 \end{aligned} \quad [12.8]$$

Soreau sabe que es posible que la perpendicularidad de la fuerza aerodinámica a la placa no sea rigurosa, y piensa que esto tendría poca repercusión en la sustentación, pero que influiría más seriamente en la resistencia que se opone al movimiento. Por esta razón tratará de analizar este aspecto con más detalle. Para ello introducirá un coeficiente adimensional “*r*” a través del cual trata de tener en cuenta la desviación de las líneas de corriente que ha podido observar en las fotografías tomadas por Marey [5], y que considera que no apoyan el modelo teórico de la estricta perpendicularidad.

¹⁴² Recordemos que “la fórmula típica” de la época para expresar la fuerza aerodinámica generada en una placa plana sometida a una corriente incidente era $F = KSV^2 \sin\alpha$, y que cuando $\alpha = \pi/2$, $F = KSV^2$. Pero las incidencias prácticas en aviación permiten transformarla en $F = KSV^2 \sin\alpha \approx KSV^2\alpha$. Con esta asunción, la fórmula transformada ya no sirve para calcular la fuerza normal a la placa con flujo perpendicular a la misma, pues $KSV^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq KSV^2 \frac{\pi}{2}$.

La expresión de la resistencia se ve modificada de la siguiente manera, mediante la aparición del nuevo factor “ r ”:

$$D_1 = KSV^2 \alpha \sin \alpha \approx rKSV^2 \alpha^2 \quad [12.9]$$

Por el momento no indica cómo se podría estimar el valor del coeficiente que acaba de introducir. Observemos que de alguna manera está haciendo referencia a lo que más adelante (en parte) se denominará “resistencia inducida”, causada por la inclinación de la sustentación. No obstante, la asimilación que acabamos de mencionar no es rigurosa, ya que Soreau se refiere a la inclinación de la resultante total y no solamente a la fuerza directamente sustentadora, que es la propiamente causante de la resistencia inducida.

A esto se debe añadir, según Soreau, que la resistencia debida al rozamiento del fluido no tiene por qué ser despreciable frente a la causada por los términos que dependen de α^2 . Esta nueva resistencia será sensiblemente proporcional al cuadrado de la velocidad, según muestran las experiencias de W. Froude [2]. Soreau la introduce mediante un coeficiente adimensional “ s ” del modo siguiente:

$$D_2 = sKSV^2 \quad [12.10]$$

Finalmente, sumando las dos resistencias aerodinámicas [12.9] y [12.10] obtiene la total:

$$\begin{aligned} L &= KSV^2 \alpha \\ D_{1+2} &= KSV^2 (r\alpha^2 + s) \quad \text{con : } K = k\lambda_0 \end{aligned} \quad [12.11]$$

Vemos que esta expresión se conforma bastante bien con la descripción actual de la Curva Polar, aunque todavía carece de la madurez conceptual que permitirá al cabo de unos años fijar con mayor rigor el significado físico de los coeficientes que intervienen en la expresión.

Soreau ha trabajado hasta ahora con perfiles planos. Se plantea ahora el problema de los perfiles con curvatura, que parecen más favorables, pues afirman algunos estudiosos que estos perfiles “*amplifican*” el valor de la sustentación. C. Ader [18] y O. Lilienthal [6] han investigado estos perfiles, al igual que los hermanos Wright [7], aunque en las fechas en las que escribe Soreau estos últimos no han publicado sus resultados. Soreau constata que, hasta el momento, no ha sido posible obtener ninguna ley general.

A partir de las tablas publicadas¹⁴³ por Otto Lilienthal [6], Soreau tratará de esclarecer el comportamiento de las alas con curvatura. El ala que estudia Lilienthal tiene forma en planta fusiforme y curvatura regular de $f = 1/12 = 0.0833$, tal como muestran la figura 12.1.

Según Lilienthal, la fuerza normal a la cuerda del ala es $N = 0.13 S V^2 \eta(\alpha)$ y la tangencial a la cuerda es $T = 0.13 S V^2 \theta(\alpha)$. Soreau realiza una transformación porque le interesan las componentes tangencial y normal a la velocidad del movimiento, y no al ala. Las fuerzas vienen dadas en forma de tabla de valores de $\eta_i(\alpha)$ y de $\theta_i(\alpha)$

Los gráficos de Lilienthal, sin mencionarlo explícitamente, dibujan la resultante aerodinámica siempre en el centro de la cuerda del ala, como hemos visto (Cap. 5).

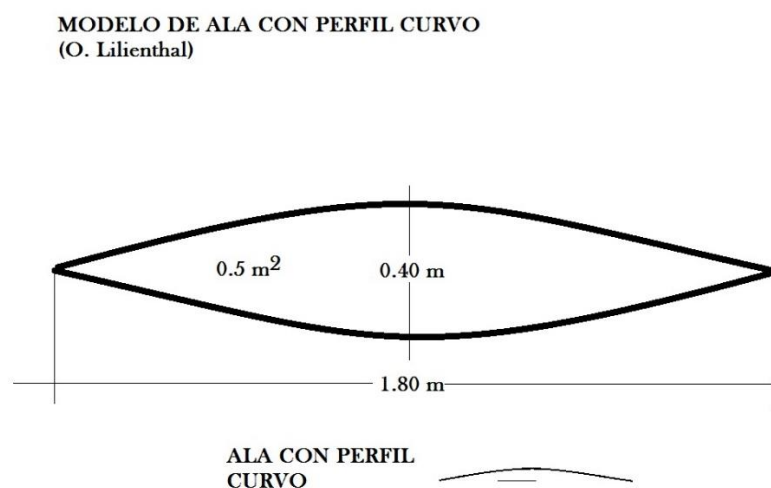


Figura 12.1: Modelo de ala (Forma en planta y perfil) ensayada por Lilienthal.

Tratando de ser algo más específicos, veamos el comportamiento de un ala tal como la de la figura 12.1, de forma en planta fusiforme y perfil curvo, que fue estudiada por Lilienthal, como ya se ha dicho. Las gráficas siguientes muestran la curva Polar y la Eficiencia Aerodinámica:

¹⁴³ Los experimentos de Lilienthal fueron efectuados mediante un brazo giratorio. Esto, y otros errores sistemáticos, limitaban la validez de los datos obtenidos por el ingeniero alemán. Lilienthal publicó unas tablas en las que aparecían los valores de $\eta(\alpha)$ y $\theta(\alpha)$ para ángulos de ataque desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = 90^\circ$

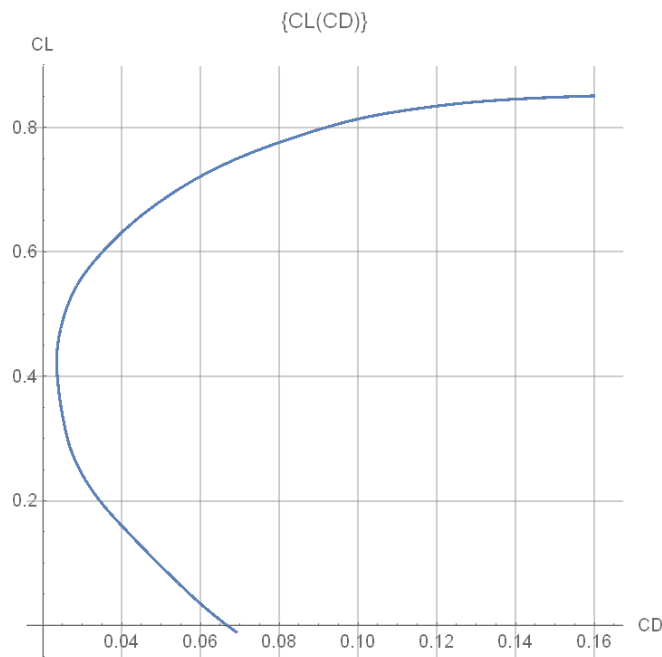


Figura 12.2: Curva Polar del ala de la Fig. 12.1

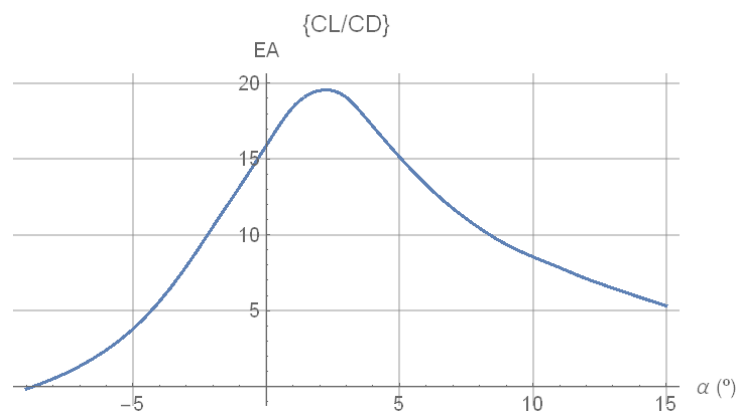


Figura 12.3: Eficiencia Aerodinámica del ala de la Fig. 12.1, correspondiente a las ecuaciones [12.12]

Una aproximación¹⁴⁴ razonable, con nomenclatura actual, podría venir dada por las siguientes expresiones para el coeficiente de sustentación y el de resistencia:

$$CL \approx 0.416 + 2.578 \alpha$$

$$CD \approx 0.0264 + 1.91835 \alpha^2$$

[12.12]

Soreau identifica, sobre las gráficas mostradas, un valor del ángulo de ataque para el cual la sustentación es nula y, explica que midiendo el ángulo de incidencia a partir del

¹⁴⁴ Calculada según [20] para la resistencia parásita, y según [21] para la inducida.

$\alpha = \alpha_{zL}$ de sustentación nula, y fijando la cuerda equivalente según ese ángulo, se pueden escribir para la sustentación y la resistencia expresiones análogas a las utilizadas para un ala plana.

$$\begin{aligned} Lift &= KSV^2 (\alpha - \alpha_{zL}) \\ Drag_{1+2} &= KSV^2 (r(\alpha - \alpha_{zL})^2 + s) \end{aligned} \tag{12.13}$$

Soreau conoce también un *efecto de succión* de borde de ataque, y sabe que este es más pronunciado en perfiles con curvatura que en alas planas. En un intento de elaboración de un concepto de “*ala plana equivalente a un ala con curvatura*”, se ve movido a introducir este efecto en forma de contra-resistencia al avance, es decir, una fuerza que se opone a la resistencia. Por esta razón –añade Soreau- la creencia generalizada de que los perfiles curvos aumentan la resistencia aerodinámica es errónea. La contra-resistencia provoca un empuje hacia adelante sobre el ala. Este empuje -dice Soreau- es independiente del ángulo de ataque y se debe exclusivamente a la curvatura, siempre que $\alpha < 10^\circ$, y –afirma- no tiene sentido *adelgazar* el ala cerca del borde de ataque.

Utiliza la expresión “*Resistencia Negativa*” para este efecto, y sugiere investigar cuidadosamente cómo debe ser el borde de ataque del ala para optimizarlo, y determinar el valor de la presunta constante “*r*”. Sugiere también medir la incidencia de un perfil curvo a partir de la de su plano equivalente, pues no le ve sentido hacerlo según la cuerda geométrica de un perfil curvo, establecida uniendo mediante una recta el borde de ataque con el borde de salida.

12.3.3.1 Coeficiente de Eficacia K y Calidad Q del ala.

Soreau propone introducir un parámetro μ que exprese la relación entre la sustentación de un ala particular, con curvatura o sin ella, y con la forma y dimensiones que se desee, respecto de la sustentación que daría un ala plana sin curvatura imaginaria de superficie igual a la total del ala real, sometida al mismo ángulo de ataque.

Esta relación, a partir de [12.11], es:

$$\mu = \frac{K}{k\lambda_0}$$

Luego $K = \mu k \lambda_0$.

Para ilustrar este nuevo concepto, Soreau se sirve de los datos que le proporciona la Ref. [3], a partir de los vuelos de los hermanos Wright en 1902 [8]. Soreau deduce que el alargamiento permite triplicar la fuerza de sustentación respecto de un ala cuadrada.

El coeficiente de Eficacia es: $Q = \mu\lambda_0$ Para Soreau este parámetro se convierte en una medida de la calidad del ala. El tratamiento parece algo confuso.

12.3.4 Sobre el Centro de Presión.

Soreau repasa las “*fórmulas antiguas*” para planos rectangulares y variaciones de α desde 0 hasta 90 grados, ya conocidas.

$$\text{G. Avanzini} \quad x_{CP}(\alpha) \approx c(0.2 + 0.3 \sin \alpha) \quad [12.14]$$

$$\text{Joëssel} \quad x_{CP}(\alpha) \approx c(0.195 + 0.305 \sin \alpha)$$

Son dos fórmulas prácticamente iguales. Soreau piensa que los experimentos que él ha realizado con placas cuadradas, en agua o aire, le han conducido a la siguiente expresión, válida para velocidades muy alejadas de la del sonido.

$$\frac{x_{CP}(\alpha)}{c} \approx 0.5 - \frac{1}{4(1 + 2 \tan \alpha)} \quad [12.15]$$

Para placas con curvatura, dice Soreau, “*es muy poco lo que se sabe respecto a la posición del centro de presión*”, que se comporta de un modo muy raro (Wright [7], Spratt [19], Eiffel [8]).

No obstante, para pequeños ángulos de incidencia, Soreau admite una variación lineal: $\frac{y_{CA}}{c} = (a - b \alpha)$ o bien $y_{CA} = l - m \alpha$ siendo $a, b, l,$ y m constantes positivas. Acepta, por tanto, fórmulas del tipo de las de Avanzini o Joëssel. (Ref. Fig. 12.4)

Soreau ofrece también la posición del centro de presión de un perfil de sector circular, pero en función de algunos parámetros vagamente definidos (Vid. Cap. 2), con un par de constantes de las que solamente se menciona que tiene que ver con la curvatura y el alargamiento.

12.3.5 Introducción al estudio del vuelo estacionario en un plano vertical.

Recordemos que, de acuerdo con una costumbre frecuente en los pioneros teóricos, en vuelo estacionario se le pide al empenaje trasero que realice una función estabilizadora, pero no sustentadora.

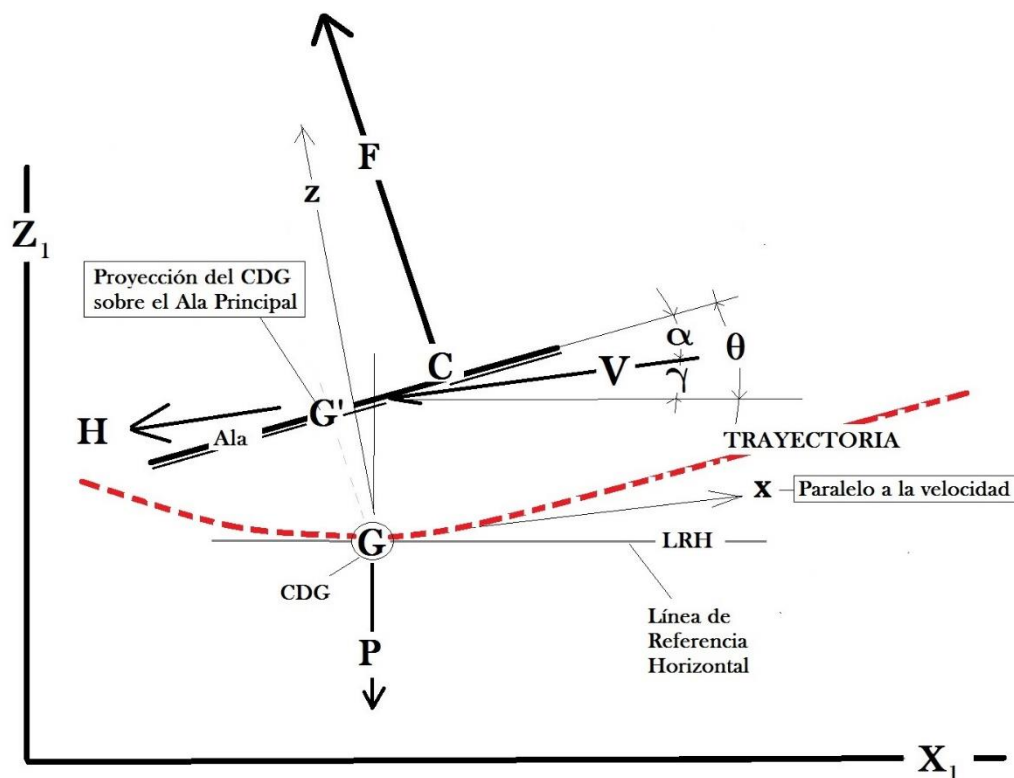


Figura 12.4: Esquema y nomenclatura para el análisis del vuelo no estacionario en un plano vertical.

Veamos las ecuaciones del equilibrio del vuelo estacionario en un plano vertical, ejes viento, con la notación que ha establecido Soreau (Fig. 12.4 y Eq. [12.11]), teniendo en cuenta que al plano principal hay que añadir el estabilizador trasero, deflectado un ángulo δ_t respecto del ala principal, siendo H la fuerza tangencial y F la normal:

$$H = KSV^2 r \alpha^2 + KSV^2 \left(s + \frac{K_t S_t}{KS} s_t \right)$$

$$F = KSV^2 \alpha + K_t S_t V^2 \delta_t$$

Las ecuaciones correspondientes a las fuerzas son:

$$[e1] \quad m \frac{dV}{dt} = T - H - mg \sin \gamma$$

$$[e2] \quad mV \frac{d\gamma}{dt} = F - mg \cos \gamma$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
 [e1] \quad m \frac{dV}{dt} &= T - KSV^2 r \alpha^2 - KSV^2 \left(s + \frac{K_t S_t}{KS} s_t \right) - mg \sin \gamma \\
 [e2] \quad mV \frac{d\gamma}{dt} &= KSV^2 \alpha + K_t S_t V^2 \delta_t - mg \cos \gamma
 \end{aligned}
 \tag{12.16}$$

El ángulo δ_t es el que forma el empenaje, que se supone posterior, con la línea de sustentación nula del ala principal. Soreau supone que las constantes K y las superficies S del ala y del empenaje son diferentes, lo que es acorde con la realidad habitual.

Soreau las abrevia introduciendo la notación: $K S \left(s + \frac{K_t S_t}{K S} s_t \right) = \varphi \sigma$ y supone pequeña la pendiente de la trayectoria γ . Así obtiene:

$$\begin{aligned}
 [e1] \quad m \frac{dV}{dt} &= T - KSV^2 \left(r \alpha^2 + \frac{\varphi \sigma}{KS} \right) - mg \gamma \\
 [e2] \quad mV \frac{d\gamma}{dt} &= KSV^2 \left(\alpha + \frac{K_t S_t}{K S} \delta_t \right) - mg
 \end{aligned}
 \tag{12.17}$$

La tercera ecuación del momento de cabeceo, imprescindible para el estudio de la estabilidad longitudinal, la escribe suponiendo tracción central¹⁴⁵ o muy aproximadamente así, y designando las dos coordenadas del centro de presión del ala por x_{CP} y z_{CP} , con una distancia L entre el centro de presión del empenaje, supuesto fijo, y el punto de aplicación de la sustentación alar; dado que esta distancia se supone grande respecto de las variaciones de posición del centro de presión, puede considerarse constante.

Esta ecuación será:

$$[e3] \quad I_{yy} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = K S V^2 \alpha x_{CP} + K S V^2 r \alpha^2 z_{CP} - K_t S_t V^2 \delta_t L$$

O también:

$$[e3] \quad I_{yy} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = K S V^2 (x_{CP} + r \alpha z_{CP}) \alpha - K_t S_t V^2 \delta_t L
 \tag{12.18}$$

A la ecuación [e3] de [12.18] incorpora las coordenadas del Centro de Presión, alguna simplificación suplementaria, y con la siguiente nomenclatura para situar las coordenadas del centro de presión:

$$x_{CP} = l - \alpha(h + m), \quad z_{CP} = h + \alpha(l - m \alpha) \quad \text{con } \alpha_0 \quad \text{tal que: } l - m \alpha_0 - (1 - r) h \alpha_0 = 0$$

¹⁴⁵ La línea de la tracción pasa por el CDG y no causa momento de cabeceo.

La ecuación [e3] de [12.18] queda finalmente:

$$[e3] \quad I_{yy} \frac{d^2\theta}{dt^2} = KSl\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) V^2 - K_t S_t \delta_t LV^2 \quad [12.19]$$

Puede verse que la relación que liga α_0 con δ_t es tal que permite controlar (y anular, si se requiere) el momento de cabeceo del avión. Teniendo esto en cuenta, y suponiendo condiciones de equilibrio estacionario en vuelo horizontal tenemos:

$$\begin{aligned} [e1eq] \quad 0 &= T - KSV^2 \left(r\alpha^2 + \frac{\varphi\sigma}{KS} \right) - mg \gamma \\ [e2eq] \quad 0 &= KSV^2 \left(\alpha + \frac{K_t S_t}{K S} \delta_t \right) - mg \\ [e3eq] \quad 0 &= KSl\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) V^2 - K_t S_t \delta_t LV^2 \end{aligned} \quad [12.20]$$

De la ecuación [e3eq] de [12.20] Soreau obtiene δ_t de equilibrio y lo sustituye en [e1eq] llegando a:

$$\begin{aligned} [e1eq] \quad T &= KSV^2 \left(r\alpha^2 + \frac{\varphi\sigma}{KS} \right) + mg \gamma \\ [e2eq] \quad mg &= KSV^2 \alpha \left(1 + \frac{l}{L} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \right) \\ [e3eq] \quad \delta_t &= \frac{KSl}{K_t S_t L} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \alpha \end{aligned} \quad [12.21]$$

Aunque la presentación difiere ligeramente de la actual, se puede ver que representa los conceptos físicos adecuados. Soreau explicará, a partir de la ecuación [e3eq], que es de la máxima importancia que el avión pueda alterar el ángulo de ataque con el que vuela, para adaptarlo a cada necesidad. Así, el empenaje deberá disponer de una parte móvil (“*gouvernail de profondeur*” o “*equilibrador*”) para poder modificar a voluntad α .

La creación de este dispositivo Soreau la atribuye a los Wright y lo califica de “elegante” y práctico, ya que permite modificar el ángulo de ataque conservando el beneficio constructivo de un ala principal fija. Así, la cola empenaje y la profundidad aparecen ambas en el mismo dispositivo; Soreau no se decide a considerarlo definitivamente mejor que dos superficies distintas, una para cada función, aunque, fijándose en las aves, tiene que admitir que en estas el empenaje es uno sólo y no es fijo.

De pasada, observa que hay pluralidad de soluciones para V, α, γ a partir de las ecuaciones de equilibrio, dentro de las limitaciones propias de los parámetros físicos y propulsivos.

Cuando δ_i es nula, lo que según el modelo de Soreau (que no tiene en cuenta la desviación de la corriente causada por el ala), indica sustentación nula del empenaje, existirá una velocidad de equilibrio -Soreau la denomina *velocidad de régimen*- y en ella se cumple que $\alpha = \alpha_0$

Se deduce de lo anterior que el centro de presión debe coincidir con la proyección del centro de gravedad sobre el plano equivalente. (Esta es una condición sistemáticamente presente en los primeros estudios sobre el equilibrado de los aviones).

Podrá lograrse, dice Soreau, mediante el manejo de la parte móvil del empenaje. Este órgano esencial permite al piloto, con un poco de práctica, (y al cabo de un cierto tiempo probablemente ya lo hará de modo intuitivo), mantener el avión equilibrado en todo instante, con una pendiente de la trayectoria y una velocidad estacionarias que vendrán dadas por:

$$\begin{aligned}
 [e1eq] \quad \gamma_0 &= \frac{T - KSV_0^2 \left(r\alpha_0^2 + \frac{\rho\sigma}{KS} \right)}{mg} \\
 [e2eq] \quad V_0 &= \sqrt{\frac{mg}{KS\alpha_0}}
 \end{aligned}
 \tag{12.22}$$

12.3.5.1 Estudio del empenaje horizontal.

Las características se deducen sencillamente de la ecuación [e3; 12.18] y no las desarrollamos ahora. Pero resulta obvia la eficacia de la deflexión del empenaje para controlar el momento de cabeceo:

$$[e3] \quad I_{yy} \frac{d^2\theta}{dt^2} = KSl\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) V^2 - K_i S_i \delta_i LV^2
 \tag{12.23}$$

Obsérvese que el término cuadrático en la velocidad adquiere automáticamente el signo correcto necesario para amortiguar la perturbación en α .

Como curiosidad, enumeramos sin comentario las Condiciones que Soreau considera favorables para la construcción de aviones de transporte de pasajeros. (Los denomina “*Aéroplanes navires*”):

- Dirección de vuelo coincidente con el eje de la hélice.
- Centro de gravedad no muy distante de la línea del eje de la hélice, con vistas a facilitar un planeo, por fallo motor, sin tener que modificar grandemente el equilibrado.
- Centro de presión del ala coincidente con la proyección vertical del centro de gravedad sobre el plano equivalente.
- Evitar la concentración de masas. (Momento de Inercia no demasiado pequeño).
- Empenaje horizontal alejado y dispuesto transversalmente en prolongación del eje de la hélice, de modo que pueda limitar las variaciones de la inclinación del avión.
- Ala rígida, por lo menos en su borde de ataque.

12.3.5.2 Mecánica del Vuelo en equilibrio.

Se trata de un estudio particular simplificado con el que Soreau muestra el modo de trabajar con las ecuaciones que ha establecido:

- c. La aportación del empenaje a la sustentación se considera irrelevante:

$$[e2eq] \quad mg = KSV^2\alpha \quad [12.24]$$

- d. La ecuación de la fuerza tangencial, incorporando la [e2eq] es:

$$[e1eq] \quad \frac{T}{mg} = \left(r\alpha + \frac{1}{\alpha} \frac{\varphi\sigma}{KS} \right) + \gamma \quad [12.25]$$

- e. De estas fórmulas Soreau deduce el *mecanismo* del vuelo de un avión en equilibrio:

- El ángulo de ataque viene fijado por el ángulo del empenaje horizontal, y la velocidad de vuelo también. Para un avión de ala fija la única manera de variar la velocidad es modificar el ángulo de ataque, ya que el producto $V^2\alpha = \frac{mg}{KS}$ debe ser constante. Mientras el ángulo de ataque se mantiene, la velocidad también.
- La pendiente de la trayectoria es igual al exceso de tracción con pendiente no nula, respecto de la tracción con pendiente nula, dividido por el peso:

$$[e1eq] \quad \gamma = \frac{T}{mg} - \left(r\alpha + \frac{1}{\alpha} \frac{\varphi\sigma}{KS} \right) \quad [12.26]$$

- Cuando la tracción es nula, la pendiente es:

$$[e1eq] \quad \gamma|_{T=0} = -\left(r\alpha + \frac{1}{\alpha} \frac{\varphi\sigma}{KS}\right) \quad [12.27]$$

- **Consecuencia I.**

Vuelo con mínimo esfuerzo de tracción.

Se tiene esta condición cuando es mínima la expresión:

$$\left(r\alpha + \frac{1}{\alpha} \frac{\varphi\sigma}{KS}\right) \quad [12.28]$$

Esto se produce para:

$$\left(\alpha_1 = \sqrt{\frac{\varphi\sigma}{rKS}}\right) \quad [12.29]$$

Este valor particular del ángulo de ataque es, según Soreau, muy importante y se trata de una característica propia del avión que no se ve afectada por el peso o por la altitud de vuelo, ya que contiene la relación $\left(\frac{\varphi}{K}\right)$.

Se observa también que este α_1 es el que produce la mínima pendiente de la trayectoria, lo que significa que es también el ángulo de ataque de máximo alcance horizontal en planeo desde una altitud dada.

- **Consecuencia II.**

Vuelo con mínima potencia.

Las ecuaciones para el cálculo de la potencia P necesaria son, con $\eta_m =$ rendimiento global de la propulsión:

$$[e2eq] \quad mg = KSV^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{mg}{KSV^2}$$

$$\frac{P}{mg} = \frac{TV}{\eta_m mg} = \frac{1}{\eta_m} \left(Vr\alpha + \frac{V}{\alpha} \frac{\varphi\sigma}{KS} + \gamma V \right)$$

$$\frac{P}{mg} = \frac{1}{\eta_m} \left(Vr \left(\frac{mg}{KSV^2} \right) + \left(\frac{mg}{KSV^2} \right) \frac{\varphi\sigma}{KS} + \gamma V \right) \quad [12.30]$$

$$\frac{P}{mg} = \frac{1}{\eta_m} \left(\frac{rmg}{KSV} + \frac{V^3}{mg} \varphi\sigma + \gamma V \right)$$

El valor de la velocidad, que indirectamente nos dará el del ángulo de ataque para condiciones de mínima potencia, viene dado la velocidad que anula la derivada respecto de V :

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{rmg}{KSV} + \frac{V^3}{mg} \varphi\sigma + \gamma V \right) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{rmg}{KSV^2} + \frac{3V^2}{mg} \varphi\sigma + \gamma \right) = 0$$

Se obtiene el ángulo de ataque de mínima potencia $\alpha_{\min Pot} = \sqrt{3} \alpha_1$

Estas relaciones, afirma Soreau, fueron establecidas por primera vez por Alphonse Pénaud en 1873 [9, 10, 11].

Menciona también que, independientemente de las investigaciones teóricas que puedan hacerse, el modo de averiguar “cosas” sobre el comportamiento típico y los parámetros característicos de un avión consiste en hacer ensayos sistemáticos con vuelos planeados en distintas condiciones. Efectivamente, dice, ese ha sido el camino seguido por muchos precursores: A. Pénaud, Col. Renard, O. Lilienthal, O. Chanute, F. Ferber, W&O Wright,... todos ellos, y muchos otros, comenzaron así.

12.4 Estudio de la Estabilidad de un aeroplano.

Todo lo anterior le sirve para introducir el tema de la estabilidad longitudinal. Para Soreau, “*La estabilidad es la tendencia a no amplificar más allá de todo límite el ángulo de desviación producido por una causa exterior*”. Equivale a centrarse en la estabilidad de cabeceo.

Los precedentes que menciona son G. H. Bryan y Williams [12] (1903) para la estabilidad longitudinal; cita también a Ferber (1907) [13] que estudió el caso general¹⁴⁶ y a M. Crocco [14], [15], que investigó la estabilidad de los dirigibles.

Soreau sabe que existen en el *ambiente aeronáutico* personas escépticas respecto a la posibilidad de analizar matemáticamente la estabilidad de un aeroplano. Para mostrar que esto no es imposible, y para introducir al lector en los desarrollos que seguidamente realizará, se detiene brevemente en el estudio de la estabilidad longitudinal de los dirigibles según el método de Crocco, del que afirma que ha logrado resultados prácticos importantes. En especial, ha logrado procedimientos para el dimensionado correcto de los empenajes: horizontal y vertical.

¹⁴⁶ Afirma Soreau: “*Este estudio (de Ferber), es de un virtuosismo muy real pero complicado, y no distingue las superficies sustentadoras de las que tienen como misión proporcionar un momento antagonista, tales como el empenaje; esta distinción me parece esencial. Resulta incluso muy conveniente indicar explícitamente (en las ecuaciones) la superficie del timón horizontal, con el fin de tener eventualmente en cuenta su acción, tal como hace M. Crocco con los controles de los globos dirigibles*” (R. Soreau, sobre el trabajo de F. Ferber [13]; Soreau piensa haber detectado errores algebraicos en los cálculos de Ferber.

Soreau muestra que, aunque para un dirigible la ecuación de estabilidad es de tercer grado (debido a que no es importante el cambio en velocidad respecto del que experimentan los ángulos), no puede decirse lo mismo de los aviones, ya que en estos la sustentación no es independiente de la velocidad ni puede suponerse tampoco para esta un valor cualquiera estacionario sin ligaduras con los ángulos de ataque, de asiento y del estabilizador horizontal.

12.4.1 Estabilidad Longitudinal Automática.

Las ecuaciones para el estudio de la estabilidad pueden ser escritas directamente, a partir de las Figuras Núm. 12.4 y 12.5, y así lo hace Soreau.

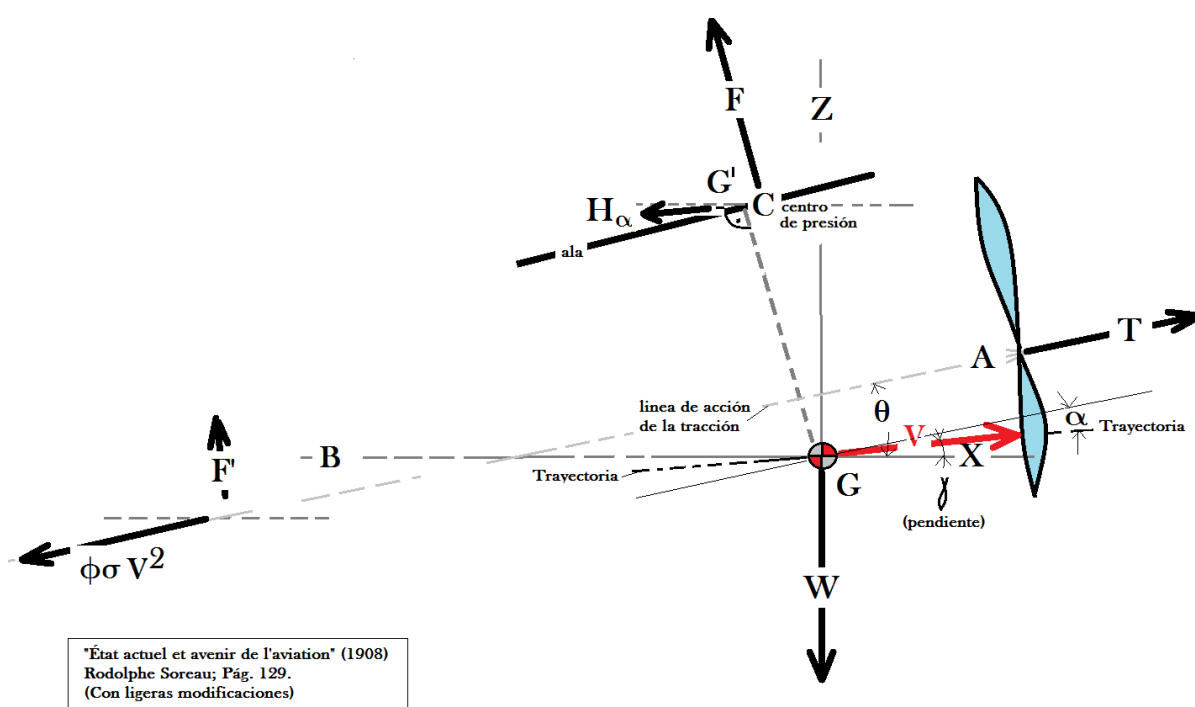


Figura 12.5: Esquema y nomenclatura para el análisis de la estabilidad de un aeroplano con propulsión en vuelo en un plano vertical.

Explicación de la nomenclatura. Ejes Horizonte Local GXZ.

Centro de masas: punto G,

Velocidad V,

Pendiente de trayectoria γ ,

Ángulo de ataque α ,

El centro de presión de la resultante aerodinámica en el ala está en el punto C,

La proyección del centro de masas G en el ala es el punto G',

La fuerza aerodinámica resultante normal a la placa es F y la normal a la cola F' ,

El asiento longitudinal del aeroplano es θ ,

La tracción de la hélice es T .

La situación del centro de presión es crítica para la comprensión del estudio de la estabilidad. Soreau lo expone de un modo detallado. Supone también, sin justificación¹⁴⁷, que $r \approx 1$. Siguiendo el proceso habitual de pequeñas oscilaciones, las ecuaciones generales perturbadas son:

$$\begin{aligned}
 \text{[e1 per]} \quad m \frac{d\Delta V}{dt} &= T - KS(V_0 + 2V_0\Delta V) \left(\alpha_0 + 2\alpha_0\Delta\alpha + \frac{\varphi\sigma}{KS} \right) - mg(\gamma_0 + \Delta\gamma) \\
 \text{[e2 per]} \quad mV_0 \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= KS(V_0 + 2V_0\Delta V) \left(\alpha_0 + \Delta\alpha + \frac{K_t S_t}{K S} \delta_t \right) - mg \\
 \text{[e3 per]} \quad I_{yy} \frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} &= KS(V_0 + 2V_0\Delta V) \left(\begin{aligned} &(l(\alpha_0 + \Delta\alpha) - (\alpha_0 + 2\alpha_0\Delta\alpha)(h+m)) + \\ &\dots + h(\alpha_0 + \Delta\alpha) + l(\alpha_0 + 2\alpha_0\Delta\alpha) - m(\alpha_0 + 3\alpha_0^2\Delta\alpha) \end{aligned} \right) - \dots \\
 &\dots - K_t S_t (V_0 + \Delta V)^2 \delta_t L
 \end{aligned}$$

[12.31]

Con $\Delta\gamma = \Delta\theta - \Delta\alpha \dots$

El resultado de este proceso conduce a la siguiente matriz M del sistema lineal:

$$M = \begin{bmatrix} -m(sL) + 2V_0(KS\alpha_0^2 - \sigma\varphi) & gm & -gm \\ 2KS V_0 \alpha_0 & mV_0(sL) + (KS + K_t S_t)V_0^2 & -mV_0(sL) \\ 0 & -(KLS + K_t L_t S_t)V_0^2 - mgh\alpha_0^2 & -I_{yy}(sL^2) + mgh\alpha_0^2 \end{bmatrix}$$

[12.32]

Los coeficientes del Polinomio característico de cuarto grado y el discriminante de Routh, con la simplificación de suponer $h \approx 0$ son:

¹⁴⁷ El valor de la constante "r" podría asimilarse a: $r \approx KCL_\alpha^2$. Para alas rectas de elevado alargamiento puede aproximarse mediante $r \approx \frac{\pi AR}{e_{oswald} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{AR}{2} \right)^2} \right)^2} \approx \frac{4\pi}{AR e_{oswald}}$. Así, el parámetro "r" efectivamente resulta ser del orden de la unidad.

$$A_0 = 2mgKS(KS_l + K_t S_t L)V_0^3 \alpha_0$$

$$A_1 = m2KSV_0^4(KS_l + K_t S_t L)\alpha_0^2$$

$$A_2 = K_t S_t m^2 L V_0^3 + 2I_{yy} K^2 S^2 V_0^3 \alpha_0^2 + KSV_0(lm^2 V_0^2 + 2I_{yy}(mg\alpha_0 + K_t S_t V_0^2 \alpha_0^2))$$

$$A_3 = mI_{yy} K(S + S_t)V_0^2$$

$$A_4 = I_{yy} m^2 V_0$$

$[R] =$

$$2I_{yy} K^3 L m^2 S S_t V_0^6 \alpha_0 \left(\begin{array}{l} -gI_{yy} Km(S + S_t)^2 V_0 + \dots \\ \dots + \alpha_0 \left(-2KLm^2 S S_t V_0^3 \alpha_0^2 + K(S + S_t)V_0 \left(\begin{array}{l} Lm^2 S_t V_0^2 + \dots \\ \dots + 2I_{yy} S \alpha_0 (mg + K(S + S_t)V_0^2 \alpha_0) \end{array} \right) \right) \end{array} \right)$$

En condiciones normales solamente plantea dudas respecto de la estabilidad el discriminante de Routh, que eventualmente podría ser negativo. Si desarrollamos el discriminante incorporando la condición de equilibrio, llegamos a la condición de estabilidad siguiente:

$$\left(\frac{Lm^2}{KI_{yy}} \frac{S_t}{S} (S + S_t) - 1 + \left(\frac{2(2S + S_t)}{(S + S_t)} - \frac{2Lm^2 S_t}{(S + S_t)^2 KI_{yy}} \right) \alpha_0^2 \right) > 0$$

Y si se considera despreciable la aportación en α_0^2 se obtiene la condición de estabilidad simplificada:

$$L > \frac{I_{yy} K (S + S_t)}{m^2} \left(\frac{S}{S_t} \right) \quad [12.33]$$

Merece la pena reproducir literalmente la interpretación que Soreau ofrece de la condición de estabilidad que ha obtenido: “*Au fond, le véritable caractère de cette condition de Stabilité est de donner une relation entre l’empattement¹⁴⁸ massique, mesuré par I_{yy} et l’empattement superficiel, mesuré par KSL (Pág. 138)*”. Soreau lo muestra, de alguna manera, mediante la relación siguiente:

¹⁴⁸ “*Empattement*” suele tener, en lengua francesa, el significado de distancia entre dos cosas... pero no se ve bien cómo se podría aplicar aquí, al compararse dos cosas que se miden con unidades muy diferentes.

$$\frac{KLS_t}{I_{yy}} \propto \frac{\text{"Empattement_Superficiel"}}{\text{"Empattement_massique"}}$$

$$\left(1 + \frac{S_t}{S}\right) \left(\frac{KS}{m}\right)^2 \approx \left(\frac{KS}{m}\right)^2 \propto \left(\frac{\text{"Surface_de_Voilure"}}{\text{"Masse_de_l'aéroplane"}}\right)^2$$
[12.34]

Soreau argumenta sobre la base siguiente: como la magnitud de las oscilaciones viene dictada por el momento de inercia, un modo de actuar sobre estas oscilaciones y modificarlas según los deseos del constructor, podría ser el modificar el juego relativo de las superficies y masa involucradas.

Esta condición de estabilidad, obtenida por Soreau en 1908, permanece algo confusa bajo una amplia capa de consideraciones sobre eventuales valores que pueden adoptar las diferentes variables geométricas, másicas, aerodinámicas etc... en los aviones de la época; pero por lo demás, es exactamente la misma que dedujo Lanchester [17], aproximadamente por las mismas fechas, y Bryan¹⁴⁹ [16] encontró tres años más tarde, aunque un cierto fárrago algebraico y la nomenclatura particular de cada autor no siempre permita detectarlo a primera vista.

12.5 Consideraciones críticas.

- (1) Soreau desarrolla una teoría del vuelo en un plano vertical que tiene en cuenta las ecuaciones de las fuerzas y del momento, y expresa adecuadamente los factores físicos involucrados; deduce también algunos “*teoremas*” básicos de la mecánica de vuelo estacionaria. También precisa el modo de actuar del empenaje horizontal para controlar el momento de cabeceo y, supuesta la estabilidad, el modo de ajustar el ángulo de ataque deseado. No considera la desviación de flujo ni los efectos de retardo dinámico sobre el empenaje horizontal. Las simplificaciones que admite son razonables y los ejemplos, de acuerdo con lo que los aviones de la época le ofrecían, son pertinentes.
- (2) Para el análisis de la estabilidad longitudinal parte de un marco conceptual simplificado en dos dimensiones, de modo que no trabaja con las ecuaciones completas y, en este sentido, su modelo abarca un horizonte más reducido que el de Ferber.

¹⁴⁹ En las páginas finales de “Stability in Aviation (1911) de Bryan, hay una somera crítica de los resultados de Soreau. Dice expresamente que para la dinámica longitudinal obtiene una ecuación de cuarto grado y condiciones de estabilidad “*análogas*” a las obtenidas por Bryan. No dice que sean las mismas. Por el contrario, cuando comenta los resultados obtenidos por Lanchester (1908), dice que las condiciones de estabilidad de Lanchester coinciden con las suyas (de Bryan). En realidad coinciden *aproximadamente* las tres versiones de la condición de estabilidad, siempre bajo los supuestos aceptados por el correspondiente autor. Ninguna de las tres resulta particularmente útil para el diseño de los aviones.

- (3) La condición de estabilidad que obtiene coincide con la deducida por Lanchester en 1908, pero es más transparente que la del inglés, pues parte de unos principios aerodinámicos claros, aplicados en forma de ecuaciones de la mecánica de un modo racional y sencillo. A partir de la fijación de las ecuaciones diferenciales del movimiento la manipulación matemática, algebraicamente un poco incómoda, carece de complicaciones conceptuales al aplicar un método muy frecuentemente utilizado para analizar el comportamiento de sistemas lineales.
- (4) Puede llamar la atención que este trabajo, contemporáneo del de Lanchester y Ferber, sea muy poco conocido actualmente. Ciertamente, tampoco resulta sencillo el empleo práctico directo de sus conclusiones.

Bibliografía

- [1] Soreau, R; “*État actuel et avenir de l’aviation*”, Librairie des Sciences Aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS. (1908).
- [2] Froude, W; “*Rapports présentés aux Lords Commissaires de l’Almirauté, etc...*”; (Mémorial du Génie Maritime, (1875).
- [3] Giradville, L. “Poids utile maximum que l’on peut soulever en aéroplane”. L’Aérophile, année 16, No 9. Paris. (1908).
- [4] Langley, S. P. “Experiments in aerodynamics”, Smithsonian contribution to Knowledge, No 801. Washington. (1902).
- [5] Marey, E. J. “La Machine Animale. Locomotion terrestre et aérienne”. Bibliothèque scientifique Internationale. Germer-Bailliére. Paris. (1882).
- [6] Lilienthal, O. “*Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Ein Beitrag zur systematik der Flugtechnik*”. R. Gaertners Verlagbuchhandlung. Berlin. (1889).
- [7] Wright, W & O “THE PAPERS OF WILBUR & ORVILLE WRIGHT” (VOL I; 1899-1905). MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. NEW YORK. (1953).
- [8] Eiffel, G. La Résistance de l’Air et l’Aviation”, Expériences effectuées au Laboratoire du Champ-De_Mars. H. Dunod et E. Pinat, Éditeurs. Paris (1910).
- [9] Pénaud, A. “*L’Aeroplan Automoteur avec équilibre automatique*”. L’Aéronaute”, Bulletin Mensuel International de la NAVIGATION AÉRIENNE; 5^o ANNEÉ, N^o 1-12 Paris (1872).
- [10] Pénaud, A. “*Lois du Glissement dans l’Air*”. L’Aéronaute”, Bulletin Mensuel International de la NAVIGATION AÉRIENNE; 6^o ANNEÉ, N^o 1 Paris (1873).
- [11] Pénaud, A. “*Sur la forcé des êtres volants*”. Communication faite á la Société Philomatique. Paris. (1876).

- [12] Bryan, G. H. & Williams, W. E. “*The Longitudinal Stability of Aerial Gliders*”, “*Proceedings of the Royal Society. London*”, S. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).
- [13] Ferber, F. “L’AVIATION, Ses debuts-son développement”. Berger-Levrault & Cie Éditeurs. Paris/Nancy. (1909).
- [14] Crocco, G. “Sur la Stabilité des Dirigeables”; Note á l’Académie dei Lincei, Nov. 1904 et Académie des Sciences, T. 139. Paris. Dic. (1904).
- [15] Crocco, G. “Étude sur la dynamique des ballons dirigeables”; Bolletino della societa aeronáutica italiana; (1907).
- [16] Bryan, G. H. “Stability in Aviation”. “*An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motions of Airplanes*”. MACMILLAN AND CO., LIMITED. ST. MARTIN`S STREET, LONDON, (1911).
- [17] Lanchester, F. W. AERODONETICS, CONSTITUTING THE SECOND VOLUMEN OF A COMPLETE WORK ON AERIAL FLIGHT. Archibald Constable & CO. LTD. Orange Street Leicester Square. London, (1908).
- [18] Ader, C. “Sur des appareils d’Aviation”; L’Aérophile, 6^e année, Nos. 6, 7 y 8. Paris. (1898).
- [19] Spratt, G. A. “Curvature a relative term”. Aeronautics, Vol. 2 No. 3 New York (1908).
- [20] U.S.A.F. STABILITY AND CONTROL DATCOM, by Hoak & Alia. Flight Control Division. Air Force Flight Dynamics Laboratory. Wright-Patterson AFB. Ohio. USA. (1978).
- [21] Katz, J. & Plotkin, A. “Low Speed Aerodynamics”, Cambridge University Press. (1991).

Capítulo 13

P. Painlevé (1863-1933)



Contenido

13.1 Nota Biográfica

13.2 Documentos de Referencia.

13.3 Descripción de Contenido.

13.3.1 Descripción del modelo aerodinámico

13.3.2 Estabilidad en vuelo de planeo de una placa plana

13.3.3 Vuelo estacionario en un plano vertical.

¹⁵⁰ https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/fotos/painleve_paul.jpg. (14.06.2017)

13.3.4 Estabilidad en ángulo de asiento longitudinal.

13.3.5 Estabilidad en velocidad.

13.4 Comentarios

Bibliografía.

13.1 Nota Biográfica.

Nació en París. Obtuvo el grado de Bachiller en Letras y en Ciencias en 1881. En la Escuela Normal Superior estudió cálculo con Bouquet y mecánica con Appell¹⁵¹. Se licenció en Ciencias Físicas y Matemáticas. Preparó su doctorado en Gotinga con Schwarz y Klein. Doctor en Ciencias matemáticas por la Facultad de Ciencias de Paris; a los 23 años fue profesor de mecánica racional de la Facultad de Ciencias de Lille. En 1890 ganó el premio de matemáticas de la Academia de las Ciencias. En 1895 impartió un curso en la Universidad de Estocolmo y en 1897 sucedió a Goursat (Cálculo Diferencial e Integral) en la Escuela Normal Superior. En 1900 fue elegido miembro de la Academia de las Ciencias. En 1905 deviene profesor de mecánica racional y de máquinas en la Escuela Politécnica de Paris. En el año 1909 se convirtió en el primer profesor de mecánica de la aviación en la escuela Superior de Aeronáutica, lo que da lugar al trabajo que analizaremos ahora.

A partir de 1910 abandona la enseñanza directa en razón de sus funciones políticas, sin dejar por completo su carrera académica: Titular de la cátedra de Mecánica Analítica (1912) y Mecánica Celeste (1920). En 1919 fue nombrado Presidente del Consejo de Administración del Conservatorio Nacional de Artes y Oficios. Sus trabajos matemáticos versan fundamentalmente sobre la Teoría Analítica de las Ecuaciones Diferenciales y sobre la Integración de las Ecuaciones de la Mecánica. Se dedicación a estudios aeronáuticos fue algo marginal. Dirigió la Tesis Doctoral de De Bothezat sobre la Estabilidad de los Aviones.

13.2 Documentación de referencia¹⁵²:

- (1) Painlevé, P. “*Cours de Mécanique et Machines*”; Théorie de L’ Aéroplane. Ecole Polytechnique de Paris. (1908)
- (2) Painlevé, P. “*L’Aeroplane*”; Compte Rendu de la 38^o Session. Association Francaise pour l’Avancement des sciences. Notes et Mémoires. Lille. (1909)
- (3) Painlevé, P & Borel, E. “*L’ Aviation*”, Librairie Félix Alcan. Paris. (1911)

¹⁵¹ Como curiosidad, mencionemos que el libro “Mecánica Racional” de Appell era texto de referencia en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos cuando el autor de estas líneas cursaba la carrera.

¹⁵² El contenido de las tres referencias, respecto de nuestro tema, es básicamente el mismo. No las diferenciaremos a lo largo del capítulo.

13.3 Descripción de contenido

13.3.1 Modelo aerodinámico

Inicialmente Painlevé describirá el modelo aerodinámico que asume, que él denomina “*Leyes de la Resistencia del Aire*”. Comienza descalificando el ya muy conocido modelo de Newton, que sugirió que la fuerza aerodinámica experimentada por una placa que forma un ángulo α con la corriente es de la forma: $R = \lambda \rho S V^2 \sin^2 \alpha$. En esta expresión λ designa un coeficiente numérico adimensional característico del fluido. Equivale a trabajar con $K = \lambda \rho$

Painlevé prefiere la fórmula $R = \lambda \rho S V^2 \sin \alpha$, que atribuye a Euler, y que considera ampliamente justificada por los experimentos, entre otros, de Borda [10] realizados entre 1790 y 1800. La primera teoría del aeroplano, establecida de modo rudimentario por Cayley [13], se apoyaba en esta expresión. A finales del siglo XIX es aceptada casi universalmente. Es menos clara la influencia de la forma en planta.

Con base en esta expresión Pénaud [9] describió en 1873 algunos resultados de su aplicación a los aeroplanos. Estos son mencionados por Painlevé, según el desarrollo adjunto, suponiendo que la superficie sustentadora es una sola placa plana¹⁵³ y trabajando con la “constante” K.

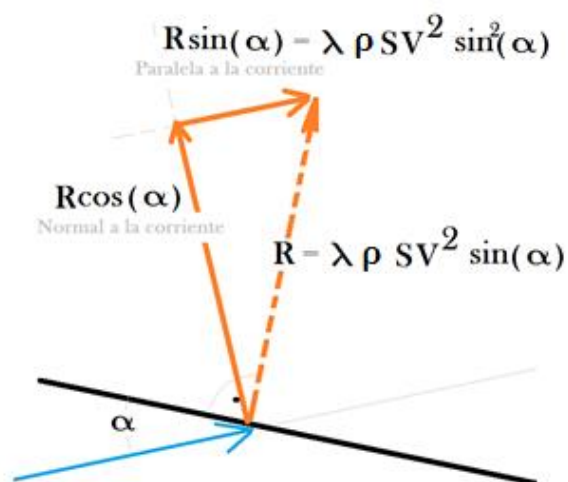


Figura 13.1: Esquema de placa sometida a una corriente con ángulo de ataque. Composición de Fuerzas.

¹⁵³ Painlevé dedica el apartado 14 de la referencia 13.2 (1) a estudiar la fuerza aerodinámica en un ala con curvatura, apuntando diversas explicaciones que considera defectuosas o insuficientes. No obstante, piensa que puede explicar con razonamientos físicos sencillos el aparente comportamiento anómalo del centro de presión (que denomina “Experimento de los Wright”). Asume, para estos perfiles curvos, el sistema equivalente establecido por Soreau [4] en su interpretación de las curvas de Lilienthal [11].

La sustentación -componente de fuerza normal a la velocidad-, con $K = \lambda \rho$ -será (Fig.13.1):

$$L = K S V^2 \sin \alpha \cos \alpha \approx K S V^2 \alpha \quad [13.1]$$

La Resistencia aerodinámica debida a la fuerza aerodinámica normal a la placa alar, será:

$$D_1 = K S V^2 \sin \alpha \sin \alpha \approx K S V^2 \alpha^2. \quad [13.2]$$

A esta resistencia se le añade una resistencia - actualmente la denominamos, de manera global, parásita- que Painlevé atribuye a la viscosidad y rozamientos del aire con las diversas superficies del aeroplano. Asigna esta resistencia complementaria fundamentalmente al fuselaje y la representa matemáticamente mediante el factor “ f ” adimensional:

$$D_2 = f K S V^2 \quad [13.3]$$

La resistencia total será la suma de ambas:

$$D_1 + D_2 \approx K S V^2 \alpha^2 + f K S V^2 \quad [13.4]$$

Painlevé hace notar que las constantes K y f , la segunda de ellas sin dimensiones, dependen ambas de la forma¹⁵⁴ de la superficie S . Esto resulta obvio mediante la siguiente comparación con la formulación actual, suponiendo una polar de coeficientes constantes y una superficie plana:

$$\begin{aligned} (1908) \quad R &\approx K S V^2 \alpha \\ (Actual) \quad R &= \frac{1}{2} \rho S V^2 C L_\alpha \alpha \sqrt{1 + \frac{C D^2}{C L^2}} \end{aligned} \quad [13.5]$$

De donde podemos deducir las correspondencias aproximadas contenidas en la constante K utilizada por Painlevé. De la ecuación de la sustentación obtenemos:

$$(1908) \quad K \Rightarrow (Actual) \quad \frac{1}{2} \rho C L_\alpha. \quad [13.6]$$

Comparamos también la resistencia aerodinámica:

$$(1908) \quad D \approx K S V^2 (\alpha^2 + f) \quad (Actual) \quad D \approx \frac{1}{2} \rho S V^2 \left(C D_0 + \frac{C L_\alpha^2 \alpha^2}{\pi A R e} \right) \quad [13.7]$$

¹⁵⁴ Esta observación, aparentemente hecha de pasada, esconde un factor importante que influye mucho en las características operativas de los aviones: la forma en planta alar NO es un aspecto secundario frente a la superficie, aunque en las fechas en las que Painlevé redacta su Curso (1908) no es todavía conocida con claridad la manera de cuantificar su influencia.

De donde obtenemos la equivalencia del factor f

$$f = \frac{\rho CD_0}{2K} = \frac{CD_0}{CL_\alpha} \quad [13.8]$$

La constante f es adimensional. En ambas constantes $-f$ y K se ve con claridad la dependencia respecto de la forma en planta del ala precisamente a través del CL_α . Un coeficiente que en esa época se muestra elusivo.

Si deseamos completar la comparación, incorporaremos la resistencia inducida en su forma corriente actual:

$$(1908) \quad D_1 \approx KSV^2\alpha^2 \quad (\text{Actual}) \quad D_1 \approx \frac{1}{2}\rho SV^2 \left(\frac{CL_\alpha^2 \alpha^2}{\pi AR e} \right) \quad [13.9]$$

De esta comparación obtenemos la relación siguiente, que subyace de modo implícito en los desarrollos de Painlevé, y que deforma los resultados que obtuvo.

$$(1908) \quad \left(\frac{CL_\alpha}{\pi AR e} \right) \Rightarrow 1 \quad [13.10]$$

Esta suposición se comprende en el contexto de la precariedad de la teoría aerodinámica del momento, y tiene el acierto de mostrar claramente la influencia positiva del alargamiento alar. Comparando ese resultado con el aceptado actualmente, para alas rectas (sin efectos de compresibilidad) vemos que tiende a sobrestimar su valor.

$$(1908) \quad CL_\alpha \approx \pi AR e \quad (\text{Actual}) \quad CL_\alpha = \frac{\pi AR}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{AR}{2} \right)^2}} \quad [13.11]$$

13.3.2 Estabilidad en vuelo de planeo de una placa plana.

Painlevé se plantea un problema: ¿Puede un cuerpo plano, abandonado en aire en calma, descender con un movimiento de traslación rectilíneo y uniforme? Si esto es así, las fuerzas aerodinámicas deben admitir una resultante igual y directamente opuesta al peso del cuerpo (representado por GP; Ref. Fig. 13.2). El CDG viene designado en la figura por la letra G.

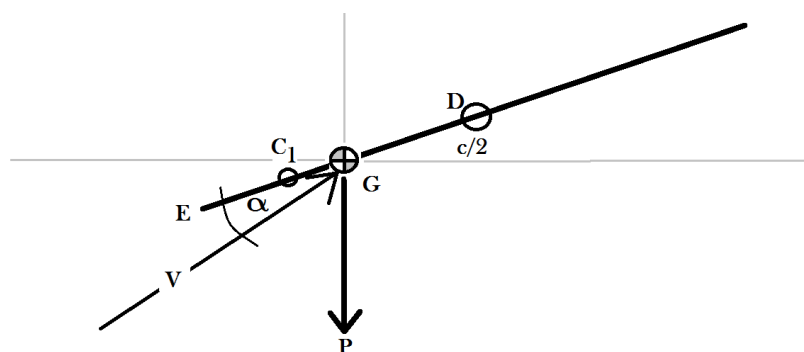


Figura 13.2: Placa en vuelo planeado. Estudio de la estabilidad.

Veamos este problema en el caso de que el cuerpo sea un rectángulo cuyo CDG está sobre una paralela a la línea “ED”, correspondiente al lado pequeño del rectángulo. El centro de la cuerda viene designado por la letra D. La velocidad es perpendicular al lado largo del rectángulo que es perpendicular al plano de vuelo. El movimiento del CDG se realiza en un plano vertical que contiene la posición inicial de “ED” y es evidentemente un plano de simetría de todo el movimiento: el punto G y la recta “ED” se moverán dentro de ese plano.

Suponemos que la recta “ED” se mueve paralelamente a sí misma con una velocidad V.

Admitamos que la fuerza aerodinámica es rigurosamente perpendicular a la placa. Para que estas fuerzas tengan como resultante opuesta el peso (“-GP-”) es necesario que:

(1) El centro de presión “ C_1 ” coincida siempre con el centro de gravedad “G” para que el momento de cabeceo sea nulo.

(2) Que el ángulo α que la velocidad V forma con la placa cumpla¹⁵⁵ la condición:
 $KS V^2 \sin \alpha = P$

La componente vertical de la velocidad será: $V_z = V \sin \alpha = \sqrt{\frac{P}{KS}} \sin \alpha$

A cada valor de α le corresponde una posición determinada del centro de presión C situado entre “D” y “ C_1 ”. Aquí “ C_1 ” designa un punto situado entre “E” y “D” y a una distancia¹⁵⁶ $EC_1 \approx \frac{1}{5} ED$. Se trata de un valor límite para $\alpha = 0$.

Para que el descenso planeado estacionario sea posible es necesario que “G”, o su proyección sobre el plano sustentador, esté comprendido entre “D” y “ C_1 ”, ya que los

¹⁵⁵ P designa el peso y S la superficie de la placa. Painlevé indica que se trata de un rectángulo alargado y en atmósfera normal. Se supone también que $\alpha < 30^\circ$.

¹⁵⁶ Esto se corresponde con la fórmula de Avanzini y Jöessel para la posición del centro de presión: $x_{CP} = \frac{c}{10} (2 + 3 \sin \alpha)$ midiendo x_{CP} desde el borde de ataque y siendo c la cuerda alar. Por esta razón, si $\alpha=0$
 $x_{CP} = \frac{c}{10} = \frac{ED}{5}$.

valores posibles de α lo exigen así. A cada posición de “G” le corresponde un solo y único valor de α y este es tal que “G” coincide con “C”. Por tanto, a toda posición de “G” entre “D” y “C₁” corresponde un régimen de caída en planeo y solamente uno. El valor de V viene determinado por la ecuación $KS V^2 \sin \alpha = P$.

Cuanto más cerca esté el punto “G” del punto “C₁”, menor será la pendiente de descenso, mayor la velocidad de vuelo y menor la velocidad vertical.

Estas consideraciones relativas a una sola placa en vuelo de planeo, al igual que las análogas de capítulos anteriores, son de índole intensamente “teórica”. La realización práctica de los movimientos sugeridos no conduce a una inmediata reproducción de lo que preconiza la teoría; la coincidencia entre el CDG y el centro de presión que, a través de la ecuación del momento de cabeceo, permite fijar un ángulo α estacionario es una exigencia teórica inevitable, pero no es realizable fácilmente en la práctica el movimiento al que se supone que daría lugar, salvo que se tomen una serie de previsiones que casi lo convierten en un experimento de laboratorio. Lanchester [24] describe bien este tipo de dificultades al analizar las posibilidades de vuelo de un modelo reducido de una sola ala que denomina “Ballasted Airplane”.

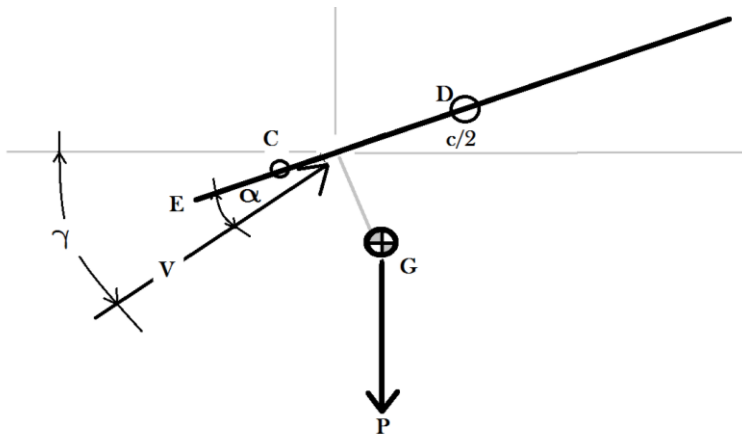


Figura 13.3: Placa en vuelo planeado. Estudio de la estabilidad (cont.)

Imaginemos (Fig. 13.3 y 13.4) que el plano esté unido a un sólido esférico cuyo centro coincide sensiblemente con el punto “G”, que se convierte así en el CDG de todo el sistema. La fuerza aerodinámica sobre la esfera tiene una resultante $F = \mu V^2$ directamente opuesta a la velocidad V , y pasa por el punto “G”. La fuerza aerodinámica sobre el plano tiene una resultante R normal al plano y que pasa por “C”. Para que las fuerzas F y R admitan como resultante el peso (“-GP-”) es necesario que R pase por “G”: es necesario que “G” esté sobre la perpendicular al plano trazada por “C”. (Condición equivalente a la anterior de que C y G coincidan)

Sea γ el ángulo que forma la velocidad V con la horizontal (Pendiente de la trayectoria de caída) y α el ángulo entre V y el plano (Ángulo de ataque). Proyectamos ahora las fuerzas sobre la tangente y la normal a la trayectoria (Fig. 13.4), con G en el plano de la placa:

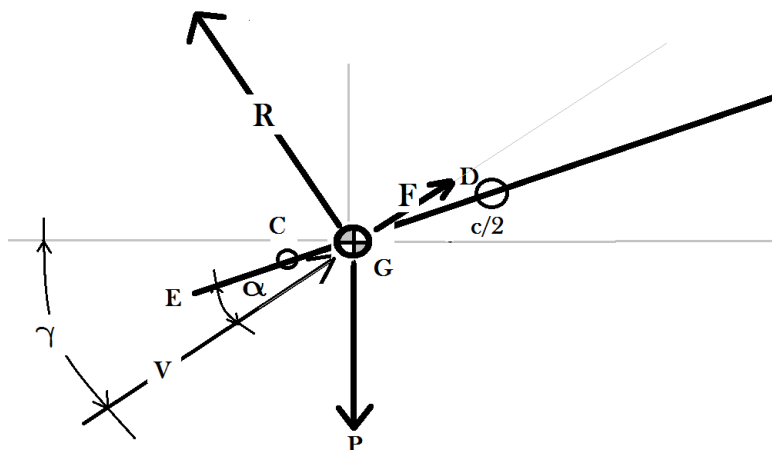


Figura 13.4: Placa en vuelo planeado. Estudio de la estabilidad (cont.).

$$\begin{aligned}
 [e1Normal] \quad P \cos \gamma &= KSV^2 \sin \alpha \cos \alpha \approx KSV^2 \alpha \\
 [e2Tangente] \quad P \sin \gamma &= KSV^2 (\alpha^2 + f)
 \end{aligned}
 \tag{13.12}$$

De las ecuaciones [e1] y [e2] de [13.12] Painlevé obtiene una relación entre la pendiente de la trayectoria y el ángulo de ataque:

$$\tan \gamma \approx \left(\alpha + \frac{f}{\alpha} \right)
 \tag{13.13}$$

Concluye afirmando que para que el descenso planeado sea posible, es necesario y suficiente que la perpendicular trazada por el peso “G” sobre el plano caiga sobre un punto “C” situado entre “D” y “C₁”.

Si esta condición se ve satisfecha, la posición de “C” define el ángulo de ataque α; entonces el ángulo de la pendiente de descenso γ viene dado por la ecuación que acabamos de ver y con el valor de la velocidad correspondiente que ya ha obtenido.

Obsérvese que no menciona explícitamente ninguna ecuación correspondiente al momento de cabeceo, aunque implícitamente, al hacer pasar por el centro presión la proyección de la fuerza gravitatoria sobre la placa, se alude a la condición de momento de cabeceo nulo. Por lo tanto, el estudio de la estabilidad que podrá realizarse con las dos únicas ecuaciones de las fuerzas se verá limitado a un caso estacionario condicionado a unas condiciones iniciales (muy) particulares.

La posición relativa entre el plano y la esfera es arbitraria, pero de modo que se cumpla siempre la condición establecida.

13.3.3 Vuelo estacionario en un plano vertical.

Painlevé estudia ahora algunos problemas clásicos de la mecánica de vuelo.

En primer lugar, se pregunta: ¿Cómo debemos elegir el punto “C” de modo que la pendiente de caída sea mínima? Esto equivale a plantear las condiciones de vuelo que proporcionan el máximo alcance.

El problema consiste en elegir el ángulo α de modo que $\tan \gamma$ sea mínima, o sea con Eficiencia Aerodinámica máxima. El mínimo de la expresión $\tan \gamma \approx \left(\alpha + \frac{f}{\alpha} \right)$ se obtiene con un ángulo de ataque correspondiente a $\alpha \approx \sqrt{f}$. El valor de la pendiente entonces viene dado por:

$$(\tan \gamma)_{min} \approx 2\sqrt{f}.$$

Para las aplicaciones normales, f es pequeño y los valores de los ángulos γ y α lo son también. En las condiciones óptimas que acabamos de establecer la resistencia al avance del plano sustentador debida al ángulo de ataque debe ser igual a μV^2 : es decir, igual a la del “cuerpo esférico adosado” en el que se ha supuesto concentrada la resistencia parásita. Esto, para Painlevé, constituye el Teorema I de Pénaud. Efectivamente, existe una real semejanza, aunque no identidad...

A continuación desea saber cómo actuar para que la velocidad vertical sea mínima y con ello se lograría la máxima autonomía. Para averiguarlo minimiza la velocidad vertical $V_z = V \sin \gamma$ suponiendo la pendiente pequeña. La ecuación de la resistencia podrá expresarse ahora como: $\gamma = \left(\alpha + \frac{f}{\alpha} \right)$

Y con la condición de equilibrio estacionario:

$$mg \approx KSV^2\alpha \Rightarrow V = \sqrt{\frac{mg}{KS\alpha}}$$

Llegamos a una expresión sencilla para la velocidad de descenso:

$$V_z \approx V\gamma = \left(\sqrt{\alpha} + \frac{f}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \right) \sqrt{\frac{mg}{KS}}$$

La derivada de la expresión anterior respecto de α se anula para $\alpha = \sqrt{3f}$ Esto se corresponde con una velocidad de descenso de $(V_z)_{min} \approx \frac{4}{3} \sqrt{\frac{mg}{KS}} \sqrt{3f}$

Implica también que la resistencia al avance del plano sustentador es, en estas condiciones de vuelo, el triple que la resistencia al avance propia del cuerpo esférico adosado. (Esto constituye, según Painlevé, el Teorema II de Pénaud)

Estos dos “teoremas” que hemos mencionado no son necesarios para el estudio que Painlevé realizará sobre la estabilidad dinámica de la placa. Los hemos mencionado aquí sólo por su interés histórico: en el primer Curso de Aeronáutica que se impartió en el mundo, Painlevé los citaba como si formasen ya parte de un cuerpo de doctrina aeronáutica establecida.

13.3.4. Estabilidad en ángulo de asiento longitudinal.

Para estudiar la estabilidad en una placa plana con régimen de planeo estacionario estabilizado, Painlevé sugiere que imaginemos que por cualquier motivo -una perturbación atmosférica, por ejemplo- cambia la inclinación de la placa de modo que el ángulo α varía un poco. Si el ángulo aumenta, según Avanzini/Jöessel esto hace retroceder el centro de presión y la placa tiende a recuperar su posición anterior. Un razonamiento análogo se aplica si α disminuye. Painlevé explica ahora que esto sucede siempre, con independencia de la posición vertical del CDG.

Si las condiciones iniciales de lanzamiento de un planeador son diferentes de las necesarias para el establecimiento del movimiento estacionario, el movimiento no lo será, por lo menos inicialmente.

Sea la descripción del dibujo adjunto (Fig. 13.5). Todos los ángulos son positivos en el sentido de la figura.

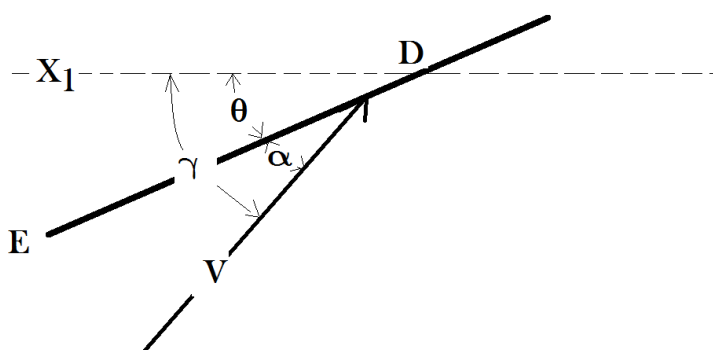


Figura 13.5: Placa en vuelo planeado en un plano vertical. Estudio de la estabilidad dinámica.

Las fuerzas aerodinámicas admiten una resultante. Llamemos F a la proyección de esta resultante según la línea tangente a la trayectoria, y N a la proyección según la normal a la anterior y dirigida hacia arriba.

Llamemos ν el momento respecto del CDG con θ crecientes en el sentido de inclinar el morro hacia abajo. Para el caso estacionario tenemos las expresiones:

$$F = -V^2(\lambda \alpha^2 + \mu) \quad N = \lambda V^2 \alpha \quad \nu = \lambda \sigma V^2 (\alpha - \alpha_1) \quad [13.14]$$

El valor α_1 se define como el correspondiente al ángulo estacionario de planeo correcto y σ es una cierta constante que es positiva si el avión es estable. Las ecuaciones intrínsecas de la dinámica del movimiento del CDG son:

$$m \frac{dV}{dt} = -V^2(\lambda \alpha^2 + \mu) - P\gamma$$

$$m V \frac{d\gamma}{dt} \approx -\lambda V^2 \alpha - P \quad [13.15]$$

$$I_y \frac{d^2\theta}{dt^2} = \lambda \sigma V^2 (\alpha - \alpha_1) - 2hV \frac{d\theta}{dt}$$

Podemos observar que en la 3ª ecuación de [13.15], la correspondiente al momento Painlevé incluye un término proporcional a la velocidad V, de definición un tanto nebulosa para una sola placa, correspondiente a un efecto amortiguador debido a la velocidad angular de cabeceo. Es poco clara debido a que no se sabe bien qué valor asignar al parámetro “h”.

Painlevé describe cómo se procedería para efectuar el estudio de la estabilidad a partir de las ecuaciones [13.15], pero no lo hace, sino que remite a los estudios de Bryan [3] y de Ferber [5]

13.3.5 Estabilidad en velocidad.

Painlevé estudiará ahora la estabilidad de esta placa en un punto de equilibrio de su descenso estacionario. Da la impresión de que se propone estudiarla teniendo presentes todas las variables del movimiento longitudinal, pero finalmente limita su objetivo y consecuentemente el alcance de sus conclusiones. El proceso es como se indica a continuación.

Sean V_1 y γ_1 los valores de la velocidad y de la pendiente que corresponden a un planeo “correcto”, lo que simplemente significa ahora planeo “estacionario”.

Consideremos V_1 y γ_1 las condiciones iniciales del vuelo. Supongamos que la velocidad en cualquier momento admite la forma $V = V_1 + \Delta V$, el ángulo de ataque de modo análogo $\alpha = \alpha_1 + \Delta\alpha$ y también la pendiente $\gamma = \gamma_1 + \Delta\gamma$.

Painlevé estudia el movimiento durante el período en el que se puede suponer que los incrementos son pequeños. Esto conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas de coeficientes constantes.

Si para este sistema se buscan soluciones de la forma $\Delta u = A e^{rt}$, $\Delta\alpha = B e^{rt}$, $\Delta\gamma = C e^{rt}$, los valores de r podrán obtenerse a partir de una ecuación algebraica de 4º grado, que es el Polinomio Característico del Sistema Lineal.

Para que el vuelo de planeo sea estable es necesario que las raíces de esta ecuación tengan su parte real negativa. De esta manera el problema es reconducido a unas condiciones puramente algebraicas que -dice Painlevé- han sido ya estudiadas aunque de modo incompleto, por Bryan [3], Ferber [5] y Soreau [4], y desde el punto de vista estático, para superficies planas, por Brillouin [6]. No menciona ninguna de las particulares conclusiones obtenidas por estos predecesores.

Painlevé tampoco desarrolla el sistema de 3 ecuaciones diferenciales que ha obtenido, pero de las dos primeras obtendrá un análisis de la estabilidad de la velocidad, que se conoce desde entonces como “*Teorema de Painlevé*”.

Con nomenclatura actual es el siguiente:

Comienza por establecer las ecuaciones linealizadas del vuelo en un plano vertical, sin incluir la ecuación del momento de cabeceo:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta V}{dt} &= -\frac{\rho S V_0^2}{2m} \Delta CD - \frac{\rho S CD V_0}{m} \Delta V - g \cos \gamma_0 \Delta \gamma \\ \frac{d\Delta \gamma}{dt} &= \frac{\rho S V_0}{2m} \Delta CL + \frac{\rho S CL}{m} \Delta V + \frac{g \sin \gamma_0}{V_0} \Delta \gamma \end{aligned} \quad [13.16]$$

Painlevé introduce la condición particular de que se pueda mantener la pendiente de la trayectoria inalterada ante las perturbaciones de la velocidad. A partir de la segunda ecuación de [13.16] puede verse que esto exige que se cumpla que:

$$\Delta CL = -\frac{2 CL}{V_0} \Delta V \quad [13.17]$$

No entra en detalles respecto al modo de lograr el mantenimiento práctico de esta condición, que reduce a una sola el sistema de ecuaciones [13.16].

Este valor, una vez introducido en la primera ecuación de [13.16], conduce al siguiente resultado:

$$\frac{d\Delta V}{\Delta V} = -\frac{\rho S V_0 CD^2}{m} \frac{\partial}{\partial CL} \left(\frac{CL}{CD} \right) dt \quad [13.18]$$

Una vez integrada, tenemos:

$$\Delta V(t) = e^{-\frac{\rho S V_0 CD^2}{m} \frac{\partial EA}{\partial CL} t} \quad [13.19]$$

Siendo EA la Eficiencia Aerodinámica. Esto indica que la velocidad será estable volando en el régimen de ángulo de ataque bajo e inestable en el caso contrario. Este es el denominado “*Teorema de Painlevé*”.

Teorema de Painlevé (1908)

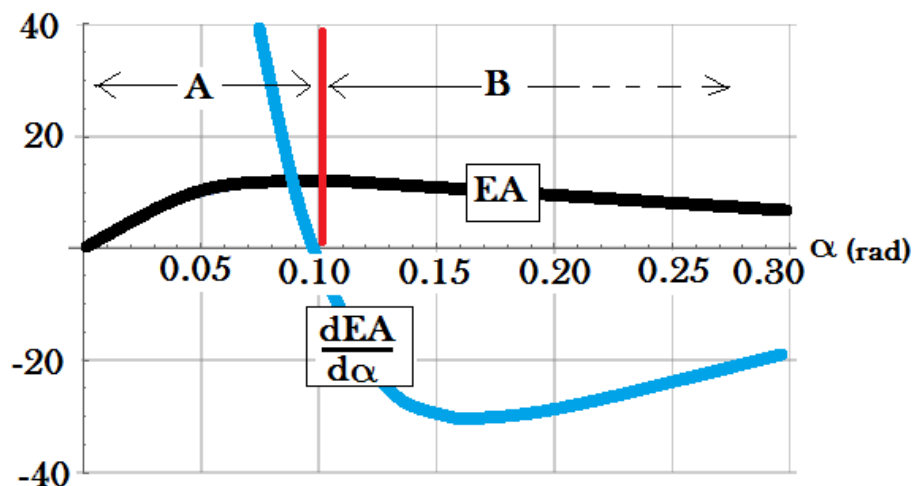


Figura 13.6: Gráfico de la Eficiencia Aerodinámica y de su derivada respecto de la incidencia, para un caso particular. La zona A es estable, y la B inestable. Polar de coeficientes constantes para el ejemplo de la figura: ($CD_0 \approx 0.013$; $K \approx 0.14$)

Las exigencias reales de este teorema no son tan restrictivas como podría pensarse. Además, debido al nulo uso que hace de la ecuación del momento, y a la particular manera de pilotar el descenso que establece, apenas pasa de ser una curiosidad matemática.

