

Vórtices no estacionarios en un vaso de agua

(Nonstationary vortices in a water glass)

F.J. Manjón¹, J.M. Villalba², E. Arribas³, A. Nájera⁴, A. Beléndez⁵, J.A. Monsoriu⁶

¹*Instituto de Diseño para la Fabricación y Producción Automatizada - Departamento de Física Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 València, Spain*

²*Departamento de Física y Química, Instituto de Enseñanza Secundaria Herminio Almendros, Almansa, Albacete, Spain*

³*Departamento de Física Aplicada, Universidad de Castilla-La Mancha, Albacete, Spain*

⁴*Departamento de Ciencias Médicas, Facultad de Medicina, Universidad de Castilla-La Mancha, Albacete, Spain*

⁵*Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal, Universidad de Alicante, Alicante, Spain*

⁶*Centro de Tecnologías Físicas - Departamento de Física Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, València, Spain*

Recebido em 3/10/2012; Aceito em 3/2/2013; Publicado em 9/9/2013

¿Quién no ha experimentado la formación de un vórtice o de un remolino en un vaso cuando disuelve el cacao en la leche y le da vueltas con una cuchara? En este artículo, se analizan los aspectos mecánicos de los vórtices no estacionarios formados cuando se agita agua con una cuchara alrededor de un eje central en un vaso de precipitados cilíndrico. Se mostrará que el vórtice no estacionario formado después de agitar el agua con la cuchara es de tipo forzado y se comparará la dinámica del fluido de este vórtice no estacionario con los conocidos vórtices libres estacionarios y forzados y con el de la dinámica del vórtice aislado libre (también conocido como el vórtice de Oseen-Lamb). Mostraremos que la observación de la generación y del decaimiento del vórtice no estacionario en el recipiente cilíndrico del agua en rotación es un simple experimento que puede constituir una experiencia muy fructífera para el entendimiento de los aspectos cinemáticos, dinámicos, y estáticos de la rotación axisimétrica, radial, o torsional de un fluido homogéneo e incompresible.

Palabras-clave: vórtices no estacionarios, vorticidad, flujo laminar, mecánica de fluidos.

Who has not experienced the formation of a vortex or a whirlpool in a glass of milk when trying to dissolve cocoa in it by stirring the liquid with a spoon? In this paper, we analyse the mechanical aspects of the unsteady vortex formed in swirling water that was stirred with a spoon around a central axis in a cylindrical glass. We show that the formed unsteady vortex is of forced type and we compare the fluid dynamics of this unsteady vortex to that of the well-known steady free and forced vortices and with the dynamics of the unsteady free isolated vortex (also known as Oseen-Lamb's vortex). We show that the observation of the generation and decay of the unsteady vortex in a cylindrical glass of rotating water is a simple experiment that may constitute a very fruitful experience for understanding the kinematics, dynamics, and static aspects of the axisymmetric, rotational, or torsional flow of an homogeneous and incompressible fluid.

Keywords: unsteady vortex, vorticity, laminar flow, fluid mechanics.

1. Introducción

Cuando la masa de un fluido adquiere un movimiento de rotación alrededor de un eje, aparecen diversas fuerzas reales (y, en el caso de un sistema no inercial, también ficticias) que provocan un gradual hundimiento de la masa del fluido en la zona cercana al eje formándose un menisco en el que la parte central está a menor altura que la parte más alejada del eje. Ejemplos de este tipo de fluidos en rotación son los remolinos de agua marina, los anticiclones, los ciclones, los tornados y los huracanes; fenómenos muy comunes en la superficie terrestre.

Estas masas de fluidos en rotación han fascinado

a la humanidad desde sus albores: Aristóteles [1] o Descartes [2] explicaron la formación de la Tierra, su gravedad y la dinámica del Sistema Solar, a base de teorías que involucraban fluidos en rotación. Actualmente, la rotación de fluidos, tiene un gran interés para los científicos en diferentes campos como pueden ser la mecánica de fluidos, la superconductividad, la superfluidez, la propagación de la luz, la condensación de Bose-Einstein, la cosmología, la biociencia, o la física del estado sólido [3-7].

En este artículo, vamos a centrar nuestra atención en los vórtices hidrodinámicos [8], realizando un sencillo experimento para el estudio de vórtices no estacionarios

²E-mail: josemanuel.villalba@yahoo.com.

que puede ser fácilmente realizado por estudiantes de física en los laboratorios de mecánica [9, 10]. La formación de un vórtice es un fenómeno que nos puede resultar cotidiano y que realizamos cada mañana cuando desayunamos y mezclamos café o cacao con la leche, dándole vueltas al líquido con la cuchara. La mayoría de las veces, realizamos esta tarea de forma mecánica sin darnos cuenta de las implicaciones físicas que lleva asociadas.

Si le damos vueltas de manera rápida al fluido con la cuchara y prestamos atención, podemos observar la formación de un remolino (vórtice). Mientras movemos la cuchara en círculos a velocidad angular constante, podemos observar que el vórtice se mantiene, es decir, la diferencia en altura z de la superficie libre del líquido para dos distancias r al eje de rotación es más o menos la misma. Esta es la característica de un *vórtice estacionario* (steady vortex). Si dejamos de remover con la cuchara, observamos que el movimiento del líquido se va ralentizando y la altura total del vórtice decrece en función del tiempo debido a la pérdida de energía debido a diversas fricciones. Esta disipación de energía es característica de los *vórtices no estacionarios* (unsteady vortex).

De acuerdo con la hidrostática, la superficie libre de un líquido en equilibrio estático bajo la acción de un campo gravitatorio es plana y el plano formado por la superficie libre es perpendicular a la dirección del campo gravitatorio debido a la tendencia del líquido a la mínima energía potencial [11], siendo la misma situación para los líquidos que se mueven con velocidad lineal constante. Por el contrario, éste no es el caso de un líquido acelerado. En particular, el perfil de la superficie libre del líquido no es plano cuando el líquido está rotando con velocidad angular ω alrededor del eje z (dirección de la aceleración de la gravedad) ya que sobre cada punto de la superficie libre del líquido actúa una aceleración centrípeta junto con la aceleración de la gravedad, que cambia las condiciones de equilibrio. Esta nueva condición de equilibrio nos lleva a la formación de un vórtice. En este artículo, analizaremos los aspectos mecánicos de la rotación de un fluido incompresible prestando especial atención al caso de los vórtices no estacionarios en un vaso cilíndrico. Mostraremos que hay dos casos límite de vórtices no estacionarios confinados en un vaso cilíndrico, el vórtice libre no estacionario y el vórtice forzado no estacionario. El estudio de los vórtices no estacionarios puede ser abordado en un laboratorio de física con sólo un vaso cilíndrico transparente y una cámara de fotos o de vídeo para luego analizar los correspondientes fotogramas.

