



# Electrotecnia para Ingenieros Agrónomos

Rosa P. Gutiérrez Colomer  
José Luis Gutiérrez Montes



EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Rosa P. Gutiérrez Colomer  
José Luis Gutiérrez Montes

# **ELECTROTECNIA PARA INGENIEROS AGRÓNOMOS**

**EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Colección *Académica*

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Ingeniería Rural y Agroalimentaria de la Universitat Politècnica de València

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:

Gutiérrez Colomer, Rosa P; Gutiérrez Montes, José Luis (2017). *Electrotecnia para Ingenieros Agrónomos*  
Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

© Rosa P. Gutiérrez Colomer  
José Luis Gutiérrez Montes

© 2017, Editorial Universitat Politècnica de València  
*distribución:* [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 0582\_05\_01\_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-588-0  
Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es).

Impreso en España

# ÍNDICE

CAPÍTULO 1. CORRIENTES ALTERNAS.....	1
1.1. Introducción .....	1
1.2. Empleo de corrientes alternas. Justificación.....	2
1.3. Valores asociados a una onda alterna senoidal.....	6
1.4. Corriente alterna en un circuito serie. Régimen permanente .....	10
1.5. Representaciones cartesiana, vectorial y compleja de las corrientes senoidales .....	16
1.6. Expresión simbólica de la ley de Ohm .....	19
1.7. Leyes de Kirchhoff en regímenes senoidales .....	19
1.8. Respuesta senoidal de los elementos pasivos básicos .....	20
1.9. Admitancia, Conductancia y susceptancia. Circuito mixto .....	23
1.10. Problemas propuestos.....	29
1.11. Cuestiones propuestas .....	31
CAPÍTULO 2. POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA .....	33
2.1. Introducción .....	33
2.2. Potencia de los elementos pasivos básicos.....	34
2.3. Potencia instantánea, media y fluctuante en un dipolo pasivo .....	38
2.4. Potencias aparente y reactiva.....	40
2.5. Potencia compleja.....	42
2.6. Teorema de Boucherot .....	43
2.7. Corrección del factor de potencia.....	46
2.8. Medida de la potencia. Vatímetro electrodinámico. Vármetro.....	51
2.9. Problemas propuestos.....	52
2.10. Cuestiones propuestas .....	55
CAPÍTULO 3. CIRCUITOS TRIFÁSICOS .....	61
3.1. Introducción .....	61
3.2. Sistemas polifásicos de corrientes .....	61
3.3. Ventajas de las líneas trifásicas .....	64
3.4. Conexión en estrella y conexión en triángulo .....	70
3.5. Equivalencia entre receptores equilibrados en estrella y en triángulo.....	84
3.6. Problemas propuestos.....	86
3.7. Cuestiones propuestas .....	86

CAPÍTULO 4. POTENCIA EN LOS CIRCUITOS TRIFASICOS.....	91
4.1. Introducción.....	91
4.2. Teorema de BOUCHEROT y aplicaciones a la medida de potencia.....	92
4.3. Expresiones de la potencia en los circuitos trifásicos.....	97
4.4. Medida de la potencia activa en los circuitos trifásicos.....	100
4.5. Medida de la potencia reactiva en los circuitos trifásicos.....	112
4.6. Corrección del factor de potencia en sistemas trifásicos.....	115
4.7. Cuestiones propuestas.....	120
4.8. Problemas propuestos.....	124
CAPÍTULO 5. FACTURACIÓN LA DE LA ENERGÍA ELÉCTRICA.....	129
5.1. Introducción.....	129
5.2. Mejora del factor de potencia.....	130
5.3. Complemento de tarifa por estacionalidad.....	135
5.4. Complemento de tarifa por interrumpibilidad.....	136
5.5. Facturación mensual de energía eléctrica.....	136
5.6. Condiciones generales de aplicación de las tarifas eléctricas.....	138
5.7. Derechos de acometida, enganche y verificación.....	139
5.8. Mercado libre de contratación de energía eléctrica.....	141
5.9. Cuestiones propuestas.....	151
CAPÍTULO 6. REGÍMENES TRANSITORIOS EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS.....	153
6.1. Introducción.....	153
6.2. El transformador como elemento de circuito.....	154
6.3. Sobreintensidades por cortocircuito en una red eléctrica.....	157
6.4. Características de la corriente de cortocircuito.....	159
6.5. Cálculo de las intensidades de cortocircuito.....	163
6.6. Efectos dinámicos del cortocircuito.....	165
6.7. Efectos térmicos del cortocircuito.....	169
6.8. Sobretensiones en una red eléctrica.....	169
6.9. Fenómenos atmosféricos.....	171
6.11. Problemas propuestos.....	170
6.12. Cuestiones propuestas.....	171
CAPÍTULO 7. CÁLCULO ELÉCTRICO DE LÍNEAS.....	173
7.1. Introducción.....	173
7.2. Resistencia óhmica. efecto pelicular.....	175

---

7.3. Coeficiente de autoinducción en líneas monofásicas y trifásicas.....	176
7.4. Cálculo de la sección de un conductor.....	181
7.5. Cálculo de redes de distribución.....	193
7.6. Problemas propuestos.....	203
7.7. Cuestiones propuestas.....	209
<b>CAPÍTULO 8. ELEMENTOS CONSTITUTIVOS DE LAS</b>	
<b>    LÍNEAS ELÉCTRICAS.....</b>	<b>211</b>
8.1. Introducción.....	211
8.2. Conductores para Líneas aéreas.....	213
8.3. Aisladores.....	216
8.4. Soportes o apoyos de la línea.....	220
8.5. Herrajes y accesorios para líneas aéreas.....	224
8.6. Tomas de tierra Líneas subterráneas.....	225
8.7. Conductores para Líneas subterráneas.....	225
8.8. Materiales aislantes.....	226
8.9. Cubiertas. Armaduras. Pantallas.....	228
8.10. Resistencia de aislamiento de un conductor aislado.....	228
8.11. Gradiente de potencial.....	229
8.12. Factor de pérdidas.....	230
8.13. Canalizaciones enterradas. Canalizaciones superficiales o aéreas.....	231
8.14. Líneas con cable trenzado. Características.....	231
8.15. Problemas propuestos.....	232
8.16. Cuestiones propuestas.....	232
<b>CAPÍTULO 9. CÁLCULO MECÁNICO DE LÍNEAS AÉREAS.....</b>	<b>235</b>
9.1. Introducción.....	235
9.2. Cálculos que afectan a los elementos de la línea aérea.....	236
9.3. Ecuaciones del tendido de un cable entre apoyos al mismo nivel.....	237
9.4. Equilibrio del conductor en vanos db gran longitud y apoyos desnivelados...	248
9.5. Cargas y sobrecargas sobre el conductor.....	250
9.6. La ecuación del cambio de condiciones.....	253
9.7. Hipótesis reglamentarias para el cálculo mecánico del cable.....	255
9.8. Vano ideal de regulación o vano medio.....	255
9.9. Tabla de tensiones de tendido.....	259
9.10. Problemas propuestos.....	260
9.11. Cuestiones propuestas.....	262

CAPÍTULO 10. PROYECTO DE LÍNEA ELÉCTRICA DE POTENCIA .....	263
10.1. Introducción.....	263
10.2. Distancias de seguridad .....	264
10.3. Cálculo mecánico de los apoyos.....	272
10.4. Cálculo de las cimentaciones.....	277
10.5. Documentos del proyecto .....	281
10.6. Problemas propuestos .....	284
10.7. Cuestiones propuestas.....	285
CAPÍTULO 11. APARATOS DE MANIOBRA Y PROTECCIÓN DE LAS INSTALACIONES ELÉCTRICAS.....	287
11.1. Introducción.....	287
11.2. Selección del aparellaje de maniobra y protección.....	289
11.3. Seccionadores .....	290
11.4. Interruptores. el contactor.....	291
11.5. Interruptores de potencia .....	292
11.6. Fusibles.....	296
11.7. Combinación de protecciones.....	299
11.8. Problemas propuestos .....	301
11.9. Cuestiones propuestas.....	302
CAPÍTULO 12. ESQUEMA ELÉCTRICO DE LA INSTALACIÓN DE B.T. ....	303
12.1. Introducción.....	303
12.2. Emplazamiento de los aparatos de maniobra y protección.....	304
12.3. Protección de las instalaciones .....	308
12.4. Receptores .....	309
12.5. Instalaciones en locales de características especiales .....	316
12.6. Problemas propuestos .....	319
12.7. Cuestiones propuestas.....	319
CAPÍTULO 13. LA SEGURIDAD EN LAS INSTALACIONES ELÉCTRICAS.....	323
13.1. Introducción.....	323
13.2. Definiciones.....	323
13.3. Efectos biológicos de la corriente eléctrica .....	324
13.4. Redes de tierra .....	328
13.5. Contactos directos e indirectos .....	332
13.6. Sobretensiones.....	340

---

13.7. Problemas propuestos.....	345
13.8. Cuestiones propuestas .....	345
<b>CAPÍTULO 14. PROYECTO:DE UNA INSTALACIÓN ELÉCTRICA EN BAJA TENSIÓN .....</b>	<b>347</b>
14.1. Introducción .....	347
14.2. Memoria .....	347
14.3. Cálculos justificativos .....	362
14.4. Presupuesto.....	370
14.5. Planos .....	371
14.6. Pliego de condiciones.....	371
14.7. Problemas propuestos.....	372
14.8. Cuestiones propuestas .....	372
<b>CAPÍTULO 15. APLICACIONES AGRÍCOLAS DE LA ENERGIA ELÉCTRICA. INSTALACIONES DE BOMBEO .....</b>	<b>375</b>
15.1. Introducción .....	375
15.2. Potencia necesaria en el eje de la bomba.....	376
15.3. Sistemas para regulación del caudal en el riego a la demanda .....	382
15.4. Diseño de un sistema regulación mediante depósito elevado.....	385
15.5. Regulación mediante depósito de presión con cámara de aire .....	390
15.6. Regulación de caudal por variación de velocidad .....	393
15.7. Electrificación de las instalaciones de bombeo .....	394
15.8. Automatización de las instalaciones de bombeo. un caso práctico .....	397
15.9. Problemas propuestos.....	399
15.10. Cuestiones propuestas .....	400
<b>CAPÍTULO 16. TRANSFORMADORES ESTÁTICOS. ESTUDIO TEÓRICO (I) .....</b>	<b>403</b>
16.1. Introducción .....	403
16.2. Transformador ideal .....	404
16.3. Transformador real .....	408
16.4. Esquema eléctrico equivalente del transformador.....	414
16.5. Simplificación de Kapp .....	418
16.6. Problemas propuestos.....	421
16.7. Cuestiones propuestas .....	426

CAPÍTULO 17. EL TRANSFORMADOR COMO ELEMENTO DE CIRCUITO.....	427
17.1. Introducción.....	427
17.2. Magnitudes unitarias.....	428
17.3. Transformadores trifásicos. grupos de conexión.....	432
17.4. Ensayos de vacío y cortocircuito. características de catálogo del transformador.....	438
17.5. Rendimiento del transformador.....	442
17.6. Conexión en paralelo de transformadores.....	445
17.7. Corrección de factor de potencia del transformador.....	447
17.8. Problemas propuestos.....	449
17.9. Cuestiones propuestas.....	451
CAPÍTULO 18. EL PROYECTO DEL CENTRO DE TRANSFORMACIÓN.....	453
18.1. Introducción.....	453
18.2. Esquema eléctrico de principio.....	455
18.3. Tipos de centros de transformación.....	458
18.4. Transformador.....	460
18.5. Aparellaje.....	462
18.6. Aisladores.....	464
18.7. Equipo de medida.....	465
18.8. Dimensionamiento del embarrado.....	466
18.9. Tierras.....	469
18.10. Problemas propuestos.....	475
18.11. Cuestiones propuestas.....	477
CAPÍTULO 19. LA GENERACIÓN DE CORRIENTE ALTERNA.....	479
19.1. Introducción.....	479
19.2. Generalidades. fem en un alternador.....	480
19.3. Clasificación.....	484
19.4. Excitación de los alternadores.....	485
19.5. Devanados monofásicos en tambor.....	486
19.6. Devanados trifásicos.....	488
19.7. Factor de arrollamiento. factor de forma. corrección a la expresión general de la fem de un alternador.....	489
19.8. Marcha en vacío.....	492