Painlevé no estudiará la estabilidad de los aviones con el sistema completo de ecuaciones diferenciales en tres dimensiones, pero inspirará a G. De Bothezat el tema de una tesis doctoral, en la que este autor acometerá de lleno este desafío dos años después [7], contemporáneamente con Bryan [8].

13.4 Comentarios

- (1) Painlevé tiene una idea clara de los factores aerodinámicos relevantes, y adopta un tipo de curva polar de resistencia aerodinámica coincidente con el preconizado por Pénaud, Soreau y Ferber, asimilable al actual.
- (2) Considera que un solo elemento sustentador sin propulsión y aislado es apto para el vuelo descendente y equilibrado siempre que el movimiento del centro de presión con las variaciones del ángulo de ataque cumpla una condición que, para placas planas, según Jöessel y Avanzini, se cumple siempre. Sin embargo, reconoce las ventajas de completar el *avión elemental* -formado por una sola placa- añadiéndole un ala de pequeño tamaño “detrás” del ala mayor, al que llama empenaje “*Tipo Pénaud*”.
- (3) Los distintos teoremas que Painlevé obtiene se corresponden con los que estableció Pénaud, aunque las posibilidades de resultar útiles a los

constructores de aviones eran escasas, por las incertidumbres que rodeaban a algunos parámetros que aparecían en las fórmulas.

- (4) Trabaja con las ecuaciones diferenciales no estacionarias en un plano vertical. Painlevé es el primero que modeliza matemáticamente la ecuación del momento de cabeceo con sentido físico claro y de un modo explícito aunque precario. La utiliza para el estudio del vuelo de planeo. Los parámetros que - en esas ecuaciones- significan la aportación del ángulo de ataque y la correspondiente fuerza de amortiguación debida a la velocidad angular del avión aparecen en forma embrionaria y todavía no bien definida. (Por ejemplo, si un fabricante desea diseñar un avión y decide servirse para ello de las ecuaciones de Painlevé, se encontrará con dificultades para fijar con precisión el valor numérico de parámetros que aparecen en las funciones que describen el comportamiento aerodinámico). El sentido físico es claro, pero la asignación de cuantificación numérica vaga.
- (5) Painlevé obtiene su “*teorema*” sobre la estabilidad de la velocidad en descenso recto planeado, para cuya obtención no necesita la ecuación del momento de cabeceo. Esta condición, obtenida de un modo algo artificioso¹⁵⁷, no ha resultado en la práctica tan restrictiva como insinúa su formulación matemática. (Complementariamente, incluso manteniendo la formulación de Painlevé, la sustitución de valores reales de aviones convencionales en sus fórmulas indica una extremadamente pequeña divergencia en velocidad).
- (6) Finalmente, explica someramente cómo se podría analizar matemáticamente la estabilidad a partir de todas las ecuaciones de un movimiento tridimensional, pero no lo desarrolla. (Parece haber dejado esta tarea en manos de uno de sus doctorandos en la escuela Politécnica de Paris: George De Bothezat, estudiado aquí más adelante).

Bibliografía

[1] Painlevé, P. “Cours de Mécanique et Machines”; *Théorie de L’Aéroplane. Ecole Polytechnique de Paris.* (1908).

[2] Painlevé, P. & Borel, E, “*L’aviation*”, (1911).

¹⁵⁷ La deducción de este “*teorema*” podría ser un ejemplo de lo que Boiffier [14] considera resultado de un desequilibrio entre desarrollos teóricos estériles, a causa del olvido de elementos esenciales para un análisis global, y desarrollos prácticos seductores, pero erróneos. En el caso presente, a partir de un razonamiento físico evidente, pero falso por incompleto, se demuestra la inestabilidad del segundo régimen. Esta “*demonstración*” ha circulado durante años en muchos cursos y muchas publicaciones serias. Está ligado a una cierta utilización del “sentido físico” que es, en el campo de la dinámica de vuelo-al decir de Boiffier-, “una tradición llena de encanto y a la vez temible.

- [3] Bryan, G. H. & Williams, W. “The longitudinal stability of aerial gliders”. *“Proc. Roy. Soc. London”*, ser. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).
- [4] Soreau, R. *“État actuel et avenir de l’aviation”*, Librairie des Sciences Aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS. (1908).
- [5] Ferber, F. “L’AVIATION, Ses debuts-son développement”. Berger-Levrault & Cie Éditeurs. Paris/Nancy. (1909).
- [6] Brillouin, M. “Stabilité des Aeroplanes, Surface Métacentrique”. *Revue de Mecanique*. Février, avril, et aout, (1909),
- [7] Bothezat, G. de; “Étude de la Stabilité de L’ Aeroplane”; Thèse pour le doctorat. Faculté des Sciences de l’Université de Paris. (1911).
- [8] Bryan, G. H. “Stability in Aviation”. *“An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motions of Airplanes”*. MACMILLAN AND CO. LTD; ST. MARTIN`S STREET, LONDON, (1911).
- [9] Pénaud, A. “L’ Aeroplane Automoteur avec équilibre automatique”. *“L’Aéronaute”*, Bulletin de la NAVIGATION AÉRIENNE; Paris (1872).
- [10] Gillmour, S. Biography in Dictionary of Scientific Biography; New York. (1970)
- [11] Lilienthal, O. *“Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Ein Beitrag zur systematik der Flugtechnik”*. Berlin: R. Gaertners Verlagbuchhandlung. (1889).
- [12] Wright, W&O, “The Papers of Wilbur & Orville Wright” (Vol I; 1899-1905) MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. NEW YORK. (1953).
- [13] Cayley, G. “ON AERIAL NAVIGATION (I) y (II)”; *“A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts”* (London, (I) Nov. 1809, (II) Feb. 1810)
- [14] Boiffier, J. L. “Dynamique du Vol de l’avion”, Sup Aéro - Département Aéronefs. Notes de Cours. Version 7.1. (Pág. 11 y ss.) Toulouse. (2001).
- [15] Voisin, C. et G.; “The Practice of Aviation”; Aeronautics, Suppl. Knowl. Scient. News. Vol 1, No. 1, London. (1907) y No. 2 (1908).
- [16] Cayley, G. “ON AERIAL NAVIGATION (I) y (II)”; *“A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts”* (London, (I) Nov. 1809, (II) Feb. 1810)
- [17] De Borda, J. C. “Expériences sur la Résistance des fluides”. *Mémorial de l’Académie Royale des Sciences*. Paris. (1763 y 1767).
- [18] Duchemin, N. V., “Espériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents”. *Société Francaise de Physique*. (1801).
- [19] Eiffel, G., “Recherches expérimentales sur la résistance de l’air exécutées á la tour Eiffel”. Maretheux, Paris, (1907)

[20] Morin, P., “Observations sur la loi de mouvement d’ascension et sur les variations de densité de l’air”; Comptes Ren. Acad. Sciences, Vol. 68. Paris. (1869).

[21] Didion, J. “Recherches sur la plus grande vitesse que l’on peut obtenir par la Navigation aérienne”. Metz. (1838).

[22] Renard, P., “Virage des aéroplanes”. C. R. Acad. Scienc. Vol. 146; No. 20. Paris. (1908).

[23] Boyer, J., “Le vol plané des oiseaux réalisé mécaniquement”. Cosmos, An. 57. No. 1223. Paris. (1908).

[24] AERODONETICS, CONSTITUTING THE SECOND VOLUMEN OF A COMPLETE WORK ON AERIAL FLIGHT. Archibald Constable & CO. LTD. Orange Street Leicester Square. London (1908).

Capítulo 14

G. de Bothezat (1882-1940).



158

Contenido

14.1 Nota Biográfica

14.2 Documento de Referencia.

14.3 Descripción de Contenido.

14.3.1 Extracto del Prólogo de P. Painlevé.

14.3.2 Fuerzas que actúan sobre un aeroplano

14.3.3 Efecto de las velocidades angulares.

14.3.4 Características fundamentales de un aeroplano.

14.3.4.1 Vuelo horizontal estacionario. Hipérbola de Pénaud.

¹⁵⁸ <http://www.russianhelicopters.aero/upload/iblock/776/776424f1100716bf7c08668f2a7f5827.jpg>
(14.06.2017)

14.3.4.2 Vuelo de ascenso o descenso con pendiente pequeña.

14.3.5 Noción de Par Central

14.3.5.1 Aparato sin empenajes.

14.3.5.2 Aparato con superficie de cola.

14.3.5.3 Aparato con superficie delantera.

14.3.6 Análisis del fuselaje.

14. 4 El problema general de la Estabilidad de un aeroplano. Estabilidad Longitudinal.

14. 5 Conclusiones relativas a la Estabilidad Longitudinal.

14. 6 Ecuaciones generales de la dinámica de un aeroplano en tres dimensiones.

14. 7 Conclusiones generales.

Bibliografía.

14.1 Nota Biográfica.

Nació en Besaravia, perteneciente entonces al imperio Ruso. Obtuvo su formación técnica superior en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Iasi (Rumanía), graduándose como ingeniero en el Instituto Politécnico de Kharkov (Rusia). Realizó estudios en el Instituto Electrotécnico de Lieja (Bélgica), en la Universidad de Göttingen y en la Humboldt (Berlín). En 1911 se doctoró por la Universidad de la Sorbona (Paris) con dos tesis, una de ellas sobre la Estabilidad de los Aviones. Después de asumir diversos empleos profesionales en Rusia, emigró a los Estados Unidos de Norteamérica con motivo de la Revolución Rusa de 1917. Fue contratado¹⁵⁹ por NACA, y por la Universidad de Columbia y el Instituto Tecnológico de Massachusetts. Proyectó y construyó un helicóptero de cuatro rotores para el ejército americano que logró mantenerse en vuelo a muy baja altura, y fue cancelado por sus pobres actuaciones. Se involucró también en diversos proyectos industriales poco relacionados con la aviación, aunque dos años antes de morir retornó al diseño de helicópteros.

14.2 Documento de Referencia.

Georges de Bothezat; “Étude de la Stabilité de L’ Aeroplane”, Thèse présentée a la Faculté des Sciences de Paris. (Janvier de 1911) Avec un préface de Paul Painlevé. H. DUNOD ET E. PINAT, EDITEURS. PARIS (1911)

*“Ce livre est, á ma connaissance, le premier
qui renferme une discussion exacte et
complète de la stabilité de l’aéroplane”
(Paul Painlevé)*

¹⁵⁹ Su influencia como miembro directivo de NACA fue de corta duración debido, según parece, a sus dificultades para trabajar en equipo, y porque su brillantez estaba impregnada de un estilo errático que lo convertía en poco fiable. [28]

14.3 Descripción de Contenido.

14.3.1 Extracto del Prólogo de P. Painlevé.

“Si conociéramos las leyes de la aerodinámica (...) la teoría del aeroplano sería una aplicación de la mecánica: el cálculo permitiría conocer sin incertidumbres la respuesta de un aeroplano. Estas leyes no nos son conocidas. El fenómeno aerodinámico es muy complejo. Depende de las velocidades, aceleraciones e historia previa del movimiento, y de la viscosidad (...). Los matemáticos llevan tiempo intentando responder a este desafío. Por el momento, hay que acudir a los resultados experimentales. Actualmente se acepta que las leyes (...) sobre las fuerzas aerodinámicas dependen del movimiento (...) en el instante considerado. Es imposible que este postulado sea verdadero. Incluso admitiéndolo, las leyes hoy aceptadas son muy imperfectas y discutibles. Entonces, ¿A qué viene multiplicar fórmulas y más fórmulas...?”

Esta conclusión es errónea. Sólo la mecánica permite interpretar con exactitud observaciones, extraer enseñanzas, trazar un plan para los experimentos y establecer los coeficientes fundamentales. Es una guía y un intérprete¹⁶⁰. Algunos piensan que la aviación no debe nada a la teoría. Existen personas que actúan según cálculos groseros, con razonamientos (...) que resultan escandalosos para todo matemático. Perjudiciales más que útiles. Pero la teoría (...) ha sido un consejero siempre fiable, y ha inspirado a Cayley (UK), Pénaud (F), Ader (F), Maxim (USA), Lilienthal (G), Langley (USA)¹⁶¹.

A modo de ejemplo, véase la misión de la cola de los aviones. Un efecto (...) de significado misterioso para pilotos y fabricantes, que se transmite, pero cuyo significado se ignora. Otro: la posición del CDG. Muchos imaginan el avión “colgado” del Centro de Presión, y asimilado a un péndulo; esto da pie a divagaciones fantasmagóricas. Saber mecánica racional no dota de capacidad inventiva a quien no la posee, pero puede evitar incertidumbres (...), preservando de errores y sugerencias ilusorias...

Es necesario conocer la estabilidad de los aviones. Esto no exige métodos novedosos; son los mismos que empleó Laplace hace 225 años y desarrolló Routh: el de las perturbaciones pequeñas alrededor de un punto de equilibrio... Toda la dificultad estriba en no equivocarse en los cálculos y tener claro el sentido mecánico y correctamente establecido el valor de los coeficientes. Esto (...) conduce a cálculos complicados, como han mostrado Bryan & Williams (1903) [16], que no consiguen obtener resultados exactos, como tampoco los que les han seguido. Ningún razonamiento simplista puede suplir el análisis de las ecuaciones completas. Algunos de estos métodos simples que se han propuesto son aberrantes y es mejor no hablar de ellos. Otros indican correctamente las tendencias, pero proporcionan solo parte de las condiciones de estabilidad, o de modo inexacto.

El mérito de la tesis de De Bothezat estriba en que ha resuelto un problema algebraico de gran dificultad: estimar la magnitud matemática de las raíces del polinomio característico mediante un juego de curvas, para los límites entre los cuales pueden variar actualmente

¹⁶⁰ Hoy diríamos que trataban de “identificar el sistema”.

¹⁶¹ Cita Painlevé a un cierto número de pioneros que no siempre ni todos se inspiraron en las leyes formales de la dinámica del cuerpo rígido. Un número no pequeño de los que menciona Painlevé fracasaron. Ese fracaso, en parte, provenía de que omitieron estudiar el comportamiento de su aeroplano respecto de unos grados de libertad que quizás habrían descubierto que no les era posible controlar con los diseños de sus aeronaves. Es grande el contraste entre los que menciona Painlevé, con el modo de enfocar el trabajo y los medios que pusieron en práctica los Wright para lograr el primer vuelo controlado unos años antes. Painlevé voló el 10 de octubre de 1908 con Wilbur Wright en el Flyer, pero curiosamente no menciona entre los pioneros a los dos americanos. Los Wright estaban varios años por delante de los europeos, y llegaron a tener una concepción clara de los problemas de control de un avión, antes que no pocos pioneros de ambos continentes; no tenían estudios universitarios, pero estaban dotados de una gran capacidad de observación, de trabajo, de estudio, de tesón y firmeza, de capacidad práctica de resolver problemas. Cfr. “Wilbur & Orville Wright Papers”, Vol I (1899-1905) y Vol II (1905-1912)

las constantes características de los aviones. Los cálculos son penosos, pero solo exigen paciencia.

Las conclusiones de la Tesis de De Bothezat son lamentablemente negativas¹⁶².

Introducción.

De entrada De Bothezat repasa someramente algunos hitos de la breve historia de la aviación: Cayley [17] y Pénaud [18] establecieron la configuración general del avión. Lilienthal [19] estudió la capacidad sustentadora de un ala y realizó vuelos de planeo con control gravitatorio elemental. Wright [2] y Lavavasseur construyeron un motor ligero, y Wright, Ferber, Santos-Dumont, Voisin, Farman, Bleriot, entre otros... construyeron los primeros aparatos, de los que fueron extrayendo empíricamente y sólo cualitativamente algunas de las propiedades fundamentales desde el punto de vista de la estabilidad. Se descubrió así que un empenaje horizontal, manejado adecuadamente, era capaz de asegurarla. Pero la base teórica era precaria.

De Bothezat conoce el trabajo de Bryan & Williams [16], que se basa en J. Routh [15]. Piensa que el estudio de los pequeños movimientos permitirá sacar conclusiones sobre la estabilidad de los aviones. A continuación menciona los trabajos de Ferber [20], que ha sido el primero en estudiar la estabilidad lateral, y los de Soreau [21].

De Bothezat es consciente de que las leyes aerodinámicas no son bien conocidas. De entre ellas, la más problemática es la que concierne al sentido del desplazamiento del centro de presión de un ala. No obstante, piensa que para el caso de los pequeños movimientos esto no debiera suponer un problema. También pone en guardia frente a la tentación de suprimir algunos términos de la ecuación característica con el pretexto de que parecen pequeños frente a los demás. Los ensayos han demostrado que esto puede viciar la discusión cuantitativa.

En el prólogo declara lisa y llanamente que el problema de la estabilidad no tiene nada que ver con la velocidad, en apoyo de Ferber [20], que había disentido de esta primeriza afirmación de Bryan & Williams [16].

De Bothezat separa el sistema Longitudinal del Lateral-direccional y realiza un estudio matemático pormenorizado de la influencia del estabilizador horizontal posterior, basado en estudios de Painlevé [6], quien a su vez se basó en los de Crocco [22] sobre estabilizadores de dirigibles. Analiza las raíces reales de la cuartica de estabilidad Longitudinal mediante los métodos de F. Klein y las raíces imaginarias mediante el método de los índices de Cauchy. Son capítulos incómodos. Su tesis desarrolla las ecuaciones linealizadas completas con todos los grados de libertad.

En el III capítulo analiza la estabilidad lateral de modo sucinto y peculiar. Declara categóricamente que *“La stabilité latérale de l’aéroplane ne peut être*

¹⁶² Sorprende esta conclusión, ya que si la parte real es negativa, el movimiento perturbado se amortiguará. Pero la afirmación de Painlevé tiene un sentido que veremos más adelante.

assurée que par quelque dispositif mobile". Esto no incumbe ahora a nuestro estudio.

14.3.2 Fuerzas que actúan sobre el aeroplano.

Aunque las leyes de la Resistencia del aire no son conocidas con detalle, para un cuerpo con un plano de simetría esta resistencia depende de la velocidad respecto del aire V , del ángulo de ataque α que forma esta velocidad con una recta fija al cuerpo y contenida en el plano de simetría, y de la forma y dimensiones del cuerpo (D).

$$R = F(V, \alpha, D)$$

Para velocidades comprendidas entre $10/50 \text{ m/s}$ Bothezat admite la dependencia respecto de V^2 verificada por los precisos trabajos de Eiffel [24] con placas planas y curvas, y por los ensayos con dirigibles, ferrocarriles y tranvías. (De Bothezat piensa que para velocidades menores, la resistencia R depende de V en forma lineal y para velocidades mayores el exponente de la velocidad es mayor de 2).

$$R = V^2 G(\alpha, D) \quad [14.1]$$

Los experimentos han intentado sobretodo determinar el valor de la función G para diversos casos particulares.

Para un plano delgado que se desplaza *normal* a la corriente se ha comprobado que es aceptable suponer $R = KSV^2$ El valor de K se denomina "Coeficiente de resistencia específica del aire". En el Sistema Internacional de Medidas el valor de K -según Eiffel [7]- es: $K \approx 0.08 \text{ kg/m}^3$ El centro de presión está en el centro geométrico del plano.

Si inclinamos el plano, el valor de R dependerá del ángulo de inclinación. De Bothezat admite que puede representarse como $R = K'SV^2\alpha$ si $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$ pero es importante reseñar que K' no puede ser considerado constante para cualquier superficie. Para planos rectangulares, depende del cociente de la envergadura (b) respecto de la cuerda (c), y es creciente con la primera. Su valor máximo parece obtenerse con $(b/c) = 6$, aunque todavía es un aspecto mal conocido. Para un plano cuadrado puede admitirse que $K' \approx 0.16 \text{ kg/m}^3$.

Pero la cuestión más dudosa es el desplazamiento del centro de presión (CP) con la variación del ángulo de ataque.

La posición del CP para un plano -afirma- se ha visto que es sensiblemente independiente de la velocidad, pero depende mucho del ángulo de ataque. Cuando pasamos paulatinamente desde $\alpha = 90^\circ$ hasta $\alpha = 0^\circ$ el CP -que llamamos ahora

C se aproxima constantemente desde el centro de la placa hacia el borde de ataque y tiende a una posición límite -que llamamos C_0 - cercana al borde entre $1/3$ y $1/4$ de la cuerda, que llamamos c .

Para variaciones pequeñas de α la distancia C_0C puede ser representada mediante una función lineal de α tal como: $C_0C \approx p(c/2)\alpha$ Los valores de la constante p no son bien conocidos: Avanzini [25] y Joessel [23] lo establecen en 0.6, Eiffel [24] le asigna el valor unidad. De Bothezat tomará el valor de Eiffel. No le preocupa mucho, pues valora sobre todo la posición límite del CP cuando α es pequeño y sus variaciones regulares y lineales a partir de un cierto valor. El procedimiento de linealización para los pequeños movimientos le permitirá independizar este aspecto todavía poco conocido del estudio de la estabilidad.

Las superficies curvas tienen la propiedad de ofrecer, para la misma sustentación que un ala plana, menor resistencia aerodinámica. Esto las cualifica positivamente. De Bothezat dirá que un ala con curvatura es asimilable a un plano ficticio cuya cuerda está en la recta que marca la dirección de sustentación nula del perfil y cuya superficie es la proyección del área del ala curva. El ángulo de ataque α se medirá desde esa cuerda, análogamente a lo que propone Soreau.

A partir de aquí, la fuerza normal y la fuerza tangencial de alas rectangulares con curvatura admiten la expresión (empírica) aproximada siguiente:

$$\begin{aligned} N &\approx K_1 SV^2 \alpha \\ T &\approx K_1 SV^2 (r\alpha^2 + s) \end{aligned}$$

[14.2]

En estas fórmulas la constante K_1 depende sobretodo del alargamiento alar. Los valores numéricos de los coeficientes r y s dependen del perfil curvo y son muy difíciles de medir.

De Bothezat supondrá, sin ofrecer detalladas explicaciones, que $r \approx 1$, $s \approx 0.01$ $K_1 \approx 0.3 \text{ kg/m}^3$ (para $AR \approx 6$) Lo hace simplemente a título ilustrativo de los órdenes de magnitud que asume para estas constantes. Supondrá también, como primera aproximación, que la fuerza total resultante es normal al plano ficticio de sustentación nula. Esta descripción aerodinámica y los valores que admite para las constantes son básicamente los que propuso Soreau [10].

Respecto del desplazamiento del centro de presión, los datos que tiene De Bothezat son imprecisos y contradictorios. Nadie niega la posición límite del CP que hemos llamado C_0 cuando α es pequeño, pero las opiniones divergen cuando α crece. Unos afirman que se aleja del borde de ataque -como para las alas planas- y otros parece que dicen lo contrario.

Ante esta situación, De Bothezat decide trabajar *dejando este aspecto sin resolver*. Si retrocede el CP al crecer α , lo llamará "Desplazamiento Directo" $p_d > 0$, de lo contrario, lo llamará "Desplazamiento Inverso" $p_i < 0$. Es decir:

$$(C_0C)_{directo} \approx p_d \left(\frac{c}{2}\right) \alpha \quad (C_0C)_{inverso} \approx p_i \left(\frac{c}{2}\right) \alpha \quad [14.3]$$

Los valores p_i, p_d son constantes adimensionales cuyo valor depende de la curvatura del perfil alar. Supondrá también que su valor absoluto en ambos casos es similar al de p para el caso de un ala plana delgada.

Todo esto indica que los conocimientos aerodinámicos son imprecisos. No obstante, según De Bothezat, si lo que nos interesa es analizar casos en los que tanto V como α se mueven dentro de los márgenes aeronáuticos normales, las fórmulas arriba citadas pueden ser una razonable aproximación inicial. Esta cautela debe tenerse en cuenta, pues solamente en este sentido le ofrecen confianza a De Bothezat. Para superficies de otras formas diferentes de la rectangular, el autor declara que es muy poco lo que se sabe a ciencia cierta. (“*Habría que recurrir a un adivino*”...)

14.3.3 Efecto de una velocidad angular alrededor de un eje perpendicular a su plano de simetría (sobre un ala plana sometida a una corriente uniforme).

Aunque no lo menciona explícitamente, sus cálculos suponen que el centro de giro está fuera de la placa y suficientemente alejado. (Fig. 14.1)

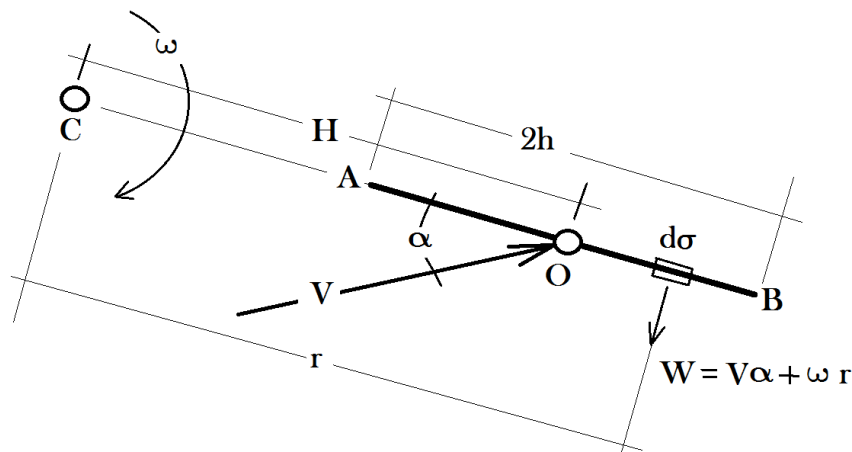


Figura 14.1: Esquema para el cálculo de la fuerza aerodinámica generada por la velocidad angular de una superficie que gira alrededor de un eje en el mismo plano, con el centro de giro fuera de la superficie.

Este caso es importante porque las superficies sustentadoras traseras están normalmente inmersas en este tipo de flujo. El proceso que sigue De Bothezat para cuantificar la influencia de la velocidad angular ω es el siguiente (Evidentemente, el razonamiento aerodinámico que subyace a este modo de actuar es inadecuado, y De Bothezat lo sabe):

- (1) Asume la hipótesis de que la resistencia de un elemento diferencial de superficie

$$d\sigma \text{ será } dR_w = K' V^2 \alpha_w d\sigma \quad [14.4]$$

- (2) La componente de velocidad normal a la placa en ese elemento diferencial es $w_\omega = r\omega$, lo que equivale a un incremento de ángulo de ataque de

$$\alpha_w \approx \frac{r\omega}{V} \quad [14.5]$$

- (3) Luego: $dR_w \approx K' V (r\omega) d\sigma$

- (4) Integrando a lo largo de la cuerda, para obtener la fuerza total correspondiente a la velocidad angular ω :

$$R_\omega \approx \frac{K' V \omega}{2h} \int_A^B r d\sigma = K' V \omega H \quad [14.6]$$

Bothezat desprecia esta fuerza frente a la correspondiente al ángulo α lo que equivale a considerar irrelevante el efecto de la rotación.

- (5) En cambio, el momento respecto del punto C que genera esta fuerza inducida por la velocidad angular no es despreciado y su valor aproximado, suponiendo $h \ll H$, sería:

$$M_\omega \approx \frac{K' V \omega}{2h} \int_{BA}^{BS} r^2 d\sigma = \left(\frac{h^2}{3} + H^2 \right) K' V \omega \approx K' V \omega H^2 \quad [14.7]$$

La conclusión de De Bothezat es que, aunque las variaciones en sustentación y resistencia generadas por la velocidad angular de cabeceo ω puedan ser pequeñas, el momento que genera puede no serlo. Esto es de gran importancia. Este momento tiende siempre a oponerse a la velocidad angular.

De Bothezat concluye: “*lo único que añade la velocidad angular (a la dinámica del aeroplano) es un par amortiguador independiente del ángulo de ataque*”. Esto es fundamental para la estabilidad. Piensa que una cierta curvatura en el ala no alterará esencialmente lo que acaba de afirmar.

Marginalmente, la posición del CP en una corriente con derrape lateral, es descrita hipotéticamente de un modo ingenioso pero concluye que, en realidad, no se sabe nada a ciencia cierta en el momento en el que escribe.

14.3.4 Características fundamentales del aeroplano.

Las alas son reducibles a una sola ala equivalente. Principio de no interferencia: De Bothezat efectúa la suma ponderada de la aportación de cada superficie sin considerar la influencia de unas superficies respecto de otras. El fuselaje lo equipara a una esfera equivalente –al modo de Painlevé– y considera la tracción de las hélices constante, aunque su línea de acción puede no pasar por el CDG.

Dispositivos de dirección: suelen ser de dos clases: el timón de profundidad, denominado también timón horizontal, que puede estar delante o detrás del avión, y sirve –según dice– para *modificar la “inclinación” del avión*, y el timón vertical, normalmente por detrás. Este último, afirma, sirve para hacer *girar horizontalmente el avión*. (De Bothezat parece referirse ahora al ángulo de asiento lateral ϕ y a sus variaciones).

Dispositivos de estabilización: son también de dos clases: los inmóviles y los móviles. Entre estos últimos están los alerones, o la torsión anti simétrica del ala, cuyo objetivo es *estabilizar lateralmente el avión*. El timón vertical puede también servir para la estabilidad lateral, al igual que el timón horizontal sirve para “combatir el cabeceo del avión”. Supondrá mandos fijos. Imagina que un ala con diedro equivale a un ala recta con placas finales, análogamente a Ferber [20].

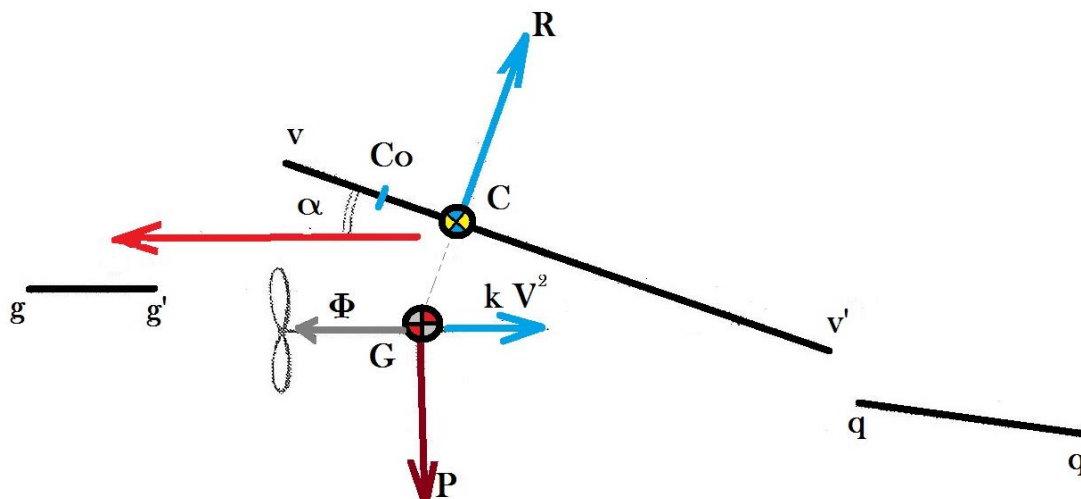


Figura 14.2: Esquema descriptivo de un aeroplano con tres superficies, una sustentadora principal (vv') y dos de control longitudinal: una delantera (gg') y otra trasera (qq') con tracción central.

Tomando como referencia la Fig. (14.2), tenemos:

- vv' es el plano ficticio equivalente al ala principal del avión. La resultante aerodinámica R se supone normal a este plano en primera aproximación, y situada en el CP correspondiente al ángulo de ataque α ,

- C_o es la posición límite del CP cuando $\alpha = 0$.
- G es el CDG del avión.
- Φ es la resultante de la tracción de las hélices.
- P es el peso de la aeronave.
- kV^2 es la resistencia aerodinámica, incluyendo a los pilotos pero excluyendo las hélices.
- qq' es el empenaje horizontal posterior.
- gg' es el timón horizontal delantero.

El avión posee también un timón vertical que no se muestra en la figura. Estudiaremos ahora solamente el vuelo en un plano vertical. A los efectos de la sustentación total, considera la superficie equivalente.

Complementariamente, tenemos también:

- (1) Fuerza aerodinámica total: $N \approx K_1SV^2\alpha$
- (2) Resistencia aerodinámica total del ala: $T_{ala} \approx K_1SV^2(r\alpha^2 + s)$
- (3) Resistencia aerodinámica total del fuselaje (y de todo elemento no tenido anteriormente en cuenta) : $T_{resto} \approx kV^2$
- (4) La resistencia aerodinámica total sería la suma de ambas:

$$T \approx K_1SV^2 \left(r\alpha^2 + s + \frac{k}{K_1S} \right) = K_1SV^2 (r\alpha^2 + \sigma) \quad \text{con: } s + \frac{k}{K_1S} = \sigma \quad [14.8]$$

14.3.4.1 Regímenes de traslación rectilínea de un aeroplano.

Supongamos a la aeronave en vuelo horizontal a velocidad aerodinámica constante en módulo y dirección, sin viento.

Esto exige:

- (1) $P = K_1SV_0^2\alpha_0$
- (2) $\Phi_0 = K_1SV_0^2(r\alpha_0^2 + \sigma)$
- (3) Por tanto, de modo directo: $\frac{\Phi_0}{P} = \left(r\alpha_0 + \frac{\sigma}{\alpha_0} \right)$

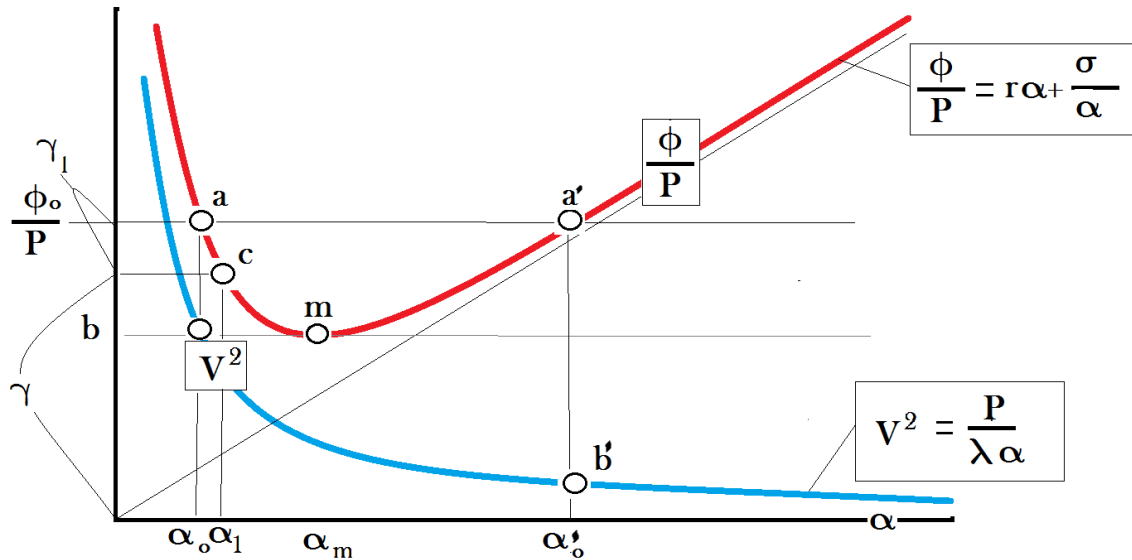


Figura 14.3: La “Hipérbola de Pénauud”, según De Bothezat.

Explicación del gráfico de la Fig. (14.3): La representación gráfica de $\frac{\Phi_0}{P} = \left(r\alpha_0 + \frac{\sigma}{\alpha_0} \right)$ tiene el aspecto que muestra la figura y De Bothezat, siguiendo a Painlevé, la denomina “Hipérbola de Pénauud”.

Puede verse que a un valor fijo de $\frac{\Phi_0}{P}$ le corresponden dos puntos sobre la hipérbola: a y a', que son representativos de dos regímenes horizontales posibles para una misma tracción de las hélices Φ_0 , y en abscisas tenemos el ángulo de ataque correspondiente a esos dos puntos.

Sobre el gráfico está también la curva $\frac{P}{K_1 S} = V_0^2 \alpha_0$, en forma de hipérbola, con V_0^2 en ordenadas.

Los puntos b y b' son los valores de V_0^2 posibles. De estos dos regímenes, Painlevé [3] ha demostrado -afirma De Bothezat- que solamente uno de los dos es estable¹⁶³ -De Bothezat lo denomina *normal* y es el que tiene el ángulo de ataque menor. A este se refiere siempre en su Tesis De Bothezat.

14.3.4.2 Régimen de ascenso o descenso con pendiente pequeña.

Las ecuaciones para este caso (Figura 14.2) son:

¹⁶³ Se supone que se trata del famoso *Teorema de Painlevé*, ya estudiado en el Cap. 13.

$$(1) P = K_1 S V_0^2 \alpha_0 \cos \gamma_0 \approx K_1 S V_0^2 \alpha_0$$

$$(2) \Phi_0 = K_1 S V_0^2 (r \alpha_0^2 + \sigma) + P \sin \gamma_0 \approx K_1 S V_0^2 (r \alpha_0^2 + \sigma) + P \gamma_0$$

(3) De las dos ecuaciones anteriores obtenemos la pendiente

$$\gamma_0 \approx \frac{\Phi_0}{P} - \left(r \alpha_0 + \frac{\sigma}{\alpha_0} \right)$$

Esto indica que hay también dos regímenes posibles y que variando el ángulo de ataque mediante el empenaje horizontal, sin modificar la tracción, puedo lograr ascender o descender.

(4) Para el caso de vuelo de planeo sin motor tenemos:

$$\gamma_0 \approx - \left(r \alpha_0 + \frac{\sigma}{\alpha_0} \right)$$

De esta ecuación De Bothezat extrae conclusiones sobre las condiciones de vuelo de máximo alcance y máxima autonomía que coinciden sustancialmente con las de Pénaud y Painlevé.

14.3.5 Noción de Par (Momento) Central.

Para un avión con cola -cuyo primer estudio De Bothezat atribuye a Painlevé- la esencia del problema de la estabilidad estriba en el estudio del Par Central (“Couple Central”) *de inmensa importancia*: es el momento de cabeceo respecto del CDG.

El empenaje amortiguador se supone que no sustenta en el equilibrio y su función es siempre amortiguadora, con independencia del sentido en el que se desplace el centro de presión con α y con independencia también de si está por delante o por detrás del ala principal. Esto es habitual en los pioneros, como hemos visto.

Con referencia a la figura (14.4), las hipótesis asumidas explícita o implícitamente, son:

- No hay influencias mutuas de unas superficies sobre las otras: no hay desviación de la corriente ni erosión de la presión dinámica por efectos de estela.
- Las “Resistencias” (es decir, las fuerzas aerodinámicas) son normales a cada una de las superficies equivalentes.
- Para el equilibrio sustentador, se desprecian las superficies auxiliares (aa') y (qq'), pero no el momento de cabeceo que generan. β y β' son los ángulos geométricos que cada una de ellas forma con la superficie principal, a la que se atribuye toda la función sustentadora.
- Se supone la tracción paralela a la velocidad.

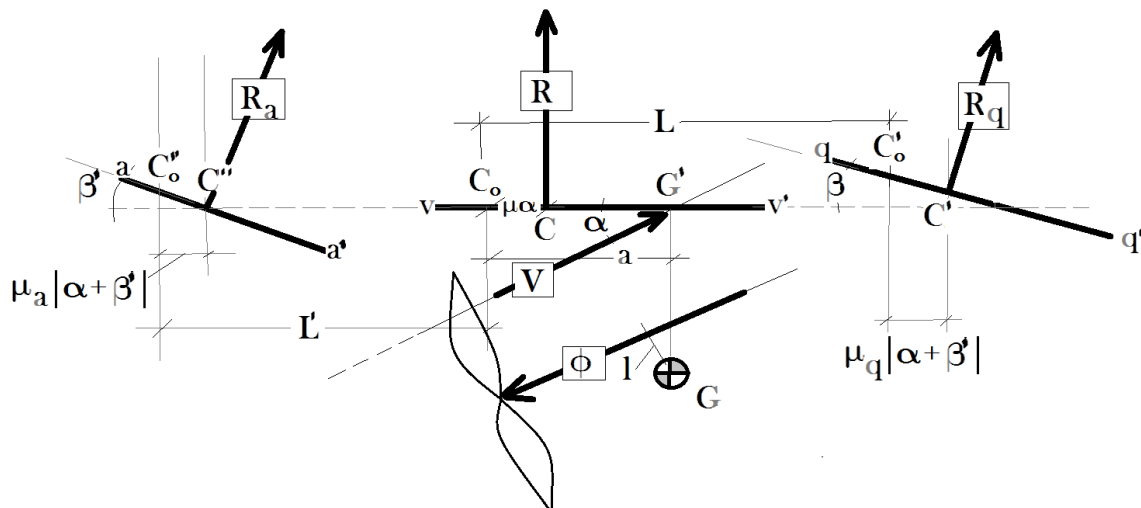


Figura 14.4: Esquema para el estudio del Par Central de Cabeceo de un aeroplano con superficies de control delantera y trasera.

De Bothezat comenzará a analizar los diferentes casos posibles, según el tipo de aeroplano recordando que este desarrollo solo es válido para $0 \leq \alpha \leq 15^\circ$

14.3.5.1 Aparato sin empenajes horizontales.

Se trata de una simple ala solitaria. El Par Central viene dado por:

$$M_v = KSV^2\alpha(a - \mu\alpha) - \Phi l \quad [14.9]$$

Para condiciones estacionarias el momento debe ser nulo, tenemos:

$$M_v = KSV^2\alpha_0(a - \mu\alpha_0) - \Phi l = 0 \quad [14.10]$$

De Bothezat obtiene inmediatamente el valor de a para que el avión pueda volar estacionariamente equilibrado:

$$a \Rightarrow \mu\alpha_0 + \frac{\Phi l}{KSV_0^2\alpha_0} \quad [14.11]$$

Esto nos indica, de acuerdo con De Bothezat, la posición que debe ocupar el centro de gravedad del aeroplano para el vuelo estacionario con las condiciones de vuelo V_0, α_0 . Para ver el efecto de las oscilaciones alrededor de estas condiciones, De Bothezat analiza los pequeños movimientos a partir de la ecuación inicial del momento, suponiendo que la tracción pasa por el CDG:

$$dM \approx \frac{\partial M}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial M}{\partial \alpha} \Delta \alpha \quad \text{con : } a = \mu\alpha_0 \quad [14.12]$$

Que conduce a:

$$\delta M \approx -\mu K S V_0^2 \alpha_0 \Delta \alpha \quad [14.13]$$

Esto indica que, si $\mu > 0$ el par resultante es estabilizador, y lo contrario sucede si $\mu < 0$

Pueden verse las fuertes restricciones de este aeroplano en cuanto a la posición del CDG y a la escasa controlabilidad que posee.

14.3.5.2. Aparato con superficie de cola (qq).

El origen de la aparición de empenajes horizontales traseros, proviene según De Bothezat, de la imitación de los pájaros. Su eficacia depende de su tamaño, de la distancia que lo separa del CDG y de su ángulo de ataque respecto de la corriente.

Los dos primeros factores son claros. Interesa ver el tercero. En primer lugar, debe proporcionar al ala principal un ángulo de ataque adecuado, comprendido dentro de un margen que no es grande.

Para este tipo de aparato el momento de cabeceo viene dado por:

$$M_q = -K_q S_q V^2 (\alpha + \beta) (L + \mu_q |\alpha + \beta| - a) - \Phi l + K S V^2 \alpha (a - \mu \alpha) \quad [14.14]$$

Es notable el hecho de que De Bothezat caracteriza cada aparato dotado de cola mediante un valor fijo del ángulo β , lo que le exige, para establecer el equilibrio, una determinada posición del centro de gravedad, medido por el valor “ α_0 ”. Siguiendo un proceso análogo al usado para una sola superficie sustentadora, pero algebraicamente menos simple, establece la posición del centro de gravedad α_0 que anula el momento para un cierto α_0 y una velocidad V_0 , a continuación linealiza la ecuación del momento y sustituye en ella el valor de α_0 , llegando así a:

$$\delta M = -\Delta \alpha \frac{K^2 S^2 V^2}{K S \alpha + K_q S_q (\alpha + \beta)} \left(\begin{array}{l} \alpha^2 \mu + \frac{K_q S_q^2}{K^2 S^2} (\alpha + \beta)^2 \mu_q + \dots \\ \dots + \frac{K_q S_q}{K S} (-L \beta + 2 \alpha \beta \mu - \beta^2 \mu_q + \alpha^2 (\mu + \mu_q)) \end{array} \right) \quad [14.15]$$

Las variaciones del momento dependen, en primera aproximación (sin tracción) de las del ángulo de ataque y, con las simplificaciones que permite la suposición de ángulos pequeños y superficies estabilizadoras mucho menores que la principal, su signo lo define

una expresión que exige que el ángulo β para la estabilidad del movimiento cumpla la condición:

$$\beta < -\frac{L - 2\alpha_0\mu}{\mu_q} \quad [14.16]$$

Esta expresión se halla implícita en los desarrollos de De Bothezat, que dedica un amplio espacio a particularizar valores de β y de α observando el carácter de las ecuaciones. Para el caso de movimiento del centro de presión en sentido contrario el signo de los coeficientes μ, μ_q es negativo, y los valores numéricos que se han obtenido anteriormente se ven alterados. No es necesario que le sigamos ahora por cada uno de los detalles de ese prolijo camino.

Conclusiones del estudio de De Bothezat sobre la cola de los aviones:

- La inclusión de una cola modifica profundamente el Par central de un aeroplano.
- No obstante, esto solamente afecta a las variaciones del par central que son proporcionales a las del ángulo de ataque. (Recordemos que para De Bothezat la resultante de la sustentación “total” pasa por el centro de gravedad; la cola solamente sustenta cuando el ángulo de ataque deja de ser el nominal, y solamente lo hace para “recuperar” éste).
- El efecto de la tracción depende enteramente de su línea de acción respecto del CDG.
- Si la tracción es central, siempre se podrá lograr que un adecuado valor de β haga que el avión sea estable. Al ser normalmente negativo este ángulo, De Bothezat reconoce que esto supondrá una pérdida de sustentación, pero piensa que es posible minimizarla, por lo menos para ángulos nominales de vuelo. Indica, además, que la experiencia confirma su teoría.

14.3.5.3. Aparato con empenaje horizontal delantero.

De Bothezat efectúa un desarrollo análogo:

$$M_a = +K_a S_a V^2 (\alpha + \beta') (L' + \mu_a |\alpha + \beta'| - a) - \Phi l + K S V^2 \alpha (a - \mu \alpha)$$

Llegando a una condición de estabilidad para β_1 :

$$\beta_1 > \frac{L - 2\alpha_a \mu}{\mu_a}$$

Todo lo anterior es repetido para el caso de desplazamiento inverso del CP con α (No es necesario aquí mencionarlo de nuevo, una vez visto el procedimiento operativo de De Bothezat)

Las relaciones entre el ángulo de ataque y los valores de los ángulos geométricos de los empenajes delantero y trasero permiten actuar sobre el momento central, aunque estrictamente hablando, debido a que los desplazamientos del centro de presión son considerados lineales respecto de α , el momento central es cuadrático en α . Por esta razón, la solución estacionaria de la ecuación del momento para unas condiciones dadas de vuelo, si la tracción no pasa por el CDG, tiene 2 soluciones distintas de cero, y conducen a un sistema algebraico algo alambicado.

14.3.6 Análisis del fuselaje.

Utiliza el dudoso criterio de las quillas equivalentes. Este concepto lo utiliza también Ferber en su estudio sobre la estabilidad.

14. 4 El problema general de la estabilidad del aeroplano. La Estabilidad Longitudinal.

La definición de estabilidad que adopta De Bothezat es: *“L'appareil automatiquement stable est celui qui retrouve toujours de lui-même son régime sans l'intervention du pilote”*. Opta por un sentido restringido de la estabilidad ya que no aceptará que una respuesta oscilatoria, aunque sea amortiguada, significa que el avión sea estable. En este aspecto De Bothezat es tan extremado que llega a considerar que un avión cuyas oscilaciones se amortiguan muy lentamente es completamente equivalente a un aeroplano inestable, debido a que, si sobrevienen nuevas oscilaciones por una nueva causa perturbadora, se añadirían a las que no han sido todavía amortiguadas y esto debe tratar de evitarse. El tiempo de oscilación que está dispuesto a admitir para un amortiguamiento efectivo y seguro es de algunos segundos. Comprende, no obstante, que quizás no sea posible construir aviones con una respuesta así, y se vería obligado a aceptar oscilaciones amortiguadas.

De Bothezat se ciñe exclusivamente a los pequeños movimientos, y expone las razones para hacerlo así: en primer lugar, porque la experiencia así lo autoriza. También porque las leyes generales de la aerodinámica son mal conocidas: no permiten un tratamiento más general. Sin embargo, aunque se conocieran bien esas leyes, dado que conducirían a sistemas de ecuaciones que no son integrables, nos veríamos obligados de todos modos a recurrir al estudio de los pequeños movimientos para hacernos una cierta idea general del fenómeno. Y finalmente, en multitud de casos este tipo de tratamiento matemático de los problemas de la física ya ha demostrado su valor práctico. De Bothezat se manifiesta moderadamente optimista respecto de la posibilidad de resolver el problema de la estabilidad de los aviones que -dice- *“Paraît encore entourée d'un certain mystère”*.

Se plantea también una cuestión que está en el ambiente aeronáutico de la época: ¿Puede estimarse de una manera cuantitativa el grado de estabilidad de un aeroplano? Para De Bothezat la respuesta es sencilla y de carácter matemático: las raíces del polinomio

característico, si son reales, o las partes reales de las mismas, si son complejas, deben ser negativas para que el avión sea estable, y la menor raíz (en valor absoluto) es un indicador cuantitativo del grado de estabilidad del aeroplano.

Sin embargo, De Bothezat piensa que no basta con la regla de signos para las raíces ya mencionada, sino que los valores absolutos de las raíces están ligados con una propiedad fundamental de la estabilidad, que se propone explicar más adelante.

El esquema que sigue De Bothezat se basa en el descrito en la figura (14.5), y consiste en un proceso de perturbación lineal solamente del sistema longitudinal de ecuaciones. Por tanto, no comienza su desarrollo a partir del sistema completo tridimensional.

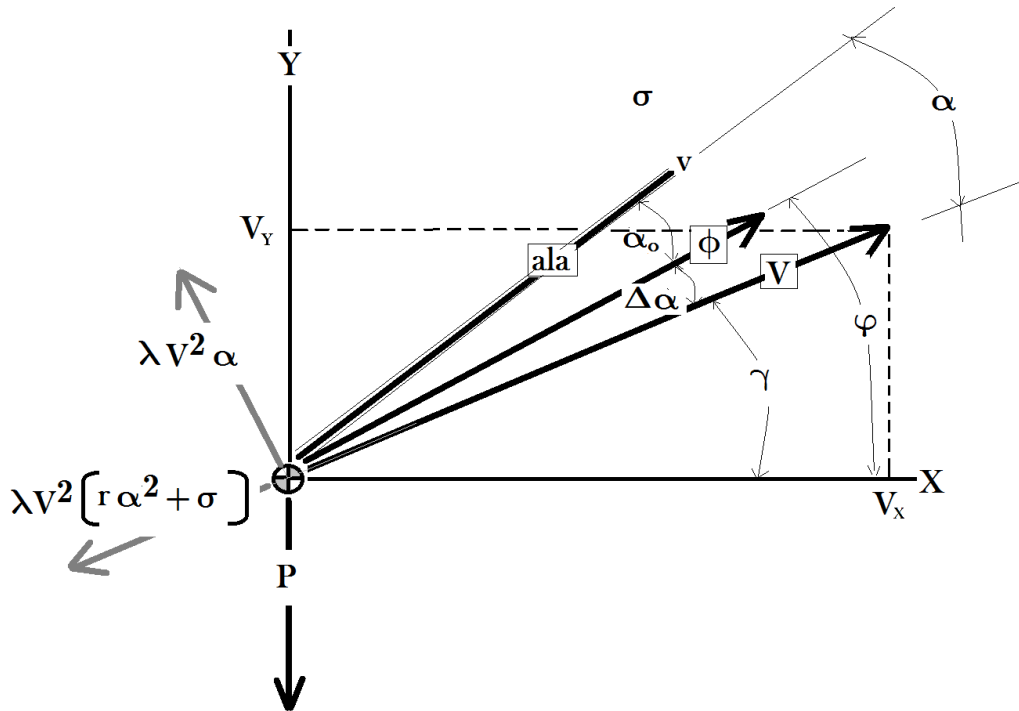


Figura 14.5: Sistema de referencia de velocidades, ángulos y fuerzas para la obtención de las ecuaciones linealizadas de la dinámica de un aeroplano en un plano vertical.

Las ecuaciones de la dinámica del movimiento en un plano vertical son, de acuerdo con lo establecido más arriba, utilizando la nomenclatura de Soreau en todo aquello que no es exclusivo de De Bothezat :

$$[e1] \quad m \frac{dV_x}{dt} = \Phi \cos \varphi - KSV^2 \alpha \sin \gamma - KV^2 (r\alpha^2 + \sigma) \cos \gamma$$

$$[e2] \quad m \frac{dV_y}{dt} = -P + \Phi \sin \varphi + KSV^2 \alpha \cos \gamma - KV^2 (r\alpha^2 + \sigma) \sin \gamma$$

$$[e3] \quad I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = cV_0^2 (\alpha_0 - \alpha) - aV \frac{d\varphi}{dt}$$

[14.16]

De las tres ecuaciones [14.16], la única que plantea interrogantes es la [e3], en la que la aparición del término $\left(-aV \frac{d\varphi}{dt}\right)$ se explica por la obtención, más arriba obtenida por De Bothezat, del momento generado por la velocidad angular de una placa [14.7]. Aparecen en la expresión del momento de cabeceo dos constantes $(c[Masa.Longitud], a[Masa])$, ambas supuestas positivas pero no directamente cuantificadas. ATENCIÓN: Ahora la constante c no es la cuerda alar).

Suponiendo que la pendiente es pequeña, tenemos:

$$\begin{aligned} V_x &= V \cos \gamma \approx V \\ V_y &= V \sin \gamma \approx V\gamma \end{aligned}$$

Las ecuaciones perturbadas, con pendiente¹⁶⁴ inicial nula, son:

$$[e1] \quad m \frac{d\Delta V}{dt} = -2KSV_0(r\alpha_0^2 + \sigma)\Delta V + KSV_0^2\alpha_0(1-2r\alpha_0)\Delta\alpha - (\Phi \sin \varphi_0 + KSV_0^2\alpha_0)\Delta\varphi$$

$$[e2] \quad mV_0 \frac{d(\Delta\varphi - \Delta\alpha)}{dt} = 2KSV_0\alpha_0\Delta V + KSV_0^2(1+r\alpha_0^2 + \sigma)\Delta\alpha + (-KSV_0^2(r\alpha_0^2 + \sigma) + \phi \cos \varphi_0)\Delta\varphi$$

$$[e3] \quad I \frac{d^2\Delta\varphi}{dt^2} = -cV_0^2\Delta\alpha - aV_0 \frac{d\Delta\varphi}{dt}$$

[14.17]

Llegamos a la matriz del sistema Lineal. La escribimos expresada ya en la variable de Laplace (s):

$$\begin{bmatrix} -ms - 2KSV_0(r\alpha_0^2 + \sigma) & KSV_0^2\alpha_0(1-2r) & 0 & -KSV_0^2\alpha_0 \\ 2KSV_0\alpha_0 & msV_0 + KSV_0^2(1+r\alpha_0^2 + \sigma) & 0 & -msV_0 - KSV_0^2(r\alpha_0^2 + \sigma) \\ 0 & -cV_0^2 & -sI_{YY} & -aV_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

¹⁶⁴ De Bothezat analizará más adelante el sistema lineal que aparece cuando la pendiente no es nula. Observará que únicamente cambia significativamente uno de los coeficientes de la ecuación característica, el

A_1 , que pasa a ser ahora: $A_1 = \frac{aV_0}{I_{YY}} \frac{2\phi(KSV_0^2 + \phi) - 2m^2g^2(2r-1)}{m^2V_0^2} + \frac{cV_0^2}{I_{YY}} \frac{3mg \sin \gamma_1}{mV_0}$. Se puede observar

que pendientes negativas pueden hacer que el coeficiente A_1 deje de ser positivo. Esta posibilidad no es mencionada por De Bothezat, que considera que la inclusión de la pendiente no cambia los aspectos sustanciales del desarrollo que está efectuando. Es una particularidad que Harper, ayudante de Bryan, hará notar, y será incorporada al libro de este en 1911. Existe, no obstante, una discrepancia notable: para Bryan el ascenso puede generar inestabilidad, al contrario que para De Bothezat.

[14.18]

De Bothezat considera que la ecuación característica de esta matriz, de 4º grado, es de tal calibre que hace imposible discusión con los métodos manuales tradicionales, y tampoco quiere considerar la posibilidad de simplificar aquellos términos que pudieran parecer pequeños en comparación con los demás, pues eso -piensa él- “falsea” el problema.

Sí, no obstante lo anterior, nosotros observamos los coeficientes del polinomio característico con el supuesto de tracción nula, llegaríamos a los siguientes valores:

$$A_0 = 2cK^2S^2V_0^5 (r^2\alpha_0^4 + \sigma^2 + \alpha_0^2(1+2r\sigma))$$

$$A_1 = KSV_0^4 (3cm(r\alpha_0^2 + \sigma) + 2aKS(r^2\alpha_0^4 + \sigma(1+\sigma) + \alpha_0^2(1-r+2r\sigma)))$$

$$A_2 = V_0^3 (cm^2 + KS(am(1+3r\alpha_0^2 + 3\sigma) + 2KSI_{YY}(r^2\alpha_0^4 + \sigma(1+\sigma) + \alpha_0^2(1-r+2r\sigma))))$$

$$A_3 = mV_0^2 (am + KSI_{YY}(1+3r\alpha_0^2 + 3\sigma))$$

$$A_4 = m^2V_0I_{YY}$$

[14.19]

Vemos que todos ellos son positivos si lo es la constante c . Esto exige que el empenaje sea posterior. (Recordemos que el CP del ala principal coincide con el CDG).

De Bothezat sugiere -siguiendo a Soreau- el valor $r = 1$, con $\sigma \ll 1$ De modo que, considerando despreciables las potencias no lineales de α_0 , llegaríamos a:

$$A_0 \approx 2cK^2S^2V_0^5 (\sigma^2 + \alpha_0^2)$$

$$A_1 \approx KSV_0^4 (3cm(r\alpha_0^2 + \sigma) + 2aKS\sigma)$$

$$A_2 \approx V_0^3 (cm^2 + KS(am + 2KSI_{YY}\sigma)) \quad [14.20]$$

$$A_3 = mV_0^2 (am + KSI_{YY})$$

$$A_4 = m^2V_0I_{YY}$$

El determinante de Routh tal como surge de los coeficientes completos no es apto para extraer conclusiones sencillas sobre la estabilidad, pero con los coeficientes simplificados, y suponiendo despreciable $\sigma \approx 0$, lo que

probablemente es una hipótesis excesiva, conduce a una condición de estabilidad tal como la siguiente:

$$(cm + aKS)(3cm + 2aKS)(am + KSI_{YY}) > 0 \quad [14.21]$$

Si suponemos, de modo coherente con las unidades físicas, que $a = cL^*$, siendo L^* una cierta longitud característica, obtendríamos como condición de estabilidad:

$$\left(c + \frac{KS k_y^2}{L^*} \right) > 0$$

Según esto, con las limitaciones propias de las hipótesis simplificativas introducidas, y con $c > 0$, el movimiento siempre sería estable. Si $c < 0$ la condición es

$$|c| < \frac{KS k_y^2}{L^*}$$

No obstante De Bothezat, después -según afirma- de haber ensayado muchos y diversos procedimientos, se inclina por estudiar las raíces de la ecuación característica mediante un procedimiento de Félix Klein [26] para las raíces reales y el de los índices de Cauchy [27] para la parte real de las raíces imaginarias.

Colateralmente De Bothezat concluirá -en polémica con Bryan y Williams [16]- que la estabilidad no está directamente relacionada “*per se*” con la velocidad.

Establece el polinomio característico, en el que la resistencia aerodinámica se ha igualado a la tracción y el peso a la sustentación, con la pendiente del vuelo nula. Los coeficientes son:

$$\begin{aligned} A_4 &= 1 \\ A_3 &= \frac{aV_0}{I_{YY}} + \frac{KSV_0^2 + 3\phi}{mV_0} = A + q_1 \quad \left\{ \text{Con} : A = \frac{aV_0}{I_{YY}}; \quad q_1 = \frac{KSV_0^2 + 3\phi}{mV_0} \right\} \\ A_2 &= \frac{aV_0}{I_{YY}} \frac{KSV_0^2 + 3\phi}{mV_0} + \frac{cV_0^2}{I_{YY}} + \frac{2\phi(KSV_0^2 + \phi) - 2m^2g^2(2r-1)}{m^2V_0^2} = Aq_1 + C + q_2 \quad \left\{ \text{Con} : C = \frac{cV_0^2}{I_{YY}} \right\} \\ A_1 &= \frac{aV_0}{I_{YY}} \frac{2\phi(KSV_0^2 + \phi) - 2m^2g^2(2r-1)}{m^2V_0^2} + \frac{cV_0^2}{I_{YY}} \frac{2\phi}{mV_0} = Aq_2 + Cq_3 \quad \left\{ \text{Con} : q_3 = \frac{2\phi}{mV_0} \right\} \\ A_0 &= \frac{cV_0^2}{I_{YY}} \frac{2g^2}{V_0^2} = Cq_4 \quad \left\{ \text{Con} : q_4 = \frac{2g^2}{V_0^2} \right\} \end{aligned} \quad [14.22]$$

Con las asignaciones establecidas para abreviar el desarrollo obtenemos la siguiente ecuación característica, que es algebraica de cuarto grado:

$$s^4 + (A + q_1)s^3 + (Aq_1 + q_2 + C)s^2 + (Aq_2 + Cq_3)s + Cq_4 = 0 \quad [14.23]$$

Los coeficientes $\{A, q_1, q_2, C, q_3, q_4\}$ dependen de las características del aeroplano y de las condiciones de vuelo; A caracteriza el amortiguamiento y C el par recuperador, según la ecuación establecida más arriba:

$$[e3] \quad I_{yy} \frac{d^2 \Delta \varphi}{dt^2} = -cV_0^2 \Delta \alpha - aV_0 \frac{d\Delta \varphi}{dt} \quad [14.24]$$

El procedimiento de Klein para las raíces reales¹⁶⁵ se describe, de modo sucinto, a continuación.

La ecuación característica puede ponerse como:

$$s + C \left(\frac{q_4 + sq_3 + s^2}{s(q_2 + sq_1 + s^2)} \right) + A = 0 \quad [14.25]$$

Estableciendo una correspondencia unívoca y recíproca, respectivamente entre los términos de esta ecuación y los de la recta:

$$y = ux + v = 0 \quad [14.26]$$

Es decir:

$$y = s \quad x = \frac{q_4 + sq_3 + s^2}{s(q_2 + sq_1 + s^2)} \quad [14.27]$$

$$u = C \quad v = A$$

Para obtener las raíces reales bastará con hallar los puntos de intersección de la recta $y = Cx + A$ con la curva

$$x = \frac{q_4 + yq_3 + y^2}{y(q_2 + yq_1 + y^2)} \quad [14.28]$$

Las ordenadas de estos puntos de intersección son los valores de las raíces reales.

Vemos que lo que procede ahora es analizar, del modo más general posible, los valores de los distintos coeficientes que intervienen en las expresiones anteriores. A esto dedicará De Bothezat los siguientes apartados de su tesis.

¹⁶⁵ Veremos en un capítulo posterior que Von Kármán y Trefftz utilizarán este mismo método para estudiar la estabilidad de los aeroplanos., y obtendrán una ecuación característica similar a la Ec. [14.23].

Tomará, lógicamente, sus datos de los aviones existentes en el momento en el que redacta su Tesis.

- (1) Sobre el coeficiente q_4 , De Bothezat establece que con seguridad, será siempre menor que la unidad y decreciente rápidamente con V_0 :

$$q_4 = \frac{2g^2}{V_0^2} \approx \frac{2(9.8)^2}{V_0^2} = 0 < \left(\frac{13.9 \frac{m}{s^2}}{V_0 \frac{m}{s}} \right)^2 < 1 \quad [14.29]$$

- (2) Sobre el coeficiente q_3 , que puede expresarse como

$$q_3 = \frac{2\phi}{mV_0} = \frac{\phi\sqrt{2}}{mg} \sqrt{q_4}, \text{ De Bothezat establece que, siendo } q_4 < 1, \text{ el}$$

parámetro q_3 será también menor que la unidad si $\frac{\phi}{mg} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ este cociente puede tomarse como al pendiente de la trayectoria, ya que para De Bothezat, ϕ equivale ahora a la resistencia en vuelo horizontal. Una pendiente a la que corresponda un ángulo de $\text{ArcTan}[\gamma] \approx \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \Rightarrow \gamma \approx 35.26^\circ$ es desorbitada. Por tanto,

puede considerarse razonable afirmar que: $0 < q_3 < 1$

$$\text{Además, podemos escribir: } \left(\frac{q_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\phi}{\sqrt{2mg}} \sqrt{q_4} \right)^2 = \frac{\phi^2}{2m^2g^2} q_4$$

$$\text{de modo que } \left(\frac{q_3}{2} \right)^2 - q_4 = q_4 \left(\frac{\phi^2}{2m^2g^2} - 1 \right) < 0 \quad [14.30]$$

Esto permite a De Bothezat afirmar que las raíces de la ecuación $q_4 + yq_3 + y^2 = 0$ son imaginarias, y -dado que ese trinomio es positivo para $y=0$, lo será para todos los valores $-\infty < y < +\infty$

- (3) Sobre el coeficiente $q_1 = \frac{KSV_0^2 + 3\phi}{mV_0}$. De Bothezat consideró que se

podría aceptar, para los valores típicos de α_0 , que este parámetro sería mayor que la unidad para las velocidades de la época:

$$\begin{aligned} \phi &\approx mg \tan \gamma_0 & mg &= KSV_0^2 \alpha_0 \\ q_1 &= \frac{KSV_0^2 + 3\phi}{mV_0} \approx \frac{g}{V_0} \left(\frac{1}{\alpha_0} + 3 \tan \gamma_0 \right) \approx \frac{g}{V_0} \left(\frac{1}{\alpha_0} + \dots \right) > 1 \end{aligned} \quad [14.31]$$

Puede verse también que basta una velocidad en valor numérico - no en unidades- igual a la aceleración de la gravedad para ver que $q_1 > 1$

$$q_1 = \frac{KSV_0^2 + 3\phi}{mV_0} \approx \frac{KSV_0}{m} \left(\left[\frac{V_0}{g} \right] \right) + \dots > 1 \quad [14.32]$$

(4) Consideremos ahora el coeficiente $q_2 = \frac{2\phi(KSV_0^2 + \phi) - 2m^2g^2(2r-1)}{m^2V_0^2}$,

que podemos escribir como: $q_2 = q_3 \frac{KSV_0^2 + \phi}{m^2V_0^2} - q_4(2r-1)$, De Bothezat

demuestra también que $q_2 < q_1$.

Complementariamente, la ecuación $y^2 + q_1y + q_2 = 0$ tiene como raíces

$$y_{1,2} = -\frac{q_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q_1}{2}\right)^2 - q_2} \quad \text{y la expresión subradical tiene el valor de:}$$

$$\left(\frac{q_1}{2}\right)^2 - q_2 = \frac{(KSV_0^2 - \phi)^2 + 8m^2g^2(2r-1)}{4m^2V_0^2} \quad [14.33]$$

Entonces De Bothezat establece que las dos raíces de la ecuación $y^2 + q_1y + q_2 = 0$ son reales y negativas.

Todas estas consideraciones van encaminadas a trazar la forma estándar de la ecuación $x = \frac{q_4 + yq_3 + y^2}{y(q_2 + yq_1 + y^2)}$, con:

$$\begin{aligned} A &= \frac{aV_0}{I_{YY}}; \quad C = \frac{cV_0^2}{I_{YY}} \\ q_1 &= \frac{KSV_0^2 + 3\phi}{mV_0} \\ q_2 &= \frac{2\phi(KSV_0^2 + \phi) - 2m^2g^2(2r-1)}{m^2V_0^2} \\ q_3 &= \frac{2\phi}{mV_0} \\ q_4 &= \frac{2g^2}{V_0^2} \end{aligned} \quad [14.34]$$

La misma versión conceptual pero con la nomenclatura actual de los coeficientes A y C es:

$$C = -\left(\frac{\rho S_w c_w V_0^2}{2I_{YY}}\right) CM_\alpha; \quad A = -\left(\frac{\rho S_w c_w V_0}{4I_{YY}}\right) CM_q \quad [14.35]$$

Observamos que las dos derivadas aerodinámicas relevantes son, como era de esperar, CM_α, CM_q

La recta cuya intersección con $x = \frac{q_4 + yq_3 + y^2}{y(q_2 + yq_1 + y^2)}$ indica las raíces reales será:

$$y = -\left(\frac{\rho S_w c_w V_0^2}{2I_{YY}}\right) CM_\alpha x - \left(\frac{\rho S_w c_w V_0}{4I_{YY}}\right) CM_q \quad [14.36]$$

Vemos que los dos parámetros que definen esta recta son las dos derivadas aerodinámicas CM_q y CM_α ,

Para tratar de ser más específico, De Bothezat traza la gráfica correspondiente, según parece, a un avión genérico del tipo “Voisin”, cuyas características, estimadas aproximadamente, son:

$$q_1 \approx 5.275 \text{ rad / s} \quad q_2 \approx 0.752 \text{ rad / s}^2 \quad q_3 \approx 0.245 \text{ rad / s} \quad q_4 \approx 0.481 \text{ rad / s}^2 \quad [14.36B]$$

La representación $x(y)$ para este avión es la que muestra la figura (14.6). Pueden verse las cuatro zonas inter asintóticas. (El origen de coordenadas aparece muy desplazado hacia la derecha del lector)

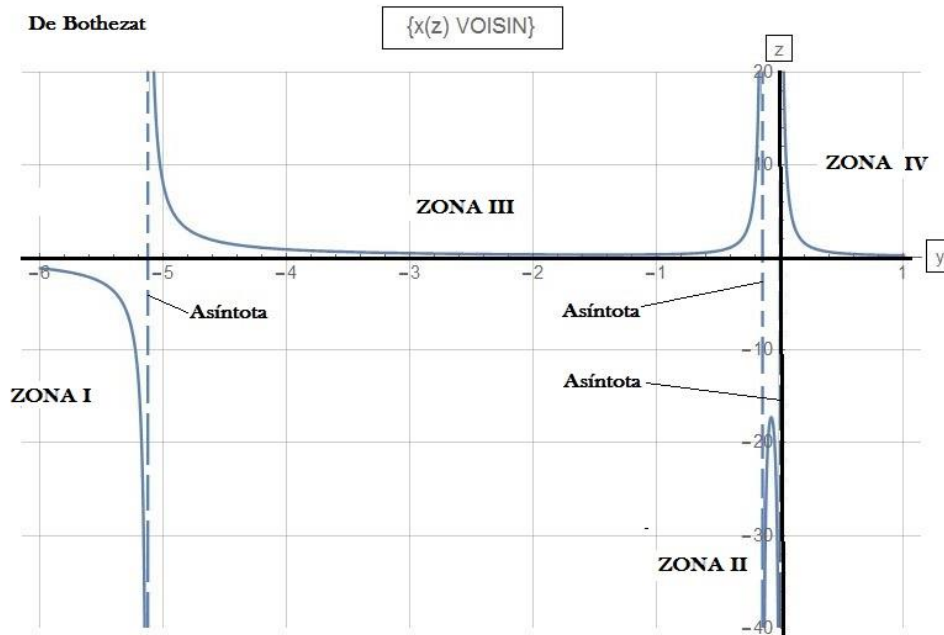


Figura 14.6: Ramas de la Ecuación Característica de Estabilidad para el aeroplano Ref. [14.36B], con indicación de asíntotas y definición de zonas según tangencias posibles.

Esta representación, con pequeñas variantes, es común a todos los aviones, dentro del marco de hipótesis asumidas. Así, por ejemplo, para un avión¹⁶⁶ de caza francés, posterior en 70 años al parametrizado por De Bothezat en 1911, tendríamos un gráfico como el adjunto (Fig. 14.7):

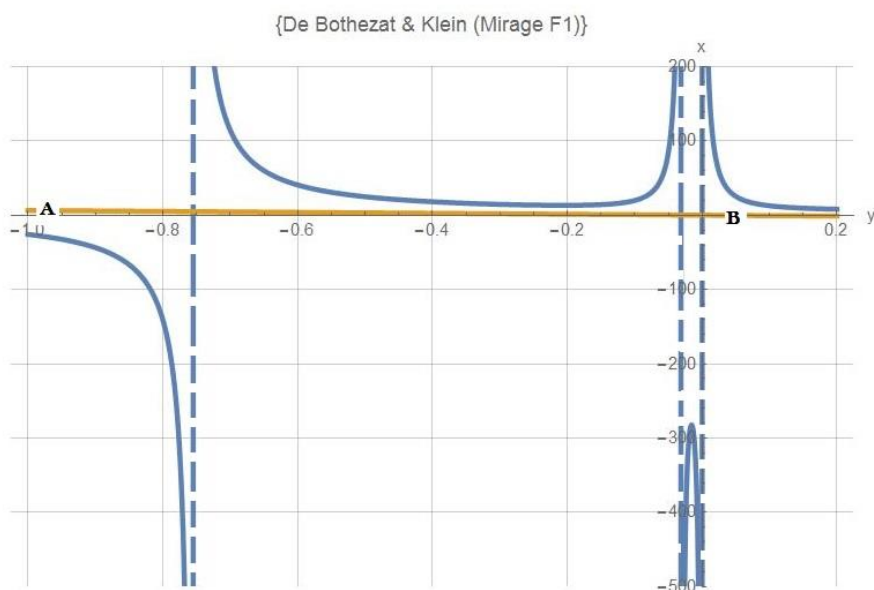


Figura 14.7: Ramas de la Ecuación Característica de Estabilidad para el aeroplano (Cfr. Nota 7) junto con la recta AB propia de este mismo avión. (Puede verse que apenas es visible y casi se confunde con el eje horizontal).

La línea AB del gráfico de la Fig. 14.7 es la recta cuya ecuación es $y = \left(-\frac{\rho S_w c_w}{4} \frac{V_0}{I_{yy}} CM_q \right) x - \frac{\rho S_w c_w}{2} \frac{V_0}{I_{yy}} CM_\alpha$ con sus coeficientes particularizados para las condiciones de vuelo del caso. Se puede ver que NO corta en ningún punto a la curva $x(y)$, lo que indica que no hay ninguna raíz real, como suele suceder en los modos propios del movimiento longitudinal de los aviones.

De Bothezat completa lo anterior mediante el estudio de la parte real de las raíces complejas de la ecuación característica mediante el método de Cauchy. En síntesis, se trata de lo que sigue.

La ecuación característica del sistema cuyas raíces queremos estudiar es: $f(s) = s^4 + A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0$. Supondremos que las cuatro raíces son complejas. La base del procedimiento consiste en el teorema de Cauchy según el cual el número de ceros de una función $f(s)$ de la variable compleja $s = x + iy$ que hay en un recinto cerrado viene dado por el valor de la integral

¹⁶⁶ Avions Marcel Dassault "Mirage FI". masa = 10.000 kg, V = 150 m/s, z = 0 Vuelo horizontal equilibrado. Modelo Matemático DatCom_OB_1345; Hoskyns_University; 2004.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(s)}{f(s)} ds \quad \text{con: } f(s) = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow N = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi \quad [14.37]$$

Esta integral debe tomarse a lo largo de un contorno sobre el cual $f(s)$ no se anule y dentro del contorno no haya ningún polo. Puede verse que esto equivale a decir que el número de ceros contenidos en el contorno considerado es igual al número de veces que el argumento φ aumenta en el ángulo 2π cuando la variable s recorre una vez todo el contorno cerrado.

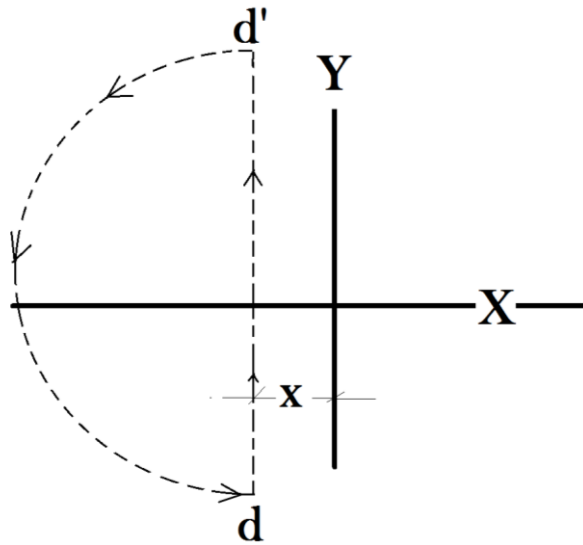


Figura 14.8: Recinto para determinar el número de raíces de la Ecuación Característica por el Teorema de Cauchy.

De Bothezat solamente está ahora interesado en la parte real de las raíces, así que considera el contorno formado por la recta vertical que dista una distancia x del eje Y junto con el semicírculo de radio infinito, tal como sugiere la Fig. (14. 8). (Si desease efectuar el mismo tipo de averiguaciones para la parte imaginaria de las raíces, trabajaría de modo análogo con una recta “ y ” paralela al eje X).

Recorremos el contorno haciendo variar x desde $-\infty$ hasta $+\infty$ para barrer todo el plano de la variable s .

De Bothezat calcula, en primer lugar la integral $N = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi$. Para ello separa la parte real de la imaginaria en la función $f(s)$:

$$f(s) = U + iV$$

Con:

$$\begin{aligned}
 U &= y^4 - \psi_2 y^2 + \psi_4 & V &= -\psi_1 y^3 + \psi_3 y \\
 \psi_1 &= A + q_1 + 4x \\
 \psi_2 &= C + q_2 + 3q_1 x + 6x^2 + A(q_1 + 3x) \\
 \psi_3 &= Aq_2 + Cq_3 + 2(C + Aq_1 + q_2)x + 3(A + q_1)x^2 + 4x^3 \\
 \psi_4 &= Cq_4 + (Aq_2 + Cq_3)x + (C + Aq_1 + q_2)x^2 + (A + q_1)x^3 + x^4
 \end{aligned}$$

[14.38]

El contorno se compone de dos partes: una recta y una semicircunferencia. La integral correspondiente al círculo de radio infinito la domina el término en s^4 y la variación será 4 veces π , por tanto, $N_{circ} = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi = 2$ [14.39]

Para la variación del argumento φ de la función $f(s)$ cuando z recorre la recta debido a que en ella la coordenada x es constante y la coordenada y varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$, de manera que los cambios de signo de U y de V son indicativos de un corte en el eje. Si llamamos m al número de veces que el contorno recorrido por $f(s)$ corta al eje de las V -en un sentido arbitrario definido como positivo- y n el número de veces que este contorno lo corta en sentido negativo tendremos, para la parte recta del contorno:

$$N = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi = \frac{m-n}{2} \quad [14.40]$$

La diferencia $(m-n)$ viene dada por el número de variaciones de signo del sistema $\{U, V\}$ con la coordenada “ y ” variando desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Este número de variaciones De Bothezat lo fija mediante un teorema de Sturm relacionado con la obtención del máximo común divisor. El proceso es laborioso.