2. Ecuaciones de movimiento en dos dimensiones

El vórtice formado por la rotación de un fluido (en el plano perpendicular al campo gravitacional) alrededor

de un eje en la dirección del campo gravitacional (eje z) puede ser considerado como un movimiento en dos dimensiones por su simetría axial y para su análisis podemos usar coordenadas cilíndricas (r, θ) . La velocidad del fluido puede ser expresada en función de la velocidad angular, ω , alrededor del eje de giro y de la distancia al eje de giro, r , en la forma $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = (0, v_\theta, 0)$ tomando la base (u_r, u_θ, u_z) de coordenadas cilíndricas. Tomando la variable dependiente en la coordenada z [12] y aplicando la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ obtenemos que v_θ es solo función de la distancia r al eje de rotación. La velocidad v_θ , que aquí denotaremos simplemente por v , puede ser independiente del tiempo t , en cuyo caso se habla de un vórtice estacionario ($\partial v / \partial t = 0$), o dependiente del tiempo, en cuyo caso se habla de un vórtice no estacionario ($\partial v / \partial t \neq 0$).

Las ecuaciones en dos dimensiones del movimiento rotacional de un fluido homogéneo e incompresible (con densidad ρ constante), son las ecuaciones de Euler que nos dan el gradiente de presiones en un fluido estacionario, y las ecuaciones de Navier-Stokes que nos dan la variación de la velocidad en un fluido estacionario no estacionario bajo la acción de fuerzas de cizalla en fluidos viscosos (con viscosidad $\mu \neq 0$) [11]

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r} = \rho \omega^2 r = \rho a_n, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) = \kappa \left(r \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right), \quad (1c)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y κ es la viscosidad cinética ($\kappa = \mu / \rho$).

La Ec. (1a) indica que hay un gradiente de presión transversal debido a la fuerza centrípeta necesaria para mantener los elementos del fluido moviéndose en un camino circular alrededor del eje de rotación. Por otra parte, la Ec. (1b) indica que hay un gradiente de presión a lo largo del eje z en el interior de un fluido sujeto a una fuerza gravitacional. Ambas ecuaciones nos conducen a la ecuación de Bernoulli para fluidos estacionarios, no viscosos ($\mu = 0$), e incompresibles con líneas de corrientes paralelas. Finalmente, la Ec. (1c) describe la pérdida de la velocidad en un fluido no estacionario debido a la fricción y se obtiene del cálculo de la variación del momento angular, por unidad de longitud y unidad de espesor, de un diferencial cilíndrico de fluido bajo la acción de pares de fuerzas de fricción debidas a la viscosidad del fluido en sus caras interiores y exteriores.

Además de la clasificación de los vórtices en estacionarios y no estacionarios, la Ec. (1c) permite establecer otra posible clasificación de los vórtices basada en la definición de la vorticidad, $\boldsymbol{\Omega}$, que es un vector que indica la curvatura del vector velocidad en un punto

dato. En coordenadas cilíndricas la vorticidad viene expresada por la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \mathbf{u}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 \omega)}{\partial r} \mathbf{u}_z. \quad (2)$$

De acuerdo con esta definición, un vórtice puede ser clasificado como un vórtice libre o irrotacional cuando la vorticidad es nula, o como un vórtice forzado o rotacional cuando la vorticidad es no nula. El vector vorticidad expresa la rotación local de una partícula de fluido alrededor de su propio eje y es una medida de la velocidad en la que una masa de fluido cambia de orientación en el espacio. El concepto de vorticidad es diferente y no debe ser confundido con la rotación de un fluido alrededor de ciertos ejes debido a la traslación de su movimiento a lo largo de la curva que describe la trayectoria del punto del fluido [10]. Curiosamente, se puede tener vorticidad nula en un líquido cuyas partículas sigan una trayectoria circular y una vorticidad no nula en un líquido que siga una trayectoria lineal.

3. Análisis de los vórtices estacionarios en un vaso de agua

El estudio de los vórtices estacionarios se trata en gran número de revistas y libros, por lo que a continuación sólo nos limitaremos a resumir sus aspectos más importantes con objeto de poder compararlos con los vórtices no estacionarios que trataremos en la siguiente sección. Se puede demostrar que un líquido estacionario en rotación se puede mantener por el movimiento de dos cilindros rígidos concéntricos de radios r_1 y r_2 y velocidades angulares ω_1 and ω_2 , respectivamente [11, 13]. Como los vórtices estacionarios formados por fluidos incompresibles deben satisfacer la ecuación $\partial v / \partial t = 0$, la solución de la Ec. (1c) conduce a que la velocidad angular del líquido viene dada por [11, 14]

$$\omega(r) = \left(\frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \right) + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{r_1^{-2} - r_2^{-2}} \right) \frac{1}{r^2}. \quad (3)$$

Esta ecuación general describe la distribución radial de la velocidad angular en vórtices estacionarios que pueden ser vistos como una mezcla de los dos casos límite que vienen dados por los dos términos de la Ec. (3). El primer término corresponde a una velocidad angular constante independiente de la distancia radial r y que es debida a la formación de un vórtice forzado (o rotacional) y el segundo término corresponde a una velocidad angular que depende de la inversa al cuadrado de la distancia r y que es debida a la formación de un vórtice libre (o irrotacional). A continuación analizaremos ambos tipos de vórtices.

3.1. Vórtices forzados estacionarios

En los vórtices estacionarios todos los elementos del fluido describen un movimiento circular con la misma velocidad angular, que se mantiene constante independientemente del tiempo t y de la distancia r , $\omega(r, t) = \omega_0$. De esta forma, el líquido rota alrededor de cierto eje como si fuera un sólido rígido. Este tipo de fluido, también llamado fluido girostático, se puede producir rotando un vaso cilíndrico lleno de líquido que gira alrededor de un eje con velocidad angular constante, como por ejemplo, poniendo el vaso en una superficie giratoria como el torno de un alfarero.

En los vórtices estacionarios forzados, los elementos del fluido tienen una velocidad lineal proporcional a la distancia radial r al eje de rotación, $v = \omega_0 \cdot r$, y el movimiento ni tiene aceleración angular ($\alpha = d\omega/dt = 0$) ni tangencial ($a_t = \alpha \cdot r = 0$). Las únicas aceleraciones que existen en cada elemento del fluido son la aceleración gravitacional, común a todas las partículas del fluido, y la aceleración centrípeta $a_n = v^2/r = \omega_0^2 \cdot r$, que es diferente para cada elemento de fluido a diferentes distancias del eje de rotación. Bajo estas condiciones, los elementos de la superficie libre del fluido describen un movimiento circular alrededor del eje de rotación z estando en equilibrio estático alrededor del eje z . Esta es la razón por la que este tipo de movimiento es a veces llamado “relativamente estacionario”.

Dado que no existe una fuerza neta actuando a lo largo del eje z en un punto de la superficie libre del fluido en rotación, podemos aplicar las leyes de la estática para el estudio de los líquidos estacionarios en rotación. Si aplicamos las leyes de la estática al estudio del perfil de la superficie libre del líquido en un vórtice libre forzado, y analizamos las fuerzas que actúan en un elemento de fluido localizado en la superficie libre a una distancia r_1 del eje de rotación, como en la Fig. 1(a), veremos que tenemos una fuerza normal \mathbf{F}_1 , mostrada en la Fig. 1(b), actuando sobre cada elemento del fluido en la superficie libre y ejercida por los alrededores del fluido, que cancela todas las contribuciones del peso \mathbf{P} del elemento de fluido y causa la fuerza centrípeta necesaria para su movimiento circular uniforme.



Figura 1 - (a) Vista lateral del movimiento de rotación de un fluido. (b) Esquema de las fuerzas actuando a distancia r_1 del eje de rotación.

