



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Aplicaciones del análisis de datos funcionales en la valoración biomecánica del aparato locomotor

Junio de 2025

Autora: Elisa Aragón Basanta

Directores: Dr. Álvaro Page del Pozo
Dr. Guillermo Ayala Gallego
Dra. Pilar Serra Añó

Índice general

Índice general	iii
Índice de figuras	vii
Índice de tablas	xv
1 Introducción	1
1.1 Importancia de la Biomecánica en la valoración del aparato locomotor	1
1.2 Interés económico y social	2
2 Estado del arte	5
2.1 Estudios biomecánicos para valoración funcional	6
2.1.1 Estudios descriptivos	6
2.1.2 Estudios comparativos	6
2.1.3 Estudios de valoración de severidad de una patología	7
2.1.4 Estudios de clasificación y diagnóstico	7
2.1.5 Estudios de predicción, pronóstico y eficacia de tratamientos	8
2.2 Enfoques en el tratamiento de datos	8
2.2.1 Enfoque tradicional	9
2.2.2 Enfoque basado en Inteligencia Artificial	11
2.2.3 Enfoque basado en Análisis de Datos Funcional	15
2.3 Necesidades detectadas	26
3 Objetivos e hipótesis	29

4	Datos experimentales	33
4.1	Datos de cinemática cervical en pacientes con cervicalgia inespecífica	33
4.2	Datos de fuerzas en marcha de pacientes con dolor de rodilla	37
4.3	Datos cinemáticos sobre carrera	39
4.4	Base de datos de marcha GaitRec	43
5	Normalización de la escala temporal	47
5.1	Introducción	48
5.1.1	Estado del arte	48
5.1.2	Necesidades detectadas. Objetivos.	55
5.2	Métodos de normalización del tiempo	56
5.2.1	Normalización lineal	56
5.2.2	Registro continuo: método de Ramsay	57
5.2.3	Registro continuo: método basado en la métrica de Fisher-Rao	59
5.3	Aplicaciones	60
5.3.1	Comparación de métodos de registro	61
5.3.2	Coherencia dinámica	69
5.3.3	Coordinación motora	76
5.3.4	Coherencia mecánica	83
5.4	Conclusiones	90
6	Descriptivos funcionales	93
6.1	Introducción	94
6.1.1	Estado del arte	94
6.1.2	Necesidades detectadas y objetivos	96
6.2	Descriptivos funcionales	97
6.2.1	Media y varianza funcional	97
6.2.2	Curva profunda	98
6.3	Aplicaciones	99
6.3.1	Comparativa entre media funcional y curva profunda	99
6.3.2	Regiones de confianza	105
6.3.3	Estudio de la variabilidad	108
6.3.4	Uso de curvas profundas para el registro de funciones	115
6.4	Conclusiones	119
7	Modelos lineales funcionales	121
7.1	Introducción	121
7.1.1	Estado del arte	121
7.1.2	Necesidades detectadas. Objetivos	128
7.2	Modelos de regresión	129
7.2.1	Modelo de regresión escalar sobre función	129

7.2.2	Modelo de regresión función sobre escalar	131
7.2.3	Modelo limma	132
7.2.4	Medidas de calidad del modelo	134
7.2.5	Aplicaciones y modelos implementados	136
7.3	Aplicaciones	137
7.3.1	ANOVA funcional	137
7.3.2	Regresión función sobre escalar: relación entre curvas del movimiento de flexo-extensión del cuello y variables clínicas e individuales	141
7.3.3	Regresión escalar sobre función: relación entre NDI y movimiento de flexo-extensión del cuello.	149
7.3.4	Regresión escalar sobre función: relación entre el EVA y fuerzas de reacción sobre el suelo en sujetos con osteoartritis temprana de rodilla.	157
7.3.5	Regresión escalar sobre función: relación entre el NDI y movimientos de cuello. Selección de variables.	162
7.4	Conclusiones	171
8	Clasificadores	175
8.1	Introducción	176
8.1.1	Estado del arte	176
8.1.2	Necesidades detectadas. Objetivos	182
8.2	Modelos lineales generalizados	183
8.2.1	Medidas de calidad del ajuste	186
8.3	Aplicaciones	187
8.3.1	Comparación entre modelo de regresión logística funcional y no funcional	187
8.3.2	Modelo de regresión logística funcional: sujetos con EKOA	195
8.4	Conclusiones	206
9	Conclusiones	209
9.1	Normalización del tiempo (objetivo específico 1)	209
9.2	Descriptivos funcionales (objetivos específicos 2 y 3)	210
9.3	Inferencia estadística (objetivos específicos 4, 5 y 6)	211
9.4	Líneas futuras	212
	Bibliografía	213
A	Código	235
A.1	Matriz de modelo	235
A.2	Regresión lineal funcional	237

A.3	Regresión logística funcional	238
B	Publicaciones derivadas de la tesis doctoral	241
B.1	Publicaciones en revistas	241
B.2	Comunicaciones en congresos internacionales	241
B.3	Trabajos aceptados	242
B.4	Trabajos en proceso de revisión	242

Índice de figuras

4.1	Curvas de ángulo (arriba), velocidad angular (medio) y aceleración angular (abajo) para los movimientos de flexo-extensión (izquierda), flexión lateral (medio) y rotación axial (derecha). Se representa en línea sólida negra la media y en discontinuo la media más y menos una desviación típica.	36
4.2	Curvas de fuerzas de reacción sobre el suelo normalizadas por el peso y normalizadas linealmente en el tiempo: anteroposterior F_x (arriba), vertical F_y (mitad) y mediolateral F_z (abajo) para la pierna izquierda y derecha, representadas ambas a la izquierda y derecha, respectivamente. En línea negra sólida la media y en discontinua más y menos una desviación estándar.	38
4.3	Curvas del ángulo de cadera (arriba izquierda), rodilla (arriba derecha), tobillo (abajo izquierda) y pie (abajo derecha) medidas durante la carrera para la pierna derecha . Se representa con una línea sólida negra la media y en discontinuo la media más y menos una desviación típica.	42
4.4	Curvas del ángulo de cadera (arriba izquierda), rodilla (arriba derecha), tobillo (abajo izquierda) y pie (abajo derecha) medidas durante la carrera para la pierna izquierda . Se representa con una línea sólida negra la media y en discontinuo la media más y menos una desviación típica.	43
4.5	Curvas de fuerzas de reacción sobre el suelo de la base de datos de GaitRec normalizadas por el peso y normalizadas linealmente en el tiempo: anteroposterior F_x (izquierda), vertical F_y (mitad) y mediolateral F_z (derecha) para el grupo de sanos (arriba), patológicos de cadera (medio) y de rodilla (abajo). En línea negra sólida la media y en discontinua más y menos una desviación típica.	45