De Bothezat obtiene algún resultado concreto notable, por ejemplo: “*Es imposible hacer un aeroplano cuya ecuación característica tenga todas las raíces imaginarias y con la parte real negativa, que no tenga dos de ellas con la parte real comprendida en el intervalo $(0, -1)$* ”. Esto, para de Bothezat, es señal de que *todos* los aviones son lentos en recuperar su régimen original, y puede significar un problema de estabilidad, desde su particular punto de vista.

Es una propiedad general e irremediable de todos los aviones, y -afirma- contradice la certeza instintiva que se ha tenido siempre de que si se le da a un avión la forma apropiada, con empenajes horizontales adecuados, sería posible lograr la estabilidad completa. De Bothezat demuestra que esto no es posible.

No obstante, los requisitos de De Bothezat para declarar un avión “estable” se han demostrado en la práctica aeronáutica excesivamente exigentes.

Es interesante observar que menciona la posibilidad de resolver este problema mediante dispositivos automáticos que controlen elementos móviles del avión.

14. 5 Conclusiones relativas a la Estabilidad Longitudinal.

- (1) Todos los aviones responden lentamente ante las perturbaciones de su régimen nominal de vuelo.
- (2) Es imperativo tratar de lograr aviones que carezcan de oscilaciones en su respuesta. Esto puede lograrse mediante dispositivos automáticos, en cuyo detalle De Bothezat no se propone entrar.
- (3) De Bothezat solamente tratará de este último tipo de aviones; es decir, de aquellos cuyas raíces de la ecuación característica puede ser analizadas mediante el método de Klein. Para estos, sugiere un modo de estimar las dimensiones más adecuadas desde el punto de vista de la estabilidad siguiendo un proceso inverso al realizado para determinar las raíces: pasar de las raíces deseadas a la obtención del amortiguamiento y del par de recuperación, a través de sus parámetros característicos A y C sobre los gráficos de Klein.
- (4) La difundida opinión de que la estabilidad depende de la velocidad de vuelo descansa sobre un malentendido: en el trabajo de Bryan & Williams [16] estos autores no han explicitado suficientemente el problema, y han pensado que la velocidad aparecía como un criterio claro de estabilidad. Posteriormente, Bryan ha reconocido, tal como Ferber [20] se lo había hecho notar, que la estabilidad debe depender de las características (proporciones) del avión.
- (5) Analiza también la influencia de la excentricidad de la tracción respecto del centro de gravedad. Dado que la tracción depende de la velocidad, aparecerá un nuevo término dependientes de esta en la ecuación del momento de cabeceo. Es la única variación a introducir en el sistema establecido anteriormente. El estudio de De Bothezat es detallado y análogo al que ya ha realizado en el caso de par central, pero más general y con alguna incertidumbre respecto al comportamiento de las hélices. No nos ha parecido necesario incluirlo ahora en el presente estudio.

14.6 Ecuaciones generales de la dinámica de un aeroplano en tres dimensiones.

El estudio lo realiza para pequeños movimientos del aeroplano, a partir del régimen horizontal rectilíneo. De Bothezat afirma que el primer intento de establecer las ecuaciones generales del movimiento del aeroplano se debe a F. Ferber [20], aunque este consideró despreciables las influencias de las velocidades angulares. Hemos visto ya en otro capítulo las aportaciones del francés.

De Bothezat definirá un sistema de referencia (Fig. 14.9) con origen en el centro de gravedad del avión y con sus ejes paralelos a un sistema de ejes fijos $GXYZ$. Respecto de este sistema se orienta el triedro fijo al avión $GX_1Y_1Z_1$ mediante tres ángulos -los ángulos de Euler- de asiento longitudinal θ , asiento lateral ϕ y rumbo ψ , en la nomenclatura habitual.

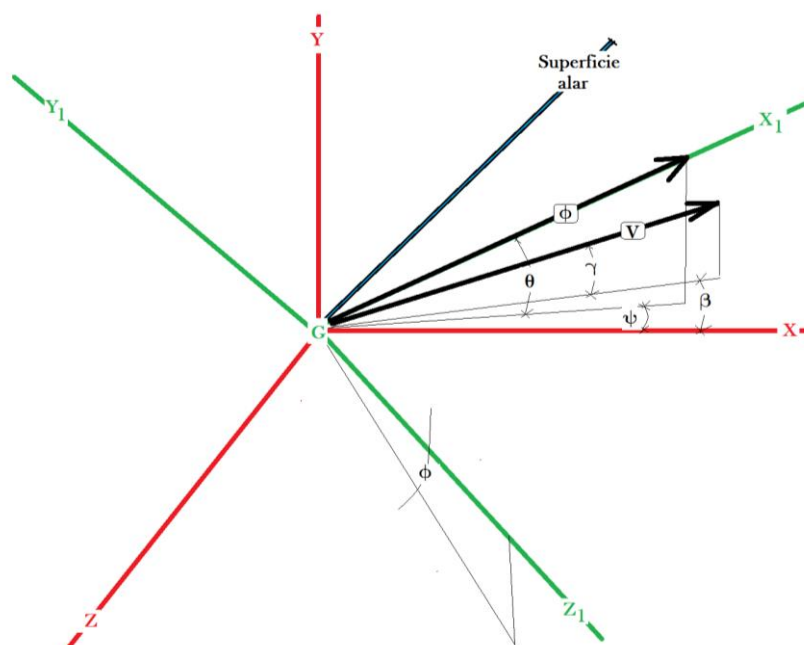


Figura 14.9: Esquema tridimensional de De Bothezat para el análisis de la estabilidad de un aeroplano.

Sin necesidad de seguir detalladamente la obtención de las ecuaciones, mencionaremos algunas particularidades. De Bothezat acepta que los ejes $GX_1Y_1Z_1$ pueden tomarse como principales de inercia, lo que simplificará las ecuaciones de las aceleraciones angulares, y establece unas expresiones para los amortiguamientos debidos a las variables laterales, de no muy precisa definición.

Dado que el objeto de nuestro trabajo es exclusivamente la estabilidad longitudinal, no será necesario ir más allá del dato que recoge De Bothezat de que se obtiene la separación del sistema de ecuaciones en dos sistemas lineales independientes; el primero de ellos, correspondiente a la dinámica longitudinal que lógicamente coincide con el ya estudiado previamente en este mismo capítulo.

De Bothezat considera que estos dos sistemas lineales proporcionarán una primera aproximación suficientemente exacta para el estudio de las pequeñas desviaciones alrededor del equilibrio. Esto se debe fundamentalmente a que, como hemos visto, el punto menos claramente conocido de las leyes aerodinámicas es el desplazamiento del centro de presión, mientras que los demás aspectos aerodinámicos que afectan a los aviones han sido ya, en primera aproximación, bastante bien determinados. Pero De Bothezat cree haber demostrado -en el capítulo sobre el Par Central- que la influencia del sentido de este desplazamiento es prácticamente irrelevante para un avión con más de una superficie sustentadora.

14. 7. Conclusiones generales.

- (1) De Bothezat, como ya se ha dicho, no acepta que un avión cuyos modos son oscilatorios pueda llamarse estable.
- (2) Considera que hay dos modos de estabilizar longitudinal e intrínsecamente un avión: el sistema *americano* (Lo denomina “*Sistema Wright*”) y el sistema *francés*.
- (3) El sistema americano –así dice- consiste en descentrar el eje de tracción, de modo que esta genere momento de cabeceo proporcional a la velocidad. Según De Bothezat, este no es un buen sistema: primero porque depende del funcionamiento de los motores y segundo porque no estabiliza frente a las variaciones del ángulo de ataque.
- (4) El *sistema francés* utiliza empenajes horizontales que generan automáticamente la estabilización y es mucho mejor que el *americano* pues solamente depende de la forma geométrica del aeroplano. Desde todo punto de vista debe preferirse este sistema ante cualquier otro. Le convence poco que el estabilizador trasero sea todo él móvil, pues prefiere separar la acción de control del ángulo de ataque, de la acción estabilizadora para evitar interferencias entre ellas. Sospecha que este tipo de estabilización permitiría probablemente obtener modos no oscilatorios lo que considera una gran ventaja.
- (5) No obstante, piensa también que ninguno de los dos sistemas puede garantizar la estabilidad, salvo en viento en calma o con viento regular lentamente variable: una estabilidad completa no se puede lograr debido a que los tiempos de respuesta – como De Bothezat cree haber demostrado- son necesariamente relativamente grandes.
- (6) Como resultado final de su tesis, predice que el problema de la estabilidad de los aviones, tanto longitudinal como –con mayor razón- la lateral direccional, requerirá el diseño adecuado y la incorporación de superficies móviles, y que es este un campo en el que se encontrarán no pequeñas dificultades.
- (7) Globalmente consideradas, las pesimistas predicciones teóricas de De Bothezat sobre la estabilidad de los aviones no se han visto confirmadas.

Bibliografía

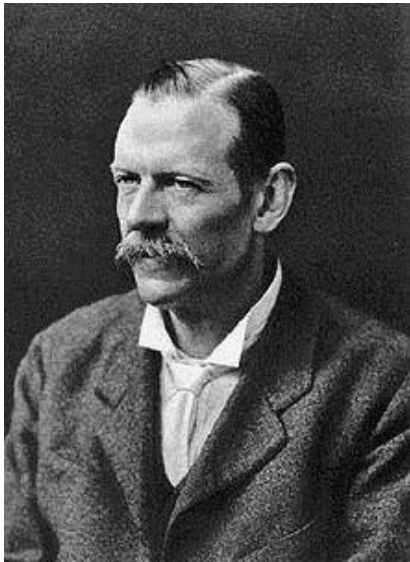
- [1] De Bothezat, G. “Étude de la Stabilité de L’ Aeroplane”, Thèse présentée a la Faculté des Sciences de Paris. (Janvier de 1911) Avec un préface de Paul Painlevé. H. DUNOD ET E. PINAT, EDITEURS. PARIS (1911).

- [2] "THE PAPERS OF WILBUR & ORVILLE WRIGHT". Including Chanute-Wright letters and other papers. (Vol. I; 1899-1905 & Vol. II; 1906-1948). Mervin McFarlan, Editor. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York. (1953).
- [3] Painlevé, P. "Cours de Mécanique de l'Aviation" École supérieure d'Aéronautique. Paris. (1908).
- [4] Painlevé, P. "Théorie de l'Aéroplane"(Extrait du cours de Mécanique de L'Ecole Polytechnique de Paris, (1908-1909).
- [5] Painlevé, P. "Étude sur le régime normal d'un Aéroplane". La Technique Aeronautique, Num. 1, Janvier (1910).
- [6] Painlevé, P. "L'Aéroplane", IV Congrès International d'Aéronautique. Nancy, 18-23 septembre. Dunod et Pinat, Editeurs. (1909).
- [7] Eiffel, G. "Recherches expérimentales sur la resistance de l'air". Maretheux, Paris. (1907).
- [8] Eiffel, G. "Installation d'un laboratoire d'aérodynamique". Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France. (1910)
- [9] Eiffel, G. "La resistance de l'air. Examen des formules et des expériences". Dunod et Pinat, Paris. (1910).
- [10] Soreau, R. "État actuel et avenir de l'aviation". Librairie des sciences aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS. (1908).
- [11] Rateau, A. L'Aerophile, No 15. Aout. Paris. (1909).
- [12] Finsterwalder, S. "Aërodynamik". Leipzig. Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band IV, Teil II, No 17. (1902).
- [13] Lanchester, F. W. "AERODYNAMICS, constituting the first volume of a complete work on Aerial flight"; Archibald Constable & C., London. (1907).
- [14] Routh, E. J. "A Treatise on the Stability of a given state of motion, particularly steady motion". Being the Essay to which the Adams Prize was adjudged in 1877, in the University of Cambridge. MCMILLAN & CO. London. (1877).
- [15] Routh, E. J. "The elementary part of a treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies". Part I. MACMILLAN & CO. LONDON. (1897).
- [16] Bryan, G. H. & Williams, W. E. "The Longitudinal Stability of Aerial Gliders", "Proc. Roy. Soc. London", ser. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).
- [17] Cayley, G. "ON AERIAL NAVIGATION (I), (II), & (III)", "A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts" (London, (I) Nov. 1809, (II) Feb. 1810, Mar. 1810)

- [18] Pénaud, A. “*L’ Aeroplane Automoteur avec équilibre automatique*”. “L’Aéronaute”, Bulletin Mensuel International de la Navigation Aérienne; No. 1-12 Paris. (1872).
- [19] Lilienthal, O. “Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Ein Beitrag zur systematik der Flugtechnik”. R. Gaertners Verlagbuchhandlung. Berlin.(1889).
- [20] Ferber, F. “L’AVIATION, Ses debuts-son développement”. Berger-Levrault & Cie Éditeurs. Paris/Nancy. (1908).
- [21] Soreau, R. “État actuel et avenir de l’aviation”. Librairie des sciences aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS. (1908).
- [22] Crocco, G. “Sur la Stabilité des Dirigeables”; Note á l’Académie dei Lincei, Nov. 1904 et Académie des Sciences, Dic. (1904).
- [23] Joëssel. “Rapport sur des expériences relatives aux gouvernails”; Repport 9; “Mémorial du Génie Maritime”. (1873).
- [24] G. Eiffel. “La Résistance de l’Air et l’ Aviation”, Dunod et Pinat, Paris. 1910.
- [25] Avanzini, G. “Nuove riserche sulla resistenza de’fluidi”; Saggi scientifici e letterari dell’ Academia di Padova; Padova; pp. 96-113. (1794).
- [26] Félix Klein; “Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus. Teil 1, Aritmetik, Algebra, Analysis“. (1908)”. “Matemática Elemental desde un punto de vista superior. Aritmética y álgebra”; Ibero-Americana. Buenos Aires (1948).
- [27] Goursat, E. “Cours d’Analyse mathématique”, Vol. 2. Gauthier-Villars. Imprimeur-Libraire. Paris. (1910).
- [28] NASA SP-4103; Cap. 4. (2004).

Capítulo 15

G. H. Bryan (1864-1928)



167

Contenido

15.1 Semblanza Biográfica

15.2 Documentos de Referencia.

15.3 Descripción de Contenido.

15.3.1 Ecuaciones generales del movimiento

15.3.2 Concepto de Derivada Aerodinámica

15.3.3 Separación en dos sistemas lineales no acoplados

¹⁶⁷ https://en.wikipedia.org/wiki/George_H._Bryan#/media/File:George_Hartley_Bryan_1864-1928.JPG. (14.06.2017)

15.3.4. Estudio del Sistema Simétrico

15.3.4.1 Derivadas Rotatorias

15.3.4.2 Derivadas Aerodinámicas

15.3.5 Estabilidad longitudinal de un sistema sustentador de un solo plano.

15.3.6 Separación de Oscilaciones Largas y Cortas

15.3.6.1 Estudio de las Oscilaciones Cortas

15.3.6.2 Estudio de las Oscilaciones Largas

15.3.6.3 Estudio del carácter de las oscilaciones.

15.3.6.3.1 Características de las Oscilaciones Cortas

15.3.6.3.2 Características de las Oscilaciones Largas

15.3.7 Comparación de los dos modos oscilatorios.

15.3.8 Efecto de la inclinación de la trayectoria

15.3.9 Estudios complementarios y Conclusiones sobre el Movimiento Simétrico

15.3.10 Anexo con descripción de Problemas pendientes de estudio.

15.4 Análisis Crítico-Histórico

15.5 Anexo. I.

15.6 Anexo II

Bibliografía.

15.1 Nota Biográfica.

Nació en Cambridge (UK) el 1 de marzo de 1864, falleció en Bordighera (Italia) el 13 de octubre de 1928. Su padre, Robert Purdie Bryan, falleció siendo Bryan joven. Su madre y abuela asumieron su educación. Se formó con tutores privados en Italia, Francia y Alemania. Fue admitido en Cambridge (1883) y se graduó en 1886, siendo elegido *fellow* de Peterhouse en 1889. Profesor de Matemática Pura y Aplicada en el *University College* de North Wales, de Bangor, donde permaneció –salvo un período entre 1917-1920- hasta su jubilación en 1926. Miembro de la *Royal Society* (1895) por sus trabajos sobre la teoría cinética de los gases y miembro honorario de Peterhouse (1915). Se interesó por la física estadística y la termodinámica, con valiosas publicaciones en estos campos; entre sus amigos y conocidos se contaron L. Boltzmann, A. Sommerfeld, Planck, E. Mach y Van

der Waals. Conoció las publicaciones de O. Lilienthal y las investigaciones de N. E. Zhukowsky sobre el vuelo de planeo de las aves. La enfermedad final fue breve; la noche anterior a su fallecimiento participó en el Congreso Matemático Internacional de Bolonia.

15.2 Documento de Referencia

“Stability in Aviation”. *“An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motions of Airplanes”*. By G. H. Bryan¹⁶⁸, Sc. D., F. R. S. MACMILLAN AND CO., LIMITED. ST. MARTIN`S STREET, LONDON, 1911. [1]

15.3 Descripción del contenido

El presente estudio se centra en el análisis de la estabilidad longitudinal (Estabilidad simétrica, en terminología de Bryan), y abarca los 6 primeros capítulos del libro; los 2 siguientes versan sobre el movimiento lateral-direccional y los 3 últimos recogen sus conclusiones, los resultados de otros investigadores y también proponen algunos problemas para futuros estudios.

15.3.1 Ecuaciones generales del movimiento.

Bryan establece las ecuaciones de la dinámica, considerando el avión como un cuerpo rígido, siguiendo a E. J. Routh [2].

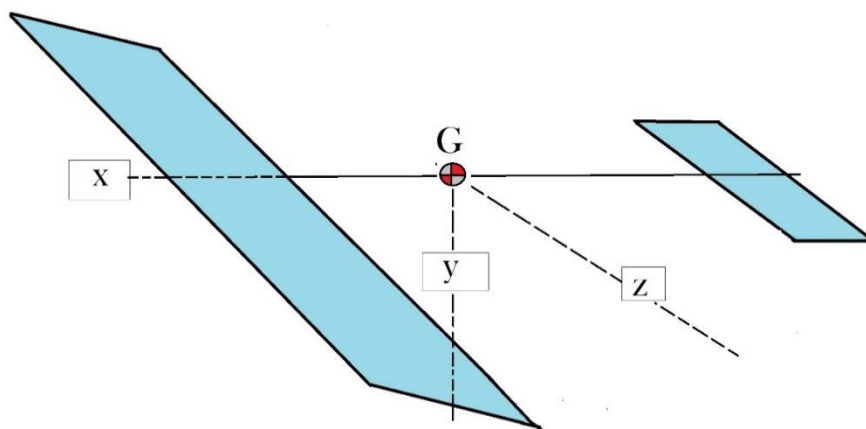


Figura 15.1: Sistema de Ejes de Referencia, ligados al aeroplano, utilizado por Bryan.

Adoptamos ahora la nomenclatura¹⁶⁹ habitual para los ejes de referencia, ligeramente distinta de la mostrada en la Fig. 15.1, y las variables de la dinámica de un avión, velocidades lineales y angulares, signos, inercias,... etc... expresado en ejes cuerpo, con el origen en el centro de masas, sin detenernos ahora en precisar explícitamente el significado de cada uno, pues son fácilmente captables¹⁷⁰. Denominamos T a la tracción, cuya línea de acción pasa a la distancia h del CDG y es paralela al eje X .

¹⁶⁸ Con la colaboración –dadas las características del texto, nada despreciable– de G. H. Harper.

¹⁶⁹ Cfr. Por ejemplo, las referencias [9], [10], [11], [12], [13], [14] y [15]

¹⁷⁰ Pueden encontrarse en el Capítulo “Nomenclatura”.

(Nota: en la figura (15.1) pueden verse los ejes cuerpo utilizados por Bryan. Nosotros no seguimos ahora este convenio).

Las ecuaciones de la dinámica de un sólido rígido son:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad m \left(\frac{du}{dt} + qw - rv \right) &= T + X - m g \sin \theta \\
 [2] \quad m \left(\frac{dv}{dt} + ru - pw \right) &= Y + m g \cos \theta \sin \phi \\
 [3] \quad m \left(\frac{dw}{dt} + pv - qu \right) &= Z + m g \cos \theta \cos \phi \\
 [4] \quad I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} - I_{xz} p q + (I_{zz} - I_{yy}) q r &= L \\
 [5] \quad I_{yy} \dot{q} + I_{xz} (p^2 - r^2) + (I_{xx} - I_{zz}) p r &= M + T h \\
 [6] \quad I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + I_{xz} r q + (I_{yy} - I_{xx}) p q &= N \\
 [7] \quad p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\
 [8] \quad q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\
 [9] \quad r &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi
 \end{aligned} \tag{15.1}$$

15.3.2 Concepto de “Derivada Aerodinámica”.

Bryan acepta la hipótesis de que las fuerzas aerodinámicas $\{X, Y, Z\}$ y los momentos $\{L, M, N\}$ son proporcionales al cuadrado de la velocidad relativa del viento incidente V_0 , y desarrolla el concepto de “Derivada Aerodinámica” para caracterizar los coeficientes consecuencia de la linealización que se propone realizar.

El principio de linealización permite omitir los productos de incrementos pequeños de las variables $\{\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta p, \Delta q, \Delta r\}$ que aparecen en los desarrollos matemáticos, y los incrementos de las fuerzas y momentos pueden expresarse exclusivamente mediante funciones de las variables que se muestran a continuación:

$$\{X, Y, Z, L, M, N\} = \varphi_{\text{cuadrática}} \{U, v, w, p, q, r\} \quad \text{con: } U = U_0 + u$$

Nótese que estos incrementos son lineales en las variables fundamentales y están referidos a U_0 .

$$\{\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta L, \Delta M, \Delta N\} = \varphi \{p U_0, q U_0, r U_0, u U_0, v U_0, w U_0\}$$

Esto implica que la forma matemática de cualquier coeficiente de las denominadas por Bryan “derivadas aerodinámicas” es función lineal de U_0 :

$$\frac{\partial\{X, Y, Z, L, M, N\}}{\partial\{p, q, r, u, v, w\}} = \varphi_{LINEAL} \{U_0\} \quad [15.2]$$

Con las condiciones de equilibrio incorporadas las ecuaciones linealizadas quedan así:

$$\begin{aligned} [1] \quad m \frac{d\Delta u}{dt} &= -mg \Delta\theta \cos\theta_0 + \Delta T + \Delta u X_u + \Delta w X_w + \Delta q X_q \\ [2] \quad m \left(\frac{d\Delta v}{dt} + rU_0 \right) &= mg \Delta\phi \cos\theta_0 + \Delta v Z_v + \Delta p Z_p + \Delta r Z_r \\ [3] \quad m \left(\frac{d\Delta w}{dt} - \Delta q U_0 \right) &= -mg \Delta\theta \sin\theta_0 + \Delta u Z_u + \Delta w Z_w + \Delta q Z_q \\ [4] \quad I_{xx} \Delta\dot{p} - I_{xz} \Delta\dot{r} &= \Delta v L_v + \Delta p L_p + \Delta r L_r \\ [5] \quad I_{yy} \Delta\dot{q} &= \Delta u M_u + \Delta w M_w + \Delta q M_q + (\Delta T) h \\ [6] \quad I_{zz} \Delta\dot{r} - I_{xz} \Delta\dot{p} &= \Delta v N_v + \Delta p N_p + \Delta r N_r \end{aligned} \quad [15.3]$$

15.3.3 Separación en dos sistemas no acoplados.

Al constituido por las ecuaciones [1], [3] y [5] de [15.4] Bryan lo denomina *Sistema Simétrico*

$$\begin{aligned} [1] \quad m \frac{d\Delta u}{dt} &= -mg \Delta\theta \cos\theta_0 + \Delta T + \Delta u X_u + \Delta w X_w + \Delta q X_q \\ [3] \quad m \left(\frac{d\Delta w}{dt} - \Delta q U_0 \right) &= -mg \Delta\theta \sin\theta_0 + \Delta u Z_u + \Delta w Z_w + \Delta q Z_q \\ [5] \quad I_{yy} \Delta\dot{q} &= \Delta u M_u + \Delta w M_w + \Delta q M_q + (\Delta T) h \end{aligned} \quad [15.4]$$

Al constituido por las ecuaciones [2], [4] y [6] de [15.4] lo llama *Sistema Asimétrico*

$$\begin{aligned} [2] \quad m \left(\frac{d\Delta v}{dt} + rU_0 \right) &= mg \Delta\phi \cos\theta_0 + \Delta v Z_v + \Delta p Z_p + \Delta r Z_r \\ [4] \quad I_{xx} \Delta\dot{p} - I_{xz} \Delta\dot{r} &= \Delta v L_v + \Delta p L_p + \Delta r L_r \\ [6] \quad I_{zz} \Delta\dot{r} - I_{xz} \Delta\dot{p} &= \Delta v N_v + \Delta p N_p + \Delta r N_r \end{aligned} \quad [15.5]$$

Estos nombres *-simétrico, asimétrico-* se corresponden con el tipo de variables asociadas a cada uno de los dos sistemas.

15.3.4 Estudio del Sistema Simétrico.

Nos centraremos en el primero de ellos, pues estudiamos ahora sólo la estabilidad longitudinal. Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes supone soluciones matemáticas del tipo exponencial para cada variable:

$$si: \Delta u, \Delta w, \Delta q \propto e^{\lambda t} \Rightarrow \frac{d\Delta u}{dt} = \lambda u, \quad \frac{d\Delta w}{dt} = \lambda w, \quad \frac{d\Delta q}{dt} = \lambda \Delta q \quad [15.6]$$

Y también:

$$\frac{d\Delta \theta}{dt} = \lambda \Delta \theta, \quad \Delta q = \frac{d\Delta \theta}{dt}$$

Bryan establece, a partir del sistema linealizado, la matriz correspondiente al sistema simétrico M_S :

$$M_S = \begin{bmatrix} \lambda \left(\lambda + \frac{X_u}{m} \right) & \lambda \frac{X_w}{m} & \lambda \left(\frac{X_q}{m} - g \cos \theta_0 \right) \\ \frac{Z_u}{m} & \left(\lambda + \frac{Z_w}{m} \right) & \left(\frac{g \sin \theta_0}{\lambda} + U_0 + \frac{Z_q}{m} \right) \\ \frac{M_u}{I_y} & \frac{M_w}{I_y} & \left(\lambda + \frac{M_q}{I_y} \right) \end{bmatrix} \quad [15.7]$$

El problema de analizar la estabilidad del sistema queda reducido a tratar de identificar las condiciones necesarias para que las raíces del polinomio característico sean negativas si son reales, o tengan su parte real negativa, si son imaginarias. Para esto le resultan muy aptas las Condiciones de Estabilidad establecidas por E. J. Routh [3]. El núcleo matemático fundamental de la herramienta de trabajo de Bryan consiste en una detallada y certera aplicación de los procedimientos descritos en el mencionado trabajo de Routh.

- **Los coeficientes del Polinomio Característico.**

El determinante de la matriz “ M_S ” conduce a una polinomio de cuarto grado:

$$pol = A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 \quad [15.8]$$

Siendo el valor de cada uno de sus coeficientes¹⁷¹:

$$\begin{aligned}
 A_4 &= 1 \\
 A_3 &= \frac{M_q}{I_y} + \frac{X_u}{m} + \frac{Z_w}{m} \\
 A_2 &= -\frac{M_w U_0}{I_y} - \frac{M_u X_q}{I_y m} + \frac{M_q X_u}{I_y m} - \frac{M_w Z_q}{I_y m} - \frac{X_w Z_u}{m^2} + \frac{M_q Z_w}{I_y m} + \frac{X_u Z_w}{m^2} \\
 A_1 &= -\frac{M_w U_0 X_u}{I_y m} + \frac{M_u U_0 X_w}{I_y m} - \frac{M_w X_u Z_q}{I_y m^2} + \frac{M_u X_w Z_q}{I_y m^2} + \dots \\
 &\dots + \frac{M_w X_q Z_u}{I_y m^2} + \frac{M_q X_w Z_u}{I_y m^2} - \frac{M_u X_q Z_w}{I_y m^2} + \frac{M_q X_u Z_w}{I_y m^2} + \frac{g M_u \cos \theta_0}{I_y} - \frac{g M_w \sin \theta_0}{I_y} \\
 A_0 &= -\frac{g M_w Z_u \cos \theta_0}{I_y m} + \frac{g M_u Z_w \cos \theta_0}{I_y m} - \frac{g M_w X_u \sin \theta_0}{I_y m} + \frac{g M_u X_w \sin \theta_0}{I_y m}
 \end{aligned} \tag{15.9}$$

Las condiciones de Routh indican que, para que las raíces de $pol = A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0$ sean negativas o de parte real negativa, deben tener el mismo signo todos los coeficientes A_4, A_3, A_2, A_1, A_0 , y también el término compuesto siguiente $R_0 = A_1 (A_3 A_2 - A_4 A_1) - A_3^2 A_0$ denominado discriminante de Routh. Para nuestro caso, esto significa:

$$A_3, A_2, A_1, A_0, (A_3 A_2 A_1 - A_1^2 - A_3^2 A_0) > 0$$

Es interesante observar que el ángulo de asiento longitudinal del avión θ_0 solamente aparece en dos de los cinco coeficientes: A_0 y A_1

- Las denominadas “Primitivas Condiciones de Estabilidad”

La definición de “derivada aerodinámica” que acabamos de establecer, junto con las condiciones de Routh, permiten a Bryan concluir que la estabilidad dependerá de la velocidad de vuelo, según el esquema que se muestra a continuación. Bryan repite aquí lo que ya expuso en el trabajo que publicó, junto con Williams, en 1904 [5].

¹⁷¹ Se han establecido ahora las ecuaciones de forma que el coeficiente $A_4 = 1$, lo que difiere ligeramente del modo de presentación de Bryan. Por lo demás, el cambio es irrelevante.

La dependencia de los coeficientes A_i respecto de U_0 (Ec. [15.2]) resulta ser la siguiente, siendo los valores $k_i = Cte$:

$$\begin{aligned}
 A_4 &= 1; \\
 A_3 &\propto k_{A3} U_0; \\
 A_2 &\propto k_{A2} U_0^2; \\
 A_1 &\propto k_{A11} U_0^3 + k_{A12} U_0; \\
 A_0 &\propto k_{A0} U_0^2; \\
 R_0 &\propto k_{R1} U_0^6 + k_{R2} U_0^4 + k_{R3} U_0^2;
 \end{aligned}
 \tag{15.10}$$

Ya se ha visto en el capítulo 9 la conclusión que Bryan establece, sobre la dependencia de la estabilidad respecto de la velocidad de vuelo, al estudiar la estabilidad de los planeadores [5].

Esta misma conclusión aparece ahora expresada de modo menos radical, ya que es mitigada indicando que, si completamos las conclusiones respecto de las limitaciones de la estabilidad con las ecuaciones de equilibrio estacionario –que son requisito previo imprescindible de todo estudio de estabilidad- las limitaciones no muestran ya su dependencia de la velocidad de vuelo y pasan a hacerla explícita a través de las características geométricas, máxicas y aerodinámicas propias del aeroplano.

Bryan denomina “*Primitivas Condiciones de Estabilidad*” a las que explícitamente contienen la variable “velocidad de vuelo U_0 ”, argumentando que, para obtenerlas, no se han utilizado las ecuaciones de equilibrio. Esta afirmación, en rigor, no describe con precisión el proceso que ha seguido: para establecer las ecuaciones linealizadas que le permiten obtener las “*Primitivas Condiciones de Estabilidad*” ha fijado unas condiciones de equilibrio, –entre otras, la velocidad de vuelo U_0 – y estas están implícitamente presentes en las ecuaciones linealizadas.

Bryan da el nombre de “*Condiciones modificadas de Estabilidad*” a aquellas en las que ya no aparece la velocidad U_0 porque ha sido eliminada utilizando las ecuaciones que fijan el equilibrio. En realidad, no se trata de una modificación de las condiciones de estabilidad, sino de unas expresiones matemáticas de las mencionadas condiciones que tienen en cuenta los datos de partida y no caen en la confusión de considerar variable lo que, por hipótesis, es constante. Parte de las conclusiones del trabajo publicado en 1904 por Bryan & Williams descansaba sobre la ambigüedad anterior, que fue ya criticada por Ferber [6] y otros.

- **Expresión de las derivadas aerodinámicas para alas planas.**

El análisis de Bryan para este tipo de superficies parte de considerar conocidas la fuerza aerodinámica total “ R ” y la posición del Centro de Presión, ambas como funciones

del ángulo de ataque α y de la velocidad angular q . Se supone nula la resistencia aerodinámica tangencial al ala y la fuerza "R" es perpendicular a la placa sustentadora, tal como describe, con la sencillez de los propios dibujos de Bryan, la Figura (15.2)

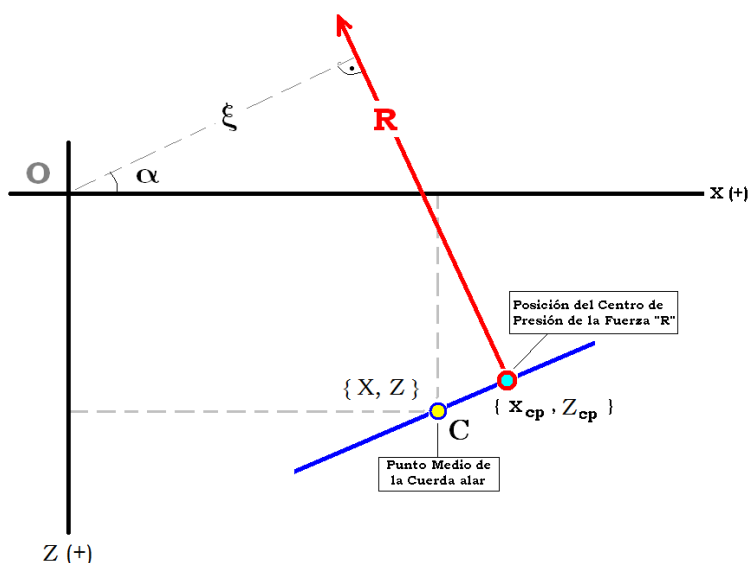


Figura 15.2: Esquema de Ejes de referencia y nomenclatura para el estudio del vuelo de una placa plana. (No son ahora los de la Fig. 15.1). La velocidad U es paralela al eje X .

Las coordenadas del Centro de Presión $\{x_{CP}, z_{CP}\}$, se toman a partir del punto medio de la cuerda alar C por comodidad, debido a que para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ el centro de presión está allí. Se observa inmediatamente que las componentes de la fuerza y el momento generado por R , son:

$$X = -R \sin \alpha \quad Z = -R \cos \alpha \quad M = R \xi \quad [15.11]$$

Bryan acepta para la fuerza R el valor siguiente, ya conocida por los trabajos de otros pioneros:

$$R = K S U^2 f(\alpha) \quad [15.12]$$

Y la distancia que separa el Centro de Presión (CP) del punto medio de la cuerda alar C es:

$$CP = a \phi(\alpha) \quad [15.13]$$

En esta expresión "a" es una constante con dimensiones de longitud e igual a la semi cuerda, según indica el dibujo (15.3), que es un detalle del gráfico anterior:

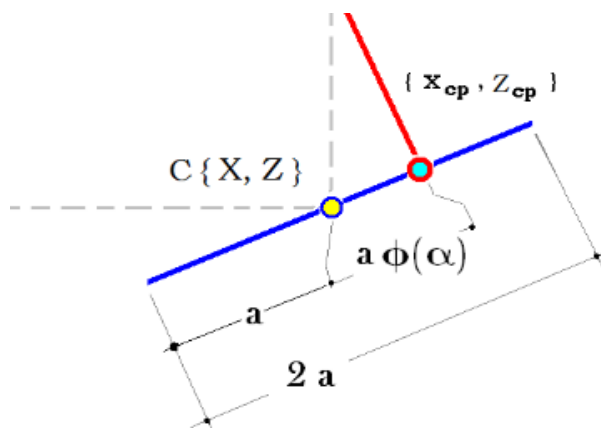


Figura 15.3: Esquema y nomenclatura para el estudio del vuelo de una placa plana. (Detalle)

Las dos relaciones funcionales que caracterizan el comportamiento de la fuerza aerodinámica y la posición de la resultante respecto del ángulo de ataque α son $f(\alpha)$ y $\phi(\alpha)$, y deberán determinarse experimentalmente¹⁷². En los cálculos que desarrolla Bryan, la Fuerza Aerodinámica y su posición, junto con las Derivadas Aerodinámicas, expresadas en forma general, quedan del modo siguiente (Ref. Figura 15.2).

Fuerza Total y posición del Centro Aerodinámico. La expresión admitida por Bryan para la fuerza es, como hemos visto,

$$R = K S U_0^2 f(\alpha_0)$$

Si ahora suponemos unos componentes de la velocidad de perturbación {u, w, q}:

$$R + \Delta R = K S (U_0 + u)^2 f(\alpha_0 + \Delta\alpha) \approx K S (U_0^2 + 2U_0u + \dots) f(\alpha_0 + \Delta\alpha) \quad [15.14]$$

Con:

$$f(\alpha_0 + \Delta\alpha) \approx f(\alpha_0) + \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \Delta\alpha \quad [15.15]$$

Hasta términos de primer orden el efecto de estos incrementos, para Bryan, supone:

(1) Un incremento de la velocidad resultante:

$$U \approx U_0 + u + qz \Rightarrow (U_0 + u + qz)^2 \approx U_0^2 + 2U_0u + \dots \quad [15.16]$$

¹⁷² Para los ejemplos numéricos Bryan utilizará las expresiones dadas por S. L. Langley [7] para $f(\alpha)$ y por E. Joëssel [8] para $\phi(\alpha)$, exactamente igual que en su trabajo de 1904.

(2) Un aumento del ángulo de ataque de la forma:

$$\Delta\alpha \approx \frac{w-xq}{U_0 + \Delta u + qz} \approx \frac{w-xq}{U_0} \quad [15.17]$$

De modo que el incremento en la fuerza aerodinámica debido a un cambio en magnitud y dirección de la velocidad es:

$$\Delta R \approx 2K S U_0 f(\alpha_0)u + K S U_0^2 \left(\frac{w-xq}{U_0} \right) \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \quad [15.18]$$

Los *nuevos* valores perturbados de R y de la distancia ξ , en la medida en que dependen de la velocidad de traslación, serán:

$$R = K S U_0^2 f(\alpha_0) + 2K S U_0 f(\alpha_0)u + K S U_0^2 \left(\frac{w-xq}{U_0} \right) \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \quad [15.19]$$

$$\xi \approx x \cos \alpha_0 + z \sin \alpha_0 + a \phi(\alpha_0) + a \left(\frac{w-xq}{U_0} \right) \frac{\partial \phi(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0}$$

Observemos que lo que acaba de realizar Bryan implica asumir un sistema de referencia con el eje X coincidente con la velocidad. Las derivadas aerodinámicas se corresponden con las generales que obtuvo en 1904 [5] sin más que incorporar la condición de $w_0 = 0$

15.3.4.1 Derivadas Rotatorias

Bryan introduce también la posibilidad de que existan unas derivadas aerodinámicas, que denomina “Derivadas Rotatorias”, que se corresponden con las derivadas

$$f_q(\alpha_0) = U_0 \frac{\partial f(\alpha)}{\partial q} \Big|_{\alpha_0} \quad \text{y} \quad \phi_q(\alpha_0) = U_0 \frac{\partial \phi(\alpha)}{\partial q} \Big|_{\alpha_0} \quad [15.20]$$

Estas derivadas representan la variación de la fuerza R y de la posición del CP cuando el ala es sometida a una velocidad angular “ q ”.

Una placa giratoria respecto de un punto ajeno a la placa se descompone en una traslación y un giro. Uno de los efectos de esta velocidad angular -ya lo hemos visto- es que genera velocidades de traslación que afectan tanto a la velocidad como al ángulo de ataque. Bryan asume ahora una cosa complementaria y diferente: piensa que el giro de una placa sustentadora alrededor de un punto situado en su propia cuerda puede ocasionar efectos sobre la sustentación y sobre la posición del centro de presión. Bryan -como todos en su época- desconoce todavía cómo influye, pero sabe que deben formar parte del modelo matemático del sistema. Esto es más riguroso que el procedimiento empleado por

Ferber, Soreau y De Bothezat para analizar el efecto de las velocidades angulares, aunque tiene todavía solamente un contenido puramente matemático.

Menciona que la ausencia de datos experimentales conlleva grandes dificultades para obtener soluciones realistas que permitan aplicaciones prácticas. Recomienda que se investigue la influencia de las dos funciones $f_q(\alpha)$ y $\phi_q(\alpha)$ aunque, mediante consideraciones de carácter físico, considera que su influencia no será muy grande. La aparición del factor velocidad " U_0 " en las fórmulas anteriores se debe a la conveniencia de mantener coherencia con la hipótesis de que las fuerzas dependen del cuadrado de la velocidad. Estas derivadas tienen, por tanto, dimensiones de longitud.

Observemos que las condiciones de Equilibrio Estacionario son:

$$\begin{aligned} X_0 &= K S U_0^2 f(\alpha_0) \sin \alpha_0 \\ Z_0 &= K S U_0^2 f(\alpha_0) \cos \alpha_0 \\ M_0 &= f(\alpha_0) (x \cos \alpha_0 + z \sin \alpha_0 + a \phi(\alpha_0)) \end{aligned} \quad [15.21]$$

15.3.4.2 Derivadas Aerodinámicas.

Derivadas correspondientes al coeficiente de fuerza X:

$$\begin{aligned} X_u &= 2K S U_0 f(\alpha_0) \sin \alpha_0 \\ X_w &= K S U_0 \left. \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \sin \alpha_0 \\ X_q &= K S U_0 \left(x \left. \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} - 2 z f(\alpha_0) + f_q(\alpha_0) \right) \sin \alpha_0 \end{aligned} \quad [15.22]$$

Derivadas correspondientes al coeficiente de fuerza Z:

$$\begin{aligned} Z_u &= 2K S U_0 f(\alpha_0) \cos \alpha_0 \\ Z_w &= K S U_0 \left. \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \cos \alpha_0 \\ Z_q &= K S U_0 \left(x \left. \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} - 2 z f(\alpha_0) + f_q(\alpha_0) \right) \cos \alpha_0 \end{aligned} \quad [15.23]$$

Derivadas correspondientes al coeficiente del momento M:

$$\begin{aligned}
 M_u &= 2K S U_0 f(\alpha_0)\xi \\
 M_w &= K S U_0 \left(\left. \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \xi + a f(\alpha_0) \left. \frac{\partial \phi(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \right) \\
 M_q &= K S U_0 \left(\left(x \left. \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} - 2z f(\alpha_0) + f_q(\alpha_0) \right) \xi - f(\alpha_0) \left(a \left. \frac{\partial \phi(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} + a \phi_q(\alpha_0) \right) \right)
 \end{aligned}$$

[15.24]

Todas ellas se refieren ahora a un solo plano sustentador.

En el caso de que existan dos o más planos, Bryan considera que las reacciones aerodinámicas pueden considerarse independientes unas de otras y los efectos entre alas simplemente aditivos. Esta hipótesis implica que el aire que incide en una placa no ha sido perturbado por la desviación de la corriente generada por las demás superficies, ni por el retardo en el establecimiento de la corriente estacionaria en el plano trasero cuando cambia α .

Con razonable cautela, Bryan recomienda que se investiguen experimentalmente con mayor profundidad estos factores, porque es consciente de que su influencia podría ser grande.

- **Estudio de casos particulares para planos sustentadores estrechos.**

Modelo aerodinámico asumido y comparación con el actual.

Bryan comienza la aplicación de la base matemática descrita a superficies planas estrechas sometidos a ángulos de ataque pequeños. Las razones para la elección de estas superficies son: evitar la influencia de la curvatura del perfil alar y de las todavía no bien conocidas variaciones del centro de presión.

Considera suficientemente probada la ley del seno para la función $f(\alpha) \approx \sin \alpha$ cuando se trata de planos estrechos. Siendo normalmente pequeño el valor de α , de manera bastante discrecional Bryan asumirá $\cos \alpha \approx 1$ y $\sin \alpha \approx \alpha$ cuando lo considere oportuno de un modo aparentemente discrecional.

Vemos así que las Derivadas Aerodinámicas establecidas por Bryan, respetando las otras hipótesis, suponen una “Resistencia” aerodinámica proporcional a $\sin \alpha$ y a la superficie alar, pero no incluyen, tal como las escribe, el efecto de forma en planta del ala que afecta profundamente a la pendiente de la curva de sustentación alar CL_a . El modelo aerodinámico que adopta Bryan podría exponerse, con conceptos aerodinámicos actuales, de acuerdo con lo siguiente:

La expresión “*Resistencia Aerodinámica*”, para Bryan (y sus contemporáneos), engloba la fuerza total aerodinámica (Sustentación normal a la velocidad y resistencia paralela a la velocidad) y no sólo lo que actualmente denominamos “*Resistencia*”. Además, supone que esta resistencia total actúa perpendicularmente a la placa.

De ahí proviene la apariencia ligeramente desconcertante de las expresiones que escribe: el modelo físico y la representación geométrica interfieren entre sí, dando lugar a combinaciones de aspecto visual peculiar.

Comparamos ahora la expresión de Bryan para la “*Resistencia Total*”, con la que se utiliza actualmente, asumiendo una curva Polar de coeficientes constantes:

Bryan escribe para la sustentación de una placa de superficie S:

$$(1911) \quad R = KSU_0^2 \sin \alpha \approx KSU_0^2 \alpha$$

Actualmente se escribe, para esa misma fuerza:

$$(\text{Actual}) \quad R = \frac{1}{2} \rho S U_0^2 \sqrt{CD^2 + CL^2}$$

O de modo más explícito en α para una placa plana o perfil sin curvatura:

$$(\text{Actual}) \quad R = \frac{1}{2} \rho S U_0^2 \sqrt{(CL_\alpha \alpha)^2 + \left(CD_0 + \frac{CL_\alpha^2 \alpha^2}{\pi AR e} \right)^2}$$

Es conveniente también establecer la analogía entre R y la sustentación L y la resistencia D estrictamente consideradas, teniendo en cuenta que se cumplen las relaciones siguientes entre los coeficientes de fuerzas en ejes cuerpo (CX, CZ) y en ejes viento (CD, CL). Como es lógico, R es expresable tanto en función de (CX, CZ) como de (CD, CL) si nos mantenemos en un plano vertical.

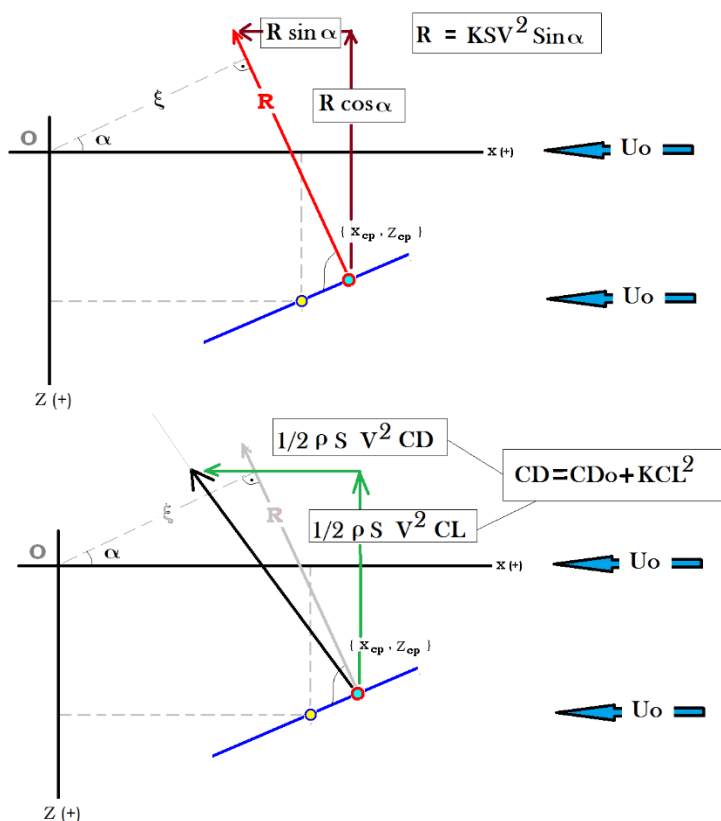


Figura 15.4: Comparación entre el modelo aerodinámico para las fuerzas de Bryan (1911) -gráfico superior- y el modelo actual -gráfico inferior.

$$\begin{aligned}
 CX &= -CD \cos \alpha + CL \sin \alpha & CD &= -CX \cos \alpha - CZ \sin \alpha \\
 CZ &= -CD \sin \alpha - CL \cos \alpha & CL &= +CX \sin \alpha - CZ \cos \alpha
 \end{aligned}
 \tag{15.25}$$

Las fuerzas, según el esquema habitual actual, se descomponen en dos, perpendiculares entre sí, y el discernimiento entre una y otra proviene de si actúan según la corriente o perpendicularmente a ella: esto discrimina lo que es “sustentación”, normal a la trayectoria, de lo que es “resistencia”, opuesta al movimiento y tangente a la trayectoria.

A partir de aquí, con un ángulo α determinado, se establecen los valores de las fuerzas X y Z, y conocido el ángulo θ de asiento longitudinal puede obtenerse el valor de la pendiente de la trayectoria, que en vuelo estacionario los estudios de los pioneros muchas veces asumen nula o casi nula.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(año 1911)} & \text{(año Actual)} \\
 R \approx KSU_0^2 \alpha & R \approx \frac{1}{2} \rho S U_0^2 \sqrt{CD^2 + CL^2} \\
 L \approx KSU_0^2 \alpha & L \approx \frac{1}{2} \rho S U_0^2 CL_\alpha \alpha \\
 D \approx KSU_0^2 \alpha^2 & D \approx \frac{1}{2} \rho S U_0^2 \left(CD_0 + \frac{CL_\alpha^2 \alpha^2}{\pi AR e} \right)
 \end{array} \quad [15.26]$$

O, expresado en forma de coeficiente, de acuerdo con una adimensionalización razonable:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(año 1911)} & \text{(Actual)} \\
 CL \approx \frac{KSU_0^2 \alpha}{KSU_0^2} = \alpha & CL \approx CL_\alpha \alpha \\
 CD \approx \frac{KSU_0^2 \alpha^2}{KSU_0^2} = \alpha^2 & CD \approx \left(CD_0 + \frac{CL_\alpha^2 \alpha^2}{\pi AR e} \right)
 \end{array} \quad [15.27]$$

Las diferencias con las expresiones actuales permiten intuir las limitaciones del modelo aerodinámico que Bryan utiliza. A pesar de ello, los resultados que logra son notables.

Si desarrollamos el radical de la segunda expresión, según una Polar de coeficientes constantes, obtenemos finalmente, despreciando términos de menor entidad, una cierta convergencia entre la expresión de Bryan y la actual. Esta convergencia es tanto mayor cuanto menores sean el coeficiente de Resistencia Parásita y el ángulo de ataque. También se aproxima más cuanto mayor es la eficiencia aerodinámica máxima del perfil alar. De paso, observamos también el significado de la constante **K** utilizada por Bryan; tiene dimensiones de densidad.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(Bryan,1911)} & R = K S U_0^2 \sin \alpha \\
 \text{luego:} & \\
 \text{(Bryan,1911)} & K \Rightarrow \frac{1}{2} \rho CL_\alpha \quad \text{(Actual)}
 \end{array} \quad R \approx \frac{1}{2} \rho S U_0^2 CL_\alpha \sin \alpha \quad \text{(Actual)}$$

[15.28]

Bryan establece que la estabilidad de un aeroplano se ve poco afectada por el hecho de subir o bajar la altura relativa a la que se encuentran los planos unos respecto

de otros, pero las fuerzas tangenciales debidas a resistencias aerodinámicas deben ser proporcionalmente pequeñas comparadas con las sustentaciones para que este principio pueda adecuadamente aplicarse. De hecho, es práctica habitual hoy en día realizar una primera aproximación académica al estudio de la estabilidad aceptando esta hipótesis.

15.3.5 Estabilidad longitudinal de un sistema de un plano sustentador¹⁷³.

Este caso resulta particularmente ilustrativo para comprender el método de trabajo de Bryan. Estableceremos también una comparación con el “*modus operandi*” actual.

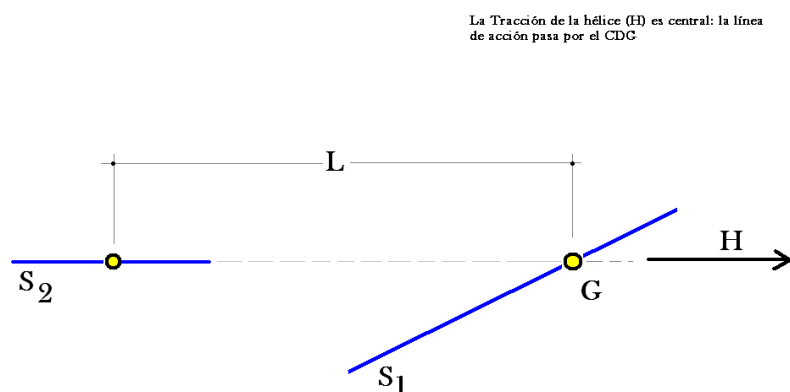


Figura 15.5: Esquema de Avión Elemental con estabilizador trasero estudiado por Bryan.

Las características del sistema a estudiar se describen de la manera siguiente:

- (1) Dos superficies (S1) y (S2) dispuestas horizontalmente tal como muestra el dibujo. La superficie principal es (S1) y la secundaria (S2), situada *por detrás* de la principal, tomando el eje X positivo en el sentido de la dirección de vuelo.
- (2) Se supone el peso soportado completamente por el ala (S1) que está inclinada un ángulo α_1 mientras que la superficie posterior (S2) actúa solamente a modo de plano auxiliar, y está situada de tal modo que su ángulo de ataque α_2 es nulo. (La función que Bryan le asigna es la estabilizar el conjunto ante cualquier perturbación, devolviendo a S1 a su ángulo de ataque inicial y a S2 a su ángulo de ataque nulo, pero no consiste en soportar parte del peso del avión)
- (3) La distancia entre los centros de presión de las dos alas es L. La línea de acción de la tracción de la hélice pasa por el CDG (A esto lo denomina Bryan

¹⁷³ La descripción nominal puede resultar confusa: este modo de nombrar se debe a que solamente sustenta un plano; el otro –en el supuesto de Bryan ahora- solamente estabiliza, pero en vuelo estacionario no soporta carga.

“*Tracción Central*”). Está dirigida a lo largo de la línea de vuelo que se supone ahora horizontal.

NOTA: como ya hemos mencionado, una importante limitación del desarrollo teórico de Bryan reside en que admite para la constante K un valor único y el mismo para todas las superficies alares, con independencia de la forma en planta del ala. Esto limita significativamente la eventual validez general de sus conclusiones cuando Bryan las ofrece en una forma matemática precisa.

Es evidente que, en estas circunstancias hipotéticas, la resultante R del empuje del aire sobre S_1 debe pasar por el CDG, que debe coincidir con el CP de S_1 , o estar en la normal correspondiente, para que no exista un momento M que tienda a hacer girar el avión alrededor de su CDG.

Aplicaremos el modo de obtener las Derivadas Aerodinámicas ya establecido, teniendo en cuenta que se trata de dos alas cada una de ellas con su respectivo ángulo de ataque, y tratadas aditivamente, como hace Bryan, sin considerar la existencia de una desviación ni retardo de la corriente, pero NO aceptaremos ahora que la constante K sea necesariamente la misma en las dos superficies. Nos apartamos así del desarrollo que realiza Bryan, para darle más realismo. Las expresiones serán fácilmente convertibles.

Esto conduce a los siguientes resultados cuyo cálculo se muestra ahora detalladamente:

$$\begin{aligned}
 X_u &= 2K_1S_1U_0 \sin^2 \alpha_{01} & X_w &= K_1S_1U_0 \sin \alpha_{01} \cos \alpha_{01} & X_q &= 0 \\
 Z_u &= K_1S_1U_0 \sin \alpha_{01} \cos \alpha_{01} & Z_w &= K_1S_1U_0 \cos^2 \alpha_{01} - K_2S_2U_0 & Z_q &= -K_2S_2U_0L \\
 M_u &= 0 & M_w &= -K_2S_2U_0L & M_q &= K_2S_2U_0L^2
 \end{aligned}$$

[15.29]

La influencia de cada superficie es claramente aparente en las correspondientes derivadas, y conducen a la siguiente matriz para el sistema simétrico “ M_S ”

$$M_S = \begin{bmatrix}
 \lambda \left(\lambda - \frac{2K_1S_1U_0 \sin^2 \alpha_1}{m} \right) & -\lambda \frac{K_1S_1U_0 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1}{m} & -g \cos \theta_0 \\
 -\frac{2K_1S_1U_0 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1}{m} & \left(\lambda - \frac{(K_2S_2U_0 + K_1S_1U_0 \cos^2 \alpha_1)}{m} \right) & \left(U_0 + \frac{K_2S_2U_0L}{m} - \frac{g \sin \theta_0}{\lambda} \right) \\
 0 & \frac{K_2S_2U_0L}{I_y} & \left(\lambda - \frac{K_2S_2U_0L^2}{I_y} \right)
 \end{bmatrix}$$

[15.30]

La condición de estabilidad se verá que depende solamente del discriminante de Routh $[R] = A_1(A_3A_2 - A_4A_1) - A_3^2A_0$. Será de este coeficiente del que obtendrá Bryan sus principales conclusiones.

El determinante de “ M_s ” conduce al siguiente polinomio característico que ofrece un aspecto menos sencillo que el original de Bryan debido a la distinción que nosotros hacemos entre K_1 del ala delantera y K_2 del ala trasera:

$$A_4 = 1$$

$$A_3 = \frac{K_2 S_2 L^2 U_0}{I_y} + \frac{K_2 S_2 U_0}{m} + \frac{K_1 S_1 U_0}{m} \cos^2 \alpha_1 + \frac{2K_1 S_1 U_0}{m} \sin^2 \alpha_1$$

$$A_2 = \frac{K_2 S_2 L U_0^2}{I_y} + \frac{K_1 K_2 S_1 S_2 L^2 U_0^2 \cos^2 \alpha_1}{I_y m} + \sin^2 \alpha_1 \left(\frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 U_0^2}{m^2} + \frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 L^2 U_0^2}{I_y m} \right)$$

$$A_1 = \frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 L U_0^3 \sin^2 \alpha_1}{I_y m} + \frac{K_2 S_2 L g U_0 \sin \theta_0}{I_y}$$

$$A_0 = \frac{K_1 K_2 S_1 S_2 L g U_0^2 \sin 2\alpha_1 \cos \theta_0}{I_y m} + \frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 g L U_0^2 \sin^2 \alpha_1 \sin \theta_0}{I_y m}$$

[15.31]

Los coeficientes A_4, A_3, A_2 son siempre positivos, y cabe la duda respecto de los coeficientes A_1, A_0 , -debido a su dependencia respecto de θ_0 - aunque de entrada Bryan los supone positivos.

Antes de avanzar más Bryan decide simplificar los coeficientes omitiendo todos aquellos términos de los que piensa que admiten ser eliminados, por ser significativamente menores que sus inmediatos. Es una operación de manipulación matemática muy bien orientada.

Concretamente:

- Omitirá los componentes que tienen como factor $\sin^2 \alpha_1$ en los coeficientes A_3 y A_2 .
- Supondrá, por el momento, que el ángulo del eje X con la horizontal es nulo ($\theta_0 \approx 0$)
- Supondrá que el ángulo de ataque es pequeño. Así, también asumirá $\cos \alpha_1 \approx 1$ donde lo estime conveniente, pero no siempre supondrá $\sin \alpha \approx \alpha$.

NOTA: La aplicación del presente argumento es de índole estrictamente matemática, y constituye una innovación relevante de largo alcance. Le permitirá establecer un criterio condicional de estabilidad, involucrando parámetros característicos propios del aeroplano y de sus condiciones particulares de vuelo. Es parte fundamental de su aportación a la mecánica del vuelo, aunque en sí misma sólo sea una trasposición a un nuevo campo de ingeniería de un método ya habitual en otros.

Después de las simplificaciones realizadas obtiene:

$$A_4 = 1$$

$$A_3 \approx \frac{K_2 S_2 L^2 U_0}{I_y} + \frac{U_0}{m} (K_2 S_2 + K_1 S_1 (1 + \cos^2 \alpha_1))$$

$$A_2 \approx \frac{K_2 S_2 L U_0^2}{I_y} \left(1 + \frac{K_1 S_1 L}{m} \cos^2 \alpha_1 \right)$$

$$A_1 \approx \frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 U_0^3 \sin^2 \alpha_1}{I_y m}$$

$$A_0 \approx \frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 L g U_0^2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1}{I_y m} \quad [15.32]$$

Bryan añade dos importantes observaciones:

Observación 1: El coeficiente A_1 depende de $\sin^2 \alpha_1$ y podría pensarse que, de acuerdo con su previa afirmación, debería omitirse. Pero entonces pasaría a ser función única de un término en $\sin \theta_0$ que ahora Bryan supone nulo. Esto conduciría a $A_1 = 0$ y el coeficiente de Routh se reduciría exclusivamente a $[R] = -A_3^2 A_0$ que sería siempre necesariamente negativo. Por tanto, en estas condiciones el movimiento nunca sería estable. Por esta razón Bryan decide que el coeficiente A_1 será mantenido a pesar de su dependencia de $\sin^2 \alpha_1$. Este razonamiento permite a Bryan no apartarse seriamente de la verdadera complejidad del tema.

Observación 2: Al establecer el discriminante de Routh $[R] = A_1 (A_3 A_2 - A_4 A_1) - A_3^2 A_0$, Bryan observa que el término $-A_4 A_1^2$ tiene como factor fundamental $\sin^4 \alpha_1$ (Recordemos que para nosotros $A_4 = 1$) y decide ignorarlo, de modo coherente con sus anteriores suposiciones.

Una vez hecho esto, lo que queda del discriminante de Routh y su condición de estabilidad, una vez dividido por el factor común A_3 (positivo), es más simple:

$$[R]^* \approx A_1 A_2 - A_3 A_0 > 0 \quad [15.33]$$

Efectuando las sustituciones correspondientes, con algunas simplificaciones inmediatas, si aceptamos un único valor para la constante K (como admite Bryan), llegamos a la siguiente expresión:

$$[R]^* \approx A_1 A_2 - A_3 A_0 > 0 = -g \left(S_1 I_y + S_2 (I_y + mL^2) \right) + (m + KS_1 L) L S_2 U_0^2 \sin \alpha_1 > 0 \quad [15.34]$$

Por consiguiente, aparece una condición relativamente sencilla que involucra la velocidad de vuelo y la inercia. Bryan introduce ahora la condición de equilibrio de la sustentación representada por dos igualdades, la primera obvia y la segunda también, modificada por interés de sustitución algebraica:

$$\begin{aligned} mg = K_1 S_1 U_0^2 \sin \alpha_1 \quad \text{y} \quad \text{también: } mg L^2 S_2 = K_1 S_1 U_0^2 \sin \alpha_1 L^2 S_2 \\ \left(m L S_2 U_0^2 \sin \alpha_1 + L^2 S_2 \{KS_1 U_0^2 \sin \alpha_1\} \right) > \left(g S_1 I_y + g S_2 I_y + S_2 L^2 \{gm\} \right) \end{aligned} \quad [15.35]$$

Los términos entre corchetes $\{KS_1 U_0^2 \sin \alpha_1\}$ y $\{gm\}$ se compensan mutuamente y la condición de equilibrio estacionario queda con llamativa sencillez, expresando el momento de inercia en función del radio de inercia: $I_y = m k^2$

$$L > \frac{K S_1 (S_1 + S_2)}{m S_2} k^2 \quad [15.36]$$

Si se decide que el estabilizador posterior S_2 y el ala principal S_1 tengan cada uno sus propias características aerodinámicas normalmente diferentes, se hace necesario distinguirlos. Ello se lograría mediante la asignación de un K_1 a la superficie S_1 , y un K_2 a la superficie S_2 . En estas condiciones la Condición de Estabilidad acusaría la influencia relativa de las pendientes de la curva de sustentación de cada superficie, y sería más rigurosa:

La condición de estabilidad quedaría:

$$L > k^2 \frac{K_1}{m} \left(\frac{S_1}{S_2} \right) \left(S_1 + \frac{K_2}{K_1} S_2 \right) \left(\frac{K_1}{K_2} \right) \quad [15.37]$$

Si la comparamos con la que obtiene Bryan, vemos que la condición de estabilidad se ve significativamente modificada por la diferente forma en planta de los planos sustentadores:

$$L > k^2 \frac{K_1}{m} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \left(S_1 + \frac{K_2}{K_1} S_2 \right) \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

$$L > K \frac{k^2}{m} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} (S_1 + S_2) \quad (\text{Bryan}) \quad [15.38]$$

Nota: Bryan afirma que la condición de estabilidad que ha obtenido es la misma a la que llegó Lanchester [4], por un procedimiento completamente diferente. La de Lanchester es, como vimos (Cap. 11):

$$L > \frac{\rho}{2} \left(\frac{CL_\alpha \alpha}{\tan \gamma} \right) \frac{k^2}{m} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} (S_1 + S_2) \quad [15.39]$$

En realidad existe similitud entre ellas, pero se requiere un grado de *interpretación* importante para llegar a mostrar que coinciden¹⁷⁴.

Bryan añade que si la tracción no pasa por el CDG del avión, las condiciones de estabilidad sufren modificaciones, al no poderse cancelar algunos de los términos que antes lo hacían; resulta obvio y no nos detenemos ahora en esto.

15.3.6 Separación de las oscilaciones largas y cortas.

Pasamos ahora al tratamiento que da Bryan a un aspecto de la mecánica de vuelo que ha estado vigente durante más de un siglo y ha propiciado multitud de desarrollos matemáticos. Nos referimos a la búsqueda de aproximaciones que describieran con razonable exactitud el amortiguamiento y la frecuencia de oscilación de los modos propios de un avión en vuelo.

El nacimiento de esta necesidad es obvio, debido a la forma habitualmente no sencilla de las soluciones algebraicas de una ecuación bicuadrada completa. Esto no presenta actualmente ninguna dificultad práctica, ni numérica ni simbólica, pero es interesante observar cómo tuvo lugar la primera aproximación matemática solvente, realizada por Bryan.

15.3.6.1 Estudio de las Oscilaciones de Cortas. (De corto período)

¹⁷⁴ En la Ref. [25] Bryan reseña el libro “Aerodnetics”, de Lanchester, publicado en 1908. La severa crítica de Bryan afecta especialmente a los métodos que aplica Lanchester para obtener sus resultados, métodos a los que califica de poco rigurosos. Vid. Cap. 9.

Al analizar la expresión de los coeficientes del polinomio característico del sistema cuando el ángulo de ataque es muy pequeño ($\alpha_1 \approx 0$), Bryan observa que solamente mantienen un valor finito algunos coeficientes, siendo nulos los demás; estos coeficientes resultan ser:

$$\begin{aligned}
 A_4 &= 1 \\
 A_3 &\approx \frac{K_2 S_2 L^2 U_0}{I_y} + \frac{U_0}{m} (K_2 S_2 + 2K_1 S_1) \\
 A_2 &\approx \frac{K_2 S_2 L U_0^2}{I_y} \left(1 + \frac{K_1 S_1 L}{m} \right) \\
 A_1 &\approx 0 \\
 A_0 &\approx 0
 \end{aligned}
 \tag{15.40}$$

La ecuación bicuadrada se reduce:

$$pol = A_0 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 \Rightarrow pol_A = A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2
 \tag{15.41}$$

Y sus raíces son:

$$pol_A = \lambda^2 + A_3 \lambda + A_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_A = \frac{-A_3}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4A_2}{A_3^2}} \right)
 \tag{15.42}$$

Esta ecuación indica que, por pequeñas que sean las variaciones de α , se obtiene un movimiento que, como veremos, es oscilatorio. Bryan las denomina “Oscilaciones Cortas” pues los valores de λ son suficientemente elevados como para despreciar las potencias bajas de λ del polinomio característico.

Para este caso, la sustitución de los coeficientes del polinomio característico, manteniendo ahora la diferencia de K_i aunque Bryan no lo hace así, conduce a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \lambda_A &= \frac{-A_3}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4A_2}{A_3^2}} \right) \\
 \lambda_A &= -U_0 \frac{(I_y (K_1 S_1 + K_2 S_2) + K_2 S_2 L^2 m)}{2 I_y m} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4I_y m (K_1 S_1 L m + K_2 S_2 K_1 S_1 L^2)}{(I_y (K_1 S_1 + K_2 S_2) + K_2 S_2 L^2 m)^2}} \right)
 \end{aligned}$$

[15.43]

Si suponemos la igualdad de las constantes K_i y expresamos el momento de inercia en función del radio de inercia, obtenemos una expresión más compacta:

$$\lambda_A = -U_0 \frac{K(k^2(S_1 + S_2) + S_2 L^2)}{2k^2 m} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k^2 L S_2 (m + K S_1 L)}{K(k^2(S_1 + S_2) + S_2 L^2)^2}} \right) \quad [15.44]$$

Para los valores normales en aeronáutica, y denotando claramente la componente imaginaria debido a que la masa en el numerador es el factor dominante, vemos que efectivamente se trata de una oscilación:

$$\lambda_A = -U_0 \frac{K(k^2(S_1 + S_2) + S_2 L^2)}{2k^2 m} \left(1 \pm i \sqrt{\frac{4k^2 L S_2 (m + K S_1 L)}{K(k^2(S_1 + S_2) + S_2 L^2)^2} - 1} \right) \quad [15.45]$$

De esta manera, la aproximación de Bryan para la oscilación corta queda definida. Si se desea expresarla de un modo más acorde con el proceder actual, tendríamos:

$$\lambda_A = -CL\alpha_1 \left(\rho \frac{U_0 S_1}{2m} \right) \left(1 + \frac{CL\alpha_2 S_2}{CL\alpha_1 S_1} \left(1 + \left(\frac{L^2 m}{I_y} \right) \right) \right) \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mL(m + \rho CL\alpha_2 S_2 L)}{\rho I_y CL\alpha_1 S_1 \left(1 + \frac{CL\alpha_2 S_2}{CL\alpha_1 S_1} \left(1 + \frac{L^2 m}{I_y} \right) \right)^2}} \right) \quad [15.46]$$

Esta son los dos autovalores de la aproximación al Modo Corto Período que se obtienen a partir de los desarrollos de Bryan, especificando el modelo aerodinámico de un modo algo más completo.

15.3.6.2 Estudio de las oscilaciones Largas. (De largo período)

Sí, por el contrario, suponemos λ muy pequeño, manteniendo $A_1 \approx 0$, la ecuación bicuadrada se convierte en la siguiente:

$$pol = A_0 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 \Rightarrow pol_B = A_2 \lambda^2 + A_0 \quad [15.47]$$

Y sus raíces las obtenemos de:

$$pol_B = A_2 \lambda^2 + A_0 = 0$$

$$\lambda_B = \pm i \sqrt{\frac{A_0}{A_2}} \quad [15.48]$$

Bryan concluye que, en primera aproximación, este movimiento es oscilatorio, al igual que el anterior.

Para lograr una mejor aproximación, sustituye el valor obtenido para λ_B en el polinomio pol_B manteniendo el término cúbico:

$$pol_B = A_2 \lambda^2 + (A_3 (\lambda_B)^2 + A_1) \lambda + A_0 = 0 \quad [15.49]$$

Así llega a:

$$pol_B = \lambda^2 + \left(\frac{A_1}{A_2} - A_3 \frac{A_0}{A_2^2} \right) \lambda + \frac{A_0}{A_2} = 0 \quad [15.50]$$

Ecuación de la que se deduce un valor aproximado para la parte real de las raíces de:

$$\left(\frac{A_3 A_0 - A_2 A_1}{2 A_2^2} \right) \approx - \frac{[R]^*}{2 A_2^2} \quad [15.51]$$

Bryan hace notar que si se cumple la condición aproximada de Routh con $[R]^*$ positivo, la oscilación es estable.

A este tipo de oscilaciones Bryan las denomina “Oscilaciones Lentas” o “Largas” y su período, obtenido a partir de λ_B es $T_B = 2\pi \sqrt{\frac{A_2}{A_0}}$

Si ahora nosotros vamos más allá de lo que Bryan desarrolla, y sustituimos las expresiones que ha obtenido para $\lambda_B = \pm i \sqrt{\frac{A_0}{A_2}}$, llegamos a las siguientes:

$$\lambda_B = \pm i \sqrt{\frac{2g K_1 S_1 \cos \alpha_{01} \sin \alpha_0}{m + K_1 S_1 L \cos^2 \alpha_0}} \quad [15.52]$$

Teniendo en cuenta la condición de equilibrio llegamos a:

$$\text{con : } mg = K_1 S_1 U_0^2 \cos \alpha_0 \sin \alpha_0$$

$$\lambda_B = \pm i \sqrt{\frac{2g K_1 S_1 \cos \alpha_0 \sin \alpha_0}{m + K_1 S_1 L \cos^2 \alpha_0}} \approx \pm i \sqrt{\frac{2g^2 m}{U_0^2 (m + K_1 S_1 L)}} \approx \pm i \sqrt{2} \frac{g}{U_0} \sqrt{\frac{m}{m + K_1 S_1 L}}$$

[15.53]

Normalmente, aunque sea menos evidente para aviones antiguos, $m \gg K_1 S_1 L$ y podremos aproximar el valor de λ_B mediante la conocida expresión:

$$\lambda_B \approx \pm i \sqrt{2} \frac{g}{U_0}$$

[15.54]

Aunque Bryan no la menciona explícitamente, se deduce directamente de sus ecuaciones la clásica expresión de la frecuencia del movimiento que Lanchester había denominado Fugoide.

Si deseamos averiguar algo más sobre el amortiguamiento, podemos recurrir a la expresión hallada por Bryan y llevar el desarrollo de la misma algo más allá de lo que le pareció oportuno a él:

$$\left(\frac{A_3 A_0 - A_2 A_1}{2A_2^2} \right) \approx - \frac{[R]^*}{2A_2^2}$$

[15.55]

Efectuadas las sustituciones correspondientes, con $\cos \alpha_{01} \approx 1$:

$$- \frac{[R]^*}{2A_2^2} = - \frac{\sin \alpha_0 \left(K_1 S_1 \left(g K_2 S_2 L^2 m - g K_2 S_2 (I_y + L^2 m) - g K_1 S_1 I_y + \frac{g K_2 S_2 L m^2}{K_1 S_1} \right) \right)}{K_2 S_2 L (m + K_1 S_1 L)^2 \sqrt{\frac{mg}{K_1 S_1 \sin \alpha_0}}}$$

[15.56]

Si suponemos ahora, siguiendo el esquema habitual de Bryan, que $K_1 = K_2 = K$, con $I_y = m k^2$, llegamos a la siguiente expresión para el amortiguamiento de las oscilaciones largas:

$$-\frac{R_0^*}{2A_2^2} = \frac{g m \sin \alpha_0 (k^2 K S_1 (S_1 + S_2) - L m S_2)}{L S_2 (m + K S_1 L)^2 \sqrt{\frac{mg}{K S_1 \sin \alpha_0}}}$$

$$-\frac{R_0^*}{2A_2^2} = \frac{K S_1 U_0^2 \sin^2 \alpha_0 (k^2 K S_1 (S_1 + S_2) - L m S_2)}{L S_2 (m + K S_1 L)^2 U_0} \quad [15.57]$$

$$-\frac{R_0^*}{2A_2^2} = \frac{\text{Drag} \left(k^2 K \frac{S_1 (S_1 + S_2)}{S_2 L} - m \right)}{(m + K S_1 L)^2 U_0} \approx \frac{\text{Drag} (-m)}{(m + \dots)^2 U_0} = \frac{-\text{Drag}}{m U_0}$$

Si nos tomamos ahora la licencia de aceptar la siguiente adaptación, evidentemente anacrónica:

$$\text{Drag} = \frac{1}{2} \rho S_1 U_0^2 CD \quad [15.58]$$

Llegamos a:

$$-\frac{[R]^*}{2A_2^2} \approx -\frac{\rho S_1 U_0 CD}{2m} \quad [15.59]$$

Que es la expresión aproximada de la parte real de la raíz del polinomio característico que nos da el amortiguamiento para la oscilación larga. Aunque Bryan no lo desarrolla, estaba latente en sus expresiones.

15.3.6.3 Estudio del carácter de las oscilaciones.

Para analizar con detalle las oscilaciones Bryan retrocede hacia las ecuaciones primitivas del movimiento linealizado, manteniendo la pendiente nula.

Estas ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad & \left(\lambda + \frac{2K_1S_1U_0 \sin^2 \alpha_1}{m} \right) u + \frac{K_1S_1U_0 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1}{m} w - \frac{g}{\lambda} q = 0 \\
 [2] \quad & \frac{2K_1S_1U_0 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1}{m} u + \left(\lambda + \frac{(K_2S_2U_0 + K_1S_1U_0 \cos^2 \alpha_1)}{m} \right) w + \left(U_0 - \frac{K_2S_2U_0L}{m} \right) q = 0 \\
 [3] \quad & -\frac{K_2S_2U_0L}{I_y} w + \left(\lambda + \frac{K_2S_2U_0L^2}{I_y} \right) q = 0
 \end{aligned}$$

[15.60]

15.3.6.3.1 Características de las oscilaciones cortas.

Bryan actúa con el supuesto aproximado de $\alpha_1 \approx 0$ y las tres ecuaciones resultan ser:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad & u\lambda - \frac{g}{\lambda} q = 0 \\
 [2] \quad & \left(\lambda + \frac{(K_2S_2U_0 + K_1S_1U_0)}{m} \right) w + \left(U_0 - \frac{K_2S_2U_0L}{m} \right) q = 0 \\
 [3] \quad & -\frac{K_2S_2U_0L}{I_y} w + \left(\lambda + \frac{K_2S_2U_0L^2}{I_y} \right) q = 0
 \end{aligned}$$

[15.61]

Consecuencias:

- (1) En las ecuaciones [2] y [3] de [15.61] no aparece la velocidad lineal u , lo que indica que las oscilaciones cortas no dependen de las variaciones de la velocidad según la trayectoria de vuelo, y solamente implican a la velocidad w y a q . Esta independencia del modo corto período respecto de la velocidad de vuelo es una importante conclusión que mantendrá su vigencia en todos los análisis más detallados de la oscilación de Corto Período que se realizarán más adelante.
- (2) Si despejamos de la ecuación [3] de [15.61] la relación $\left(\frac{w}{q} \right)$ desarrollando

con $\lambda = \frac{\left(\frac{dq}{dt} \right)}{q}$ llegamos a:

$$[3] \quad -\frac{K_2S_2U_0L}{I_y} \frac{w}{q} + \left(\frac{\left(\frac{dq}{dt} \right)}{q} + \frac{K_2S_2U_0L^2}{I_y} \right) = 0$$

$$[3] \quad I_y \left(\frac{dq}{dt} \right) = K_2 S_2 U_0 (w - qL) L \quad [15.62]$$

Esta es simplemente la ecuación del momento linealizada, ya que $(w - qL)$ es la velocidad del plano S2 perpendicular al eje longitudinal X. Resulta claro si multiplicamos y dividimos por U_0 :

$$[3] \quad I_y \left(\frac{dq}{dt} \right) = K_2 S_2 U_0^2 \left(\frac{w}{U_0} - \frac{qL}{U_0} \right) L \quad [15.63]$$

Análogamente con la ecuación [2], llegaríamos a:

$$m \left(\frac{dw}{dt} + U_0 q \right) = -K_2 S_2 U_0^2 \left(\frac{w}{U_0} - \frac{qL}{U_0} \right) - K_1 S_1 U_0^2 \frac{w}{U_0} \quad [15.64]$$

Algunos factores pueden considerarse ángulos de ataque inducidos por el movimiento lineal $\left(\frac{w}{U_0} \right)$, y por el angular $\left(-\frac{qL}{U_0} \right)$. El sentido físico es obvio.

