



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Eficiencia espectral de una señal digital ASK multinivel

**Apellidos y nombre:** Flores Asenjo, Santiago J. ([sflores@dcom.upv.es](mailto:sflores@dcom.upv.es))<sup>1</sup>

**Departamento/Centro:** <sup>1</sup>Departamento de Comunicaciones  
Universitat Politècnica de València

## Índice general

1. Resumen de las ideas clave	2
2. Objetivos y conocimientos previos	2
3. Introducción	3
4. Equivalente paso bajo	3
5. Densidad espectral de potencia utilizando pulsos rectangulares	3
6. Eficiencia espectral utilizando pulsos rectangulares	5
7. Eficiencia espectral utilizando pulsos RRC	6
8. Cierre	6
Bibliografía	7

## 1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se va a presentar el cálculo analítico de la Densidad Espectral de Potencia de una señal digital **ASK** (*Amplitude Shift Keying* o Modulación por Variaciones de Amplitud), con el fin de poder estimar el ancho de banda que ocupa.

Este cálculo se hará considerando que la señal es **multinivel**. Es decir, habrá  $M$  símbolos a transmitir, y cada uno de ellos tendrá una amplitud distinta que representará información digital correspondiente a  $\log_2 M$  bits, lo cual determinará la velocidad de información (en bits por segundo) que es capaz de transmitir.

Se particularizará para el caso de pulsos transmitidos con **ventana rectangular** temporal de duración igual al periodo de símbolo  $T$ , y se presentará la utilización de pulsos conformadores con espectro en raíz de coseno alzado (**RRC**: *Root Raised Cosine*).

Para ambos casos, se obtendrá, finalmente, la eficiencia espectral de este tipo de señales, medida en bps/Hz.

## 2 Objetivos y conocimientos previos

Los objetivos de aprendizaje este artículo docente se presentan de forma esquemática en la [tabla 1](#).

Objetivos de aprendizaje
1. Se aprenderá a calcular de forma analítica la densidad espectral de potencia de de una señal digital ASK multinivel.
2. Se particularizará para el caso de pulsos rectangulares de duración $T$ y para pulsos con espectro en coseno alzado.
3. Se comprobará que el ancho de banda que ocupa dependerá del pulso conformador, pero será independiente del número $M$ de símbolos utilizados.
4. Se estimará la eficiencia espectral para el caso de pulsos rectangulares y pulsos conformadores con espectro en coseno alzado.
5. Se propondrá como tareas adicionales la simulación de los distintos casos para verificar los resultados analíticos obtenidos.

**Tabla 1:** Objetivos de aprendizaje

Como conocimientos previos, el alumno deberá tener nociones básicas de modulaciones analógicas y de modulaciones digitales paso banda, concretamente de ASK (*Amplitude Shift Keying*), así como de la utilización de conformación de pulsos en transmisión.

También es interesante que conozca el método de cálculo de las densidades espectrales de potencia de modulaciones digitales banda base PAM (*Pulse Amplitude Modulation* o Modulación de Pulsos en Amplitud), aunque se hará referencia al método en la bibliografía.

### 3 Introducción

Una señal digital ASK (*Amplitude Shift Keying* o Modulación por variaciones de Amplitud) no es más que una sucesión de pulsos  $g(t)$  modulados en DBL (Doble Banda Lateral) con una portadora de frecuencia  $f_o$ , enviados cada  $T$  segundos, y cada uno de ellos con una amplitud de valor  $a_k$ , que es donde realmente reside la información digital (Sklar 2001):

$$s_{\text{ASK}}(t) = \sum_k a_k g(t - kT) \cos(2\pi f_o t) \quad (1)$$

Al no indicar los límites del sumatorio, queremos dar a entender que la sucesión es indefinida, aunque, a efectos de cálculo, se considerará que el índice  $k$  variará desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ .

Cada amplitud  $a_k$  representará información de un símbolo formado por uno o más bits, y a  $T$  se le llamará **periodo de símbolo**.

Se considerará que las amplitudes  $a_k$  podrán tener los siguientes  $M$  posibles valores:  $0, A, 2A, \dots, (M-1)A$ . Recordemos que  $M$  ha de ser potencia de 2 para que cada amplitud represente un número entero de bits igual a  $\log_2 M$ .

Al pulso  $g(t)$  se le llama **pulso conformador** y, aunque no sirve más que de transporte de la información contenida en  $a_k$ , determinará en gran parte las características espectrales de la señal digital.