4.6	Curvas de fuerzas de reacción sobre el suelo de la base de datos de GaitRec normalizadas por el peso y normalizadas linealmente en el tiempo: antero-posterior F_x (izquierda), vertical F_y (mitad) y mediolateral F_z (derecha) para el grupo patológicos de tobillo (arriba) y calcáneo (abajo). En línea negra sólida la media y en discontinua más y menos una desviación típica.	46
5.1	Arriba: curvas de ángulo normalizadas linealmente en el tiempo (izquierda), con el método de registro continuo de Ramsay (medio) y con el método basado en la métrica de Fisher-Rao (derecha). La línea sólida negra marca la media funcional de las curvas y la discontinua la media más y menos una desviación típica. Abajo aparecen las gráficas de velocidad normalizadas linealmente en el tiempo (izquierda) y registradas con las funciones de transformación del tiempo obtenidas para el ángulo, con el método de Ramsay (medio) y el de Fisher-Rao (derecha).	63
5.2	Funciones de transformación del tiempo obtenidas con el método de Ramsay (izquierda) y el de Fisher-Rao (derecha), obtenidas al registrar el ángulo.	65
5.3	Comparación de las funciones $h(t)$ obtenidas con el método de Ramsay (negro) y el de Fisher-Rao (rojo) para cuatro repeticiones elegidas aleatoriamente.	65
5.4	Funciones $h(t)$ de las 10 primeras repeticiones (arriba) junto con sus derivadas (abajo) para el método de Ramsay (izquierda) y el de Fisher-Rao (derecha).	66
5.5	En negro, la curva media obtenida alineando las funciones de velocidad evaluando en cada punto los valores de tiempo obtenidos con la función de transformación del tiempo $h(t)$ obtenida en el proceso de registro de las curvas de ángulo. En rojo, la curva media obtenida derivando las funciones de ángulo registradas. A la izquierda para el método de Ramsay y a la derecha para el método de Fisher-Rao.	72
5.6	En negro la curva de velocidad obtenida aplicando las funciones $h(t)$ obtenidas del registro del ángulo y en rojo la velocidad obtenida derivando el ángulo registrado. Arriba para el método de Ramsay y abajo para el de Fisher-Rao. Las gráficas de la izquierda corresponden a una repetición y las de la derecha a otra distinta, elegidas aleatoriamente.	73
5.7	Funciones de velocidad obtenidas a partir de las curvas registradas del ángulo (negro), registradas directamente a partir de todas las curvas de velocidad (azul) y las curvas aplicando simplemente una normalización lineal (rojo). Abajo las funciones de transformación del tiempo correspondientes, en negro la obtenida para el ángulo y en azul la de la velocidad. A la izquierda, para una repetición y a la derecha para otra.	74
5.8	Curvas de cadera y rodilla normalizadas linealmente y registradas con el método de Ramsay.	77

5.9	Curvas de tobillo y pie normalizadas linealmente y registradas con el método de Ramsay.	78
5.10	Funciones de transformación del tiempo obtenidas del registro de cada articulación: cadera, rodilla, tobillo y pie.	78
5.11	Comparación de las curvas de transformación del tiempo de una determinada repetición, elegida al azar, obtenidas para las cuatro articulaciones. Cada gráfica corresponde a una repetición distinta elegida de forma aleatoria. . .	79
5.12	Curvas de rodilla, tobillo y pie normalizadas linealmente (izquierda), registradas con el método de Ramsay a partir de las curvas de cada articulación (medio) y alineadas a partir de las funciones $h(t)$ obtenidas del registro de la cadera.	80
5.13	Curvas de rodilla, tobillo y pie normalizadas linealmente (izquierda), registradas con el método de Ramsay a partir de las curvas de cada articulación (medio) y alineadas a partir de las funciones $h(t)$ obtenidas del registro de la rodilla.	81
5.14	Comparación de las curvas medias de la normalización lineal (azul), del registro de las propias curvas de la articulación (rojo) y registradas a partir de las $h(t)$ de la cadera (negro), para las articulaciones de rodilla, tobillo y pie en la parte superior. De forma análoga, en la parte inferior, las articulaciones de cadera, tobillo y pie, obtenidas aplicando la $h(t)$ de la rodilla. La zona sombreada marca la banda de la media más y menos una desviación típica, en rojo para las curvas registradas para la propia articulación y en negro para las curvas obtenidas al aplicar la $h(t)$ de la cadera (arriba) y la rodilla (abajo).	82
5.15	Curvas de fuerza de reacción sobre el suelo (anteroposterior F_x , izquierda, vertical F_y en el centro y mediolateral F_z , derecha) normalizadas linealmente en el tiempo (arriba) y registradas con el método de Ramsay (centro), junto con las funciones de transformación del tiempo $h(t)$ (abajo). Se representa en rojo la curva media del conjunto de curvas de cada gráfico.	85
5.16	Curvas normalizadas linealmente en el tiempo (izquierda), registradas a partir de las propias curvas (centro) y registradas aplicando los tiempos transformados del registro de la fuerza F_x (derecha), para la fuerza vertical F_y (arriba) y mediolateral F_z (abajo). Se marca en rojo la curva media del conjunto de curvas.	86
5.17	Curvas normalizadas linealmente en el tiempo (izquierda), registradas a partir de las propias curvas (centro) y registradas aplicando los tiempos transformados del registro de la fuerza F_y (derecha), para la fuerza anteroposterior F_x (arriba) y mediolateral F_z (abajo). Se marca en rojo la curva media del conjunto de curvas.	87