En nuestro estudio, la fuerza de Coriolis en cada elemento del fluido se cancela a pequeña escala en el

vórtice por las pequeñas velocidades, (para más detalles se puede consultar la Ref. [15]). Las ecuaciones estáticas para cada elemento de fluido en la superficie libre del líquido de la Fig. 1(b) en las direcciones radial y axial son [16]

$$r : F \cos \alpha = m \cdot a_n \quad z : F \sin \alpha = m \cdot g, \quad (4)$$

cuya solución muestra que la fuerza normal \mathbf{F} forma un ángulo α con el plano horizontal dado por

$$\tan \alpha = \frac{g}{a_n} = \frac{g}{\omega_0^2 r}, \quad (5)$$

que es diferente para cada elemento del fluido localizado a diferentes distancias radiales r . El perfil $z(r)$ de la superficie libre del líquido en el vórtice forzado se puede obtener considerando que la Ec. (5) es la inversa de la tangente de la curva $z(r)$. De hecho, la tangente de la curva $z(r)$ viene dada por el ángulo γ relacionado con el ángulo α (ver Fig. 1(a)):

$$\gamma = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \arctan\left(\frac{g}{\omega_0^2 r}\right). \quad (6)$$

Por otro lado, considerando que $dz/dr = \tan \gamma = (\tan \alpha)^{-1}$, podemos integrar esta ecuación para encontrar el perfil de $z(r)$ de la superficie libre del líquido con respecto a la altura de la superficie libre en el eje de rotación $z(r=0)$

$$z(r) = \int_0^r \frac{\omega_0^2 r}{g} dr = \int_0^r \frac{\omega_0^2 r}{g} dr = \frac{\omega_0^2}{2g} r^2. \quad (7)$$

La Ec. (7) indica que la superficie libre del líquido en rotación con una velocidad angular constante, como el movimiento de agitación de un vaso cilíndrico a cierta velocidad angular ω_0 , tiene forma de parábola (ver Fig. 2(a)). Esta función $z(r)$ también indica que la curvatura de la parábola aumenta con la velocidad angular del fluido. Esta solución se trata en los textos [11, 14-18] y es muy conocida por muchos alumnos que estudian los efectos de la rotación de un fluido con velocidad angular constante en los laboratorios de física.

Las Ecs. (1a) y (1b) relativas a la conservación de energía permiten calcular la presión ejercida en el fluido en diferentes coordenadas (r, z) del eje de rotación. Se puede demostrar que la presión ejercida en el vórtice estacionario forzado viene dada por

$$P(r, z) = P_{fs} + \rho g \left[z_0 + \frac{\omega_0^2 r^2}{2g} \right], \quad (8)$$

donde P_{fs} es la presión en la superficie libre del líquido, z_0 es la distancia en el interior del líquido con respecto a la superficie libre del eje de rotación, y el segundo término del interior del paréntesis es la elevación puntual de la superficie libre del líquido a la distancia radial r con respecto a la superficie libre del líquido en $r = 0$

[ver Fig. 2(a)]. Esto significa que la presión incrementa en el fluido si incrementa z_0 e incrementa a z_0 constante con la distancia radial r debido al peso del fluido que tiene encima que hace que se distribuya de forma parabólica. La Ec. (8) también muestra que las superficies de presión constante dentro del fluido son aquellas que muestran la misma altura con respecto al líquido de la superficie libre y que estas superficies de presión constante tienen forma parabólica.

Adicionalmente, si calculamos la vorticidad mediante la Ec. (2) obtendremos que la vorticidad del vórtice estacionario forzado es no nula y con valor $\Omega = 2\omega_0 \mathbf{u}_z$. Esta es la razón de que este tipo de vórtices reciba el nombre de vórtice rotacional. El hecho de que el rotacional de la velocidad de cualquier elemento de fluido sea diferente de cero significa que, por ejemplo, si un objeto flotante, como pueda ser un palillo (ver Fig. 2(c)), lo dejamos en cualquier punto de la superficie libre del líquido, girará alrededor del eje central z como si se moviera con el fluido porque la velocidad lineal en la parte superior del palillo es mayor que en su parte baja. Además de esto, el objeto flotante describe una rotación completa alrededor de su propio eje z como si su centro de masas completara un círculo alrededor del eje z del fluido en rotación [16].

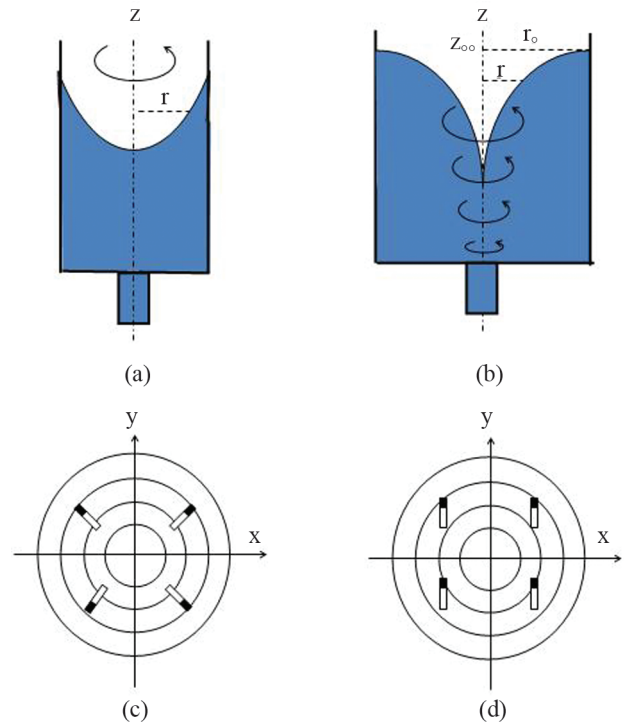


Figura 2 - Perfil de la altura de la superficie libre del líquido, $z(r)$ en el vórtice forzado estacionario (a) y en el vórtice libre estacionario (b). Vorticidad en el vórtice forzado estacionario (c) y en el vórtice libre estacionario (d). Los palillos muestran una vorticidad positiva en el vórtice forzado estacionario y una vorticidad cero en el vórtice libre estacionario.

3.2. Vórtices libres estacionarios

El otro caso límite en los fluidos estacionarios en rotación es el del vórtice libre estacionario (o irrotacional), también llamado vórtice de Rankine [10]. El vórtice libre estacionario se forma cuando el agua se vacía de un recipiente (lavabo, bañera, o tanque) a través de un desagüe en su parte inferior formándose un remolino. Este tipo de vórtice también puede ser producido por la rotación a velocidad angular constante ω_0 de un cilindro con radio r_0 en un recipiente de radio $r \gg r_0$ lleno de fluido [11, 14]. Es más, este tipo de vórtice puede generarse fácilmente en el laboratorio de Física con un vaso cilíndrico en el que se introduce agua y un imán. Para ello sólo hace falta colocar el vaso con el imán encima de un agitador magnético que hace rotar el imán a velocidad constante alrededor del eje central del vaso cilíndrico. En este caso, la velocidad angular ω de un elemento de fluido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r del eje de rotación y viene dada por

$$\omega = \omega_0 \frac{r_0^2}{r^2}. \quad (9)$$

Nótese que ω_0 es también la máxima velocidad angular del fluido en contacto con el cilindro en $r = r_0$. En los vórtices estacionarios libres formados en un desagüe o por un agitador magnético, en los que el vórtice no es generado por la rotación de un cilindro, hay una discontinuidad en $r = 0$ ya que la Ec. (9) no describe bien la velocidad angular cerca del eje de rotación. Para profundizar en este tema recomendamos leer la Ref. [17].