---

19.9. Marcha en carga. campo giratorio en el inducido de un alternador trifásico. teorema de Ferraris.....	493
19.10. Campo giratorio en un alternador monofásico. teorema de Maurice Leblanc .....	495
19.11. Reacción de inducido .....	496
19.12. Característica de cortocircuito. característica a circuito abierto. impedancia sincrónica. proposiciones relativas al par motor .....	499
19.13. Diagrama de Behn - Eschenburg. Regulación.....	501
19.14. Problemas propuestos .....	503
19.15. Cuestiones propuestas .....	504
CAPÍTULO 20. MOTORES ASÍNCRONOS (I) .....	505
20.1. Introducción .....	505
20.2. Fundamentos de los motores asíncronos .....	506
20.3. Clasificación de los motores asíncronos.....	508
20.4. Características electromecánicas de los motores asíncronos.....	511
20.5. Arranque de los motores asíncronos.....	512
20.6. Regulación de velocidad del motor asíncrono.....	514
20.7. Problemas propuestos.....	515
20.8. Cuestiones propuestas .....	516
CAPÍTULO 21. MOTORES ASINCRONOS (II). EL MOTOR ASINCRONO EN FUNCIONAMIENTO INDUSTRIAL .....	517
21.1. Introducción .....	517
21.2. Arranque de los motores asíncronos polifásicos .....	518
21.3. Arranque actuando sobre el circuito primario .....	522
21.4. Arranque actuando sobre el circuito secundario.....	526
21.5. Procedimiento de arranque automático .....	530
21.6. Curvas características .....	532
21.7. Regulación de la velocidad.....	534
21.8. Cambio de sentido de giro.....	537
21.9. Motores asíncronos monofásicos .....	537
21.10. Problemas propuestos.....	541
21.11. Cuestiones propuestas .....	547
CAPÍTULO 22. LUMINOTÉCNIA. PRINCIPIOS GENERALES .....	545
22.1. Introducción .....	545
22.2. Naturaleza de la luz. espectro electromagnético .....	545

22.3. Magnitudes y unidades empleadas en luminotecnia.....	549
22.4. Gráficos y diagramas luminotécnicos.....	553
22.5. Fuentes de radiación visible.....	558
22.6. Problemas propuestos.....	580
22.7. Cuestiones propuestas.....	583
CAPÍTULO 23. EL PROYECTO DE LAS INSTALACIONES DE ALUMBRADO.....	585
23.1. Introducción.....	585
23.2. Consideraciones para el cálculo de un proyecto de alumbrado.....	586
23.3. Proceso de cálculo del proyecto.....	589
23.4. Formulas básicas.....	595
23.5. Aplicaciones a los locales agrícolas.....	596
23.6. Problemas propuestos.....	597
23.7. Cuestiones propuestas.....	598
CAPÍTULO 24. GRUPOS ELECTRÓGENOS.....	599
24.1. Introducción.....	599
24.2. Determinación de la potencia del generador.....	600
24.3. Esquema eléctrico para funcionamiento sobre la red en emergencia.....	601
24.4. Sistemas de control.....	602
24.5. Ingeniería de la instalación de un grupo electrógeno.....	603
24.6. Problemas propuestos.....	607
24.7. Cuestiones propuestas.....	611

# Capítulo 1

# Corrientes alternas

## 1.1. INTRODUCCIÓN

La energía eléctrica es ampliamente utilizada en las explotaciones e industrias agrarias, para obtener fuerza motriz en numerosas etapas productivas, así como para la iluminación de locales.

Las máquinas eléctricas son de aplicación general en todas las industrias de transformación de productos agrarios, así como en los grupos de bombeo para riegos agrícolas. Para ello es necesario disponer de instalaciones eléctricas que hagan posible su alimentación. También es necesario disponer de los mecanismos de protección y maniobra que aseguren su buen funcionamiento.

Por otra parte es cada vez mayor el número de componentes eléctricos en estas actividades, sobre todo en los campos del control y automatización de procesos, tan necesarios actualmente para impulsar la competitividad de las empresas.

La energía eléctrica se genera, transporta y utiliza, mayoritariamente, en forma de corriente alterna.

En esta lección se hará una descripción del uso generalizado de la corriente alterna senoidal, así como la forma de representar las magnitudes tensión e intensidad y los parámetros que las definen. También se estudiará la respuesta de los elementos básicos (R, L, C) de un circuito eléctrico, a este tipo de corrientes, variables en el tiempo.

La resolución de circuitos serie-paralelo que servirá como base para desarrollar, en lecciones posteriores, el estudio de los sistemas trifásicos y el cálculo eléctrico de líneas.

## **1.2. EMPLEO DE CORRIENTE ALTERNA**

El transporte de la energía eléctrica a grandes distancias, implica a dos circunstancias desfavorables en el uso de las líneas:

- En primer lugar la caída de tensión que dificulta la alimentación a los receptores más alejados, a menos que sobredimensionemos la sección de las líneas, con su consecuente encarecimiento
- En segundo lugar la pérdida de energía en la línea, debido al calentamiento por efecto Joule. Este calentamiento afecta a los elementos que componen la canalización eléctrica, tales como conductor, aislamiento, contactos de aparatos de maniobra, etc, que suponen pérdidas que pueden alcanzar un importante valor económico.

Ya desde los comienzos del desarrollo de la electrotecnia, en el siglo XIX, se planteó la disyuntiva sobre el uso de corriente continua, o corriente alterna.

Inicialmente se empleó la corriente continua, debido a la generación de energía eléctrica por medio de pilas galvánicas, y de los primeros generadores electromecánicos de continua. Edison fue un firme defensor de la corriente continua, que empleó para alimentar la primera instalación de alumbrado de un barrio de Nueva York, en 1882. Se dio la circunstancia de que el generador de corriente continua que empleó, movida por una máquina de vapor, se encontraba situada en los bajos de una vivienda y muy cerca de los puntos de consumo.

Sin embargo la corriente alterna se impuso definitivamente, cuando se contempló la necesidad de transportar la energía eléctrica a grandes distancias, de forma económica y a tensiones elevadas. También influyó en ello el rápido desarrollo de las máquinas de corriente alterna, de más simple construcción que las de corriente continua y de funcionamiento más seguro.

Las expresiones matemáticas de la caída de tensión y la pérdida de potencia, asociadas al transporte de energía eléctrica, son proporcionales a la intensidad de la corriente que transportan.

$$\Delta U = R \times I$$

$$\Delta P = R \times I^2$$

La potencia transportada por una línea eléctrica, depende de la tensión e intensidad en el punto de consumo, según la expresión matemática:

$$P = U \times I$$

De la fórmula anterior se desprende que la forma de reducir la intensidad de transporte, manteniendo la potencia, es aumentar la tensión.

Un transporte de la energía eléctrica, a grandes distancias, requiere tensiones elevadas para limitar la caída de tensión y la pérdida de potencia. En España, para el transporte de elevadas potencias, a grandes distancias, se emplean tensiones del orden de 400KV.

Existen inconvenientes de tipo técnico para que los generadores de las Centrales eléctricas produzcan energía a muy alta tensión. La tensión suele limitarse a 25.000V.

Por otro lado los receptores tampoco pueden, por motivos de seguridad para las personas, funcionar con una tensión superior a 400V .

Por tanto la tensión elevada sólo debe afectar al transporte de energía, haciendo necesario el uso de transformadores elevadores de tensión en las plantas de generación, y transformadores reductores de tensión al final de las líneas, en los centros de consumo.

### Ejemplo 1

Una dinamo alimenta en corriente continua (*cc*) y mediante una línea bifilar, un conjunto de 300 lámparas que consumen 100W cada una. Las lámparas están conectadas en paralelo, a una tensión de 230V.

La dinamo está separada de los receptores una distancia de 500m y la línea se ha construido con hilo de Cu de 35 mm<sup>2</sup> de sección.

Determinar:

- 1) Pérdida de potencia en la línea.
- 2) Caída de tensión en la línea y tensión que suministra la dinamo.
- 3) Los mismos conceptos anteriores, si se eleva la tensión de la dinamo, de forma que al final de la línea la tensión sea de 1.500V.

(Resistividad del Cu,  $\rho = 1,8 \times 10^{-8} \Omega \times m$ )

Resolución:

- 1) La resistencia óhmica R de la línea se calcula por medio de la ecuación:

$$R = \rho \times \frac{l}{s} = 1,8 \times 10^{-8} \times \frac{2 \times 500}{35 \times 10^{-6}} = 0,514(\Omega)$$

y la intensidad que recorre la línea I

$$I = \frac{P}{U} = \frac{300 \times 100}{230} = 130(A)$$

La pérdida de potencia  $\Delta P$ , por efecto Joule en la línea, tiene por expresión:

$$\Delta P = R \times I^2 = 0,514 \times 130^2 = 8.687(W)$$

y la potencia total suministrada por la dinamo será

$$P_{Dinamo} = 30.000 + 8.687 = 38.687(W)$$

La potencia perdida en la línea supone, en porcentaje de la potencia de la dinamo:

$$P_{perdida(\%)} = \frac{\Delta P}{P_{Dinamo}} \times 100 = \frac{8.687}{38.687} \times 100 = 22(\%)$$

2) La caída de tensión en la línea se calcula como:

$$\Delta V = R \times I = 0,514 \times 130 = 67(V)$$

y la tensión que debe suministrar la dinamo será:

$$V_{Dinamo} = 230 + 67 = 297(V)$$

La caída de tensión en la línea representa

$$\Delta V_{línea(\%)} = \frac{67}{297} \times 100 = 23(\%)$$

23% de la tensión de la dinamo.

3) Si la tensión en el punto de consumo se eleva a 1.500V, la intensidad que circulará por la línea será:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{30.000}{1.500} = 20(A)$$

la pérdida de potencia en la línea:

$$\Delta P = R \times I^2 = 0,514 \times 20^2 = 206(W)$$

y la potencia total que suministra la dinamo es

$$P_{Dinamo} = 30.000 + 206 = 30.206(W)$$

La pérdida en la línea supone, ahora, el 0,7% de la potencia suministrada por la dinamo.

La caída de tensión en la línea es:

$$\Delta V = R \times I = 0,514 \times 20 = 10,3(V)$$

y la dinamo solo debe suministrar una tensión de 1.510,3V

La caída de tensión en la línea se ha reducido al 0,7% de la tensión de la dinamo.

De este ejemplo se concluye que si la tensión de transporte, de una potencia eléctrica de 30kW, se aumenta de 230V a 1.500 V, las pérdidas de potencia y la caída de tensión en la línea se reducen del 24% al 0,7%. Esto es positivo, aunque no es el único aspecto que se deba considerar, ya que el aumento de tensión obligaría a aumentar el aislamiento de la línea.

### 1.3. VALORES ASOCIADOS A UNA ONDA ALTERNA SENOIDAL

La expresión matemática de una fuerza electromotriz (f.e.m.) alterna senoidal es:

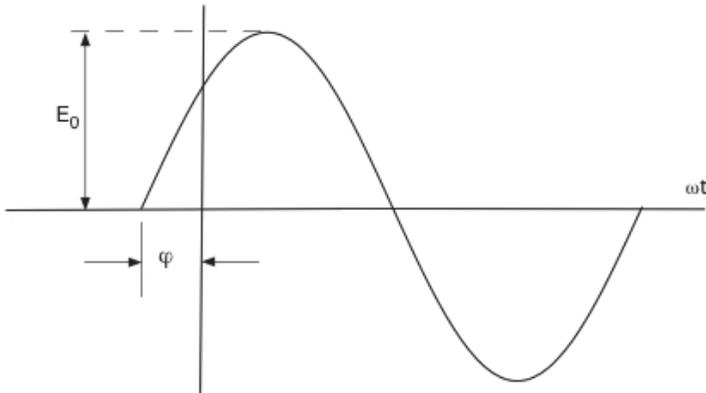
$$e = E_0 \times \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Los valores asociados a esta expresión son los siguientes:

*Valor instantáneo (e)*, que toma la f.e.m. en cada instante  $t$  (Voltios).

*Pulsación* o velocidad de giro del vector giratorio  $\omega$  (rad/s).

*Periodo T*. tiempo en segundos que abarca una onda completa (s).