5.18	Comparación de las curvas medias obtenidas en cada registro: en negro la media de la normalización lineal, en rojo la media de las curvas registradas a partir de las curvas de la fuerza considerada, en verde la media de las curvas registradas a partir de los tiempos transformados de la función F_x y en azul la obtenida del registro de la F_y	88
6.1	Curvas de fuerza de reacción sobre el suelo anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z , junto con la media (negro) más y menos una desviación (discontinua). Se marcan los puntos que se han seleccionado como máximos y mínimos para comparar la curva media y profunda.	101
6.2	Función media (negro) y más profunda de la profunda de cada sujeto (rojo) para la fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y medio lateral F_z	103
6.3	Función media (negro) y profunda (rojo) de las 6 repeticiones de un determinado sujeto para las tres fuerzas F_x , F_y y F_z . Las gráficas de arriba corresponden a un sujeto y las de abajo a otro diferente, elegidos ambos al azar.	104
6.4	Curva media (negro) y curva profunda (rojo), junto con el intervalo de confianza de la media del 90% (sombreado gris) y la envolvente del 90% de las curvas más profundas (sombreado amarillo) obtenido por bootstrap.	107
6.5	Media (negro) y curva más profunda (rojo), junto con el intervalo de confianza del 90% de la media (sombreado gris) y la envolvente del 90% de las curvas más profundas (sombreado naranja) para el grupo de sanos (arriba) y patológicos (abajo) para la fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z	111
6.6	Media (negro) y curva más profunda (azul), junto con la banda de la media más y menos $0,674 \times sd$ (sombreado en gris) donde se encuentra el 50% de las curvas y la envolvente del 50% de las curvas más profundas (sombreado en azul) para el grupo de sanos (arriba) y patológicos (abajo) para la fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z	113
6.7	Curvas de fuerza de reacción sobre el suelo anteroposterior F_x (arriba), vertical F_y (medio) y mediolateral F_z (abajo) para la normalización lineal (izquierda) representando en esta la curva media (negro) y más profunda (rojo). En la columna central se muestra el registro realizado tomando como curva patrón la media funcional de la muestra, se marca en negro la media de las curvas registradas. En la columna derecha se muestran las curvas registradas tomando como curva patrón la curva profunda. En negro se marca la curva media de las registradas.	117

6.8	Comparación de las curvas medias obtenidas con ambos registros para la fuerza anteroposterior F_x (izquierda), vertical F_y (medio) y mediolateral F_z (derecha). En línea discontinua se marca la media (gris) y la curva profunda (naranja) de las curvas originales. Las medias de las curvas registradas empleando como curva patrón la media se muestra en negro, mientras que la media usando la curva más profunda en rojo.	118
7.1	Curvas de los sujetos sanos (discontinua verde) y patológicos (rojo) junto con la media del grupo de sanos (línea sólida verde), de patológicos (línea sólida roja) y de la muestra total (línea sólida negra) para la fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z	138
7.2	Funciones de p-valor al hacer el ANOVA punto a punto. En negro la función $p(t)$ para el ANOVA clásico, en rojo el corregido con la corrección de Benjamini-Hochberg y en azul el obtenido con el modelo limma tras aplicar la corrección de Benjamini-Hochberg. Se muestran las funciones de p-valores para las tres fuerzas de reacción sobre el suelo. Se marca con una línea horizontal continua gris el p-valor=0,05. Solo para la fuerza mediolateral se marca también el valor de 0,10 con una línea discontinua gris.	139
7.3	Funciones de los p-valores, $p(t)$, para los cuatro predictores: NDI, longitud de cuello, género y edad para el modelo angular (arriba) y de velocidad (abajo). En cada gráfica hay tres funciones $p(t)$: el p-valor crudo $p(t)$ con el modelo de regresión punto a punto habitual (gris), estos p-valores ajustados $\tilde{p}(t)$ (negro) y los p-valores de limma ajustados $\tilde{p}(t)$ (rojo). Se muestra el umbral del p-valor de 0,05 con una línea discontinua.	143
7.4	Funciones de los p-valores, $p(t)$, para los cuatro predictores: NDI, longitud de cuello, género y edad para el modelo de aceleración. En cada gráfica hay tres funciones $p(t)$: el p-valor crudo $p(t)$ con el modelo de regresión punto a punto habitual (gris), estos p-valores ajustados $\tilde{p}(t)$ (negro) y los p-valores de limma ajustados $\tilde{p}(t)$ (rojo). Se muestra el umbral del p-valor de 0,05 con una línea discontinua.	144
7.5	Gráfico de efectos para la velocidad (arriba) y aceleración (abajo). A la izquierda el gráfico de efectos para diferentes valores de NDI, manteniendo constante la edad, longitud de cuello y género con su valor medio. A la derecha se muestra el gráfico de efectos para diferentes valores de la edad, manteniendo constante el NDI, longitud de cuello y género en su valor medio. Las áreas que han salido significativas en el modelo se somborean en azul.	145
7.6	Comparación de los p-valores corregidos obtenidos con el modelo limma según el número de puntos considerado (100 en negro, 1.000 en rojo o 10.000 en azul) para el modelo de velocidad.	146

7.7	Resultados para sujetos con distintos niveles de discapacidad: NDI = 4 para la izquierda, NDI = 9 en el centro y NDI = 14 derecha. La línea discontinua marca la velocidad angular, la continua azul la función coeficiente escalada por 20 para visualizarla mejor y la línea continua negra es el producto de la velocidad por la función coeficiente. Se rellena en verde el área positiva y en naranja la negativa que produce la función producto con el eje de abscisas.	154
7.8	Función producto de la velocidad y la función de coeficiente para dos sujetos con NDI muy distintos pero con un rango de velocidad similar. Para el sujeto con mayor NDI se ha escalado su función producto por la ratio de velocidad. En cambio, las velocidades de ambos sujetos están sin escalar, para poder ver las diferencias entre ambas.	155
7.9	EVA estimado frente a EVA medido para cada uno de los tres modelos de regresión funcional implementados: F_x , F_y y F_z . Se marca en negrita el número elegido de bases.	161
7.10	El gráfico muestra el coeficiente de correlación múltiple r (eje x) frente al AIC y BIC (eje y) según el número de componentes principales elegido, desde 4 (primer punto) hasta 20 (último punto). La línea negra representa los valores para el AIC y la azul para el BIC. El punto rojo marca el número óptimo de componentes principales elegido. El gráfico de la izquierda corresponde al modelo de regresión funcional que considera las curvas de velocidad de flexión lateral como predictor, mientras que el de la derecha el modelo concatenando las curvas de velocidad de flexo-extensión y flexión lateral.	167
7.11	Funciones coeficiente y funciones producto para el modelo de 11 componentes bivariantes de flexo-extensión (arriba) y flexión lateral (abajo) para un sujeto con un NDI de 4 (izquierda) y de 15 (derecha). Aunque la función coeficiente es única, para una mejor representación se ha separado para cada movimiento. En discontinuo se representa la velocidad, en línea continua azul la función de coeficiente escalada y en continua negra la función producto de ambas. Las áreas bajo la curva positivas y negativas se marcan en verde y naranja, respectivamente. Se escala la función de coeficiente y la función producto para una mejor visualización.	169
8.1	Mínimos y máximos considerados en el modelo de regresión logística no funcional de la fuerza mediolateral F_z para cada sujeto.	189
8.2	Curva ROC para el modelo de regresión logística que considera como único predictor las funciones de fuerza mediolateral F_z a la izquierda. A la derecha para el modelo que además del predictor funcional de fuerza F_z considera los predictores escalares de género, edad y peso. Se marca en la curva el punto donde la probabilidad de corte da el óptimo de sensibilidad y especificidad.	193