De forma similar al caso de los vórtices forzados estacionarios, se puede obtener el perfil de $z(r)$ de la superficie libre del líquido en el vórtice libre estacionario por integración

$$z(r) = \int_r^\infty \frac{\omega^2 r}{g} dr = \int_r^\infty \frac{\omega_0^2 r_0^4}{gr^3} dr = z_\infty - \frac{\omega_0^2 r_0^4}{2gr^2}, \quad (10)$$

donde z_∞ es la altura del fluido lejos del eje de rotación ($r \gg r_0$). La Ec. (10) indica que en el vórtice libre, la altura de la superficie libre del líquido decae con una gran pendiente inversamente proporcional al cuadrado de la distancia radial al eje de rotación, hasta que el líquido vuelve a estar en reposo. Fig. 2(b) muestra el perfil de r^2 del líquido de la superficie libre del vórtice libre estacionario en un vaso cilíndrico.

En los vórtices libres estacionarios, el perfil de la presión obtenido de las Ecs. (1a) y (1b) es

$$P(r, z) = P_{fs} + \rho g \left[z_0 - \frac{\omega_0^2 r_0^4}{2gr^2} \right], \quad (11)$$

donde P_{fs} es la presión en la superficie libre del líquido y z_0 es la distancia en el interior del líquido en z_∞ . La Ec. (11) indica que la presión incrementa en un fluido

cuando incrementa la distancia en el interior del fluido z_0 con respecto al máximo de altura del vórtice z_∞ , y decrece a z_0 constante con la distancia radial r hacia el centro del vórtice debido al decaimiento del peso del fluido cerca de z_0 . La Ec. (11) también afirma que las superficies a presión constante en el interior del fluido son aquellas con las mismas distancias a la superficie libre, por tanto estas superficies a presión constante tienen forma hiperbólica $1/r^2$.

El vórtice estacionario libre tiene vorticidad nula ($\Omega = 0$) en cualquier elemento del fluido, razón por la cual recibe el nombre de vórtice irrotacional. Este resultado indica que un objeto flotante en la superficie libre del líquido de un vórtice libre estacionario, como el palillo de la Fig. 2(d), no rotará sobre su propio eje debido al hecho que la velocidad lineal de las partes altas y bajas del palillo son las mismas.

4. Análisis de los vórtices estacionarios en un vaso de agua

Vamos a analizar los aspectos mecánicos de los vórtices no estacionarios formados por un vaso cilíndrico lleno de agua cuando ésta es agitada por una cuchara. Una vez que uno remueve con la cuchara y deja que el agua rote, se forma un vórtice no estacionario ya que la velocidad de rotación del fluido decrece con el tiempo ($\partial v/\partial t < 0$) y en consecuencia el vórtice desaparece.

4.1. Vórtices forzados no estacionarios

La Fig. 3 muestra la fotografía de un vórtice no estacionario en un vaso cilíndrico con agua dos segundos después de removerla con una cuchara que forma un remolino. Hemos comprobado que se forma el mismo tipo de vórtice no estacionario después de la formación de un vórtice forzado si paramos en seco la rotación del cilindro que forma los vórtices forzados y dejamos que pasen unos segundos hasta que se estabiliza, tal y como ya razonó Goodman [12]. Esta es la razón por la que hemos llamado a este tipo de vórtice, *vórtice forzado no estacionario*.

En la formación del remolino en el vórtice forzado no estacionario después de remover el agua con la cuchara o después de rotar el vaso, no tenemos la limitación impuesta por el vórtice forzado estacionario ($\partial v/\partial t = 0$), la velocidad angular del elemento de fluido en cualquier instante de tiempo es diferente de aquellos deducidos de la Ec. (3). Esto explica por qué el perfil del líquido de la superficie libre $z(r)$ en el vórtice forzado no estacionario mostrado en la Fig. 3 ni tiene la forma parabólica ($\propto r^2$) del vórtice forzado estacionario ni la forma hiperbólica ($\propto 1/r^2$) del vórtice libre estacionario. La Fig. 4 muestra los datos numéricos del perfil experimental $z(r)$ de la superficie libre obtenida de la fotografía como la de la Fig. 3. Hay que hacer notar que

los valores de $z(r)$ se han tomado hasta $r = 30$ mm a pesar de que el radio del vaso cilíndrico es de $R = 55$ mm. La razón se debe a la deformación óptica debida a los bordes del vaso, tal y como se puede observar en la Fig. 3.



Figura 3 - Fotografía del experimento justo después de la formación de un vórtice no estacionario producido por la agitación con la cuchara. Los dos ejes z y r están dibujados sobre papel milimetrado para facilitar la toma de datos para el perfil de $z(r)$.

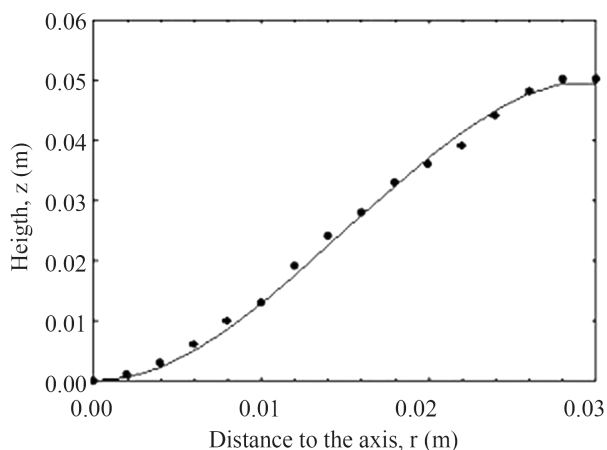


Figura 4 - Perfil experimental de $z(r)$ de la superficie libre del líquido después de la agitación del agua en un vaso cilíndrico, obtenido de la Fig. 3. La línea continua corresponde al ajuste realizado con la Ec. (15).