En el eje de ordenadas se representa el valor instantáneo de la función y en el de abscisas el ángulo  $\omega t$ . Una onda completa abarca un ángulo de  $2\pi$  radianes que se completa en un tiempo de un período  $T$ . La expresión matemática de la relación entre  $T$  y  $\omega$  es:

$$T = \frac{2 \times \pi}{\omega} (s)$$

*Frecuencia f*: Es el número de periodos por segundo, o número de ondas que se completan en 1 segundo.

$$f = \frac{\omega}{2 \times \pi} = \frac{1}{T} (Hz)$$

El valor de la frecuencia de las corrientes alternas de uso común, es de 50(Hz) en Europa y 60(Hz) en EEUU. Sus respectivas pulsaciones son  $\omega=100\pi$  y  $\omega=120\pi$  (rad/s), respectivamente. Para el caso europeo la corriente cambia de sentido 100 veces por segundo

Otras valores a tener en cuenta son:

*Amplitud ( $E_0$ )*. Es el valor máximo que alcanza la f.e.m. en cada semiperiodo, de signo contrario en ambos.

*Angulo de fase*. Es el ángulo ( $\omega t + \phi$ ) que para  $t=0$  se llama fase inicial  $\phi$ .

*Valor medio en un semiperiodo ( $E_m$ )*. Su valor se deduce de la expresión:

$$E_m = \frac{1}{T/2} \times \int_0^{T/2} E_0 \times \text{sen}(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \times E_0$$

*Valor eficaz ( $E$ )*. Se define como la media cuadrática, de los valores instantáneos de la f.e.m. u otra magnitud periódica tales como,  $i$  o  $u$ , a lo largo de un periodo

$$E = \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt = \sqrt{\frac{1}{T} \times \int_0^T E_0^2 \times \text{sen}^2(\omega t) dt} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

Los valores eficaces de tensiones e intensidades alternas, son de uso frecuente en los cálculos de circuitos eléctricos, ya que casi todos los aparatos de medida miden magnitudes cuadráticas. Su lectura es proporcional al cuadrado de la magnitud que mide y por tanto es independiente de su signo. También los efectos térmicos de la corriente alterna son proporcionales a su valor eficaz.

El valor máximo de las intensidades solo se emplea en el cálculo de esfuerzos mecánicos entre conductores, en caso de cortocircuitos. También en el estudio de los campos eléctricos en el interior de aislamientos.

*Factor de amplitud*. Es el cociente entre el valor máximo y el eficaz. Para magnitudes senoidales vale:

$$\frac{E_0}{E} = \sqrt{2}$$

*Factor de forma* de la onda senoidal, es el cociente entre el valor eficaz y el valor medio. Vale siempre

$$\frac{E}{E_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

### Ejemplo 2

El valor eficaz de una corriente alterna senoidal es 500V y su frecuencia 50Hz.

Determinar:

- 1) El valor máximo, el valor medio, el factor de amplitud, el período y la pulsación.
- 2) Dibujar la curva  $u=f(t)$  en un período.
- 3) Valor instantáneo de la tensión 0,0015s, después de pasar esta por el valor  $U_0/2$ .

Resolución:

- 1) Si el *valor eficaz* es  $U=500V$ , el valor máximo será

$$U_0 = \sqrt{2} \times U = \sqrt{2} \times 500 = 707,1(V)$$

El *valor medio*

$$U_m = \frac{2}{\pi} \times U_0 = 450,1(V)$$

y el *factor de amplitud*

$$\frac{U_0}{U} = \frac{707,1}{450,1} = \sqrt{2}$$

EL *periodo T* es el tiempo que tarda la función en completar un ciclo. Para la frecuencia de 50Hz, el período será

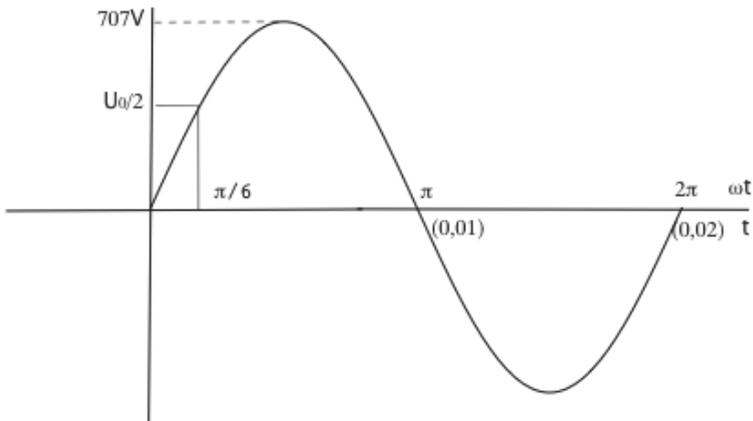
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02(s)$$

La *pulsación*  $\omega$  en rad/s se determina a partir de la expresión:

$$\omega = 2 \times \pi \times f = 100 \times \pi = 314 \left( \frac{rad}{s} \right)$$

2) Se dibuja un ciclo completo, representando en el eje de abscisas el tiempo en segundos y los ángulos en radianes. Hay que tener en cuenta que 1 ciclo se corresponde con  $2\pi(rad)$  y se completa en un tiempo de  $0,02(s)$ .

Los resultados obtenidos se han representado en la figura siguiente.



3) La tensión se expresa por la ecuación

$$u = U_0 \times \text{sen}(\omega t)$$

Sustituyendo los valores calculados para nuestro caso, nos resulta la expresión:

$$u = 707,1 \times \text{sen}(314t)$$

El ángulo  $\omega t$  correspondiente a una tensión instantánea de valor  $u = U_0/2$ , se deduce a partir de la expresión:

$$\frac{U_0}{2} = U_0 \times \text{sen}(\omega t)$$

$$\text{sen}(\omega t) = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = 30^\circ = \frac{\pi}{6} (rad)$$

Un tiempo de  $0,0015s$  equivale a un ángulo

$$\omega t = 314 \times 0,0015 = 0,471(rad)$$

por lo que el instante corresponde a un ángulo recorrido, por la onda de tensión de:

$$\left(0,471 + \frac{\pi}{6}\right) (rad)$$

El valor  $u$  de la tensión, en ese instante será :

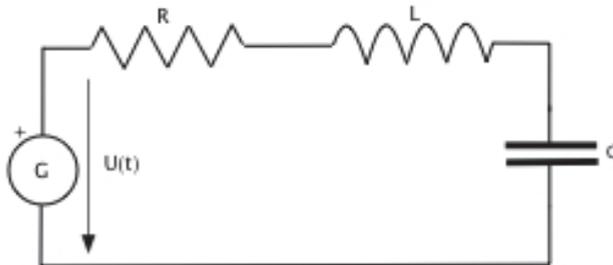
$$u = U_0 \times \text{sen}(\omega t) = 707,1 \times \text{sen}\left(0,471 + \frac{\pi}{6}\right) = 593,0(V)$$

#### 1.4. CORRIENTE ALTERNA EN UN CIRCUITO EN SERIE. RÉGIMEN PERMANENTE

Estudiaremos el régimen permanente de la corriente alterna que se establece en un circuito eléctrico compuesto por los tres elementos pasivos básicos:

Resistencia  $R$ , autoinducción  $L$  y capacidad  $C$ , conectados en serie a una tensión alterna senoidal.

*Régimen permanente* en un circuito significa que ha transcurrido un tiempo *largo*, desde que se estableció la conexión de los elementos del circuito al generador. Se considera que los valores de intensidad  $i(t)$  y tensión en cada elemento del circuito, se han estabilizado.



En el circuito de la figura,  $R$  es una resistencia óhmica,  $L$  una autoinducción pura, es decir, una bobina con resistencia óhmica despreciable, y  $C$  un condensador con pérdidas también despreciables .

Se aplica al circuito una tensión alterna senoidal definida por la ecuación:

$$u = U_0 \times \text{sen}(\omega t)$$

Esta tensión genera una corriente variable con el tiempo  $i(t)$ .

Del estudio del elemento autoinducción, sabemos que al ser recorrido por una corriente variable se induce una f.e.m. de autoinducción definida por

$$e_L = -L \frac{di}{dt}$$

donde  $L$  es el coeficiente de autoinducción expresado en *Henrios (H)* y el signo (-) indica que esa f.e.m. se opone a la causa que la produce.

También en la capacidad  $C$  al circular la intensidad aparece una f.e.m. de valor:

$$e_C = -\frac{1}{C} \times \int i dt$$

Si aplicamos al circuito cerrado de la figura anterior la 2ª Ley de Kirchhoff, que se cumple para los valores instantáneos de las magnitudes reseñadas, tendremos que en cualquier instante que se considere:

$$u + \sum (e) = \sum (R \times i)$$

$$u = \sum (R \times i) - \sum (e)$$

La ecuación del circuito es:

$$U_0 \times \text{sen}(\omega t) = R \times i + L \times \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \times dt$$

La ecuación diferencial resultante muestra que, en régimen permanente, la corriente que circula es una magnitud alterna senoidal, de la misma pulsación  $\omega$  que la tensión aplicada. Los valores de la intensidad y el desfase entre tensión e intensidad son:

$$i = I_0 \times \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

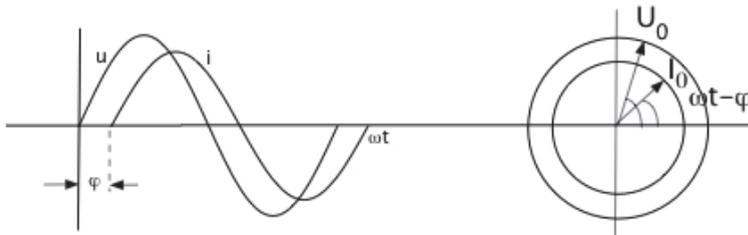
cuyo valor máximo es

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

y desfasada respecto de la tensión un ángulo  $\varphi$  definido por

$$\tan(\varphi) = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$$

La representación cartesiana de la tensión e intensidad alternas, se dibuja en las figuras siguientes:



Se observa que la intensidad está retrasada un ángulo  $\varphi$ , respecto de la tensión, porque alcanza los valores cero, máximo, o mínimo, con una diferencia de ángulo igual a  $\varphi$ .

El término característico del circuito, obtenido en la resolución de la ecuación diferencial es

$$Z = \sqrt{R^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$Z$  representa, en un circuito, una *atenuación* del paso de la corriente y se denomina *impedancia* del circuito. La impedancia se expresa en ohmios ( $\Omega$ )

Las ecuaciones para resolver el circuito, con valor máximo de la intensidad  $I_0$  y con valor eficaz  $I$ , son:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}$$

$$I = \frac{U}{Z}$$

Al valor  $\omega L$  se le denomina reactancia inductiva y se representa por

$$X_L = \omega L$$

La reactancia inductiva se expresa en ohmios ( $\Omega$ )

Al valor  $1/\omega C$  se le denomina reactancia capacitiva, y se representa por

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Reactancia del circuito, se le denomina al valor resultante

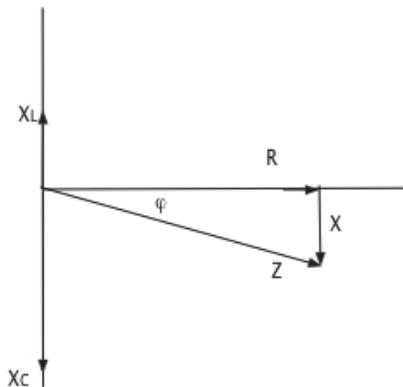
$$X = X_L - X_C$$

Por último impedancia del circuito se calcula por la expresión:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Todas las magnitudes se expresan en ohmios ( $\Omega$ )

Con las relaciones, entre las magnitudes que acaban de definirse, es posible construir el llamado *triángulo de impedancias*.



El ángulo definido por R y Z, en este triángulo, es precisamente el desfase entre la tensión aplicada y la intensidad que recorre el circuito.

### Ejemplo 3

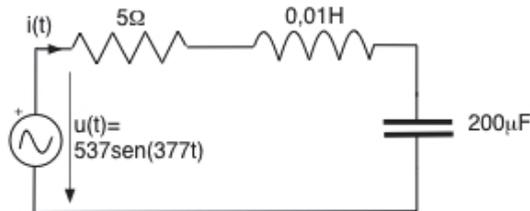
Se conectan en serie una resistencia de  $5\Omega$ , una bobina de  $0,01\text{H}$  y un condensador de  $200\mu\text{F}$ , a una tensión de valor instantáneo  $u = 537 \times \text{sen}(377 t)$ .

Calcular:

- 1) Reactancia inductiva, capacitiva e impedancia.
- 2) Valor máximo y eficaz de la intensidad.
- 3) Desfase entre intensidad y tensión.
- 4) Expresión de la intensidad instantánea en régimen permanente.