8.3	Curvas ROC correspondientes a los distintos modelos evaluados: el modelo clínico (M_1) en verde, el modelo biomecánico (M_2) en rojo y el modelo combinado biomecánico y clínico (M_3) en azul. En cada curva se señala el punto que maximiza simultáneamente la sensibilidad y la especificidad, junto con el umbral de probabilidad asociado a dicha optimización.	201
8.4	La figura presenta la probabilidad predicha para distintos valores de EVA según los modelos clínico (en rojo) y combinado biomecánico-clínico (en azul). La probabilidad estimada por cada modelo se representa en función del valor de la EVA, mientras que el resto de los predictores se han mantenido constantes. Para la curva de fuerza mediolateral, se ha utilizado la más profunda del grupo patológico, y tanto el peso como la altura de la cadera corresponden al sujeto con dicha curva. La línea negra indica la diferencia entre las probabilidades predichas por ambos modelos.	202

Índice de tablas

4.1	Valores de media (desviación típica) del NDI (Neck Disability Index), edad (años), longitud de cuello (cm), masa de cabeza y cuello (kg) para la muestra de datos de cuello, por género y total.	35
4.2	Valores medios (desviación típica) del rango de movimiento (RoM), rango de velocidad (RoV) y rango de aceleración (RoA) de los tres movimientos medidos.	35
4.3	Valores medios y desviación típica (entre paréntesis) de la edad, masa (kg), altura (mm), altura de cadera (mm) y EVA de la muestra.	39
4.4	Características de la muestra: edad (años), altura (metros), peso (kg) y talla de calzado (europea) para el grupo de hombres, mujeres y muestra total. Se muestran los valores medios y entre paréntesis la desviación típica.	40
5.1	Valores RMS de la función media del ángulo y velocidad obtenida con los tres métodos de registro del tiempo: normalización lineal, método de Ramsay y método de Fisher-Rao.	64
5.2	Valor medio y desviación típica (entre paréntesis) en grados del desfase entre la curva media y cada curva registrada obtenida con cada uno de los tres métodos de registro del tiempo: normalización lineal, método de Ramsay y método de Fisher-Rao.	64
6.1	Valores medios y desviación típica (entre paréntesis) del máximo considerado para cada fuerza (Fig. 6.1) junto con la desviación entre paréntesis, para las curvas medias funcionales y para las más profundas de cada sujeto. Se muestra el p-valor del t-test pareado.	102

6.2	Valores medios y desviación típica (entre paréntesis) del mínimo considerado para cada fuerza (Fig. 6.2) junto con la desviación entre paréntesis, para las curvas medias funcionales y para las más profundas de cada sujeto. Se muestra el p-valor del t-test pareado.	102
7.1	La tabla muestra los distintos modelos implementados según la naturaleza de los predictores. En primer lugar, cuatro modelos de regresión escalar sobre escalar utilizando el rango angular (RoM) y la velocidad angular (RoV); dos modelos escalar sobre función considerando las curvas de ángulo $\varphi(t)$ y de velocidad $\omega(t)$; y por último dos modelos donde se utiliza un predictor funcional (velocidad) y predictores escalares (RoM y RoV). Se usa la notación de las formulas de R, por ejemplo $ndi \sim RoM$ corresponde a $ndi_i = \beta_0 + \beta_1 RoM_i + \epsilon_i$. La interacción entre predictores se representa con los dos puntos, por ejemplo $RoM : RoV$	150
7.2	Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor del modelo para distintos números de base para el modelo funcional del ángulo.	151
7.3	Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor del modelo para distintos números de base para el modelo funcional de la velocidad.	151
7.4	Valores de coeficiente de correlación r , coeficiente de determinación R^2 , estadístico F y p-valor para los distintos modelos implementados: cuatro modelos de regresión no funcionales con diferentes predictores (rango angular RoM y rango de velocidad RoV), dos modelos funcionales considerando las curvas de ángulo $\varphi(t)$ y velocidad angular $\omega(t)$, y dos modelos funcionales junto con variables escalares (curvas de velocidad angular $\omega(t)$, rango angular RoM y rango de velocidad RoV).	152
7.5	Valores del estadístico F y el p-valor para comparar los modelos anidados y evaluar cuándo añadir predictores al modelo más simple M_0 lo mejora. Se comparan dos casos de modelos anidados: el primero donde las variables escalares RoV y RoM se añaden al modelo de velocidad funcional M_{01} . El segundo se parte de un modelo escalar M_{02} y se añade el predictor funcional de velocidad.	153
7.6	Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor según el número de bases de B-Splines consideradas para el modelo de fuerza anteroposterior F_x . Se marca en negrita el número elegido de bases.	159
7.7	Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor según el número de bases de B-Splines consideradas para el modelo de fuerza vertical F_y . Se marca en negrita el número elegido de bases.	159

7.8	Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor según el número de bases de B-Splines consideradas para el modelo de fuerza mediolateral F_z . Se marca en negrita el número elegido de bases.	160
7.9	Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación r , estadístico F y p-valor para comparar los modelos funcionales de fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z para el número óptimo de bases seleccionado.	160
7.10	Valores del coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F , p-valor de los modelos de regresión para los tres movimientos: flexo-extensión, flexión lateral y rotación axial. En todos los modelos se ha usado el rango de movimiento (RoM), el rango de velocidad (RoV) y la interacción entre ellos.	165
7.11	Variabilidad explicada (%), AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor para el número óptimo de componentes principales en los modelos funcionales implementados para los movimientos de flexo-extensión (FE), flexión lateral (FL) y rotación axial (RA). Se marcan en negrita los modelos con mayor capacidad predictiva.	168
7.12	AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor de los modelos de regresión. Se añaden distintos predictores escalares al modelo base (solo funcional que considera las curvas de flexo-extensión, FE, y flexión lateral, FL) para analizar si introducir estos predictores escalares mejoran el modelo funcional.	168
8.1	AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de bases de B-Splines para la función coeficiente en el modelo de fuerza anteroposterior F_x . Se marca en negrita el número elegido de bases.	190
8.2	AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de bases de B-Splines para la función coeficiente en el modelo de fuerza vertical F_y . Se marca en negrita el número elegido de bases.	190
8.3	AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de bases de B-Splines para la función coeficiente en el modelo de fuerza mediolateral F_z . Se marca en negrita el número elegido de bases.	191
8.4	AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para el número óptimo de funciones de la base de la función coeficiente para los modelos de fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z	192