De forma similar al caso de los vórtices estacionarios (libres y forzados), se puede obtener la función $z(r)$ de un vórtice no estacionario describiendo el perfil de la superficie libre del líquido en un instante dado si uno conoce la dependencia radial de la velocidad angular o lineal en dicho instante y asume que las leyes de la estática, o equivalentemente las Ecs. (1a) y (1b), se

pueden aplicar en dicho instante de tiempo. De esta forma obtendríamos el perfil representado en la Fig. 4. Así pues, con el fin de conocer la dependencia radial de la velocidad angular o lineal en los vórtices no estacionarios en un instante de tiempo dado hemos tratado de medir el perfil de la velocidad angular $\omega(r)$ en el vórtice forzado no estacionario de la Fig. 3 dejando caer pequeñas piezas de plástico a diferentes distancias radiales y filmándolas con una cámara de vídeo digital. Seleccionando dos fotogramas de la película con un programa de edición de vídeo podemos determinar la velocidad angular $\omega(r) = \Delta\theta(r)/\Delta t$ determinando el ángulo $\Delta\theta$ barrido por la pieza de plástico durante el tiempo Δt entre los dos fotogramas. Éste procedimiento no es lo suficientemente preciso debido a las incertidumbres de la técnica de medida que provienen por un lado de la dificultad en formar un vórtice uniforme y homogéneo al remover el agua con una cuchara, y por otro lado por el conocido “efecto de la taza de té (teacup effect)”, ya estudiado por Einstein en 1926 [19]. Este efecto refleja el hecho de que un objeto flotante en un fluido en rotación no describe círculos concéntricos (a r constante) debido a la existencia de una fuerza neta que tiende a empujar al objeto hacia el eje de rotación siendo esta mayor en el eje de rotación [17]. En este sentido, tenemos que hacer notar que la medida de la velocidad angular o lineal en un líquido es objeto de recientes investigaciones y su dificultad de medir estriba en la suerte de contar con sofisticados métodos como la interferometría Doppler o la velocimetría de imágenes de partículas (PIV) [20]. Nosotros hemos medido las velocidades del fluido mediante el método de los fotogramas ya que éste puede realizarse con una cámara web de forma relativamente sencilla en un laboratorio de física.

La velocidad con la que decrece la velocidad lineal en los vórtices no estacionarios una vez que cesa la agitación viene dada por la Ec. (1c). En particular, el decaimiento del vórtice forzado no estacionario formado después de la agitación del agua rotando en un vaso cilíndrico nos lleva a un perfil complicado de la velocidad $v(r, t)$ que viene dado por las funciones de Bessel [14]

$$v(r, t) = -2\omega_0 r_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\alpha_k r}{r_0}\right)}{\alpha_k J_0(\alpha_k)} \exp\left(-\frac{\kappa \alpha_k^2 t}{r_0^2}\right), \quad (12)$$

donde ω_0 es la velocidad angular inicial, α_k son los ceros de la función de Bessel J_1 , κ es la viscosidad cinética, y r_0 corresponde al radio del vaso cilíndrico de radio R si no son satisfechas las condiciones de contorno ($v(r = R) = 0$). En el caso de los vórtices forzados no estacionarios formados en un vaso de agua cilíndrico agitado por una cuchara hemos observado que no se cumplen las condiciones de contorno ya que el agua está en movimiento cerca del borde del vaso. Así pues, para esta condición de contorno es razonable que la solución sea

la misma que la dada por la Ec. (12) pero con $r_0 > R$; es decir, se puede asumir que la condición de contorno no se satisface en $r = R$ pero puede ser satisfecha para $r_0 > R$.

La solución de la Ec. (12) es muy compleja; sin embargo, para tiempos suficientemente grandes sólo sobrevive el primer término debido al incremento de la exponencial decreciente cuando k aumenta siendo la vida media $r_0^2/(\nu\alpha_1^2)$. Simulando la Ec. (12) con el programa Mathematica, hemos encontrado que para tiempos mayores que la vida media, la velocidad lineal dada por la Ec. (12) se puede modelar mediante un perfil parabólico en r centrado en $r_0/2$ dado por

$$v(r, t) = \omega_0(t) \left(r - \frac{r^2}{r_0} \right), \quad (13)$$

donde $\omega_0(t)$ es la velocidad angular en $r = 0$ en función del tiempo y viene dada por la ecuación

$$\begin{aligned} \omega_0(t) &= \omega_0 \exp\left(-\frac{\kappa\alpha_1^2 t}{r_0^2}\right) = \\ &\omega_0 \exp\left(-\frac{14.67\kappa t}{r_0^2}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

La Fig. 5 muestra la comparación de las velocidades lineales obtenidas según la Ec. (12) para tiempos grandes (línea continua) y con la Ec. (13) (línea discontinua). El error acumulativo total entre las dos funciones representadas por las Ec. (12) y (13) entre $r = 0$ y $r = r_0$ es inferior al 6%. Es de destacar que el perfil $v(r)$ de la Ec. (13) tiene una forma parabólica con un mínimo en $r = 0$ y r_0 y un máximo en $r = r_0/2$. Esta distribución radial de la velocidad lineal en la superficie libre del líquido en el vórtice forzado no estacionario es similar a la encontrada en un régimen laminar rectilíneo de Poiseuille en un cilindro hueco [9, 11, 14]. Así pues, podemos concluir que el vórtice forzado no estacionario en un vaso cilíndrico tiende a uno laminar entre dos contornos coaxiales en $r = 0$ (contorno natural) y $r = r_0$ (contorno artificial) de forma similar a los contornos del régimen laminar rectilíneo de Poiseuille.

La velocidad lineal parabólica centrada en $r_0/2$ corresponde a un decaimiento de la velocidad angular del fluido con la distancia radial r desde su máximo valor ω_0 en $r = 0$ hasta el valor de cero para $r = r_0$ en cualquier instante de tiempo; es decir,

$$\omega(r) = \omega_0 \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \quad \text{si } r < r_0, \quad \omega(r) = 0 \quad \text{si } r > r_0. \quad (15)$$

Es preciso notar que si quisiéramos abordar el estudio del vórtice forzado no estacionario en diferentes instantes de tiempo, lo que está más allá del objetivo del presente artículo, deberíamos considerar que ω_0 decrece con el tiempo y r_0 puede a su vez tener una dependencia

con el tiempo que *a priori* es desconocida. En este sentido es fácil imaginar que al principio del experimento, cuando la cuchara remueve el líquido del vaso cilíndrico, el agua de los bordes no desliza por lo que no se satisface la condición de contorno para $r_0 = R$, siendo R el radio del vaso cilíndrico. Sin embargo, pasado cierto tiempo se satisfará que el agua del borde del vaso cilíndrico no desliza (condición de contorno) y a partir de entonces se cumplirá que $r_0 = R$, lo cual evidencia que debe haber una dependencia de r_0 con el tiempo que habría que considerar en el análisis temporal del vórtice forzado no estacionario.

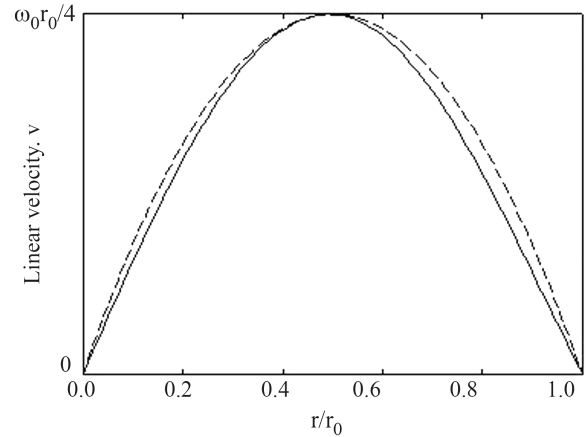


Figura 5 - Comparativa entre las velocidades lineales correspondientes a la solución exacta (considerando valores superiores a $k = 20$) del decaimiento del vórtice forzado no estacionario [Ec. (12)] para tiempos grandes (línea continua) y la dependencia parabólica [Ec. (13)] (línea discontinua). El error total en el perfil de $v(r)$ es menor que el 6%.