Resolución:

- 1) El circuito se representa en la figura siguiente



La pulsación de la tensión aplicada al circuito es  $\omega = 377(\text{rad/s})$  y la frecuencia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{377}{2\pi} = 60(\text{Hz})$$

El valor máximo de la tensión es

$$U_0 = 537(\text{V})$$

La reactancia inductiva se define por

$$X_L = \omega L = 0,01 \times 377 = 3,77(\Omega)$$

y la reactancia capacitiva por

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{377 \times 200 \times 10^{-6}} = 13,26(\Omega)$$

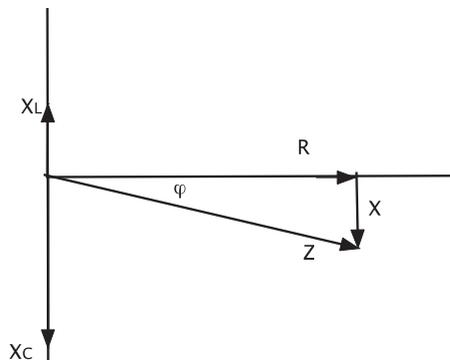
y la reactancia del circuito

$$X = X_L - X_c = -9,49(\Omega)$$

La impedancia total es

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{5^2 + (-9,49)^2} = 10,73(\Omega)$$

Con los valores obtenidos, se representa el triángulo de impedancias del circuito



2) El valor máximo de la intensidad se determina con la ecuación:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{573}{10,73} = 50,05(A)$$

y el valor eficaz es

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{50,05}{\sqrt{2}} = 35,39(A)$$

3) El desfase entre la tensión y la intensidad se corresponde con el ángulo  $\phi$  del triángulo de impedancias del apartado 1.

$$\tan(\varphi) = \frac{X}{R} = -\frac{9,49}{5} = -2$$
$$\varphi = -62,2^\circ$$

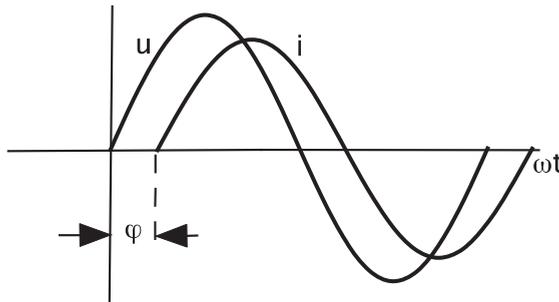
El ángulo de desfase es de signo negativo, porque la impedancia es de tipo capacitivo, lo que significa que la intensidad está adelantada, respecto de la tensión aplicada.

4) La intensidad instantánea, en régimen permanente, tiene la misma pulsación que la tensión, por lo que su expresión es:

$$i = I_0 \times \text{sen}(\omega t - \varphi) = 50,05 \times \text{sen}(377t + 1,086)$$

expresando el ángulo  $\varphi$  en radianes.

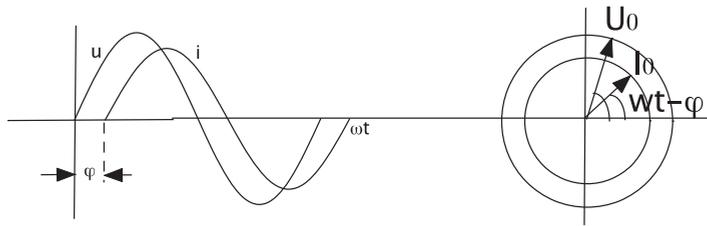
La representación cartesiana de la tensión y la intensidad se dibuja en la figura siguiente.



### 1.5. REPRESENTACIONES CARTESIANA, VECTORIAL Y COMPLEJA DE LAS CORRIENTES SENOIDALES

Hemos representado, en forma cartesiana, las magnitudes senoidales. El eje de abscisas corresponde a ángulos  $\omega t$ , o a valores del tiempo  $t$ ; el eje de ordenadas a los valores instantáneos de  $u$  o  $i$ .

Estas magnitudes,  $u$  e  $i$ , también se representan en forma de vectores giratorios, de módulo su valor máximo y de velocidad de rotación, la pulsación  $\omega$ .



Si el sentido de giro del vector, se elige contrario al las agujas del reloj y el origen de fases es el eje horizontal, el valor instantáneo de la función senoidal  $u$ , se corresponde con la proyección del vector giratorio sobre el eje vertical, puesto que esa proyección vale precisamente  $U_0 \text{sen} \omega t$

Si representamos a continuación el vector giratorio asociado a la intensidad  $i$ , retrasado un ángulo  $\varphi$  respecto de  $u$ , su proyección vertical resulta  $I_0 \text{sen}(\omega t - \varphi)$ . Ambos vectores giran a la misma velocidad y se mantienen desfasados el ángulo  $\varphi$ .

Resumimos diciendo:

*la variación temporal de las magnitudes senoidales, podemos asociarla a la variación temporal de la proyección, sobre el eje vertical, de un vector giratorio de módulo igual al valor máximo (o amplitud), de la magnitud senoidal, que gira con velocidad angular igual a la pulsación  $\omega$ .*

Como, en general, todas las tensiones y corrientes senoidales de un circuito son de la misma pulsación  $\omega$ , la velocidad angular de sus vectores giratorios asociados es la misma. En tal caso los vectores giran manteniendo sus posiciones relativas y para propósitos de cálculo y operaciones, el giro puede ignorarse. Podemos, por tanto, representar esos vectores *congelados*, en una posición dada.

Los vectores giratorios fijados en la posición  $t=0$  se llaman *fasores*.

Las funciones senoidales y sus vectores giratorios asociados admiten una representación en el *plano complejo de Gauss*.

La aplicación del álgebra compleja, para operar con magnitudes senoidales, hace más fácil la resolución de las ecuaciones matemáticas y tiene la ventaja de que incluye los módulos y ángulos de fase de las tensiones, intensidades e impedancias en las ecuaciones que las relacionan.

Dada la función senoidal  $u=U_0 \text{sen} \omega t$ , el vector giratorio asociado admite una representación en el plano complejo, de la forma:

$$U_0 \times \cos(\omega y) + jU_0 \times \text{sen}(\omega t) = U_0 e^{j\omega t}$$

Hay que recordar que

$$\cos(\alpha) + j\cos(\alpha) = e^{j\alpha}$$

y el valor instantáneo de la tensión se expresa como:

$$u = U_0 \times \text{sen}(\omega t) = I_m [U_0 e^{j\omega t}]$$

en donde  $I_m$  indica la operación de tomar la parte imaginaria del número complejo entre corchetes.

Para la intensidad, el vector giratorio asociado se expresa en el plano complejo como.

$$I_0 e^{j(\omega t - \varphi)} = I_0 \times \cos(\omega t - \varphi) + jI_0 \times \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

y el valor instantáneo:

$$i = I_m [I_0 e^{j(\omega t - \varphi)}] = I_m [I_0 e^{-j\varphi} \times e^{j\omega t}]$$

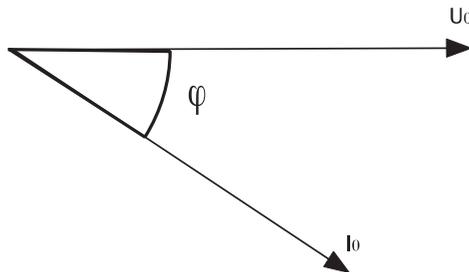
Si representamos en el plano complejo los fasores o amplitud compleja (es decir, los vectores giratorios para  $t=0$ ), tendremos

$$\bar{U}_0 = U_0 e^{j0} = U_0 + j0 = U_0 \underline{[0]}$$

$$\bar{I}_0 = I_0 e^{-j\varphi} = I_0 \cos\varphi - jI_0 \text{sen}\varphi = I_0 \underline{[-\varphi]}$$

donde se han usado las notaciones exponencial, binómica y polar.

Gráficamente se representaría como en la figura siguiente:



Los vectores giratorios podemos representarlos como

$$\bar{U}_0 e^{j\omega t}$$

$$\bar{I}_0 e^{j\omega t}$$

## 1.6. EXPRESIÓN SIMBÓLICA DE LA LEY DE OHM

La ley de Ohm para corrientes alternas, empleando la representación compleja de las magnitudes senoidales, toma la forma:

$$\bar{I} \times \bar{Z} = \bar{U}$$

donde  $\bar{Z}$  se llama impedancia compleja del circuito y vale

$$\bar{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{C\omega} \right)$$

La ley de Ohm para corrientes alternas expresa que el valor eficaz complejo de la tensión senoidal aplicada a un circuito, es igual al producto de su impedancia compleja por el valor eficaz complejo de la intensidad que lo recorre.

Hay que hacer unas observaciones, respecto a la representación vectorial de las magnitudes eléctricas:

1ª El triangulo de impedancias no es un diagrama vectorial propiamente dicho, puesto que las resistencias, reactancias e impedancias son constantes en el tiempo, a diferencia de la intensidad y tensión que varían senoidalmente.

2ª La diferencia de potencial entre dos puntos, o el número de cargas eléctricas que por segundo recorren un circuito, son magnitudes escalares, los vectores o fasores de esas magnitudes deben considerarse simbólicos, pues no representan magnitudes vectoriales.

## 1.7. LEYES DE KIRCHHOFF EN REGIMENES SENOIDALES

Las leyes de Kirchhoff, válidas para circuitos de corriente continua, lo son también para los valores instantáneos de las corrientes y tensiones alternas senoidales.

Sin embargo, tiene mayor utilidad práctica expresar esas leyes aplicadas a los valores eficaces complejos de la tensión e intensidad.

1ª Ley de Kirchhoff. Se considera un nudo en el que concurren  $n$  corrientes alternas senoidales, de la misma pulsación. Se verifica:

$$\sum_{K=1}^n \bar{I}_K = 0$$

La primera Ley de Kirchhoff, expresa que la suma de los *valores eficaces complejos* de las intensidades que concurren en un nudo es nula.

2ª Ley de Kirchhoff. En una malla cerrada se verifica:

$$\sum_{K=1}^n \bar{U}_K = 0$$

La suma de los *valores eficaces complejos* de las tensiones senoidales aplicadas a las ramas de una malla cerrada, es cero

Otra formulación de la 2ª ley de Kirchhoff es

$$\sum \bar{E} = \sum \bar{Z} \times \bar{I}$$

Es decir que la suma de los valores eficaces complejos de las fuerzas electromotrices, en una malla cerrada resulta igual a la suma de los valores eficaces complejos de las caídas de tensión en esa malla.

## 1.8. RESPUESTA SENOIDAL DE LOS ELEMENTOS PASIVOS BASICOS

Se estudia a continuación cómo se comportan los elementos pasivos básicos R, L y C, cuando se les aplica individualmente una tensión alterna senoidal y los exponemos de forma resumida en un cuadro.

Se puede deducir de los diagramas vectoriales lo siguiente:

- La intensidad y la tensión en una resistencia pura están en fase.
- La intensidad está retrasada  $\pi/2$  respecto de la tensión, en una autoinducción.
- La intensidad está adelantada  $\pi/2$  respecto de la tensión, en una capacidad.

	Resistencia $\text{R}$	Autoinducción (L)	Capacidad $\text{C}$
Ecuación característica	$u = R \times I$	$u = L \frac{di}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \times \int idt$
Ley de Ohm	$\bar{U} = \bar{R} \times \bar{I}$ $\bar{I} = \frac{1}{\bar{R}} \bar{U}$	$\bar{U} = j\omega L \bar{I}$ $\bar{I} = -\frac{j}{\omega L} \bar{U}$	$\bar{U} = -\frac{j}{\omega C} \bar{I}$ $\bar{I} = j\omega C \bar{U}$
Reactancia (X)	0	$\omega L$	$-\frac{1}{\omega C}$
Impedancia compleja	R	$j\omega L$	$-\frac{1}{\omega C}$
$\text{Tan}(\varphi) = \frac{X}{R}$	0	infinito	-infinito
Desfase ( $\varphi$ )	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
Diagrama vectorial			

#### Ejemplo 4

Calcular, por el método simbólico, las tensiones a que están sometidas R, L y C, en el Ejemplo 3.

Dibujar el diagrama de tensiones e intensidades del circuito.

Resolución:

1) La impedancia compleja del circuito es:

$$\bar{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 5 + j(3,77 - 13,26) = 5 - j \times 9,49 = 10,73\Omega | 62,2$$

Si se considera el vector tensión eficaz, como origen de fases, la ecuación es

$$\bar{U} = \frac{537}{\sqrt{2}} |0^\circ = 379,7 |0^\circ$$

Aplicando la ley de Ohm, la ecuación de la intensidad que recorre el circuito es:

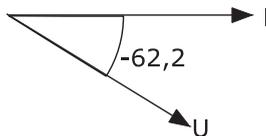
$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{379,7 |0}{10,73 | -62,2} = 35,4 |62,2(A)$$

es decir, la intensidad está adelantada 62,2° respecto de la tensión.