### 4 Equivalente paso bajo

Teniendo en cuenta que la parte del coseno no se ve afectada por el índice  $k$ , podemos sacar factor común en la [ecuación 1](#) y obtener:

$$s_{\text{ASK}}(t) = \cos(2\pi f_o t) \sum_k a_k g(t - kT) \quad (2)$$

Si nos fijamos en la [ecuación 2](#), vemos que se trata de una señal modulada en DBL:

$$s_{\text{ASK}}(t) = \cos(2\pi f_o t) \text{PB}_{\text{ASK}}(t) \quad (3)$$

A  $\text{PB}_{\text{ASK}}(t) = \sum_k a_k g(t - kT)$  le llamamos **equivalente paso bajo** de la señal ASK, y podemos comprobar que se trata de una señal digital **PAM** (*Pulse Amplitude Modulation* o Modulación de Pulsos en Amplitud) banda base con codificación de línea multinivel **NRZ** (por tratarse de pulsos de duración  $T$ ) **unipolar** (al ser todas las amplitudes positivas o nula).

### 5 Densidad espectral de potencia utilizando pulsos rectangulares

Teniendo en cuenta la [ecuación 3](#), es fácil comprender que la densidad espectral de potencia de una señal ASK  $S_{\text{ASK}}(f)$  no es más que la traslación a  $f_o$ , como en una modulación DBL, de la densidad espectral de su equivalente paso bajo  $S_{\text{PB}}(f)$ :

$$S_{\text{ASK}}(f) = \frac{1}{4} [S_{\text{PB}}(f + f_o) + S_{\text{PB}}(f - f_o)] \quad (4)$$

Por tanto, la densidad espectral de potencia que estamos buscando tendrá la misma forma que la de su equivalente paso bajo, pero trasladada a  $f = f_o$ , y se deduce que el ancho de banda que ocupará será el doble, como bien corresponde a una modulación DBL.

En (Flores 2017) se demostró que la densidad espectral de potencia de una señal PAM multinivel con codificación unipolar, como es el caso de nuestra señal equivalente paso bajo, tiene la siguiente expresión:

$$S_{PB}(f) = |G(f)|^2 \frac{\sigma_{a_k}^2}{T} + \frac{\overline{a_k}^2}{T^2} \sum_n \left| G\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (5)$$

siendo  $G(f)$  el espectro del pulso conformador  $g(t)$ ,  $\overline{a_k}$  el valor medio de las amplitudes  $a_k$ , y  $\sigma_{a_k}$  su varianza.

Observamos que aparecen multitud de deltas en frecuencia cada  $1/T$ , incluyendo una en  $f = 0$  que representa el término en continua que claramente tiene este tipo de señales digitales, salvo que  $G(f)$  fuera nulo en  $f = 0$ .

No es difícil obtener el valor medio y la varianza de las amplitudes para este caso de codificación unipolar con  $M$  símbolos:

$$\overline{a_k} = \frac{M-1}{2} A \quad (6)$$

$$\sigma_{a_k}^2 = \frac{M^2-1}{12} A^2 \quad (7)$$

Teniendo en cuenta la [ecuación 6](#) y la [ecuación 7](#), y que el espectro de un pulso rectangular de duración  $T$  es  $G(f) = T \text{sinc}(fT)$ , la densidad espectral de potencia del equivalente paso bajo en este caso será:

$$S_{PB}(f) = \frac{M^2-1}{12} A^2 T \text{sinc}^2(fT) + \frac{(M-1)^2}{4} A^2 \delta(f) \quad (8)$$

Vemos que la mayor parte de las deltas desaparecen al coincidir con los nulos de la sinc, permaneciendo el término de continua.

Sustituyendo en la [ecuación 4](#), se tiene finalmente la expresión de la densidad espectral de potencia de una señal ASK utilizando pulsos rectangulares de duración  $T$ :

$$S_{ASK}(f) = \frac{A^2}{4} \frac{M^2-1}{12} T \left[ \text{sinc}^2((f+f_o)T) + \text{sinc}^2((f-f_o)T) \right] + \frac{A^2}{4} \frac{(M-1)^2}{4} [\delta(f+f_o) + \delta(f-f_o)] \quad (9)$$

Comprobamos que el resultado final es una sinc trasladada a  $f = \pm f_o$ , más dos deltas en esas mismas frecuencias. Cabe notar que, salvo factores de escala, la forma resultante es independiente del número de símbolos empleado  $M$ .

Dejamos como ejercicio para el alumno que particularice para los casos más sencillos:  $M = 2$  y  $M = 4$ , así como la implementación de las simulaciones en *Simulink*<sup>®</sup> que comprueben los resultados obtenidos. En la [figura 1](#) se tiene la simulación de la densidad espectral de potencia (medida en dB respecto al máximo) de una señal 4-ASK, con portadora a 20 kHz y velocidad de transmisión de 1 kb/s. Compruebe que los ceros se ubican allá donde se espera que estén (haga el cálculo, no se desanime).