Una vez obtenida la función de la velocidad angular según la Ec. (15) podemos obtener la función $z(r)$ que describe el perfil del líquido de la superficie libre que satisface dicha distribución radial de la velocidad angular

$$\begin{aligned} z(r) &= \int_0^r \frac{\omega^2 r}{g} dr = \int_0^r \frac{\omega_0^2}{g} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^2 r dr = \\ &\frac{\omega_0^2}{2g} \left(r^2 - \frac{4}{3} \frac{r^3}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{r^4}{r_0^2} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

La Fig. 6 muestra los perfiles de $\omega(r)$ y $z(r)$ del vórtice forzado no estacionario dados por las Ecs. (15) y (16) en diferentes tiempos después de que cese la agitación; esto es, para diferentes supuestos valores del máximo de la velocidad angular. La función $z(r)$ de la Ec. (16) tiene: i) forma parabólica cerca del eje de rotación, ii) forma lineal a distancia media entre $r = 0$ y $r = r_0$, y iii) tiende a la forma horizontal cerca de $r = r_0$ en el borde del vaso debido a la fricción. Esta situación es similar a la observada en los vórtices forzados no estacionarios tal como los describió Goodman [12]. De hecho, la función $z(r)$ de la Ec. (16) es más complicada que las obtenidas para los casos de los vórtices

estacionarios tanto libre como forzado. Es más, el perfil del vórtice forzado no estacionario puede ser considerado como un perfil intermedio entre los de los dos vórtices estacionarios. Es de destacar que el perfil $z(r)$ del vórtice forzado no estacionario es parabólico para distancias r pequeñas, como en el vórtice forzado estacionario, y tiende a ser plano a distancias r mayores, como en el vórtice libre estacionario.

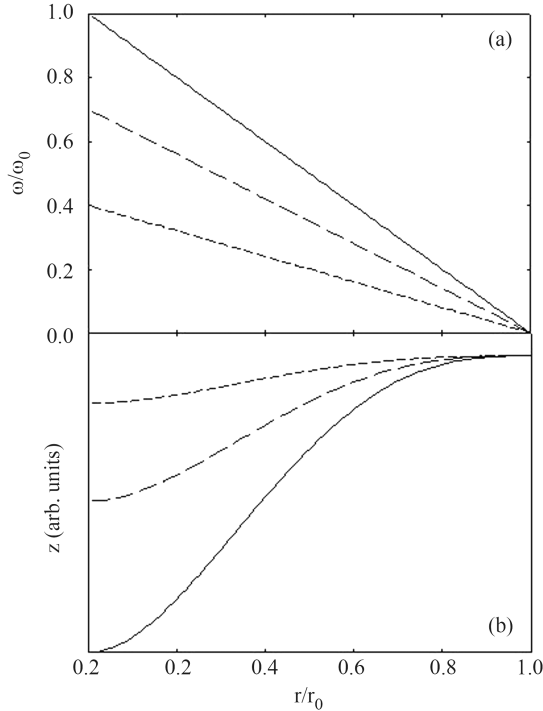


Figura 6 - (a) Perfil de la velocidad angular en el vórtice forzado no estacionario de acuerdo con la Ec. (14) en diferentes tiempos: $t = 0$ [$\omega(r = 0) = \omega_0$], cuando $\omega(r = 0)$ ha decrecido a $0.7\omega_0$; y cuando $\omega(r = 0)$ ha decrecido a $0.4\omega_0$. (b) Perfil $z(r)$ de la superficie libre del líquido en el vórtice forzado no estacionario de acuerdo con la Ec. (16) a diferentes tiempos de la parte (a).

Con el fin de comprobar la bondad de las Ecs. (13-16) que describen los vórtices forzados no estacionarios en un vaso cilíndrico con agua después de agitarla con una cuchara (o de rotar un vaso cilíndrico y hacer cesar repentinamente la rotación) hemos ajustado los datos de la Fig. 4 a la Ec. (16). El resultado de este ajuste lo hemos trazado con una línea continua en la Fig. 4. Este ajuste experimental es bastante bueno encontrando $\omega_0 = 56$ rad/s y $r_0 = 70$ mm. Estos valores son razonables ya que el radio del vaso es $R = 55$ mm; es decir, más pequeño que r_0 en consonancia con la pequeña diferencia entre el final de la agitación con la cuchara y la captura de la fotografía de la Fig. 3. También hemos tratado de ajustar los datos de la Fig. 4 dejando las constantes $4/3$ y $1/2$ de la Ec. (16) como parámetros libres. En este caso, hemos tratado de ajustar estos cuatro parámetros (ω_0 , r_0 , a , b), encontrando que a y b se desvían ligeramente de los valores $4/3$ y $1/2$, lo que confirma la bondad de las Ecs. (13) a (16). Además, hemos repetido varios ajustes de perfiles $z(r)$ con la Ec. (16)

para diferentes tiempos de evolución de vórtices forzados no estacionarios (posteriores al tiempo mostrado en la fotografía de la Fig. 3) tomando diferentes fotografías y hemos obtenido similares resultados que los obtenidos en la Fig. 4 (ver la Ref. 21). A la vista de estos resultados, podemos concluir que la Ec. (16) describe muy bien el perfil de $z(r)$ del líquido de la superficie libre en los vórtices forzados no estacionarios formados en un vaso cilíndrico con agua y consecuentemente las Ecs. (13) y (15) describen muy bien la distribución lineal y angular de las velocidades en los vórtices forzados no estacionarios formados después de agitar con una cuchara o rotando el vaso cilíndrico. Finalmente, hemos comprobado con el software Mathematica que el error acumulado total obtenido para el perfil $z(r)$ entre $r = 0$ y $r = r_0$ usando la Ec. (16), obtenida a partir de la Ec. (13), es inferior al 9% del que se obtendría si $z(r)$ se calculara a partir de la Ec. (12). Esto permite a cualquier estudiante de laboratorio de física poder realizar el análisis de los vórtices forzados no estacionarios con la metodología descrita usando la solución aproximada dada por las Ecs. (13) a (16).

La presión ejercida en el fluido en diferentes coordenadas (r, z) del eje de rotación en el vórtice forzado no estacionario descrito por las Ecs. (13) a (16) viene dado por

$$P(r, z) = P_{fs} + \rho g \left[z_0 + \frac{\omega_0^2}{2g} \left(r^2 - \frac{4}{3} \frac{r^3}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{r^4}{r_0^2} \right) \right], \quad (17)$$

donde P_{fs} es la presión en la superficie libre del líquido y z_0 es la distancia dentro del líquido con respecto a la superficie libre al eje de rotación. Esto significa que la presión incrementa en un fluido si incrementa z_0 e incrementa a z_0 constante con la distancia al eje de rotación debido al incremento de la altura del fluido encima de z_0 . La Ec. (17) también afirma que las superficies a presión constante en el interior del fluido son aquellas con la misma distancia a la superficie libre y tiene el mismo perfil que el mostrado en la Fig. 6 que depende de la distribución radial de la velocidad angular cierto tiempo después de la agitación.