En los circuitos con elementos en serie, conviene tomar como origen de fases la intensidad, ya que es la variable común a todos esos elementos del circuito. En ese caso, los valores simbólicos de tensión e intensidad,  $U$  e  $I$ , son

$$\bar{I} = 35,4 |0(A)$$

$$\bar{V} = 379,7 | -62,2(V)$$



Las tensiones a que están sometidos, cada uno de los elementos del circuito, se obtienen aplicando la Ley de Ohm

$$\bar{U}_i = \bar{I} \times \bar{Z}_i$$

En la resistencia

$$\bar{U}_R = \bar{I} \times R = 35,4 |0 \times 5 = 177 |0$$

En la inductancia:

$$\overline{U}_L = \overline{I} \times (jX_L) = 35,4|0 \times 3,77|90 = 133,5|90$$

En la capacidad:

$$\overline{U}_C = \overline{I} \times (-jX_C) = 35,4|0 \times 13,26|-90 = 469,4|-90$$

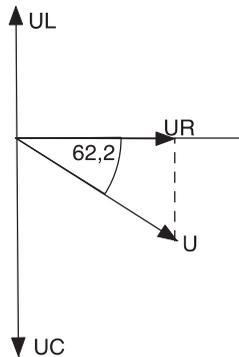
Comprobamos que se cumple la 2ª ley de Kirchhoff:

$$\overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = 177 + j469,4 - j469,4 = 177 - j335,9 = 379,7|-62,2 = \overline{U}$$

Obsérvese que no se cumpliría con módulos.

$$|U_R| + |U_L| + |U_C| = 177 + 133,5 + 469,4 = 779,9 \neq |\overline{U}|$$

2) El diagrama vectorial completo del circuito se representa en la figura siguiente:



## 1.9. ADMITANCIA, CONDUCTANCIA Y SUSCEPTANCIA. CIRCUITO MIXTO

Se denomina admitancia compleja (Y), de una rama de un circuito, a la inversa de la impedancia compleja de la rama (Z), de forma que:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$$

La Ley de Ohm, aplicada a una rama de un circuito, puede escribirse como cualquiera de las dos ecuaciones:

$$\bar{U} = \bar{Z} \times \bar{I}$$

$$\bar{I} = \bar{Y} \times \bar{U}$$

Si sustituimos el valor de la impedancia:

$$\bar{Z} = R + jX$$

nos resulta

$$\bar{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB$$

A la parte real de la expresión compleja

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

se le llama *conductancia* de la rama y a la parte imaginaria

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

*susceptancia* de la rama.

Conocidas R y X de una rama de un circuito, puede calcularse G y B, y por tanto la admitancia.

El cálculo por admitancias se facilita, cuando se resuelven circuitos con ramas en paralelo, pues evita tener que resolver ecuaciones complicadas.

También puede calcularse R y X si se conocen G y B, ya que:

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{G - jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2} = R + jX$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$X = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

La unidad en el sistema internacional (SI), para la admitancia, conductancia y susceptancia es el *Siemens*

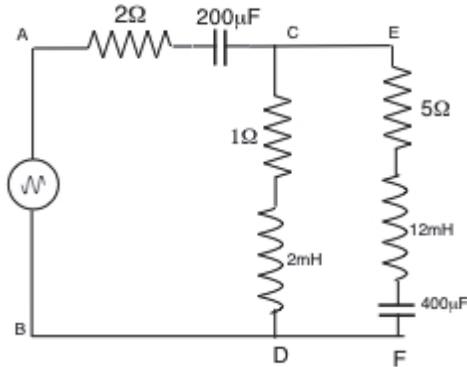
En el Ejemplo 4 se resolvió un circuito serie RLC por el método simbólico. En el Ejemplo 5 a continuación se resolverá un circuito de corriente alterna con ramas serie y paralelo (circuito mixto).

### Ejemplo 5

El circuito eléctrico de la figura se conecta a una fuente de tensión alterna senoidal de 230V de valor eficaz y 50 Hz de frecuencia.

Calcular:

- 1) Impedancia equivalente del circuito.
- 2) Intensidad suministrada por la fuente al circuito y su desfase respecto de la tensión aplicada.
- 3) Tensión a que se encuentra sometida la rama serie.
- 4) Tensión a que se encuentran sometidas las ramas conectadas en paralelo.
- 5) Intensidades que recorren las ramas en paralelo.
- 6) Diagrama de tensiones e intensidades del circuito completo.



Se trata de un circuito mixto con dos ramas conectadas en paralelo, CD y E-F, y en serie con una tercera rama A-C.

La pulsación de la tensión alterna aplicada es  $\omega=2\pi f=100 \text{ rad/s}$ .

Resolución:

1) Calcular la impedancia compleja de cada rama.

$$\begin{aligned} \overline{Z}_{AC} &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 2 - j\left(\frac{1}{100 \times \pi \times 800 \times 10^{-6}}\right) = 2 - j3,979 \\ &= 4,45 \angle -63,3(\Omega) \end{aligned}$$

$$\overline{Z}_{CD} = R + j\omega L = 1 - j(100 \times \pi \times 2 \times 10^{-3}) = 1 + j0,628 = 1,181 \angle 32,1(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \overline{Z}_{EF} &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 5 - j\left(100 \times \pi \times 12 \times 10^{-3} - \frac{1}{100 \times \pi \times 400 \times 10^{-6}}\right) \\ &= 2 - 4,188 = 2,73 \angle -39,9(\Omega) \end{aligned}$$

Para calcular la impedancia equivalente a las dos ramas en paralelo operamos con admitancias

$$\overline{Y}_{CD} = \frac{1}{\overline{Z}_{CD}} = \frac{1}{1 + j0,628} = \frac{1 - j0,628}{1^2 + 0,628^2} = 0,7172 - j0,4504$$

$$\overline{Y}_{EF} = \frac{1}{\overline{Z}_{EF}} = \frac{1}{5 - j4,188} = \frac{5 + j4,188}{5^2 + 4,188^2} = 0,7666 + j0,6421$$

La valor de la admitancia equivalente a lea dos ramas en paralelo es:

$$\overline{Y}' = \overline{Y}_{CD} + \overline{Y}_{EF} = (0,7172 - j0,4504) + (0,7666 + j0,6421) = 1,4838 + j0,1917$$

La impedancia equivalente a las dos ramas en paralelo:

$$\overline{Z}' = \frac{1}{\overline{Y}'} = \frac{1}{1,4838 + j0,1917} = 0,7050 - j0,0911 = 0,7109 \angle -7,36^\circ (\Omega)$$

La ecuación de la impedancia equivalente al circuito completo es:

$$\begin{aligned} \overline{Z} &= \overline{Z}_{AC} + \overline{Z}' = (2 - j3,979) + (0,7050 - j0,0911) = 2,705 - j4,070 \\ &= 4,887 \angle -56,4^\circ (\Omega) \end{aligned}$$

Se deduce que el circuito completo es un receptor de tipo capacitivo, es decir, que la intensidad va adelantada el ángulo  $-56,4^\circ$  respecto de la tensión aplicada.

2) Para calcular las intensidades conviene referir sus desfases respecto a un origen común, que tomaremos la tensión aplicada, de forma que es  $U = 230(V)$

Aplicando la ley de Ohm obtenemos la intensidad del circuito:

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{230 \angle 0^\circ}{4,887 \angle -56,4^\circ} = 47,06 \angle 56,4^\circ (A)$$

La intensidad vale  $47,06 (A)$  y está adelantada un ángulo de  $56,4^\circ$  respecto de la tensión  $U$ .

3) Tensión de la rama serie:

$$\overline{U_{AC}} = \overline{I} \times \overline{Z_{AC}} = (47,06|_{56,4}) \times (4,45|_{-63,3}) = 209,42|_{-6,9} = 207,9 - j25,16$$
$$|\overline{U_{AC}}| = 209,42(V)$$

Los vectores complejos calculados están referidos al origen de ángulos común U, por lo que el desfase entre algunas magnitudes debe obtenerse por diferencia de fases. Por ejemplo el desfase entre I y  $U_{AC}$  es  $-6,9^\circ - 56,4^\circ = -63,3^\circ$  que corresponde precisamente al ángulo característico de la impedancia compleja  $Z_{AC}$

4) Tensión de las ramas en paralelo.

Aplicando la 2ª ley de Kirchhoff se verifica:

$$\overline{U_{CD}} = \overline{U} - \overline{U_{AC}} = (230) - (207,9 - j25,16) = 22,1 + j25,16 = 33,48|_{48,7}(V)$$
$$|\overline{U_{CD}}| = 33,48(V)$$

Puede observarse que no se cumple con módulos

$$|\overline{U_{AC}}| + |\overline{U_{CD}}| \neq |\overline{U}|$$

5) Intensidad por las ramas en paralelo.

Conocida la tención aplicada, se obtienen las intensidades por la ley de Ohm.

$$\overline{I_{CD}} = \frac{\overline{U_{CD}}}{\overline{Z_{CD}}} = \frac{33,48|_{48,7}}{1,181|_{32,1}} = 28,35|_{16,6}(A)$$

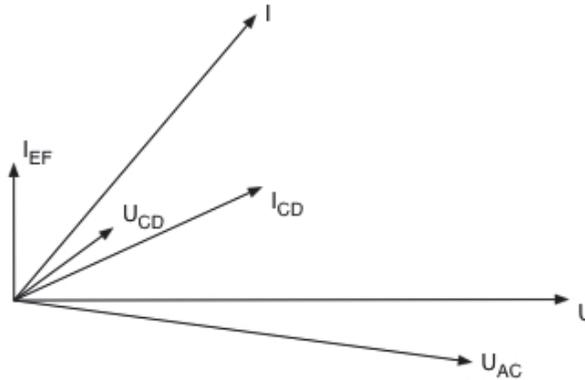
$$\overline{I_{EF}} = \frac{\overline{U_{EF}}}{\overline{Z_{EF}}} = \frac{33,48|_{48,7}}{2,732|_{-39,9}} = 12,25|_{88,6}(A)$$

$$|\overline{I_{CD}}| = 28,35(A)$$

$$|\overline{I_{EF}}| = 12,25(A)$$

Nótese que en el nudo C del circuito, no es correcta la 1ª ley de Kirchhoff aplicada sobre los módulos de las intensidades  $I_{CD} + I_{EF} = 38,82(A) \neq I$  pero, como es fácil comprobar, se verifica para los vectores complejos

6) Diagrama de tensiones e intensidades.

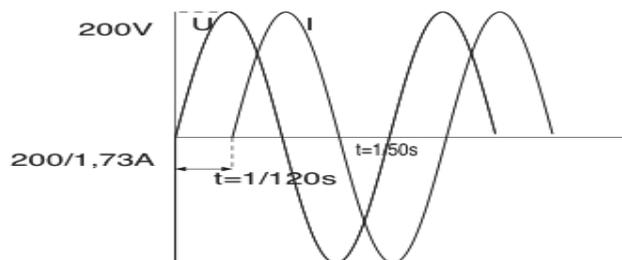


## 1.10. PROBLEMAS PROPUESTOS

### Problema 1

A una determinada impedancia  $Z(R,X)$ , se le aplica una tensión senoidal  $u$ , circulando una corriente  $i$ . Estas magnitudes se representan en forma cartesiana en la figura.

Determinar la resistencia  $R$  y la reactancia  $X$  que forman la impedancia.