(3) La ecuación [1] de [15.61] relaciona directamente las oscilaciones en velocidad con la derivada del ángulo de asiento longitudinal:

$$[1] \quad u\lambda - \frac{g}{\lambda} q = 0 \quad [15.65]$$

$$[1] \quad \frac{d^2 u}{dt^2} \approx g \frac{d\theta}{dt}$$

Se concluye que los efectos de la variación de la velocidad sobre las sustentaciones, según la línea de vuelo, pueden despreciarse.

Si de las ecuaciones [2] y [3] de [15.61] se eliminan las variables w y q llegamos a la siguiente ecuación para el cálculo de λ_A :

$$de [2] \quad q = - \frac{\left(\lambda + \frac{(K_2 S_2 U_0 + K_1 S_1 U_0)}{m} \right) w}{\left(U_0 - \frac{K_2 S_2 U_0 L}{m} \right)}$$

$$de [3] \quad - \frac{K_2 S_2 U_0 L}{I_y} + \left(\lambda + \frac{K_2 S_2 U_0 L^2}{I_y} \right) \left(- \frac{\left(\lambda + \frac{(K_2 S_2 U_0 + K_1 S_1 U_0)}{m} \right) w}{\left(U_0 - \frac{K_2 S_2 U_0 L}{m} \right)} \right) = 0 \quad [15.66]$$

Finalmente llegamos a:

$$\lambda^2 + U_0 \left(\frac{K_2 S_2 L^2}{I_y} + \frac{K_1 S_1 + K_2 S_2}{m} \right) \lambda + \frac{K_2 S_2 L U_0^2}{I_y} \left(1 + \frac{K_1 S_1 L}{m} \right) = 0 \quad [15.67]$$

Esta ecuación nos proporcionará las raíces para las “Oscilaciones Cortas” en el caso presente.

Podemos ahora comparar esta ecuación con la que se ha convertido en clásica para evaluar aproximaciones a la oscilación denominada “Corto Período”, que es la siguiente¹⁷⁵:

$$p(s)_{CP} = s^2 + \left(-\left(\frac{Z_w}{m} \right) - \left(\frac{M_q}{I_y} \right) - U_0 \left(\frac{M_{\dot{w}}}{I_y} \right) \right) s + \left(\frac{M_q}{I_y} \right) \left(\frac{Z_w}{m} \right) - U_0 \left(\frac{M_w}{I_y} \right) \quad [15.68]$$

Se observa la correspondencia clara entre los coeficientes de una y otra si recordamos que Bryan no ha tomado en cuenta ahora el efecto que actualmente se representa con la derivada aerodinámica dimensional $M_{\dot{w}}$. Este es un aspecto del que hablará sucintamente más adelante, sin llegar a cuantificarlo.

Las correspondencias entre los términos de Bryan (Indicados por el año 1911) y los actuales son, adaptando el signo al criterio de Bryan, y viéndolas con algún detalle:

Para Z_w tenemos:

$$\begin{aligned} \text{(Actual)} \quad Z_w &= -\frac{1}{2} \rho S U_0 (CL_\alpha + CD_{Trim}) \\ \text{(1911)} \quad Z_w &\approx U_0 (K_1 S_1 + K_2 S_2) \approx K U_0 CL\alpha_1 S_1 \left(1 + \frac{CL\alpha_2 S_2}{CL\alpha_1 S_1} \right) \end{aligned} \quad [15.69]$$

Para M_w tenemos:

$$\begin{aligned} \text{(Actual)} \quad M_w &= \frac{1}{2} \rho S c U_0 CM_\alpha \approx \frac{1}{2} \rho S c U_0 \left(CL\alpha_1 + \frac{S_2}{S_1} CL\alpha_2 \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) \right) \left(\frac{x_{CDG} - x_{PN}}{c} \right) \\ \text{(1911)} \quad M_w &= -K_2 S_2 L U_0 \end{aligned}$$

[15.70]

¹⁷⁵ Cfr. Por ejemplo, Ref. [9], [10], [11], [15].

La diferencia fundamental estriba en que, para el caso que estudia Bryan, el CDG está situado justo sobre el CP del ala sustentadora, luego el $CL\alpha_1$ no genera momento; Bryan tampoco considera la desviación de la corriente ni la influencia del retardo en α , aunque sabe que existen. En estas condiciones, podremos investigar las equivalencias y observar la coherencia plena entre el procedimiento actual y el de Bryan:

$$\begin{aligned} \text{(Actual)} \quad M_w &= \frac{1}{2} \rho S c U_0 C M_\alpha \approx \frac{1}{2} \rho U_0 S_2 C L \alpha_2 (x_{CDG} - x_{PN}) \\ \text{(1911)} \quad M_w &= -K C L \alpha_2 S_2 L U_0 \end{aligned} \quad [15.71]$$

Y las correspondencias son claras:

$$\begin{aligned} \text{(Actual)} \quad M_w &= \frac{1}{2} \rho S c U_0 C M_\alpha \approx \frac{1}{2} \rho U_0 S_2 C L \alpha_2 (x_{CDG} - x_{PN}) \\ \text{(1911)} \quad M_w &= -K C L \alpha_2 S_2 L U_0 \Rightarrow L \approx (x_{CDG} - x_{PN}) \end{aligned} \quad [15.72]$$

Finalmente, para M_q tenemos las siguientes expresiones que no desarrollamos por ser completamente análogas a lo ya visto.

$$\begin{aligned} \text{(Actual)} \quad M_q &= \frac{1}{4} \rho S c^2 U_0 C M_q \approx \frac{1}{2} \rho c^2 U_0 C L \alpha_2 S_2 \left(\frac{x_{CDG} - x_{PN}}{c} \right)^2 \\ \text{(1911)} \quad M_q &= K_2 S_2 U_0 L^2 \end{aligned} \quad [15.73]$$

Bryan observa que en esta ecuación, los valores de $\left(\frac{\lambda}{U_0} \right)$ no dependen de la velocidad, lo que se ve mejor escribiéndola en la forma siguiente:

$$\left(\frac{\lambda}{U_0} \right)^2 + \left(\frac{K_2 S_2 L^2}{I_y} + \frac{K_1 S_1 + K_2 S_2}{m} \right) \left(\frac{\lambda}{U_0} \right) + \frac{K_2 S_2 L}{I_y} \left(1 + \frac{K_1 S_1 L}{m} \right) = 0$$

[15.74]

De aquí deduce que la frecuencia de oscilación es proporcional a la velocidad de vuelo U_0 . Por esta razón, si en vez de tomar el tiempo como variable independiente se toma el espacio $s = U_0 t$, la trayectoria descrita por el avión al oscilar es independiente de la velocidad de vuelo. Así, si se modifica la velocidad de vuelo, el avión realizará el mismo número de oscilaciones para la misma distancia recorrida.

Desde otro punto de vista, las condiciones de estabilidad de Routh exigen que todos los coeficientes sean positivos. Por tanto, comparando las condiciones establecidas por Bryan con el modo actual de expresarlas tenemos:

$$\begin{aligned}
 [1_{-1911}] \quad \left(\frac{K_1 S_1 + K_2 S_2}{m} + \frac{K_2 S_2 L^2}{I_y} \right) > 0 &\Rightarrow [1_{\text{Actual}}] \quad -\frac{Z_w}{m} - \frac{M_q}{I_y} > 0 \\
 [2_{-1911}] \quad \frac{K_2 S_2 L}{I_y} \left(1 + \frac{K_1 S_1 L}{m} \right) > 0 &\Rightarrow [2_{\text{Actual}}] \quad \left(\frac{M_q}{I_y} \right) \left(\frac{Z_w}{m} \right) - U_0 \left(\frac{M_w}{I_y} \right)
 \end{aligned}$$

[15.75]

La condición [1] se cumple siempre, con L positivo o negativo; en cambio la condición [2] depende del valor numérico de L -que puede ser positivo o negativo- para su cumplimiento. Como se acaba de ver, el valor de L representa la distancia entre el CDG y lo que años después se denominará Punto Neutro del sistema sustentador. De ambas expresiones se adjunta la versión actual.

$$\begin{aligned}
 \left(L + \frac{K_1 S_1 L^2}{m} \right) > 0 \quad \text{si } L > 0 &\Rightarrow \text{estable} \\
 L \left(1 + \frac{K_1 S_1 L}{m} \right) > 0 \quad \text{si } L < 0 \quad \text{y } \text{Abs}[L] > \frac{m}{K_1 S_1} &\Rightarrow \text{estable}
 \end{aligned}$$

[15.76]

Las conclusiones respecto de las “Oscilaciones Cortas” las aplica Bryan al interesante caso -especialmente para la época- del avión de los hermanos Wright dotado de un plano estabilizador delantero, que en sus primeras versiones era inestable.

La conclusión a la que llega Bryan indica que si el plano estabilizador está detrás, el avión siempre es estable. Pero admite también una solución estable si el estabilizador está suficientemente por delante del plano S1, de acuerdo con las expresiones arriba indicadas, y siempre respecto de las “Oscilaciones Cortas”. Por tanto, Bryan está haciendo uso implícito del concepto de Punto Neutro, aunque sin una definición precisa.

El hecho de que haya decidido trabajar con una ala (S1) cuya sustentación está precisamente en el Centro de Presión de la superficie y la superficie (S2) esté “en posición Neutral” sin producir sustentación, sino sólo recuperación de la posición de equilibrio, enmascara el Punto Neutro. Al tratar de las “Sistemas de superficies dobles” desaparecerá esta ambigüedad.

Las condiciones para lograr una convergencia sin oscilaciones se deducen fácilmente de lo anterior y no tiene interés detenerse ahora en ello. Parece haber sido objeto de interés preferente durante algún tiempo, ya que, para algunos pioneros, las oscilaciones no son admisibles en un aeroplano, aunque sean amortiguadas. (Cfr. De Bothezat)

15.3.6.3.2 Características de las oscilaciones largas

Bryan ha obtenido anteriormente una aproximación a las oscilaciones largas:

$$\lambda_B = \pm i \sqrt{\frac{A_0}{A_2}} - \left(\frac{A_3 A_0 - A_2 A_1}{2A_2^2} \right) \quad [15.77]$$

Para observar el carácter de las oscilaciones, prescindirá de la parte real y supondrá que son periódicas puras. (Ya hemos visto más arriba que el término de amortiguamiento depende de la resistencia aerodinámica. El modelo aerodinámico de Bryan es inadecuado en parte).

Bryan desea trazar la trayectoria que describe el $CDG(x, y)$ del avión. Para ello supone que las coordenadas de este punto en el instante t son pequeñas variaciones sobre una recta recorrida con velocidad uniforme:

$$\begin{aligned} x &= U_0 t + \xi \\ z &= \eta \end{aligned} \quad [15.78]$$

La dirección del movimiento estacionario coincide con el eje X , y θ es la pendiente de la trayectoria. Las ecuaciones linealizadas son:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= (U_0 + u) \cos \theta - v \sin \theta \approx (U_0 + u) \\ \frac{d\eta}{dt} &= (U_0 + u) \sin \theta + w \cos \theta \approx U_0 \theta + w \end{aligned} \quad [15.79]$$

Las funciones $\{\theta, \xi, \eta\}$ varían todas ellas de la forma $e^{\lambda t}$ y por esta razón Bryan establece que:

$$\begin{aligned} \lambda \xi = u &\Rightarrow \xi = \frac{u}{\lambda} \\ \lambda \eta = U_0 \theta + w &\Rightarrow U_0 \frac{q}{\lambda} + w \Rightarrow \eta = U_0 \frac{q}{\lambda^2} + \frac{w}{\lambda} \end{aligned} \quad [15.80]$$

Y acepta ahora las expresiones aproximadas ya obtenidas:

$$q = \lambda^2 \frac{u}{g} \quad \text{con} \quad w = Lq \Rightarrow w = \lambda^2 \frac{u}{g} L \quad [15.81]$$

Obsérvese que la última de las relaciones indicadas muestra que las variaciones del ángulo de ataque son pequeñas, al serlo λ , y esto permite plantear la hipótesis o

sugerencia habitual de que las oscilaciones de largo período se realizan prácticamente con $\alpha \approx cte$

Obtiene finalmente una expresión que liga las coordenadas de la trayectoria:

$$\eta = \frac{\xi}{g} (U_0 \lambda + \lambda^2 L) \quad [15.82]$$

Es evidente que siendo $\{\xi, \eta\}$ de la forma $e^{\lambda t}$, siendo λ imaginario puro, las correspondientes coordenadas serán de la forma siguiente, una vez separada la parte imaginaria:

$$\begin{aligned} \xi &= \text{Re} [Ae^{\lambda t}] = \text{Re} [Ae^{(bi)t}] = \text{Re} [A(\cos bt + i \sin bt)] = A \cos bt \\ \eta &= \text{Re} \left[\frac{\xi}{g} (U_0 \lambda + \lambda^2 L) \right] = \text{Re} \left[\frac{\xi}{g} (U_0 bi - b^2 L) \right] = \text{Re} \left[\frac{A(\cos bt + i \sin bt)}{g} (U_0 bi - b^2 L) \right] \\ \text{Re} &= -\frac{ALb^2 \cos bt}{g} - \frac{AU_0 b \sin bt}{g} \end{aligned} \quad [15.83]$$

Finalmente, las coordenadas -establecidas sobre la trayectoria estacionaria- serán:

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos bt \\ \eta &= -\frac{ALb^2 \cos bt}{g} - \frac{AU_0 b \sin bt}{g} \end{aligned} \quad [15.84]$$

Es fácil ver que representan una elipse. Esto fue subrayado explícitamente por Lanchester [4]. Bryan no se detiene en más consideraciones;

$$\begin{aligned} x &= U_0 t + A \cos bt \\ z &= -\frac{ALb^2 \cos bt}{g} - \frac{AU_0 b \sin bt}{g} \end{aligned} \quad [15.85]$$

15.3.7 Comparación de la parte real de las oscilaciones largas y las cortas.

Nos interesa comparar, aunque Bryan no se detiene en esto, las partes reales de ambas oscilaciones.

La parte real de las oscilaciones cortas es:

$$\operatorname{Re}[\lambda_c] = -U_0 \frac{(I_y (K_1 S_1 + K_2 S_2) + K_2 S_2 L^2 m)}{2 I_y m} \quad [15.86]$$

Y la de las largas es:

$$\operatorname{Re}[\lambda_L] = \frac{K S_1 U_0^2 \sin^2 \alpha_{01} \left(\frac{I_y}{m} K S_1 (S_1 + S_2) - L m S_2 \right)}{L S_2 (m + K S_1 L)^2 U_0} \quad [15.87]$$

El cociente¹⁷⁶ entre ambas conduce a:

$$\frac{\operatorname{Re}[\lambda_L]}{\operatorname{Re}[\lambda_c]} \approx \frac{2 \sin^2 \alpha_0}{1 + \frac{S_2}{S_1} \left(1 + \frac{m L^2}{I_y} \right)} \quad [15.88]$$

Esto muestra claramente la razón por la que existe normalmente tanta diferencia entre los valores de los amortiguamientos en un caso y en el otro: El modo de oscilaciones largas es mucho menor que el de las cortas, al ser el primero función del cuadrado del ángulo de ataque.

Comparando la frecuencia de los dos modos tendríamos, suponiendo ahora la constante **K** común, para mayor sencillez:

$$\operatorname{Im}[\lambda_c] = \frac{K S_1 U_0}{2 m} \sqrt{\left(1 + \left(1 + \frac{m L^2}{I_y} \right) \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \right)^2 - 4 \frac{\left(\frac{m L^2}{I_y} \right)}{\left(\frac{K S_1 L}{m} \right) \left(1 + \frac{K S_2 L}{m} \right)}} \quad [15.89]$$

$$\operatorname{Im}[\lambda_L] \approx \sqrt{2} \frac{g}{U_0} \quad [15.90]$$

Nos interesa ahora la diferencia entre ambas, que viene dado por:

$$\operatorname{Im}[\lambda_L] - \operatorname{Im}[\lambda_c] \approx \sqrt{2} \frac{g}{U_0} - \frac{K S_1 U_0}{2 m} \sqrt{4 \frac{\left(\frac{m L^2}{I_y} \right)}{\left(\frac{K S_1 L}{m} \right) \left(1 + \frac{K S_2 L}{m} \right)} - \left(1 + \left(1 + \frac{m L^2}{I_y} \right) \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \right)^2} \quad [15.91]$$

Esta expresión puede aproximarse, quizás de un modo algo rudo, mediante:

¹⁷⁶ Suponemos que puede admitirse que $K S L \ll m$. Ver Anexo I.

$$\operatorname{Im}[\lambda_L] - \operatorname{Im}[\lambda_C] \approx \sqrt{2} \frac{g}{U_0} - \sqrt{\frac{K S_1 L}{I_y}} U_0 \quad [15.92]$$

Resumiendo, la relación entre el modo largo y el corto es:

$$\frac{|\lambda_L|}{|\lambda_C|} \approx \frac{2 \sin^2 \alpha_0}{1 + \frac{S_2}{S_1} \left(1 + \frac{m L^2}{I_y}\right)} e^{\left(\sqrt{2} \frac{g}{U_0} - \sqrt{\frac{K S_1 L}{I_y}} U_0\right) t} \quad [15.93]$$

Existiría, así, una velocidad que mantendría constante la relación entre las magnitudes de los módulos de los dos modos. Esta velocidad es baja, aunque aumenta con la altitud.

El término $\left(\frac{I_y}{m L^2}\right)$ normalmente es del orden de la unidad, y el término $\left(\frac{K S_1 L}{m}\right)$ es generalmente muy inferior a la unidad. Bryan no se entretiene en estos desarrollos.

15.3.8 Efecto de la inclinación de la trayectoria.

La dependencia de la estabilidad de la pendiente de la trayectoria fue una aportación de Mr. Edgar. H. Harper¹⁷⁷. Sus conclusiones, aceptadas por Bryan, se establecen del siguiente modo.

De los 5 coeficientes del polinomio característico que ya hemos visto nos interesa ahora detenemos en el análisis de dos en los que aparece la pendiente, que son:

$$A_1 = \frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 L U_0^3 \sin^2 \alpha_1}{I_y m} + \frac{K_2 S_2 L g U_0 \sin \theta_0}{I_y}$$

$$A_0 = \frac{K_1 K_2 S_1 S_2 L g U_0^2 \sin 2\alpha_1 \cos \theta_0}{I_y m} + \frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 g L U_0^2 \sin^2 \alpha_1 \sin \theta_0}{I_y m}$$

[15.94]

La condición de equilibrio en el caso de pendiente no nula es:

$$mg \cos \theta_0 = K_1 S_1 U_0^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \quad [15.95]$$

Sustituyendo en el coeficiente A_1 obtenemos:



¹ **Edgar Henry Harper (1880-1916)** Se formó en Dungannon Royal School, Queen's University, Belfast, y Trinity College, Dublin. Profesor en Bangor University, Wales. Antes de la 1ª guerra mundial fue Profesor de Matemáticas en Cork University, posición que abandonó para incorporarse como voluntario en la I Guerra Mundial. Como profesor en Bangor University se interesó mucho por la matemática aplicada al estudio del vuelo. En 1910, junto con un colega, publicó "Aerial Aviation". Edgar Henry Harper murió en combate en los Dardanelos en Julio de 1916. Tenía 36 años. Recientemente [27] se ha hecho notar que la aportación de Harper al libro de Bryan es merecedora de un reconocimiento mayor del que suele recibir.

$$\begin{aligned}
 mg \cos \theta_0 &= K_1 S_1 U_0^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \\
 A_1 &= \frac{2K_2 S_2 L (K_1 S_1 U_0^2 \sin \alpha_1) U_0 \sin \alpha_1}{I_y m} + \frac{K_2 S_2 L g U_0 \sin \theta_0}{I_y} \\
 A_1 &= \frac{2K_2 S_2 L (mg \cos \theta_0) U_0 \tan \alpha_1}{I_y m} + \frac{K_2 S_2 L g U_0 \sin \theta_0}{I_y} \\
 A_1 &= \frac{g K_2 S_2 L U_0 \cos \theta_0}{I_y} (2 \tan \alpha_1 + \tan \theta_0)
 \end{aligned} \quad [15.96]$$

Y para el coeficiente A_0 tenemos:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{K_1 K_2 S_1 S_2 L g U_0^2 \sin 2\alpha_1 \cos \theta_0}{I_y m} + \frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 g L U_0^2 \sin^2 \alpha_1 \sin \theta_0}{I_y m} \\
 A_0 &= \frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 L g U_0^2}{I_y m} \sin \alpha_1 (\cos \alpha_1 \cos \theta_0 + \sin \alpha_1 \sin \theta_0) \\
 A_0 &= \frac{2K_1 K_2 S_1 S_2 L g U_0^2}{I_y m} \sin \alpha_1 \cos(\theta_0 - \alpha_1)
 \end{aligned} \tag{15.97}$$

Bryan extrae las siguientes conclusiones de lo anterior:

- (1) Cuando se cumple que el ángulo de ascenso es $\theta_0 = -2 \tan^{-1} \alpha_1 \approx -2\alpha_1$, entonces se anula el coeficiente $A_1 = 0$. Como consecuencia de ello, el discriminante de Routh $[R] = -A_3^2 A_0$ es necesariamente negativo y la estabilidad es imposible.
- (2) Existe un límite superior para el ángulo de ascenso del avión que viene dado por aproximadamente el doble del ángulo de ataque. A partir de ese ángulo, se pierde la estabilidad. *“Even other things being the same, a machine rapidly loses its stability when it begins to rise in the air”*.
- (3) Por el contrario, un avión estable en vuelo horizontal simétrico, será todavía más estable en vuelo de descenso.
- (4) No es recomendable extrapolar conclusiones relacionadas con la estabilidad de aviones propulsados, a partir de ensayos con planeadores, ya que estos solamente vuelan estacionariamente (en atmósfera en calma), en descenso.

Si deseamos adaptar la condición de estabilidad que hemos obtenido más arriba a un avión en vuelo de ascenso, debemos modificarla incluyendo la limitación en los ángulos. El aspecto matemático se complica.

15.3.9 Estudios complementarios y Conclusiones sobre el movimiento Simétrico

De modo análogo, Bryan estudia la influencia de la resistencia aerodinámica que podríamos denominar parásita y globalmente incluíble en un coeficiente que podríamos denominar CD_0 , así como el efecto de una hélice que proporcionase empuje variable.

Bryan estudia también los sistemas sustentadores dobles, es decir, la extensión de los resultados a sistemas en los que la sustentación se reparte entre el plano anterior y el posterior. Bryan analiza el sistema tipo tándem mediante su conversión en un sistema equivalente. Esto permite considerar, para el sistema equivalente, que el ala trasera está en posición neutral, con lo que este tipo de aviones puede analizarse con

los mismos procedimientos del capítulo anterior aplicados al sistema equivalente. Debido a la suposición de un valor único para K sus expresiones ven muy mermada su aplicabilidad práctica; aunque el procedimiento básico es extensible a sistemas de este tipo, las expresiones correctas no admiten la relativa sencillez con que aparecen en Bryan.

Sugiere también que el plano delantero y el posterior no estén a la misma altura, para reducir los efectos de la desviación de la corriente. Bryan no la tiene en cuenta en sus cálculos. Esta suposición resultaría más apropiada para evitar que el ala posterior se encuentre con la estela de la delantera, pero en cuanto a disminución de la desviación, que fundamentalmente depende de la distancia, un incremento de altura de una respecto de la otra debería ser bastante grande para obtener resultados significativos.

Analiza el caso en el que la tracción no pasa por el CDG del avión, y establece la correspondiente condición de estabilidad, que adquiere ahora un aspecto más complicado.

Para los sistemas de planos cuya anchura no puede considerarse pequeña, y el efecto del desplazamiento del centro de presión puede ser importante, Bryan estudia dos casos particulares

- (1) Sistema sustentador simple con plano posterior en neutro.
- (2) Sistema sustentador sin plano posterior. Este caso es particularmente relevante, ya que Lanchester [4] da comienzo a su estudio de la estabilidad de los aviones precisamente con este tipo de ala sustentadora.

Otros aspectos relevantes dignos de mención son tratados por Bryan en términos principalmente cualitativos: los efectos de la fricción y la hipótesis de no perpendicularidad de la fuerza R respecto del plano; el efecto de la Curvatura alar; el efecto de la desviación del flujo de un ala sobre la posterior, incluyendo el eventual retardo; los sistemas de Tres Planos; las peculiaridades de las Derivadas *Rotativas* en planos anchos.

Con lo visto hasta ahora ha desarrollado Bryan una teoría sólida y rigurosa de la estabilidad longitudinal, y la ha aplicado a casos particulares de configuraciones sustentadoras, aunque no tan particulares que impidan que estas conclusiones puedan adquirir cierto grado de generalización.

En los capítulos siguientes Bryan analiza el caso de sistemas de dos alas sustentadoras y añade la tracción de la hélice generando momento de cabeceo. Las expresiones matemáticas adquieren mayor complicación, sin añadir novedades conceptuales.

Puede construirse un avión con estabilidad longitudinal inherente, limitada por la pendiente de la trayectoria, aunque admite que algunos de los aviones del momento en que escribe no son estables y sin embargo vuelan bien.

Cuando un avión encuentra una ráfaga, si no es dinámicamente estable, las oscilaciones irán aumentando.

15.3.10 Problemas pendientes de estudio.

Menciona finalmente Bryan una serie de problemas que considera urgente acometer. Los relacionados con la dinámica longitudinal son los siguientes:

- (1) La respuesta inicial de un aeroplano sometido a una repentina ráfaga de viento en cualquier dirección: longitudinal, lateral o vertical, o una mezcla de todas, y los esfuerzos a los que se ve sometida la estructura del aeroplano. También estudiar la posibilidad de que ráfagas periódicas produzcan un eventual efecto de resonancia y la investigación del efecto del amortiguamiento.
- (2) Investigar experimentalmente el efecto de la rotación de un plano ancho. Tratar de determinarlo mediante fórmulas, empíricas o de otra clase, por lo menos aproximadamente.
- (3) Investigar experimentalmente el efecto de la desviación de la corriente debido a un plano delante de otro, y también el efecto de la estela de las hélices.
- (4) El efecto de la posición vertical del centro de gravedad.
- (5) Estudio experimental del efecto de la inclinación de la trayectoria.
- (6) Estudio del efecto de la curvatura alar sobre la estabilidad.
- (7) Estudiar la posibilidad de evaluar experimentalmente las derivadas aerodinámicas con un modelo del aeroplano tratado como si fuera una cometa.
- (8) Evaluar experimentalmente las derivadas aerodinámicas, incluyendo las rotativas, mediante modelos situados en tablas giratorias o colgantes, y su comparación con los valores calculados, vuelos experimentales con los mismos modelos, y comparación de su comportamiento desde el punto de vista de la estabilidad con los resultados de los cálculos.
- (9) Determinación fotográfica de las trayectorias y oscilaciones de modelos de aviones y planeadores.
- (10) Estudio de sistemas sustentadores de tres planos.
- (11) Discusión de las ecuaciones del movimiento de un aeroplano en su forma más general, y búsqueda de casos en los que estas ecuaciones admiten una integración exacta. (Probablemente –sugiere Bryan- se trata de un problema matemático que muy bien puede ocupar la atención de los *matemáticos puros* durante los próximos cincuenta años, y aun así, dejar todavía un buen montón de trabajo por hacer).

15.4 Análisis Crítico-Histórico

- (1) El estudio de Bryan profundiza los intentos anteriores de Lanchester y Soreau, ampliando el análisis a 3 dimensiones¹⁷⁸, y es más sólido que el de Ferber; Bryan no pudo conocer el de Bothezat. Desarrolla primordialmente el caso de planos estrechos, para poder no tener en cuenta el desplazamiento del centro de presión. Esta suposición simplifica notablemente sus cálculos y, con sus limitaciones, no se aleja de la realidad para el caso de superficies planas. Las fórmulas obtenidas por Bryan para los casos en los que el centro de presión se mueve según una cierta dependencia son menos transparentes.
- (2) La elección de las variables de las ecuaciones de la dinámica, así como la del sistema de referencia para establecerlas es acertada, pues evita la extrema complejidad a la que se ven abocados algunos de los estudiosos antes mencionados, que se ven obligados –en distinto grado- a asumir hipótesis que corren el riesgo de hacer perder el núcleo del problema o deformarlo, convirtiendo algunas de sus frecuentemente alambicadas conclusiones en afirmaciones exentas de aplicabilidad o tan dependientes de los supuestos asumidos que en la práctica resultaban inservibles. Tampoco Bryan se librará de esta carencia de aplicabilidad inmediata de sus conclusiones.
- (3) Aún con la mencionada limitación del modelo aerodinámico, Bryan distingue bien los problemas atribuibles a la sustentación y a la resistencia, realiza un análisis lineal sumamente detallado, asume simplificaciones coherentes, e identifica correctamente los modos de comportamiento de las oscilaciones. Se basa este acierto, en parte, en un hecho doble: (1) asume una fuerza aerodinámica total función de $\sin \alpha$ y perpendicular a la placa, y (2) la superficie sustentadora (una o múltiple) forma un ángulo de orden de magnitud también similar a α , lo que se traduce en sustentaciones del orden de α y resistencias del orden de α^2 con la hipótesis habitual de α pequeño.
- (4) La matriz del sistema lineal longitudinal, si se parte de una situación estacionaria simétrica, se puede entonces mostrar exenta de derivadas aerodinámicas lateral direccionales, con lo que aparecen separados los dos movimientos: el lateral direccional se desacopla del longitudinal. Esto fue ya obtenido por Ferber [19] El polinomio característico es de 4º grado, y sus coeficientes son función de las derivadas aerodinámicas.
- (5) El establecimiento riguroso de las derivadas aerodinámicas y la sabia comparación de magnitudes relativas entre los términos que conforman los coeficientes del polinomio característico del sistema permiten la aplicación de la teoría sobre la estabilidad de J. Routh [3], con la que Bryan está muy familiarizado, y la hacen, a pesar de su aspecto complicado en el caso del discriminante, permeable al asalto de Bryan quien, de un modo elegante y aparentemente sin esfuerzo, establece condiciones de estabilidad que involucran la inercia del avión y sus características aerodinámicas. (Si bien –como ya se ha mencionado- el deficiente modelo

¹⁷⁸ T. J. M. Boyd sugiere que el interés de Bryan por la estabilidad de los aeroplanos es una *continuación* de sus investigaciones sobre la estabilidad de los buques. Cfr. por ejemplo: Bryan, G. H. “The action of Bilge Keels”; Trans. Inst. Naval Arch. 62, 198-219. (1900) [16]

matemático aerodinámico usado por Bryan precave su uso práctico eficaz). Esta condición de estabilidad tiene cierto parecido con la obtenida por Lanchester [4] en 1908. Bryan las considera idénticas.

- (6) Ha sido una adquisición definitiva para la ciencia aeronáutica el modo utilizado por Bryan de analizar la dinámica lineal del comportamiento de un avión, más allá del estudio de la estabilidad. El concepto de “*Derivada Aerodinámica*” se ha mostrado muy fecundo y, aunque procede de la simple transposición de una metodología matemática conocida y frecuentemente utilizada en otros ámbitos de la técnica, en el campo aeronáutico ha constituido durante más de un siglo, en parte de la columna vertebral del estudio de la dinámica de los aviones.
- (7) El modelo matemático-aerodinámico de Bryan no se presta fácilmente a convertirse -como era su deseo- en una herramienta útil para el diseño de los aviones, ya que supone válidas expresiones de las fuerzas aerodinámicas demasiado genéricas y poco realistas, y omite la inclusión en forma cuantitativa de efectos aerodinámicos cuya influencia menciona, pero no puede todavía cuantificar en el momento en que él escribe. Por esta razón insiste reiteradamente en la necesidad de establecer un serio y extenso programa de experimentos para obtener los valores de las derivadas aerodinámicas.
- (8) Con un modelo aerodinámico adecuado, con correctos coeficientes de proporcionalidad y la inclusión de la nueva variable $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ -que Bryan menciona, pero cuyo valor no está en condiciones de fijar-, muchos de los desarrollos que efectúa, seguidos de modo literal, podrían ser mantenidos y muchas de sus hipótesis resultan aceptables y conducen - en el fondo, si no en la forma- a resultados en buena acomodación a los modos actuales de establecer la teoría de la estabilidad.
- (9) Por todo esto se comprende que el hecho de que siga siendo citado¹⁷⁹ como referencia [17], a pesar del tiempo transcurrido desde su publicación, su carencia de utilidad directa práctica y el hecho de que no parece haber encontrado muchas personas interesadas¹⁸⁰, no se debe solamente al acendrado sentido histórico propio, según se dice, de los anglosajones. Realmente marcó una época al establecer una sólida cimentación teórica para la teoría matemática del estudio del vuelo y

¹⁷⁹ Por mencionar algunos: Cook, M. V. “Flight Dynamics Principles”, Elsevier AES (2007); Nelson, R. C. “Flight Stability and Automatic Control”, WCB McGraw-Hill, (1998); Napolitano, M. R. “Aircraft Dynamics. From Modeling to Simulation”, John Wiley & Sons. (2012); Etkin, B. & Reid LL. D. “Dynamics of Flight”, John Wiley & Sons. (1996); Abzug, J. A. & Larrabee, E. E. “Airplane Stability & Control. A History of the Technologies that Made Aviation Possible”, CAMBRIDGE University Press (1997); Sinha, N. K. & Ananthkrishnan, N. “Elementary Flight Dynamics with an introduction to Bifurcation and Continuation Methods”, CRC Press, Taylor & Francis Group, (2014); Raol, J. R. & Singh, J. “Flight Mechanics Modeling and Analysis”, CRC Press, Taylor & Francis Group, (2009); Hancock, G. J. “An Introduction to the Flight Dynamics of Rigid Aeroplanes”, Ellis Horwood Series in Mechanical Engineering, (1995); Phillips, W. F. “Mechanics of Flight”, John Wiley & Sons, Inc. (2004)... etc. La lista llegaría a ser colosal.

¹⁸⁰ Ni los matemáticos ni los pioneros se interesaron en la primera aportación importante de Bryan, juntamente con Williams [5], al tema de la estabilidad de los aviones en 1904. Tampoco parecen haberlo hecho en la de 1911, quizás debido a que el libro, con muy abundante y explícito contenido algebraico en la mayoría de sus páginas y dificultosa aplicabilidad, resulta intensamente disuasorio.

mantiene actualmente un sabor inconfundiblemente moderno¹⁸¹. Resulta también de justicia mencionar la colaboración de E. Harper, nada irrelevante en un libro tan algebraicamente farragoso, en el que disponer y mantener los signos apropiados juega tan importante papel, en palabras del propio Bryan¹⁸². L. Bairstow asumirá la tarea de convertir el trabajo de Bryan & Harper en accesible para los diseñadores de aeroplanos, fundamentalmente mediante un serio programa de experimentación y de publicación asequible y sintética de los resultados [18].

- (10) La lista de problemas que Bryan considera pendientes de estudio, de la que se ha mostrado más arriba la parte que afecta al movimiento longitudinal, indica con bastante claridad el notable grado de comprensión del núcleo de la problemática del vuelo que el pionero inglés poseía.
- (11) El interés de Bryan por la aviación parece haber sido fruto del contagio del entusiasmo que manifestaba L. Boltzmann por los experimentos de O. Lilienthal, cuyas publicaciones Bryan también leyó y cuyo accidente mortal le llevó a pensar que la comprensión y correcta solución del problema de la estabilidad jugaba un papel fundamental en la seguridad del vuelo.

15.5 Anexo I. Ref. [20], [21], y [22]

Se indica, a título de ejemplo, el valor del parámetro $\left(\frac{KSL}{m}\right)$ para los 13 tipos¹⁸³ de aviones monoplanos que se muestran a continuación; todos ellos estaban operativos en el año de la publicación del libro de Bryan. Hemos asumido el valor medio de la constante de resistencia específica del aire K aceptado en la época.

¹⁸¹ Salvo, quizás, por la tipografía elegida para algunos símbolos, para los que utiliza *Letra Gótica Antigua*.

¹⁸² Bryan quería que sus cálculos fuesen nuevamente realizados independientemente -repetidos- por otra persona matemáticamente capacitada. (Ver Prólogo de [1])

¹⁸³ Ref. [22] y [26].

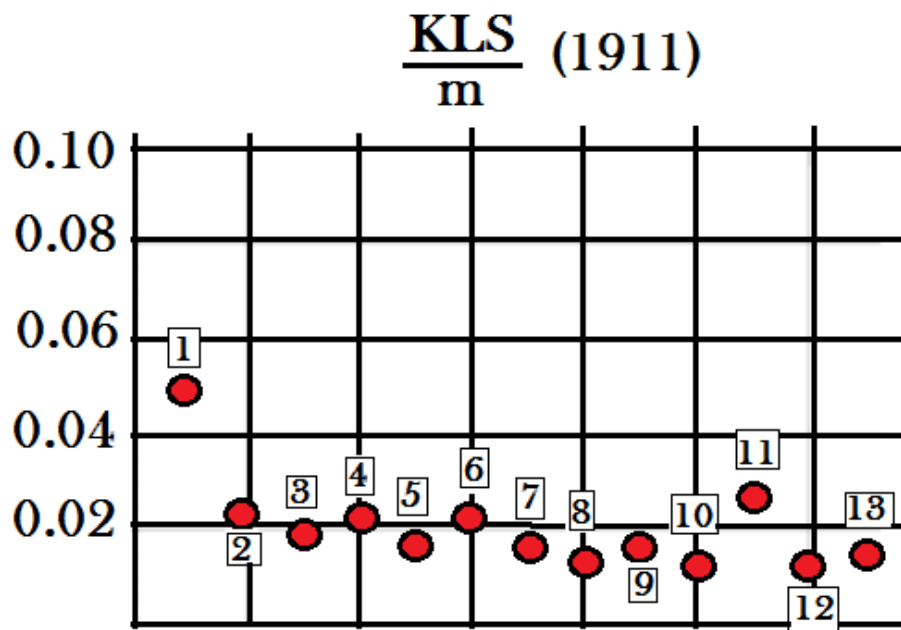
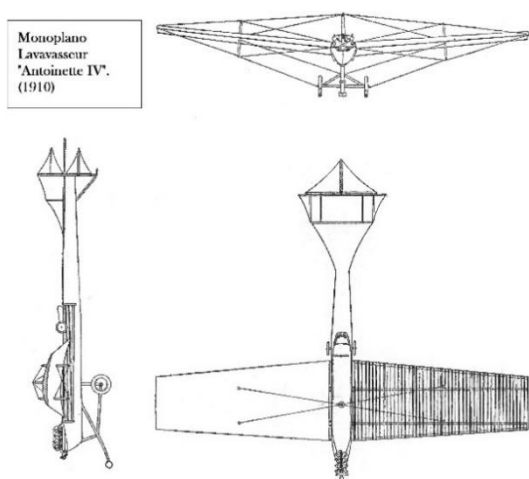
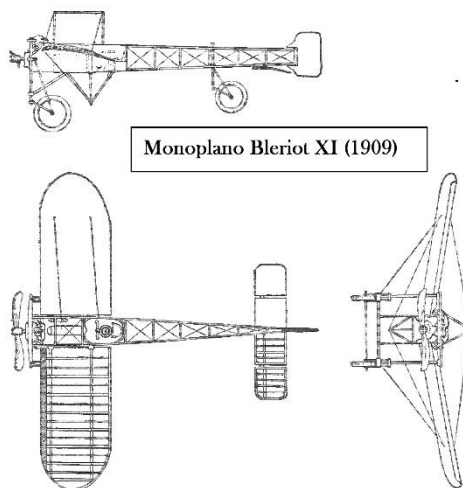


Figura 15.6: Ejemplos del valor del parámetro $\left(\frac{KSL}{m}\right)$ para varios casos.

Ref. ANEXO I; Fig. 15.6. y siguientes: Figs. 15.6.(i). El índice correspondiente a “i” de los gráficos que siguen a continuación se corresponden con los números del gráfico 15.6.

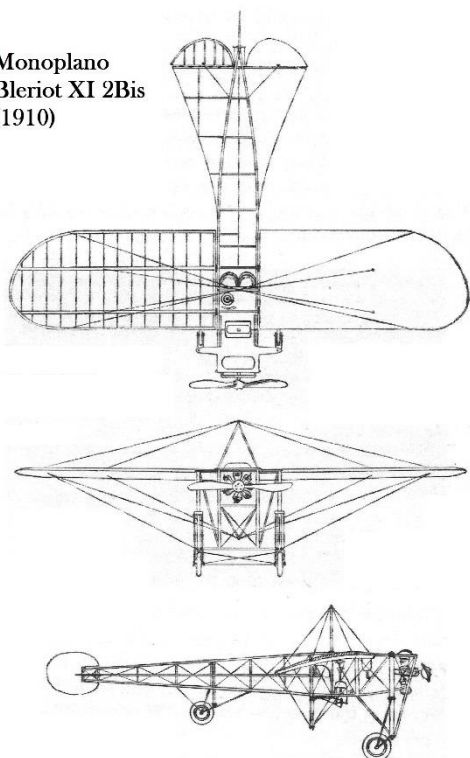


(Ref. Fig. 15.6.1)

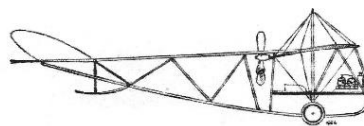


(Ref. Fig. 15.6.2)

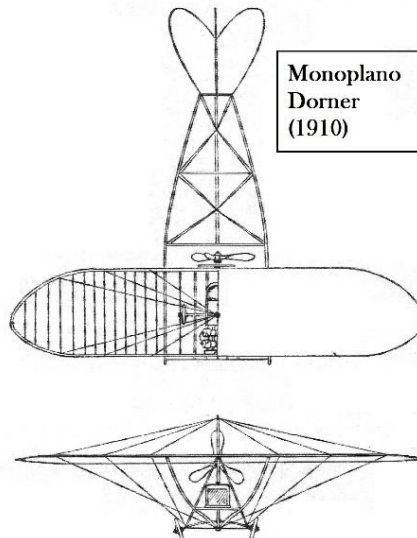
Monoplano
Bleriot XI 2Bis
(1910)



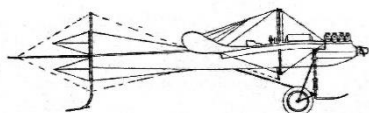
(Ref. Fig. 15.6.3)



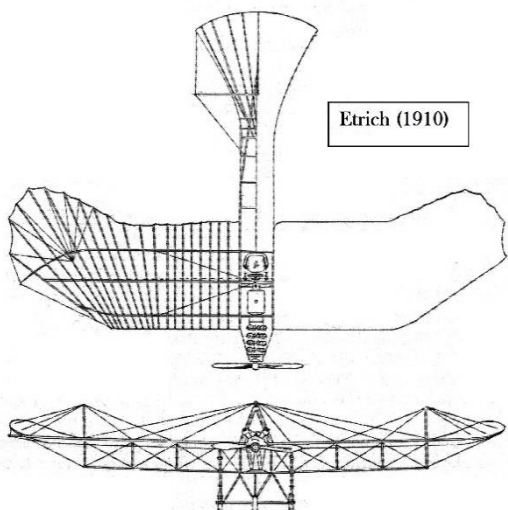
Monoplano
Dornier
(1910)



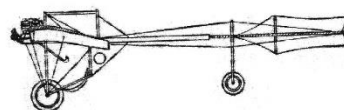
(Ref. Fig. 15.6.4)



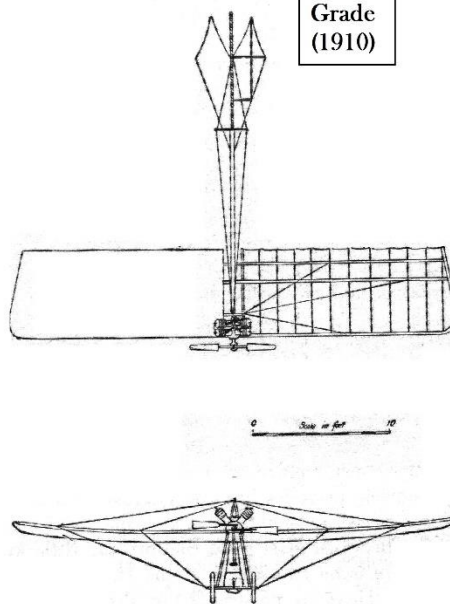
Etrich (1910)



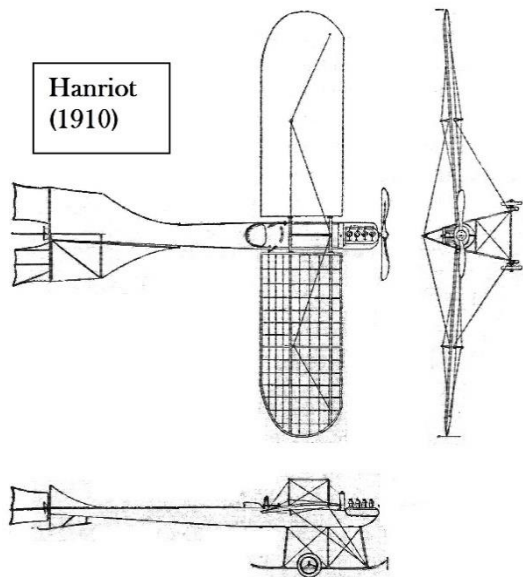
(Ref. Fig. 15.6.5)



Grade
(1910)

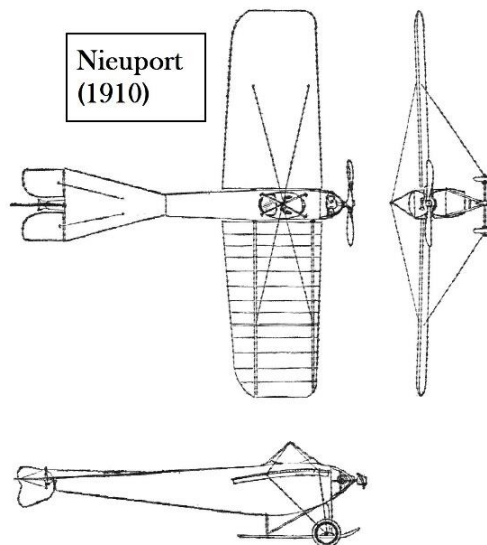


(Ref. Fig. 15.6.6)



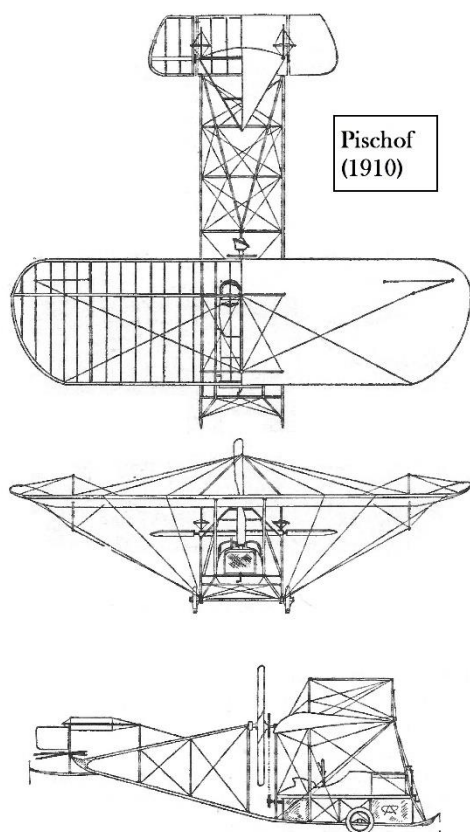
Hanriot
(1910)

(Ref. Fig. 15.6.7)



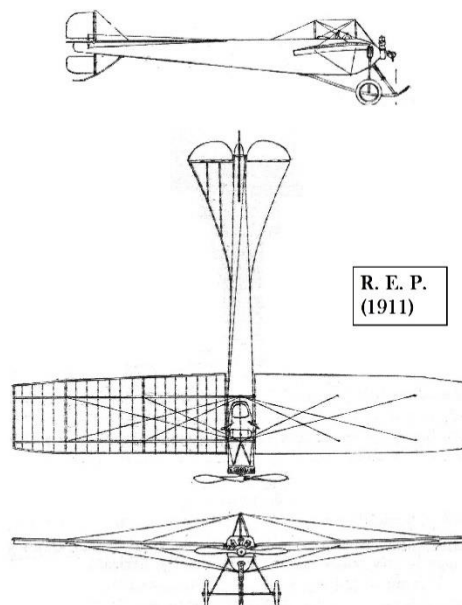
Nieuport
(1910)

(Ref. Fig. 15.6.8)



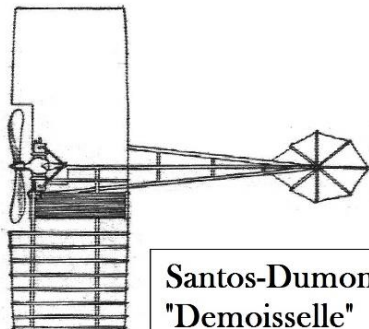
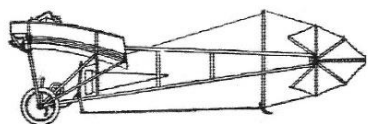
Pischof
(1910)

(Ref. Fig. 15.6.1)

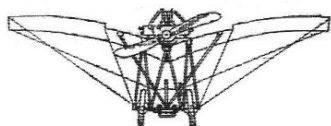


R. E. P.
(1911)

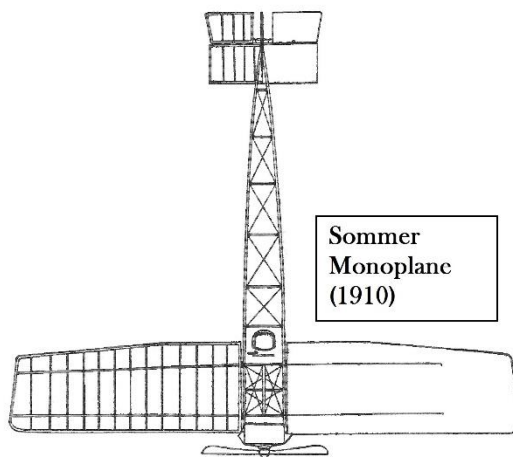
(Ref. Fig. 15.6.10)



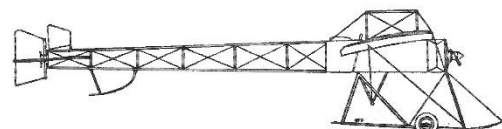
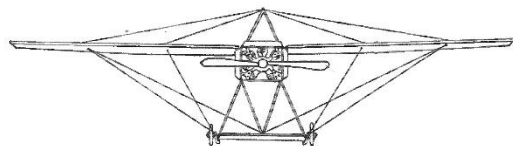
Santos-Dumont
"Demoiselle"
(1907)



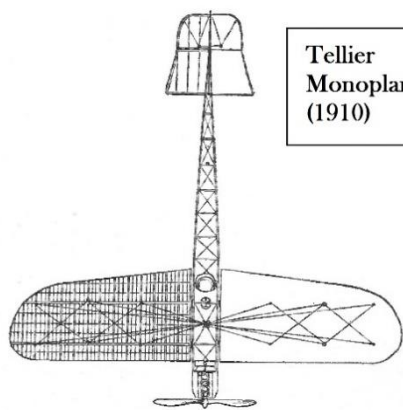
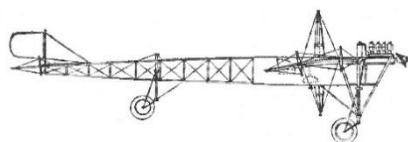
(Ref. Fig. 15.6.11)



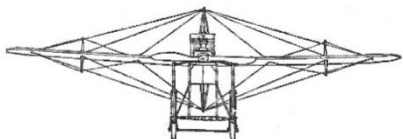
Sommer
Monoplane
(1910)



(Ref. Fig. 15.6.12)



Tellier
Monoplane
(1910)



(Ref. Fig. 15.6.13)

De los datos mostrados se deduce que parece aceptable asumir la condición

$$\left(\frac{KSL}{m}\right) \ll 1$$

15.6 ANEXO II

Nos ha parecido relevante, para terminar el capítulo sobre Bryan, mencionar muy sucintamente el documento: “*Investigation into the Stability of an Aeroplane, with an examination into the conditions necessary in order that the symmetric and asymmetric oscillations can be considered independently*”. - By L. Bairstow; B. Melvill Jones; and A. W. H. Thompson. Reports & Memoranda, No. 77, March, London. (1913).

Contenido.

El National Physical Laboratory (NPL) realizó (durante el año 1912) un trabajo importante sobre la estabilidad de los aeroplanos, orientado hacia la obtención de las derivadas aerodinámicas tal como las describió Bryan. Los métodos para formar las ecuaciones del movimiento¹⁸⁴ habían sido desarrollados por Lanchester, Bryan, Ferber, Painlevé, Bothezat, Reissner, Knoller, Crocco, y otros. Los métodos matemáticos usados por el NPL fueron los de Bryan, modificados según las sugerencias de los datos experimentales, ya que los cálculos de Bryan están hechos para un aeroplano idealizado y simplificado. Las ecuaciones del movimiento conducen a una ecuación de octavo grado. Para el movimiento en un plano de simetría, ésta se resuelve en dos ecuaciones de cuarto grado, tal como mostró Bryan. A estas ecuaciones se les puede aplicar los criterios de estabilidad de Routh. Los experimentos midieron estos coeficientes. Se demostró la

¹⁸⁴ En muy diferente grado.

importancia de las derivadas rotatorias, tal como había anunciado Bryan. Con base en los datos obtenidos se establecieron soluciones aproximadas para las ecuaciones de estabilidad. Los resultados logrados, a partir de casos particulares, permitieron sospechar que este mismo procedimiento era apto para estudiar la estabilidad de la mayoría de aeroplanos y –podría pensarse– los resultados no diferirían mucho unos de otros.

Se aplicaron las teorías matemáticas de Lanchester¹⁸⁵ y Bryan. Este trabajo se consideraba la prolongación natural del realizado por Bryan, y partía de su libro “*Stability in Aviation*”.

Se vio también que la ecuación característica longitudinal se puede razonablemente expresar como el producto de dos polinomios de segundo grado:

$$pol = \lambda^4 + A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 \approx (\lambda^2 + A_3\lambda + A_2) \left(\lambda^2 + \left(\frac{A_1}{A_2} - \frac{A_3A_0}{A_2^2} \right) \lambda + \frac{A_0}{A_2} \right) = 0$$

Los autores del R&M 77 estaban convencidos de que la estabilidad de la mayoría de los aviones *modernos* (1913) podía analizarse mediante la simplificación¹⁸⁶ sugerida.

Esto nos sugiere las siguientes conclusiones:

- (1) Este modo de operar no es distinto, ni conceptualmente ni formalmente, de lo que académicamente se sigue haciendo hoy en día, si obviamos los efectos de la compresibilidad y la incorporación de algunas variables complementarias que se ha mostrado necesaria para la correcta modelización matemática de la dinámica lineal de los aviones. El NPL *simplemente* obtuvo experimentalmente valores para las derivadas aerodinámicas descritas por Bryan, para quien estas derivadas eran –en su libro– solamente símbolos matemáticos de valor desconocido.
- (2) La sustitución de los valores medidos por el NPL en las ecuaciones de la dinámica de un aeroplano condujo a soluciones que, en su expresión matemática concreta, se corresponden con una llamativa y notable coincidencia con las que Bryan obtuvo, a través de un cierto número de simplificaciones y de asignaciones de valor relativo de unos términos respecto de otros.
- (3) Esto prueba el acierto del método preconizado por Bryan, y su extrema destreza en el campo de la matemática aplicada, en un ámbito en el que ha permanecido como pionero histórico incontestable. La persistencia y eficacia de sus métodos resultaba llamativa [24] aunque sus propias ecuaciones no fuesen de directa aplicación práctica.

¹⁸⁵ Es menos claro a qué se refiere el R&M 77 cuando cita a Lanchester en este contexto.

¹⁸⁶ Añadamos que, exclusivamente desde un punto de vista académico y sólo a modo de muy secundario argumento convergente sin valor científico, en el 99% de los más de 386 tipos diferentes de aviones convencionales, modelados matemáticamente –según USAF DATCOM 1975– durante el desarrollo de la asignatura de Mecánica de Vuelo en la Universitat Politècnica de València entre 2012 y 2017 la ecuación simplificada de Bryan –o la versión equivalente del R&M 77– aproxima razonablemente bien el modo Corto Período, la frecuencia del Modo Fugoida, y es significativamente menos correcta en el caso del amortiguamiento de este último Modo. Todo ello, resulta innecesario decirlo, en perfecto acuerdo con un siglo de experimentación aeronáutica.

Bibliografía.

- [1] Bryan, G. H. “Stability in Aviation”. *“An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motions of Airplanes”*.¹⁸⁷ Sc. D., F. R. S. MACMILLAN AND CO., LIMITED. ST. MARTIN`S STREET, LONDON, (1911).
- [2] Routh, E. J. “The elementary part of a treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies”. Part I. MACMILLAN & CO. LONDON. (1897).
- [3] Routh, E. J. *“A Treatise on the Stability of a given state of motion, particularly steady motion”*. MCMILLAN & CO. London. (1877).
- [4] Lanchester, F. W. “Aerodnetics, Constituting the Second Volume of a Complete Work on Aerial Flight”. Archibald Constable & CO. LTD. Orange Street Leicester Square. London (1908).
- [5] Bryan, G. H. & Williams, W. E. *“The Longitudinal Stability of Aerial Gliders”*, *“Proc. Roy. Soc. London”*, ser. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).
- [6] Ferber, F. *Revue D` Artillerie* 67, i, ii, Oct. Nov. (1905).
- [7] Langley, S. P. “Experiments in Aerodynamics”, Smithsonian Institution. Washington. (1902).
- [8] Joëssel. “Rapport sur des expériences relatives aux gouvernails”; Repport 9; “Mémorial du Génie Maritime”, (1873).
- [9] Etkin, B. “Dynamics of Flight. Stability and Control”. John Wiley & Sons. New York. (1959).
- [10] Etkin, B. “Dynamics of Atmospheric Flight”. John Wiley & Sons. New York. (1972).
- [11] Etkin, B. & Reid, L. D. “Dynamics of Flight. Stability and Control”. John Wiley & Sons. New York. (1996).
- [12] Durham, W. “Aircraft Flight Dynamics & Control”. Wiley. (2013).
- [13] Sinha, N. K. & Anathkrishnan, N. “Elementary Flight Dynamics, with an introduction to Bifurcation and Continuation Methods”. CRC Press. Taylor & Francis Group. Boca Raton. (2014).

¹⁸⁷ Con la colaboración, nada despreciable dadas las características del texto, de G. H. Harper.

- [14] Napolitano, M. "Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation". John Wiley & Sons. (2012).
- [15] Schmidt, D. K. "Modern Flight Dynamics". The McGraw-Hill Companies. (2012).
- [16] Boyd, T. J. M. "One Hundred Years of G. H. Bryan`s *STABILITY IN AVIATION*." Journal of Aeronautical History. Paper No. 04. (2011)
- [17] Abzug, L. E. & Larrabee, E. E.; "Airplane Stability and Control". Cambridge University Press. (1997).
- [18] Bairstow, L. "Applied Aerodynamics". New York. Longmans, Green & Co. (1919).
- [19] Ferber, F. "L' Aviation, ses débuts, son développement..." Berger-Levrault & Cie. Paris. (1909).
- [20] Jane, Fred. T. "JANE'S All the World Aircraft 1913". ARCO Publishing Company Inc. New York. (1969).
- [21] C. G. Grey. "JANE'S All the World Aircraft 1919". David & Charles Reprints Ltd. Newton Abbot Devon. UK. (1969).
- [22] Grover Cleveland Loening; "Monoplanes & Biplanes", Munn & Company, Inc. (1911).
- [23] Bryan, G. H. "Die Stabilität der Flugzeuge". Deutsche Übersetzung Von Bader. Berlin. (1914).
- [24] Metcalf, A. G. B. "Airplane Longitudinal Stability -A Résumé"; Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 4 (1936).
- [25] Bryan, G. H. "Aviation, Mathematical and Otherwise". Nature. London. (1909).
- [26] Gaston, R. de. "Les Aeroplanes de 1910". Librairie Aéronautique Editeurs. Paris. (1910).
- [27] Boyd, T. J. M. "George Hartley Bryan-Prophet without honour?". Ballard Matthews Lecture, Bangor University. 2011.

Capítulo 16

Emile Auguste Duchêne (1869-1946)



188

Contenido

16.1 Nota Biográfica

16.2 Documentos de Referencia.

16.3 Descripción de Contenido.

16.3.1 Sobre la Resistencia Aerodinámica.

16.3.2. Vuelo estacionario en un plano vertical.

16.3.3 Centro de presión.

16.3.4 Estabilidad (Estática) Longitudinal.

16.3.5 Estabilidad Longitudinal Automática.

16.3.5.1 Aviones consistentes en un solo plano.

16.3.5.2 Aviones consistentes en dos planos.

16.3.5.3 Función de la cola en el amortiguamiento de las oscilaciones.

16.3.6 Influencia de la Inercia.

16.4 Conclusiones

Bibliografía.

16.1 Nota Biográfica.

¹⁸⁸ <http://museedesetoiles.fr/wp-content/uploads/2015/08/GDduchene.jpg>. (14.06.2017)

Militar francés, del Arma de Infantería, experto en máquinas y fortificaciones. Diplomado de Estado Mayor, ascendió a general de brigada en 1925 y a general de división en 1929. Era Gran Oficial de la Legión de Honor.

16.2 Documento de Referencia.

“*The Mechanics of the Aeroplane. A Study of the Principles of Flight*”¹⁸⁹. Translated from the French by John H. Ledebour, B. A and T. O’B Hubbard. LONGMANS, GREEN AND CO. 39 Paternoster Row, London. (1912).

16.3 Descripción del contenido.

Este documento expone una sintética descripción de la mecánica del vuelo estacionario. Es contemporáneo de los trabajos de P. Painlevé y de G. H. Bryan, aunque no los menciona¹⁹⁰. Acepta que la distribución de presión sobre una superficie sustentadora plana con pequeño ángulo de ataque (α) es: $KSV^2\alpha$ siendo K una constante cuyo valor es idéntico para planos de la misma forma geométrica aunque sean de distinto tamaño.

El efecto del Alargamiento alar no es posible determinarlo con rigor pues las diversas referencias no muestran acuerdo entre ellas. Es un aspecto elusivo, y no parece haber expresiones matemáticas que permitan una cuantificación fiable del problema.

La ausencia de una teoría matemática que permita estimar la sustentación de un perfil delgado 2D, plano o curvo, y situar el centro de presión con claridad, generó muchos problemas.

Duchêne trabajará con un ala plana equivalente, establecida a partir del ángulo de sustentación nula del ala con curvatura, equivalente a la propuesta por Soreau [4], pero sin entrar en detalles.

Cuando Duchêne escribe su libro ya es conocido que el ángulo de ataque puede controlarse mediante el timón de profundidad. Acepta también que la Resistencia o fuerza total aerodinámica generada por un ala es perpendicular a la cuerda del ala equivalente. Describe varias correctas formulaciones básicamente coincidentes con las de la mecánica de Vuelo estacionaria actual, no directamente relacionadas con el problema de la estabilidad y ya establecidas en forma rudimentaria por Pénaud [6]. Hace uso también de un concepto denominado “*Velocidad Normal*”, aparentemente análogo al de Lanchester [12] de “*Velocidad Natural*”, correspondiente a aquella con la que el avión describe una trayectoria horizontal a velocidad constante, aunque Duchêne no ignora que esta velocidad no es única.

Duchêne sabe que el ángulo de ataque habitual será positivo y pequeño, pero considera que existe un ángulo de ataque por debajo del cual no se debe volar, ya que – afirma – existe el peligro de que bajo una oscilación longitudinal, cualquiera que sea su origen, se obtenga un ángulo de ataque negativo, y esto ha de evitarse a toda costa. Establece

¹⁸⁹ Obra premiada con el Monthyon Prize en 1911 por la Academia de las Ciencias de Paris.

¹⁹⁰ Parece verosímil que conociera los trabajos de Paul Painlevé, impartidos y publicados en la Escuela Politécnica de Paris. Painlevé fue también un importante político de ámbito nacional.

un intervalo que limita los valores que puede adoptar el ángulo de ataque (α): los valores aceptables le parecen ser los comprendidos entre:

$$0.05 \leq \alpha \leq 0.20 \text{ (rad)} \Rightarrow 2.86 \leq \alpha \leq 11.46 \text{ (grad)}$$

Un llamativo y peculiar corolario de lo anterior es que no debe instalarse un motor demasiado potente, pues *requeriría* un valor de α demasiado pequeño.

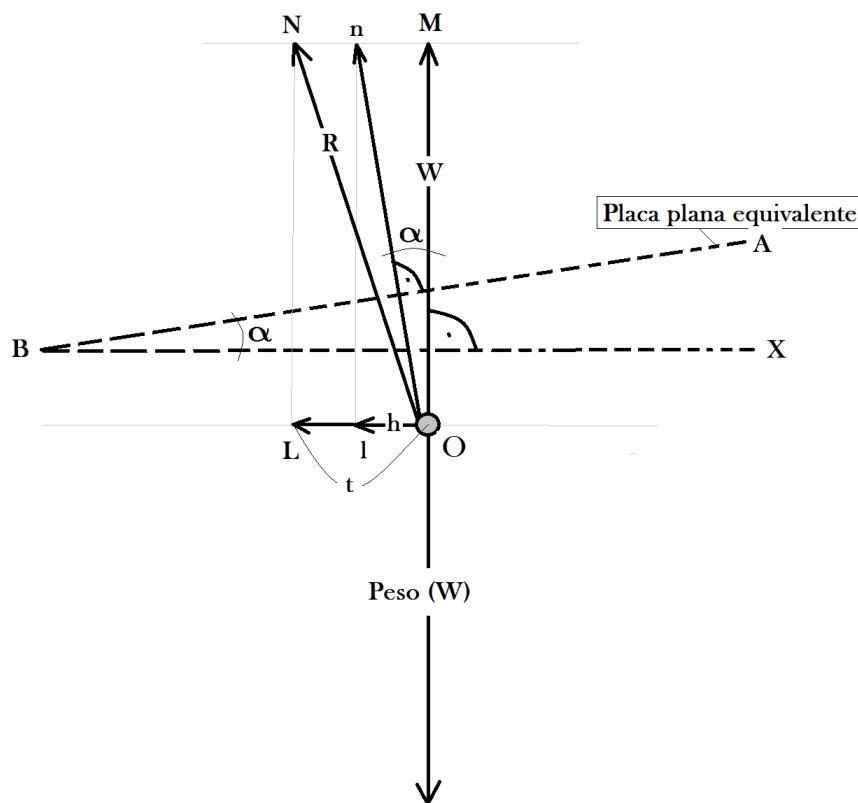


Figura 16.1: Descomposición de fuerzas aerodinámicas y gravitatorias para una placa plana (equivalente) sometida a una corriente de aire.

16.3.1 Sobre la resistencia aerodinámica. (Fíg. 16.1)

Duchêne descompone en dos componentes esta resistencia: una parte expresable mediante la fórmula $D_{Activa} = W \alpha$ que denomina “Resistencia Activa” y afirma que es el precio que hay que pagar por la sustentación. Si la velocidad es alta, entonces la “Resistencia Activa” será pequeña. Obsérvese que es expresable como:

$$[1] \quad W = KSV^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{W}{KSV^2} \Rightarrow D_{Activa} = \frac{W^2}{KSV^2} \quad [16.1]$$

Por esta razón, si la Resistencia Activa fuera la única existente, a mayor velocidad, se tendría menor resistencia. (Cfr. La “paradoja” de Langley [7]).

Además, hay que añadir a la “Resistencia Activa”, la “Resistencia pasiva”, causada por “*el espesor alar, la fricción del aire, los elementos estructurales, los cables de rigidización, el “chasis” de aterrizaje, el motor, etc... El resultado es una resistencia como, por ejemplo, la de un disco plano¹⁹¹ puesto perpendicular a la corriente*”. Esta superficie imaginaria la llama “*Superficie detrimental*” (S_d) y la considera un valor característico del avión.

El valor de esta “Resistencia Pasiva” lo expresa sencillamente como:

$$D_{Pasiva} = 0.08 S_d V^2 \quad [16.2]$$

Como es habitual en muchos pioneros, no se especifica nada sobre la densidad, que se supone incluida en el coeficiente $K=0.08$.

La resistencia aerodinámica total que se opone al avance y que debe ser equilibrada mediante el empuje, es la suma de las dos anteriores:

$$D_{Total} = D_{Activa} + D_{Pasiva} = 0.08 S_d V^2 + W \alpha \quad [16.3]$$

Si se reemplaza en la expresión anterior el valor de $V^2 = \frac{W}{KS\alpha}$ (correspondiente al vuelo estacionario horizontal), obtenemos:

$$D_{Total} = W \left(\left(\frac{0.08 S_d}{K S} \right) \frac{1}{\alpha} + \alpha \right) \quad [16.4]$$

Por una razón que explicará más adelante, Duchêne prefiere¹⁹² escribir:

$$D_{Total} = W \left(\frac{1}{f^2 \alpha} + \alpha \right) \quad \text{con} \quad \frac{1}{f^2} = \left(\frac{0.08 S_d}{K S} \right) \quad [16.5]$$

El factor f es adimensional. Esta fórmula es considerada fundamental, y la utiliza para su análisis del vuelo estacionario.

Si comparamos la fórmula de Duchêne con la actual, observamos que:

$$D_{1912} = W \left(\frac{1}{f^2 \alpha} + \alpha \right) \quad \text{con} \quad \frac{1}{f^2} = \left(\frac{0.08 S_d}{K S} \right)$$

$$D_{Actual} = W \left(\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{CL_\alpha}}{\sqrt{CD_0}} \right)^2 \alpha} + \frac{CL_\alpha}{\pi AR e} \alpha \right) \quad \text{con} : L = W \quad [16.6]$$

¹⁹¹ Painlevé (1909) [8] prefiere hablar de una esfera, para evitar efectos de ángulo de ataque variable.

¹⁹² Duchêne no deja de mencionar que, según Mr. Eiffel [9], la verdadera expresión es más complicada, pero no le parece necesario modificar la suya, pues las conclusiones son básicamente las mismas, y la deducción algo más sencilla.

No se puede efectuar una asignación completamente equivalente, porque la expresión de la “*Resistencia Activa*”, aunque depende del cuadrado del ángulo de ataque, es todavía rudimentaria en su formulación y proviene de consideraciones exclusivamente geométricas debido a que la fuerza total aerodinámica generada por la placa, plana o no, se considera normal a la superficie equivalente.

No obstante, hay que mencionar que la *modalidad* matemática está establecida ya. Se ve mejor con otra forma de presentación:

$$\begin{aligned}
 D_{1912} &= \left(KSV^2 \left(\frac{1}{f^2} \right) + KSV^2 \alpha^2 \right) \\
 D_{Actual} &= \left(\frac{1}{2} \rho SV^2 CD_0 + \frac{1}{2} \rho SV^2 \left(\frac{(CL_\alpha)^2}{\pi AR e} \right) \alpha^2 \right)
 \end{aligned}
 \tag{16.7}$$

El término de la “*Resistencia Pasiva*” es directamente “asimilable” al lenguaje actual, pero el de la “*Resistencia Activa*” no.

16.3.2 Vuelo estacionario en un plano vertical.

La serie de deducciones que Duchêne comienza a obtener a partir de su fórmula fundamental es bastante inmediata y se corresponden, como ya se ha dicho, con las que obtuvo Pénaud [6]: La curva de Empuje-Resistencia; el valor de la mínima resistencia aerodinámica; el empuje y la potencia requeridos para la sustentación; la curva de potencia útil; etc. Culmina esta parte de su trabajo con un sumario de las propiedades fundamentales del vuelo horizontal (estacionario) que reviste cierto interés, y que Duchêne obtiene del análisis pormenorizado del comportamiento de las distintas variables del vuelo, a partir de las fórmulas obtenidas.

- **Vuelo Oblicuo: ascendente o descendente.**

Duchêne parte de la Curva de Resistencia, aplicada a cada caso particular. Muchas de las soluciones que indica, aunque no coinciden formalmente hasta el detalle con las actuales, van el mismo sentido y permiten cierta profundización.

Duchêne también define someramente el equilibrio y la estabilidad del avión: longitudinal, lateral y direccional. El concepto es sencillo: “*La máquina sometida a una pequeña perturbación no debe lanzarse, de modo desorbitado, a ascender o descender, abandonando radicalmente la trayectoria que mantenía*”. La base fundamental para la estabilidad -según Duchêne- descansa en lo siguiente:

La máquina estable está sujeta toda ella a una fuerte corriente de aire. Esta corriente crea sobre todas las superficies sobre las que incide fuerzas y momentos que tienden -*deben tender*, para que sea estable- a mantener el aeroplano con la misma actitud: “*tal como está volando en ese momento*”.

Las oscilaciones alrededor del *CDG* -si tienen lugar- se componen con la velocidad de vuelo de modo que la resultante de la velocidad, al incidir de modo oblicuo sobre las superficies, pero de diferente manera en cada una de ellas debido a que la distancia que las separa del *CDG* es distinta, debe actuar de tal manera que amortigüe las oscilaciones y produzca un efecto de frenado angular.

Duchêne asegura también que este modo de actuar no tiene nada que ver con el modo de estabilizar un dirigible o globo, lo que solamente es parcialmente cierto.

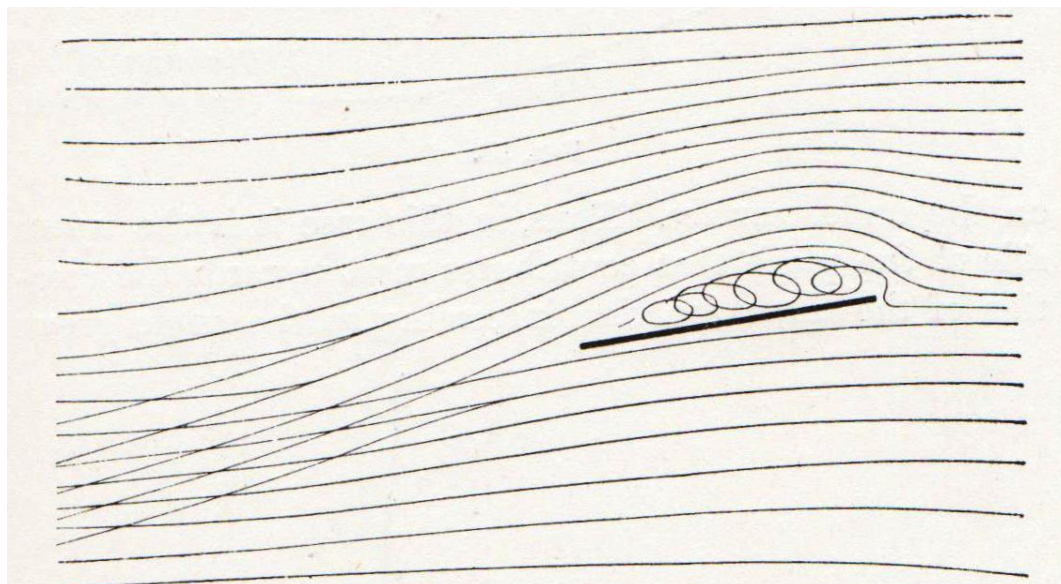


Figura 16.2: Flujo alrededor de una placa plana, según Duchêne (Parte II, Cap. IV, Fig. 37)

La precariedad de la descripción del flujo de aire alrededor de una placa *AB* puede observarse en el dibujo (Fig. 16.2) tal como lo describe el propio Duchêne¹⁹³. Pueden verse líneas de corriente imposibles.

16.3.3 Centro de Presión.

Siguiendo a Eiffel [9], en quien se basa Duchêne para el estudio de los movimientos del centro de presión para una *placa plana* y para una placa con curvatura en función del ángulo de ataque, estos movimientos son los que aparecen en la fig. 16.3 y fig. 16.4. Se muestran ambos en el mismo gráfico para que resulte más sencillo captar el contraste entre los dos modos de reaccionar del centro de presión de un perfil alar ante los cambios en α

Las razones por las que el comportamiento del centro de presión de las alas con curvatura chocaba a los pioneros, cuando lo comparaban con un perfil plano, son evidentes, pues en el caso del perfil plano el centro de presión, al aumentar α , retrocede y sucede lo contrario para el perfil con curvatura. Esto ha sido ya comentado en el Cap. 2.

¹⁹³ Parece ser una versión simplificada de la Fig. 12 de la Pág. 23 de Ref. [2]

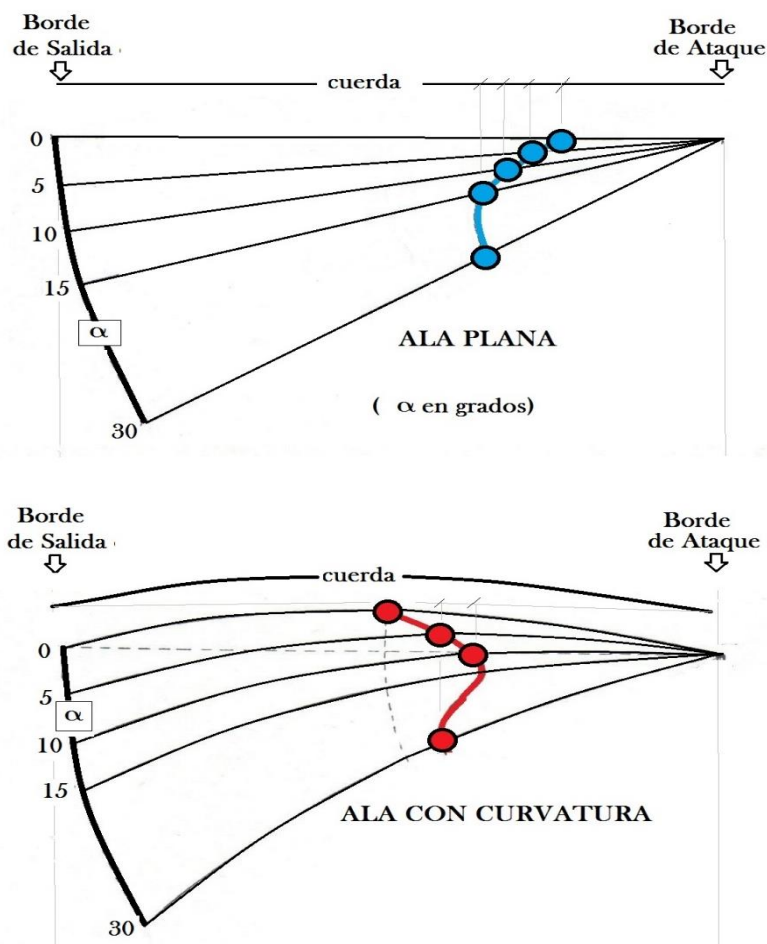


Figura 16.3: Comparación del desplazamiento del centro de presión en un perfil plano (simétrico) y en un perfil con curvatura.