Finalmente, hemos calculado la vorticidad del vórtice forzado no estacionario en un instante de tiempo dado usando la Ec. (13) y hemos encontrado un resultado sorprendente. En el vórtice forzado no estacionario, la vorticidad es

$$\Omega = \omega_0 (1 - 2r/r_0) \mathbf{u}_z, \quad (18)$$

que es diferente de cero, como en el vórtice forzado estacionario, excepto para $r = r_0/2$ donde la vorticidad es cero, como en el vórtice libre estacionario. El resultado sorprendente es por una parte el decrecimiento lineal de la vorticidad desde un valor dado en $r = 0$ hasta un valor nulo en $r = r_0$, y por otra parte que la vorticidad cambia de signo en $r = r_0/2$. Esto significa que,

considerando un valor positivo de la velocidad angular inicial $\omega = \omega_0 \mathbf{u}_z$; es decir, considerando la rotación del agua en el sentido de las agujas del reloj, un objeto flotante cuya distancia al eje de rotación esté por debajo de $r_0/2$ rota alrededor de su propio eje central en el sentido de las agujas del reloj, pero rota en el sentido contrario a las agujas del reloj si la distancia al eje de rotación es mayor que $r_0/2$. Este resultado, que puede parecer contradictorio, es consecuencia de la distribución radial de la velocidad lineal y de las diferentes velocidades lineales para r y $r + dr$ dadas por

$$v(r + dr) - v(r) = \omega_0 \left(dr - \frac{2rdr + dr^2}{r_0} \right) \cong \omega_0 dr \left(1 - 2\frac{r}{r_0} \right). \quad (19)$$

La Fig. 7 muestra el valor del perfil $\Omega(r)$ en el vórtice forzado no estacionario para tiempos grandes. La comparación de la distribución radial de la vorticidad en el vórtice forzado no estacionario con la vorticidad de los vórtices estacionarios (libre y forzado) sugiere de nuevo que el vórtice forzado no estacionario es intermedio entre el vórtice estacionario libre y el vórtice estacionario forzado. La Ec. (19) muestra que la diferencia entre la velocidad lineal en r y $r + dr$ es positiva para $r < r_0/2$ y negativa para valores de $r > r_0/2$. Este cambio en el signo del gradiente de la velocidad lineal es la responsable del cambio del signo de la vorticidad en $r_0/2$ en el vórtice forzado no estacionario. La diferente rotación de un objeto flotante, como un palillo, cerca y lejos del eje de rotación, respectivamente, se puede observar relativamente bien en el experimento real de rotar el agua con la cuchara ya que el vórtice no estacionario es bastante uniforme y las corrientes circulares son lo suficientemente paralelas. Esto es difícil de conseguir en vaso cilíndricos de pequeños radios, observándose mejor en vaso alargados con radios grandes o en el caso de Goodman en la Fig. 6 de la Ref. 12 por la rotación de un gran vaso cilíndrico en una plataforma giratoria.

4.2. Vórtices libres no estacionarios

Se puede comparar el vórtice libre no estacionario con el decaimiento del vórtice forzado no estacionario formado después de la agitación con la cuchara o rotando el vaso cilíndrico. El vórtice libre no estacionario se puede formar bien rotando agua en un lavabo o bañera con el desagüe abierto y después tapándolo, bien rotando un vaso cilíndrico a velocidad angular constante y después parando el vaso, o bien con un agitador magnético e introduciendo el imán en el interior del vaso y después parando el rotor.

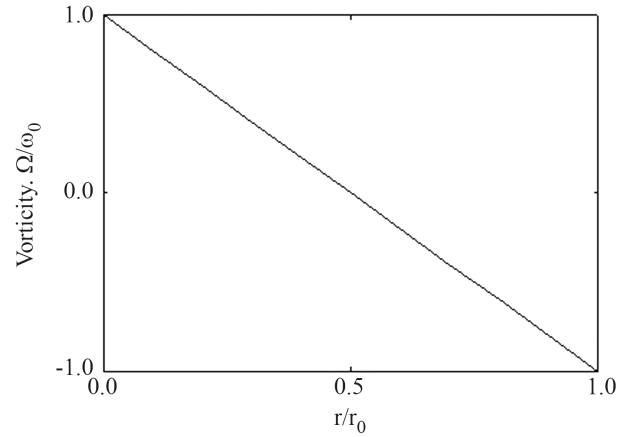


Figura 7 - Distribución radial de la vorticidad en un vórtice forzado no estacionario a tiempos suficientes grandes de acuerdo con la Ec. (18).

Bachelor [11] denota que la solución para la velocidad $v(r, t)$ de los vórtices libres no estacionarios formados después de rotar el cilindro y pararlo, viene dada por una compleja función expresada como una integral de Fourier-Bessel con dos tipos de funciones de Bessel. Afortunadamente, podemos utilizar una solución para el decaimiento de los vórtices libres no estacionarios confinados, como el formado por el lavabo o por el agitador magnético, a partir de la solución de vórtices libres no estacionarios aislados (no confinados) que fueron descritos a principios del siglo XX. El vórtice libre no estacionario aislado es llamado generalmente *Vórtice de Oseen-Lamb* aunque recientes investigaciones indican que el origen de la solución data de la época de Boltzmann [22]. Así pues, en los vórtices libres no estacionarios aislados, la velocidad angular $\omega(r)$ del fluido decae exponencialmente como una función de r y t . Esta solución se puede aproximar para $r \ll r_0$ de la forma

$$\omega(r) = \frac{\Gamma}{2r^2\pi} \left[1 - \exp\left(\frac{-r^2}{4\kappa t}\right) \right] = \frac{\Gamma}{2r^2\pi} \left[1 - \exp\left(\frac{-2r^2}{r_0^2}\right) \right] \cong \omega_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (20)$$

donde $r_0^2 = 8\kappa t$ y $\omega_0 = \Gamma/8\pi\kappa t$ es la velocidad angular para $r = 0$ en cualquier instante de tiempo. En general, el resultado hallado por Boltzmann y Oseen-Lamb no es válido para describir la velocidad angular de un vórtice libre no estacionario confinado en un vaso cilíndrico, pero la aproximación descrita en la Ec. (20) es válida para tiempos grandes y puede ser usada en el caso de vórtices libres no estacionarios confinados. En dicho caso podemos comprobar que hay un decrecimiento de la velocidad angular con la distancia al cuadrado al eje de rotación, r . La razón de por qué esta solución, aproximada para tiempos grandes, es válida para la descripción del decaimiento del vórtice libre no estacionario confinado en un vaso cilíndrico de radio R

radica en que para $t > R^2/8\nu$, el radio del agujero del vórtice es muy pequeño comparado con el radio del vaso R en cuyo caso el decaimiento se asemeja al del vórtice libre aislado.

El perfil $z(r)$ obtenido a partir de la Ec. (20) es

$$z(r) = \int_0^r \frac{\omega^2 r}{g} dr = \int_0^r \frac{\omega_0^2}{g} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^2 r dr = \frac{\omega_0^2}{2g} \left(r^2 - \frac{r^4}{r_0^2} + \frac{1}{3} \frac{r^6}{r_0^4}\right). \quad (21)$$

Hemos intentado ajustar los datos de la Fig. 4 a la Ec. (21) y hemos encontrado un valor pequeño y no razonable de r_0 (alrededor de 30 mm). Así pues, si asumimos que los datos del perfil de $z(r)$ están bien tomados de la Fig. 3, resulta coherente que la solución del decaimiento del vórtice libre no estacionario no sea útil para describir el vórtice forzado no estacionario en el vaso cilíndrico generado por la cuchara.