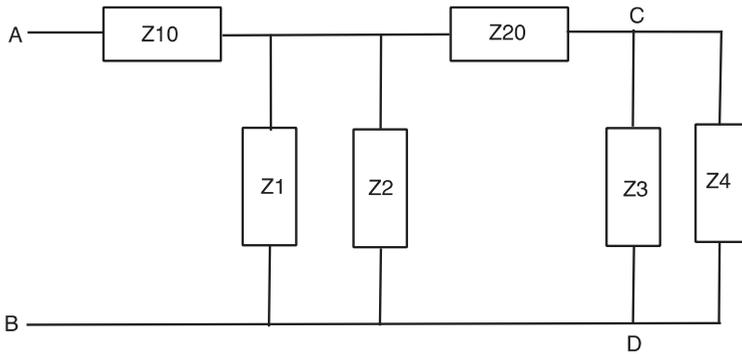


**Problema 2**

Averiguar la tensión  $U_{AB}$  y su desfase con respecto a  $I$ , en el circuito de la figura, con los siguiente datos:

$$U_{CD}=311\text{sen}\omega t \quad Z_1=-3,23j \quad Z_2=1,55+j1,16 \quad Z_3=-4,31j$$

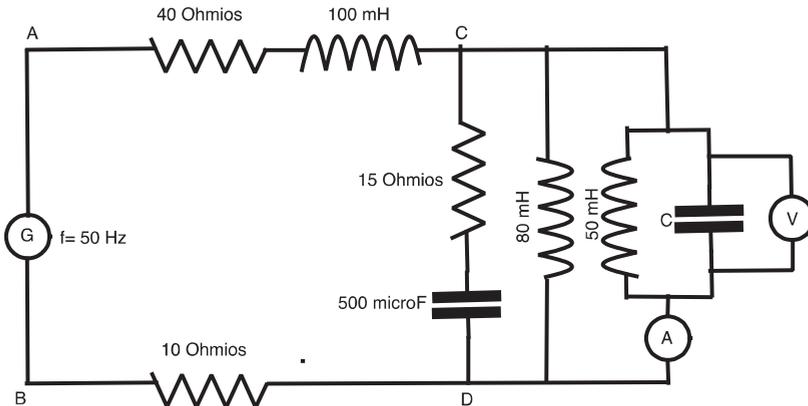
$$Z_4=2,07+j1,55 \quad Z_{10}=Z_{20}=0,1$$



**Problema 3**

En el circuito de la figura, la lectura del voltímetro es de 50V y el amperímetro marca 0 amperios. Calcular:

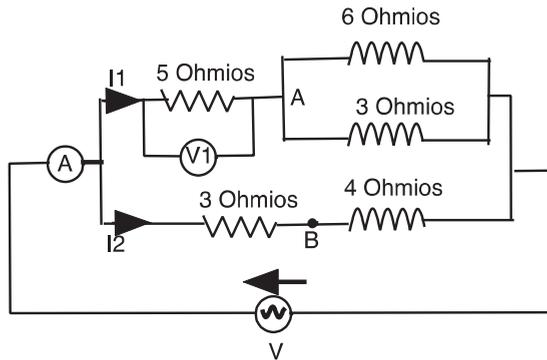
- a) Capacidad del condensador C.
- b) Tensión e intensidad suministradas por el generador.



**Problema 4**

En el circuito de la figura, la lectura del voltímetro V es de 45V. Calcular:

- Valor que indicara el amperímetro A.
- El valor eficaz de la tensión entre los puntos A y B del circuito.
- Representar en un diagrama de tensiones e intensidades, considerando la tensión del generador en el origen de fases.



*RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS*

PROBLEMA 1            R= 0            X= 0

PROBLEMA 2             $V_{AB}= 242,9V$              $\varphi= 0$

PROBLEMA 3            a)  $C= 20\mu F$             b)  $V_{AB}= 221,9V$   $I= 2,94A$

PROBLEMA 4            a)  $I= 18,0A$             b)  $V_{AB}= 25,15V$

**1.11. CUESTIONES PROPUESTAS**

- Indique la relación que existe entre una magnitud senoidal y el vector representativo de su valor eficaz.
- Defina escuetamente a qué se llama valor eficaz de una intensidad en corriente alterna.

- 3) Explique los caracteres diferenciadores de la expresión simbólica de la ley de Ohm.
- 4) ¿Qué ocurriría a los elementos de una red, resistencia, inductancia y capacitancia, si la frecuencia de la red aumentase de 50 a 60 Hz?. Razone la respuesta.
- 5) ¿Cuál es la ventaja de aplicar admitancias en los cálculos de un circuito eléctrico?.
- 6) Dibuje el triángulo de intensidades y tensiones en un montaje en paralelo de  $R$ ,  $X_L$  y  $X_C$  con carga predominantemente capacitiva.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- [1] ANNEQUIN, R. Y BOUTIGNY J. Curso de ciencias físicas: Electricidad 3. Reverte. Barcelona, 1979.
- [2] JOHANNSEN, K. Manual AEG. Fundamentos de Electrotecnia. Paraninfo. Madrid, 1977. FOUILLE, A. [1] [1] [1] [3] Electrotecnia para Ingenieros. Vol. I: Principios. Aguilar. Madrid, 1977.
- [4] MULLER, W. Y SCHWARZ, W. Fundamentos de la Electrotecnia. Siemens-Dossat, 1975. SENNER, A. Principios de Electrotecnia. Reverte. Barcelona, 1980.
- [5] MÜLLER, W. et al.. Electrotecnia de potencia. Curso superior. Reverté. Barcelona, 1985.
- [6] SENNER, A. Principios de Electrotecnia. Reverté. Barcelona, 1980.
- [7] Lequerica, J.L. ,La Corriente Alterna, Editorial Dossat S.A. Madrid 1968
- [8] Stevenson W.D., Análisis de Sistemas Eléctricos de potencia, Ediciones del Castillo, Madrid, 1975

# Capítulo 2

## Potencia en corriente alterna

### 2.1. INTRODUCCIÓN

El concepto de potencia en circuitos de corriente continua, se corresponde con el producto de la tensión por intensidad.

$$P = U \times I$$

En circuitos de corriente alterna, este concepto es válido cuando se aplica sobre los valores instantáneos de las magnitudes, tensión e intensidad.

$$p = u \times i$$

La diferencia entre continua y alterna, radica en que en corriente alterna, la potencia intercambiada entre la fuente y los receptores es variable con el tiempo y de tipo pulsatorio.

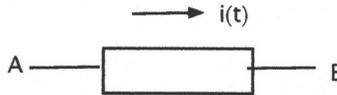
En este capítulo se establecen, la expresión de *potencia instantánea* absorbida por un dipolo pasivo básico y la del valor medio de la misma en un periodo.

También se introducen los conceptos de *potencia activa*, *potencia reactiva* y *potencia aparente*, ligados al carácter inductivo o capacitivo del dipolo, así como el *factor de potencia* y la importancia de la corrección de este factor de potencia.

Se presenta el *vatímetro*, como aparato de medida de la potencia, tanto activa como reactiva, en los circuitos de corriente alterna.

## 2.2. POTENCIA EN LOS ELEMENTOS PASIVOS BÁSICOS

Supongamos un dipolo al que se le aplica una tensión alterna senoidal  $u(t)$ , que hace circular una corriente también alterna senoidal  $i(t)$ .



Si establecemos que  $u(t) = U_A - U_B$ , el terminal de referencia positivo,  $A$ , indica el terminal de mayor potencial cuando  $u(t)$  tiene un valor positivo. De acuerdo con este criterio, el sentido positivo de la corriente  $i(t)$ , de  $A$  hacia  $B$ , es el sentido de circulación de las *cargas positivas* cuando  $i(t) > 0$ .

La energía que intercambia la corriente en un instante  $dt$  es

$$dw = (u_A - u_B) \times dq = u \times i \times dt$$

y la potencia eléctrica será

$$p = \frac{dw}{dt} = u \times i$$

En un instante  $t$  determinado, las cargas positivas circulan en sentido del potencial decreciente. La corriente eléctrica pierde energía potencial en el dipolo, que se transforma en otro tipo de energía, *térmica*, *mecánica* o *química*. En ese caso  $u$  e  $i$  tienen el mismo signo y por consiguiente

$$p > 0$$

Se dice entonces que el dipolo se comporta como *receptor*.

Si por el contrario las cargas circulan en sentido de los potenciales crecientes, la corriente aumenta su energía en el dipolo, aumento que procede de otro tipo de energía. En este caso los valores de  $u$  e  $i$  tienen diferente signo y la potencia es

$$p < 0$$

El dipolo se comporta como generador.

En los dipolos sometidos a tensiones alternas, las magnitudes  $u$  e  $i$  toman valores positivos y negativos a lo largo del tiempo. El dipolo funcionará unos instantes como receptor ( $p > 0$ ) y otros como generador ( $p < 0$ ).

Consideramos los diversos casos de dipolos de elementos puros de resistencia, autoinducción y capacidad:

a) Resistencia R

Al aplicar la tensión  $u$  a este dipolo

$$u = \sqrt{2} \times U \times \text{sen}(\omega t)$$

circulará la corriente

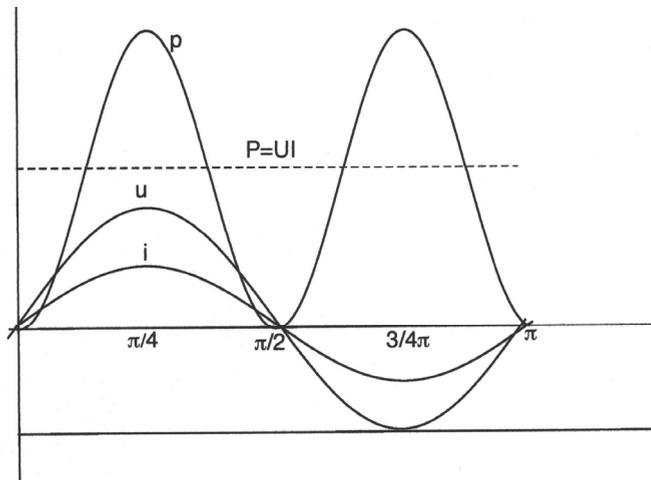
$$i = \sqrt{2} \times I \times \text{sen}(\omega t)$$

que está en fase con la tensión ( $\varphi = 0$ ).

La potencia instantánea  $p$  será:

$$p(t) = u(t) \times i(t) = 2 \times U \times I \times (\text{sen}(\omega t))^2 = U \times I \times (1 - \cos(2\omega t))$$

La ecuación indica que la potencia siempre es positiva, y su variación en el tiempo se representa en la figura siguiente.



La potencia media se deduce integrando la expresión a lo largo de un período

$$P = \frac{1}{T} \times \int_0^T p \times dt = U \times I = R \times I^2$$

La resistencia actúa en todo momento como receptor disipando una energía igual a  $RI^2$ , que se transforma en energía térmica.

### b) Autoinducción L

En este caso la intensidad está retrasada  $\pi/2$  respecto de la tensión aplicada

$$u = \sqrt{2} \times U \times \text{sen}(\omega t)$$

$$i = \sqrt{2} \times I \times \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

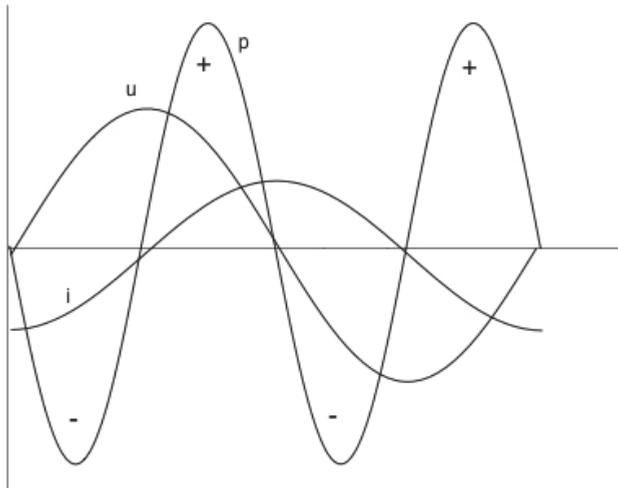
La potencia instantánea es

$$p = u \times i = 2 \times U \times I \times \text{sen}(\omega t) \times \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -U \times I \times \text{sen}(2\omega t)$$

La expresión senoidal es de frecuencia doble y su valor medio a lo largo de un periodo sería cero.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U \times I \times \text{sen}(2\omega t) = 0$$

La representación cartesiana de la potencia, a lo largo de un periodo, para la autoinducción, aparece en la siguiente figura



Se observa que:

Entre  $0$  y  $\pi/4$                        $u > 0$ ,     $i < 0$ ,                       $p < 0$     L actúa como generador.

Entre  $\pi/4$  y  $\pi/2$                        $u > 0$ ,     $i > 0$ ,                       $p > 0$     L actúa como receptor.

Al actuar como receptor, la autoinducción  $L$  absorbe energía electromagnética del circuito y al actuar como generador desprende esta energía almacenada, devolviéndola al circuito. El intercambio neto de energía, entre la autoinducción y el circuito es nulo.

La inductancia introduce un *factor de inercia* en la potencia de la corriente, en el sentido de hacer disponible, en un cuarto de período, la energía que tenía la corriente y que absorbió en el cuarto de período anterior.