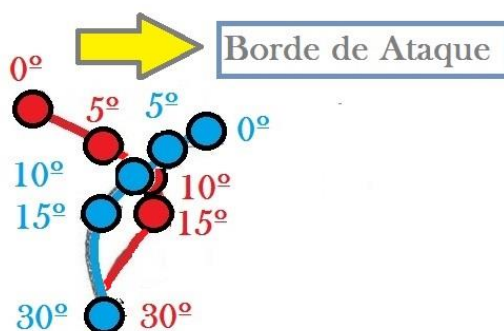


Figura 16.4: Comparación del desplazamiento del centro de presión en un perfil plano (simétrico) y en un perfil con curvatura. (Detalle de la Fig. 16.3).

El comportamiento del centro de presión de una placa plana -recordemos que no se menciona nada sobre el alargamiento de la misma- lo representan matemáticamente mediante la siguiente expresión, medido desde el borde de ataque del ala:

$$\frac{x_{CP}}{c} \approx \frac{1}{4} + k \alpha \quad \text{con:} \quad [16.8]$$

$$k \approx 0.3 \quad (\text{Avanzini}) \quad [10]$$

$$k \approx 0.4 \quad (\text{Eiffel}) \quad [9]$$

Duchêne es muy consciente de que la variación de la posición del centro de presión complica el problema de la estabilidad del aeroplano.

16.3.4 Estabilidad (estática) Longitudinal.

La estabilización de un plano rectangular aislado le parece posible, por lo menos teóricamente, pero precaria y el aeroplano resultante poco práctico. La conclusión del estudio que a continuación realizará será: si se quiere volar con equilibrio a diferentes ángulos de ataque, *sin tener que mover el centro de gravedad*, el avión deberá consistir en dos planos: uno fijo y el otro móvil. La cola debe ser móvil (en cuanto al ángulo que adopta frente a la corriente) con estabilizador horizontal fijo y elevador móvil. Procede ahora a desarrollar esta idea.

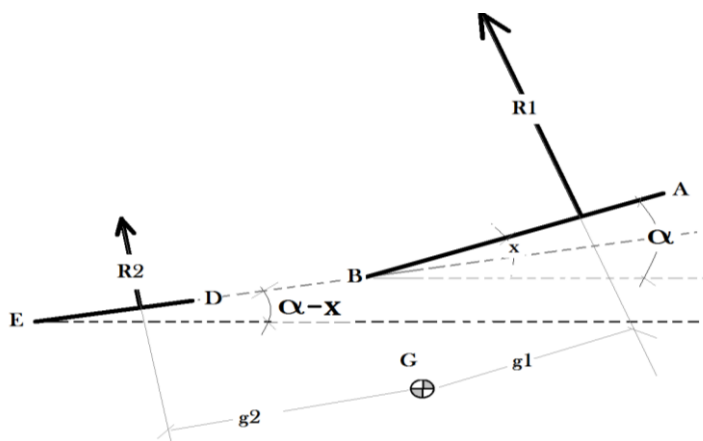


Figura 16.5; Esquema para el análisis de la estabilidad estática. Sistema sustentador formado por dos alas a distinto ángulo de ataque geométrico.

Sea la figura 16.5. Los dos planos son *AB* (el principal) y *DE* el secundario. El centro de gravedad, entre ambas. El ángulo que forman entre sí es pequeño y su valor es *x*. Si el ángulo de ataque es α , tenemos que los valores de las fuerzas¹⁹⁴ aerodinámicas normales a cada placa son:

$$R_1 = K_1 S_1 V^2 \alpha \quad R_2 = K_2 S_2 V^2 (\alpha - x) \quad [16.9]$$

Si ha de existir equilibrio, deberá cumplirse la igualdad de momentos:

$$K_1 S_1 V^2 \alpha g_1 = K_2 S_2 V^2 (\alpha - x) g_2 \quad [16.10]$$

¹⁹⁴ Recordemos que Duchêne, como todos los pioneros, no introduce en sus cálculos la desviación de la corriente, aunque sabe que existe.

Duchêne deduce lo siguiente:

- (1) El equilibrado no depende de la velocidad de vuelo del aeroplano; esta conclusión es importante.

$$K_1 S_1 \alpha g_1 = K_2 S_2 (\alpha - x) g_2 \quad [16.11]$$

- (2) Cuando varía el ángulo de ataque, también lo hacen las distancias g_1 y g_2 . (Pero si el plano secundario es pequeño, podría despreciarse su correspondiente variación)

- (3) Resulta evidente que hay una correspondencia directa y sencilla entre x e α (si el aeroplano es estable). Esto es de una gran importancia y permite encontrar una solución al problema. Muestra la conveniencia de tener un plano auxiliar más pequeño que el principal y situado a una cierta distancia del centro de gravedad, con el objeto de lograr la estabilidad longitudinal.

- (4) Normalmente un aeroplano comprende una parte móvil y una parte fija. La parte móvil se llama “elevador”, y puede estar delante o detrás del ala principal. Para cada posición del elevador hay un solo ángulo de ataque y -dice Duchêne- una posición estable del aeroplano. (Sugiere que variar el ángulo x no es el único modo de equilibrar el avión. Puede hacerse también variando S_2 o g_2 .

- (5) No omite mencionar la influencia que la resistencia aerodinámica generada por los diferentes componentes del avión puede tener en la estabilidad; en la medida en que sus resultantes no pasen por el CDG del avión darán lugar a momentos que deberían también tenerse en cuenta.

- (6) Reitera que ángulos de ataque demasiado pequeños¹⁹⁵ no deben nunca aceptarse, porque son peligrosos.

- (7) Para Duchêne una cola fija, sin posibilidad de cambiar su ángulo respecto del ala delantera, tenderá a no sustentar. (Esto no es realmente así, tampoco en el supuesto de que no haya desviación, solamente sucede en el caso de que el CDG esté situado exactamente en la línea de acción que pasa por el centro de presión del ala principal). NOTA: este formato de avión es exactamente el que Bryan utilizará como “*molécula de avión*”: menos avión no es posible encontrar, y se obtiene esta *molécula* mediante la unión de dos átomos, uno grande y otro pequeño. Y se hace trabajar (Sustentación) al átomo grande, y se dedica el átomo pequeño a sustentar solamente en la medida en que es necesario equilibrar el avión. La fig. 16.6 sirve para explicarlo: puede verse que la cola está alineada con el flujo (No existe desviación de corriente). Debido a la

¹⁹⁵ Este es un concepto curioso que es quizás asociable conceptualmente con la “*inestabilidad catastrófica*” de Lanchester, mencionada en el Cap. 11 de este estudio.

peculiar concepción de la fuerza aerodinámica total, esta debe pasar por el CDG para que el momento de cabeceo sea nulo.

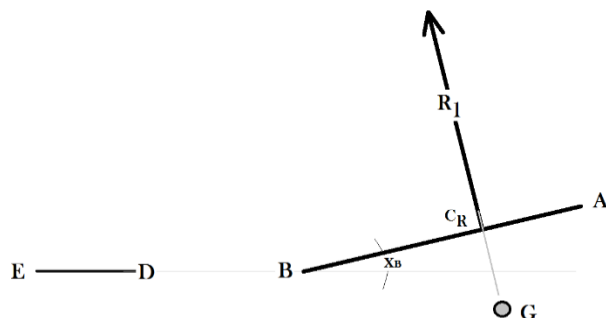


Figura 16.6: Sistema de dos alas con la línea de acción de resultante sustentadora R pasando por el CDG. (Vuelo Horizontal).

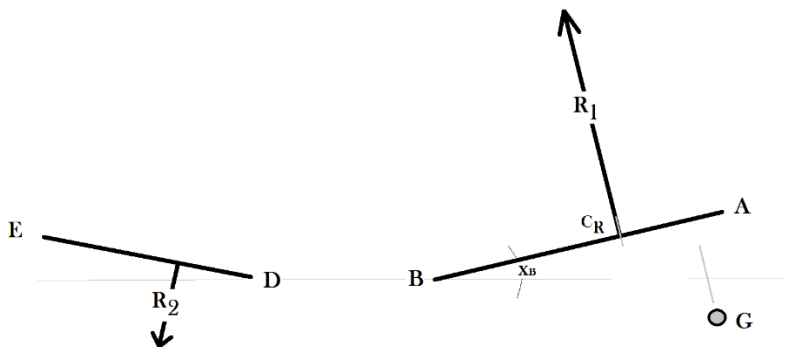


Figura 16.7: Sistema de dos alas con la línea de acción de resultante sustentadora R no pasando por el CDG. (Vuelo Horizontal)

En la Fig. 16.7 puede verse el caso de un aeroplano cuyo centro de gravedad (G) está por delante. La necesidad de equilibrar el avión impone que R_1 y R_2 generen momentos que se pongan y anulen mutuamente.

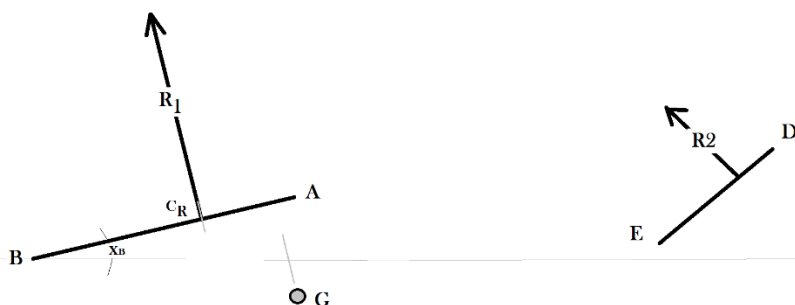


Figura 16.8: Sistema de dos alas con la superficie de control delante de la principal. (Sistema "Flyer" de los Wright) (Vuelo Horizontal).

La Fig. 16.8 muestra el esquema de un avión tipo “Flyer”, como el de los hermanos Wright, cuyo estudio resulta particularmente tentador para los pioneros debido a que sus características de vuelo y maniobra –para un observador en tierra- resultaban deslumbrantes. La estabilidad de este aeroplano, dice Duchêne, es peculiar.

Lo que interesa reseñar ahora es que el Centro de Presión relevante, para Duchêne, sigue siendo únicamente el del ala principal. Veamos, a modo de ejemplo, cómo efectúa Duchêne el análisis matemático del equilibrado de un aeroplano. Supongamos, para simplificar, que el Centro de Presión no varía con el ángulo de ataque.

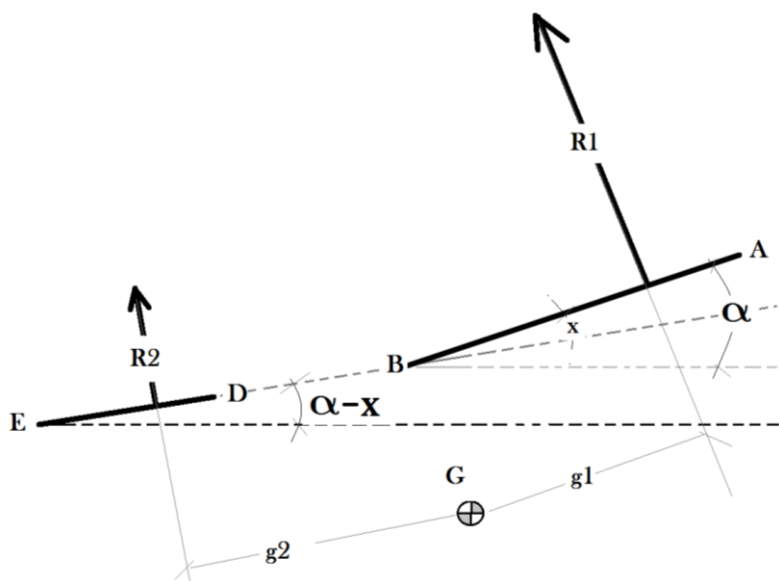


Figura 16.9: Esquema de un Sistema formado por dos alas sustentadoras, con el CDG entre ellas. Sistema principal delantero.

La ecuación del equilibrio –que Duchêne denomina “Ecuación de la estabilidad”- es, para un avión con empenaje trasero, la siguiente (Fig. 16.9):

$$K_1 S_1 G g_1 \alpha = K_2 S_2 G g_2 (\alpha - x) \tag{16.12}$$

De donde se deduce para el ángulo de ataque el valor:

$$\alpha = \frac{x}{1 - \frac{K_1 S_1 G g_1}{K_2 S_2 G g_2}} \tag{16.13}$$

Es decir, la deflexión x del empenaje respecto del ala principal fija el ángulo de ataque α . Esta es la conclusión importante.

Duchêne hace notar que la obtención de un valor positivo para α requiere que el CDG no se retrase demasiado. El hecho de que no incluya la desviación de la corriente simplifica las expresiones, y permite obtener conclusiones cualitativamente correctas pero invalida las cuantitativas. A la vez, si la distancia $g1$ es nula –el centro de gravedad coincide

con el centro de presión del ala principal-, entonces el ángulo del empenaje trasero es siempre nulo ya que $x = \alpha$, y el empenaje posterior no produce sustentación.

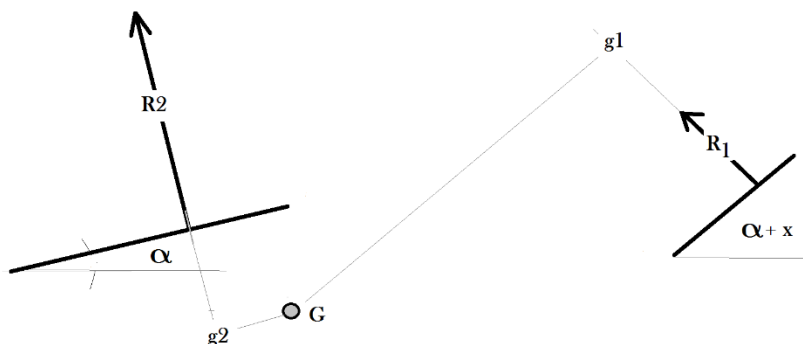


Figura 16.10: Esquema de un Sistema formado por dos alas sustentadoras, con el CDG entre ellas. Sistema principal trasero.

Vamos ahora al caso Wright (Fig. 16.10). Duchêne observa que sigue siendo cierto que la ecuación del momento de cabeceo genera una relación obligatoria entre el ángulo x y el ángulo α , si se impone la condición de que debe existir equilibrio, aunque ninguna de estas consideraciones dice nada todavía sobre la estabilidad dinámica del sistema. Por ejemplo, parece considerar condición suficiente para la estabilidad el que el CDG esté situado por delante del centro de presión *del ala principal*. Esto se debe a que todavía no se dispone del concepto de centro aerodinámico del avión completo, o punto neutro.

16.3.5 Estabilidad Longitudinal Automática.

Duchêne considera que la máquina debe mantener una posición de equilibrio estable. Es decir, que cuando el avión es perturbado de su actual posición de equilibrio, debe retornar automáticamente a la posición que tenía antes de la perturbación. Este aspecto será estudiado ahora.

16.3.5.1 Aviones consistentes en un solo plano.

Un aeroplano que consista en un solo plano sin curvatura es automáticamente longitudinalmente estable. (Esta afirmación es consecuencia de la ley de Joëssel, como ya se ha visto al comentar trabajos de pioneros anteriores).

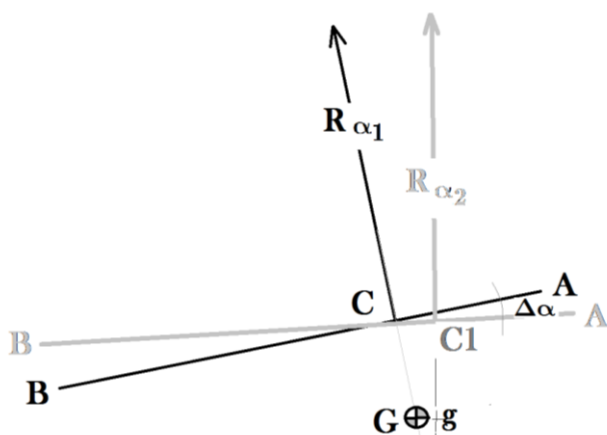


Figura 16.11: Esquema explicativo de la estabilidad estática. Cambio generado en la posición del centro de presión de una sola ala por un incremento del ángulo de incidencia.

Un aeroplano que consista en un solo plano con curvatura es usualmente inestable en sentido longitudinal. La razón viene dada por lo que se ha mencionado más arriba: el comportamiento diferente del centro de presión con las variaciones del ángulo de ataque α respecto de la placa plana. Así pues, la placa plana será estable y la placa con curvatura no lo es. (Fig. 16.11). En realidad depende de dónde esté situado el valor del ángulo de ataque estacionario.

16.3.5.2 Aviones consistentes en dos planos

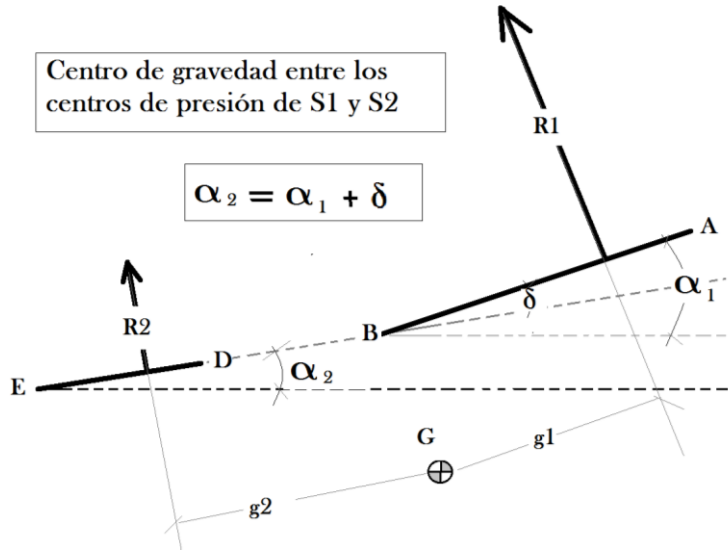


Figura 16.12: Esquema explicativo de la estabilidad estática. Cambio generado en la posición del centro de presión de un conjunto de dos alas por un incremento del ángulo de incidencia.

Duchêne considera más interesante trabajar con aviones de dos planos, ya que el avión de un solo plano “es puramente imaginario”, y establecerá el estudio “mediante cálculos”, porque el método es simple, por lo menos en primera aproximación. (Fig. 16.12)

Supondrá que las alas pueden tener o no curvatura. La ecuación de la estabilidad - así la denomina- es la siguiente, siendo el subíndice (1) indicativo del ala delantera y el subíndice (2) el del ala trasera. El modo de escribirla implica que el CDG está entre los centros de presión de cada ala. Ahora utilizamos la nomenclatura actual, pero seguimos aceptando que no hay desviación de la corriente. La expresión para el momento (M) de cabeceo respecto del centro de gravedad (G) es:

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 S_1 C L_{\alpha_1} g_1 \alpha_1 - \frac{1}{2} \rho V^2 S_2 C L_{\alpha_2} g_2 \alpha_2 \quad [16.14]$$

En condiciones estacionarias debe cumplirse que el momento sea nulo:

$$S_1 C L_{\alpha_1} g_1 \alpha_1 - S_2 C L_{\alpha_2} g_2 \alpha_2 = 0 \quad [16.15]$$

Introduce ahora una pequeña variación en el ángulo de ataque experimentado en cada ala: $\Delta \alpha$ y además incorpora la hipótesis de que las variaciones de la velocidad son irrelevantes: no tiene tiempo de verse afectada de modo apreciable y permanece constante. Vemos que está analizando lo que más adelante se denominará Oscilación de Corto Período. Considera no nulo el desplazamiento del centro de presión debido al pequeño cambio en $\Delta \alpha$, introduciendo esta dependencia mediante dos coeficientes adimensionales a_1, a_2 que son positivos si el ala es plana y negativos si tiene curvatura. Se dimensiona el desplazamiento mediante la cuerda de cada ala.

$$\Delta g_1 = a_1 c_1 \Delta \alpha, \quad \Delta g_2 = a_2 c_2 \Delta \alpha \quad [16.16]$$

El resultado es:

$$\begin{aligned} \text{con: } g_1 = L_1, g_2 = L_2, \\ \Delta M = -\frac{1}{2} \rho V^2 \Delta \alpha \left(S_1 C L_{\alpha_1} (a_1 c_1 (\alpha_1 + \Delta \alpha) - L_1) + S_2 C L_{\alpha_2} (a_2 c_2 (\alpha_2 + \Delta \alpha) + L_2) \right) \end{aligned} \quad [16.17]$$

Esta expresión linealizada queda:

$$\Delta M = -\frac{1}{2} \rho V^2 \Delta \alpha \left(S_1 C L_{\alpha_1} (a_1 c_1 \alpha_1 - L_1) + S_2 C L_{\alpha_2} (a_2 c_2 \alpha_2 + L_2) \right) \quad [16.18]$$

Para la estabilidad estática se requiere:

$$\left(\frac{\Delta M}{\Delta \alpha} \right) < 0 \Rightarrow \left(S_1 C L_{\alpha_1} (a_1 c_1 \alpha_1 - L_1) + S_2 C L_{\alpha_2} (a_2 c_2 \alpha_2 + L_2) \right) > 0 \quad [16.19]$$

De esta expresión Duchêne deduce la siguiente condición de estabilidad, para que el momento sea recuperador de la actitud previa a la perturbación, teniendo en cuenta que se cumple la condición estacionaria:

$$\alpha_1 - \alpha_2 > \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{a_1 c_1}{L_1} + \frac{a_2 c_2}{L_2} \right) \quad [16.20]$$

Es decir, establece, como condición de estabilidad estática una relación entre los ángulos del ala y del empenaje. Si establecemos la relación entre los ángulos $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta$ llegamos a la siguiente condición de estabilidad:

$$\delta < -\frac{\alpha_1^2 \left(\frac{a_1 c_1}{L_1} + \frac{a_2 c_2}{L_2} \right)}{1 + \left(\frac{a_2 c_2}{L_2} + \frac{a_1 c_1}{L_1} \right) \alpha_1} \quad [16.21]$$

Si suponemos despreciable el movimiento del centro de presión del empenaje trasero, tenemos:

$$\delta < -\frac{\alpha_1^2 \left(\frac{a_1 c_1}{L_1} \right)}{1 + \left(\frac{a_1 c_1}{L_1} \right) \alpha_1} \quad [16.22]$$

Y si tampoco consideramos importante este desplazamiento en el ala principal, tenemos:

$$\delta < 0 \quad [16.23]$$

Esta es la justificación de la popularmente conocida como “Regla de la V” para la estabilidad longitudinal; en palabras de Duchêne: “*El ala principal y el plano de cola de un*

aeroplano debe formar entre ellos un ángulo diedro en forma de V, de lo contrario, (si forma una V al revés: Λ) la máquina es inestable”

La posición del centro de gravedad admite otras posibilidades, tal como muestran las figuras 16.13 y 16.14, y cabe que la cola no solamente realice una labor estabilizadora, sino que también soporte parte del peso, o bien, por el contrario, sustente negativamente. Esta cuestión depende de la posición relativa del centro de gravedad respecto de las alas.

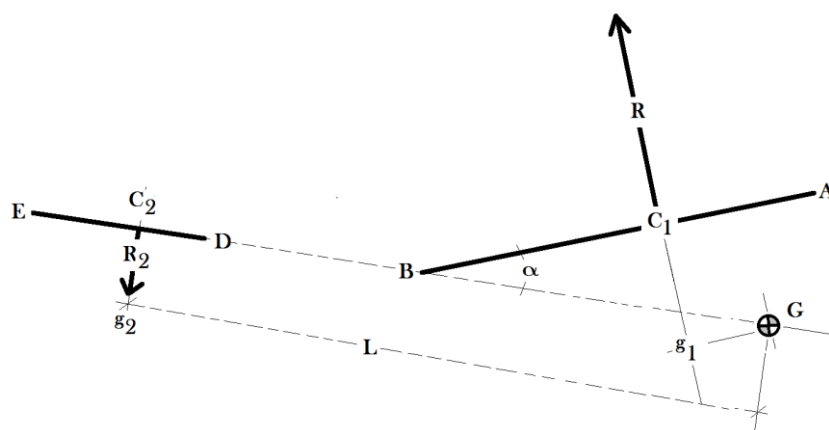


Figura 16.13: Esquema explicativo de la estabilidad estática. Conjunto de dos alas con el CDG por delante de las resultantes de sustentación de las dos alas.

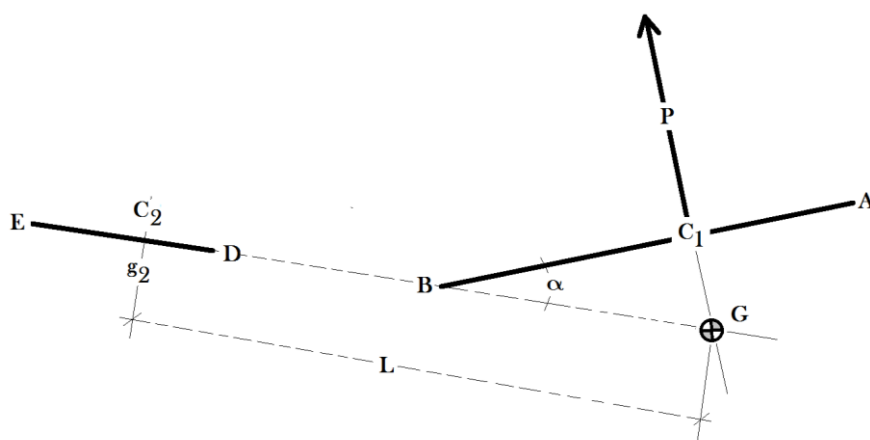


Figura 16.14: Esquema explicativo de la estabilidad estática. Aeroplano con dos elementos sustentadores: el plano principal no genera momento de cabeceo.

A continuación Duchêne comienza a extraer conclusiones para casos particulares de aeroplanos. Si los centros de presión no se mueven, la condición es sencilla y ya ha sido mencionada. Duchêne ofrece los casos que le parecen más dignos de mención en forma gráfica, de modo similar al de la fig. 16.15 y 16.16.

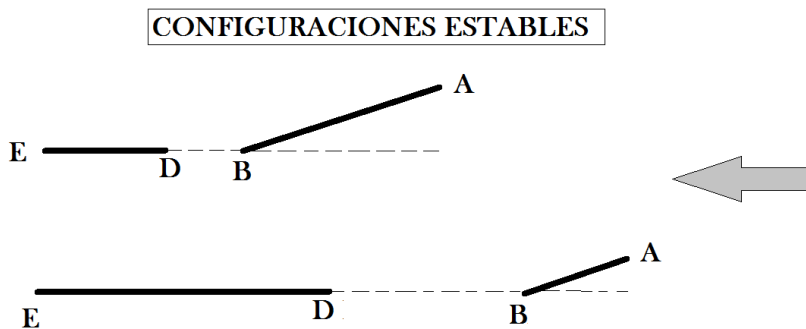


Figura 16.15: Ejemplos de configuraciones estables.

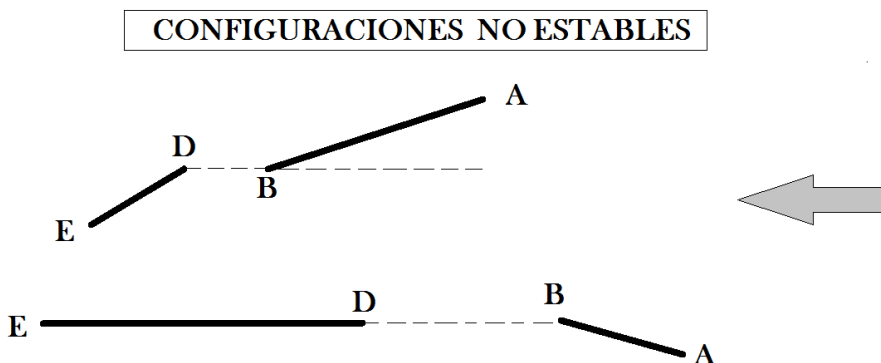


Figura 16.16: Ejemplos de configuraciones no estables.

16.3.5.3 Función de la cola en el amortiguamiento de las oscilaciones.

Si analizamos el comportamiento de un aeroplano con ala principal y cola posterior ED sometido a pequeñas oscilaciones alrededor de su centro de gravedad (Fig. 15.17), vemos que aparece en la superficie de cola una velocidad vertical “v” que es muy importante debido a que, en su composición con la velocidad de vuelo V, causa un momento dinámico que tiende restablecer el equilibrio, amortiguando el movimiento de cabeceo a través del incremento de ángulo de ataque $\Delta\alpha_v \approx \frac{v}{V}$

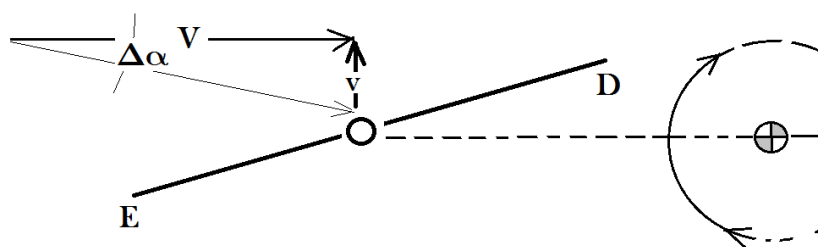


Figura 16.17: Esquema explicativo de la función estabilizadora de la cola.

16.3.6 Influencia del momento de inercia I_{yy} en la estabilidad.

Para obtener este efecto amortiguador, no se debe permitir que las oscilaciones asuman tal proporción que el momento restaurador de la cola sea insuficiente y el aeroplano realice un giro excesivo alrededor de su eje transversal; se debe lograr que el movimiento resultante de las oscilaciones sea menor que el momento de inercia de la máquina alrededor del eje que pasa por el centro de gravedad y es perpendicular al eje de simetría; la expresión literal de Duchêne es: “*Es esencial que la eficacia estabilizadora de la cola sea proporcional al valor del momento de inercia del aeroplano en una dirección longitudinal*”. Esta curiosa expresión es explicada del modo siguiente:

Si un aeroplano tiene una distribución de su masa tal que esta se acumula en los extremos delantero y trasero –es decir, que posee un elevado momento de inercia- y tiene además una superficie de cola pequeña, esto da lugar a la aparición de un movimiento oscilante no amortiguado que pronto acaba desestabilizando el avión. Duchêne afirma que existe una ineludible condición de estabilidad que establece una relación entre el momento de inercia y la eficacia estabilizadora de la cola medida por el producto de la superficie multiplicada por el brazo de par, pero no la fija matemáticamente.

Por la mencionada razón, afirma Duchêne, conviene *concentrar* en un punto el peso del aeroplano, más que *distribuirlo a lo largo de todo el cuerpo del mismo*, para facilitar el amortiguamiento de las oscilaciones. Por eso la costumbre que tienen algunos fabricantes de situar el centro de masas más bajo que el ala principal, es contraproducente a efectos de amortiguamiento de las oscilaciones.

Por otra parte, un aeroplano es menos sensible a las perturbaciones atmosféricas cuanto mayor sea su momento de inercia. Se tratará –dice Duchêne- de lograr un aceptable compromiso entre ambas exigencias.

Duchêne sugiere un sencillo modelo de papel (Fig. 16.18) que permite comprobar muchas de las afirmaciones realizadas a lo largo de su libro, para un planeador.

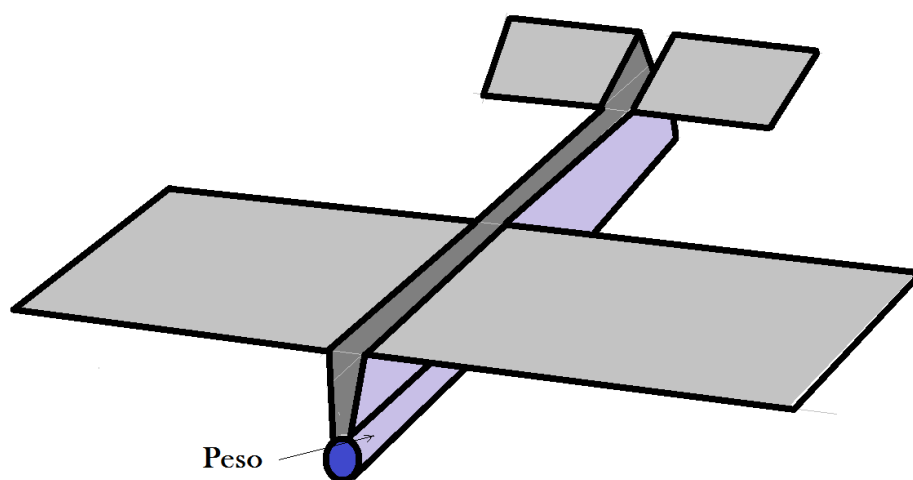


Figura 16.18: Ejemplo de diseño estable de un modelo sencillo de aeroplano. (Es visible la deflexión negativa de la superficie horizontal de la cola)

16.4 Conclusiones

- (1) Duchêne explica, de un modo asequible y con tendencia a minimizar el número de fórmulas utilizadas, los principios fundamentales de la mecánica del vuelo con el objeto de proporcionar al lector ordinario una panorámica de los problemas involucrados en el movimiento y la estabilidad de los aeroplanos. Desea facilitar un modo sencillo de calcular los diversos elementos y las condiciones de vuelo. Pero no pretende presentar de modo cerrado y definitivo la respuesta a los intrincados problemas del vuelo. Esta es una ciencia tan nueva –estamos en 1911– que requerirá todavía muchos años para que tal cosa sea posible.
- (2) No es un libro escrito para especialistas, con intereses exclusivamente matemáticos, que constituirían así un pequeño círculo de potenciales lectores. Tampoco es tan elemental o simplista que trate de evitar los problemas propios de los aeroplanos desde sus aspectos técnicos más serios. Resulta equilibrado, y puede considerarse como de alta divulgación; proporciona una base previa de indudable utilidad para futuros diseñadores de aeroplanos.
- (3) Los casos numéricos estudiados se basan en información poco fiable y escasa. No pueden considerarse definitivos en sus conclusiones. Aun así, trata de establecer, con la mayor firmeza posible, y de acuerdo con las limitaciones ya mencionadas, una conexión entre la teoría y la práctica en el diseño y estudio del vuelo de los aeroplanos.
- (4) El coeficiente K incluye los efectos de la densidad del aire y el efecto de la forma geométrica del ala; por esta razón, la constante K es distinta para cada superficie del aeroplano. Esto es correcto, aunque no se llegan a cuantificar con claridad estas dependencias.
- (5) Los cálculos sobre diferentes aspectos de los distintos casos posibles de vuelo estacionario en un plano vertical son formalmente correctos (incluye alguna llamativa e inexacta advertencia). Fueron ya establecidos sustancialmente, con un aspecto ligeramente distinto, por Pénaud [6] en primer lugar, y por otros posteriormente. No hemos profundizado en este aspecto, que no introduce novedad, aunque pensamos que constituye una valiosa aportación por su estilo claro, riguroso y divulgativo. Fue publicado con la explícita pretensión de ser útil a los diseñadores de aviones.
- (6) Salvo por el hecho de no tener en cuenta la desviación de la corriente, y otras limitaciones propias de la teoría aerodinámica vigente, la expresión de la ecuación del momento de cabeceo que rige la estabilidad estática longitudinal es básicamente correcta.

- (7) Las conclusiones respecto de las necesarias inclinaciones respectivas de las superficies sustentadoras en un aeroplano formado por dos de ellas, una delantera y otra posterior, son correctas, aunque podría ser más clarificador analizar la influencia de las diversas posiciones posibles -en sentido longitudinal- del CDG del aeroplano.
- (8) El efecto amortiguador de la cola es tratado correctamente a partir del análisis físico cualitativo, así como la influencia, descrita someramente, del momento de inercia del aeroplano. El estudio de Duchêne no contempla otro modo de oscilación que el que hoy denominamos Corto Período.
- (9) No hay ningún análisis del problema del vuelo que incluya las ecuaciones no estacionarias, pues está más allá del objetivo que se propone el autor.

Bibliografía¹⁹⁶

- [1] Duchemin, N. V. “Récherches Expérimentales sur les Lois de la Résistance des Fluides”. Paris. (1842).
- [2] Eiffel, G. “La Résistance de l'Air et l' Aviation”, H. Dunod et E. Pinat, Éditeurs. Paris, (1910).
- [3] Ferber, F. “L'AVIATION, Ses debuts-son développement”. Berger-Levrault & Cie Éditeurs. Paris/Nancy. (1909).
- [4] R. Soreau. “*État actuel et avenir de l'aviation*”, Librairie des sciences aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS. (1908).
- [5] Wright, Wilbur & Orville. “THE PAPERS OF WILBUR & ORVILLE WRIGHT”. Including the Chanute-Wright letters and other papers of Octave Chanute. (VOL I; 1899-1905 & VOL II; 1906-1948). Sponsored by Oberlin College on the Wilbur-Orville Wright Memorial Fund and prepared for the Press with notes, appendices, and bibliography by the Aeronautics Division of the Library of Congress. Mervin McFarlan, Editor. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York. (1953).
- [6] Pénaud, A. “*L' Aeroplane Automoteur avec équilibre automatique*”. M. Alphonse Pénaud. “L'Aéronaute”, Bulletin Mensuel International de la NAVIGATION AÉRIENNE; 5^e ANNEÉ, N^o 1-12 Paris (1872).

¹⁹⁶ Duchêne cita el nombre de los autores a los que se remite según los aspectos concretos que estudia, pero no menciona los títulos de las obras que consulta. Reseñamos aquí algunas en las que se trata el tema que menciona Duchêne de modo más directo, pero sin tener la seguridad de que sean estas obras aquellas a las que se refiere el investigador francés.

[7] S. P. Langley. "Experiments in aerodynamics", Smithsonian contribution to Knowledge, No 801. Washington. (1902).

[8] Painlevé, Paul. "Cours de Mécanique et Machines; *Théorie de L' Aéroplane*". École Polytechnique de Paris. (1908).

[9] Eiffel, Gustave. "La Résistance de l'Air. Examen des formules et des expériences. H. Dunod et E. Pinat, Éditeurs. Paris. (1910).

[10] Avanzini, G. "Nuove riserche sulla resistenza de'fluidi"; Saggi scientifici e letterari dell' Accademia di Padova; Padova; (1794).

[11] Bryan G. H. & Williams. "*The Longitudinal Stability of Aerial Gliders*", "*Proc. Roy. Soc. London*", ser. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).

[12] Lanchester, F. W. AERODYNAMICS, CONSTITUTING THE FIRST VOLUMEN OF A COMPLETE WORK ON AERIAL FLIGHT". D. VAN NOSTRAND COMPANY. London. (1907). AERODONETICS, CONSTITUTING THE SECOND VOLUMEN OF A COMPLETE WORK ON AERIAL FLIGHT. Archibald Constable & CO. LTD. Orange Street Leicester Square. London (1908).

Capítulo 17

T. Von Kármán (1881-1963) & E. Trefftz (1888-1937)



197



198

Contenido

17.1 Nota Biográfica

17.2 Documento de Referencia.

17.3 Descripción de Contenido.

17.3.1 Estudio de la Estabilidad estática.

¹⁹⁷ <http://www.aia.rwth-aachen.de/100YEARS/images/karman>. (14.06.2017)

¹⁹⁸ http://photos.geni.com/p13/01/b1/02/98/5344483dcfe4f930/erichtrefftz_large.jpg. (14.06.2017)

17.3.2 Ecuaciones del movimiento. Ecuación de Estabilidad.

17.3.2.1 Caso de estabilidad neutral.

17.3.2.2 Caso de estabilidad muy elevada.

17.3.3 Raíces reales de la Ecuación de Estabilidad. Método de Klein.

17.3.3.1 Valores típicos de los parámetros p y q .

17.3.4 Estudio de las raíces mediante las curvas envolventes de la Ecuación de Estabilidad.

17.3.5 Raíces imaginarias de la Ecuación de Estabilidad.

17.3.6 Zona Límite de Estabilidad.

17.3.7 Representación gráfica de las raíces de la Ecuación de Estabilidad.

17.3.8 Cálculo aproximado de las raíces de la Ecuación de Estabilidad.

17.3.9 Aplicaciones prácticas.

17.4 Conclusiones

17.5 Anexo

Bibliografía.

17.1 Nota Biográfica.

Theodore Von Kármán. Nacido en Budapest (Hungria). Estudió en Göttingen. Fundador del Instituto Aerodinámico de Aquisgrán. En 1930 se hizo cargo en Pasadena (USA) del recién fundado Guggenheim Aeronautical Laboratory en el Instituto de Tecnología de California. En 1944 es nombrado Presidente del Comité Asesor de la USAF. Doctor honoris causa por más de 25 universidades, ha sido el especialista en Aerodinámica más importante de la primera mitad del siglo XX, junto con Prandtl. [12].

Erich Trefftz. Nacido en Leipzig, Alemania. Uno de los más eminentes matemáticos aplicados de Alemania. Estudió en la Universidad Técnica de Aquisgrán. En 1909 se trasladó a Göttingen. Después de un año en la Universidad de Columbia (New York) pasó a trabajar con el famoso matemático aplicado austriaco Richard Von Mises, fundador del GAMM (“*Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*”) en 1922. Fue siempre un profesor excelente, matemáticamente riguroso, con una profunda comprensión de la mecánica de muy variados aspectos de la técnica, pero con una especial inclinación hacia la aerodinámica. [13]

17.2 Documento de referencia.

Über Längsstabilität und Längsschwingungen von Flugzeugen. <<Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt>>. 3 (1914/15) 117-138. Verlag von Julius Springer. (Berlin). “Sobre la estabilidad longitudinal de los aviones”¹⁹⁹

17.3 Descripción del contenido.

Este documento²⁰⁰ de Kármán y Trefftz se propone analizar la estabilidad y las oscilaciones longitudinales de los aviones. Esta cuestión ha sido estudiada ya por muchos²⁰¹, aplicando métodos muy diversos. Desde los muy simples, hasta los muy detallados y presuntamente exactos. En estos últimos se pierde el punto de vista intuitivo en un laberinto de largas fórmulas. VK&T se proponen trazar una vía media para presentar de forma transparente “el engorroso problema de la estabilidad” de los aviones.

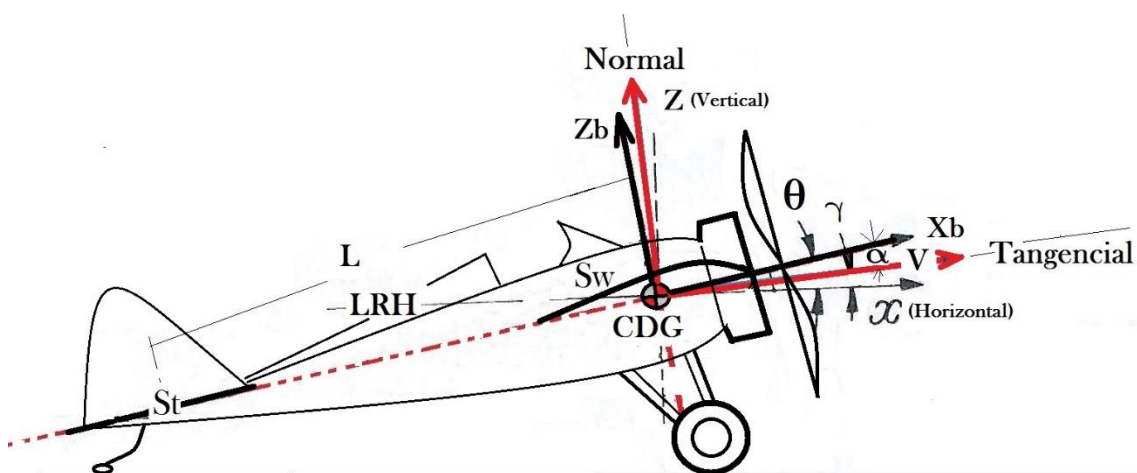


Fig. 17.1: Referencias de ejes, ángulos y fuerzas para un aeroplano propulsado, con dos elementos sustentadores.

Nomenclatura (Ref. Fig. 17.1)

- (S_t) Superficie del estabilizador horizontal trasero.
- (S_w) Superficie del ala principal.

¹⁹⁹ “Se ha trabajado con la versión publicada en “*Collected Works of Theodore Von Kármán*”, Vol. II, (1914-1932), 1-25; Butterworths Scientific Publications, London, 1952. El trabajo fue expuesto por Von Kármán; no hubo discusión verbal, por falta de tiempo, y el intercambio de comentarios entre oyentes y autores del trabajo fue por escrito. Esta discusión, que no aparece en los *Collected Works*, ha sido tenida en cuenta para el presente trabajo, que se ha elegido como representativo de los de la escuela alemana sobre la estabilidad de los aviones, y la razón podrá verse en nota a pie de página del presente capítulo.

²⁰⁰ Amablemente traducido del original alemán por Peter Seitel Weizinger; Lic. Empresa por la Welthandelsschule, Viena, y Lukas Benjamin Inhestern, PHD Student bei UPV. La exposición y discusión final ha sido traducida del alemán gracias al apoyo del Departamento de Motores y Máquinas Térmicas de la Universitat Politècnica de València.

²⁰¹ C. Runge, R. Knoller, Bryan, Ferber, Reissner, Quitter, Painlevé, ... (VK&T no mencionan referencias bibliográficas precisas)

- (LRH) Línea de referencia horizontal.
- (x_{CDG}) Posición del Centro de gravedad del avión, medida desde el CDG .
- (L) Distancia entre el (centro de presión) empenaje trasero y el CDG .
- (Xb, Zb) Ejes cuerpo, con origen en CDG .
- (X, Z) Ejes horizonte local, con origen en CDG .
- (θ) Ángulo de asiento longitudinal entre (Xb y LRH)
- (α) Ángulo de ataque; entre (Xb y V)
- (γ) Ángulo de pendiente de la trayectoria; entre (X y V)
- (CL_{aw}) Pendiente de la curva de sustentación del ala.
- (CL_{at}) Pendiente de la curva de sustentación de la superficie de cola.

17.3.1 Estudio de la Estabilidad Estática

VK&T suponen, como hizo Bryan [1], que en vuelo estacionario equilibrado la superficie horizontal trasera no genera sustentación, y que la tracción de la hélice pasa por el centro de masas (CDG) del avión (“Tracción Central”, en terminología de Bryan). Esto exige que el centro de presión del ala del avión (x_{CAw}) coincida con el CDG; de lo contrario no se podría anular el momento de cabeceo.

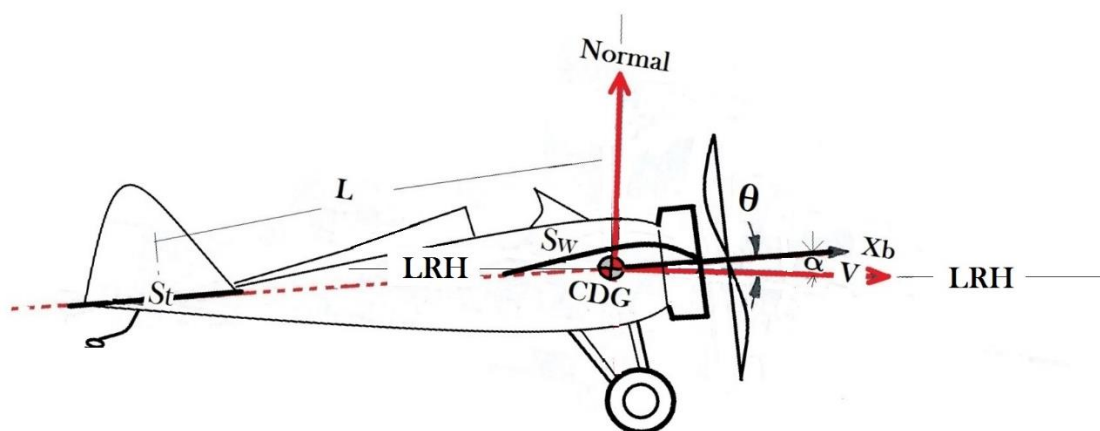


Fig. 17.2: Referencias de ejes, ángulos y fuerzas para un aeroplano propulsado, con de dos elementos sustentadores, en vuelo horizontal.

También suponen que la posición del centro de presión del ala es función lineal del ángulo de ataque α sin llegar a establecer una relación matemática definida que cuantifique esa dependencia.

Las oscilaciones angulares del avión alrededor del CDG producirán variaciones del ángulo θ y la velocidad angular $q = \frac{d\theta}{dt}$ modificará la sustentación de la cola (Ref. Fig. 17.2), causando un efecto amortiguador que modificará el momento de cabeceo. Por esta

razón, se puede considerar que el ángulo de ataque de la superficie de cola tendrá el valor aproximado:

$$\alpha_i \approx \alpha + \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \frac{L}{V}$$

Las expresiones de VK&T para la sustentación y la resistencia aerodinámica de una superficie sustentadora se corresponden bien, salvo en una constante, al modelo aerodinámico actual. (Las fuerzas aerodinámicas las expresan como sustentación: $\rho S_w V^2 \zeta_L$ y resistencia: $\rho S_w V^2 \zeta_D$. (La equivalencia con los coeficientes actuales es $\zeta_L = CL/2$ y $\zeta_D = CD/2$).

El momento de cabeceo lo expresan como: $M = \rho S_w V^2 \sqrt{\zeta_D^2 + \zeta_L^2} R$ siendo R el brazo de la resultante aerodinámica respecto del centro de masas del avión. Es decir:

$$M = \frac{1}{2} \rho S_w V^2 CL \sqrt{1 + \left(\frac{CD}{CL} \right)^2} R \quad \text{con: } \frac{CD}{CL} = \varepsilon$$

$$M = \frac{1}{2} \rho S_w V^2 CL \sqrt{1 + \varepsilon^2} R \quad [17.1]$$

$$\text{con: } R = x_{CDG} - x_{CAw}(\alpha)$$

$$M = \frac{1}{2} \rho S_w V^2 CL \sqrt{1 + \varepsilon^2} (x_{CDG} - x_{CAw}(\alpha))$$

Obsérvese que ε es el inverso de la Eficiencia Aerodinámica.

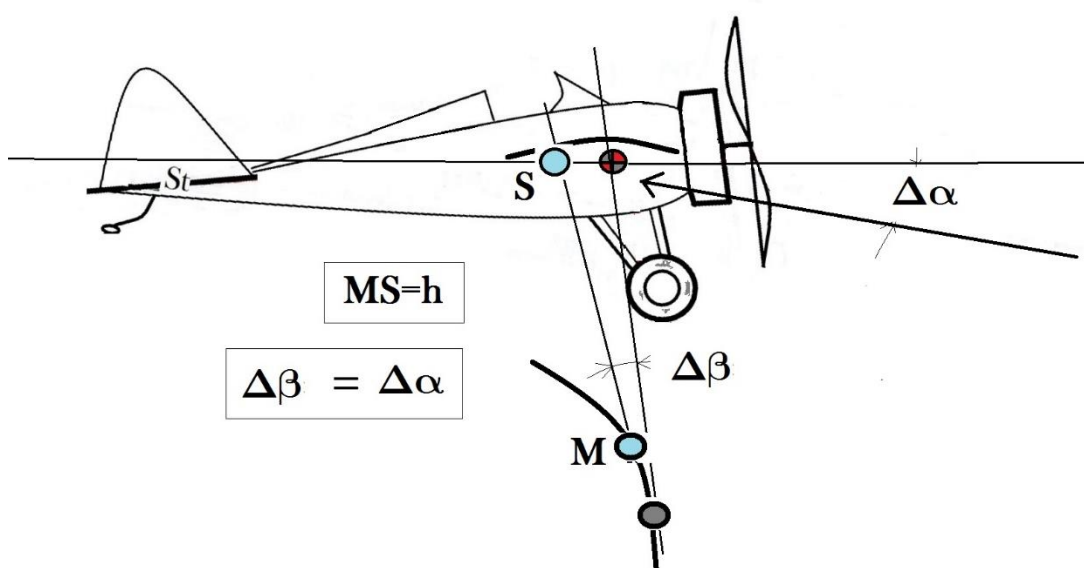


Fig. 17.3: Modificación del momento de cabeceo al variar el ángulo de ataque. Curva metacéntrica.

Para la estimación de la distancia $xCAw(\alpha)$ que fija el centro de presión, o centro aerodinámico del ala, en función de α , VK&T admiten una expresión lineal: $xCAw(\alpha) = h \alpha$ siendo $h = Cte$, que se considera positivo, pero sin especificar su valor. Cuando el ángulo de ataque aumenta, la resultante de las fuerzas aerodinámicas se retrasa, (respecto del morro del avión). Esto significa que el incremento de momento de cabeceo causado por un aumento del ángulo de ataque es negativo, de acuerdo con el convenio actual de signos.

El vuelo estacionario equilibrado, como ya se ha dicho, solamente puede tener lugar para aquellos ángulos de ataque que satisfagan la relación $xCAw(\alpha_{TRIM}) = xCDG$ si ha de cumplirse la condición de sustentación nula de la superficie trasera. El valor de α_{TRIM} es medido respecto del eje de sustentación nula.

La expresión del Momento, para equilibrio estacionario, sería:

$$M = \frac{1}{2} \rho S_w V^2 \sqrt{1 + \varepsilon^2} CL_{\alpha_w} \alpha_{Trim} (xCDG - xCAw(\alpha_{Trim})) + \frac{1}{2} \rho S_t V^2 CL_{\alpha_t} (\alpha_{Trim} + \delta_E) (xCDG - xCA_t) \quad [17.2]$$

Con: $(xCDG - xCA_t) = L$ (Vid. Fig. 17.1)

$$M = \frac{1}{2} \rho S_w V^2 CL \sqrt{1 + \varepsilon^2} CL_{\alpha_w} \alpha_{Trim} (xCDG - xCAw(\alpha_{Trim})) + \frac{1}{2} \rho S_t V^2 CL_{\alpha_t} (\alpha_{Trim} + \delta_E) L \quad [17.3]$$

La sustentación nula de la cola exige que $(\alpha_{Trim} + \delta_E) = 0 \Rightarrow \delta_E = -\alpha_{Trim}$ y la necesidad de que sea nulo también el momento de cabeceo exige que $xCAw(\alpha_{TRIM}) = xCDG$, y que ese valor de (α_{TRIM}) cumpla la condición de equilibrar el peso:

$$\frac{1}{2} \rho S_w V^2 CL_{\alpha_w} \alpha_{Trim} = mg \quad [17.4]$$

Puede observarse que VK&T no consideran la influencia²⁰² de la desviación de la corriente en la cola respecto de la corriente incidente en el ala. En el presente desarrollo, se respeta esta opción.

²⁰² Ludwig Prandtl, en la discusión que siguió a la exposición de Von Kármán, sugirió que “*Un refinamiento teórico que sería necesario realizar para obtener buena correspondencia entre los resultados teóricos y la realidad, sería incluir los efectos de la corriente producida por la hélice en el ala y en la superficie de cola, y el efecto del cambio en la dirección de la corriente en la superficie amortiguadora causado por el ala. (...) Ambas cosas pueden producir cambios notables en el comportamiento del avión. La teoría de vórtices permite obtener aproximaciones de ambas influencias en el plano de cola sin excesiva complicación*”. Esta discusión tuvo lugar por escrito, por falta de tiempo, como ya se ha dicho.

VK&T prefieren trabajar con fuerzas y momento adimensionalizados mediante la división por el peso:

$$\frac{M}{\left(\frac{1}{2}\rho S_w V^2 CL_{\alpha_w} \alpha_{Trim} = mg\right)} = \sqrt{1 + \varepsilon^2} (x_{CDG} - x_{CAw}(\alpha_{Trim})) + \left(\frac{S_t}{S_w}\right) \left(\frac{CL_{\alpha_t}}{CL_{\alpha_w}}\right) \frac{1}{\alpha_{Trim}} (\alpha_{Trim} + \delta_E) L \quad [17.5]$$

Para el análisis de la estabilidad estática proceden a perturbar la ecuación del Momento de cabeceo estacionario respecto de la variable α

Obtienen:

$$\begin{aligned} M + \Delta M = & \\ & \frac{1}{2}\rho S_w V^2 \sqrt{1 + \varepsilon^2} CL_{\alpha_w} (\alpha_{Trim} + \Delta\alpha) (x_{CDG} - x_{CAw}(\alpha_{Trim} + \Delta\alpha)) + \dots \quad [17.6] \\ & \dots + \frac{1}{2}\rho S_t V^2 CL_{\alpha_t} (\alpha_{Trim} + \Delta\alpha + \delta_E) L \end{aligned}$$

$$\text{Con: } x_{CDG} - x_{CAw}(\alpha_{Trim} + \Delta\alpha) = x_{CDG} - (x_{CAw}(\alpha_{Trim}) - h \Delta\alpha) = h \Delta\alpha$$

Desarrollando:

$$\Delta M = \frac{1}{2}\rho S_w V^2 \sqrt{1 + \varepsilon^2} CL_{\alpha_w} \alpha_{Trim} h \Delta\alpha + \frac{1}{2}\rho S V^2 CL_{\alpha_w} h (\Delta\alpha)^2 - \frac{1}{2}\rho S_t V^2 CL_{\alpha_t} L \Delta\alpha$$

O sea:

$$\frac{\Delta M}{\Delta\alpha} \approx -\frac{1}{2}\rho S_w CL_{\alpha_w} \alpha_{Trim} V^2 \left(\frac{S_t CL_{\alpha_t}}{S_w CL_{\alpha_w} \alpha_{Trim}} L - \sqrt{1 + \varepsilon^2} h \right) \quad [17.7]$$

VK&T denominan “Altura metacéntrica”²⁰³ a la expresión:

$$h_R = \left(\frac{S_t}{S_w}\right) \left(\frac{CL_{\alpha_t}}{CL_{\alpha_w} \alpha_{Trim}}\right) L - \sqrt{1 + \varepsilon^2} h$$

Y la condición de Estabilidad estática queda establecida como:

$$\begin{aligned} \Delta M < 0 \\ \sqrt{1 + \varepsilon^2} \left(\frac{S_w}{S_t}\right) \left(\frac{CL_{\alpha_w} \alpha_{Trim}}{CL_{\alpha_t}}\right) < \frac{L}{h} \end{aligned} \quad [17.8]$$

Este modo de presentación de la conclusión la Estabilidad Estática depende del ángulo de ataque, de acuerdo con los supuestos aceptados por VK&T. Podemos verlo con

²⁰³ Véase nota complementaria sobre la curva metacéntrica.

mayor claridad estableciendo la expresión del valor del eventual Punto Neutro, (aunque esta denominación no existe todavía) de acuerdo con las hipótesis de VK&T:

Para ello, obtenemos el valor de x_{CDG} con $\frac{dM}{d\alpha} = 0$, y llegamos a:

$$x_{PN} = \frac{\left(\frac{CL_{\alpha t}}{CL_{\alpha}}\right)\left(\frac{S_t}{S_w}\right)L + CL_{\alpha} x_{CAw}}{1 + \left(\frac{CL_{\alpha t}}{CL_{\alpha}}\right)\left(\frac{S_t}{S_w}\right)} + \frac{-h \alpha_{Trim}}{1 + \left(\frac{CL_{\alpha t}}{CL_{\alpha}}\right)\left(\frac{S_t}{S_w}\right)} \quad [17.9]$$

Puede verse que la primera parte de la expresión es la ahora tradicional, correspondiente al Punto Neutro del avión.

- **Nota complementaria sobre la Curva Metacéntrica [2].**

(Fig. 17.4 y Fig. 17.5) Si en un sistema de ejes coordenados se sitúa un perfil alar con curvatura de modo tangente al eje de abscisas y se dibuja la posición y magnitud del vector fuerza aerodinámica resultante para cada valor del ángulo de ataque, (cuya magnitud -en forma de coeficiente de fuerza normal a la velocidad incidente, es medible en el eje de ordenadas), y se traza la envolvente de las rectas tangentes a todas esas resultantes, obtendríamos un gráfico como el indicado.

Así tenemos la posición y la intensidad de la reacción del aire para cada ángulo de ataque, lo que permite ver más directamente la variación de la posición del centro de presión. Hagamos también una precisión: al hablar de centro de presión puede llevar a suponer que las fuerzas aerodinámicas están aplicadas en un cierto punto geométrico o material fijamente determinado con relación al ala. Pero esto no es así: no se trata de un punto, sino de una "línea de acción", y dentro de ella no hay ningún punto especial en el que deba suponerse aplicada esta fuerza y puede elegirse convencionalmente el que resulte más cómodo, que suele ser la intersección de la línea de acción con la cuerda del perfil alar. Lo mismo se podría haber elegido el metacentro, es decir, el punto de tangencia con la curva metacéntrica, que represente mejor que ningún otro el punto de aplicación de la fuerza, porque para pequeñas variaciones del ángulo de ataque apenas cambia. Esta es la forma de representación que eligen, en primera instancia, Kármán & Trefftz. Para un caso particular, tendríamos (Cfr. Fig. 17.4 y Fig. 17.5):

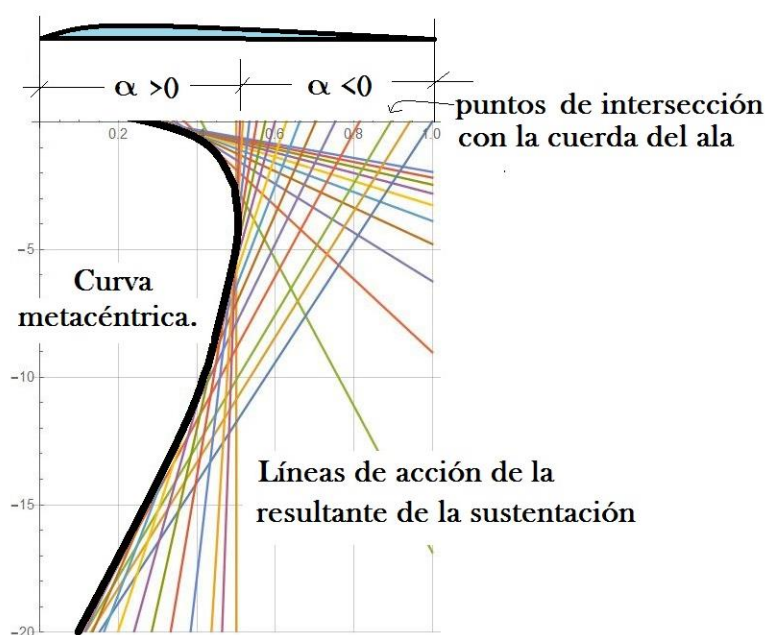


Fig. 17.4: Curva metacéntrica de un perfil alar con curvatura.

Este tipo de gráficos solía representarse del modo siguiente, incluyendo el valor de la sustentación resultante en forma de vector:

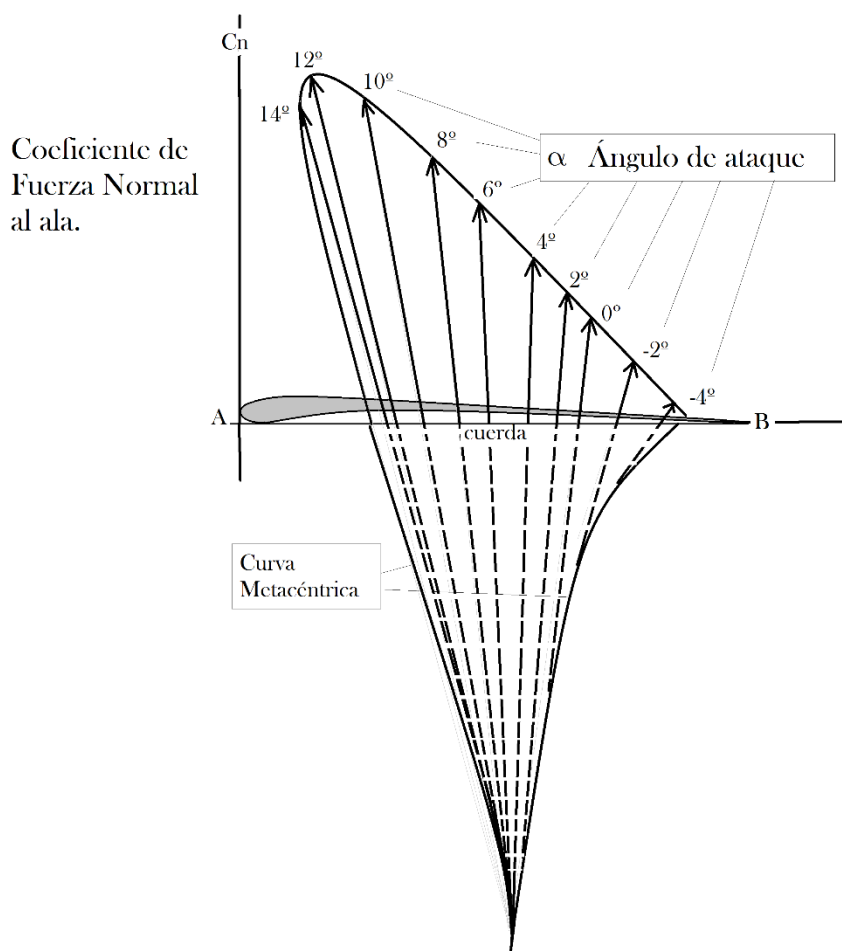


Fig. 17.5: Curva metacéntrica de un perfil alar con curvatura. Representación tradicional.

El momento adicional de cabeceo que se genera al variar el ángulo de ataque, (adimensionalizado con el peso), será:

$$\frac{\Delta M}{mg} = -h_R \Delta\alpha \quad [17.10]$$

17.3.2 Ecuaciones del movimiento. Ecuación de Estabilidad.

Aplicando el procedimiento de las pequeñas variaciones para el movimiento en un plano vertical, obtenemos las siguientes ecuaciones, expresadas con la nomenclatura actual:

$$\begin{aligned}
 [e1] \quad & \frac{1}{g} \left(\frac{d\Delta u}{dt} \right) = -2\varepsilon \frac{\Delta u}{V} + \left(1 - \frac{CD_\alpha}{CL} \right) \Delta\alpha - \Delta\theta \\
 [e2] \quad & \frac{V}{g} \left(\frac{d\Delta\gamma}{dt} \right) = 2 \frac{\Delta u}{V} + \left(\varepsilon + \frac{CL_{\alpha w}}{CL} \right) \Delta\alpha + \frac{L}{V} \left(\frac{d\Delta\theta}{dt} \right) \delta \quad \text{con : } \delta = \frac{S_r}{S_w} CL_{\alpha t} \\
 [e3] \quad & \frac{r_y^2}{g} \left(\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} \right) = -h_R \Delta\alpha - \frac{L^2}{V} \delta \left(\frac{d\Delta\theta}{dt} \right) \quad \text{con : } h_R = \left(L \delta - h \sqrt{1 + \varepsilon^2} \right)
 \end{aligned}$$

[17.11]

El polinomio característico del sistema de ecuaciones diferenciales es de cuarto grado en la variable s y, despreciando $2CD$ frente a $CL_{\alpha w}$, resulta:

$$\left(\frac{V^2}{g^2} s^2 + \frac{CL_{\alpha w}}{CL} s + 2 \left(1 - \frac{CD_\alpha - \varepsilon CL_\alpha}{CL_\alpha} \right) \right) \left(\frac{V}{g} s + \delta \frac{L^2}{r_y^2} \right) + \frac{h_R V^2}{g r_y^2} \left(\frac{V^2}{g^2} s^2 + 2\varepsilon \frac{V}{g} s + 2 \right) = 0$$

[17.12]

VK&T omiten también $\left(\frac{CD_\alpha - \varepsilon CL_\alpha}{CL_\alpha} \right)$ frente a la unidad, basándose en el supuesto de que el vuelo se realiza en un entorno del valor de $\varepsilon_{\text{Mínimo}}$. Esto equivale a volar con la máxima eficiencia aerodinámica, y significa que:

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{CD}{CL} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{CL CD_\alpha - CD CL_\alpha}{CL^2} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{CD_\alpha - \varepsilon CL_\alpha}{CL} \right) = 0 \quad [17.13]$$

Con esta simplificación la ecuación característica queda:

$$\left(\frac{V^2}{g^2} s^2 + \frac{CL_{\alpha w}}{CL} s + 2 \right) \left(\frac{V}{g} s + \delta \frac{L^2}{r_y^2} \right) + \frac{h_R V^2}{g r_y^2} \left(\frac{V^2}{g^2} s^2 + 2\varepsilon \frac{V}{g} s + 2 \right) = 0 \quad [17.14]$$

Efectuando ahora los siguientes cambios de variable:

$$z = \frac{V}{g} \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{L}{r_y} \right)^2 \delta, \quad q = \frac{h_R V^2}{r_y^2 2g}, \quad a = \frac{CL_\alpha}{CL} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \varepsilon \sqrt{2} \quad [17.15]$$

La ecuación característica puede escribirse de la siguiente forma, adimensional y notablemente compacta:

$$(z^2 + a z + 1)(p + z)z + q(z^2 + b z + 1) = 0 \quad [17.17]$$

Obsérvese que es más simple que la Ec. [14.23] de De Bothezat.

VK&T analizan ahora algunos casos límite de interés teórico:

17.3.2.1 Caso límite. Estabilidad neutral. ($q \rightarrow 0$)

Avión de estabilidad estática neutral, con $h_R = 0$ equivalente a $q = 0$. Se trata de un avión indiferente respecto de α en cuanto al momento de cabeceo.

Para este caso tenemos:

$$(z^2 + a z + 1)(p + z)z = 0 \quad [17.17]$$

Cuyas raíces son:

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = -p < 0$$

$$z_{3,4} = -\frac{CL_\alpha}{CL\sqrt{2}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{CL_\alpha^2}{CL^2}} \right) \approx -\frac{1}{\alpha_{Trim}\sqrt{2}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha_{Trim}^2} \right) < 0 \quad [17.18]$$

$$s_{1,2} = -\frac{g}{V\alpha_{Trim}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha_{Trim}^2} \right) < 0$$

Puede verse que el movimiento, para los valores normales del ángulo de ataque, es siempre amortiguado sin oscilaciones, cuyo significado físico es fácilmente observable.

- (1) Supongamos un avión al que solamente se le permite el grado de libertad de ascenso y descenso, pero no de cabeceo. Esto es una anomalía, pero si lo aceptamos para ilustrar el caso teórico, las ecuaciones del sistema se reducen a dos:

$$[e1] \quad \frac{1}{g} \left(\frac{d\Delta u}{dt} \right) = -2\varepsilon \frac{\Delta u}{V} + \left(1 - \frac{CD_\alpha}{CL} \right) \Delta \alpha$$

$$[e2] \quad \frac{V}{g} \left(\frac{d\Delta \gamma}{dt} \right) = 2\frac{\Delta u}{V} + \left(\varepsilon + \frac{CL_{\alpha w}}{CL} \right) \Delta \alpha \quad \text{con: } \delta = \frac{S_t}{S_w} CL_{\alpha t} \quad [17.19]$$

Este sistema tiene la ecuación característica siguiente:

$$\begin{aligned}
 V \frac{s^2}{g^2} + \frac{(3CD + CL_\alpha)}{CL} \frac{s}{g} - \frac{2}{V} \left(-1 - \frac{CD^2}{CL^2} + \frac{CD_\alpha}{CL} - CL_\alpha \frac{CD}{CL^2} \right) &= 0 \\
 V \frac{s^2}{g^2} + \left(3\varepsilon + \frac{CL_\alpha}{CL} \right) \frac{s}{g} + \frac{2}{V} \left(1 + \varepsilon^2 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{17.20}$$

Y con las ya conocidas simplificaciones:

$$s^2 + \left(\frac{CL_\alpha}{CL} \right) \frac{g}{V} s + 2 \frac{g^2}{V^2} = 0 \tag{17.21}$$

Las raíces son:

$$s_{1,2} = -\frac{CL_\alpha g}{2CLV} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8CL^2}{CL_\alpha^2}} \right) \tag{17.22}$$

Aproximadamente equivalente a:

$$s_{1,2} = -\frac{g}{2\alpha_{Trim} V} \left(1 \pm \sqrt{1 - 8\alpha_{Trim}^2} \right) < 0 \tag{17.23}$$

Esta oscilación puramente vertical, en velocidad y pendiente, tiene raíces reales y negativas. La suposición de que el ángulo de asiento longitudinal θ no varía, implica aceptar que las variaciones de la pendiente γ se corresponden con las del ángulo de ataque, con signo contrario, de manera que cuando el avión asciende, el ángulo de ataque disminuye y viceversa ($\Delta\gamma = -\Delta\alpha$) Esta modelización simplificada no refleja un modo normal de oscilación de los aviones convencionales.

(2) Si suponemos ahora que solamente permitimos el grado de libertad correspondiente al cabeceo, tendríamos:

(3)

$$[e3] \quad \frac{r_y^2}{g} \left(\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} \right) + \frac{L^2}{V} \delta \left(\frac{d\Delta\theta}{dt} \right) = 0 \quad \text{con: } \delta = \frac{S_t}{S_w} CL_{ca} \tag{17.24}$$

Las raíces del polinomio característico son:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 0 \\
 s_2 &= -\frac{g}{V} \left(\frac{L}{r_y} \right)^2 \delta = -\frac{g}{V} \left(\frac{L}{r_y} \right)^2 \left(\frac{S_t}{S_w} \right) CL_{ca} < 0
 \end{aligned} \tag{17.25}$$

Esto muestra el efecto amortiguador de la cola. VK&T consideran que el parámetro $p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{L}{r_y} \right)^2 \delta$, es uno de los más importantes desde el punto de vista del diseño, y se debe tener muy en cuenta. Está relacionado directamente con el grado de estabilidad del avión. El caso estudiado se aproxima al de un avión en túnel aerodinámico con un solo grado de libertad en cabeceo, pero sin incluir el efecto debido al retardo en el establecimiento de la sustentación por $\left(\frac{d\alpha}{dt} \right) \neq 0$ en la cola. En 1913 este efecto todavía no ha sido claramente identificado y cuantificado.

Los casos límite estudiados son de interés teórico, y ninguno de los dos es realista, pero sirven para hacer aparecer la importancia de ciertos elementos para la estabilidad.

NOTA: Hay que mencionar que la condición de $h_R = 0$, suponiendo vuelo en condiciones de elevada eficiencia aerodinámica, implica

$$h_R = L \delta - h \sqrt{1 + \left(\frac{CD(\alpha_{Trim})}{CL(\alpha_{Trim})} \right)^2} \approx L \delta - h \left(1 + 2 \frac{CD(\alpha_{Trim})}{CL(\alpha_{Trim})} \right) = 0 \quad [17.26]$$

Cuando el movimiento es perturbado, tenemos una variación del ángulo de ataque que causa un desplazamiento del centro aerodinámico, y con ello, un cambio en el momento de cabeceo:

$$h_R + \Delta h_R \approx L \delta - h \left(1 + 2 \frac{CD(\alpha_{Trim} + \Delta\alpha)}{CL(\alpha_{Trim} + \Delta\alpha)} \right) \approx L \delta - h \left(1 + 2 \frac{CD(\alpha_{Trim}) + CD_\alpha \Delta\alpha}{CL(\alpha_{Trim} + \Delta\alpha)} \right) \quad [17.27]$$

De donde:

$$\Delta h_R \approx -2h \frac{CD_\alpha}{CL(\alpha_{Trim})} \Delta\alpha \quad [17.28]$$

Por tanto, la ecuación [e3] de [17.11] (con la condición de $h_R = 0$) requiere la introducción de un término complementario:

$$[e3] \quad \frac{r_y^2}{g} \left(\frac{d^2 \Delta\theta}{dt^2} \right) + \frac{L^2}{V} \delta \left(\frac{d\Delta\theta}{dt} \right) - 2h \frac{CD_\alpha}{CL} \Delta\alpha = 0 \quad \text{con : } \Delta\alpha = \Delta\theta \quad [17.29]$$

Y las raíces son:

$$S_{1,2} = \frac{CL_{\alpha} V L}{2 r_y^2} \left(\frac{g L}{V^2} \right) \left(\frac{S_t}{S_w} \right) \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8CD_{\alpha}}{CL CL_{\alpha}^2} \left(\frac{h r_y^2}{L^3} \right) \left(\frac{V^2}{g L} \right) \left(\frac{S_w}{S_t} \right)^2} \right) \quad [17.30]$$

No se trata necesariamente de un movimiento estable. Ello es debido a que se ha incluido en la ecuación [e3] el supuesto desplazamiento del centro aerodinámico con el ángulo de ataque. Las dependencias son inmediatas.

17.3.2.2 Caso límite. Estabilidad Estática muy grande. ($q \rightarrow \infty$)

La ecuación del polinomio característico completo es:

$$(z^2 + a z + 1)(p + z)z + q(z^2 + b z + 1) = 0 \quad [17.31]$$

$$\text{con: } z = \frac{V}{g} \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Si la *altura metacéntrica* es muy grande, el avión será muy estable ($q \rightarrow \infty$) Las raíces para este caso límite se obtienen del modo siguiente:

El polinomio característico quedaría como sigue:

$$\frac{(z^2 + a z + 1)(p + z)z}{q} + (z^2 + b z + 1) = 0 \Rightarrow (z^2 + b z + 1) = 0 \quad [17.32]$$

Por tanto:

$$\left(z^2 + \frac{CD}{CL} \sqrt{2} z + 1 \right) = 0$$

Este caso conduce a:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{CD}{CL} \left(1 \mp \sqrt{1 - 2 \frac{CL^2}{CD^2}} \right)$$

O bien:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{CD}{CL} \left(1 \mp \sqrt{1 - 2 \frac{CL^2}{CD^2}} \right) \approx \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{CD}{CL} \mp i \right) \quad [17.33]$$

$$s_{1,2} = \sqrt{2} \frac{g}{V} z_{1,2} = \left(-\frac{CD}{CL} \frac{g}{V} \mp i \sqrt{2} \frac{g}{V} \right)$$

VK&T considera que estas raíces representan el modo “*Phygoid*” (Sic), cuyo descubrimiento atribuye a Lanchester [4], ya que los previos trabajos de Zhukowsky parecen ser prácticamente desconocidos en *occidente*. Si partimos de las ecuaciones iniciales del sistema para las fuerzas, suponiendo que el ángulo de ataque permanece constante, y prescindimos de la ecuación del momento, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 [e1] \quad & \frac{1}{g} \left(\frac{d^2 \Delta u}{dt^2} \right) = -\frac{2\varepsilon}{V} \frac{d\Delta u}{dt} - \left(\frac{d\Delta \gamma}{dt} \right) \\
 [e1 + e2] \quad & \frac{d^2 \Delta u}{dt^2} + \frac{2\varepsilon g}{V} \frac{d\Delta u}{dt} + \frac{2g^2}{V^2} \Delta u = 0
 \end{aligned} \tag{17.34}$$

Las raíces de la ecuación característica son:

$$s_{1,2} = -\frac{CD}{CLV} g \left(1 \pm \sqrt{1 - 2 \left(\frac{CL}{CD} \right)^2} \right) \approx \left(-\frac{CD}{CLV} g \left(1 \pm -\frac{g}{V} \sqrt{2}i \right) \right) \tag{17.35}$$

Es la expresión aproximada del movimiento Fugoide; aparece cuantificada claramente la influencia de la resistencia aerodinámica. Lanchester solamente había establecido la frecuencia de la oscilación.