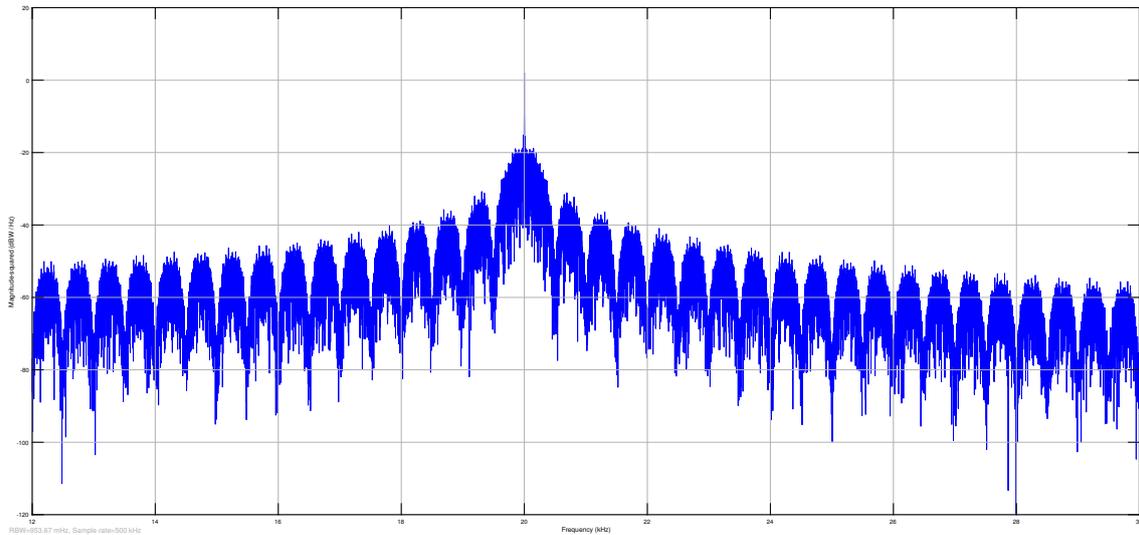


Figura 1: Densidad espectral de potencia de una señal 4-ASK simulada con *Simulink*®

## 6 Eficiencia espectral utilizando pulsos rectangulares

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en la ecuación 9, y considerando la medida del ancho de banda entre ceros, se observa que, para el caso de una señal ASK multinivel con pulsos rectangulares de duración  $T$ , su ancho de banda ocupado será, con independencia del número  $M$  de símbolos distintos utilizados:

$$B_{M\text{-ASK}} = \frac{2}{T} \quad (10)$$

ya que los dos ceros de la densidad espectral de potencia más cercanos a  $f_o$  se encuentran en  $f_o - \frac{1}{T}$  y  $f_o + \frac{1}{T}$ , provocados por las sinc.

Hay autores que consideran, no sin razón, que medir el ancho de banda entre ceros es excesivo para este caso y proponen tomar la mitad, es decir,  $B_{M\text{-ASK}} = \frac{1}{T}$ , que se acerca bastante al ancho de banda a  $-3$  dB. En este documento seguiremos lo deducido en la ecuación 10.

Así pues, como se transmiten símbolos a razón de 1 cada  $T$  segundos, tenemos que, por cada hercio de ancho de banda consumido, podemos transmitir medio símbolo por segundo (o un símbolo por segundo por cada 2 hercios, como se quiera ver).

Resulta más conveniente expresar esta eficiencia espectral en términos de b/s/Hz, obteniendo:

$$\eta_b = \frac{R_b}{B_{M\text{-ASK}}} = \frac{R_s k}{B_{M\text{-ASK}}} = \frac{\frac{1}{T} \log_2 M}{\frac{2}{T}} = \frac{1}{2} \log_2 M \text{ b/s/Hz} \quad (11)$$

donde  $R_b$  es la velocidad de transmisión en b/s,  $R_s = \frac{1}{T}$  es la velocidad de señalización en símbolos por segundo (o baudios), y  $k = \log_2 M$  es el número de bits que puede transportar cada uno de los  $M$  símbolos distintos utilizados.

Se puede ver que, aunque la eficiencia espectral en términos de símbolos por segundo por cada hercio es constante, la eficiencia en términos de b/s por cada hercio crece con el orden de la

modulación  $M$ , lo cual es de esperar pues el ancho de banda no varía, como se ha visto en la [ecuación 10](#).