8.5	Comparación del modelo funcional de fuerza mediolateral F_z con este mismo modelo al que se le añaden los predictores escalares: género, edad y peso. Se emplea la notación de fórmulas del lenguaje de programación R. Así, $F_z(t) + genero + edad + peso$ corresponde con el modelo $\ln odds_i = \beta_0 + \int \beta_1 F_{z_i}(t) + \beta_2 genero_i + \beta_3 edad_i + \beta_4 peso_i$. Cuando el predictor es funcional, se indica su dependencia respecto del tiempo como $F_z(t)$	192
8.6	Matriz de confusión del modelo funcional de fuerza mediolateral F_z	192
8.7	Matriz de confusión del modelo funcional de fuerza mediolateral F_z junto con los predictores escalares: género, edad y peso.	193
8.8	Comparación del modelo funcional de fuerza mediolateral F_z que incluye predictores escalares con el equivalente no funcional que considera los valores extremos de la función F_z (dos máximos y dos mínimos) junto con el género, edad y peso. Para ello se muestran los valores de AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), área bajo la curva ROC (AUC), sensibilidad, especificidad y p-valor del modelo.	194
8.9	Porcentaje de variabilidad explicado según el número de componentes principales, AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de componentes principales de la fuerza anteroposterior F_x . Se han concatenado las curvas de ambas piernas, por lo que son componentes principales bivariantes. Se marca en negrita el número de componentes principales elegido.	198
8.10	Porcentaje de variabilidad explicado según el número de componentes principales, AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de componentes principales de la fuerza vertical F_y . Se han concatenado las curvas de ambas piernas, por lo que son componentes principales bivariantes. Se marca en negrita el número de componentes principales elegido.	198
8.11	Porcentaje de variabilidad explicado según el número de componentes principales, AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de componentes principales de la fuerza mediolateral F_z . Se han concatenado las curvas de ambas piernas, por lo que son componentes principales bivariantes. Se marca en negrita el número de componentes principales elegido.	199
8.12	Número de componentes principales consideradas en el modelo, valores de AIC, BIC, exactitud (porcentaje de sujetos correctamente clasificados), AUC (área bajo la curva ROC), sensibilidad, especificidad y p-valor de los modelos implementados para cada fuerza: anteroposterior (F_x), vertical (F_y) y mediolateral (F_z). Se marca en negrita el modelo de fuerza mediolateral F_z ya que es el que presenta mejores medidas de calidad del modelo.	199

8.13	Valores de AIC, BIC, exactitud (porcentaje de sujetos correctamente clasificados), AUC (área bajo la curva ROC), sensibilidad, especificidad y p-valor para cada uno de los tres modelos implementados: modelo clínico (M_1), biomecánico (M_2) y modelo biomecánico y clínico (M_3). Se ha empleado la notación de fórmulas del lenguaje de programación R. Por ejemplo, $EVA + peso + h_{cadera}$ corresponde con un modelo donde la media está relacionada con la componente sistemática de la siguiente forma $\ln odds_i = \beta_0 + \beta_1 EVA_i + \beta_2 peso_i + \beta_3 h_{cadera,i}$. Cuando hay un predictor funcional, se indica su dependencia respecto del tiempo como $F_z(t)$	200
------	--	-----

Agradecimientos

Quisiera comenzar expresando mi más profundo agradecimiento a mis directores de tesis, Dr. Álvaro Page del Pozo, Dr. Guillermo Ayala Gallego y Dra. Pilar Serra Añó, por su dedicación, orientación y apoyo durante el desarrollo de esta tesis. En especial, quiero agradecer a Álvaro y Guillermo, quienes han estado más cerca de mí y han tenido un papel fundamental en esta investigación. Su amplio conocimiento y sus consejos han sido claves, pero por encima de todo, quiero destacar su generosidad, paciencia y calidad humana. Valoro enormemente haber podido trabajar con ellos, y por todo lo que me han enseñado, les estaré siempre agradecida.

También quiero agradecer a todas las personas y equipos que han cedido su base de datos experimentales, sin las cuales gran parte de esta tesis no habría sido posible. En particular, a Pilar Serra y su equipo por los datos de cuello; a Luz Manley, Enrique Viosca y su equipo por los datos del proyecto OActive; y a Enrique Medina por sus datos de cinemática de carrera. Tuve la suerte de coincidir trabajando con él y me siento muy agradecida por todo lo que me enseñó. Su memoria permanece con cariño en quienes tuvimos la fortuna de conocerle.

A mi familia, gracias por el amor, el apoyo incondicional y por darme la formación y los valores que me han traído hasta aquí. Sin vosotros, hoy no sería la persona que soy.

A Omar y mis amigos, gracias por estar siempre, por animarme en los momentos difíciles y por regalarme tantos instantes de alegría y compañía. Guardo con

mucho cariño todo lo que hemos compartido y todo lo que, en el futuro, todavía nos queda por vivir.

Finalmente, quiero agradecer a la Educación Pública y a todos los profesores que me han acompañado desde la primaria hasta la Universidad. Cada uno, con su dedicación y esfuerzo, ha contribuido de alguna manera a que hoy pueda estar escribiendo estas líneas.

A todos, gracias de corazón.

Resumen

La Biomecánica desempeña un papel esencial como herramienta complementaria para la prevención, el diagnóstico y la rehabilitación de los trastornos músculo esqueléticos, además de reducir el impacto económico y social de estas patologías del aparato locomotor, contribuyendo a la sostenibilidad de los sistemas de salud.

El objetivo principal de esta tesis es el desarrollo y puesta a punto de técnicas de Análisis de Datos Funcionales (FDA, Functional Data Analysis) adaptadas al tratamiento de los datos procedentes del análisis de movimientos humanos. El FDA es una rama de la Estadística que amplía las técnicas de la Estadística univariante y multivariante al caso funcional. De esta forma, se estudian las curvas del movimiento sin extraer características previas, lo que facilita su análisis y conserva la totalidad de la información.

Se realiza una revisión sobre los tres enfoques actuales del tratamiento de datos biomecánicos (la estadística univariante y multivariante, las técnicas basadas en Inteligencia Artificial y el Análisis de Datos Funcionales), detectando una serie de limitaciones en estos enfoques y lagunas de conocimiento para la aplicación del FDA en la biomecánica.

En primer lugar, se identifican importantes limitaciones en las técnicas habituales de normalización del tiempo, primer paso necesario para ajustar la escala de tiempos y poder comparar curvas de diferente duración, que pueden alterar la dinámica del movimiento. A pesar de la existencia de diferentes métodos, falta una comparación sistemática que permita establecer criterios sólidos para su aplicación.

Después, se exploran diferentes descriptivos funcionales, como la media y desviación típica funcional, que presentan limitaciones para representar adecuadamente la centralidad y variabilidad de las curvas biomecánicas. Por ello, se propone el uso del concepto de curva profunda, equivalente funcional de la mediana, así como técnicas de estimación de regiones de confianza basadas en bootstrap, que permiten definir regiones de confianza más realistas en el ámbito funcional.