17.3.3 Posibilidad de existencia de raíces reales de la ecuación de Estabilidad. (Método de Klein)²⁰⁴

Los desarrollos de VK&T permiten profundizar en algunos aspectos de interés.

Para estudiar las posibles soluciones de la ecuación característica VK&T aplicarán el método de las Envolventes de Klein [3], quien describe también un método para obtener raíces reales de una ecuación -la Recta de Klein-. Aplicaremos primero este segundo método a partir de la Curva Normal de la Ecuación de Estabilidad, y a continuación, el de las envolventes.

La Curva Normal de la Ecuación de Estabilidad es una curva con dos parámetros p y q , directamente relacionados con las características geométricas, aerodinámicas y de vuelo del avión, y cuya forma matemática veremos más adelante:

²⁰⁴ Esta parte no ha sido desarrollada por VK&T.

$$\frac{z(z^2 + a z + 1)}{(z^2 + b z + 1)} p + \frac{z^2(z^2 + a z + 1)}{(z^2 + b z + 1)} + q = 0 \quad [17.36]$$

El fundamento del Método de Klein es el siguiente.

Si llamamos x e y a las coordenadas cartesianas de los puntos de un plano, toda recta del mismo viene representada por una ecuación como la siguiente:

$$y + u x + v = 0 \quad [17.37]$$

El punto (u, v) puede ser visto como las coordenadas de una recta, siendo $(-u)$ la pendiente y $(-v)$ la ordenada en el origen.

Si, por razones que inmediatamente comprenderemos, consideramos como equivalentes el punto y la recta, y en consecuencia también las coordenadas de estos dos elementos geométricos, podríamos decir que la ecuación $y + u x + v = 0$ representa la incidencia de la recta, caracterizada por el par (u, v) y el punto (x, y) : el punto está sobre la recta y la recta pasa por el punto.

La interpretación geométrica de la curva de la Ecuación de Estabilidad la realizaremos ahora mediante la Curva Normal.

Para ello establecemos:

$$x = \frac{z(z^2 + a z + 1)}{(z^2 + b z + 1)}, \quad y = \frac{z^2(z^2 + a z + 1)}{(z^2 + b z + 1)} \quad [17.38]$$

Y también, en cuanto a la recta:

$$p = u \quad q = v \quad [17.39]$$

La Curva Normal representa, con la variable z , una curva racional, perfectamente determinada (una vez conocidos *solamente* los valores²⁰⁵ de a y b del plano (x, y)). En esta curva podemos considerar marcada implícitamente una escala ordenada de valores de la variable z . (Fig. 17.6)

²⁰⁵ Recordemos que $a = \frac{CL_\alpha}{CL} \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \varepsilon \sqrt{2}$. Para condiciones de vuelo de mínima resistencia aerodinámica, ala recta y polar de coeficientes constantes sin efectos de compresibilidad esto equivale a los siguientes valores: $a = \frac{\pi AR K}{\sqrt{2CD_0} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{AR}{2} \right)^2} \right)}$; $b = 2\sqrt{2CD_0} K$ Es decir, a y b son constantes.

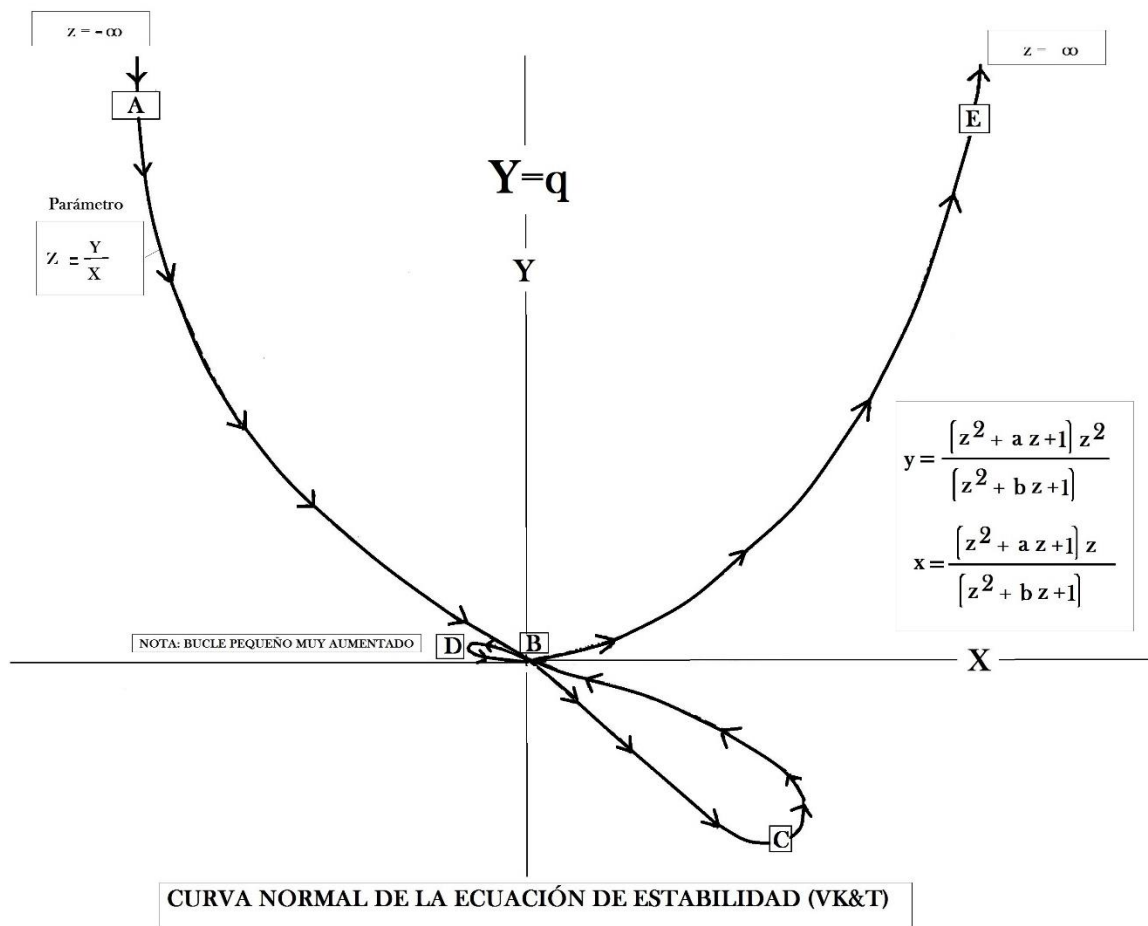


Figura 17.6: Representación gráfica genérica de la Curva de Estabilidad de VK&T.

Es importante retener que es muy sencillo “leer” las raíces directamente sobre las curvas de los gráficos, ya que todo valor de la variable z en un punto de la Curva Normal es el cociente entre la ordenada y la abscisa en ese punto: $z = y/x$

A su vez, todo par de valores (p, q) representa una recta del plano. Según lo expuesto, obtenemos todas las raíces reales de la ecuación de Estabilidad cuando consideramos todos los puntos de intersección de la Curva Normal con las rectas del plano, leyendo los valores del parámetro z sobre la escala marcada en la Curva Normal.

Se puede observar que la Curva Normal queda determinada de una vez para todas, sin que haya que tener en cuenta los valores que puedan tomar los parámetros (p, q) , sino solamente los valores, constantes para unas condiciones de vuelo fijas, de a y de b . Estos dos valores son muy sencillos de establecer para cualquier vuelo:²⁰⁶

$$a = \frac{CL_{\alpha w}}{CL} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{CD}{CL} \sqrt{2} \quad [17.40]$$

²⁰⁶ Recordemos que ahora se supone vuelo horizontal en condiciones de mínima resistencia aerodinámica. También se ha despreciado $2CD$ frente a $CL_{\alpha w}$

A cada par de valores particulares (p, q) le corresponde una recta que, en cierto modo, los representa, y al considerar todos los pares de valores de (p, q) tenemos todas las rectas del plano.

Recordemos que los valores p y q son:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{L}{r_y} \right)^2 \frac{S_t}{S_w} CL_{\alpha t}, \quad [17.41]$$

$$q = \frac{L}{r_y^2} \left(\frac{S_t}{S_w} CL_{\alpha t} - \frac{h}{L} \sqrt{1 + \left(\frac{CD}{CL} \right)^2} \right) \frac{V^2}{2g}$$

Es decir, el parámetro p es puramente másico-geométrico y no depende de las condiciones de vuelo. En cambio, el parámetro q sí que depende de estas, sobre todo a través de la velocidad de vuelo. No obstante, veremos más adelante que la presencia de la velocidad se puede obviar mediante el uso de la ecuación de la sustentación en vuelo estacionario, que es uno de los prerrequisitos de todo este desarrollo.

A título de ejemplo y para ser más específicos, aplicaremos la teoría que acabamos de enunciar a la Ecuación de la Estabilidad de VK&T eligiendo un par de valores (a, b) que VK&T consideran razonables y representativos de las condiciones normales de vuelo estacionario equilibrado:

$$a = \frac{CL_{\alpha}}{CL} \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

$$b = \frac{CD}{CL} \sqrt{2} = 0.2$$

Esto implica un avión cuya Eficiencia Aerodinámica es del orden de $EA \approx 7$, y un ángulo de ataque del orden de $\alpha \approx 10^\circ$. No se especifica el tipo de aeroplano.

La Curva Normal, para valores de z comprendidos entre $(z = -8, z = +6)$ tiene el siguiente aspecto (Fig. 17.7):

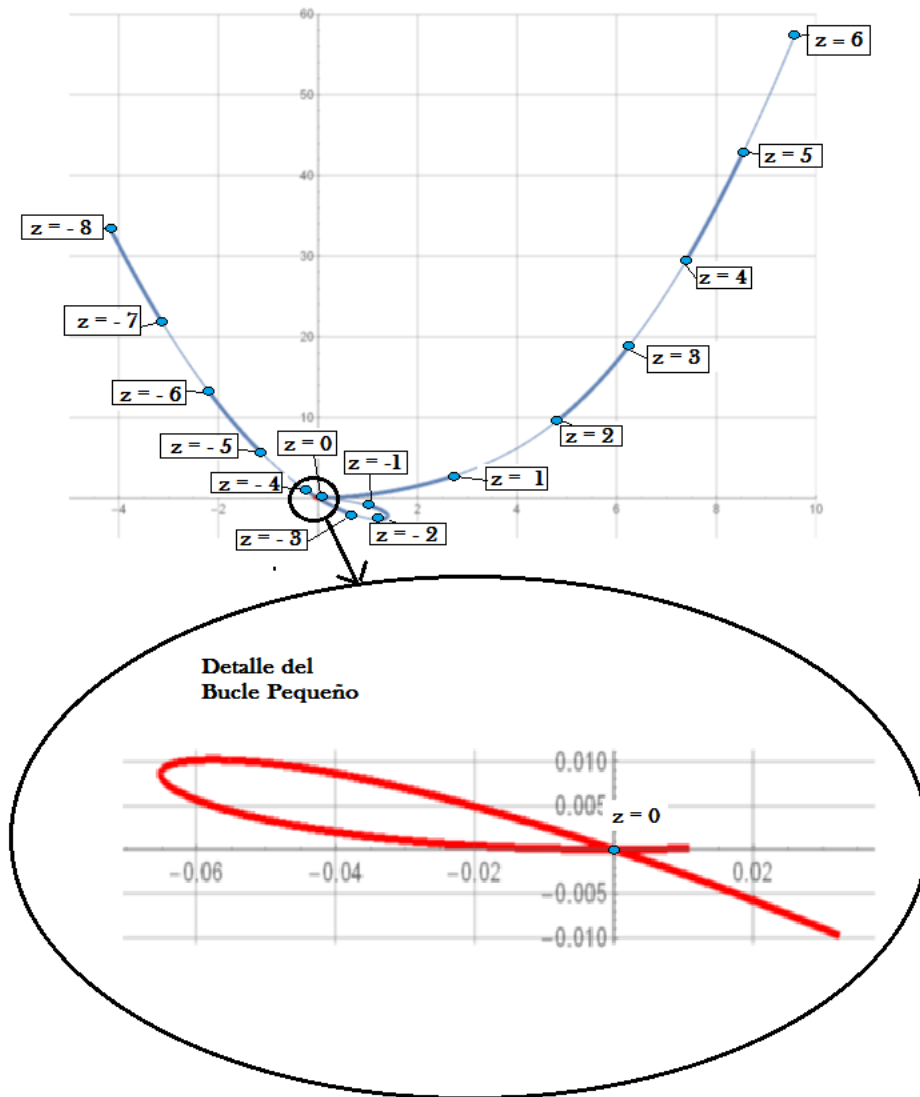


Figura 17. 7: Representación gráfica de la Curva de Estabilidad de VK&T para un caso particular. Los valores correspondientes de z aparecen indicados sobre la curva, así como los dos bucles característicos. (El bucle pequeño aparece en detalle ampliado).

El distinto espesor del trazado de la curva de la parte superior de la figura 17.7 indica los cambios de valor de la variable z , en medidas enteras, y es importante también el pequeño bucle cercano al origen que, agrandado, tiene el aspecto que muestra el detalle de la parte inferior de la figura. (Puede verse también en la rudimentaria Fig. 17.6, trazada manualmente).

Los dos bucles aparecen siempre en todas las Curvas Normales de la ecuación de Estabilidad, tal como la han establecido VK&T.

A título ilustrativo, aplicaremos ahora el procedimiento para un par de parámetros de la curva elegidos de manera que las raíces sean todas reales. Tomamos $p=0.1$ y $q=0.002$ Estos dos valores carecen ahora de sentido físico aeronáutico y servirán simplemente para ejemplificar el procedimiento e indicar la explicación que sugieren para la forma característica de los Modos Oscilatorios Longitudinales de los aviones.

Las raíces de la ecuación de Estabilidad para este caso son:

$$z_1 = -0.05191 \quad z_2 = -0.03690 \quad z_3 = -3.73145 \quad z_4 = -0.27910$$

Todas ellas están alineadas sobre una recta (Fig. 17.8):

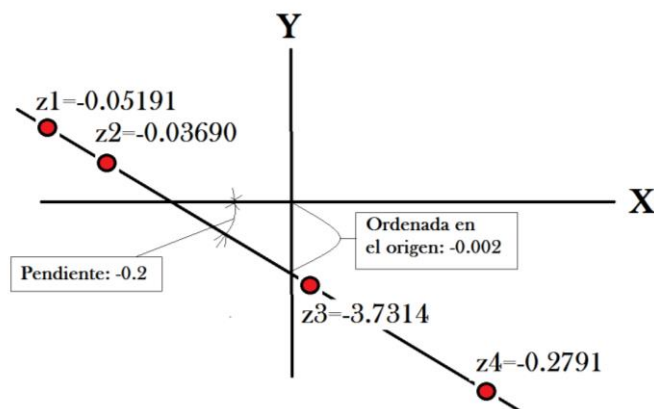


Figura 17.8: Ejemplo de un caso particular de Recta de Klein con las raíces de la Ecuación de Estabilidad indicadas sobre ella.

Y superponiendo los dos bucles (a escala diferente uno del otro) tenemos, con la recta superpuesta cuya intersección indica las raíces reales (Fig. 17.9):

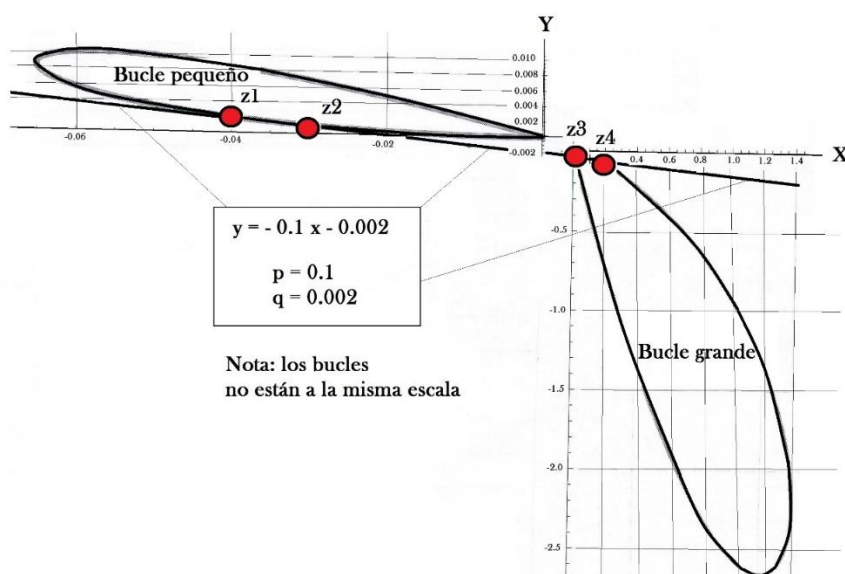


Figura 17.9: La recta de Klein corta a la Curva de la Ecuación de Estabilidad en dos puntos para el bucle pequeño (raíces pequeñas) y dos puntos para raíces grandes (bucle grande). (Se trata del mismo caso particular del gráfico 17.8)

Una vez establecido lo anterior, veremos que pequeñas alteraciones sobre los parámetros p y q tienen el efecto inmediato de convertir en imaginarias las raíces reales menores, pues el bucle es pequeño y no se necesita mucha variación en p y q para que la recta deje de cortarlo, pero las nuevas raíces imaginarias siguen manteniendo un módulo

pequeño si la nueva recta que establecen los valores de p y q no se aleja mucho de la anterior²⁰⁷. En las fronteras -rectas tangentes a un bucle- tenemos raíces reales dobles.

Para abandonar los cortes del bucle grande se necesita una mayor variación de p y q que para salirse del pequeño. Estudiaremos este aspecto a continuación, y mostraremos que las características másicas y geométricas normales de los aviones convencionales impiden que la recta generada por p y q corte ninguno de los dos bucles, y por esta razón siempre son imaginarias las raíces, pequeñas las “*cercanas*” al bucle pequeño y sensiblemente mayores las “*cercanas*” al bucle grande.

La recta que marca las raíces reales depende de la pendiente ($-p$) y de la ordenada en el origen ($-q$).

Supondremos ahora valores razonables de los coeficientes aerodinámicos, inerciales y geométricos, de modo que podamos estimar algunos resultados:

$$c_w = 3 \text{ m}, \quad L = 5 \text{ m}, \quad r_y = 3.5 \text{ m}, \quad S_t = 10 \text{ m}^2, \quad S_w = 25 \text{ m}^2,$$

$$CL_{\alpha_t} = 3.0, \quad CL_{\alpha_w} = 2\pi, \quad CL_0 = 0.3, \quad CL = 0.3 + 2\pi(\alpha_0)$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{L}{r_y} \right)^2 \frac{S_t}{S_w} CL_{\alpha_t} = 1.737$$

$$h = \frac{dxCDP}{d\alpha} \approx -CL_0 \left(\frac{CL_{\alpha_w}}{4CL^2} \right) c_w \Rightarrow = -0.24 c_w$$

$$q = \frac{L}{r_y^2} \left(\frac{S_t}{S_w} CL_{\alpha_t} + \frac{0.24 c_w}{L} \sqrt{1 + \left(\frac{CD}{CL} \right)^2} \right) \frac{V^2}{2g} \Rightarrow \approx \frac{V^2}{36}$$

[17.42]

Resumiendo:

$$p \approx 1.737 \quad q \approx \frac{V^2}{36}$$

Es decir: el parámetro que indica la pendiente de la recta de Klein es constante²⁰⁸ para un avión dado, y la ordenada en el origen depende fuertemente de las condiciones de vuelo y particularmente de la velocidad.

²⁰⁷ Esto nos parece no completamente asegurable. El teorema de la Discontinuidad de los Módulos de las raíces de una ecuación algebraica, en el paso del campo real al imaginario por una pequeña perturbación de los coeficientes de la ecuación parece indicar que no tiene por qué existir.

²⁰⁸ Sin efectos de compresibilidad.

Las curvas representadas a continuación (Fig. 17.10) corresponden a valores (discrecionales) de $b = 0$ y un valor de a desde $a = 5$, hasta $a = 9$. (El Bucle Pequeño no es visible)

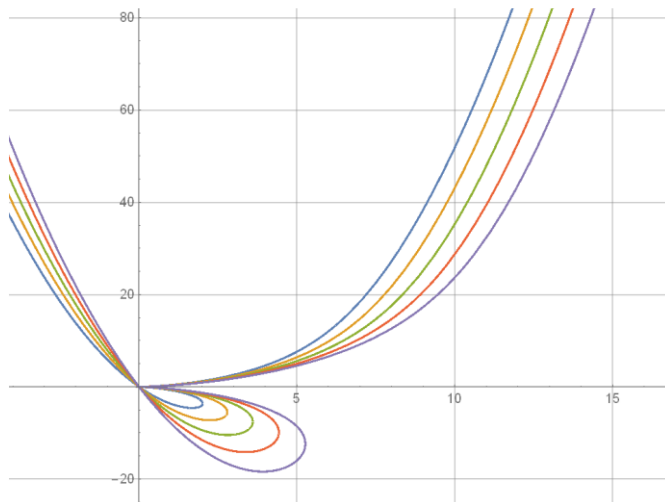


Figura 17.10; Curva de la Ecuación de Estabilidad para $b=0$ y valores diversos de “ a ” desde $a = 5$ hasta $a = 9$. El bucle pequeño no es visible. El parámetro “ p ” en abscisas, y “ q ” en ordenadas.

Las correspondientes al Bucle Pequeño se muestran a continuación (Fig. 17.11):

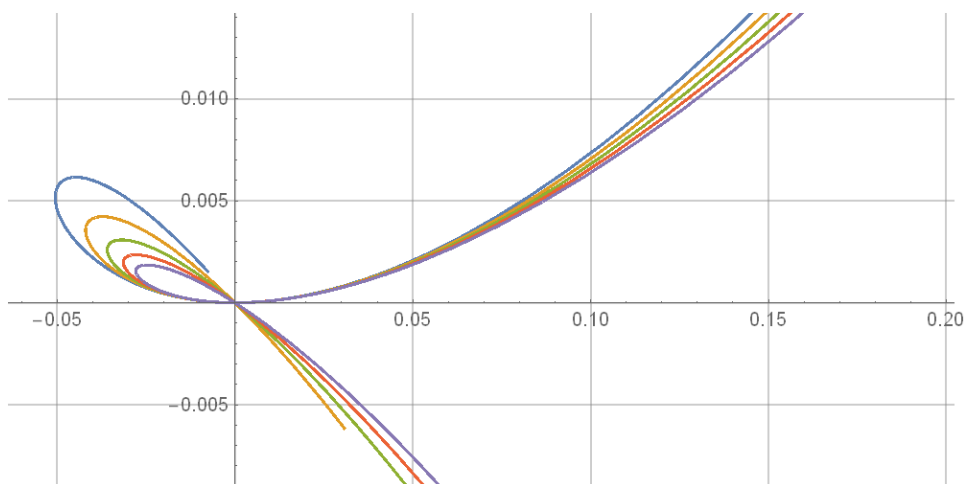


Figura 17.11; Curva de la Ecuación de Estabilidad para $b=0$ y valores diversos de “ a ” desde $a = 5$ hasta $a = 9$. Sólo el bucle pequeño es visible entero. El bucle grande no es visible. El parámetro “ p ” en abscisas, y “ q ” en ordenadas.

Hasta aquí hemos aceptado el esquema particular de VK&T, que sitúa el CDG en el Centro de Presión del Ala y supone nula la sustentación del empenaje. Abandonamos ahora esta limitación demasiado restrictiva, que limita excesivamente las condiciones de vuelo.

Si adoptamos, como punto de partida la Matriz del Sistema Longitudinal Linealizado en un formato habitual²⁰⁹ actual simplificado, con las variables incrementales propias del sistema longitudinal, y suponiendo vuelo horizontal equilibrado y estacionario, tendríamos:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{V} \\ \Delta \dot{\alpha} \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho S V_0 CD_{Trim}}{m} & g(1-2K CL_\alpha) & 0 & -g \\ -\frac{\rho S CL_{Trim}}{m} & \left(-\frac{\rho S V_0 CL_\alpha}{2m}\right) & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\rho c S V_0^2 CM_\alpha}{2I_{yy}} & \frac{\rho c^2 S V_0 CM_q}{4I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \alpha \\ \Delta q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad [17.43]$$

Esta matriz conduce al siguiente polinomio característico del sistema:

$$\begin{aligned} pol = & -\frac{2c m^2}{\rho S I_{yy}} \left(\frac{CM_\alpha}{CL^2} \right) \left(2 + 2 \left(\frac{CD_{Trim}}{CL_{Trim}} \right) \left(\frac{V_0}{g} s \right) + \left(\frac{V_0}{g} s \right)^2 \right) + \dots \\ & \dots + \left(\frac{V_0}{g} s \right) \left(\left(\frac{V_0}{g} s \right) + \left(\frac{CL_{\alpha Tail}}{CL} \right) \left(\frac{S_t}{S_w} \right) \left(\frac{xCDG - xCA_t}{r_y} \right)^2 \right) \left(2 + \left(\frac{CL_\alpha}{CL_{Trim}} \right) \left(\frac{V_0}{g} s \right) + \left(\frac{V_0}{g} s \right)^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad [17.44]$$

Introducimos ahora algunos cambios de variable, y también hacemos uso de la definición de la derivada aerodinámica CM_q según la terminología actual:

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{CL_{\alpha Tail}}{CL} \right) \left(\frac{S_t}{S_w} \right) \left(\frac{xCDG - xCA_t}{r_y} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{c}{r_y} \right)^2 \left(\frac{-CM_q}{CL} \right) \\ q &= \frac{V_0^2 c}{2g r_y^2} \left(\frac{-CM_\alpha}{CL} \right) \\ z &= \left(\frac{V_0}{\sqrt{2}g} s \right) \end{aligned} \quad [17.45]$$

²⁰⁹ No citamos ninguna referencia en particular; puede encontrarse en muchas, aunque con pequeñas variaciones en la nomenclatura.

Obtenemos la Ecuación de Estabilidad de VK&T adaptada a la nomenclatura actual y sin algunas de las limitaciones del esquema primitivo de vuelo:

$$z(p+z)(1+az+z^2)+q(1+bz+z^2)=0 \quad [17.46]$$

Con:

$$a = \frac{CL_\alpha}{CL_{Trim}} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad b = \frac{CD_{Trim}}{CL_{Trim}} \sqrt{2}$$

(El desarrollo anterior sigue siendo válido. La forma de representar p y q ha sido adaptada al modelo aerodinámico actual).

La recta de Klein toma ahora la forma:

$$y = -p x - q$$

Es decir:

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{c}{r_y} \right)^2 \left(\frac{-CM_q}{CL} \right) x - \left(\frac{V_0^2 c}{2g r_y^2} \right) \left(\frac{-CM_\alpha}{CL} \right) \quad [17.47]$$

La recta viene definida por su ordenada en el origen y por su pendiente. Obsérvese que tanto la pendiente como la ordenada en el origen son normalmente negativas para aviones convencionales, y que los coeficientes aerodinámicos fundamentales son: CL , CM_α , CM_q . La variación del CL desplaza la recta paralelamente a sí misma.

Las raíces reales de la ecuación característica vienen dadas por los cortes de la Recta de Klein con la Ecuación Normal, como hemos visto. La posibilidad de que existan estas raíces viene dada por los valores posibles de p y de q , en función de las características geométricas, máscas y de vuelo del avión.

17.3.3.1 Valores típicos de p y de q .

Algunas magnitudes que intervienen en estos dos parámetros pueden considerarse aproximadamente constantes²¹⁰; son los siguientes:

aerodinámica : $CL_{\alpha Tail}$, CM_α , CM_q ,

geometría : c , $\left(\frac{S_t}{S_w} \right)$,

inercia : r_y^2 ,

En cambio, otros son dependientes de las condiciones de vuelo V_0 y del coeficiente de sustentación CL . (Estas dos variables están relacionadas en nuestro caso, por la ecuación de la sustentación: $\frac{1}{2} \rho S V_0^2 CL = mg$ y dado que el vuelo se supone horizontal, la densidad

²¹⁰ Sin efectos de Mach.

del aire será constante y tanto V_0 como el coeficiente de sustentación CL pueden expresarse el uno en función del otro, para una altitud dada).

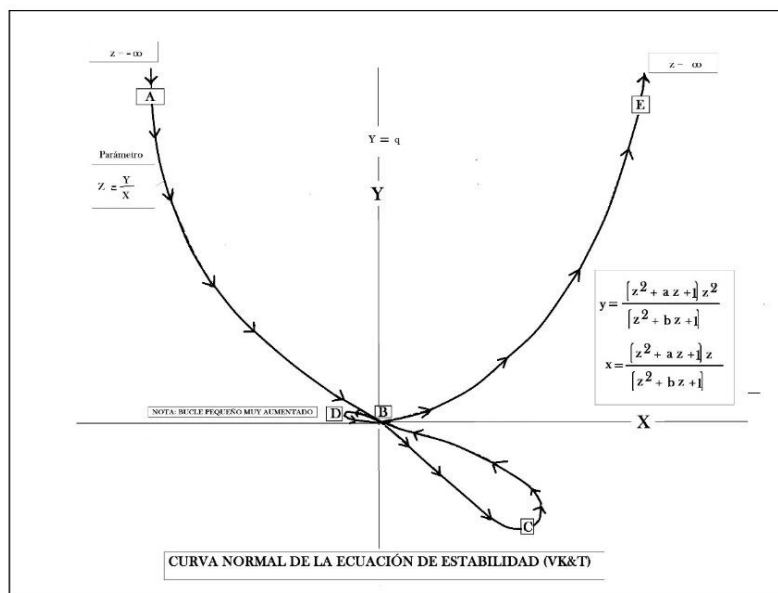


Figura 17.12: Curva de Estabilidad. (Repetida aquí por conveniencia).

Observaciones que se deducen por simple inspección visual de la Curva Normal de la Ecuación de Estabilidad de VK&T. (Ref. Fig. 17.12)

(1) La Ecuación de Estabilidad de VK&T solamente puede tener raíces reales positivas si $CM_\alpha > 0$ (Esto solo es posible en el primer cuadrante, ya que el bucle grande, -que se sitúa en el cuarto cuadrante- se corresponde con raíces negativas). Como es sabido, esta es una condición básica de la estabilidad estática de un avión.

(2) La Curva Normal describe la siguiente trayectoria:

a. Desde $z \rightarrow -\infty$ hasta $z = -\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$ tiene una forma similar a la parabólica con $x > 0$ e $y > 0$ por tanto, todas las raíces reales posibles en esa zona son negativas

b. Desde $z = -\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$ hasta $z = -\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4})$ describe el Bucle Grande. El valor medio de las raíces reales posibles en este bucle es $\bar{z} \approx -\frac{a}{2}$

c. Desde $z = -\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4})$ hasta $z = 0$ describe el Bucle Pequeño. El valor medio de las raíces reales posibles en este bucle es $\bar{z} \approx -\frac{1}{4}(a - \sqrt{a^2 - 4})$

- d. La sustitución, en la Ecuación de la Curva Normal y en la recta de Klein de algunos valores correspondientes a parámetros de vuelo realistas permite evaluar, hasta cierto punto de modo general, las posibilidades de obtener raíces reales en la dinámica longitudinal de los aviones convencionales. (Véase, a título ilustrativo, el gráfico de la fig. 17.13, correspondiente a $p=30$ y $q=100$)

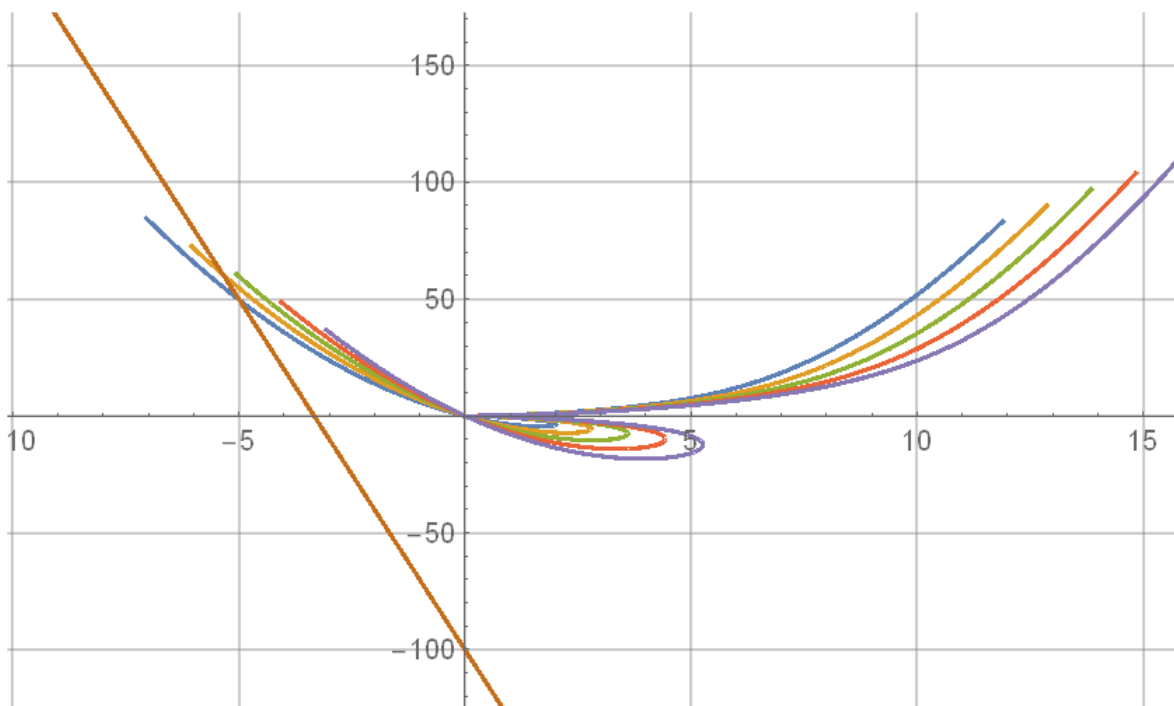


Figura 17.13: Gráfico de la Curva de Estabilidad con la recta de Klein correspondiente a $p=30$ y $q=100$). El parámetro “p” en abscisas, y “q” en ordenadas.

- (3) No puede haber raíces reales en el tercer cuadrante, pues la curva normal no pasa por él.

EJEMPLOS DE POSIBILIDADES:

Las raíces reales de la Ecuación de Estabilidad son, como queda dicho, los puntos de corte de la Curva Normal en su intersección con la Recta de Klein: $y = -px - q$. Si estos puntos de corte no existen, todas las raíces son imaginarias. Obsérvese que la Curva Normal

queda determinada una vez dados los valores de $(\alpha_{TRIM})_{Min_Drag}$ y la Curva Polar de Resistencia Aerodinámica. El primero de ellos indica la pendiente -con signo contrario- de la recta, y el segundo, la ordenada en el origen de la recta de Klein, también con signo contrario. En los gráficos 17.14 a \rightarrow d se muestran varios casos posibles.

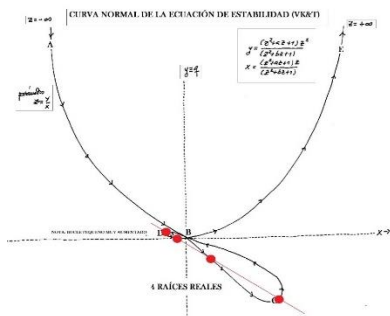


Figura 17.14, a): 4 raíces reales

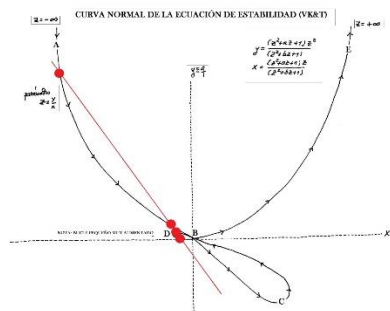


Figura 17.14, b): 4 raíces reales

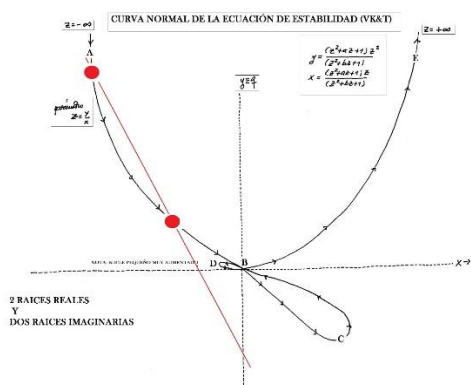


Figura 17.14, c): 2 raíces reales y 2 imaginarias.

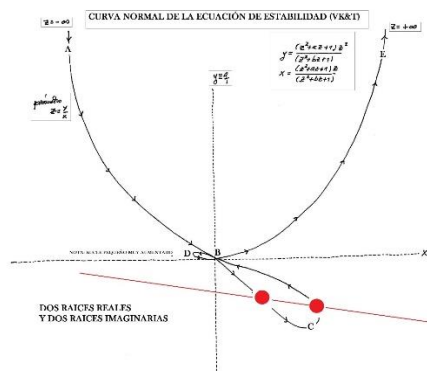


Figura 17.14, d): 2 raíces reales y 2 imaginarias.

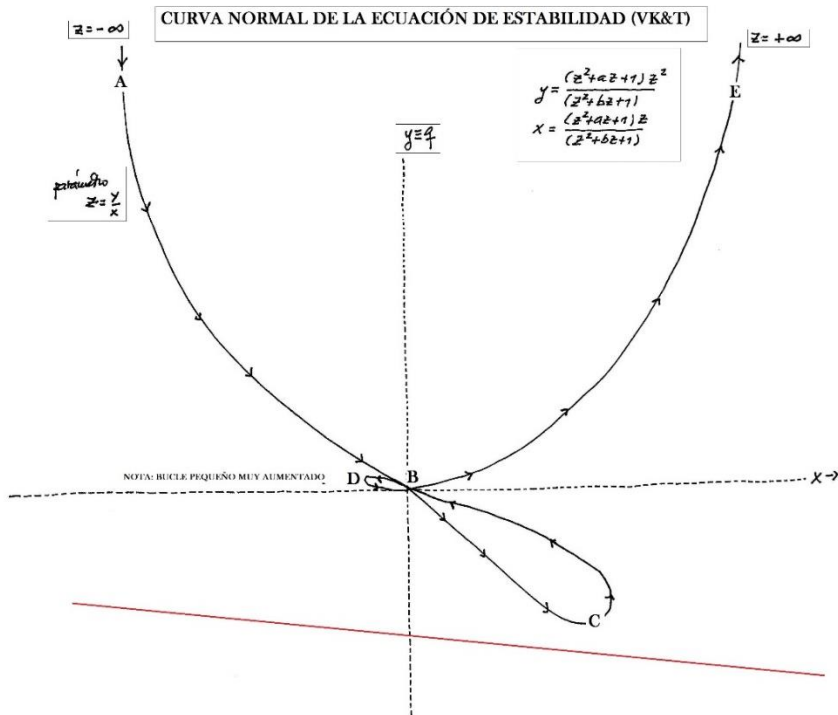


Figura 17.15, e: 4 raíces imaginarias. Este es el caso habitual en los aeroplanos convencionales.

CONCLUSIÓN: el valor numérico del parámetro “-q” en los aviones convencionales suele ser tan elevado, relativamente a los demás, que solamente valores correlativamente elevados de (-p) podrían hacer que apareciesen raíces reales, por intersección de la recta de Klein con el segmento parabólico del segundo cuadrante, o con el bucle pequeño. Esta posibilidad no debe excluirse, aunque para aviones convencionales no se suele dar. Así, podemos afirmar que lo habitual será el caso representado por la (Fig. 15, e).

17.3.4 Estudio de la posibilidad de existencia de raíces reales para la Ecuación de Estabilidad mediante la Curvas Envolventes.

Es sabido que habitualmente no aparecen este tipo de raíces en la dinámica longitudinal de un avión convencional, pero el procedimiento aplicado por VK&T aporta profundidad de significado al estudio de la Ecuación de Estabilidad, y permite, con pequeñas modificaciones, acceder al estudio de las raíces complejas, cuya aparición, así como la habitual y llamativa diferencia de orden de magnitud entre las de corto y las largo período explica de un modo bastante obvio.

La ecuación característica obtenida $(z^2 + a z + 1)(p + z)z + q(z^2 + b z + 1) = 0$ admite la siguiente expresión:

$$[e1] \quad pf(z) + qg(z) + h(z) = 0$$

Con:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= z(z^2 + a z + 1) \\
 g(z) &= (z^2 + b z + 1) \\
 h(z) &= z^2(z^2 + a z + 1) = z f(z)
 \end{aligned}
 \tag{17.48}$$

Si, como suponemos ahora, las raíces λ_i son reales, entonces la ecuación [e1] representa una relación lineal entre p y q:

$$[e1] \quad q = -p \frac{f(\lambda_i)}{g(\lambda_i)} - \frac{h(\lambda_i)}{g(\lambda_i)} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}
 \tag{17.49}$$

Esto significa que todos los pares (p, q) que cumplen la ecuación [e1] para una determinada raíz λ_i tienen como lugar geométrico una recta en ese plano (p, q) y tienen la misma amortiguación λ_i , como ya hemos visto.

Ahora obtendremos las envolventes de todas esas rectas, aplicando el conocido procedimiento [Cfr. por ejemplo, 6]:

$$[e2] \quad p \frac{df(z)}{dz} + q \frac{dg(z)}{dz} + \frac{dh(z)}{dz} = 0
 \tag{17.50}$$

Esta ecuación es de tercer grado, luego tiene tres soluciones, funciones de p y de q, que denominamos:

$$\lambda_1(p, q), \quad \lambda_2(p, q), \quad \lambda_3(p, q)$$

Estas soluciones, sustituidas en la ecuación [e1] nos conducen a obtener, para nuestro caso, tres curvas envolventes -o tres ramas de la envolvente- cuyos parámetros fundamentales -propios del avión y de las condiciones de vuelo-, son:

$$a = \frac{CL_\alpha}{\sqrt{2}CL}, \quad b = \sqrt{2} \frac{CD}{CL}$$

La representación genérica de las envolventes en ejes (p, q) es como indica el gráfico (Fig. 17.16), que es solamente orientativo, aunque contiene información definitiva sobre el *aspecto* de las envolventes: los puntos de tangencia con el eje horizontal y las dos asíntotas siempre existirán, aunque los valores numéricos, que dependen de a y de b, varíen.

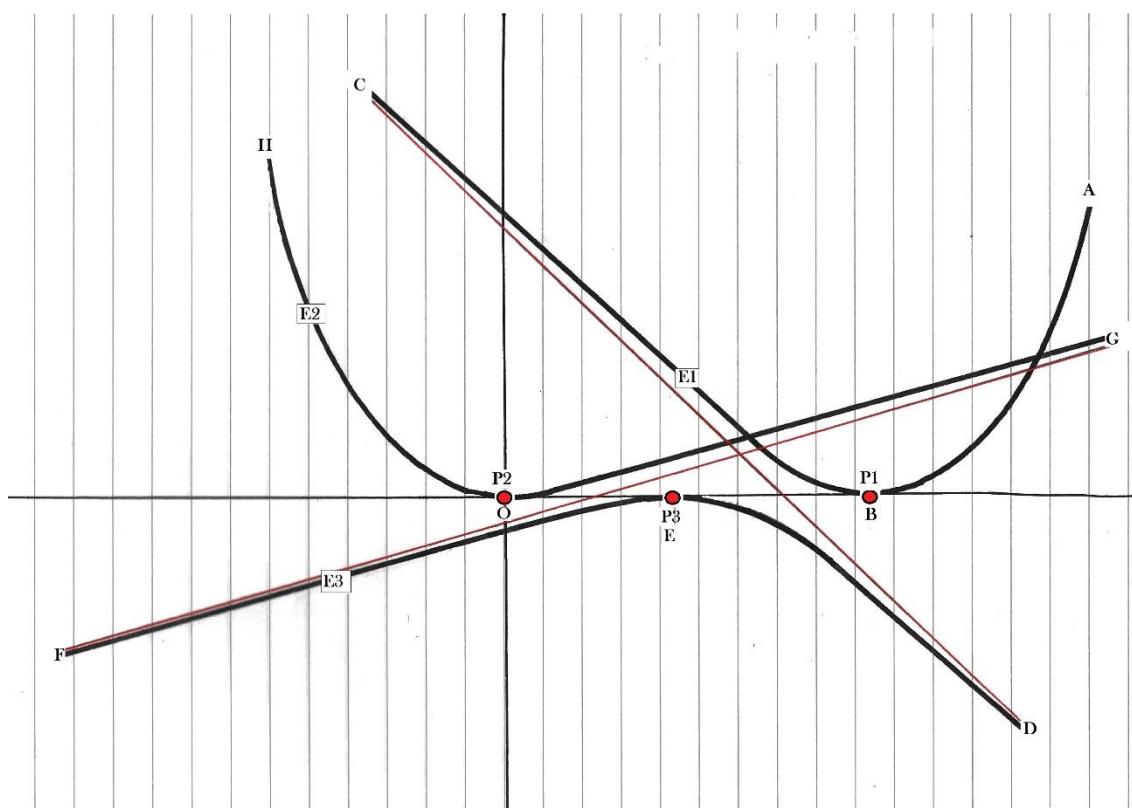


Figura 17.16: Representación genérica de las envolventes de la Ecuación de Estabilidad de VK&T, en ejes (p, q) .

La envolvente tiene siempre tres ramas, E1, E2 y E3, correspondientes a las tres raíces de la ecuación [e2], con dos asíntotas CD y FG, y tres puntos característicos de tangencia con el eje $q=0$: P1, P2 y P3.

Estas envolventes se presentan siempre de la misma manera, ya que la ecuación de estabilidad en la que q es la variable dependiente (ordenadas) y p la variable dependiente (abscisas) depende solamente de los dos parámetros a y b , y las curvas sirven para el estudio aproximado de la estabilidad de cualquier movimiento particular del avión, en cuanto se refiere a las eventuales raíces reales. En particular, los puntos de tangencia P1, P2 y P3 de las 3 ramas de la envolvente con el eje de abscisas solamente dependen del valor de a .

La representación gráfica segmentada de la envolvente mostrada a continuación corresponde a dos valores para a y b que se han considerado suficientemente representativos²¹¹.

$$\frac{CL_{\alpha}}{CL} = 5.657 \quad \frac{CD}{CL} = 0.141 \quad \Rightarrow \quad a = 4 \quad b = 0.2$$

²¹¹ Recordemos que VK&T trabajan en la zona de ángulo de ataque óptimo. La definición de este ángulo no la mencionan; nosotros suponemos que se trata del ángulo de máxima Eficiencia Aerodinámica, aunque los datos facilitados para a y b no permiten fijar la Polar del avión.

Las tres curvas, con q en el eje de ordenadas y p en el eje de abscisas, son:

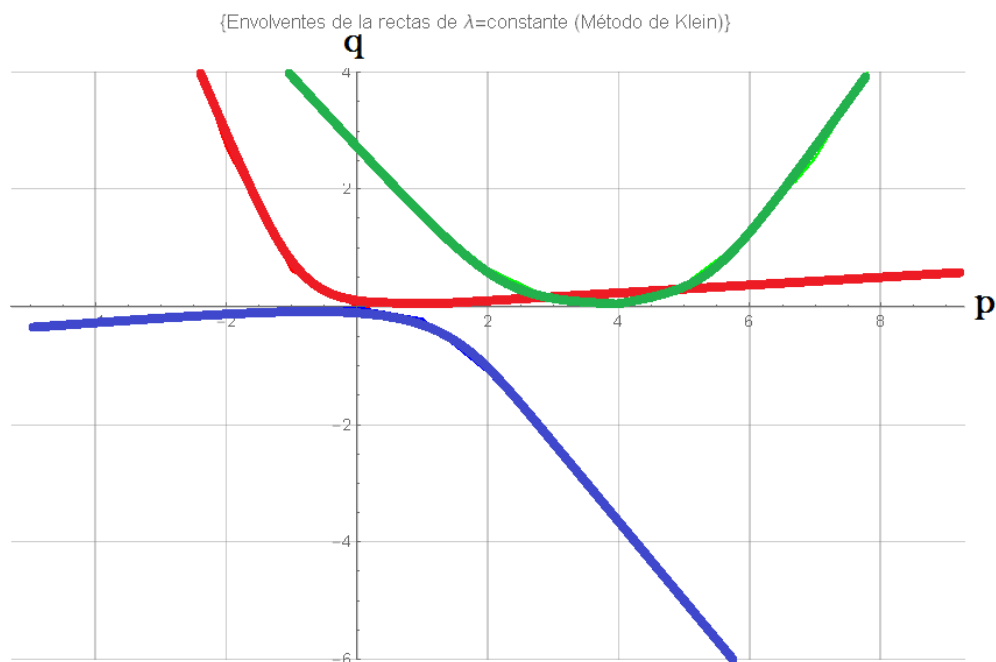


Figura 17.17: Representación de las envolventes de la Ecuación de Estabilidad de VK&T para el caso particular descrito en el texto.

Para este caso particular (Fig. 17.17) los puntos P2 y P3 están muy próximos, pero realmente no llegar a coincidir. Cada una de estas tres curvas envolventes nos proporciona una vía para investigar las raíces reales de nuestra ecuación, pues cada una de las rectas correspondiente a una raíz real debe ser la tangente de alguna rama de la curva envolvente, y cada tangente sobre la curva envolvente debe corresponder a una raíz real.

$$\text{Para cada par de puntos } \left\{ p = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{c}{r_y} \right)^2 \left(\frac{-CM_q}{CL} \right), \quad q = \frac{V_0^2 c}{2g r_y^2} \left(\frac{-CM_\alpha}{CL} \right) \right\}$$

existirán tantas raíces reales de la Ecuación de estabilidad como el número de tangentes reales que podamos establecer a las envolventes, pasando por ese punto (p, q) .

Para sistematizar este proceso, algo engorroso, conviene zonificar claramente el gráfico. (Fig.17.18)

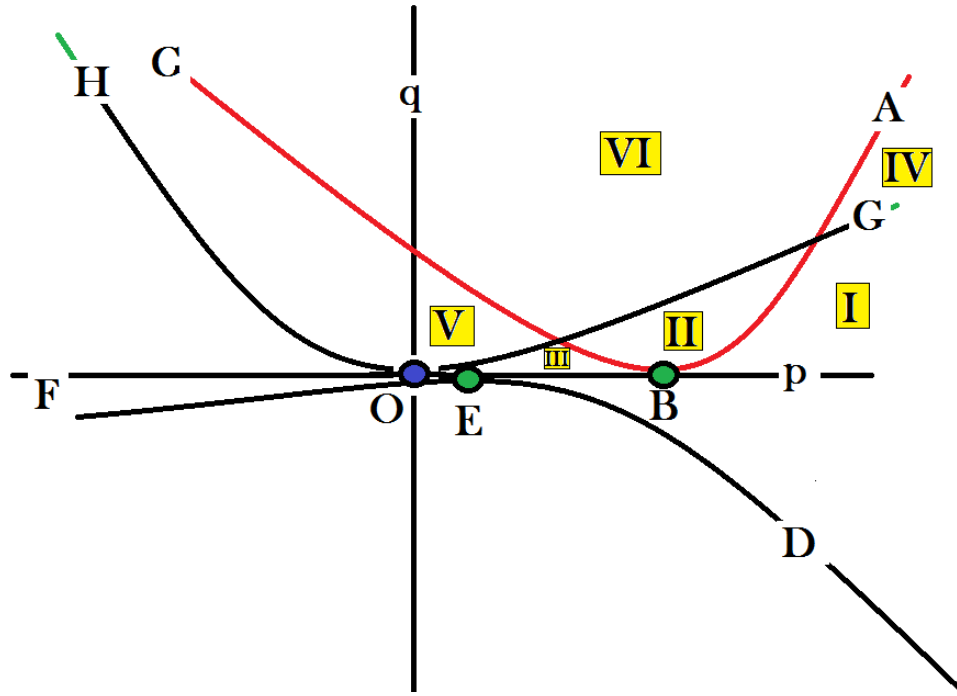


Figura 17.18: Asignación de Zonas generadas por las envolventes de la Ecuación de Estabilidad de VK&T, para el estudio de las tangentes posibles.

Solamente nos interesará analizar el primer cuadrante, pues cualquiera de los otros tres, por los valores de p o de q, o no es posible, o conduce a movimientos inestables. En este cuadrante tenemos 6 zonas claramente distinguibles.

Zonas de las que se pueden sacar cuatro tangentes reales a las envolventes y que producen cuatro raíces reales, amortiguadas o no.

Zonas con dos tangentes reales posibles tendrán dos movimientos aperiódicos y dos periódicos, correspondientes a dos raíces imaginarias.

Zonas sin tangentes reales posibles tendrán cuatro raíces correspondientes a movimientos periódicos. Las envolventes limitan las zonas, y si las rectas cambian su condición de tangencia, las raíces reales cambian a imaginarias.

Para cualquier recta tangente (con amortiguamiento constante $\lambda = cte$) obtenemos el punto de intersección con el eje p haciendo nula la coordenada q, con lo que obtenemos:

$$[e4] \quad 0 = -p \frac{\lambda_i (\lambda_i^2 + a\lambda_i + 1)}{(\lambda_i^2 + b\lambda_i + 1)} - \frac{\lambda_i^2 (\lambda_i^2 + a\lambda_i + 1)}{(\lambda_i^2 + b\lambda_i + 1)} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad [17.51]$$

Luego este punto de corte nos muestra directamente el valor del amortiguamiento (Fig. 17.19):

$$p_{q=0} = -\lambda_i \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

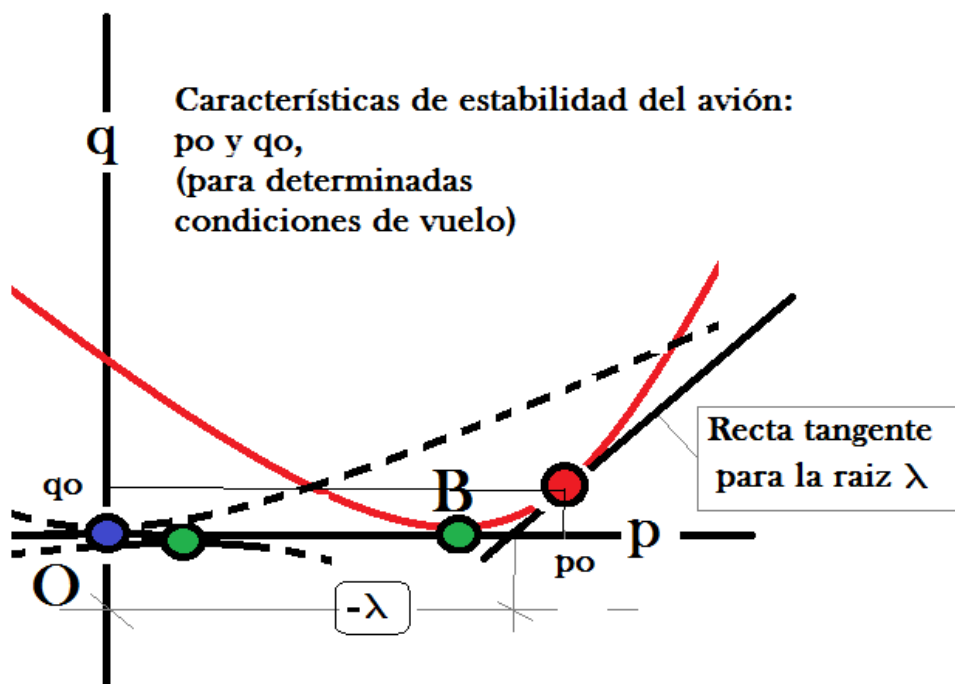


Figura 17.19: Estudio de tangentes. Lectura directa del valor del amortiguamiento en el punto de corte sobre el eje de abscisas.

Para la pendiente de las rectas, que llamamos m , tenemos:

$$m = \frac{\lambda_i (\lambda_i^2 + a\lambda_i + 1)}{(\lambda_i^2 + b\lambda_i + 1)} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad [17.52]$$

Observamos que para ciertos valores de λ_i -que no anulan el denominador- se anula la pendiente:

Para $m = 0$

$$\lambda_i (\lambda_i^2 + a\lambda_i + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad (\text{Punto } O) \quad [17.53]$$

$$\lambda_2 \Rightarrow \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \quad (\text{Punto } B)$$

$$\lambda_3 \Rightarrow \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \quad (\text{Punto } E)$$

Esto fija los puntos clave de la zonificación²¹² en función de un único parámetro a .

Analizamos ahora cada una de las Zonas. (Fig. 17.20)

²¹² Es importante recordar que esta zonificación depende en sus puntos fundamentales de parámetros muy básicos del vuelo: $a = \frac{CL_\alpha}{\sqrt{2}CL}$, $b = \sqrt{2} \frac{CD}{CL}$

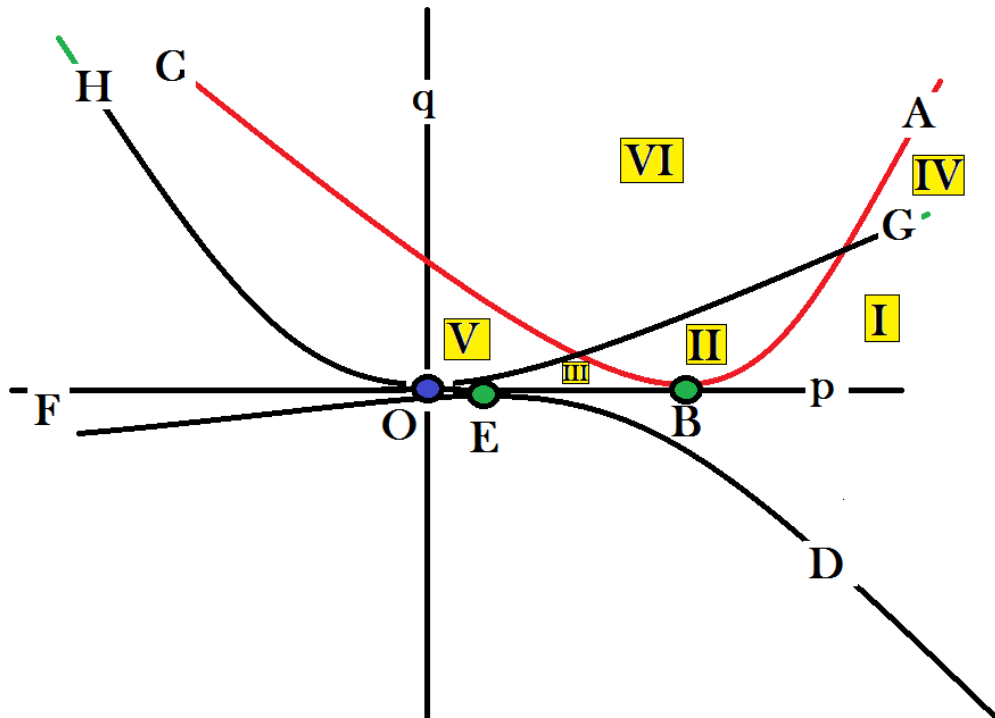


Figura 17.20: Puntos clave de la Zonificación de las envolventes de la Curva de Estabilidad.

- (1) Zonas I, II y III. Desde cualquier punto de esas tres zonas podemos lanzar dos tangentes reales a las envolventes. Estas tangentes cortan al eje p entre $p = 0$ y $p = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ (Punto E) Si existen esas tangentes, se corresponden con valores de bajo amortiguamiento. Se convierten en complejos cuando atravesamos la curva a lo largo de OG.
- (2) Zonas I, III, IV y V. Vemos que podemos tirar dos tangentes reales desde cualquier punto de esas cuatro zonas, que cortan al eje p por delante del punto $p = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ (Punto B)
- a. En las zonas I y IV las tangentes los son a la envolvente BA.
 - b. En las zonas III y V puede lanzar una tangente a la envolvente BC y la otra a BC o a ED, según su posición, por encima o por debajo de la asíntota común CD. Las raíces se convertirán en complejas si sobrepasamos la envolvente CBA. Todas estas raíces tienen valores mayores más grandes que los anteriormente mencionados, de modo que se corresponderán con movimientos fuertemente amortiguados, por contraste con aquellos.

- (3) Zona VI. No es posible lanzar ninguna tangente hacia ninguna envolvente: no hay raíces reales y todos los movimientos son oscilatorios.

RESUMEN. Esto describe completamente los movimientos aperiódicos, o sea, las raíces reales.

En los cuadrantes 2, 3 y 4 no hay soluciones amortiguadas.

En el cuadrante 1, tenemos:

Zonas I y III: dos soluciones fuertemente amortiguadas

Zonas I y III: dos soluciones poco amortiguadas

Zona II: dos soluciones poco amortiguadas.

Zona IV y V: dos soluciones fuertemente amortiguadas.

Una conclusión parece obvia: hay diferencia significativa en cuanto a los valores posibles del amortiguamiento para estos casos. Unos provienen de un entorno de

$$p = \left(a - \sqrt{a^2 - 4} \right) / 2 \quad (\text{Punto } E), \quad \text{y otros provienen de un entorno de}$$

$$p = \left(a + \sqrt{a^2 - 4} \right) / 2 \quad (\text{Punto } B)$$

17.3.5 Raíces imaginarias de la Ecuación de Estabilidad. Estabilidad de las oscilaciones.

Procede estudiar ahora las eventuales raíces imaginarias a las que puede dar lugar la ecuación de la estabilidad. Estos serán oscilatorios (periódicos, en nomenclatura de VK&T)

Estos movimientos periódicos oscilatorios provienen del hecho de que las tangentes cortan a la curva envolvente CBA, penetrando en ella. Esto puede hacerse de dos maneras (ver figuras 17.21 y 17.22):

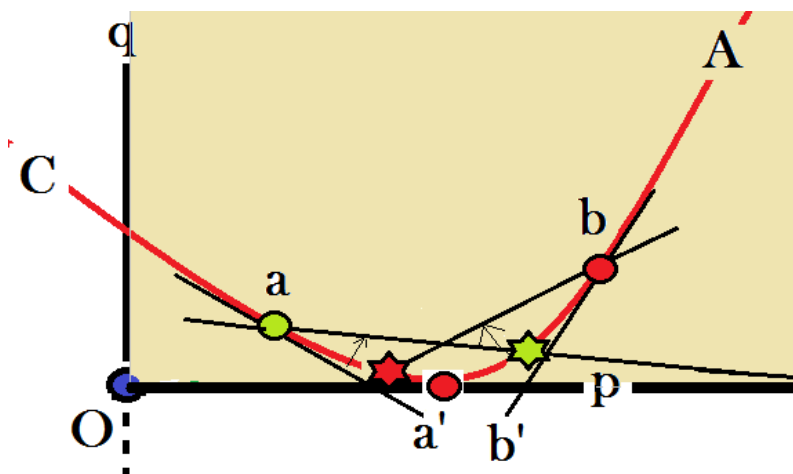


Figura 17.21: Evolución de tangentes a secantes en las Envolventes de la Curva de Estabilidad de VK&T, (1).

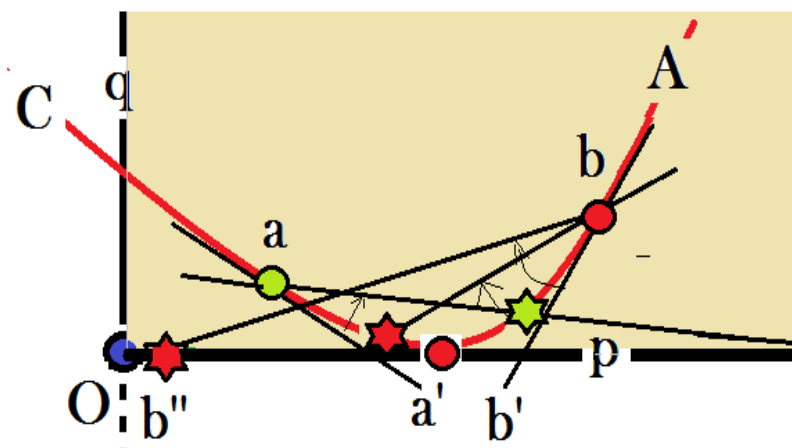


Figura 17.22: La tangente (bb') se convierte en secante y corta al eje $q=0$ más cerca del origen (menor amortiguamiento). La tangente (aa') se convierte en secante y corta al eje $q=0$ más lejos del origen (mayor amortiguamiento) y (2).

Las tangentes a la envolvente CBA en los puntos (a) y (b) dejan de corresponder a raíces reales cuando la cortan: dejan de ser tangentes para ser secantes. Puede verse que el punto de corte de las tangentes que provienen de un punto situado tal como (b), pueden aproximarse a la zona de amortiguamiento nulo o negativo, (puntos de corte b' y b''), mientras que las que provienen de un punto situado tal como (a) y penetran en la envolvente, aumentan su amortiguamiento desplazando el punto de corte con el eje horizontal hacia la derecha. Estas son las dos maneras de evolucionar las tangentes y convertirse en secantes.

Lo que se ha descrito de modo geométrico e intuitivo, será confirmado a continuación por los cálculos.

La ecuación característica debe ser ahora descompuesta en dos, una con los términos reales y la otra con los términos imaginarios. VK&T usan la fórmula de Taylor a partir de la expresión de la ecuación de estabilidad:

$$[e1] \quad pf(z) + qg(z) + h(z) = 0$$

VK&T establecen, para cada una de las tres funciones $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$, el siguiente desarrollo:

$$f(\lambda + vi) = f(\lambda) + vi f'(\lambda) + \frac{(vi)^2 f''(\lambda)}{2!} + \frac{(vi)^3 f'''(\lambda)}{3!} + \frac{(vi)^4 f^{(4)}(\lambda)}{4!} + \dots \quad [17.54]$$

O sea:

$$f(\lambda + vi) = f(\lambda) - v^2 \frac{f''(\lambda)}{2!} + \frac{v^4 f^{(4)}(\lambda)}{4!} + vi \left(f'(\lambda) - \frac{v^2 f'''(\lambda)}{3!} \right) + \dots \quad [17.55]$$

No hay términos superiores al cuarto grado pues las derivadas del desarrollo de Taylor pasan a ser nulas. La ecuación de Estabilidad se descompone en dos, por anulación de su parte real y de la imaginaria:

La parte real conduce a:

[e_real]

$$\lambda^2(1+a\lambda+\lambda^2) - \frac{1}{2}(2\lambda^2+4\lambda(a+2\lambda)+2(1+a\lambda+\lambda^2))v^2 + v^4 + q(1+b\lambda+\lambda^2-v^2) + \dots$$

$$\dots + p\left(\lambda(1+a\lambda+\lambda^2) - \frac{1}{2}(2\lambda+2(a+2\lambda))v^2\right) = 0$$

[17.56]

La parte imaginaria conduce a:

[e_imag]

$$\lambda^2(a+2\lambda) + q(b+2\lambda) + 2\lambda(1+a\lambda+\lambda^2) - \frac{1}{6}(12\lambda+6(a+2\lambda))v^2 + \dots$$

$$\dots + p(1+a\lambda+\lambda^2 + \lambda(a+2\lambda) - v^2) = 0$$

[17.57]

En el caso de las raíces reales, para cada valor de λ obteníamos una recta en el plano (p, q) . Ahora, en cambio, tenemos dos ecuaciones lineales entre p y q , dependientes de dos variables (λ, v) . El procedimiento será diferente y algo más complicado. VK&T asumirán algunos valores numéricos para a y b , de modo que puedan ser representados gráficamente dos tipos de curvas: manteniendo la parte real (λ) constante y variando la parte imaginaria (v) obtenemos una curva de amortiguamiento constante en el plano (p, q) ; por el contrario, si mantenemos (v) constante y variamos (λ), obtenemos curvas de frecuencia constante, de menor interés en principio. (Fig. 17.23 y 17.24).

En las curvas paramétricas representaremos por separado las de elevado amortiguamiento de las de bajo amortiguamiento, pues existen ambos tipos de raíces para los mismos valores de p y de q . Recordemos que las raíces del polinomio característico son de la forma: $(\lambda + vi)$

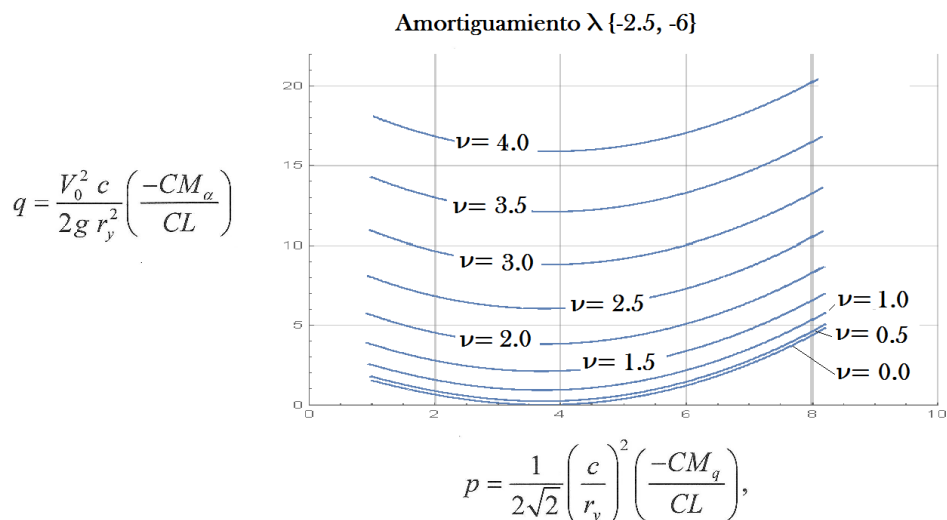


Figura 17.23: Curvas de elevado amortiguamiento para distintas frecuencias, en función de p y de q .

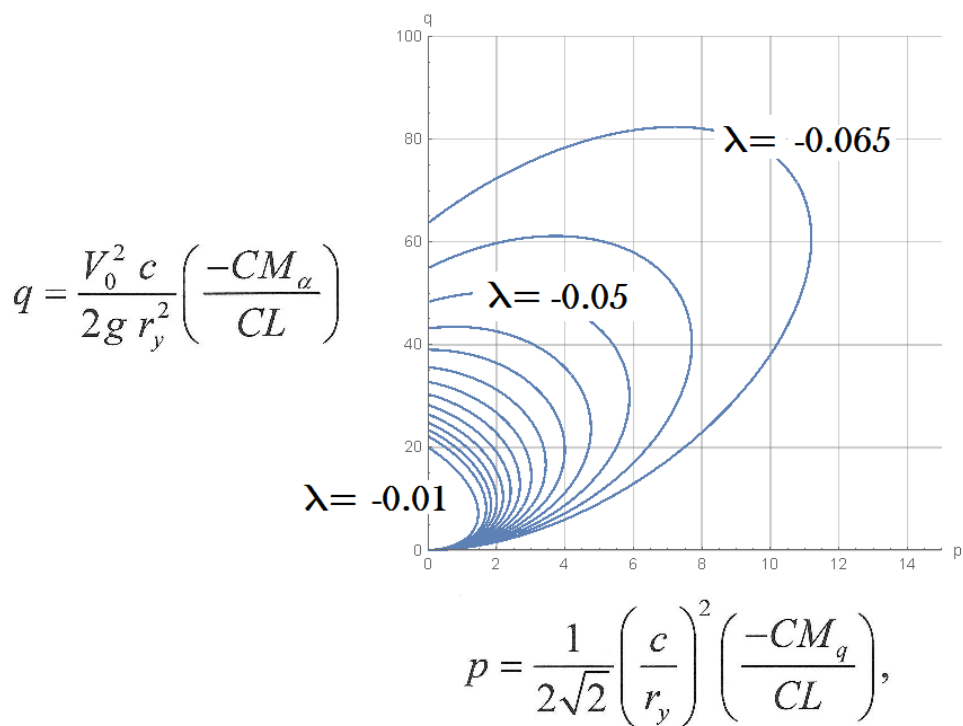


Figura 17.24: Curvas de baja frecuencia para distintos valores (bajos) del amortiguamiento, en función de p y de q .

17.3.6 Zona Límite de Estabilidad.

Las coordenadas en el plano (p, q) del Límite de Estabilidad ($\lambda = 0$) son:

$$p_{\lambda=0} = \frac{(a-b)v^2(v^2-1)}{1+(ab-2)v^2+v^4} \quad q_{\lambda=0} = \frac{v^2(1+(a^2-2)v^2+v^4)}{1+(ab-2)v^2+v^4} \quad [17.58]$$

Cuya representación gráfica puede verse en la Fig. 17.25.

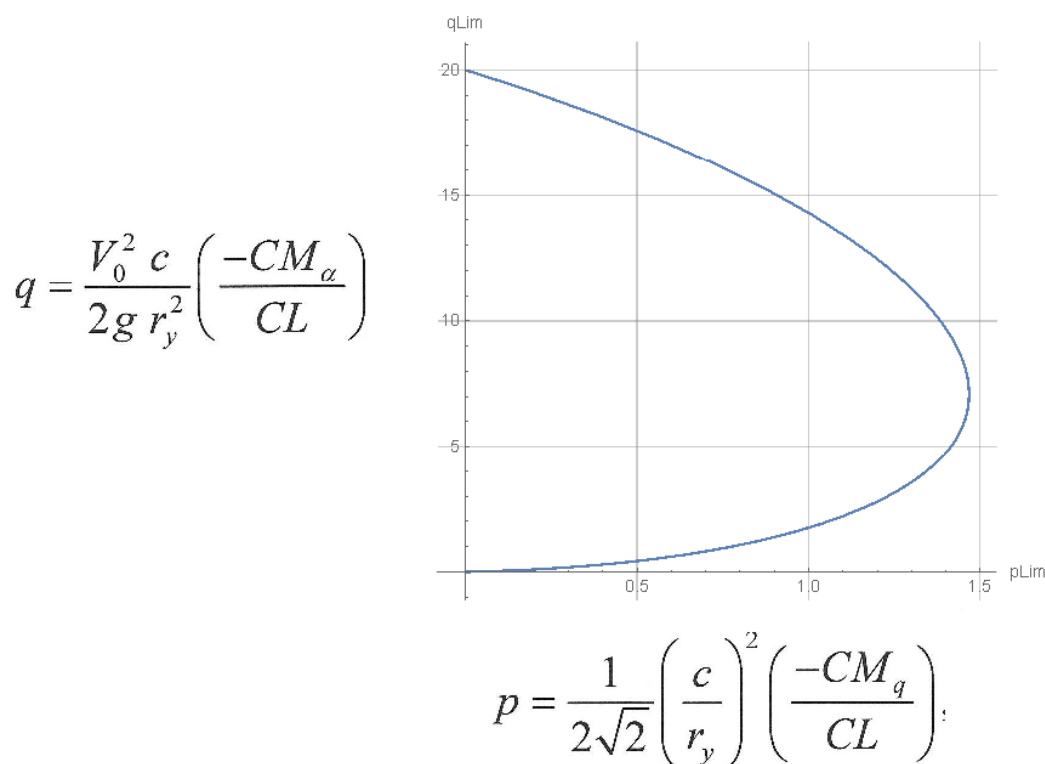


Figura 17.25: Zona de Inestabilidad y Límite de Estabilidad, en función de p y q.

En el interior de la gráfica el avión es inestable.

Los valores numéricos concretos utilizados por VK&T intentan ser los correspondientes a los modelos de aviones de la época, aunque los consideran poco fiables.

17.3.7 Representación gráfica de las raíces de la Ecuación de Estabilidad.

El desarrollo realizado hasta aquí por VK & T puede sintetizarse, con alguna mayor generalidad, mediante la representación gráfica de la parte real e imaginaria de los autovalores de la ecuación del sistema asumiendo los mismos valores que ellos para a y b.

Las cuatro raíces²¹³ de la Ecuación de estabilidad son: $\{z_1, z_2\}$ y $\{z_3, z_4\}$

²¹³ Ver Anexo I.

Comenzamos por las correspondientes a $\{z_1, z_2\}$ para valores de p y q tales como:

$$\left\{ p = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{c}{r_y} \right)^2 \left(\frac{-CM_q}{CL} \right) = 0, \quad 0 \leq q = \frac{V_0^2 c}{2g r_y^2} \left(\frac{-CM_\alpha}{CL} \right) \leq 4 \right\} \quad [17.59]$$

Son los que muestran, separadamente para la parte real y la imaginaria, las gráficas siguientes (Fig. 17.26), que -según puede verse- corresponden a unas raíces de módulo aproximadamente unitario, con parte real negativa, que indica estabilidad.