### c) Capacidad C

En este caso la intensidad esta adelantada  $\pi/2$  respecto de la tensión.

$$u = \sqrt{2} \times U \times \text{sen}(\omega t)$$

$$i = \sqrt{2} \times I \times \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

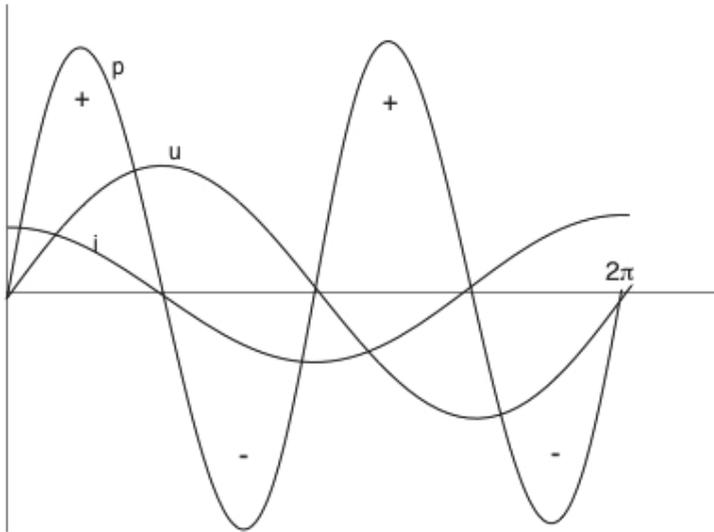
La potencia instantánea sería:

$$p = u \times i = 2 \times U \times I \times \text{sen}(\omega t) \times \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U \times I \times \text{sen}(2\omega t)$$

Función senoidal de frecuencia doble cuyo valor medio a lo largo de un periodo es nulo.

$$P = \frac{1}{T} \times \int_0^T U \times I \times \text{sen}(2\omega t) \times dt = 0$$

En la figura siguiente se ha representado la variación de la potencia  $p$  en función del tiempo.



Se observa que:

- Entre  $0$  y  $\pi/2$   $u > 0$ ,  $i > 0$ ,  $p > 0$  C almacena energía
- Entre  $\pi/2$  y  $\pi$   $u > 0$ ,  $i < 0$ ,  $p < 0$  C libera energía

La carga y descarga del condensador se repite continuamente en cada semiperiodo.

El condensador almacena energía en el campo eléctrico del dieléctrico, actuando como receptor, cuando aumenta el valor absoluto de  $U_C$  (carga del condensador). Devuelve energía al circuito cuando  $U_C$  disminuye en valor absoluto, comportándose como generador.

La capacidad también introduce un factor de inercia en la potencia del circuito, pero de sentido opuesto a la inductancia, es decir, una actúa como generador en el cuarto de periodo en que la otra actúa como receptor y viceversa.

### 2.3. POTENCIA INSTANTANEA, MEDIA Y FLUCTUANTE EN UN DIPOLO PASIVO

Consideremos un dipolo pasivo, formado en general por R, L y C. En el capítulo anterior se deducía que al aplicar una tensión alterna al dipolo, la intensidad circulante es:

$$i = \sqrt{2} \times I \times \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

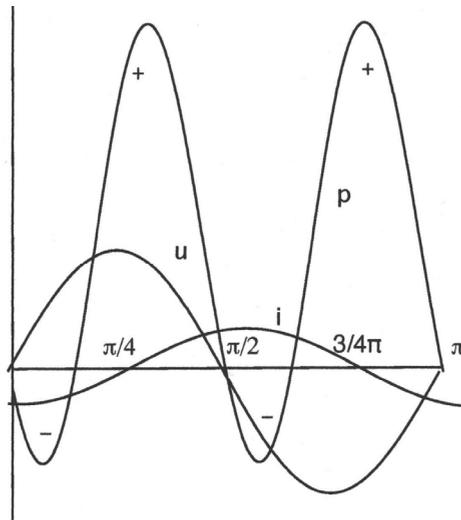
Se establece una corriente de régimen permanente, con un desfase  $\varphi$  entre tensión e intensidad que se define a partir de la expresión:

$$\tan(\varphi) = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

La potencia instantánea resulta igual al producto de los valores instantáneos de la tensión y la intensidad

$$\begin{aligned} p &= u \times i = 2 \times U \times I \times \text{sen}(\omega t) \times \text{sen}(\omega t - \varphi) \\ &= U \times I \times \cos\varphi - U \times I \times \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

cuya representación cartesiana se refleja en la figura siguiente.



Como se puede observar, la potencia es variable con el tiempo y a lo largo de un periodo, hay momentos en que el dipolo absorbe energía ( $p > 0$ ) y otros en que la suministra ( $p < 0$ ).

La potencia media a lo largo de un periodo, resulta:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \times dt = U \times I \times \cos(\varphi)$$

Esta potencia media es la potencia neta absorbida por el dipolo, transformada en otro tipo de energía, térmica o mecánica. Se denomina potencia activa y se expresa en vatios (W).

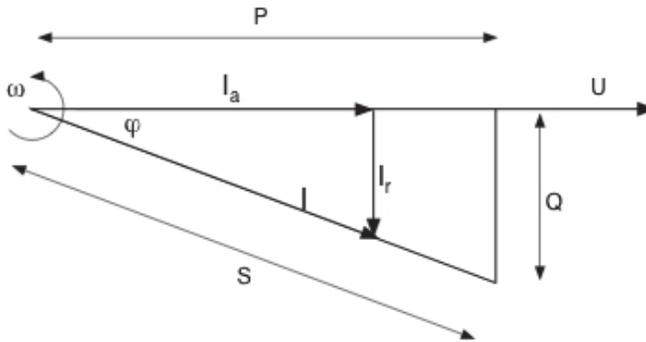
Al factor  $\cos(\varphi)$ , dependiente de las características R y X del dipolo, se le denomina *factor de potencia*.

Si el valor es  $\cos(\varphi) > 0$  el dipolo es un receptor pues  $p > 0$ , mientras que si  $\cos(\varphi) < 0$  el dipolo es un generador pues  $p < 0$ .

Observamos pues que la potencia instantánea es la suma de una cantidad constante (la potencia media) y una función senoidal de doble frecuencia. A esta cantidad se llama potencia fluctuante.

## 2.4. POTENCIA APARENTE Y REACTIVA

En la figura siguiente se ha representado un triángulo, donde la intensidad está retrasada un ángulo  $\varphi$  respecto de la tensión.



La componente de la intensidad en fase con la tensión se llama *componente activa*, y la componente según la perpendicular a la tensión se llama *componente reactiva*.

$$I_a = I \times \cos(\varphi)$$

$$I_r = I \times \text{sen}(\varphi)$$

Si a las tres componentes del triángulo de intensidades, las multiplicamos por la tensión  $U$ , se obtiene un *triángulo de potencias*. La componente en fase la tensión  $I_a$ , proporciona la *potencia activa*  $P$ :

$$P = U \times I \times \cos(\varphi) = U \times I_a$$

es decir, la potencia media eléctrica absorbida por el dipolo.

La componente de la intensidad perpendicular a la tensión  $I_r$  proporciona la *potencia reactiva*  $Q$ :

$$Q = U \times I \times \text{sen}(\varphi) = U \times I_r$$

$Q$  es la potencia absorbida y desprendida por  $L$  y  $C$  en el dipolo.

Como esta potencia no se transforma en otro tipo de potencia no eléctrico, sino que se toma y devuelve al circuito alternativamente, no puede considerarse como una potencia en un sentido físico.

A la hipotenusa del triángulo rectángulo de potencias,  $S = U \times I$ , se le llama *potencia aparente*, sin significado físico de potencia, pero de interés operativo.

Las unidades en el S.I. de las potencias definidas anteriormente, obedecen al producto de *Voltio*  $\times$  *Amperio*, aunque para distinguir su diferente significado sólo se asigna la unidad *Vatio* a la potencia activa.

Desglosamos a continuación las distintas potencias

Potencia activa	$P = U \times I \cos(\varphi)$	(W)	Vatio
Potencia reactiva	$Q = U \times I \text{sen}(\varphi)$	(VAr)	Voltio $\times$ Amperio reactivo
Potencia aparente	$S = U \times I$	(VA)	Voltio $\times$ Amperio

En el triángulo de potencias se verifica:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Consideremos las componentes de la potencia en los dipolos pasivos básicos

En una autoinducción  $L$ :

( $\varphi = \pi/2$ ), la potencia reactiva absorbida:

$$Q_L = U \times I \times \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = U \times I = \frac{U^2}{\omega L}$$

es decir, absorbe potencia reactiva. La potencia activa es nula.

En una capacidad C:

( $\varphi = -\pi/2$ ), la potencia reactiva:

$$Q_C = U \times I \times \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\omega \times C \times U^2$$

es decir que suministra potencia reactiva. La potencia activa también es nula.

En una resistencia R:

( $\varphi = 0$ ), la potencia reactiva es nula. Solo hay potencia activa

$$P = R \times I^2$$

Un receptor con R, L y C sólo absorbe potencia activa debido a su resistencia, mientras que la reactiva corresponde a L y C

## 2.5. POTENCIA COMPLEJA

Se obtuvieron en capítulo 1 las expresiones complejas de las magnitudes, tensión, intensidad e impedancia. También pueden expresarse en forma compleja las potencias de un dipolo en corriente alterna.

Puesto que la potencia aparente tiene de componentes  $P$  y  $Q$ , y se verifican las relaciones:

$$P = U \times I \times \cos(\varphi)$$

$$Q = U \times I \times \text{sen}(\varphi)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Se puede expresar, en el plano de Gauss, el vector complejo correspondiente a la potencia aparente  $S$

$$\bar{S} = P + jQ$$

Se demuestra que el vector complejo de la potencia aparente es igual al producto de la tensión compleja por el conjugado de la intensidad compleja.

$$\bar{S} = \bar{U} \times \bar{I}^*$$

Obsérvese que la potencia compleja no es un vector rotatorio sino fijo, como lo es la impedancia compleja.

## 2.6. TEOREMA DE BOUCHEROT

El Teorema de Boucherot dice lo siguiente:

Para una frecuencia constante, las potencias activa y reactiva correspondientes a un conjunto de dipolos pasivos, se corresponden a la suma de potencias activas y reactivas de esos dipolos.

Es decir, que existe conservación de la potencia activa y de la potencia reactiva.

$$P = \sum_{K=1}^n P_K$$

$$Q = \sum_{K=1}^n Q_K$$

Es lo que se entiende por el *principio de conservación de la energía*.

En forma compleja se puede expresar:

$$\bar{S} = \sum_{K=1}^n \bar{S}_K = \sum_{K=1}^n P_K + j \sum_{K=1}^n Q_K = P + jQ$$

*El vector potencia compleja de un conjunto de receptores tiene como componente activa la suma de las potencias activas y como componente reactiva la suma de las potencias reactivas.*

La potencia reactiva de cada receptor, puede ser positiva o negativa según sea de tipo inductivo o capacitivo, por lo que hay que tener en cuenta su signo cuando se trata de sumarlas.

Las potencias activas son todas positivas.

### Ejemplo 1

Consideremos los receptores siguientes conectados a una línea de 230V de tensión alterna.

Una lámpara de incandescencia que toma 4,5A de la línea

Un motor de c.a. de 3 CV, rendimiento= 0,9 y  $\cos(\varphi)= 0,8$ .

Un condensador de 40 $\mu$ F.

Calcular, aplicando el teorema de Boucherot, las potencias activa, reactiva y aparente del conjunto de los tres receptores, así como la intensidad que toman de la línea y el factor de potencia del conjunto.