En Biomecánica, la aplicación de la inferencia estadística funcional es escasa, pese a su alto potencial clínico ya que permite una interpretación de los resultados, analizando qué partes de la curva están más o menos relacionadas con una patología. Esto no puede lograrse mediante enfoques multivariantes ni mediante modelos basados en Inteligencia Artificial.

Comenzando con los modelos de regresión lineal funcional, en esta tesis nos hemos centrado en dos tipos: la regresión función sobre escalar y la regresión escalar sobre función. En el primer caso, el enfoque habitual consiste en realizar modelos lineales punto a punto, lo que genera múltiples contrastes que incrementan el riesgo de cometer errores de tipo I si no se corrigen estos p-valores. Se propone además el uso del modelo limma, que mejora el ajuste utilizando un método empírico bayesiano. Por otro lado, la regresión escalar sobre función, pese a su gran potencial, ha sido poco utilizada en Biomecánica.

En la misma línea, los modelos de regresión logística funcional que permiten clasificar sujetos en categorías binarias (sano vs. patológico) suponen una herramienta potente para el apoyo al diagnóstico, en especial cuando la existencia o no de la patología no es evidente. Sin embargo, su aplicación en Biomecánica todavía es limitada.

Un aspecto destacable de este trabajo es la importancia de construir modelos parsimoniosos y robustos, que no solo tengan buena capacidad predictiva, sino que además permitan una interpretación de los resultados. Esto último es vital en el ámbito clínico, ya que permite conocer al personal clínico qué variables o fases del movimiento están más relacionados con la patología, a diferencia de muchos modelos basados en Inteligencia Artificial que, a pesar de su alta capacidad predictiva son “cajas negras”.

En definitiva, esta tesis propone la aplicación de un conjunto de técnicas estadísticas del Análisis de Datos Funcionales en el ámbito de la Biomecánica, demostrando su potencial y constituyendo una herramienta de ayuda al diagnóstico clínico. Todos estos análisis se llevarán a cabo sobre bases de datos biomecánicos experimentales en distintas patologías y segmentos anatómicos.

Resum

La Biomecànica juga un paper essencial com a eina complementària per a la prevenció, el diagnòstic i la rehabilitació dels trastorns múscul esquelètics, a més de reduir l'impacte econòmic i social d'aquestes patologies de l'aparell locomotor, contribuint a la sostenibilitat dels sistemes de salut.

L'objectiu principal d'aquesta tesi és el desenvolupament i la posada a punt de tècniques d'Anàlisi de Dades Funcionals (FDA, Functional Data Analysis) adaptades al tractament de les dades procedents de l'anàlisi de moviments humans. El FDA és una branca de l'Estadística que amplia les tècniques de l'Estadística univariant i multivariant al cas funcional. D'aquesta forma, s'estudien les corbes del moviment sense extreure característiques prèvies, cosa que facilita l'anàlisi i conserva la totalitat de la informació.

Es fa una revisió sobre els tres enfocaments actuals del tractament de dades biomecàniques (l'estadística univariant i multivariant, les tècniques basades en Intel·ligència Artificial i l'Anàlisi de Dades Funcionals), detectant una sèrie de limitacions en aquests enfocaments i llacunes de coneixement per a l'aplicació del FDA a la biomecànica.

En primer lloc, s'identifiquen importants limitacions en les tècniques habituals de normalització del temps, primer pas necessari per ajustar l'escala de temps i poder comparar corbes de diferent durada, que poden alterar la dinàmica del moviment. Tot i l'existència de diferents mètodes, falta una comparació sistemàtica que permeti establir criteris sòlids per a la seva aplicació.

Després, s'exploren diferents descriptius funcionals, com la mitjana i la desviació típica funcional, que presenten limitacions per representar adequadament la centralitat i variabilitat de les corbes biomecàniques. Per això, es proposa l'ús del concepte de corba profunda, equivalent funcional de la mitjana, així com a tècniques d'estimació de regions de confiança basades en bootstrap, que permeten definir regions de confiança més realistes a nivell funcional.

A Biomecànica, l'aplicació de la inferència estadística funcional és escassa, malgrat el seu alt potencial clínic ja que permet una interpretació dels resultats, analitzant quines parts de la corba estan més o menys relacionades amb una patologia. Això no es pot aconseguir mitjançant enfocaments multivariants ni mitjançant models basats en Intel·ligència Artificial.

Començant amb els models de regressió lineal funcional, en aquesta tesi ens hem centrat en dos tipus: la regressió funció sobre escalar i la regressió escalar sobre funció. En el primer cas, l'enfocament habitual consisteix a fer models lineals punt a punt, cosa que genera múltiples contrastos que incrementen el risc de cometre errors de tipus I si no es corregeixen aquests p-valors. Es proposa a més l'ús del model limma, que millora l'ajust utilitzant un mètode empíric bayesià. D'altra banda, la regressió escalar sobre funció, malgrat el seu gran potencial, ha estat poc utilitzada a Biomecànica.

En la mateixa línia, els models de regressió logística funcional que permeten classificar subjectes en categories binàries (sa vs. patològic) suposen una eina potent per al suport al diagnòstic, en especial quan l'existència o no de la patologia no és evident. Tot i això, la seva aplicació a Biomecànica encara és limitada.

Un aspecte destacable d'aquest treball és la importància de construir models parsimoniosos i robustos, que no només tinguen bona capacitat predictiva, sinó que a més permeten una interpretació dels resultats. Això últim és vital en l'àmbit clínic, ja que permet conèixer al personal clínic quines variables o fases del moviment estan més relacionades amb la patologia, a diferència de models basats en Intel·ligència Artificial que, malgrat la seva alta capacitat predictiva són "caixes negres".

En definitiva, aquesta tesi proposa l'aplicació d'un conjunt de tècniques estadístiques de l'Anàlisi de Dades Funcionals en l'àmbit de la Biomecànica, mostrant-ne el potencial i constituint una eina d'ajuda al diagnòstic clínic. Tots aquests anàlisis es duren a terme sobre bases de dades biomecàniques experimentals en diferents patologies i segments anatòmics.

Abstract

Biomechanics plays an essential role as a complementary tool for the prevention, diagnosis, and rehabilitation of musculoskeletal disorders, in addition to reducing the economic and social impact of these musculoskeletal pathologies, contributing to the sustainability of healthcare systems.

The main objective of this thesis is the development of Functional Data Analysis (FDA) techniques adapted to processing data from human movement analysis. FDA is a branch of Statistics that extends the techniques of univariate and multivariate Statistics to the functional case. In this way, movement curves are studied without extracting prior characteristics, facilitating their analysis and preserving all the information. A review of the three current approaches to biomechanical data processing (univariate and multivariate statistics, techniques based on Artificial Intelligence, and Functional Data Analysis) is conducted. A series of limitations in these approaches and knowledge gaps for applying FDA in biomechanics are identified.