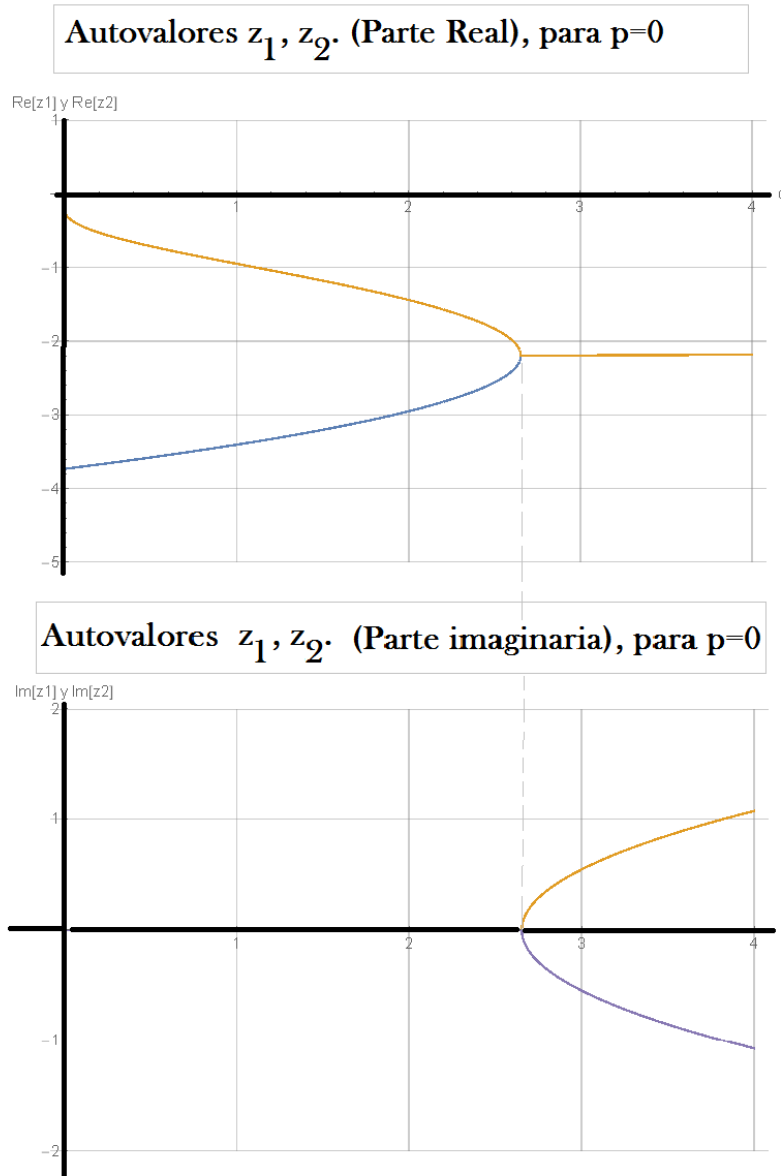


Figura 17.26: Representación gráfica de la parte real y de la parte imaginaria de dos de las raíces (z_1, z_2) de la Ecuación de Estabilidad, para valores de $p=0$ y $\{0 \leq q \leq 4\}$

Lógicamente, la parte imaginaria adopta el mismo valor absoluto, pero con los signos correspondientes a las raíces que son imaginarias conjugadas.

Ampliamos ahora los márgenes de variación de los valores de p y de q (Fig. 17.27) para mostrar que este hecho aumenta proporcionalmente el amortiguamiento.

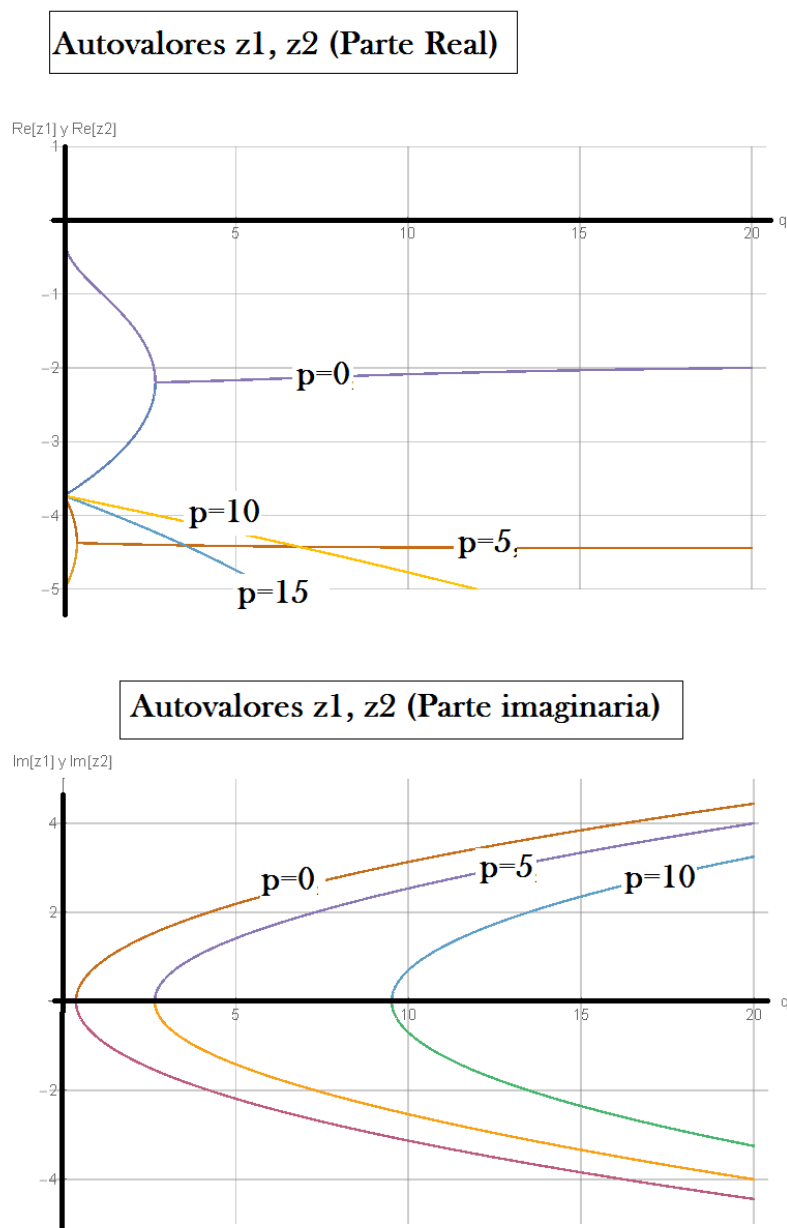


Figura 17.27: Representación gráfica de la parte real y de la parte imaginaria de dos de las raíces (z_1, z_2) de la Ecuación de Estabilidad, para distintos valores de p y $\{0 \leq q \leq 20\}$

Vemos que un aumento del valor de p y de q aumenta el valor absoluto de la parte real, que es siempre negativa, con lo que el movimiento se amortigua más rápidamente. Esto es lógico, pues refleja el efecto de los coeficientes CM_α y CM_q

Ahora representaremos las correspondientes a las otras dos raíces $\{z_3, z_4\}$ inicialmente para los mismos valores de p y q :

$$\left\{ p = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{c}{r_y} \right)^2 \left(\frac{-CM_q}{CL} \right) = 0, \quad 0 \leq q = \frac{V_0^2 c}{2g r_y^2} \left(\frac{-CM_\alpha}{CL} \right) \leq 4 \right\}$$

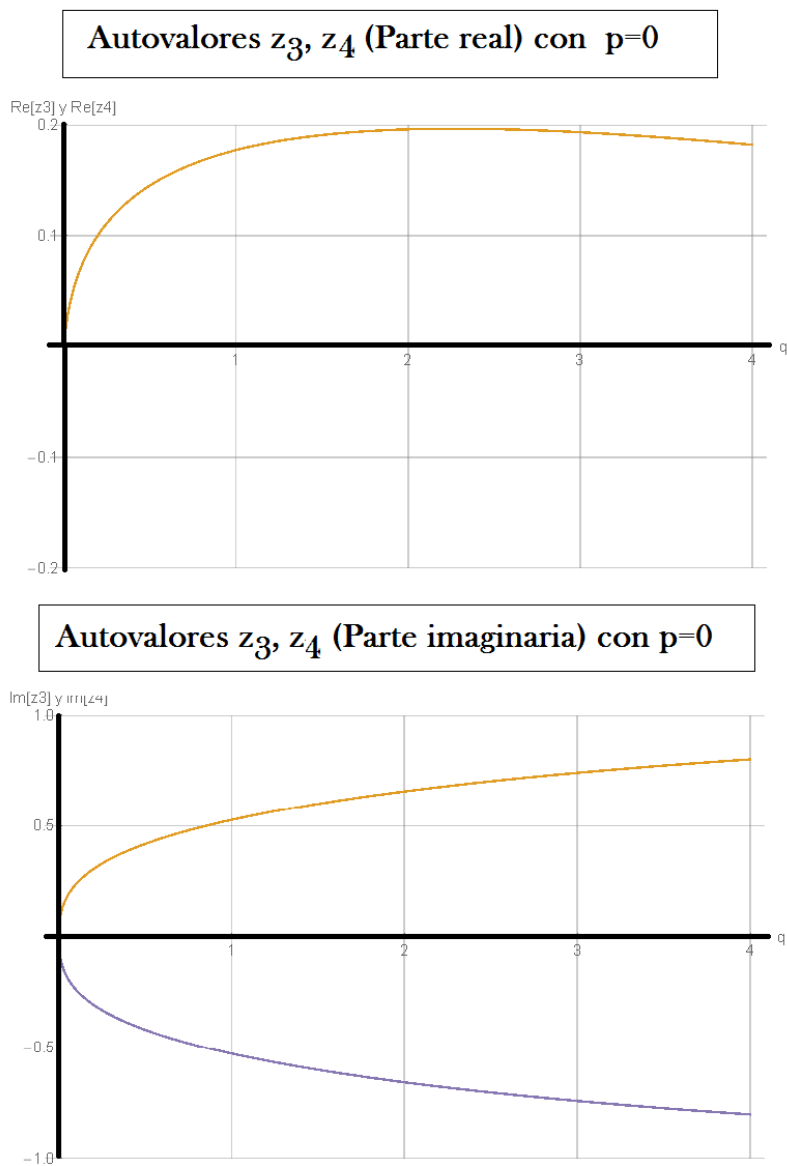


Figura 17.28: Representación gráfica de la parte real y de la parte imaginaria de dos de las raíces (z_3, z_4) de la Ecuación de Estabilidad, para valores de $p=0$ y $\{0 \leq q \leq 4\}$

Puede verse (Fig. 17.28) que para el intervalo $\{p, q\}$ considerado, las raíces $\{z_3, z_4\}$ son complejas conjugadas y causan la inestabilidad del movimiento. Si se amplía el margen de valores de p y de q , podemos ver mejor la tendencia (Fig. 17.29):

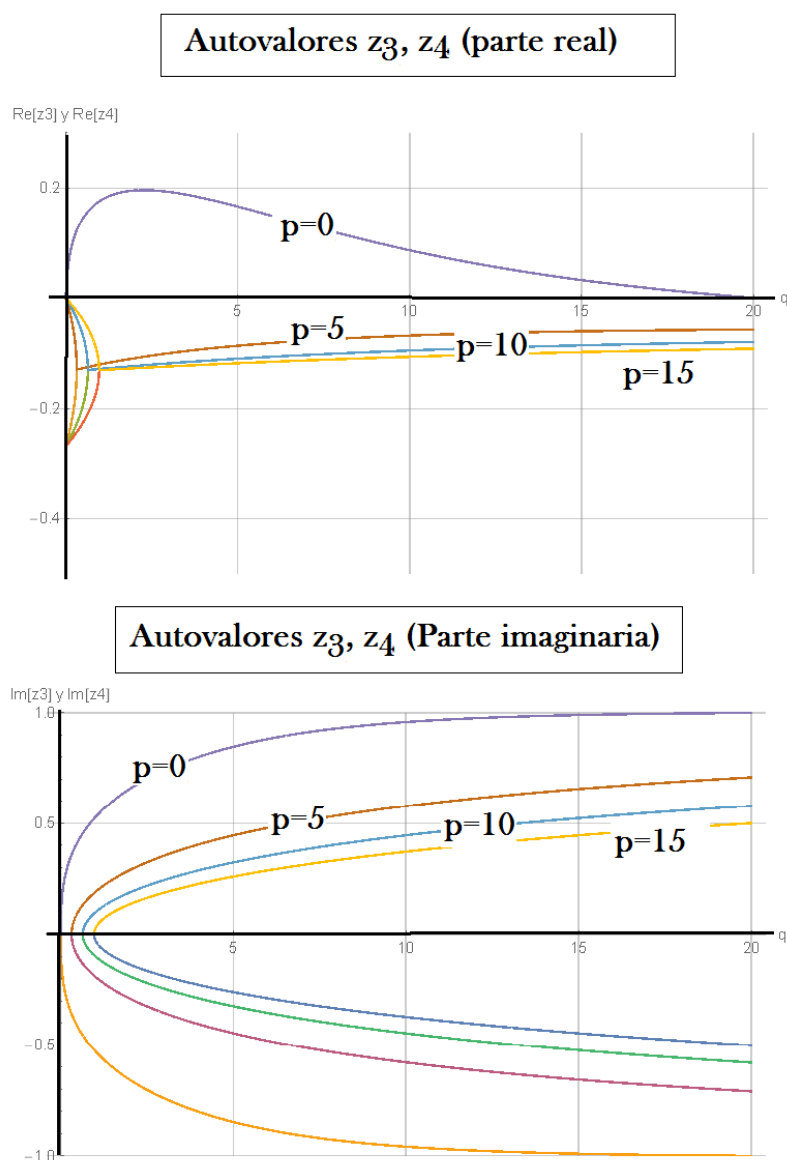


Figura 17.29: Representación gráfica de la parte real y de la parte imaginaria de dos de las raíces (z_3, z_4) de la Ecuación de Estabilidad, para distintos valores de p y $\{0 \leq q \leq 20\}$

Puede verse que a medida que aumenta el valor de q (proporcional a CM_α) la parte real de la raíz que causa la inestabilidad con valores bajos de p , tiende a pasar de positiva a negativa. Asimismo, valores crecientes de p conducen también a la estabilidad. Todo ello de modo coherente con la zona que delimita la inestabilidad, tal como la han establecido VK&T. (Cfr. Fig. 17.25)

El desarrollo de VK&T, ofrecido aquí más detallado que en el trabajo original, tiene el inconveniente de que muestra los gráficos correspondientes a valores particulares de condiciones de vuelo y características aerodinámicas del avión. No obstante, siendo coherentes con la hipótesis de vuelo estacionario en condiciones de mínima resistencia aerodinámica, y asumiendo que podemos servirnos de una forma simple de curva polar

de resistencia aerodinámica tal como: $CD = CD_0 + K CL^2$ siendo CD_0, K constantes, entonces los valores de a y de b pueden considerarse fijos²¹⁴:

$$\begin{aligned} a_{MinDrag} &\approx \frac{CL_\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{K}{CD_0}} \\ b_{MinDrag} &\approx 2\sqrt{2} K CD_0 \end{aligned} \quad [17.60]$$

A la vez, los parámetros p y q podemos presentarlos también, teniendo en cuenta las condiciones de equilibrio, como:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{mc^2}{I_{yy}} \right) \sqrt{\frac{K}{CD_0}} (-CM_q) \\ q &= \frac{V_0^2 mc}{2g I_{yy}} \sqrt{\frac{K}{CD_0}} (-CM_\alpha) \\ \text{con: } \frac{1}{2} \rho S V_0^2 CL &= mg \Rightarrow q = \left(\frac{m}{\rho c S} \right) \left(\frac{mc^2}{I_{yy}} \right) \frac{K}{CD_0} (-CM_\alpha) \end{aligned} \quad [17.61]$$

Obsérvese que p no depende de la altitud, pero q sí, a través de la densidad atmosférica.

VK&T demuestran así que todos los aviones convencionales con estabilizador posterior tenderán a mostrar un comportamiento análogo: dos pares de raíces complejas, conjugadas dos a dos, con valores absolutos relativamente bastante diferentes y tales que, con valores adecuados de p y q (es decir, de CM_α y de CM_q) podrán ser siempre estabilizados longitudinalmente.

17.3.8 Cálculo aproximado de las raíces de la Ecuación de Estabilidad (raíces complejas) realizado por VK&T.

La ecuación característica puede escribirse de la siguiente manera:

$$z^4 + (p+a)z^3 + (q+a p+1)z^2 + (p+q b)z + q = 0 \quad [17.62]$$

Si aceptamos que un par conjugado de raíces es significativamente menor que el otro par, como se ha hecho evidente en los estudios recién descritos, podremos poner:

$$z_{1,2} = n_1 \pm i\omega_1 \quad z_{3,4} = n_2 \pm i\omega_2 \quad \text{con } n_1, \omega_1 \gg n_2, \omega_2 \quad [17.63]$$

Y utilizamos las abreviaturas

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= n_1 \pm i\omega_1 & z_{3,4} &= n_2 \pm i\omega_2 \\ s_{12} &= z_1 + z_2 = 2n_1 & s_{34} &= z_3 + z_4 = 2n_2 \\ p_{12} &= z_1 z_2 = n_1^2 + \omega_1^2 & p_{34} &= z_3 z_4 = n_2^2 + \omega_2^2 \end{aligned} \quad [17.64]$$

²¹⁴ Naturalmente, sin considerar efectos de compresibilidad.

Sabemos que se cumple que:

- (1) La suma de las cuatro raíces es igual al coeficiente de z^3 con el signo cambiado,
- (2) La suma de productos de raíces distintas de dos en dos es igual al coeficiente de z^2 ,
- (3) La suma de los productos de tres raíces distintas es igual al coeficiente de z con el signo cambiado, y
- (4) El producto de las cuatro raíces es igual al término independiente.

Es decir:

$$\begin{aligned}
 [e1] \quad s_{12} + s_{34} & \Rightarrow 2n_1 + 2n_2 = -(a + p) \\
 [e2] \quad p_{34} + s_{12} s_{34} + p_{12} & \Rightarrow n_2^2 + \omega_2^2 + 4n_1 n_2 + n_1^2 + \omega_1^2 = (ap + q + 1) \\
 [e3] \quad s_{12} p_{34} + p_{12} s_{34} & \Rightarrow 2n_1(n_2^2 + \omega_2^2) + 2n_2(n_1^2 + \omega_1^2) = -(p + bq) \\
 [e4] \quad p_{12} p_{34} & \Rightarrow (n_1^2 + \omega_1^2)(n_2^2 + \omega_2^2) = q
 \end{aligned}$$

[17.65]

De las dos primeras ecuaciones, con la condición supuesta sobre el valor relativo de las raíces, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 [e1] \quad s_{12} + s_{34} & \Rightarrow 2 + 2 \frac{n_2}{n_1} = -\frac{(a + p)}{n_1} \\
 [e2] \quad p_{34} + s_{12} s_{34} + p_{12} & \Rightarrow \left(\frac{n_2^2 + \omega_2^2}{n_1^2 + \omega_1^2} \right) + \frac{4n_1 n_2}{n_1^2 + \omega_1^2} + 1 = \frac{(ap + q + 1)}{n_1^2 + \omega_1^2}
 \end{aligned}$$

[17.66]

Si $n_1, \omega_1 \gg n_2, \omega_2$ podemos obtener las siguientes aproximaciones para $n_1 \pm i\omega_1$:

$$\begin{aligned}
 [e1_{simple}] \quad n_1 & \approx \frac{-(a + p)}{2} \\
 [e2_{simple}] \quad \omega_1 & \approx \pm \sqrt{q + 1 - \left(\frac{a - p}{2} \right)^2}
 \end{aligned}$$

[17.67]

Deshaciendo los cambios de variable obtenemos las raíces aproximadas del modo oscilante que las tiene mayores:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{c}{r_y} \right)^2 \left(\frac{-CM_q}{CL} \right) & q &= \frac{V_0^2 c}{2g r_y^2} \left(\frac{-CM_\alpha}{CL} \right) & a &= \frac{CL_\alpha}{\sqrt{2}CL}, & b &= \frac{\sqrt{2}}{EA} \\
 [e1_{simple}] & & n_{1_simple} &\approx -\frac{1}{\sqrt{2}CL} \left(CL_\alpha - \frac{CM_q}{2} \left(\frac{mc^2}{I_{yy}} \right) \right) \\
 [e2_{simple}] & & \omega_{1_simple} &\approx \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{CL_\alpha}{\sqrt{2}CL} + \frac{CM_q}{2\sqrt{2}CL} \left(\frac{mc^2}{I_{yy}} \right) \right)^2 - \frac{cCM_\alpha mV_0^2}{2CLgI_{yy}}}
 \end{aligned}$$

[17.68]

Los valores aproximados del otro par de raíces conjugadas $z_{3,4} = n_2 \pm i\omega_2$ pueden calcularse a partir de los que acabamos de obtener. (Esto tenía sentido entonces desde el punto de vista numérico. Las expresiones simbólicas son complicadas).

17.3.9 Aplicaciones prácticas.

La curva límite entre oscilaciones amortiguadas y no amortiguadas, o sea, entre estabilidad e inestabilidad, viene dada por la curva de amortiguamiento nulo (Parte real de la raíz) $\lambda = 0$ y en los puntos de corte con el eje q implica $p=0$ y proporciona para v los valores de:

$$p_{\lambda=0} = \frac{(a-b)v^2(v^2-1)}{1+(ab-2)v^2+v^4} = 0 \quad \rightarrow \quad v_1 = 0 \quad y \quad de \quad (v^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 1$$

Es decir, para el único valor significativo, que es $v_2 = 1$:

$$q_{\lambda=0} \Big|_{v=1} = \frac{v^2(1+(a^2-2)v^2+v^4)}{1+(ab-2)v^2+v^4} \Big|_{v=1} = \frac{a}{b} = \frac{CL_\alpha}{2CD} \quad [17.69]$$

Es decir:

$$q_{\lambda=0} \Big|_{v=1} = \frac{V_0^2 c}{2g r_y^2} \left(\frac{-CM_\alpha}{CL} \right) = \frac{CL_\alpha}{2CD} \quad [17.70]$$

La condición de estabilidad para este caso, en el que q es nulo y por tanto estamos en el supuesto muy particular de un avión *sin estabilizador de cola* ($CM_q = 0$), es:

$$\frac{cmV_0^2}{2gI_{yy}} \left(\frac{-CM_\alpha}{CL} \right) > \frac{CL_\alpha}{CD} \quad [17.71]$$

VK&T sugieren que esta conclusión coincide sustancialmente con la condición de estabilidad de Lanchester [4], Bryan [1] y Ferber [5]²¹⁵. Que esto es aproximadamente así se deduce de que la condición de estabilidad recién descrita puede escribirse como:

$$\frac{cmV_0^2}{2gI_{yy}} \frac{CD}{CL} |CM_\alpha| > CL_\alpha \quad [17.72]$$

Equivalente para nuestro caso, aceptando las mismas hipótesis que VK&T, con:

$$\frac{cmV_0^2}{2gI_{yy}} (CL_\alpha L) \tan \alpha > CL_\alpha \quad [17.73]$$

Es decir:

$$\frac{V_0^2}{2g} > \frac{r_y^2}{\left(\frac{L}{c}\right) \tan \alpha} \quad [17.74]$$

Esta expresión es muy similar a la que obtienen los autores mencionados más arriba, sin llegar a un acuerdo pleno. Sí, en cambio, en cuanto a las tendencias.

VK&T mostrarán que es posible, hasta cierto punto dimensionar las superficies de un avión para que satisfagan unas condiciones de estabilidad previamente fijadas, ya que en los parámetros p y q intervienen de modo directo los distintos aspectos de la geometría, la masa y la inercia del aeroplano.

Lo muestran aplicando las conclusiones de su trabajo a un modelo de avión denominado “*monoplano plegable de artillería Bleriot*” acerca del cual concluyen que el empenaje de cola no tiene superficie suficiente como para realizar de modo eficaz su función estabilizadora.

16.4 Conclusiones²¹⁶

²¹⁵ Citan también a Knoller; este autor no ha sido estudiado en el presente trabajo

²¹⁶ En la discusión siguiente a la exposición, el Prof. Prandtl, de Göttingen, apuntó lo ya mencionado en nota a pie de página. El Prof. Reissner, de Charlottenburg, sugirió profundizar sobre la influencia de la pendiente de la trayectoria, tal como indicó Bryan en su libro “Stability in Aviation”; también añadió que consideraba injusto que no se hubieran citado algunas fuentes que nutren el trabajo de VK&T: Bryan, De Bothezat, Quittner, y él mismo. El Prof. Quittner, de Berlin, afirmó haber realizado *exactamente el mismo trabajo que VK&T*, publicado cuatro años antes [11], por lo que reclamó la prioridad que le correspondía, incluyendo también algunos de los resultados de Bryan.

El Prof. Von Kármán, de Aachen, agradeció los comentarios y reconoció como lamentable la circunstancia de no haber tenido conocimiento previo del trabajo del Prof. Quittner. Estuvo de acuerdo en que para lo esencial de su trabajo podían hallarse precedentes, aunque pensaba haberlos mejorado; aceptó el reproche de “*ingratitude*” que se le había hecho por no haberlos citado, pero indicó que, aunque los conceptos –según parecía– no fuesen nuevos, la presentación lo era. Los autores no deseaban otra cosa. Si no se aceptaba esto, evidentemente solamente era una repetición de trabajos ajenos.

Von Kármán consideró algo “*subjetivas*” algunas de estas críticas apreciaciones, pero aceptó las objeciones “*objetivas*” de Prandtl y de Reissner. (Resulta significativo que un importante texto de referencia alemán sobre mecánica de vuelo publicado en 1934 (Ref. [8]) se base en el presente trabajo de VK&T para

- (1) El estudio de la estabilidad estática es básicamente convencional -para lo que se acostumbraba en 1913- y asume las hipótesis aerodinámicas habituales, incluyendo explícitamente la densidad del aire, lo que es relevante.
- (2) Se menciona la curva metacéntrica de las líneas de acción de la resultante aerodinámica—según el modelo de Brillouin- para establecer el momento de cabeceo, lo que no es el método habitual en los pioneros.
- (3) Establece las ecuaciones del vuelo en un plano vertical, y las linealiza para obtener la ecuación característica del sistema. Mediante una primera simplificación basada en el orden de magnitud habitual del coeficiente de resistencia aerodinámica (CD) despreciable frente al de la pendiente de la curva de sustentación (CL_α) y otra, más restrictiva, de suponer que el régimen de vuelo es el de mínima resistencia aerodinámica, llega a una Ecuación de Estabilidad o ecuación característica del sistema lineal, cuyo formato adimensional es compacto, y depende solamente de cuatro parámetros:
 - (1) el ángulo de ataque (α),
 - (2) la relación (CL / CD),
 - (3) el coeficiente $V_0^2 (CM_\alpha)$
 - (4) el coeficiente (CM_q)

Los dos primeros definen las condiciones de vuelo y los dos últimos son usados como parámetros para analizar la estabilidad. Esta ecuación es el instrumento fundamental de VK&T para el estudio de la estabilidad longitudinal.

- (4) A partir de esta ecuación analiza algunos casos límite, obteniendo como casos particulares, entre otros de menor interés, el Modo Largo Período, ya conocido por VK&T a través de los trabajos de Lanchester y de Bryan.
- (5) El estudio aquí realizado adapta el trabajo de VK&T a la nomenclatura actual en lo que respecta a la obtención matemática de la ecuación fundamental, y en la aplicación del método de Klein, que se hace de doble manera:
 - Con el método de las envolventes, VK&T localizan zonas de posible existencia de raíces reales y estiman su posible valor numérico. Se confirma la presencia de valores numéricos bastantes desparejos, y se insinúa que, cuando las rectas tangentes dejan de serlo para pasar a ser secantes de las envolventes, las raíces pasan a ser imaginarias, manteniendo una cierta

establecer la Ecuación de Estabilidad Longitudinal (Pág. 207 y ss.), aunque cita secundariamente a Quittner [9]. Reissner [10] estudió fundamentalmente la estabilidad lateral, que no es objeto del presente trabajo.

- continuidad en cuanto al valor de su parte real respecto del que tenían cuando eras reales puras cuando la recta secante se separa poco de la tangente: un par de raíces pequeñas y otro par de raíces más grande.
- Con el método de la Curva Normal se muestra que, para los valores habituales de los parámetros (CM_α, CM_q) la Ecuación de Estabilidad de VK&T tiene siempre raíces imaginarias, con zonas particularmente significativas en cuanto al posible valor numérico absoluto de las soluciones reales (si fuesen posibles: se demuestra que unas serían muy pequeñas frente a las otras). Esta parte no la desarrollan VK&T.
- (6) El estudio numérico de las raíces imaginarias requiere la fijación de alguna de las condiciones de vuelo para poder representar gráficamente los resultados, lo que implica solamente fijar los valores de “a” y de “b”; VK&T establecen los valores de las raíces de la ecuación de estabilidad distinguiendo las de amortiguamiento débil de las que lo tienen mayor, siempre en función de los parámetros (CM_q) y $V_0^2(CM_\alpha)$.
- (7) Aparece nítidamente la zona en la que no es posible la estabilidad, y de ella obtienen VK&T una “*Condición de Estabilidad*” que, comparada con las ya publicadas de Lanchester, Bryan y Ferber, muestra gran similitud, pero resulta matemática y físicamente más significativa
- (8) Debido a que la ecuación de Estabilidad de VK&T es de cuarto grado, las soluciones analíticas son -hoy- cómodamente graficables y permiten verificar numéricamente, de un modo más completo, los resultados obtenidos por VK&T.
- (9) El hecho, comprobado ya en apartados anteriores, de la diferencia significativa en el módulo de unas raíces imaginarias respecto de las otras permite a VK&T estimarlas a partir de los coeficientes del polinomio característico, estableciendo unos valores válidos solamente como primera aproximación.
- (10) Mencionan que el método que han descrito para el estudio de la estabilidad es apto, hasta cierto punto, para ser aplicado al diseño de aviones, si se fijan los requisitos de estabilidad que se buscan y se puede actuar sobre la geometría y la distribución de la masa. No es un procedimiento cómodo.
- (11) Citan a Rünge, Knoller, Bryan, Painlevé, Ferber, Reissner, Quitter, pero sin mencionar referencias concretas.

17.5 Anexo

La ecuación de Estabilidad de VK&T es de cuarto grado y admite soluciones analíticas en función de los parámetros (p, q) . Estas soluciones son:

$$z_{1,2,3,4} = x_0 \pm \sqrt{\left(\frac{2x_2}{3} + \frac{(\sqrt{x_1} + x_5)^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}} + \frac{7 \cdot 2^{1/3}}{3(\sqrt{x_1} + x_5)^{1/3}} + \frac{x_8^2}{4} \right) \pm \dots}$$

$$\dots \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\dots - \frac{4x_2}{3} - \frac{7 \cdot 2^{1/3}}{3(\sqrt{x_1} + x_5)^{1/3}} - \frac{(x_5 + \sqrt{x_5^2 - 4x_7^3})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}} + \frac{x_8^2}{4} - \dots \right)}$$

$$\dots \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\dots - \frac{-4x_2x_8 - x_8^3 - 8x_9}{4 \left(\frac{2x_2}{3} + \frac{(\sqrt{x_1} + x_5)^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}} + \frac{7 \cdot 2^{1/3}}{3(\sqrt{x_1} + x_5)^{1/3}} + \frac{x_8^2}{4} \right)} \right)}$$

(12) Con los siguientes valores para cada x_i :

$$x_0 = -(a + p)/2, \quad x_8 = -2x_0$$

$$x_9 = (p + bq)$$

$$x_2 = -(1 + ap + q), \quad x_4 = -\frac{1}{3}(x_2)$$

$$x_6 = -(x_8)^3 + 4(x_8)(3x_4) - 8(x_9)$$

$$x_5 = 27(x_8)^2 q - 72q(3x_4) + 2(3x_4)^3 - 9(x_8)(3x_4)(x_9) + 27(x_9)^2$$

$$x_1 = -4(12q + (-x_2)^2 - 3(x_8)(x_9))^3 + x_5^2$$

$$x_3 = 2^{1/3} (12q + (3x_4)^2 - 3(x_8)(x_9))$$

$$x_7 = 12q + (3x_4)^2 - 3(x_8)x_9$$

Estas son precisamente las raíces²¹⁷ representadas para valores particulares de a y de b , en las figuras 17.26, 17.27, 17.28 y 17.9.

Como es obvio, las cuatro raíces serán todas ellas funciones no sencillas de los datos que expresan las condiciones de vuelo y la masa e inercia del avión, y de los diferentes coeficientes aerodinámicos - es decir, de la geometría - del aeroplano.

²¹⁷ Obviamente, no se trata de expresiones cómodas, pero a Dios gracias (y a Stephen Wolfram), no necesitamos ser nosotros quienes las manipulamos.

En estas condiciones parece que puede tener sentido plantearse la posibilidad de acometer el estudio (de índole académica y con el apoyo imprescindible de un adecuado robot matemático) de un análisis paramétrico que, a partir de un número lo más reducido posible de los “*datos de entrada*” propios de un aeroplano, obtuviera los mapas de las raíces, y así delimitar las zonas de estabilidad en función de las condiciones de vuelo: velocidad y altitud. Lógicamente, en el caso que actualmente contemplamos, con las limitaciones propias de las hipótesis que VK&T han asumido, y que han quedado reflejadas a lo largo del presente capítulo.

Bibliografía.

- [1] Bryan, G. H. “Stability in Aviation”. *“An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motions of Airplanes”*. MacMillan And Co., Ltd. St. Martin’s Street, London, (1911).
- [2] Herrera Linares, E. “Conferencias de AEROTECNIA”. Madrid. (1928).
- [3] Klein, F. *“Elementar Mathematik vom höheren Standpunkt aus”* (1908). Hemos usado la traducción: *“Matemática Elemental desde un punto de vista superior”*. Aritmética y Álgebra. Segunda edición. Editorial Ibero-Americana. Buenos Aires; (1948).
- [4] Lanchester, F. W. AERODONETICS, constituting the second volume of a complete work on Aerial flight. Archibald Constable & CO. LTD. Orange Street Leicester Square. London (1908).
- [5] Ferber, F. “L’AVIATION, Ses debuts-son développement”. Berger-Levrault & Cie. Éditeurs. Paris/Nancy. (1909).
- [6] Bronstein, I. & Semendiaev, K. “Manual de Matemáticas para Ingenieros y estudiantes”. Ed. MIR. Moscú. (1977).
- [7] Etkin, B. OB_11889_11901] “Dynamics of Flight”. McGraw-Hill. Ediciones de 1959, 1974, 1989. (Estos textos, clásicos en mecánica de vuelo, son sólo un ejemplo entre los muchos posibles...)
- [8] Hopf, L. “AERODYNAMIK. (I Band) Mechanik des Flugzeugs”; Verlag Von Julius Springer. Berlin. (1934).
- [9] Quittner, V., “Untersuchung über die Stabilität der Flugzeuge”. Jb. Wiss. Ges. Luff. Bd. 3 (1914/15) S. 144. (Citado en [8]). (1910).

- [10] Reissner, H., “Die Seitensteuerung der Flumachinen”. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 1. S.101 u 117. (Citado en [8]). (1910)
- [11] Quittner, V., “*Investigation sur la stabilité des Avions*”; La Technique moderne; Revue Universelle illustrée des Sciences Appliquées à l'industrie et à l'agriculture; Paris. Dec. 1910, y Feb. 1911. (Nota: Este documento de Quittner contiene un desarrollo prácticamente idéntico, aunque menos claro, al desarrollado por VK&T. (Fue inicialmente ofrecido para publicación al “Journal of the Association of German Engineers”, que declinó la oferta “por falta de espacio disponible”). La queja de Quittner, mencionada en la nota 15 está justificada, a nuestro entender.
- [12] Garriga-Xové, X. “Enciclopedia de Aviación y Astronáutica”; Vol. 5. Barcelona. (1984).
- [13] Stein, E., “An Appreciation of Erich Trefftz”; Computer Assisted mechanics and Engineering Sciences; 4, 301-304. (1997).

Capítulo 18

Sinopsis de aportaciones.

Los siguientes apartados recogen las principales aportaciones de los pioneros de la mecánica de vuelo, en las cuestiones relacionadas con la estabilidad de los aparatos voladores o con las características aerodinámicas relacionadas con aquellas.

G. Cayley (1773-1857).

1. Primera descripción correcta - verbal y gráfica- de las condiciones de equilibrio de fuerzas²¹⁸ necesario para el vuelo artificial mediante superficies sustentadoras (1799).
2. Aceptación de que la fuerza aerodinámica generada por una superficie con ángulo de ataque α es proporcional al **sin α** ; esto supone el arrumbamiento del modelo Newtoniano.
3. El modelo físico de fuerzas y momentos es básico y el mínimo necesario; los razonamientos son argumentados verbalmente, pero son poco aptos para investigar con rigor matemático las trayectorias o la estabilidad.

²¹⁸ Esta idea, aparentemente demasiado trivial para ser mencionada aquí, es el punto de partida del análisis físico-matemático del vuelo artificial, y prácticamente de todas las aportaciones de los pioneros aquí estudiadas. La nitidez con la que Cayley la estableció produjo el efecto de generar una convergencia racional fructífera en las mentes de los pioneros: remarcaba un concepto esencial poco e indicaba una orientación acerca de los temas en los que convenía centrar la investigación.

4. A efectos de sustentación, piensa que la característica geométrica fundamental de un ala es la superficie. No evalúa el efecto del alargamiento alar.
5. No confía en la hélice como medio de tracción tangencial a la trayectoria; prefiere alas batientes, y preconiza las hélices sólo para el vuelo vertical.
6. Detecta la importancia de la ubicación del centro de presión respecto del *CDG* para el equilibrio angular de cabeceo de un aeroplano.
7. Explica la causa de la eficacia de un dispositivo tipo empenaje trasero y describe correcta, aunque sólo cualitativamente, su función. Desde el punto de vista del estudio de la estabilidad estática longitudinal esto es una aportación importante.
8. Sus cuadernos de notas contienen bosquejos, en general de no muy cuidada factura²¹⁹, con escasos gráficos o tablas de datos empíricos y casi ninguna fórmula matemática.
9. Se inspira en las aves, con una cierta intuición aerodinámica lograda a partir de sus observaciones, lecturas, y datos obtenidos de sus experimentos, con instrumentos diseñados y contruidos por él.
10. Diseña y construye modelos de aeroplanos con una configuración “moderna” apta para el vuelo de planeo equilibrado y estable. De algunos describe con detalle la geometría, masa y posición del centro de gravedad. También los probó exhaustivamente y midió sus actuaciones: velocidades y ángulos de trayectoria; esto permite “reproducir” sus experiencias y captar cómo las interpretaba. Es la primera vez, según pensamos, que se mide y analiza científicamente el comportamiento empírico de un aparato volador artificial (1804).
11. Cayley tenía clara conciencia de moverse en terreno inexplorado. Es citado²²⁰ por: A. Pénaud, O. Lilienthal, P. Painlevé y R. Soreau.

A. Pénaud (1850-1880).

1. Una aportación importante y definitiva es la incorporación de una pequeña superficie horizontal detrás del ala principal, con su plano sensiblemente paralelo

²¹⁹ Cosa lógica, pues esas anotaciones no parecen pensadas para ser publicadas.

²²⁰ Mencionamos aquí solamente las *citas mutuas* entre los pioneros estudiados en el presente trabajo. Cayley es referencia obligada de cualquier investigación histórica sobre el nacimiento de la aeronáutica.

a la velocidad incidente, para equilibrar un aeroplano respecto del ángulo de ataque. Pénaud identifica y trata esta dificultad de modo directo y específico. Una genuina justificación físico-matemática no puede ofrecerla todavía debido a la inmadurez de la ciencia aerodinámica del momento. No obstante, expone un argumento-demostración, mezcla de geometría y aerodinámica rudimentaria, interpretable en un sentido hoy admisible como correcto, aunque incompleto.

2. La incorporación de la cola es importante para resolver el problema de la estabilidad longitudinal frente a las diversas perturbaciones posibles. Pénaud no analiza los márgenes de validez, ya que no dispone de la específica base aerodinámica que le permitiría intentarlo. Pénaud conocía algún trabajo de Cayley, aunque no se inspiró en él para introducir el concepto de estabilizador horizontal.
3. Estableció también algunos “*teoremas*” que son la primera aportación matemáticamente consistente a la dinámica del vuelo estacionario en un plano vertical. Estos “*teoremas*” constituyen el embrión de teorías más desarrolladas, propuestas posteriormente por pioneros principalmente franceses: Painlevé, Ferber, Soreau, De Bothezat y Duchêne.
4. No tiene en cuenta que la cola recibe el flujo desviado por la sustentación del ala delantera, ni tampoco el retardo en esa desviación en la dinámica no estacionaria.
5. Pénaud cita a G. Cayley. Pénaud es citado por: W. & O. Wright, P. Painlevé, F. Ferber, R. Soreau, F. W. Lanchester.

O. Lilienthal. (1848-1896).

1. En el texto analizado Lilienthal se ocupó fundamentalmente de las fuerzas aerodinámicas, y apenas nada de la cuestión correlativa de su línea de acción, y de sus posibles variaciones con las condiciones de vuelo.
2. La estabilidad estática intrínseca de sus planeadores no parece haber preocupado a Lilienthal, que lograba controlarlos satisfactoriamente²²¹, mediante un (limitado) desplazamiento del cuerpo del piloto que modificaba la posición del *CDG* del aeroplano.
3. La fuerza aerodinámica aparece en sus gráficos centrada en la mitad de la cuerda alar, sin comentarios particulares. Su aportación científica fundamental y directa estriba en haber tabulado, para distintos tipos de alas, la fuerza aerodinámica

²²¹ De un modo parecido, los Wright tendrán que familiarizarse con el control activo de un avión -el *Flyer*- que era inestable longitudinalmente. Para pilotarlo se necesitaba haber adquirido mucha destreza *volándolo*.

resultante, y sus componentes según la sustentación y la resistencia. Y esto de un modo claro, práctico y bien adaptado a su aplicación directa. Resultó útil a muchos pioneros.

4. Su aportación indirecta a la investigación del vuelo artificial, por sus publicaciones, y por la notoriedad que alcanzaron sus vuelos (y su trágica muerte), ha sido muy importante.
5. Lilienthal cita G. Cayley. Lilienthal es citado por: W. & O. Wright, N. E. Zhukowsky, P. Painlevé, F. Ferber, R. Soreau, F. W. Lanchester.

N. E. Zhukowsky. (1847-1921).

1. Realizó el primer estudio matemático del vuelo de planeo de las aves en un plano vertical mediante la modelización matemática con ecuaciones diferenciales no estacionarias (1891); lo hace suponiendo que la estabilidad está asegurada²²² y que el ángulo de ataque permanece constante. Por esta razón, y quizás también por la dificultad de modelizar matemáticamente el momento de cabeceo, solamente utilizará las ecuaciones de las fuerzas.
 - a. Obtiene las conocidas trayectorias que, años después, Lanchester denominará *Fugoides*. La descripción matemática de las trayectorias Fugoides de Zhukowsky es más completa que la de Lanchester.
2. El hecho de que algunas de las trayectorias obtenidas por Zhukowsky muestren puntos de retroceso no le preocupa, pues no lo relaciona con eventuales pérdidas de estabilidad (como hará Lanchester), ya que comprende que las ecuaciones de las que se ha servido no pueden proporcionar información sobre la dinámica rotacional del planeador, al que supone estable.
3. En 1906 llegará a establecer, en parte de modo implícito, y solamente con las ecuaciones de las fuerzas, que un planeador estable en cabeceo, desciende con un modo oscilatorio cuya expresión matemática es función de la pendiente, dando lugar a la expresión simplificada actual del modo Fugoides, del que fija las componentes real e imaginaria, mostrando la influencia de la velocidad en la frecuencia de oscilación, y la de la resistencia aerodinámica en el amortiguamiento. Detecta también que, debido a la presencia de este amortiguamiento, el movimiento resulta estable en velocidad.

²²² Zhukowsky argumenta sencillamente que la observación muestra que las aves lo logran, luego es posible.

4. En 1913, análogamente a Painlevé (1908), mostrará también que la estabilidad en velocidad del descenso planeado y con pendiente fija, depende del signo de la derivada de la eficiencia aerodinámica respecto del ángulo de ataque. Esto establecía una separación entre dos regímenes diferentes de vuelo, ambos posibles. Dado que la trayectoria de aproximación es básicamente del tipo descrito, el “teorema” parecía merecer la atención. La realidad ha mostrado que la demostración asume hipótesis excesivas.
5. Realiza también un estudio bastante detallado del modo Corto Período (que todavía no ha recibido este nombre), y establece de modo matemáticamente coherente y físicamente bien fundado una condición de estabilidad semejante a las obtenidas por Lanchester, Ferber, Soreau y Bryan.
6. Cita a O. Lilienthal, Soreau, Duchemin y Froude. Zhukowsky es citado por los Wright.

A. F. Zahm. (1862-1954).

1. Describió someramente configuraciones a las que resulta posible atribuir un vuelo longitudinalmente estable, mediante el “*diedro longitudinal*”, es decir, con una cola con incidencia geométrica negativa respecto del ala.
2. Los gráficos de Zahm no suponen dos superficies separadas, sino una sola con un flap o timón, y la asignación de líneas de acción de sustentación que efectúa no necesariamente garantiza la posibilidad de anular el momento de cabeceo. No obstante, queda abierta esa posibilidad, según la posición del *CDG*.

W. Wright (1867-1912) & O. Wright (1871-1948).

1. Algunos conceptos fundamentales a los que llegaron, relacionados con nuestro tema, son:
 - a. Es posible lograr el equilibrio longitudinal mediante una pequeña superficie horizontal que permite modificar la posición del centro de presión respecto del *CDG*, y que este es un sistema mejor que el de Lilienthal, que consistía en mover el *CDG*.
 - b. Los datos aerodinámicos sobre perfiles alares de Lilienthal necesitaban ser corregidos.

- c. Al estudiar los perfiles con curvatura, descubrieron que para ángulos de ataque pequeños el centro de presión se comportaba al revés de lo que sucedía con alas planas: se retrasaba cuando la incidencia decrecía.
2. No consideraron que la inestabilidad longitudinal debiera tomarse como un inconveniente que implicaba la imposibilidad de volar, sino que *simplemente* exigía mantener una elevada concentración del piloto.
3. No llegaron a establecer con claridad las ecuaciones del descenso planeado y tampoco pudieron apreciar la importancia del problema que les generaba la elección de un perfil con elevada curvatura, con su inherente momento de cabeceo negativo -respecto del borde de ataque- independiente de la incidencia. (Criterio de signos actual).
4. Tampoco tenían modo de estimar la posición del centro de presión de su avión *completo*, y por esta razón, tampoco detectaron la importancia de su relación con la posición del *CDG*. Se puede afirmar que sólo la baja carga alar de su avión, las bajas velocidades de vuelo, la sólida construcción y una intensa y cuidadosa práctica, hicieron posible el éxito de su empresa.
5. Como se ha visto, finalmente situaron el estabilizador detrás de su avión. Tardaron en comprender que podían lograr un avión más fácil de volar si lo convertían en inherentemente estable.

H. G. Bryan (1864-1924) & W. E. Williams. (1881-1962).

1. Los autores muestran que un aspecto importante de la naturaleza matemática de las pequeñas oscilaciones de un planeador en vuelo 2D rectilíneo y uniforme en un plano vertical $\{X, Z\}$ viene determinado por las soluciones de una ecuación algebraica de cuarto grado (Ecuación Característica), y las condiciones de estabilidad pueden ser analizadas mediante el criterio de Routh. Esta afirmación es la primera vez que se hace aplicada al ámbito aeronáutico, y ha permanecido de modo definitivo.

2. Los coeficientes de la mencionada ecuación involucran parámetros cuya naturaleza matemática se corresponde con las primeras derivadas de las fuerzas $\{X, Z\}$ y del momento $\{M\}$ aerodinámico, con respecto a los componentes lineales $\{u, w\}$ y rotatorios $\{q\}$ de las velocidades, evaluadas en las condiciones del vuelo en equilibrio. Es una hipótesis asumida por los estudios posteriores.
3. Estas cantidades son nueve: $\{X_u, Z_u, M_u, X_w, Z_w, M_w, X_q, Z_q, M_q\}$, actualmente denominadas Derivadas Aerodinámicas dimensionales. Estas Derivadas Aerodinámicas pueden ser expresadas (para cada uno de los planos sustentadores) en términos de $df_L(\alpha)/d\alpha$ y de $d\phi_j(\alpha)/d\alpha$, en las que $f_L(\alpha)$ y $\phi_j(\alpha)$ son funciones que determinan la fuerza aerodinámica, y la posición del centro de presión cuando la dirección del movimiento relativo del aire forma un ángulo α con el plano. Estas funciones han sido tabuladas por algunos investigadores, mediante experimentos, para diversos tipos de superficies.
4. B&W demuestran que *la estabilidad longitudinal de los planeadores admite ser investigada matemáticamente*, y consideran de la mayor importancia que los métodos por ellos presentados sean aplicados de modo práctico a cualquier máquina aérea antes de intentar el vuelo. Es una sugerencia plausible difícil de realizar, debido a la relativa complejidad algebraica, y más profundamente, a la incertidumbre en la que se mueven en esa época los diversos parámetros aeronáuticos y los conceptos aerodinámicos correspondientes. (En otras palabras: un diseñador podría no tener muy claro qué valor numérico debería asignar a algunos de los coeficientes a los que se ha asignado un *símbolo* en las ecuaciones de B&W).
5. La aplicación del Criterio de Routh a los coeficientes de la Ecuación Característica conduce a expresar la condición de estabilidad en la forma matemática de $V^2 > k a$, (siendo V la velocidad, “ a ” un valor constante que depende de las dimensiones lineales del planeador, y “ k ” otra constante que depende del alargamiento alar, del ángulo de planeo y de la ley de resistencia aerodinámica).
6. Es una conclusión correcta, aunque debe añadirse que NO es el único modo de expresar las condiciones de estabilidad, ni generalmente el más práctico, y por esta razón no ha sido finalmente adoptado para calificar la estabilidad. (Se prefiere normalmente evitar la presencia explícita de la velocidad en la

condición de estabilidad ya que siempre es posible obviarla mediante la ecuación de la sustentación en equilibrio).

7. Aporta indicaciones correctas respecto a la influencia que la inercia y la inclinación de un plano respecto del otro ejercen sobre la estabilidad.
8. Dada la situación dispersa e incierta que ofrecía el panorama de la ciencia aerodinámica, la elección del modelo de fuerzas (de Langley) y del centro de presión (de Jöessel), es razonable. Por lo demás, el trabajo de Bryan & Williams mantiene un grado de abstracción formal matemática elevado, y solamente particulariza lo mínimo necesario para resolver algunos casos concretos, manteniendo todavía componentes ideales.
9. Puede ser considerado históricamente como el punto de partida de la investigación científica de la estabilidad del vuelo; es original por el tema que trata, certero en la elección de sistemas de referencia y principios físicos que utiliza, y riguroso en los procedimientos matemáticos que aplica. Al aceptar, como era habitual en su época, un valor constante y único para la “*Constante de Resistencia Específica del aire (K)*” para cualquier superficie sustentadora con independencia de su forma, introducen una ambigüedad que propicia que las expresiones desarrolladas por B&W resulten de escasa aplicabilidad.
 - a. Esto es de lamentar ya que B&W deseaban que su aportación al estudio de la estabilidad tuviera una inmediata utilidad práctica para los diseñadores de aeroplanos. Este inconveniente podría haberse atenuado distinguiendo diferentes *constantes* de resistencia aerodinámica: por ejemplo: K_1 para una superficie, y K_2 para otra... etc. O, equivalentemente, haciendo lo mismo con la función $f_{L1}(\alpha)$ para una superficie, distinguiéndola de $f_{L2}(\alpha)$ para otra diferente. No obstante los correspondientes conceptos aerodinámicos estaban todavía inmaduros, a la vez que su introducción complicaría algebraicamente los desarrollos, ya de por sí incómodos.
10. La difusión de la publicación de B&W no parece haber ido más allá de círculos académicos muy reducidos. El eco fue escaso o nulo entre los diseñadores de aviones de la época.
11. Bryan & Williams son citados por: F. Ferber, R. Soreau, P. Painlevé.

F. Ferber. (1862-1909).

1. El procedimiento utilizado por Ferber (1909) supone que un aeroplano puede ser modelizado correcta y equivalentemente por un conjunto de tres superficies ficticias mutuamente perpendiculares, generadas por las proyecciones de las superficies horizontales, frontales y verticales, con correcciones determinadas experimentalmente.
2. Este esquema teórico, aunque podría ser válido para fuerzas y momentos estáticos eligiendo adecuadamente las superficies y su posición respecto del centro de masas, deja de ser válido si se tienen en cuenta las rotaciones, y esto limita seriamente la validez del desarrollo de Ferber. Esta crítica fue ya expresada por Bryan (1911). Complementariamente, implica también que no logra una ecuación del momento de cabeceo que permita la controlabilidad del ángulo de ataque.
3. Ferber es el primero en intentar la aplicación a un aeroplano de las ecuaciones generales de la dinámica de un sólido rígido en las tres dimensiones espaciales. Es también el primero en obtener, como consecuencia de la linealización de las ecuaciones, dos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales independientes.
4. El modo de abordar el problema, inspirado en Bryan & Williams (1904), es más general que el de estos, ya que trabaja en 3D. Al elegir los ángulos de Euler como variables sobre las que edificar la estructura formal matemática, se complican las expresiones, y disminuye la facilidad de mantener una visión intuitiva del problema.
5. Ferber estudia las trayectorias posibles y menciona las oscilaciones características del avión, sin cualificar específica y directamente ese comportamiento. (Ferber construyó algunos (pocos) aeroplanos, y llegó a realizar vuelos planeados de muy corta duración: detectó oscilaciones en sus trayectorias reales, no en las ecuaciones diferenciales).
6. A partir del sistema completo de ecuaciones, estudia posibles casos de movimiento estacionario en un plano vertical, y transcribe un número relativamente alto de “consecuencias” a las que atribuye valor general y tiende a mostrarse categórico. Muchas de ellas, debido a las hipótesis y simplificaciones asumidas (algunas implícitas), no han sido significativas posteriormente.
7. Establece una condición de estabilidad que coincide sustancialmente con la de Soreau.

8. Ferber cita A. Pénaud, R. Soreau, W & O Wright, Bryan & Williams. Es citado por P. Painlevé, G. De Bothezat, G. H. Bryan, R. Soreau.

F. W. Lanchester. (1868-1946).

1. Lanchester (1908) estudia la estabilidad a partir de su teoría de las trayectorias Fugoides, para cuyo establecimiento no ha utilizado la ecuación del momento de cabeceo. Lanchester en realidad solamente describe el aspecto aproximado que podrían ofrecer las trayectorias conservativas del centro de gravedad de un planeador que tuviese la característica de ser estable, pues trabaja solamente con las dos ecuaciones de las fuerzas en un plano vertical y supone nula la resistencia²²³ aerodinámica. Sus trayectorias coinciden con las obtenidas por Zhukowsky (1891).
2. Lanchester considera que solamente un caso presenta un problema respecto de la estabilidad. Se trata del que tiene puntos de retroceso, en los que el planeador debería efectuar un giro de 180° con velocidad angular infinita. Precisamente ese punto de radio de curvatura nulo, supondría para Lanchester la aparición de inestabilidad. (Esta condición imposible es introducida artificialmente en el problema al suponer nulo el momento de inercia, y es la misma condición que asumió Zhukowsky 17 años antes en su estudio sobre el planeo de las aves).
3. La interpretación problemática descansa en el supuesto de que el planeador - en la cúspide de su trayectoria semicircular- comenzará a volar en sentido contrario, y esto debe interpretarse como: “*denotando que se han excedido los límites de estabilidad*”. A través de esta peculiaridad define la inestabilidad como asimilada a movimiento de retroceso del planeador.
4. También como consecuencia de la teoría sobre las Fugoides, Lanchester afirma que a mayor velocidad de vuelo, mayor estabilidad. Esta afirmación proviene del estudio sobre la influencia de las ráfagas tangenciales a la trayectoria: el efecto aerodinámico de una ráfaga horizontal equivale a un incremento de velocidad, con lo que se produce una modificación de los parámetros de la trayectoria Fugoide que podría, eventualmente aproximarse a la que Lanchester considera peligrosa. Este riesgo es menor cuanto mayor sea un cierto parámetro que podría llegar a anular lo que Lanchester denomina “*Constante de Estabilidad*”. En realidad esto describe una peculiaridad circunstancial²²⁴, propia del incompleto sistema de ecuaciones elegido por Lanchester, y no es generalizable.

²²³ O bien supone siempre nula la diferencia entre la tracción y la resistencia aerodinámica.

²²⁴ Se corresponde, además, con singularidades en la ecuación diferencial de las trayectorias Fugoides. (Vid. Von Kármán & Biot; “Mathematical Methods in Engineering”, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, Inc. New York and London. (1940).

5. Lanchester alude correctamente a diversos factores de amortiguamiento de la dinámica oscilatoria: la inercia y la resistencia aerodinámica y cuyo efecto global se resume en reducir la peligrosidad que atribuye a las trayectorias ondulantes; por razones que no dimanaban de la ecuación del movimiento Fugoide, estas conclusiones son correctas. (Sus argumentos, debido a que no siente la necesidad de plasmarlos detalladamente en formato matemático sino que se sirve de un método heurístico, no son fáciles de seguir).
6. Finalmente Lanchester retoma el estudio de la estabilidad de manera menos vinculada a su teoría Fugoide, y obtiene la Ecuación de Estabilidad que permitiría predecir si un avión es estable partiendo de unos pocos parámetros geométricos y másicos. Esta ecuación se corresponde aproximadamente con la que se puede fijar a partir de la condición del discriminante de Routh en el estudio de la ecuación característica completa, y su obtención por Lanchester es un notable ejercicio heurístico, ya que la establece utilizando simbología matemática, pero no argumentando de modo propiamente matemático.
7. Recoge, en su formulación, conceptos aerodinámicos particulares, propios del esquema formal establecido por Lanchester en su libro “Aerodynamics” (1907). Los contenidos de este libro, en la medida en que era posible asimilarlos, en el momento de la publicación de su libro “Aerodnetics” (1908), no lo habían sido todavía, con independencia de las incertidumbres que parecía contener. No consta su utilidad práctica. Lanchester aplica la Ecuación de la Estabilidad a algunos casos particulares de aves y modelos reducidos de planeadores. Uno de ellos es un planeador de Otto Lilienthal, al que considera inestable²²⁵.
8. Lanchester cita a: A. Pénaud, O. Lilienthal. Es citado por: G. H. Bryan, T. V. Kármán & E. Trefftz, G. De Bothezat,

R. Soreau. (1865-1935).

1. A partir de las ecuaciones diferenciales no estacionarias con 3 grados de libertad desarrolla una teoría del vuelo en un plano vertical, incluyendo las ecuaciones de fuerzas y del momento, y expresa adecuadamente los factores físicos involucrados; deduce también algunos “teoremas” básicos de la mecánica de vuelo estacionaria, similares a los obtenidos por Pénaud y Ferber; a esto dedica una extensión importante de su libro.

²²⁵ Lilienthal construyó 18 modelos diferentes de planeadores. El modelo en el que sufrió el accidente mortal no es el que analiza Lanchester en el libro Aerodnetics.

2. Describe bien el modo de actuación del empenaje horizontal como control del momento de cabeceo y elemento de amortiguamiento, y -supuesta la estabilidad- la manera de lograr el ángulo de ataque deseado, y cómo influye éste en la velocidad estacionaria.
3. No considera la desviación de flujo ni efectos de retardo sobre el empenaje horizontal, como es habitual en la época. Las simplificaciones que admite son razonables y los ejemplos, de acuerdo con lo que los aviones de la época le ofrecían, son pertinentes.
4. Para el análisis de la estabilidad longitudinal no trabaja con las ecuaciones completas, sino que directamente establece las propias de la dinámica en un plano vertical. Su modelo abarca un horizonte más reducido que el de Ferber, pero mucho más claro.
5. La condición de estabilidad que obtiene coincide con la deducida por Lanchester, pero es algo más transparente que la del inglés, pues parte de unos principios aerodinámicos más claros, aplicados de un modo racional y sencillo. La manipulación es algebraicamente incómoda pero carece de complicaciones conceptuales.
6. Se basa en trabajos de G. Cayley, A. Pénaud, O. Lilienthal, W & O Wright, F. Ferber. Él es citado por: F. Ferber, P. Painlevé, G. H. Bryan, G. De Bothezat,

P. Painlevé. (1863-1933).

1. Tiene una idea clara de los factores aerodinámicos relevantes. Adopta un tipo de curva polar de resistencia aerodinámica coincidente con el preconizado por Pénaud, Soreau y Ferber, que es asimilable al actual.
2. Considera que un solo elemento sustentador sin propulsión y aislado es apto para el vuelo descendente y equilibrado siempre que el movimiento del centro de presión con las variaciones del ángulo de ataque cumplan una condición que, para placas planas y según Jöessel y Avanzini, se cumple siempre; este estudio se asemeja mucho a la exposición de Lanchester en su libro "Aerodynamics" (1907).
3. Sin embargo, reconoce las ventajas de completar el *avión elemental* -formado por una sola placa- añadiéndole un ala de pequeño tamaño "detrás" del ala mayor, al que llama empenaje "*Tipo Pénaud*". Los distintos teoremas que Painlevé va obteniendo se corresponden con los que estableció Pénaud, aunque las posibilidades de resultar útiles a los constructores de aviones eran escasas, por las incertidumbres que rodeaban a algunos parámetros que aparecían en las fórmulas.

4. Trabaja con las ecuaciones diferenciales no estacionarias en un plano vertical. Painlevé es el primero que modeliza la ecuación del momento de cabeceo de un modo detallado aunque precario, y la utiliza para el estudio del vuelo de planeo. Los parámetros que -en esas ecuaciones- significan la aportación del ángulo de ataque y la correspondiente fuerza de amortiguación debida a la velocidad angular del avión aparecen en forma embrionaria y todavía no bien definida. (Por ejemplo, si un fabricante desea diseñar un avión y decide servirse para ello de las ecuaciones de Painlevé, se encontrará con dificultades para fijar con precisión el valor numérico de parámetros que aparecen en las funciones que describen el comportamiento aerodinámico). El sentido físico es claro, pero la cuantificación numérica resulta vaga.
5. Finalmente, Painlevé obtiene su “*teorema*” sobre la estabilidad de la velocidad en descenso recto planeado, para cuya obtención no necesita la ecuación del momento de cabeceo. Esta condición, obtenida de un modo algo artificioso, no resulta tan restrictiva como insinúa su formulación matemática.
6. Explica someramente cómo se podría analizar matemáticamente la estabilidad a partir de todas las ecuaciones de un movimiento tridimensional, pero no lo desarrolla. (Parece haber dejado²²⁶ esta tarea en manos de De Bothezat).
7. Cita a: G. Cayley, A. Pénaud, O. Lilienthal, W. & O. Wright, R. Soreau, F. Ferber, G. H. Bryan & W. Williams. Le cita G. De Bothezat.

G. De Bothezat. (1882-1940).

1. De Bothezat trabaja con el sistema completo de ecuaciones diferenciales no estacionarias en tres dimensiones; una vez linealizadas obtiene la separación en dos sistemas independientes y deduce el polinomio característico de los dos movimientos: el lateral-direccional y el longitudinal.
2. A partir de la aplicación del Criterio de Routh establece la condición matemática de estabilidad. No presenta la misma aplicabilidad práctica que las obtenidas por Soreau y Lanchester, o Bryan.
3. Considera que el análisis de los sistemas lineales a los que dan lugar las ecuaciones del movimiento de un aeroplano serán siempre una primera aproximación suficientemente exacta para el estudio de las pequeñas desviaciones alrededor del equilibrio. Esto se debe a que el punto menos

²²⁶ Painlevé realizó importantes aportaciones al campo matemático de las ecuaciones diferenciales y de la mecánica, y tuvo también un protagonismo político relevante en su país. El interés teórico que manifestó por la naciente aviación parece haberse amortiguado relativamente pronto.

conocido de las leyes aerodinámicas es el desplazamiento del centro de presión, en valor absoluto y en sentido, mientras que los demás aspectos aerodinámicos que afectan a los aviones han sido ya, en primera aproximación, determinados. De Bothezat cree haber demostrado que la influencia del sentido de este desplazamiento es prácticamente irrelevante para un avión con más de una superficie sustentadora.

4. El desarrollo que efectúa es prolijo y exhaustivo; tiene en cuenta que el centro de presión -con la variación de α - puede desplazarse hacia adelante (desplazamiento *directo*), pero también retroceder (desplazamiento *inverso*), según la curvatura alar. Constituye un interesante estudio de la estabilidad estática, algo alambicado.
5. De Bothezat no acepta que un avión cuyos modos son oscilatorios pueda llamarse estable, pues debido a una serie consecutiva de perturbaciones se puede producir una acumulación de oscilaciones que, aunque cada una de ellas aislada se amortiguara, la superposición efectiva y real podría conducir prácticamente a la inestabilidad, aunque no parezca así desde el punto de vista matemático.
6. Piensa que quizás cierto tipo de estabilización activa podría permitir obtener modos no oscilatorios, pero lo ve poco probable.
7. Considera que hay dos modos de estabilizar longitudinal y automáticamente un avión: el sistema *americano* ("Sistema Wright") y el sistema *francés*.
 - a. El *sistema americano* consiste en descentrar el eje de tracción, de modo que esta genere momento de cabeceo proporcional a la velocidad. Según De Bothezat, no es un buen sistema: primero porque depende del funcionamiento de los motores y segundo porque no estabiliza frente a las variaciones del ángulo de ataque. (De Bothezat quizás generaliza aquí demasiado: en 1911 hay aviones americanos que no se estabilizan mediante el procedimiento que atribuye a los Wright).
 - b. El sistema *francés* utiliza empenajes horizontales que generan automáticamente la estabilización y es mucho mejor que el americano pues solamente depende de la geometría del aeroplano.
8. No obstante, piensa que ninguno de los dos sistemas puede garantizar la estabilidad, salvo en viento en calma o con viento regular lentamente variable: una estabilidad completa no se puede lograr debido a que los tiempos de respuesta -como De Bothezat piensa haber mostrado- son necesariamente relativamente grandes.
9. Como resultado final de su tesis, predice que la solución del problema de la estabilidad de los aviones, tanto longitudinal como -con mayor razón- la lateral direccional, requerirá el diseño adecuado y la incorporación de superficies

móviles activas. Sugiere que en este campo se encontrarán no pequeñas dificultades.

10. Cita a P. Painlevé, R. Soreau, F. Ferber, F. W. Lanchester, G. H. Bryan & W. Williams. Es citado por Von Kármán y Trefftz.

G. H. Bryan. (1864-1928).

1. Trabaja con todas las ecuaciones diferenciales no estacionarias de la dinámica de un cuerpo rígido, en el formato (de J. Routh) que era habitual en Cambridge en esa época.
2. Bryan mejora el intento anterior del propio Bryan & Williams, y los de Lanchester, Ferber, Soreau, y también el de De Bothezat, que Bryan no conoció antes de publicar su libro.
3. La elección de las variables de las ecuaciones de la dinámica, así como la del sistema de referencia es acertada y evita, en parte, la complejidad a la que se ven abocados algunos de los estudios antes mencionados. Desarrolla particularmente el caso de planos estrechos, como condición para obviar el problema poco claro del desplazamiento del centro de presión. Esta suposición simplifica los cálculos y, con limitaciones, no se aleja de la realidad. Las fórmulas de Bryan para casos en los que el centro de presión se mueve en dependencia de α son menos claras.
4. Asume inicialmente vuelo horizontal estacionario, con una fuerza aerodinámica total función de $\sin \alpha$ y perpendicular a la placa, y la superficie sustentadora (una o múltiple) formando un ángulo de orden de magnitud también similar a α , lo que se traduce en sustentaciones del orden de α y resistencias del orden de α^2 con la hipótesis habitual de α pequeño.
5. Si se parte de las condiciones indicadas en el apartado anterior, la matriz del sistema lineal longitudinal carece de derivadas aerodinámicas lateral direccionales, con lo que aparecen separados los dos movimientos: el lateral direccional se desacopla del longitudinal. Esto fue obtenido por primera vez por Ferber.
6. Usando un limitado modelo aerodinámico, Bryan distingue los problemas atribuibles a la sustentación y a la resistencia -aunque no incluye la parásita-, realiza un análisis lineal detallado, asume simplificaciones coherentes, e

identifica correctamente los dos modos de comportamiento de las oscilaciones longitudinales (que él llama *simétricas*).

7. Obtiene expresiones aproximadas para evaluar tanto la parte real como la imaginaria de los autovalores. El polinomio característico del movimiento longitudinal es de 4º grado, y sus coeficientes son función de las derivadas aerodinámicas, cuya definición estableció en su trabajo de 1904 y ahora amplía al trabajar en 3 dimensiones. El establecimiento riguroso y formalmente exhaustivo de las derivadas aerodinámicas, la sutil estimación de magnitudes relativas entre los términos de los coeficientes del polinomio característico junto con la discriminación certera de los que son relevantes, posibilitan la aplicación de las condiciones de J. Routh. El polinomio resulta accesible al asalto de Bryan, a pesar del aspecto complicado que ofrece el discriminante de Routh.
8. De un modo elegante, sobrio y aparentemente exento de dificultad, establece condiciones de estabilidad que involucran la inercia del avión y sus características aerodinámicas.
9. Aparecen por primera vez *con claridad* los dos modos oscilatorios característicos de la dinámica longitudinal de los aviones. Las “oscilaciones cortas”, actualmente denominado modo “*Corto Período*” y las “oscilaciones largas”, denominado modo “*Largo Período*” o también “Modo Fugoide”. (Si bien -como ya se ha mencionado- el deficiente modelo matemático aerodinámico usado por Bryan precave su uso práctico eficaz para los diseñadores).
10. La condición de estabilidad longitudinal que obtiene Bryan a partir del discriminante de Routh tiene cierto parecido con la de Lanchester, Soreau y Ferber.
11. Ha sido una adquisición definitiva para la aeronáutica el modo utilizado por Bryan de analizar la dinámica lineal del comportamiento de un avión, más allá del estudio de la estabilidad.
 - a. El concepto de “*Derivada Aerodinámica*” se ha mostrado fecundo y, aunque procede de la simple transposición de una metodología matemática ya conocida y utilizada en otros ámbitos de la técnica, en el campo aeronáutico ha constituido durante más de un siglo la columna vertebral del estudio linealizado de la dinámica de los aviones.
 - b. No obstante, el modelo matemático-aerodinámico de Bryan no se presta fácilmente a convertirse -como era su deseo- en una herramienta útil para el diseño de los aviones, ya que supone válidas expresiones de las fuerzas aerodinámicas demasiado genéricas y poco realistas, y omite la inclusión de algunos efectos aerodinámicos de cuya influencia sabe pero no puede cuantificar. Por esta razón insiste reiteradamente

en la necesidad de establecer un serio y extenso programa de experimentos para obtener el valor de las derivadas aerodinámicas.

- c. Con un modelo aerodinámico adecuado, y mediante coeficientes de proporcionalidad más afinados y la inclusión de la influencia del retardo en la desviación cuando ($d\alpha/dt \neq 0$) -que Bryan menciona, pero no está en condiciones de fijar-, los desarrollos que él efectúa, seguidos de modo literal, podrían ser mantenidos y conducirían a resultados que mostrarían buena acomodación a los modos actuales de establecer la teoría lineal de la estabilidad.

12. Por todo lo dicho, a pesar del tiempo transcurrido desde su publicación, de su carencia de utilidad directa práctica y de la aparente incomodidad que una ligera hojeada suele sugerir al lector, se comprende que el hecho de que siga siendo citado como referencia en el ámbito académico de la Mecánica de Vuelo no se debe solamente al acendrado sentido histórico propio, según se dice, de los anglosajones. Realmente marcó una época al establecer una sólida cimentación teórica para la teoría matemática del estudio del vuelo y mantiene todavía un cierto aire moderno, aunque su contenido algebraico resulta intensamente disuasorio.
13. Es de justicia mencionar la colaboración de E. Harper, nada irrelevante.
14. El *National Physical Laboratory* (UK) asumirá la tarea de convertir el trabajo de Bryan en accesible para los diseñadores de aeroplanos, fundamentalmente mediante un serio programa de experimentación y de publicación asequible y sintética de los resultados.
15. Cabe preguntarse por la razón que llevó a Bryan a utilizar en sus cálculos un valor de la “*Constante de Resistencia Específica del Aire (K)*” común, único para todas las superficies sustentadoras, pues ya (le) constaba claramente en los ámbitos aeronáuticos y aerodinámicos de 1911 que esto no era así. Quizás un hecho que pudo influir en esta decisión es que las relativamente sencillas expresiones finales obtenidas por Bryan pierden esta característica, y pasan a mostrar un aspecto menos grato.
16. Cita a F. W. Lanchester, R. Soreau, F. Ferber, Brillouin, y a G. H. Bryan & W. Williams. Es citado por Von Kármán & Trefftz.

E. A. Duchêne. (1869-1946).

1. El libro de Duchêne entra dentro de la categoría de los textos a estudiar aquí, aunque analiza solamente la estabilidad estática, porque pretende ofrecer a los diseñadores criterios prácticos que les permitan asegurar la estabilidad.

2. Parte importante del texto se dedica a los resultados “*clásicos*” de la mecánica de vuelo estacionaria; son los de Soreau, Painlevé y Pénaud. No los cita, pero parece usar sus resultados. Incluye algunas particularidades, propias de Duchêne, que no han perdurado.
3. Respecto del centro de presión, se atiene a los resultados de Eiffel para placas con y sin curvatura. Justifica matemáticamente que si se quiere volar de modo equilibrado a diferentes ángulos de ataque pero sin mover el centro de masas del avión, se necesitan dos planos distintos: uno fijo y otro móvil. El equilibrio resulta de la deflexión angular de un plano respecto del otro, y -cosa importante para Duchêne - no depende de la velocidad de vuelo. Para cada posición angular del ala trasera hay un solo ángulo de ataque estacionario que anula el momento de cabeceo.
4. Menciona también que cabe controlar el momento de cabeceo por otros procedimientos: cambiando el tamaño de la superficie trasera o retrasando el conjunto del empenaje. Ambas soluciones son mecánicamente más complejas y Duchêne las descarta.
5. Duchêne tiene en cuenta que los distintos componentes del aeroplano generan resistencia aerodinámica, y que -si la resultante no pasa por el centro de masas- también causan momentos. Estos son más difíciles de evaluar que los debidos a la sustentación, pero son menores por dos razones: por serlo su brazo de par, y por serlo también las fuerzas que los causan. No los tiene en cuenta.
6. El tipo de avión que estudia Duchêne pertenece a la clase de aquellos en los que la cola no genera sustentación, como es frecuente en los pioneros. Solamente se espera de la cola que amortigüe las oscilaciones, pero menciona que esto no es imperativo, la cola puede también sustentar en vuelo equilibrado estacionario. Duchêne no tiene en cuenta la desviación de la corriente que el ala delantera causará.
7. En todos los casos el centro de presión considerado relevante es el del ala grande, y las ecuaciones de las que se sirve para obtener la deflexión del empenaje para un α determinado son estáticas. Para el análisis de la Estabilidad Automática, Duchêne distingue varios casos: si es un solo plano sin curvatura: es estable, según la Ley de Jöessel; si este único plano tiene curvatura, será inestable. La descripción es verbal.
8. Duchêne decide que es más práctico trabajar con dos planos separados una cierta distancia. La ecuación de estabilidad (tal como él la denomina) es la que establece que el momento global respecto del centro de masas es nulo. Así, tras perturbar ligeramente esta ecuación mediante $\Delta\alpha$, llega a establecer el equivalente a la condición que en terminología de hoy exige $CM_\alpha < 0$ correspondiente a la estabilidad estática.

9. Duchêne sabe que no todas las superficies sustentadoras tienen el mismo valor para la “*constante*” K , de modo que las distingue mediante un subíndice: K_1, K_2, \dots análogamente a las correspondientes superficies S_1, S_2, \dots . Este modo de actuar permite establecer una correspondencia sencilla entre las expresiones de Duchêne y las actuales. El coeficiente K incluye los efectos de la densidad del aire y el efecto de la forma geométrica del ala. Esto es correcto, aunque no se llegan a cuantificar con claridad estas dos dependencias.

10. Se trata de un texto de fácil lectura que trata de permanecer cercano al “*constructor*” y al “*diseñador*” de aeroplanos. No es un libro escrito para especialistas dispuestos a encontrar un tratamiento exclusivamente matemático: no se dirige a un pequeño círculo de potenciales lectores. Tampoco es tan elemental o exclusivamente divulgativo que evite tratar los problemas propios de los aeroplanos desde sus aspectos técnicos más serios. Las explicaciones son asequibles, con tendencia a minimizar el número de fórmulas, tratando de ofrecer los principios fundamentales del vuelo, y proporcionar al lector ordinario una panorámica de los problemas involucrados en el movimiento y la estabilidad de los aeroplanos.

11. Los casos numéricos estudiados se basan en información escasa y poco fiable; las conclusiones de este apartado no pueden considerarse definitivas. Aun así trata de establecer, de acuerdo con las limitaciones mencionadas, una conexión entre la teoría y la práctica en el diseño y estudio del vuelo de los aeroplanos.

12. Con las hipótesis que acepta, la expresión del momento de cabeceo es básicamente correcta. Las conclusiones respecto de las necesarias inclinaciones respectivas de las superficies sustentadoras en un aeroplano formado por dos de ellas, una delantera y otra posterior, son correctas, dentro de la restricción que genera el hecho de que se hace coincidir el centro de presión del ala delantera con el *CDG*.

13. El efecto amortiguador de la cola es tratado correctamente a partir del análisis físico cualitativo, así como la influencia, descrita someramente, del momento de inercia del aeroplano. El estudio de Duchêne no contempla de hecho, otro modo de oscilación que el que denominamos Corto Período. Ningún análisis del problema del vuelo incluye ecuaciones no estacionarias, pues esto no es el objetivo del autor analizar la estabilidad dinámica.

T. V. Kármán (1881-1963) & E. Trefftz (1889-1937).

1. El estudio de la estabilidad estática es básicamente convencional y asume las hipótesis aerodinámicas habituales de la época, incluyendo explícitamente la densidad del aire.

2. Se sirve de la curva metacéntrica de las líneas de acción de la resultante aerodinámica para establecer el momento de cabeceo, lo que no es habitual en los pioneros. Establece las ecuaciones diferenciales no estacionarias 2D del vuelo en un plano vertical, y las linealiza para obtener la ecuación característica del sistema.
 - a. Una primera simplificación se basa en los órdenes de magnitud del coeficiente de resistencia aerodinámica (CD) y de la pendiente de la curva de sustentación (CL_α); VK&T desprecian el primero frente al segundo.
 - b. Una segunda simplificación supone que el régimen de vuelo es de mínima resistencia aerodinámica.
3. Así llegan a la ecuación característica del sistema lineal o Ecuación de Estabilidad que depende solamente de cuatro parámetros: (1) Parámetro “ a ”, que depende del ángulo de ataque (α), (2) Parámetro “ b ” que depende de la relación (CL/CD), (3) Parámetro “ q ” que depende de $V_0^2(CM_\alpha)$ y (4) Parámetro “ p ” que depende de (CM_q)
4. Los dos primeros definen las condiciones de vuelo; los dos últimos son usados como parámetros para analizar la estabilidad.
5. A partir de la Ecuación de Estabilidad VK&T analizan algunos casos límite, obteniendo, entre otros de menor interés, el Modo Largo Período, conocido ya por VK&T vía Lanchester.
6. La aplicación del método de Klein se hace -en nuestro estudio- de doble manera:
 - a. Con el método de las envolventes, VK&T localizan zonas de posible existencia de raíces reales y estiman rangos de valores numéricos posibles para ellas. Se confirma la presencia de valores numéricos bastante desparejos entre unas y otras, y se insinúa que, cuando las rectas tangentes que definen las características de las raíces dejan de serlo para pasar a ser secantes de las envolventes, las raíces pasan a ser imaginarias, manteniendo una cierta continuidad en cuanto al valor de su parte real respecto del que tenían cuando eran reales puras cuando la recta secante se separa poco de la tangente: un par de raíces normalmente de módulo pequeño frente a la unidad, y otro par de raíces notoriamente más grande, del orden de la unidad.