Queremos comentar que no hemos realizado el estudio del perfil de un vórtice libre no estacionario confinado en un vaso cilíndrico porque este vórtice desaparece en tan solo unos segundos después de finalizar la agitación y es muy difícil tomar una buena fotografía del remolino. Por el contrario, el estudio del vórtice forzado no estacionario en un vaso cilíndrico es relativamente fácil porque el remolino desaparece en aproximadamente cinco segundos y se pueden tomar fotografías relativamente buenas. Se puede considerar que el tiempo de decaimiento en los vórtices confinados no estacionarios es similar al tiempo que tardan los vórtices estacionarios en formarse y que está relacionado con el volumen de líquido inicialmente agitado. En este sentido, se tarda un tiempo grande (uno o dos minutos) en llegar al paraboloide del vórtice forzado estacionario por la rotación del vaso cilíndrico [11, 12, 14] mientras que tarda unos pocos segundos en formarse un vórtice libre estacionario usando un agitador magnético. Por lo tanto, nosotros consideramos que, debido a que en el vórtice forzado el desplazamiento de líquido respecto de su posición de equilibrio estático es mayor que en el vórtice libre, la desaparición del vórtice forzado no estacionario tarda más que la desaparición del vórtice libre no estacionario ya que le cuesta más tiempo al líquido ocupar el espacio libre dejado por él mismo tras iniciar la rotación. Este mayor tiempo de decaimiento en el vórtice forzado que en el vórtice libre facilita la observación durante bastante tiempo del vórtice forzado en comparación con el vórtice libre.

Finalmente, nos gustaría comentar que hemos observado experimentalmente que cuando tratamos de generar un vórtice libre estacionario con un imán largo (comparable al radio del vaso cilíndrico) en vez de uno pequeño, se forma un vórtice forzado estacionario similar al producido por una cuchara. Por tanto, la formación del vórtice libre o forzado depende del volumen

de agua rotada inicialmente. En este sentido es de destacar que la causa que forma un vórtice forzado cuando se agita el agua con una cuchara de forma manual es el gran volumen de agua afectado por el movimiento inicial de giro un tanto inexacto de la cuchara a pesar de que sólo se intenta agitar la parte central del vaso. Estas observaciones son interesantes de cara a experimentar en el laboratorio las diferentes condiciones en las que se generan vórtices libres o forzados.

5. Conclusiones

Hemos realizado un simple experimento para el estudio de los vórtices forzados no estacionarios por agitación del agua en un vaso cilíndrico con una cuchara que es similar al obtenido por la rotación a velocidad angular constante de un vaso cilíndrico lleno de agua. Hemos medido el perfil de $z(r)$ de la distribución radial de la altura del líquido de la superficie libre desde el eje de rotación en cierto tiempo y hemos encontrado que el perfil puede ser reproducido asumiendo que la distribución radial de la velocidad angular $\omega(r)$ decrece linealmente con la distancia al eje de rotación y que hemos determinado mediante el estudio de diversos fotogramas. El estudio del perfil característico $z(r)$ y de la vorticidad del vórtice forzado no estacionario indican que este tipo de vórtice es intermedio entre el vórtice libre estacionario y el vórtice forzado estacionario. Curiosamente, la vorticidad del vórtice forzado no estacionario es no nula pero no es constante (a diferencia del vórtice forzado estacionario) y decrece con la distancia radial al eje de giro cambiando de signo a cierta distancia del eje de rotación.

Finalmente, hemos comparado el estudio del decaimiento del vórtice forzado no estacionario con el decaimiento del vórtice libre no estacionario tratando de ajustar el perfil de $z(r)$ con la Ec. (21) y hemos comprobado que nuestro perfil $z(r)$ no concuerda con el caso del vórtice libre no estacionario.

Queremos acentuar que el presente trabajo se puede extender mediante el estudio de la evolución temporal del vórtice forzado no estacionario mediante análisis de vídeo [23,24] grabando la evolución del perfil de $z(r)$. La captura de las fotografías a diferentes tiempos permitiría representar y ajustar la curva de $z(r)$ a diferentes tiempos con la Ec. (16) y obtener la dependencia con ω_0 y r_0 .

Agradecimientos

Los autores agradecen a los Drs. Alfredo Segura y Miguel Mollar la revisión crítica de este artículo. F.J.M. y J.A.M. también agradecen al Instituto de Ciencias de la Educación de la Universitat Politècnica de València por su ayuda a los Equipos Innovación y Calidad Educativa e-MACAFI y MoMa. A.B. agradece el apoyo del Vicerrectorado de Tecnologías de la Información de la

Universidad de Alicante a través del proyecto GITE-09006-UA. E.A, A.N. y J.M.V. agradecen a Cajasol-La Caixa la financiación parcial de este trabajo.

Referencias

- [1] Aristóteles, *De caelo (On the Heavens)* (Book II, Ch. XIII).
- [2] R. Descartes, *Principia Philosophiae* (Amsterdam, 1644).
- [3] H.J. Lugt, *Vortex Flow in Nature and Technology* (Krieger, Malabar, 1995).
- [4] L.M. Pismen, *Vortices in Nonlinear Fields* (Clarendon, Oxford, 1999).
- [5] D.R. Tiley and J. Tiley, *Superfluidity and Superconductivity* (Hilger, Bristol, 1990).
- [6] M.R. Matthews, B.P. Anderson, P.C. Haljan, D.S. Hall, C.E. Wieman and E.A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
- [7] A. Ferrando, M. Zacarés, M.A. García-March, J.A. Monsoriu and P. Fernández de Córdoba, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 123901 (2005).
- [8] P.G. Saffman, *Vortex Dynamics* (Cambridge University, Cambridge, 1992).
- [9] E.R. Lindgren, *Am. J. Phys.* **48**, 465 (1980).
- [10] D.J. Tritton, *Am. J. Phys.* **50**, 421 (1982).
- [11] G.K. Batchelor, *An introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, New York, 2000).
- [12] J.M. Goodman, *Am. J. Phys.* **37**, 864 (1969).
- [13] K. Riess and J.E. Baudean, *Am. J. Phys.* **19**, 116 (1951).
- [14] T.C. Papanatasiou, G.C. Georgiou and A.N. Alexandrou, *Viscous Fluid Flow* (CRC Press, Boca-Raton, 2000).
- [15] H. Oertel (editor), *Prandtl's Essentials of Fluid Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 2004).
- [16] Y. Nakayama, *Introduction to Fluid Mechanics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1998).
- [17] T.E. Faber, *Fluid Dynamics for Physicist* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [18] É.G. Zvenigorodskii and Yu. D. Kaminskii, *Measurement Techniques* **29**, 109 (1986).
- [19] R.J. Adrian, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23**, 261 (1991).
- [20] J.M. Villalba Montoya, *Experimentos Caseros de Física para Bachillerato* (Altaban Ediciones y Popular Libros S.L., Zagaroza, 2008).
- [21] V.J. Rossow, *J. Aircraft* **43**, 709 (2006).
- [22] W.M. Wehrbein, *Am. J. Phys.* **69**, 818 (2001).
- [23] J. Riera, J.A. Monsoriu, M.H. Giménez, J.L. Hueso and J.R. Torregrosa, *Am. J. Phys.* **71**, 1075 (2003).