First, significant limitations are identified in standard time normalization techniques, a necessary first step in adjusting the time scale and being able to compare curves of different durations, which can alter movement dynamics. Despite different methods, a systematic comparison is lacking that would allow for establishing solid criteria for their application.

Next, different functional descriptors are explored, such as the functional mean and standard deviation, which present limitations in adequately representing the centrality and variability of biomechanical curves. Therefore, we propose the use

of the concept of a deep curve, the functional equivalent of the median, as well as bootstrap-based confidence region estimation techniques, which allow for the definition of more realistic confidence regions in the functional field.

In Biomechanics, the application of functional inference is limited despite its high clinical potential, as it allows for the interpretation of results by analyzing which parts of the curve are more or less related to pathology. This cannot be achieved through multivariate approaches or models based on Artificial Intelligence.

Starting with functional linear regression models, in this thesis, we have focused on two types: function-on-scalar regression and scalar-on-function regression. The usual approach is to perform point-by-point linear models, which generate multiple tests that increase the risk of type I errors if these p-values are not corrected. The limma model is also proposed, which improves the fit using an empirical Bayesian method. On the other hand, despite its great potential, scalar regression on function has been little used in biomechanics.

Along the same lines, functional logistic regression models that allow subjects to be classified into binary categories (healthy vs. pathological) are a powerful tool to support diagnosis, especially when the presence or absence of the pathology is not evident. However, their application in biomechanics is still limited.

A notable aspect of this work is the importance of building parsimonious and robust models with good predictive capacity and allowing for the interpretation of the results. The latter is vital in the clinical setting, as it allows clinical staff to know which variables or movement phases are most closely related to the pathology, unlike many models based on Artificial Intelligence, which, despite their high predictive capacity, are "black boxes."

In conclusion, this thesis proposes applying statistical techniques from Functional Data Analysis in Biomechanics, demonstrating their potential and constituting a tool to aid clinical diagnosis. All these analyses will be performed on experimental biomechanical databases in various pathologies and anatomical segments.

Índice de abreviaturas

- AIC: Criterio de Información de Akaike
- ANOVA: Análisis de la varianza
- AUC: área bajo la curva ROC
- bFPCA: análisis de componentes principales funcional bivalente
- BIC: criterio de información bayesiano
- COVID: enfermedad de coronavirus
- EKOA: osteoartritis temprana de rodilla (Early Knee OsteoArthritis)
- EMG: electromiografía
- EVA: Escala Visual Analógica
- FANOVA: análisis de la varianza funcional
- FDA: Análisis de Datos Funcionales
- FDR: False Discovery Rate
- FE: flexo-extensión
- FL: flexión lateral
- FPCA: análisis de componentes principales funcional

- FWER: Family Wise Error Rate
- Fx: fuerza anteroposterior
- Fy: fuerza vertical
- Fz: fuerza mediolateral
- GRF: fuerzas de reacción sobre el suelo
- HS: sujetos sanos
- IA: Inteligencia Artificial
- IBV: Instituto de Biomecánica de Valencia
- IMU: unidad de medida inercial
- KL: clasificación de Kellgren y Lawrence
- K-NN: k-vecinos más próximos
- KSS: Knee Society Score
- LASSO: Least Absolute Shrinkage and Selection Operator
- ML: Machine Learning
- MFPCA: análisis de componentes principales funcional multivariante
- NDI: Índice de Discapacidad de Cuello (Neck Disability Index)
- NNC: clasificador del vecino más cercano
- OA: osteoartritis
- PCA: análisis de componentes principales (Principal Component Analysis)
- RA: rotación axial
- RMS: valor cuadrático medio
- RoA: rango de aceleración
- RoM: rango de movimiento
- RoV: rango de velocidad

- ROC: Receiving Operating Characteristic
- SPM: mapeo estadístico paramétrico (Statistical Parametric Mapping)
- SnPM: mapeo estadístico no-paramétrico (Statistical non-Parametric Mapping)
- SRVF: función raíz cuadrada de la velocidad
- STROBE: Fortalecimiento de la Comunicación de Estudios Observacionales en Epidemiología (STrengthening the Reporting of OBservational studies in Epidemiology)
- SVM: máquina de vectores soporte (Support Vector Machine)
- WOMAC: Western Ontario and McMaster

Capítulo 1

Introducción

1.1 Importancia de la Biomecánica en la valoración del aparato locomotor

La Biomecánica es una ciencia interdisciplinar que utiliza la leyes de la mecánica para comprender cómo se mueve el cuerpo humano (cinemática) y de qué forma interactúan diversas fuerzas durante un movimiento (dinámica). Así, analizando los patrones de movimiento, cargas y fuerzas que se producen, se puede obtener información valiosa para ayudar a detectar posibles disfunciones, lesiones o patologías.

Más concretamente, el análisis biomecánico de los movimientos humanos tiene importantes aplicaciones en campos tan diversos como:

- La valoración funcional del aparato locomotor.
- La prevención de lesiones por ejemplo por carga física en el trabajo, optimizando la forma en la que deben realizarse los movimientos.
- La mejora de las técnicas de entrenamiento deportivo, mejorando el rendimiento de los deportistas optimizando ciertos movimientos analizados a través del estudio de la Biomecánica.

- El análisis de la postura que pueden llevar a desequilibrios o sobrecargas en ciertas áreas del cuerpo.
- La personalización de tratamientos de rehabilitación.

Existen numerosas técnicas de análisis biomecánico para registrar movimientos, medir fuerzas aplicadas o ejercidas y estimar variables cinemáticas, cinéticas y dinámicas. Estas variables individuales se pueden comparar con unos patrones de referencia para establecer criterios objetivos y cuantitativos de valoración, lo que permite analizar las diferencias entre personas sanas o afectadas por una patología, las diferencias entre situaciones seguras o inseguras, o ver qué patrones están asociados a mejores o peores rendimientos.

En el caso de la valoración funcional, el objetivo de la Biomecánica es ofrecer información complementaria a los criterios de valoración que se usan en la práctica clínica, como son las exploraciones, las escalas clínicas, la valoración del dolor y otras fuentes de información proporcionadas por los pacientes. Se asume que la información asociada a las pruebas biomecánicas es más objetiva y cuantitativa que otras fuentes de información. También se suele asumir que es posible identificar patrones de respuesta biomecánica más sensibles a pequeños cambios en el estado funcional, lo que permitiría mejorar la valoración de la evolución de un paciente frente a un tratamiento, o detectar la aparición de alteraciones en las fases tempranas de determinadas patologías. Esto es especialmente importante en las enfermedades degenerativas y asociadas al envejecimiento, donde el diagnóstico precoz puede ser crítico para iniciar tratamientos antes de que se alcance un daño irreparable.