Resolución:

Calculamos primero las potencias activa, reactiva y aparente de cada receptor

Lámpara de incandescencia:

Es un receptor de tipo resistivo por lo que  $\cos(\varphi_L)=1$

$$P = U \times I_L \times \cos = 230 \times 4,5 \times 1 = 1.035(W)$$

Potencia de la lámpara= 1.035VA

Motor:

La potencia eléctrica absorbida se obtiene dividiendo la potencia en el eje expresada en W por el rendimiento

$$P_M = \frac{P_{CV} \times 736}{\eta} = \frac{3 \times 736}{0,9} = 2.453(W)$$

La potencia reactiva del motor es

$$Q_M = P_M \times \tan(\varphi_M) = 2.453 \times 0,75 = 1.840(VAr)$$

que tiene valor positivo por ser el motor un receptor de tipo inductivo

y la potencia aparente

$$S_M = \sqrt{P_M^2 + Q_M^2} = 3.066(VA)$$

Condensador:

La potencia activa en un condensador es nula  $P_C=0$  y también su factor de potencia  $\cos(\varphi_C)=0$

La potencia reactiva es

$$Q_C = -U \times I_C = \omega \times C \times U^2 = -100 \times \pi \times 40 \times 10^{-6} \times 230^2 = -664,76(VAr)$$

y la potencia aparente  $S_c = -664,76(\text{Var})$

Las potencias activa y reactiva del conjunto se obtienen por la suma de las potencias activa y reactiva de los receptores

$$P = P_L + P_M + P_C = 1.035 + 2.453 + 0 = 3.488(\text{W})$$

$$Q = Q_L + Q_M + Q_C = 0 + 1.840 - 665 = 1.175(\text{VAr})$$

y la potencia aparente total

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3.681(\text{VA})$$

obsérvese que

$$S_L + S_M + S_C = 4.765(\text{VA}) \neq 0$$

La intensidad que toma de la línea el conjunto de receptores y su factor de potencia serían:

$$I = \frac{S}{U} = \frac{3.681}{230} = 16,0(\text{A})$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{3.488}{3.681} = 0,95$$

Como variante a esta resolución se propone obtener la solución operando con las intensidades, es decir calcular la intensidad compleja total  $I$ , como suma de las intensidades complejas del motor, lámpara y condensador.

$$\bar{I} = \bar{I}_L + \bar{I}_M + \bar{I}_C$$

y a continuación

$$S = U \times I$$

$$P = U \times I \times \cos(\varphi)$$

$$Q = U \times I \times \text{sen}(\varphi)$$

Para facilitar la resolución del ejercicio, es aconsejable tomar la tensión de línea como origen de fases.

## 2.7. CORRECCION DEL FACTOR DE POTENCIA

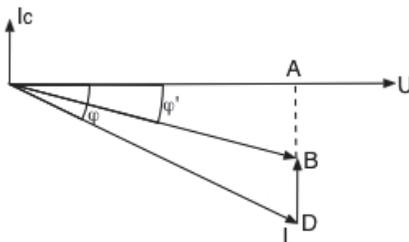
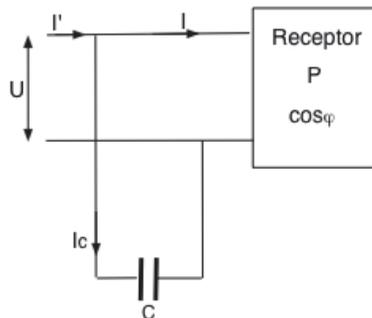
El factor de potencia  $\cos(\varphi)$  de un dipolo depende de sus características  $R$  y  $X$ . Supongamos que el dipolo es una instalación receptora. Para una potencia activa dada  $P$ , como la tensión  $U$  es aproximadamente constante, el producto  $I \times \cos(\varphi)$  también es constante. Según esto cuanto menor sea  $\cos(\varphi)$ , mayor será  $I$ .

Para desarrollar la misma potencia  $P$ , el aumento de la intensidad  $I$  supone inconvenientes, toda vez que se pierde mayor potencia en la línea de alimentación por efecto Joule ( $RI^2$ ), por ello es preferible mejorar el factor de potencia de la instalación.

La mayor parte de los receptores industriales (motores, lámparas, etc.) son de tipo inductivo. La forma de mejorar su factor de potencia (disminuir  $\varphi$ ) consiste en la instalación de condensadores conectados en paralelo a la línea de alimentación.

La resolución del problema se plantea en los siguientes términos:

En una instalación con factor de potencia  $\cos(\varphi)$ , calcular la capacidad a conectar en paralelo para que el factor de potencia pase a  $\cos(\varphi')$ , ( $\varphi' < \varphi$ ).



La figura anterior representa el diagrama vectorial del circuito. En dicha figura

$$\begin{aligned} I_C &= \overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = I \times \text{sen}(\varphi) - \overline{OA} \times \text{tan}(\varphi') \\ &= I \times \text{sen}(\varphi) - I \times \text{cos}(\varphi) \times \text{tan}(\varphi') \end{aligned}$$

y como

$$I_C = \omega \times C \times U$$

la capacidad a instalar es

$$C = \frac{I_C}{\omega \times U}$$

La potencia activa no ha variado, mientras que la potencia reactiva se ha reducido, así como el valor de la intensidad que debe circular por la línea ( $I'$ ).

El cálculo, utilizando la expresión correspondiente a la potencia, sería

$$P = U \times I \times \text{cos}(\varphi)$$

$$I = \frac{P}{U \times \text{cos}(\varphi)}$$

De las ecuaciones anteriores se deduce

$$I_C = \frac{P}{U} \times \text{tan}(\varphi) - \frac{P}{U} \times \text{tan}(\varphi')$$

y considerando que la potencia reactiva del condensador es

$$Q_C = U \times I_C$$

resulta

$$Q_C = P \times [\text{tan}(\varphi) - \text{tan}(\varphi')]$$

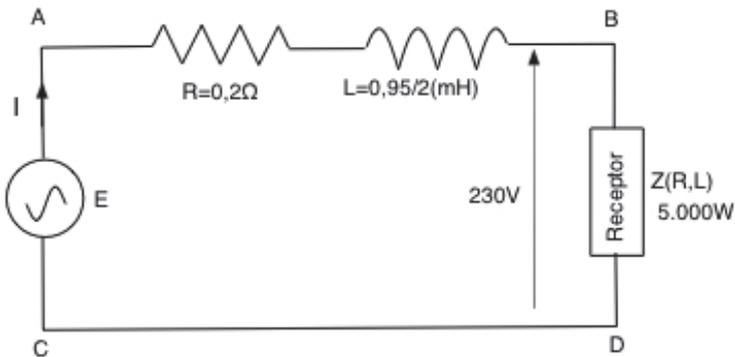
## Ejemplo 2

En el circuito de la figura, el receptor  $Z(R, L)$  se alimenta desde un generador  $Z$  por medio de una línea de resistencia  $R=0,2(\Omega)$  y autoinducción  $L= 0,95/2(mH)$ .

Si la tensión en el receptor es de  $230(V)$ ,  $50(Hz)$  y la intensidad que recorre la línea es de  $50(A)$ .

Calcular:

- 1) Las componentes R y L del receptor Z y su factor de potencia.
- 2) La tensión a la salida del generador.
- 3) La capacidad C que hay que conectar en paralelo con la citada impedancia, para que el factor de potencia del conjunto (Z, C) sea 0,9.  
Considerar que la tensión aplicada en Z permanece constante.
- 4) La potencia disipada en la línea antes y después de conectar el condensador.



Resolución:

- 1) La impedancia del receptor vale

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{230}{50} = 4,6(\Omega)$$

Su potencia activa

$$P = U \times I \times \cos(\varphi) = 5.000(W)$$

por lo que el factor de potencia

$$\cos(\varphi) = \frac{5.000}{230 \times 50} = 0,434$$

Su impedancia compleja se expresa como

$$\bar{Z} = R + jX_L$$

$$R = Z \times \cos(\varphi) = 4,6 \times 0,434 = 2(\Omega)$$

$$X_L = \omega \times L = 4,6 \times 0,90 = 4,14(\Omega)$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{4,14}{100 \times \pi} = 13,18(\Omega)$$

2) La tensión suministrada por el generador, tomando la intensidad como origen de fases, es

$$\bar{E} = \bar{V}_{AB} + \bar{V}_{BD}$$

Si tomamos la intensidad como origen de fases, nos queda

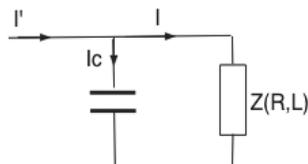
$$\begin{aligned} \bar{V}_{AB} &= \bar{Z}_{AB} \times \bar{I} = \left( 0,2 + j \times 100 \times \pi \times 10^{-3} \times \frac{0,95}{2} \right) \\ &\times 50 \angle 0 = (0,249 \angle 36,7) \times (50 \angle 0) = 12,45 \angle 36,7 = 10 + j7,4 \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{BD} = 230 \angle 63,0 = 104,4 + j204,9$$

La E del generador será

$$\bar{E} = \bar{V}_{AB} + \bar{V}_{BD} = 114,4 + j212,3 = 242,0 \angle 61,7(V)$$

3) Del diagrama vectorial se deduce la intensidad que debe tomar el condensador para que el factor de potencia del conjunto sea 0,9



$$\begin{aligned} I_C &= I \times \sin(\varphi) - I \cos(\varphi) \times \tan(\varphi') = 50 \times 0,891 - 50 \times 0,454 \times 0,484 \\ &= 33,56(A) \end{aligned}$$

y la capacidad del condensador

$$C = \frac{I_C}{\omega \times U} = \frac{33,56}{100 \times \pi \times 230} = 464,8(\mu F)$$

La intensidad  $I'$  que recorre la línea después de conectar el condensador se ha reducido a

$$I' = 50 \times \frac{0,454}{0,9} = 25,2(A)$$

La potencia activa del conjunto ( $Z, C$ ) es la de  $Z$

$$P = U \times I' \times \cos(\varphi') = 5.000(W)$$

ya que el condensador no consume potencia activa.

4) La potencia que se disipa en la línea A-B tiene lugar solo en la resistencia y vale antes de corregir el factor de potencia

$$P_d = R \times I^2 = 0,2 \times 50^2 = 500(W)$$

Después de corregir el factor de potencia a 0,9

$$P_d = R \times I'^2 = 0,2 \times 25,2^2 = 127(W)$$

El rendimiento de la transmisión, definiéndola como cociente entre potencia útil transmitida y potencia suministrada por el generador, a ambos casos

Sin condensador: receptor con  $\cos(\varphi)=0,454$

$$\eta = \frac{5.000}{5.000 + 500} \times 100 = 91(\%)$$

Perdida de potencia en la línea: 9%.

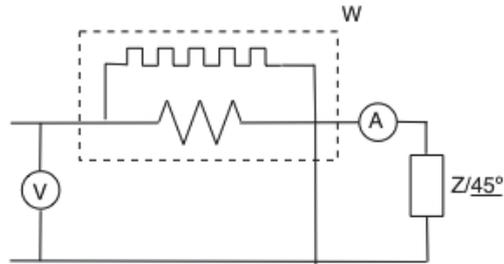
Con condensador: receptor con  $\cos(\varphi)=0,9$ .

$$\eta = \frac{5.000}{5.000 + 127} \times 100 = 97,5(\%)$$

Pérdida de potencia en la línea: 2,5%

## 2.8. MEDIDA DE LA POTENCIA. VATÍMETRO ELECTRODINÁMICO. VÁRMETRO

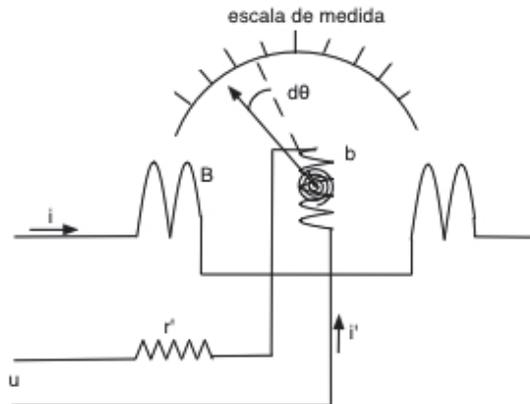
El vatímetro electrodinámico es un aparato destinado a medir la potencia activa en corriente alterna. Consta de dos bobinas que se conectan al circuito cuya potencia se desea medir, de la siguiente forma:



Una de las bobinas, llamada bobina amperimétrica, se conecta en serie en el circuito de manera que por ella circula la intensidad del mismo, es una bobina con pocas espiras de gran sección y que presenta, por tanto, una resistencia eléctrica muy baja.

La otra bobina, llamada bobina voltimétrica, se conecta en paralelo entre los dos hilos de la línea, quedando sometida a la tensión de línea, es una bobina con un número elevado de espiras de pequeña sección en cobre y por tanto gran resistencia.

La disposición constructiva de ambas bobinas se representa en la figura siguiente.



La bobina amperimétrica  $B$  es fija y está dividida en dos mitades entre las cuales se encuentra la bobina voltimétrica  $b$ . Esta puede girar alrededor de un eje, oponiéndose en su giro a la acción de un muelle antagonista. La bobina voltimétrica lleva en serie una resistencia  $r'$  muy grande para limitar la corriente que la atraviesa.

**Para seguir leyendo haga click aquí**