## 7 Eficiencia espectral utilizando pulsos RRC

Si, en lugar de utilizar pulsos rectangulares, se utilizasen pulsos con espectro en raíz de coseno alzado (**RRC: Root Raised Cosine**)(RRC), el espectro del equivalente paso bajo que se obtendría sería el indicado en la [ecuación 5](#), sustituyendo  $G(f)$  por el espectro de un pulso RRC banda base.

De acuerdo con lo visto en la [ecuación 4](#), se trasladaría dicho espectro (y también la delta que no se anula) a  $\pm f_o$ , quedando duplicado su ancho de banda.

Se sabe que el ancho de banda de los pulsos en coseno alzado RC en banda base (y también el de los pulsos RRC) es  $B_{PB-RRC} = \frac{1+\alpha}{2T}$ , siendo  $\alpha$  el *factor de roll-off* del pulso utilizado y  $T$  el periodo de símbolo (Wikipedia 2017). Por tanto, al doblarse el ancho de banda, la densidad espectral de potencia de la señal ASK resultante será:

$$B_{ASK-RRC} = \frac{1 + \alpha}{T} \quad (12)$$

que también será constante con el número de símbolos  $M$  utilizado.

Es altamente recomendable que el alumno intente modelar en *Simulink*<sup>®</sup> este tipo de modulación para comprobar que la densidad espectral de potencia resultante se corresponde con los resultados analíticos obtenidos.

Finalmente, la eficiencia espectral resultante en este caso será:

$$\eta_{bRRC} = \frac{R_b}{B_{ASK-RRC}} = \frac{R_s k}{B_{ASK-RRC}} = \frac{\frac{1}{T} \log_2 M}{\frac{1+\alpha}{T}} = \frac{\log_2 M}{1 + \alpha} \text{ b/s/Hz} \quad (13)$$

que también crece con  $M$ , como en el caso anterior.

## 8 Cierre

Se ha presentado en este artículo cómo calcular la densidad espectral de potencia de una modulación digital ASK multinivel utilizando pulsos rectangulares o pulsos con espectro en raíz de coseno alzado. En ambos casos, se observan características espectrales similares: su ancho de banda es independiente del número de símbolos utilizado, y aparecen componentes discretas en frecuencia (deltas) en  $\pm f_o$  (frecuencia de la portadora).

Al utilizar pulsos rectangulares de duración igual al periodo de símbolo  $T$ , se observan nulos en la densidad espectral de potencia cada  $1/T$ , salvo en  $f_o$ , lo cual puede servir para dar una estimación del ancho de banda entre ceros de  $2/T$ .

En el caso de pulsos con espectro en raíz de coseno alzado, se obtiene un ancho de banda igual a  $\frac{1+\alpha}{T}$ .

Con todo ello, resulta inmediato calcular las eficiencias espectrales en b/s/Hz, observándose que en ambos casos son crecientes con  $M$ , ya que el ancho de banda no varía con este parámetro en ASK, independientemente del pulso conformador utilizado.

En general, podemos inferir que, sea cual sea el tipo de pulsos conformadores utilizado, el espectro de la señal ASK resultante será una traslación a la frecuencia portadora de la densidad espectral de potencia de una señal equivalente paso bajo tipo PAM unipolar, que a su vez tendrá una forma similar a la del espectro del pulso utilizado. Por tanto, el ancho de banda necesario para la señal  $M$ -ASK será siempre el doble del que ocupe dicho espectro banda base, con independencia del número  $M$  de símbolos utilizados, por lo que la eficiencia en b/s/Hz aumentará con  $M$ .

Se ha dejado al lector, como trabajo adicional, la particularización para valores de  $M$  sencillos y la implementación de simulaciones que corroboren todo lo calculado.

## Bibliografía

- Flores, Santiago J. (2017). *Densidad espectral de potencia de una señal digital PAM multinivel*. RiuNet, repositorio UPV. URL: <http://hdl.handle.net/10251/82983> (vid. pág. 4).
- Sklar, Bernard (2001). *Digital Communications: Fundamentals and Applications (2nd Edition)*. Prentice Hall. ISBN: 0130847887 (vid. pág. 3).
- Wikipedia, Colaboradores de (2017). *Filtro de coseno alzado*. Wikipedia, La enciclopedia libre. [Internet; descargado 1-septiembre-2017]. URL: [https://es.wikipedia.org/wiki/Filtro\\_de\\_coseno\\_alzado](https://es.wikipedia.org/wiki/Filtro_de_coseno_alzado) (vid. pág. 6).