- b. Con el método de la Curva Normal se muestra que, para los valores habituales actuales de los parámetros (CM_α, CM_q) la Ecuación de Estabilidad de VK&T tiene siempre raíces imaginarias, con zonas indicativas del posible valor numérico absoluto de las soluciones reales (si fuesen posibles: se demuestra que unas serían muy pequeñas frente a las otras).
7. El estudio numérico de las raíces imaginarias requiere la fijación de alguna de las condiciones de vuelo para poder representar gráficamente los resultados, lo que exige solamente fijar los valores de los parámetros “a” y “b”.
 8. VK&T establecen los valores de las raíces de la Ecuación de Estabilidad distinguiendo las de amortiguamiento débil de las que lo tienen mayor, siempre en función de los parámetros (CM_q) y $V_0^2(CM_\alpha)$.
 9. Aparece nítidamente una zona del plano $\{p, q\}$ en la que no es posible la estabilidad, y de ella obtienen VK&T una “Condición de Estabilidad” que, comparada con las ya publicadas de Lanchester, Bryan y Ferber, muestra similitud.
 10. Debido a que la ecuación de Estabilidad es de cuarto grado, las soluciones analíticas en forma simbólica son actualmente cómodamente obtenibles y graficables; permiten verificar numéricamente, de un modo visualmente más completo, los resultados obtenidos por VK&T, aunque hay que asumir algunos valores numéricos particulares apropiados.
 11. El hecho, que VK&T consideran probado ya en apartados anteriores, de la diferencia significativa en el módulo de unas raíces imaginarias respecto de las otras permite a VK&T estimarlas a partir de los coeficientes del polinomio característico, estableciendo unos valores válidos solamente como primera aproximación.
 12. Mencionan que el método que han descrito para el estudio de la estabilidad es apto, hasta cierto punto, para ser aplicado al diseño de aviones, si se fijan los requisitos de estabilidad que se buscan y se puede actuar sobre la geometría y la distribución de la masa.
 13. Citan a Rünge, Knoller, Bryan, Painlevé, Ferber, Reissner, Quitter, pero sin mencionar referencias concretas.

Conclusiones Generales.

La inmensa mayoría de los trabajos pioneros estudiados procede de Europa y, más concretamente de Francia²²⁷. Durante el siglo XIX y la primera parte del XX tanto la Ciencia como la Técnica fueron esencialmente europeas y el francés era el idioma común de relación. Los hermanos Wright y Samuel Langley fueron la excepción. Octave Chanute, francés afincado en Estados Unidos por motivos empresariales, fue el gran difusor de las inquietudes aeronáuticas europeas en América y contribuyó a despertar el interés en los Wright, Curtiss y otros muchos.

Cabe destacar que los primeros cursos dedicados a la Aeronáutica se impartieron en París por Marchis [1] y Painlevé, figurando este último entre los pioneros de la Dinámica del Vuelo. Los profesores americanos y de otros países europeos asistieron a las clases de ambos para recibir el primer impulso y conocimientos, y luego poder continuar en sus respectivos países.

Tanto los libros como los artículos de revista no tenían la misma forma de citar que tenemos hoy. A veces sólo se citaba al autor, pero no el trabajo concreto de dicho autor. Hasta después de la Segunda Guerra Mundial no se ha generalizado el procedimiento moderno de citar. Ello hace difícil seguir el rastro de las relaciones entre las primeras publicaciones y su impacto coetáneo.

Se constata que los pioneros de la aviación fueron más atrevidos que reflexivos, y generalmente carecían de formación suficiente para comprender los principios del vuelo. Por su parte, muchos estudiosos no tenían una inclinación particular para experimentar personalmente el vuelo, salvo las excepciones de Lilienthal, los Wright y Ferber²²⁸.

Algunos autores estudiados, que en su momento tuvieron cierto reconocimiento, como Ferber, Zahm, Painlevé o Duchêne, han sido poco a poco olvidados y ya no son citados en ningún libro reciente. Caso aparte es el de Bothezat, autor de una Tesis Doctoral admirable por su alcance, su exhaustividad y sus llamativas conclusiones: no fue casi nunca citado; sin embargo este ingeniero ruso hizo fortuna posteriormente en Estados Unidos como diseñador de un helicóptero y empresario de industrias mecánicas. Este paulatino olvido se debe, en gran medida, al cambio del francés por el inglés como lengua de relaciones científicas después de la Primera Guerra Mundial.

Hemos elegido unas 100 referencias cualificadas (Ver Anexo final de Referencias) a lo largo de un siglo, y contado las veces que aparecen mencionados los pioneros que hemos estudiado. Los dos autores más citados son Lanchester (con 43 citas) y Bryan (44). Sorprende el caso del primero, que aportó menos que otros pioneros, pero que tuvo el acierto de dar nombre al modo Fugoide y a otros fenómenos aeronáuticos y pasó por ello a la posteridad. Bryan es reconocido universalmente como el autor que dispuso las ecuaciones de la Estabilidad como las conocemos hoy; aunque fue coetáneo de Bothezat, quien logró algo similar: este último no consiguió que le sonriera la fortuna en esto.

Cayley (16 citas), Pénaud (16) y Lilienthal (27) son también comúnmente citados, por su visión para afrontar tanto los aspectos prácticos de los aparatos voladores, como por

²²⁷ “*L’Aéronautique est une Science Française*” escribía en 1903 Lucien Marchis (Ref. [1], Pág. 718).

²²⁸ También Cayley, según parece, por *persona interpuesta*. (Ref. [2], Págs. 177 y ss.).

haber tenido el atrevimiento de intentar dar formato físico-matemático, de alguna manera, a las ecuaciones del vuelo.

Las citas a los hermanos Wright (19) y a Von Kármán (14) tienen fácil explicación. Aquéllos porque fueron los primeros en volar con máquinas más pesadas que el aire de forma controlada, y luego se esforzaron en explicar cómo lo habían logrado, más fenomenológicamente que matemáticamente. Von Kármán es citado porque fue el padre de la Aerodinámica y realizó numerosas contribuciones en diversos campos de la Aeronáutica: turbulencia, estabilidad, flujo supersónico, etc. (Ocasionalmente, algunas de las citas recogidas aquí podrían ser ajenas al tema de la estabilidad de los aeroplanos).

El número de libros analizados y su distribución temporal es representativo de la producción y vicisitudes de las diversas épocas. Entre 1900 y 1920 hay un fuerte pico de textos, como corresponde a una rama naciente de la Ingeniería. Los hermanos Wright acaban de demostrar la posibilidad del vuelo propulsado y controlado, y en pocos años se vuela en todos los países civilizados, creando un frenesí que arrastra a los científicos detrás.

La década de los 1910 corresponde, con *lógica de aquinate*, a la moda de la distribución. Después de un mínimo en la época de la Gran Depresión, los textos remontan poco a poco. A finales del siglo XX vuelve a presentarse otro máximo, porque la demanda de manuales y textos avanzados sobre Dinámica del Vuelo abarca a toda la Tierra, ya que la Aviación se ha convertido en algo cotidiano y ubicuo.

Conclusiones Específicas.

- (1) El estudio científico de la estabilidad de un aeroplano frente a pequeñas desviaciones de sus estados de equilibrio puede reducirse a un problema matemático-físico.
- (2) La parte física del problema consiste en lograr un modelo realista de las fuerzas aerodinámicas y de sus líneas de acción.
- (3) En el siglo XIX se consolida para las fuerzas aerodinámicas un modelo cuadrático en las velocidades lineales, otro simplemente lineal con el ángulo de ataque y otro lineal también con el tamaño de la superficie, medido por su área.
- (4) Dos aspectos se muestran elusivos:
 - a. La influencia de la forma de la superficie, que es significativa, se desconoce. No hay teorías capaces de predecirla con generalidad. El coeficiente único *K de resistencia específica del aire* permite hasta cierto punto modelar la fuerza, pero con limitaciones importantes que afectan seriamente a la validez de las condiciones formales de estabilidad, cuando las establecen.

- b. La posición del centro de presión, que se comporta de modo diferente para perfiles planos que para perfiles con curvatura. No hay teoría que permita predecir el comportamiento. Por esta razón, Zhukowsky (1891) y Lanchester (1908) estudiarán la dinámica de un planeador en un plano vertical omitiendo la ecuación del momento de cabeceo; no tienen en cuenta la aceleración angular -Painlevé (1909) será el primero en introducirla- y así el alcance de las conclusiones viene limitado por esta carencia.
- (5) Agrava la situación la poca facilidad de sistematización que ofrecen las conclusiones de los diversos tipos de experimentos; se tiene un cúmulo enorme de datos empíricos, no siempre disponibles fácilmente, ni siempre coherentes, pero falta una teoría sintética que los ilumine y dé sentido. Una aproximación a las incertidumbres en las que se movían los pioneros vienen descritas en el capítulo 2.
- (6) La parte matemática establece las ecuaciones de la dinámica de un cuerpo rígido que se mueve en un plano vertical. Esto conduce a un sistema de 3 ecuaciones diferenciales. El procedimiento habitual de linealizar estas ecuaciones conduce a establecer una Ecuación Característica de la Matriz del Sistema Lineal que consiste en un polinomio algebraico de cuarto grado tal como el que se muestra aquí: $Pol = A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0$. Las raíces de este polinomio igualado a cero son los auto valores, reales o imaginarios, en número de cuatro, que forman los componentes fundamentales de la dinámica del movimiento perturbado.
- (7) Para que el movimiento sea estable es necesario que las raíces reales, si las hay, o las partes reales de las raíces imaginarias, sean negativas. Es decir, los fenómenos transitorios deben desaparecer después de un tiempo razonablemente grande (que teóricamente tendería a infinito). Cuatro raíces imaginarias tendrían la forma siguiente, y en este caso tienen que ser conjugadas dos a dos: $\{z_1 = \lambda_1 + i n_1, z_2 = \lambda_1 - i n_1, z_3 = \lambda_2 + i n_2, z_4 = \lambda_2 - i n_2\}$
- (8) La Ecuación Característica, al ser de cuarto grado, tiene cinco coeficientes $\{A_4, A_3, A_2, A_1, A_0\}$. Estos coeficientes son función de las características de la masa e inercia y de la geometría del avión -de modo directo, o a través su influencia en la aerodinámica de los componentes- y de las condiciones de vuelo: velocidad y altitud (por su efecto en la densidad). No se consideran efectos de compresibilidad. (Sólo Lanchester los menciona). Esta Ecuación Característica es denominada Ecuación de Estabilidad por De Bothezat y Kármán & Trefftz.
- (9) Intervienen en estos coeficientes las denominadas “*Derivadas Aerodinámicas*”, introducidas en 1904 por Bryan & Williams; se trata de números dimensionales equivalentes al valor del primer término del desarrollo en serie de Taylor, a partir

del estado que define el equilibrio del avión, y que indica la dependencia exclusivamente lineal respecto de la variable que está siendo considerada. Para calcular estas “*Derivadas Aerodinámicas*” se establece que la dinámica del movimiento solamente dependerá de las variables del mismo: velocidades lineales y angulares, o de sus valores estáticos. (Painlevé criticará seriamente esta hipótesis, en el Prólogo que redactó para la Tesis de De Bothezat sobre la estabilidad de los aviones).

- (10) Los coeficientes del Polinomio Característico adquieren así, en su mayoría, una forma poco apta para la manipulación algebraica manual. No obstante, hay que subrayar que conceptualmente no es un proceso matemáticamente complicado, sino solamente tedioso y también susceptible al fallo ocasional, por distracción u olvido. La claridad en la definición de los sistemas de referencia exige especial cautela. Bryan, con su concepto de “*Derivada Aerodinámica*” se mantiene deliberadamente en un nivel de abstracción alto y solamente lo abandona cuando es necesario para proceder a cálculos sobre casos particulares; Ferber y De Bothezat particularizan las expresiones de fuerzas y momentos en un estadio relativamente temprano de su desarrollo.
- (11) Cuando los valores numéricos de los coeficientes $\{A_4, A_3, A_2, A_1, A_0\}$ son conocidos, por vía experimental o teórica, el problema es trivial. Bastará para resolverlo hallar las raíces de la ecuación característica. Sin embargo, este no suele ser el caso, ni es tampoco el método que más información puede facilitar sobre los parámetros importantes desde el punto de vista de la estabilidad.
- (12) Cuando el problema se desea resolver de modo generalizable, aunque existe -como es sabido- solución analítica cerrada, el problema práctico se convierte en inabordable.
- (13) Se suele recurrir entonces a un proceso de simplificaciones y aproximaciones sucesivas, para las que Bryan ofreció en 1911 una ayuda inestimable, todavía en buena parte vigente. El modelo físico de Bryan es demasiado simple para ser práctico, pero no omite mencionar -aunque no pueda calcularlo- nada esencial.
- a. Un modo de abordar el problema viene sugerido por el Método de Routh que permite establecer las condiciones de estabilidad a partir de ciertas condiciones fijadas sobre el signo de los coeficientes del Polinomio, y sobre una cierta combinación algebraica de estos coeficientes denominada “*Discriminante*” de Routh. Los coeficientes, como se ha visto, son muy diferentes en grado de complejidad; para los casos más simples, las condiciones de estabilidad pueden establecerse de modo rápido y eficaz. Al ser condiciones *necesarias*, aportan una información fundamental, aunque incompleta. (Bryan, 1904, 1911).

- b. Un segundo modo de abordar el problema viene dado por el intento de obtener directamente información sobre las propias raíces del Polinomio Característico. Este es el propósito de De Bothezat, que utiliza el método de la recta de Klein, y logra concluir (correctamente) que la Ecuación de Estabilidad - cuya representación gráfica obtiene fijando algunos parámetros con base en los aviones de su época- no tiene raíces reales. La localización de las raíces imaginarias es más compleja y solamente logra identificar intervalos en los que -según sus hipótesis- deben ocurrir estas raíces. Detecta la presencia de raíces imaginarias con la parte real negativa pero pequeña. La Curva de Estabilidad de De Bothezat es conceptualmente muy completa pero resulta (hoy) menos “transparente” debido a la relativa oscuridad del modelo de curva polar que usa.
- c. Un tercer sistema utiliza el Método de las Envolventes de la Curva de Estabilidad de VK&T, que -tal como la han establecido- es válida solamente para la zona del Dominio de Vuelo en la que se cumple la condición de mínima resistencia aerodinámica. Es el usado por Von Kármán & Trefftz. Es prolijo y no nos ha parecido especialmente claro, pero muestra -sin fijar sus valores- los intervalos en los que es posible la existencia de raíces reales, lo que para los valores normales de los parámetros de los aviones no es posible. La Recta de Kléin muestra lo mismo de modo más sencillo. Von Kármán & Trefftz parecen suponer que hay continuidad en los módulos de las raíces cuando estas pasan de ser reales a ser imaginarias por alejamiento de la Recta de Klein, o por penetración de las tangentes a las Envolventes -pasando a ser secantes- en el método por ellos usado, lo que no se cumple necesariamente siempre. La crítica de este aspecto requiere un estudio más profundo.
- (14) Parte de este proceso de simplificación puede incluir incorporar valores típicos propios de los aviones de la época, considerándolos como parámetros “prácticamente fijos” y trabajar, a partir de este momento, con las expresiones simplificadas fruto de los supuestos aceptados. Los márgenes de validez de este tipo de operaciones tienden a difuminarse con el tiempo, hasta convertir en inseguras las eventuales *afirmaciones, teoremas, consecuencias, o lemas*, que supuestamente se apoyaron en su momento en ellas. El problema matemático pierde virulencia, pero también capacidad rigurosa de predicción.
- (15) Un número elevado de afirmaciones de Ferber, Soreau, De Bothezat y Duchêne pertenecen a la categoría mencionada en el punto anterior. Los desarrollos de Ferber y más todavía los de De Bothezat, son extraordinariamente detallados y minuciosos, y aplican un método riguroso a una base física poco fiable y no bien establecida. Las conclusiones, obtenidas tras procesos laboriosos, con

derroche de ingenio y perspicacia, frecuentemente les conducen a resultados que dependen de un número grande de condiciones aparentemente básicamente circunstanciales.

- a. Por ejemplo, se incluyen aquí los que proceden de una conceptualización inadecuada del modelo de aeroplano; los que son consecuencia de información errónea o incompleta sobre valores típicos de parámetros de aviones; los que son consecuencia de atribuir a muchos tipos de avión lo que solamente es propio de algunos; los que son consecuencia de simplificaciones matemáticas “*ad cassum*” con escaso rigor (“*Pro opportunitate*”); por malinterpretar lo que uno piensa (o ha visto desde lejos) que otros han hecho; por insuficiente precisión, o errónea o poco clara definición de los conceptos usados; por trasposición demasiado directa de conceptos de un ámbito de la ingeniería (Por ejemplo: naval, agua) a otro diferente (aeronáutica, aire) ... etc.

(16) La síntesis de concreción y generalidad lograda por Bryan (1911) es llamativa. Logra simplificar mucho el punto de partida reteniendo todo lo esencial, sin abandonar un campo conceptual altamente abstracto. A pesar de su NO aplicabilidad –que Bryan sin duda conocía- resulta certero. Dicho de otro modo: Bryan logra que la Matemática, tal como él la utiliza, llegue a conclusiones con claridad y de un modo directo y sustancialmente generalizable; otros pioneros, con cálculos a menudo tanto o más complicados, no lo consiguen.

(17) A partir de Bryan, con modelos matemáticos más precisos debido al enorme avance que experimenta la aerodinámica experimental y la teórica, la comprensión del comportamiento del centro de presión y la inminente aparición del nuevo concepto de centro aerodinámico y su relativa fijeza, y la notable fundamentación matemática lograda con los trabajos de Kutta, siempre en el rango lineal de ángulos de ataque, el tratamiento matemático de la estabilidad longitudinal dejará de moverse en un ámbito nebuloso y podrá pasar a establecerse con rigor.

(18) Las simplificaciones seguirán teniendo mucha importancia. Durante más de cien años se tratará de encontrar buenas aproximaciones a los modos oscilatorios de los aviones: el modo Corto Período y el modo Largo período, como parte importante del estudio de la seguridad y de las cualidades de vuelo y de la información necesaria para la instrumentación de los controles automáticos de vuelo.

(19) El trabajo realizado con la presente tesis es esencialmente, como ya se ha dicho al principio de la misma, una síntesis crítico-histórica que ha procurado comprender y acercar al presente muchas de las aportaciones de los pioneros, vertiéndolas, en la medida que nos ha resultado posible, a la terminología que actualmente utiliza la mecánica de vuelo contemporánea, ilustrando sus logros,

mostrando resultados que no siempre aparecen mencionados explícitamente en sus investigaciones, aunque están contenidos en ellas y un aporte de trabajo matemático por nuestra parte—en ocasiones somero, en otras más prolijo— los hace aflorar. Se llega así a apreciar y valorar el trabajo de muchos pioneros cuyos logros el paso de los años ha ido sepultando en un olvido que no parece razonable considerar irreversible.

Bibliografía

[1] Marchis, L. “Lecons sur La Navigation Aérienne”. Université de Bordeaux. Faculté des Sciences. Dunod Editeurs. (1903-1904).

[2] Gibbs-Smith, C. H., “Sir George Cayley’s Aeronautics 1796-1855. HMSO. London. (1962).

Anexo Final (Ref. Capítulo 18)

Selección de libros de referencia y autores citados

TEORÍAS PIONERAS SOBRE LA ESTABILIDAD LONGITUDINAL DE LOS AVIONES

AÑO	Capítulo 18. ANEXO (CITAS DE AUTORES).															
		C	P	Li	Zu	Za	W	B	F	La	S	P	B	B	D	K
1889	<i>"Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Ein Beitrag zur systematik der Flugtechnik"</i> . Berlin: R. Gaertners Verlagbuchhandlung. (Ed. de American Aeronautical Archives; Markowski International Publishers, One Oakglade Circle, Hummelstown, PA 17036 USA. Email: amaeroarch@aol.com). (1889).	X	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1937	COLLECTED PAPERS (VOL. 5). Kotelnikov Ed. ONTI. Editorial Office for Aviation Literature. Moscow. (1937)	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1976	PROGRESS IN FLYING MACHINES . Lorenz & Herweg, Publishers. Long Beach, Ca. (1976).	X	X	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1911	<i>"Langley Memoir on Mechanical Flight"</i> , Part I (1887 to 1896). Smithsonian Contributions to Knowledge, Vol. 27, No 3. Washington, (1911).	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1902	EXPERIMENTS IN AERODYNAMICS ; Smithsonian Institution, Washington. 2nd Ed. (1902).	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1904	<i>"The longitudinal stability of aerial gliders"</i> . "Proc. Roy. Soc. London", ser. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*
1904	<i>"Les Progrés de L'AVIATION depuis 1891 par le vol plané"</i> . Extrait de la Revue d'Artillerie. Paris. (Mars 1904).	*	X	*	*	*	X	X	*	*	X	*	*	*	*	*
1907	<i>"Pocket-Book of Aeronautics"</i> . London. Whittaker & Co. White Hart Street, Paternoster Square, E. C. and 64 & 66 Fifth Avenue, New York. (1907).	*	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1907	<i>"Aerodynamics, constituting the first volume of a complete work on Aerial flight"</i> . D. VAN NOSTRAND COMPANY. London. (1907).	*	X	X	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*
1907	<i>"Aerodnetics"</i> , 1908. Constable. "Aerodynamics, constituting the second volume of a complete work on Aerial flight". D. VAN NOSTRAND COMPANY. London. (1907).	*	X	X	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*

TEORÍAS PIONERAS SOBRE LA ESTABILIDAD LONGITUDINAL DE LOS AVIONES

1 9 0 8	"Natural and artificial flight", 1908. (Trad. "Le vol naturel et el vol artificiel", Maxim-Espitallier, Dunod et Pinat, Paris (1909).	MAXIM, H.	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 0 8	"État actuel et avenir de l'aviation", Librairie des Sciences Aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS. (1908).	SOREAU, R.	X	*	X	*	*	*	X	*	*	X	*	*	*	*	*	*
1 9 0 9	PRACTICAL AERODYNAMICS and the Theory of the Aeroplane. Aeronautics Office, London, W.C. Part I. (1909)	BADEN-POWELL, B.			X						X	X						
1 9 0 9	ENCICLOPEDIA UNIVERSAL ILUSTRADA EUROPEO-AMERICANA. ESPASA-CALPE. MADRID. (1909)	ESPASA-CALPE			X			*	X		X							
1 9 0 9	"Vehicles of the Air", a Popular Exposition of Modern Aeronautics with Working Drawings; Publishers: The Reilly and Britton Co. Chicago. USA. (1909).	LONGHEED, V.	*	X	X	*	*	X	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 0 9	"L'AVIATION, Ses debuts-son développement". Berger-Levrault & Cie Editeurs. Paris/Nancy. (1909)	FERBER, F.	*	X	*	*	*	X	X	X	*	X	*	*	*	*	*	*
1 9 0 1	THE EARLY STORY OF THE AIRPLANE. DAYTON-WRIGHT AIRPLANE CO. DAYTON. OHIO. (USA)	WRIGHT, W. & O.	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 0 1	FLYING MACHINES. CONSTRUCTION AND OPERATION. (A practical book Which Shows (...) how to Build and Navigate the Modern Airship. THE CHARLES C. THOMPSON CO. (Not. Inc.) CHICAGO. USA.	CHANUTE, O., JACKMAN, M. E. & RUSELL, T. H.	*	*	X	*	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 0 1	LES AEROPLANES DE 1910. (Étude technique avec plans cotés...) LIBRAIRIE AERONAUTIQUE, EDITEURS. 32 Rue Madame, PARIS.	GASTON, R. DE. (Armengaud, M. & Tatin, V.)	*	*	*	*	*	X	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 1 1	STABILITY IN AVIATION. An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motion of the Aeroplanes. MACMILLAN & CO., LTD. LONDON.	BRYAN, G. H.	*	*	*	*	*	*	*	X	X	X	*	*	*	X	*	*
1 9 1 1	THE DYNAMICS OF MECHANICAL FLIGHT. (Lectures delivered at the Imperial College of Science and Technology. 1910. 1911) CONSTABLE & COMPANY, LTD. LONDON.	GREENHILL, G.	*	*	X	*	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
			C	P	Li	Zu	Za	W	B	F	La	S	P	B	B	D	K	
1 9 1 1	L'AVIATION. Librairie Félix Alcan. Boulevard Saint-Germain. PARIS	PAINLEVÉ, P. & BOREL, E.	X	X	X	*	*	*	X	X	X	X	X	*	*	*	*	
1 9 1 1	LA STABILITE DE L'AEROPLANE. Thèse pour le Doctorat présentée a la Faculté des Sciences de L'Université de Paris. Avec une préface de M. Painlevé. DUNOD ET PINAT, EDITEURS. PARIS.	BOTHEZAT, G. de.	X	X	X	*	*	*	X	X	*	X	X	X	*	*	*	

TEORÍAS PIONERAS SOBRE LA ESTABILIDAD LONGITUDINAL DE LOS AVIONES

1 9 4 1	AERODYNAMICS OF THE AIRPLANE. JOHN WILEY & SONS. NEW YORK.	MILLIKAN, C. B.	*	*	*	X	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	X
1 9 4 4	THEORY OF FLIGHT; DOVER PUBLICATIONS INC.	MISES, R.	*	X	*	X	*	*	X	*	X	*	X	*	X	X	X
1 9 4 6	AIRPLANE PERFORMANCE, STABILITY & CONTROL. JOHN WILEY & SONS. NEW YORK.	PERKINS C. D. & HAGE R. E.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 4 9	ELEMENTI DI MECCANICA DEL VOLO. Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella. TORINO. ITALIA.	LAUSSETI, A. & FILIPPI, F.	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*	*
1 9 5 0	MECANICA DE VUELO; PARANINFO (1985) MADRID.	KERMODE A. C.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 5 2	PRINCIPLES OF CONTROL AND STABILITY OF AIRCRAFT; CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. (UK)	DUNCAN, W. J.	*	*	*	X	*	*	*	*	X	*	*	*	X	*	X
1 9 5 7	COURS DE MECANIQUE DU VOL. DUNOD. Paris.	TURCAT, A.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 5 8	AERODYNAMIK DES FLUGZEUGES; Springer Verlag, Berlin.	SCHLICHTING, H. & TRUCKENBRODT, E.	*	*	X	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*
1 9 5 9	DYNAMICS OF FLIGHT. STABILITY AND CONTROL. John Wiley & Sons. New York.	ETKIN, B.	X	*	X	*	*	X	*	*	X	*	*	*	X	*	*
1 9 6 0	ESSAIS EN VOL. PERFORMANCES ET QUALITÉS DE VOL. Dunod. Paris.	RENAUDIE, J.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 6 0	LA MECANIQUE DU VOL. PERFORMANCES DES AVIONS ET DES ENGINES. Librairie Polytechnique ch. BÉRANGER. PARIS	GEORGE, L. et VERNET, J. F.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*
1 9 6 1	AIRCRAFT STABILITY AND CONTROL. International Series of Monographs on Aeronautics and Astronautics. Division 6. Fligh Testing Vol. I. PERGAMON PRESS. NEW YORK.	BABISTER, A. W.	X	*	X	*	*	X	*	*	X	*	*	*	X	*	*
1 9 6 1	MODERN FLIGHT DYNAMICS. Prentice-Hall Space Technology Series. New Jersey. USA	KOLK, W. R.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 6 2	FLIGHT MECHANICS. (THEORY OF FLIGHT PATHS). Addison-Wesley (Palo Alto) CAL.	MIELE, A.	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*	X
1 9 6 2	MECANIQUE DU VOL. Les Qualités de Vol del Avions et des Engins. DUNOD. Paris.	LECOMTE, P.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 6 2	LA MECANIQUE DU VOL DE L' AVION. EPNER 75. ISTRES.	LEBLANC, G.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*
1 9 6 4	STABILITY & CONTROL OF AIRPLANES AND HELICOPTERS.	SECKEL, E.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

TEORÍAS PIONERAS SOBRE LA ESTABILIDAD LONGITUDINAL DE LOS AVIONES

	ACADEMIC PRESS. NEW YORK & LONDON.																		
1 9 6 8	MECANIQUE DU VOL DE L'AVION APPLIQUEE AUX ESSAIS EN VOL. EPNER 12. ISTRES. (FRANCE)	LA BURTHE	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 7 0	FLIGHT STABILITY & CONTROL. American Elsevier Publishing Company. New York	HACKER, T.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	X	*	*	*	*	*
1 9 7 2	DYNAMICS OF ATMOSPHERIC FLIGHT; JOHN WILEY & SONS. NEW YORK. USA	ETKIN, B.	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	X	*	*	*	*	*
1 9 7 3	AIRCRAFT DYNAMICS AND AUTOMATIC CONTROL, PRINCETON UNIVERSITY PRESS. NEW JERSEY.USA	McRUER, D., ASHKENAS, I., GRAHAM, D.	*	*	*	*	*	*	*	X	*	X	*	X	*	*	*	X	*
1 9 7 4	ENGINEERING ANALYSIS OF FLIGHT VEHICLES. ADDISON-WESLEY PUB. Company. MASSACHUSETTS. USA.	ASHLEY, H.	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*
1 9 7 4	AERODYNAMIQUE ET MECANIQUE DU VOL. Éditions Eyrolles. PARIS.	FLECNIAKOSKA, H.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 7 9	AERODYNAMICS, AERONAUTICS & FLIGHT MECHANICS. WILEY. (1 ED.)	McCORMICK, B.	*	*	*	X	*	X	*	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 8 0	AIRCRAFT DYNAMIC STABILITY AND RESPONSE. Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies.	BABISTER, A. W.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*
1 9 8 3	FUNDAMENTALS OF FLIGHT; PRENTICE HALL. NJ. USA	SHEVELL, R. S.	X	*	X	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 8 4	LA MECANIQUE DU VOL DE L'AVION. Doc. EPNER No. 13/1	CATANNEO, G.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 8 9	MECHANICS OF FLIGHT; JOHN WILEY. New York.USA	PHILLIPS, W. F.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	X	*
1 9 9 5	AERODYNAMICS, AERONAUTICS & FLIGHT MECHANICS (2ª ED.). JOHN WILEY. New York.	McCORMICK, B. W.	*	*	X	X	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*	*	X	*
1 9 9 5	INTRODUCTION TO THE FLIGHT DYNAMICS OF RIGID AEROPLANES; ELLIS HORWOOD SERIES IN MECHANICAL ENGINEERING; NEW YORK.	HANCOCK. G. J.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*
1 9 9 5	AIRPLANE FLIGHT DYNAMICS & CONTROL (I). DAR Corporation. Kansas (USA). 1995.	ROSKAM	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 9 5	AIRPLANE FLIGHT DYNAMICS & CONTROL (II). DAR Corporation. Kansas (USA). 1995.	ROSKAM	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1 9 9 6	DYNAMICS OF FLIGHT, STABILITY & CONTROL. John Wiley & Sons. New York.	ETKIN, B. & REID, LL. D.	*	*	X	*	*	X	*	*	X	*	*	*	X	*	*	*	*

TEORÍAS PIONERAS SOBRE LA ESTABILIDAD LONGITUDINAL DE LOS AVIONES

1 9 9 6	PERFORMANCE AND STABILITY OF AIRCRAFT; ARNOLD. LONDON.	RUSELL, J. B.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*
1 9 9 7	FLIGHT DYNAMICS PRINCIPLES; (1ª Ed.). Elsevier, UK.	COOK, M. V.	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*	
1 9 9 7	THE DEFINITION, UNDERSTANDING AND DESIGN OF AIRCRAFT HANDLING QUALITIES; DELFT University Press. The Netherlands.	GIBSON	X	X	*	*	X	X	X	*	*	*	*	X	*	*	
1 9 9 7	AIRPLANE STABILITY & CONTROL; A History of the Technologies That Made Aviation possible. Cambridge University Press.	ABZUG, M. J. & LARRABEE, E. E.	X	X	X	X	*	*	*	*	X	X	*	*	X	*	*
1 9 9 8	INTRODUCTION TO AIRCRAFT FLIGHT DYNAMICS; AIAA Educational Series. RESTON. (USA)	SCHMIDT	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*
1 9 9 8	THE DYNAMICS OF FLIGHT. THE EQUATIONS. JohnWiley & Sons. Chichester. (UK)	BOIFFIER	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	*
1 9 9 8	PERFORMANCE, STABILITY, DYNAMICS & CONTROL OF AIRPLANES. AIAA Educational Series. RESTON. Virginia.	BANDU N. PAMADI	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*
1 9 9 8	FLIGHT STABILITY & FLIGHT CONTROL; MCGRAW HILL. NEW YORK.	NELSON, R. C.	*	*	X	X	*	X	*	*	*	X	*	*	*	*	*
2 0 0 1	DYNAMIQUE DU VOL DE L'AVION. (Notes de Cours) TOULOUSE.	BOIFFIER, J. L.	*	*	*	*	*	X	*	*	X	*	*	*	*	*	*
2 0 0 1	STABILITY & CONTROL OF CONVENTIONAL & UNCONVENTIONAL AIRCRAFT CONFIGURATIONS. A GENERIC APPROACH. BoD™. Cranfield.(UK)	BERND CHUDOBA	X	*	X	*	*	X	*	*	X	*	*	*	X	*	X
2 0 0 1	THE DESIGN OF THE AEROPLANE; AIAA. USA	STINTON, D.	X	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	*	*	X
2 0 0 2	THE AIRPLANE, AIAA, RESTON VA, USA	J. D. ANDERSON,	X	X	X	X	*	*	*	*	X	*	*	*	X	*	X
2 0 0 4	AERODINÁMICA Y ACTUACIONES DEL AVIÓN (12ª ED). THOMSON/PARANINFO. MADRID. ESPAÑA.	CARMONA, A. I.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2 0 0 4	MECHANICS OF FLIGHT; John Wiley & Sons, Inc. New Jersey. USA.	PHILLIPS, W.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	X
2 0 0 4	FLIGHT DYNAMICS; Princeton University Press. Oxford. (UK)	STENGEL, R. F.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2 0 0 4	MECCANICA DEL VOLO. Edizione PLUS. Pisa Univrssity Press. Pisa. (It.)	CASAROSA, C.	*	*	*	*	*	*	*	*	X	*	*	*	X	*	*

Capítulo 19

BIBLIOGRAFÍA

1. Abzug, L. E. & Larrabee, E. E.; "Airplane Stability and Control". Cambridge University Press. (1997).

2. Ackroid, J. A. D. *Sir George Cayley, the father of aeronautics*. (Part 1). “*The invention of the aeroplane*”. Notes Rec. R. Soc. Lond. 2002 56, 167-181. (Part 2); Cayley’s Aeroplanes. Notes Rec. R. Soc. Lond. 2002 56. (Published September 22, 2002).
3. Ackroid, J. A. D. *Sir George Cayley*: “The Invention of the Aeroplane near Scarborough at the Time of Trafalgar”. Journal of Aeronautical History. Paper No. 2011/6.
4. Ackroyd, J. A. D, Axcell, B. P. & Ruban, A. I.; “Early Developments of Modern Aerodynamics”. AIAA (Reston, USA) & Butterworth-Heinemann (Oxford, UK). (2001).
5. Ader, C. “Sur des appareils d’Aviation”; L’Aérophile, 6^o année, Nos. 6, 7 y 8. Paris. (1898).
6. Airy, H., “The soaring of birds”. Nature, XXVIII, 1.596. (<1891)
7. Allen P. *The helicopter: an illustrated history of rotary-winged aircraft*. Shrewsbury, UK: AirLife, (1996).
8. Allen, H. S. “~ Normal Law of skin friction”; Phil. Mag. (1900).
9. Altmann, J., “Über die luftwiderstandsversuche des M. Canovetti und des M. L’Abbé Le Dantec”. Illustr. Mitt. No. 3. (Jul.) pp. 173-176. Strassburg. (1901).
10. Ananthkrishnan N and Ramadevi P. Consistent approximations to aircraft longitudinal modes. *J Guidance Dyn. Control*; 2002, 25: 820-824. (2002).
11. Anderson JD. *Introduction to flight*. 6th ed. New York, USA: McGraw-Hill, (2008).
12. Anderson JD. *The airplane: a history of its technology*. Reston, USA: AIAA, (2002).
13. Artigas, M. “Filosofía de la Ciencia”; Eunsa, España. (2005).
14. Aspinall, J. A. F. “Train Resistance”, Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Vol. 147, p.155. [*]
15. Avanzini, G. “Nuove riserche sulla resistenza de’fluidi”; Saggi scientifici e letterari dell’ Academia di Padova; Padova; pp. 96-113. (1794).
16. Babister AW. *Aircraft stability and control*. New York, USA: Pergamon

- Press, (1961).
17. Baden-Powell, B. “Practical Aerodynamics and the Theory of the Aeroplane”. Aeronautics Office: 27, Chancery Lane, London, W. C. (1909).
 18. Bairstow L. *Aerodinámica aplicada (in Spanish)*. Madrid, Spain: INTA, (1946).
 19. Bairstow, L. “Applied Aerodynamics”. New York. Longmans, Green & Co. (1919).
 20. Beaufoy, Col. M. “Nautical and Hydraulic Experiments, with numerous Scientific Miscellanies”, Vol. I. Private Press of Fleury Beaufoy. London, (1834).
 21. Beauplan R. *Necrologie de Paul Painleve (in French)*. *L'Illustration* no. 4731,4 Novembre (1933).
 22. Bender, E. A., “An Introduction to Mathematical Modeling”, Dover Pub. New York. (1978).
 23. Blix, M. “Une nouvelle théorie sur le vol à voile des oiseaux”. *Revue générale des sciences pures et appliquées*. Pag. 787. (1890).
 24. Bloor, D. “The Enigma of the Aerofoil. Rival Theories in Aerodynamics 1909-1930”; Chicago Press. (2011).
 25. Boiffier, J. L. “Dynamique du Vol de l'avion”, Sup Aéro - Département Aéronefs. Notes de Cours. Version 7.1. (Pág. 11 y ss.) Toulouse. (2001).
 26. Bothezat G. General theory of the steady motion of an airplane. NACA report no. 97, (1921).
 27. Bothezat G. The general theory of blade screws. NACA report no. 29, (1920).
 28. Bothezat, G. de; “Étude de la Stabilité de L' Aeroplane”; Thèse pour le doctorat. Faculté des Sciences de l'Université de Paris (1911).
 29. Boulet J. *L'histoire de L'helicoptere: racontee par ses pionniers 1907-1956 (in French)*. Paris, France: France-Empire, (1991).
 30. Boyd, T. J. M. “One Hundred Years of G. H. Bryan`s *STABILITY IN AVIATION*.” *Journal of Aeronautical History*. Paper No. 2011/4. (2011).
 31. Boyer, J., “Le vol plané des oiseaux réalisé mécaniquement”. *Cosmos, An.* 57. No. 1223. Paris. (1908).

32. Bretonnière, J. “Deux réponses explicatives au sujet de notre étude sur le vol plané”. *L’Aéronaute*, 24 année, No. 3. Pp. 58-63. Paris (1891).
33. Brillouin, M. “Stabilité des Aeroplanes, Surface Métacentrique”. *Revue de Mécanique*. (Février, avril, et aout de 1909).
34. Brockett, P. *Bibliography of Aeronautics; Smithsonian Miscellaneous Collections*. Vol. 55. Publication No. 1920. Washington. USA. (1910).
35. Bronstein, I. & Semendiaev, K. “Manual de Matemáticas para Ingenieros y estudiantes”. Ed. MIR. Moscú. (1977).
36. Bryan GH. *Review of artificial flight*. London, UK: Science Progress, (1897).
37. Bryan, G. H. “Stability in Aviation”. *An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motions of Airplanes*. By G. H. Bryan, Sc. D., F. R. S. MACMILLAN AND CO. LTD; ST. MARTIN’S STREET, LONDON, (1911).
38. Bryan, G. H. & Williams, W. “The longitudinal stability of aerial gliders”. *Proc. Roy. Soc. London*, ser. A, Vol. 73, pp. 100-116, (1904).
39. Bryan, G. H. “Die Stabilität der Flugzeuge”. Deutsche Übersetzung Von Bader. Berlin. 1914.
40. Burgos Moreno, Luna. “Estudio Aerodinámico CFD del primer modelo de planeador de G. Cayley (1804)”. Universidad Politécnica de València. (2015).
41. Boyd, T. J. M. “George Hartley Bryan-Prophet without honour?”. Ballard Matthews Lecture, Bangor University. 2011.
42. C. G. Grey. “JANE’S All the World Aircraft 1919”. David & Charles Reprints Ltd. Newton Abbot Devon. UK. (1969).
43. Cailletet, L. P; Collardeau, E. “Recherches expérimentales sur la chute des corps et sur la résistance de l’air à leur mouvement. Expériences exécutées à la Tour Eiffel”. *L’Aéronaute*, 25^e année, No. 7, Paris. (1892).
44. Canovetti, C. “Études sur la Résistance de l’air”. “*L’Aerophile*”, año 10, No. 6. Pág. 140-144. Paris.
45. Cayley, G. “ON AERIAL NAVIGATION (I), (II), & (III)”, “*A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*” (London, (I) Nov. 1809, (II) Feb. 1810, Mar. 1810).

46. Chanute, O. "Progress in Flying Machines", 1894. Ed. Lorenz & Herweg, Publishers. Long Beach, CA. (1976).
47. Chanute, O. Jackman W. J. & Russell Thos. H. "Flying Machines: Construction and Operation"; The Charles C. Thompson CO. (Not. Inc.) Chicago. (1910).
48. Cook MV. *Flight dynamics principles*. 2nd ed. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, (2007).
49. Crocco, G. "Étude sur la dynamique des ballons dirigeables"; Bolletino della societa aeronáutica italiana; (1907).
50. Crocco, G. "Sur la Stabilité des Dirigeables"; Note á l'Académie dei Lincei, Nov. 1904 et Académie des Sciences, T. 139. Paris. (Dic. 1904).
51. Culick, F. E. G. "What the Wright Brothers Did and Did Not Understand About Flight Mechanics-In Modern Terms". AIAA-2001-3385. (2001).
52. Davidson, R. O., "A new theory of the flight of birds"; H. Polkinhorn Printer, Washington. (1858); ver también *Scientific American*, 27 Marzo. (1871).
53. De Borda, J. C. "Expériences sur la Résistance des fluides". Mémorial de l'Academie Royale des Sciences. Paris. (1763).
54. De Bothezat, G. "Étude de la Stabilité de L' Aeroplane", Thèse présentée a la Faculté des Sciences de Paris. (Janvier de 1911) Avec un préface de Paul Painlevé. H. DUNOD ET E. PINAT, EDITEURS. PARIS (1911).
55. De Villamil, R. "Resistance of Air", E. & F. N. Spon, Ltd., 57 Haymarket, S. W. 1. London. (1917).
56. Desdouits. "Application de la méthode rationnelle aux études dynamométriques, Appareils et procédés d'expériences. Resultats obtenus dans l'étude de la résistance des trains". Annales des Ponts et Chaussées, 1, 1889.
57. Didion, I. "Traité de Balistique", J. Dumaine, Librairie-Éditeur de L'Empereur / Mallet-Bachelier, Imprimeur-Librairie de L'École Polytechnique du Bureau de Longitudes. Paris, (1860).
58. Dines, "On Wind Pressure upon an inclined surface". Proc. Royal Soc. (1890). "On the Variations of Pressure caused by the wind blowing across the Mouth of a Tube"; Quaterly Journal, Royal Mat. Soc. XVI, No 76. (1890); "Some Experiments made to Investigate the Connection between the Pressure and the Velocity of the Wind", Quat. Journ. Royal Met. Soc. Vol XV, (1889). "Mutual

- Influence of two Pressure Plates upon each other”, Quaterly Journal, Royal Mat. Soc. XVI. (1890)
59. Dines, W. H. “On wind pressure upon an inclined surface”. Proceedings of the Royal Society. Vol XLVIII. London. (1890).
60. Dines, W. H. “Some experiments made to investigate the connection between the pressure and the velocity of the wind”. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. Vol. XV. No. 72. London. (1889).
61. Dubuat. “Principes d’hydrodynamique et d’hydraulique verifiés par un grand nombre d’expériences faites par ordre du gouvernement”; Paris. (1779).
62. Duchemin, N. V. “Récherches expérimentales sur les Lois de la Résistance des Fluides”. (Mémorial de l’Artillerie, V). Imp. Bachelier, Paris. (1842).
63. Duchemin, N. V., “Espériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents”. Société Francaise de Physique. (1801).
64. Duchêne, E. A. “The Mechanics of the Aeroplane” a Study of the Principles of Flight (Traducida del francés por Ledebøer, J. H.); Longmans, Green & CO. 39 Paternoster Row, London. (1912).
65. Dupré, P., “La Résistance de l’air sur un plan augmente lorsque ce plan subit un déplacement lateral. Cause de cette augmentation”. L’Aéronaute, année 25, Abril pp. 75-82. Paris. (1892).
66. Durham, W. “Aircraft Flight Dynamics & Control”. Wiley. (2013).
67. Dzhevetskiy, S. “Theoretical solution of the problema of soaring of birds” (en ruso). San Petersburgo. (1891).
68. Edgeworth, R. L. “Experiments upon the resistance of the air”. Phil. Trans. Roy. Soc. 73; London. (1782).
69. Eiffel, G. “Installation d’un laboratoire d’aérodynamique”. Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France. (1910).
70. Eiffel, G. “La Résistance de l’Air et l’ Aviation”, Expériences effectuées au Laboratoire du Champ-De_Mars. H. Dunod et E. Pinat, Éditeurs. Paris (1910).

71. Eiffel, G., “Recherches expérimentales sur la résistance de l’air exécutées á la tour Eiffel”. Maretheux, Paris, (1907).
72. Eiffel, G. “La Résistance de l’Air”, Examen des Formules et des Expériences, H. Dunod et E. Pinat, Éditeurs. Paris (1910).
73. Engineering Sciences Data Unit (ESDU). HIS Group. “Fluid Forces and Moments on Flat Plates”, No. 70011. (1970).
74. ESDU 70015 (Cfr. “*Fluid Forces and moments on flat plates*”; Royal Aeronautical Society Data Sheets. (1970).
75. Etkin B. *Dynamics of atmospheric flight*. New York, USA: John Wiley and Sons, (1972).
76. Etkin, B. & Reid, L. D. “Dynamics of Flight. Stability and Control”. John Wiley & Sons. New York. (1996).
77. Etkin, B. “Dynamics of Atmospheric Flight”. John Wiley & Sons. New York. (1972).
78. Etkin, B. “Dynamics of Flight. Stability and Control”. John Wiley & Sons. New York. (1959).
79. Etkin, B. OB_11889_11901] “Dynamics of Flight”. McGraw-Hill. Ediciones de 1959, 1974, 1989.
80. Euler, L., “Recherches plus exactes sur l’effect des moulins à vent”. Mém. Acad. Berlín, Vol 12. (Citado por [105]). (1756).
81. Ferber, F. “L’AVIATION, Ses debuts-son développement”. Berger-Levrault & Cie Éditeurs. Paris/Nancy. (1909).
82. Ferber, F. “Les Progrés de L’AVIATION depuis 1891 par le vol plané”. Extrait de la Revue d’Artillerie. Paris. (Mars 1904).
83. Ferber, F. Revue D` Artillerie 67, i, ii, Oct. Nov. (1905).
84. Finsterwalder, S. “Aërodinamik”. Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band IV, Teil II, No 17. Leipzig, (1902).
85. Finzi, G. e Soldati, N. “Experimenti sulla dinámica dei fluidi”. Milano. (1903).
86. Froude, W; “*Rapports présentés aux Lords Commissaires de l’ Almirauté, etc...*”; (Mémorial du Génie Maritime, (1875).

87. Fuch, R. Hopf y Seewald. "Aerodinámica", 1936. INTA, Madrid, (1945).
88. Gaston, X. "Les Aeroplanes de 1910", Étude technique avec plans cotés pour la plupart des principaux Aeroplanes existant au début de 1910. Librairie Aeronautique, 32 Rue Madame, Paris. (1911).
89. Gates, S. B., "A Survey of Longitudinal Stability below the Stall, with an Abstract for Designer's Use", R & M No. 1118. (1927).
90. Giacomelli, R. y Pistolesi, E. "Aerodynamic Theory"; Vol. I. D. Historical Sketch; California Institute of Technology. (1934).
91. Gibbs-Smith, C. H. "The invention of the Aeroplane"; (1799-1909); Faber and Faber. 24 Russell Square. London. (1966).
92. Gibbs-Smith, C. H. *Sir George Cayley's Aeronautics 1796-1855*. London. Her Majesty's Stationery Office. (1962).
93. Gibson, J. C. "The Definition, Understanding and Design of Aircraft Handling Qualities"; Series 03. Control and Simulation 01. Delft University Press. (1997).
94. Gillmour, S. Biography in Dictionary of Scientific Biography (New York 1970).
95. Giradville, L. "Poids utile maximum que l'on peut soulever en aéroplane". L'Aérophile, année 16, No 9. Paris. (1908).
96. Glauert, H. "The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory". Cambridge. (1926). (Trad. "Fundamento de la Teoría del Ala y de la Hélice"; Pub. I. N. T. A. Madrid, 1946).
97. Goupil, "Au tour du coefficient K. Pour le calcul d'un Aéroplane". L'Aérophile, 16^e année, No. 23, pp. 484-485. Paris. (1908).
98. Goupil, "La Locomotion Aérienne", Imp. De A. Pouillard. Charleville (1884).
99. Goursat, E. "Cours d'Analyse mathématique", Vol. 2. Gauthier-Villars. Imprimeur-Libraire. Paris. (1910).
100. Graham W. R. Asymptotic analysis of the classical aircraft stability equations. *Aeronaut. J* 1999, 103: 95-103. (1999).
101. Greenhill, G. "The Dynamics of Mechanical Flight", Lectures delivered at the Imperial College of Science and Technology, March 1910 and 1911. London. Constable and Company Ltd. (1912).

102. Grover Cleveland Loening; “Monoplanes & Biplanes”, Munn & Company, Inc. (1911).
103. Hagen, G. “Messung des Widerstandes den Planscheiben erföhren wenn sie in normalen Richtung gegen ihre Ebene durch die Luft bewegt werden”. Berlin. Akad. Anhandl. (1874).
104. Hancock GJ. *An introduction to the flight dynamics of rigid aeroplanes*. New York, USA: Ellis Horwood, (1995).
105. Hansen, J. R., Ed. “*The Wind and Beyond*”, Vol. 1. NASA History Series. (2003).
106. Hasenfeld. “Sur la navigation aérienne par Sir George Cayley”; L’Aéronaute, 10^e année, No. 6 (pp. 179-182); No. 7 (pp. 203-209); No. 8 (pp.235-236); No. 9 (pp. 256-260); No. 10 (289-293) y No.11 (pp. 317-329). Paris. (1877).
107. Hazen, A. “American Journal of Science”, Vol. 234, Pág. 241. [*]
108. Herrera Linares, E. “Conferencias de AEROTECNIA”. Madrid. (1928).
109. Hoerner, S. F. “Fluid Dynamic Drag”, Published by the Author. New Jersey. USA. (1965).
110. Hopf, L. “AERODYNAMIK. (I Band) Mechanik des Flugzeugs”; Verlag Von Julius Springer. Berlin. (1934).
111. Hubbard, T O’B; Ledebøer, J. H; Turner, C. C. “The Aeroplane”, an elementary text-book of the principles of mechanical flight. Longmans, Green & CO. 39 Paternoster Row, London. (1911).
112. Hunsaker, J. “Dynamical Stability of Airplanes”, Proceedings of the American Academy; Boston. (1916).
113. Hutton, C. “Abstract of experiments made to determine the true resistance of the air to the surfaces of bodies, of various figures, and moved through it with different degrees of velocity”. Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 11. (1790).
114. Huygens, C. “Oeuvres Complètes”, Paris, (1735).
115. Jane, Fred. T. “JANE’S All the World Aircraft 1913”. ARCO Publishing Company Inc. New York. (1969).

116. Jarrett, Ph; “F. W. Lanchester and the Great Divide”. Journal of Aeronautical History. Paper No. 2014/02.
117. Joëssel. “Rapport sur des expériences relatives aux gouvernails”; Repport 9; “Mémorial du Génie Maritime”, 1873. [43] Kummer, E. E. “Über die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt ins besondere sauch auf die Geschosse”, Berlin. Bachdruckerei der Königl. Akademie der Wissenschaften; (G. Vogt), Universitats -strassen, 8, (1875).
118. Karamcheti, K. “*Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*”; 474 y ss. Krieger Publishing Company (1966).
119. Katz, J. & Plotkin, A. “Low Speed Aerodynamics”, Cambridge University Press. (1991).
120. Klein, F. “*Elementar Mathematik vom höheren Standpunkt aus*” (1908). Hemos usado la traducción: “*Matemática Elemental desde un punto de vista superior*”. Aritmética y Álgebra. Segunda edición. Editorial Ibero-Americana. Buenos Aires; (1948).
121. Köppen, W. “Beiträge zur Mechanik des Fluges und schwebenden Falles“; Illustrierte Aeronautische Mittellungen, No. 4. Strassburg. (1901). También: “Illustrierte Aeronautische Mittellungen, No. 4”. (1904).
122. Kummer, E. E. “Über die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt ins besondere sauch auf die Geschosse”, Berlin. Bachdruckerei der Königl. Akademie der Wissenschaften; (G. Vogt), Universitats -strassen, 8, (1875).
123. Kutta, W. M. “Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten”; Illustrierte Aeronautische Mitteilungen, 6, (133-135), (1902).
124. Kutta, W. M. “Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung”, Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1910, 2. Abhandlung. (1910).
125. Lagerhjelm, P. Forselles & Kallstenius. 1811. (Ref. [44]).
126. Lamb, H. “HydroDynamics”, Cambridge University Press, (1879).

127. Lanchester, F. W. AERODYNAMICS, CONSTITUTING THE FIRST VOLUMEN OF A COMPLETE WORK ON AERIAL FLIGHT". D. VAN NOSTRAND COMPANY. London. (1907).
128. Lanchester, F. W. ; Paper to the Birmingham Natural History and Philosophical Society (1894).
129. Lanchester, F. W. "Flight according to Lanchester", Flight, (Págs. 292-298) May 22, (1909).
130. Lanchester, F. W. "Lanchester Hypothesis, Langley error and a review of their Theories", Flight, (Págs. 357-359). Jun 19, 1909.
131. Lanchester, F. W. "Laws of Flight". Paper read before the British Association of Dublin. (Sept, 8, 1908).
132. Lanchester, F. W. "The Flying Machine from an engineering standpoint", (James Forrest Lecture 1914).D. Van Nostrand Company. 25 Park Place, (1918).
133. Lanchester, F. W. "The Flying-machine from an Engineering Standpoint. "JAMES FORREST" Lecture. Institution of Civil Engineers; (May 1914).
134. Lanchester, F. W. AERODONETICS, CONSTITUTING THE SECOND VOLUMEN OF A COMPLETE WORK ON AERIAL FLIGHT. Archibald Constable & CO. LTD. Orange Street Leicester Square. London (1908).
135. Langley, S. P. "Experiments in aerodynamics", Smithsonian contribution to Knowledge, No 801. Washington. (1902).
136. Langley, S. P. "Langley Memoir on Mechanical Flight", Part. I (1887 to 1896). Smithsonian Contributions to Knowledge, Vol. 27, No 3. Washington, (1911).
137. Lilienthal, O. "*Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Ein Beitrag zur systematik der Flugtechnik*". Berlin: R. Gaertners Verlagbuchhandlung. (Ed. de American Aeronautical Archives; Markowski International Publishers, One Oakglade Circle, Hummelstown, PA 17036 USA. Email: amaeroarch@aol.com). (1889).
138. Lilienthal,O. (1889). "Artificial Flight". Moedebeck, H. "Taschenbuch zum praktischen Gebrauch für Flugtechniker und Luftschiffer, unter Mitwirkung von Ingenieur O. Chanute, Dr. R. Emden, K. u. K. Hauptmann, H. Hoernes,

Prof. Dr. W. Köppen, Prof. Kremser, Dr. W. Kutta, Ingenieur O. Lilienthal, et Alia. W. H. Küllhs Verlag, Berlin. (1909).

139. Loening, G. C. "Monoplanes and Biplanes", New York, Munn & Company, Inc. (1911).
140. Loessl F. R. Von, . "Die Luftwiderstand-gesetze der Fall durch die Luft und die Vogelflug", Viena, Zeitschrift für Luftschiffahrt. Vol. 1, (1886).
141. Loughheed, V. "Vehicles of the Air", a Popular Exposition of Modern Aeronautics with Working Drawings; Publishers: The Reilly and Britton Co. Chicago. USA. (1909).
142. Love, "Theory of Discontinuous Fluid Motion", Proc. Cambridge Phil. Soc. VII. (1891).
143. Luyties, O. G. "On the resistance of air to the motion of plane surfaces", "American Magazine of Aeronautics, Vol 1, No. 3, pp. 10-13; New York. (1907).
144. Maewsky, "Cours de Balistique extérieure". San Peterburgo, (1870).
145. Magraner-Rullán, J. P. & Martínez-Val, R. "The Birth of Airplane Stability Theory". Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering 2014, Vol. 228(9) 1498-1506. (2014).
146. Mannesmann, O. "Messungen des Luftwiderstandes durch ein neues Rotationsapparat". (Trad. "Mesure de la Résistance de l'air avec un nouvel appareil de rotation"). Annales de Wiedemann, Vol. LXVII. (1899).
147. Marchis, L. "Experimental Researches on the Resistance of Air". NACA RP No. 12. (1917).
148. Marchis, L. "Lecons sur La Navigation Aérienne". Université de Bordeaux. Faculté des Sciences. Dunod Editeurs. (1903-1904).
149. Marchis, M. L. "Le navire Aérien". Dunod et Pinat, paris. (1909).
150. Marey, E. J. "Changement de direction et de vitesse d'un courant d'air qui rencontre des corps de forms diverses". Comp. Rend. Acad. Sci. T. 132 (Junio, pp. 1291). Paris. (1901).
151. Marey, E. J. "La Machine Animale. Locomotion terrestre et aérienne". Bibliothèque scientifique Internationale. Germer-Baillière. Paris. (1882).

152. Marvin, C. F., “Wind Pressures and the measurement of wind velocity”. Amer. Meteor. Journ. Vol. 7. (pp. 487-497) Ann Arbor, Michigan. USA. (1891).
153. Maxim, H. “Natural and artificial flight”, 1908. (Trad. “Le vol naturel et el vol artificiel”, Maxim-Espitallier, Dunod et Pinat, Paris (1909).
154. Maxim, H., “Century Mag.”, xlii, Págs. 829 y 836. (1891).
155. McRuer D, Ashkenas I and Graham D. *Aircraft dynamics and automatic control*. Princeton, USA: Princeton University Press, (1990).
156. Mendeleyev, D. I., “De la Résistance des fluides et de la navigation Aérienne”. San Peterburgo, (1880).
157. Milne-Thomson, L. M. “Theoretical Aerodynamics”, (Págs. 166, 184) DOVER, NY. USA. (1958).
158. Moedebeek, H. W. L. & Chanute, O. & others. “Pocket-Book of Aeronautics”. London. Whittaker & Co. 2 White Hart Street, Paternoster Square, E. C. and 64 & 66 Fifth Avenue, New York. (1907).
159. Moolman V. *The road to Kitty Hawk*. Amsterdam, The Netherlands: Time Life, 1980.
160. Morin, P., “Observations sur la loi de mouvement d’ascension et sur les variations de densité de l’air”; Comptes Ren. Acad. Sciences, Vol. 68. Paris. (1869).
161. Mouillard, L. P. “L’empire de l’air; essai d’ornithologie appliquée a la aviation”. Masson Editeur, Librairie de l’Académie de Medicine, 120. Boulevard Saint-Germain. Paris (1881).
162. Munk, M. “General Theory of thin wing sections”; NACA Report No. 142. (1921).
163. Munk, M. “The Determination of the Angles of Attack of zero Lift and of zero Moment based on Munk’s integrals”; NACA Technical Note No 122. (1923).
164. Napolitano, M. “Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation”. John Wiley & Sons. (2012).

165. Newton, I. “Philosophia Naturalis Principia Mathematica”; Prop. XXXVII, Book II. (Ed. Daniel Adee, 45 Liberty Street. New York). (1678).
166. Painlevé, P. “Cours de Mécanique et Machines”; Théorie de L’Aéroplane. Ecole Polytechnique *de Paris*. (1908).
167. Painlevé, P. & Borel, E. “L’Aviation”, Librairie Félix Alcan; Boulevard Saint-Germain, Paris. (1911).
168. Painlevé, P. “Cours de Mécanique de l’Aviation” École supérieure d’Aéronautique. Paris. (1908).
169. Painlevé, P. “Étude sur le régime normal d’un Aéroplane”. La Technique Aeronautique, Num. 1, Janvier (1910).
170. Painlevé, P. “L’Aéroplane”, IV Congrès International d’Aeronautique. Nancy, 18- 23 septembre. Dunod et Pinat, Editeurs. (1909).
171. Painlevé, P. “Théorie de l’Aéroplane” (Extrait du cours de Mécanique de L’Ecole Polytechnique de Paris, (1908-1909).
172. Pamadi, Bandu N. *Performance, stability, dynamics and control of airplanes*. 2nd ed. Reston, USA: AIAA, (2004).
173. Parseval, A. Von; “Die Mechanik des Vogelfluges”; Wiesbaden. (1889).
174. Peal, S. E., “Soaring of Birds”; Nature, Vol. XXIII, 1.11.
175. Pénaud, A. “*Discours prononcé le 14 de mars de 1878 dans la séance générale de la Société de Navigation Aérienne*”. (1878).
176. Pénaud, A. “*L’ Aeroplane Automoteur avec équilibre automatique*”. L’Aéronaute”, Bulletin Mensuel International de la NAVIGATION AÉRIENNE; 5^o ANNEÉ, N^o 1-12, Paris (1872).
177. Pénaud, A. “*Lois du Glissement dans l’Air*”. L’Aéronaute”, Bulletin Mensuel International de la NAVIGATION AÉRIENNE; 6^o ANNEÉ, N^o 1 Paris. (1873).
178. Pénaud, A. “Recherches sur la résistance des fluides”. Bulletin de la Societé Philomatique de Paris. (9 nov 1878).
179. Pénaud, A. “*Sur la force des êtres volants*”. Communication faite á la Société Philomatique. (L’Institut, 1876).

180. Pénaud, A; Gauchat, P. “Un brevet d’aeroplan”. L’Aeronaute, 10 année, No 10. Pp. 274-289. Paris. (1877).
181. Perkins C. D. “Development of airplane stability and control technology”. 1970 Von Karman Lecture. *Journal of Aircraft* 1970; Vol., No. 4. Págs. 290-301. (1970).
182. Phillips WF. *Mechanics of flight*. 2nd ed. USA: John Wiley and Sons, (2010).
183. Phillips WF. Phugoid approximation for conventional airplanes. *J Aircraft*. 2000; 37: 30-36. (2000).
184. Piobert, Morin et Didion, J. Mémorial de l’Artillerie, No 5. 1842. / Didion, J. “Recherches sur la plus grande vitesse que l’on peut obtenir par la navigation aérienne”; Metz. (1838).
185. Pole, W. “Sur la Resistance de l’air au point de vue de la navigation aérienne”. Proc. Inst. Civ. Eng. Vol. 69, Pág. 205. (1886). [*]
186. Poncelet, J. V. “Introduction à la mécanique industrielle, physique ou expérimentale; Imp. Gauthier-Villars; Paris. (1870).
187. Poynting & Thomson, “Properties of the matter”; Cap. XVIII.
188. Pradeep S and Kamesh S. Does the Phugoid frequency depend on speed? *J. Guidance, Dyn. Control.* / 1999; 22: 372-373. (1999).
189. Prandtl, L. “Mitt. Goettingen Aerodyn. Lab; Zeit. Für Flug. V.” (1910).
190. Prandtl, L. “Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics”, NACA Report 116. (1923).
191. Quittner, V., “Untersuchung über die Stabilität der Flugzeuge”. Jb. Wiss. Ges. Luftf. Bd. 3 (1914/15) S. 144. (Citado en [8]). (1910).
192. Quittner, V., “Investigation sur la stabilité des Avions”; La Technique Moderne; Revue Universelle illustrée des Sciences Appliquées à l’industrie et à l’agriculture; Paris. Dec. 1910, y Feb. 1911.
193. Rankine, “Principles Relating to Stream Lines”; The Engineer, (Oct. 16, 1868) y Phil. Trans. London. (1864). Y también: “Miscellaneous Scientific Papers”, XXXIII.

194. Rateau, “Recherches Dynamiques”. *Aerophile*, V. 17, P. 338. Paris. [*]
195. Rateau, A. *L’Aerophile*, No 15. Aout. Paris. (1909).
196. Rayleigh, L. “On the Resistance of Fluids”, *Philosophical Magazine*, Vol 2; 13. Edinburgh. (1876).
197. Rayleigh; “The soaring of birds”; *Nature*, Vol. XXVIII, 1.53 1. (<1891)
198. Recknagel, G. “Über Luftwiderstand”, *Annalen der Physik*, Vol 246, Is. 8, (677-694); 1880./ *Zeit. Ver. Deut. Ing.* (1886).
199. Reichel, M. W. “Train électrique a marche rapide, par M. W. reichel, ingénieur chef de la société Siemens and Halske”. *Elektrotechnische Zeitschrift*, (1901).
200. Reissner, H., “Die Seitensteuerung der Flumachinen”. *Z. Flugtechn. Motorluftsch.* Bd. 1. S.101 u 117 (Citado en [8]). (1910).
201. Renard, C. “L’Aviation”; *Scientific American Supplement*. Vol. 34, p. 12819. New York. (1892).
202. Renard, Ch. “Nouvelles expériences sur la Resistance de l’Air”, *Rev. L’Aéronautique*, año 2, Enero, Pág. 31. Paris. (1889).
203. Renard, P., “Virage des aéroplanes”. *C. R. Acad. Scienc.* Vol. 146; No. 20. Paris. (1908).
204. Rennie, “On Resistance of Bodies in Air”, *Trans. Royal Society*, p.423. (1831).
205. Riabouchinsky. *Bulletin de l’Institut aérodynamique de Koutchino*. Golicke and Wiltborg. Saint Petersburg. Rusia. (1906).
206. Ricour. “Experiments conducted in 1885 on the resistance of the air par Ricour”. *L’Aéronaute*, 30^e année, No. 5, pp. 110-112, Paris (1887).
207. Robins, B. “New Principles of Gunnery”. Londres, 1742. (Vid. [103]). (1742).
208. Routh, E. J. “Dynamics of a System of Rigid Bodies”; *MacMillan & Co.* London. (1892).

209. Routh, E. J. “*A Treatise on the Stability of a given state of motion, particularly steady motion*”. MacMillan & CO. London. (1877).
210. Routh, E. J. “The elementary part of a treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies”. Part I. MacMillan & CO. LONDON. (1897).
211. Russell JB. *Performance and Stability of Aircraft*. London, UK: Arnold, (1996).
212. Russell, S. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, V. 5, p. 288. [*]
213. Rutherford A., “Mathematical Modeling”, Dover Pub. New York. (1978);
214. Sanguinetti, J. J. “Lógica (de los principios físicos)”, Eunsa. España. (2004);
215. Schmidt, D. K. “Modern Flight Dynamics”. The McGraw-Hill Companies. (2012).
216. Sée, A. “Les Lois Expérimentales de L’Aviation”, Gauthiers-Villars, Imprimeur-Librairie, du Bureau des Longitudes, de L’École Polytechnique de Paris. (1912).
217. Simón Calero, J., “La Génesis de la Mecánica de los Fluidos, (1640-1780)”. UNED, Madrid, (1996).
218. Sinha, N. K. & Anathkrishnan, N. “Elementary Flight Dynamics, with an introduction to Bifurcation and Continuation Methods”. CRC Press. Taylor & Francis Group. Boca Raton. (2014).
219. Smeaton, “The Natural Powers of Water and Wind”; Philosophical Transactions, Vol. LI, 1759. [*]
220. Soreau, R. “*État actuel et avenir de l’aviation*”, Librairie des Sciences Aéronautiques. Louis Vivien, 20. Rue Saulnier, PARIS. (1908).
221. Soreau, R. “Nouvelle Loi de la Resistance de l’Air”, Soc. Ing. Civ. Pag. 464, v. 2, Paris. (1902).
222. Spratt, G. A. “Curvature a relative term”. Aeronautics, Vol. 2 No. 3 New York (1908).
223. Sproule, John R. *Cayley’s 1853 Aeroplane*; FLIGHT International, 13 Dec. (1973).
224. Stanton, T. E. “Experiments on Wind Pressure”; Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Eng. Vol. 171; Part I. London. (1907-1908).

225. Stokes, “Stokes Scientific Papers”, Vol iii.
226. Tchaplyguine, S. A., “Des jets des fluides gazeux”, Pág. 105. Moscu. (1902).
227. Tewari, A., “Atmospheric and Space Flight Dynamics”, Modeling and Simulation with MATLAB ® and Simulink ®. Birkhäuser. Berlin. (2007).
228. Thompson, J. J. “Motion of Vortex Rings”; Nature, XXIV, P. 47.
229. Torenbeek E. and Wittenberg H. *Flight physics. Essentials of aeronautical disciplines and technology with historical notes*. Dordrecht, The Netherlands: Springer, (2009).
230. Toussaint, A. “L’Aviation Actuelle”; Librairie Félix Alcan, 108 Boulevard Saint-Germain, 108. Paris. (1928).
231. U.S.A.F. STABILITY AND CONTROL DATCOM, by Hoak & Alia. Flight Control Division. Air Force Flight Dynamics Laboratory. Wright-Patterson AFB. Ohio. USA. (1978).
232. Villamil, Col. R. de. “The Sine Square Law”, Aeronautics, Pág. 55-56. London. (1913).
233. Voisin, G et C; Ferber, F et Joliot, A. “Sur le valeur de “K” en matière d’Aviation”; “La Revue d’Aviation”, 2e année, p. 5, Paris. (1907).
234. Von Kármán T. *Aerodinámica: temas seleccionados a la luz de su desarrollo histórico* (in Spanish). Madrid, Spain: INTA, (1954).
235. Von Kármán, T.; “Lanchester’s Contributions to the Theory of Flight and Operational Research”; The First Lanchester Memorial Lecture; The Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 62, No 566. (1958).
236. Von Mises, R. “*Theory of Flight*”, McGraw Hill, New York. (1945).
237. Wegener PP. *What makes airplanes fly? History, science and applications of aerodynamics*. 2nd ed. New York, USA: Springer, (1997).
238. Weylher; “Observations sur le vol plané par orbes”. L’Aéronaute. (1890).
239. Wright, W. & O. “The early history of the Airplane”, Pub. The Dayton-Wright Airplane Co. Dayton-OHIO. (1909).
240. Wright, W. & O. “The Papers of Orville & Wilbur Wright”; Vol I, 1899-1905. Including the Chanute- Wright letters and other papers of Octave

Chanute. Sponsored by Oberlin College. Mervin McFarlan, Editor. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York. (1953).

241. Yaroshevsky, V. A. "On the Investigations of N. E. Zhukowsky Devoted to Flight Dynamics"; International Journal of Fluid Mechanics Research, Vol. 26, No. 4, (1999).
242. Zahm, A. F. "Resistance of the Air at speeds below one thousand feet a second". Philosophical Magazine; Ser. 6. Vol 1, No 1. London. (1901).
243. Zahm. "STABILITY OF AEROPLANES AND FLYING MACHINES", PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON AERIAL NAVIGATION. (Chicago, August 1893). "The American Engineer and Railroad Journal", 47 Cedar Street, New York, (1894).
244. Zhukowsky, N. E. "Collected Papers"; (Vol 5), 1891. "*On Soaring of Birds*" (22-10-1891). Boletín de la Sociedad Aeronáutica de Moscú. Núm. 1-3. (Reprint, de Bureau of Foreign Science and Technology, Berlin, 1922). (1891).
245. Zhukowsky, N. E. "*Dynamics of Airplanes in Elementary Description (First Paper)*" (1913). N. E. Zhukowsky "Collected Papers"; (Vol 5). (1913).
246. Zhukowsky, N. E. "*On Fall of Light Oblong Bodies Rotating about their longitudinal axes in Air (Second Paper)*" de 1906. N. E. Zhukowsky "Collected Papers"; (Vol 5). (1906).
247. Zhukowsky, N. E. "Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger", Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt; (1910).

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA²²⁹

1. Anón. "An attempt to obtain a greater measure of longitudinal Stability in a model". *Flight*, V. 5, No. 15. Pág. 421. London. (1913).
2. Anón. "*La Stabilité Longitudinal des Aéroplanes*"; *L'Aerophile*, Paris, v. 1, No. 12. Paris. (1908).
3. Anón. "La Stabilité longitudinales des aéroplanes". *La Technique Aéronautique*. No. 92. Págs. 231-232. Paris. (1913).
4. Arnoux, René. "*L'Equilibre Longitudinal et la courbure des surfaces portantes des aéroplanes*". *Mémoires et travaux de la Société des ingénieurs civils de France*; v. 63, No. 1, Pág. 45-59. Paris. (1910).
5. Astier, F. "*Queues Stabilisatrices*"; *L'Aerophile*, v.3; No. 228. Pág. 3. Paris. (1911).
6. Atkinson, O. D. "*Longitudinal Stability*". *Flight*, V 4, No. 6, 11, 16. Pág. 124, 252 y 261. London. (1912).
7. Bairstow, L. "*An Examination into the longitudinal Stability of a monoplane of Bleriot type based on the data furnished by the model experiments. (Also, lateral stability...)*". A. R. C. R&M No. 79. London. (1913).
8. Bairstow, L. and Nayler, J. L. "The longitudinal motion of an aeroplane in a natural wind when use is made of the elevator". A. R. C. R&M No. 121. (1914).
9. Bell, H. Gardiner. "*The Stabilizing effect of the stationary tail*". *Bulletin of the Aerial Experiment Association, Beinn Bhreagh*. Get. 26. N.s. No. 16, Pág. 45. (1908).
10. Blard. "Sur la Stabilité longitudinale des Aéroplanes"; *L'Aerophile*. V. 4; No. 428. P. 2. Paris. (1912).
11. Branwell, F. H. & Relf, E. F. "*Calculations of the longitudinal stability factors of a biplane over the whole range of its flying speeds*". A. R. C. R&M No. 122. London. (1913).
12. Bruce-Walker; "*Longitudinal Stability*"; *Flight*, v. 2, No. 9. P. 145. 26 Feb. (1910).
13. Brunet, L. "*L'Abaissement du centre de gravité et la stabilité des aéroplanes*". *L'Aeronaute*, Vol. 44, No. 571, pág. 21-22. Paris. (1911).

²²⁹ La bibliografía que se cita en este segundo listado llegó a conocimiento del autor demasiado tarde para ser consultada. Se incluye aquí a efectos de mayor completitud. Resulta también indicativa del número intensamente creciente de publicaciones de la época sobre *estabilidad longitudinal de los aeroplanos*.

14. Bryan, G. H. "*Longitudinal Stability*". Knowledge and illustrated scientific news, London, v. 4, No. 7; Págs. 155-156. (1907).
15. Chatley, H. "*Longitudinal Stability of aeroplanes considered from the condition of maximum angular amplitude*". Aeronautics, v. 4, No. 40. Pág. 82-84. London. (1911).
16. Chatley, H. "Note on the Stability of the aeroplane with forward balancer". Engineering, v. 91; Pág. 778. London. (1911).
17. Clarke, T.; "*Longitudinal Stability*"; Flight, v. 2, No. 12. P. 223. 19 March. (1910).
18. Crocco, G. A. "*Perfezionamenti nella stabilità longitudinale degli aeroplani*". Rendiconto delle esperienze e degli studi eseguiti nello Stablimento di esperienze e costruzioni aeronautiche del genio, Vol. 2 No. 1. (1913).
19. De Bothezat, G. "*Le Mécanisme de l'action des empennages stabilisateurs horizontaux des aéroplanes*". Revue Mécanique; v. 29, No. 4. Pag. 305-313. Paris. (1911).
20. De Bothezat, G. "Théorie générale de l'action stabilisatrice des empennages horizontaux de l' aéroplane". Revue Mecanique, V. 33, No.2. Pag 162-187. Paris, (1913).
21. Duchêne, E. A. "*De l' influence de la courbure des voilures sur la stabilité longitudinale des aéroplanes*". La Technique Aéronautique, V. 5, No. 50, p. 38-50. Paris. (1912).
22. Espitallier, G. "*La Position du Centre de Gravité et son influence sur la Stabilité*". Technique Aéronautique, v. 3; No. 43. Pág. 198-208. Paris. (1911).
23. Fitzgerald, M. F. "Longitudinal Stability". Flight, V. 4, Nos. 8 y 13. Pág. 183 y 298. London. (1912).
24. Fox, Walter E. "*Longitudinal Stability in the Wright Machine*". Aero, v. 2, No. 34, Pag. 33. London. (1910).
25. Gratiot, R. "L' Équilibre longitudinal des aéroplanes". La Revue Aérienne. V. 6, No. 123. Pág. 633-638. Paris. (1913).
26. Knoller, R. "Über längsstabilität der drachenflugzeuge". Z. F. M. (1911).
27. Lanchester, F. W. "*Catastrophic Instability*"; H. M. Stat. Office. A. R. C. R&M No. 114. London. (1913).
28. Leroux, P. "*L' équilibre longitudinale de l'aéroplane*". Technique Aéronautique, V. 5, No. 49 (p. 20-24), 50 (p. 56-62) y 52 (p. 110-122). Paris. (1912).

29. Merrill, A. A. "Effect of distribution of weight on stability". *Aero & Hydro*. V. 6, No. 11, p. 210. Chicago. (1913).
30. Merrill, A. A. "The Concentration of Weight in a Flying machine and its effect on stability". *Aeronautics*. V. 11, No. 1. Pág. 14. New York. (1912).
31. Ozouf, R.; "*Longitudinal Stability*"; *Flight*, v. 3, No. 10. P. 212. 26 Feb. (1911).
32. Seé, A. "*Sur un nouveau principe de stabilité longitudinale des aéroplanes*". *L'aerophile*, V. 21, No. 7. Pág. 150. Paris. (1913).
33. Steele, J. E. "Skimmers and hydroaeroplanes. The longitudinal stability". *Flight*, V. 5, No. 28 y 29; Págs. 770-771 y 803-805. London. (1913).
34. Strong, H. T. "*Longitudinal Stability of aeroplanes*". *Scientific American Supplement*. V. 66; No. 1714. Pág. 292. New York. (1908).
35. Thouveny, L. "*L'Abaissement du centre de gravité et la stabilité des aéroplanes*". *L'Aéronaute*, Vol. 43, No. 566, pág. 461-462. Paris. (1910).
36. Vasserot, T. "*Stabilité Longitudinale des Aéroplanes à queue portante*". *La Technique Aéronautique*. Vol. 4, No. 44. Pág 217-223. Paris. (1911).
37. Walkden, S. L. "*Longitudinal Stability in Gusts*". *Aeronautics*, v.5, No. 48. P. 46-49. London. (1912).
38. Wieselsberger, C. "Über die statische längsstabilität der drachenflugzeuge". *Zeitschrift desd V. D. I.* Vol. 57, Pág. 501-508. Berlin. (1913).