1.2 Interés económico y social

Según la Organización Mundial de la Salud, los trastornos musculoesqueléticos abarcan más de 150 afecciones del sistema locomotor, que provocan dolor y limitan la movilidad y la realización de actividades cotidianas de los pacientes. Estos trastornos son la principal causa de discapacidad y la causa que origina una mayor cantidad de tratamientos de rehabilitación.

En cuanto a su magnitud, aproximadamente 1710 millones de personas en todo el mundo sufren algún trastorno musculo esquelético [20], siendo los países de ingresos altos los más afectados en cuanto al número de personas. El dolor lumbar es la principal afección de los trastornos musculoesqueléticos, seguido de fracturas (436 millones de personas), artrosis (343 millones), otros traumatismos (305 millones),

cervicalgia (222 millones), amputaciones (175 millones) y artritis reumatoide (14 millones) [20].

Aunque algunos de estos trastornos están asociados al envejecimiento, otros muchos afectan también a población más joven, en plena actividad productiva, lo que implica el correspondiente impacto económico y social, por las bajas laborales y jubilaciones anticipadas que origina.

Según un estudio realizado en 2007, el coste económico de los trastornos musculoesqueléticos fue en torno al 2% del Producto Interior Bruto en Europa [168]. En algunos países de la Unión Europea pueden suponer hasta el 40% de los costes provocados por enfermedades y accidentes de trabajo [5].

Por tanto, la Biomecánica puede aportar conocimientos y herramientas de gran utilidad en la evaluación funcional del aparato locomotor, con implicaciones directas sobre el coste asociado a los trastornos músculoesqueléticos:

- Mejora de la salud pública: las afecciones del aparato locomotor pueden llegar a ser muy limitantes afectando a actividades de la vida diaria, suponiendo un gran coste al Sistema Sanitario.
- Eficiencia de los tratamientos médicos: a través de la Biomecánica se puede evaluar su efectividad o ayudar al desarrollo de tratamientos personalizados, mejorando así la gestión de los recursos disponibles.
- Evaluación y seguimiento de tratamientos: los tratamientos de rehabilitación son costosos en dinero y en tiempo. El análisis biomecánico permite un seguimiento más detallado de la evolución del paciente y realizar ajustes más precisos del tratamiento.
- Prevención de lesiones: comprender cómo se realizan ciertos movimientos puede ayudar a anticipar ciertas lesiones por movimientos o tareas repetitivas.
- Mejora de la calidad de vida: el estudio de la Biomecánica permite detectar problemas o patologías en fases iniciales, aportando información objetiva que ayude a un diagnóstico temprano, anticipándose a que la patología se agrave y tenga consecuencias, en algunos casos, irreversibles.
- Mejora del envejecimiento: el estudio de movimientos humanos permite analizar, entre otros, problemas en la marcha o equilibrio en personas mayores, de forma que pueden prevenirse caídas que conlleven otro tipo de complicaciones.

- Ergonomía y salud en el trabajo: el análisis de movimientos en tareas repetitivas ayuda a mejorar la salud en el trabajo, limitando las lesiones y las bajas laborales asociadas a trastornos musculoesqueléticos.

En definitiva, la Biomecánica no sólo juega un papel importante como herramienta complementaria para la prevención, diagnóstico y rehabilitación de los trastornos músculoesqueléticos, sino que también puede tener un impacto directo sobre su coste económico y social, pudiendo contribuir a la reducción de costes y a la sostenibilidad de los sistemas de salud.

Capítulo 2

Estado del arte

En este capítulo se realiza un revisión general sobre el planteamiento de las aplicaciones de la Biomecánica en el campo de la valoración funcional, con la finalidad de describir el contexto de los análisis estadísticos en este ámbito, clasificar los diferentes enfoques, identificar sus ventajas e inconvenientes, detectar necesidades y proponer objetivos que pueden ser cubiertos por las técnicas de Análisis de Datos Funcionales. Se trata de dar una visión de conjunto que, posteriormente, será desarrollada con más detalle en cada una de las aplicaciones que se plantean en los capítulos 6 al 8.

Para ello, se comenzará por clasificar los tipos de estudios en función de sus objetivos generales (describir, comparar, valorar, clasificar, predecir) lo que determina el tipo de diseño estadístico. A continuación se repasan los tres enfoques principales del tratamiento de datos biomecánicos: a través de la estadística multivariante, el basado en los sistemas de aprendizaje automático y por último, a través del Análisis de Datos Funcionales. A partir de la revisión bibliográfica realizada, se detectan una serie de limitaciones en los distintos enfoques, que consideramos pueden ser solventadas con el uso del Análisis de Datos Funcionales y se plantean las necesidades que dan lugar a los objetivos generales de esta tesis doctoral.

2.1 Estudios biomecánicos para valoración funcional

La variedad de aplicaciones de la Biomecánica en el ámbito clínico es muy extensa y los estudios asociados pueden ser descritos desde puntos de vista diferentes, como son su finalidad (prevención, diagnóstico, pronóstico), el entorno en el que se realizan (in vivo, in silico), la región corporal analizada, el tipo de variables biomecánicas estudiado y las técnicas experimentales asociadas, o el contexto poblacional (sanos, enfermos, estudios comparativos, longitudinales), entre otros. Teniendo en cuenta la finalidad de esta tesis, vamos a clasificarlos en función de sus objetivos desde el punto de vista estadístico, es decir, según se limiten a describir variables biomecánicas, establezcan relaciones o comparaciones entre ellas, se utilicen para clasificar sujetos bajo determinados criterios o permitan realizar predicciones sobre resultados desconocidos o futuros.

2.1.1 Estudios descriptivos

Su objetivo es caracterizar variables biomecánicas en poblaciones específicas sin realizar comparaciones ni establecer relaciones entre variables. Este tipo de estudios se han usado para la descripción de bases de datos de referencia en diferentes grupos, como sanos o enfermos que padecen una determinada patología. Como ejemplos pueden citarse la descripción de rangos articulares en pacientes con dolor inespecífico de cuello [81] o en análisis de la marcha [178].

La mayoría de estudios utiliza variables escalares y las descripciones se suelen limitar a las técnicas de estadística descriptiva (media, desviación típica o percentiles) o a las pruebas de normalidad como la de Kolmogorov-Smirnov, por comentar algunos. En el caso de la descripción de curvas del movimiento, entonces se aplican técnicas de Análisis de Datos Funcionales (FDA), que permiten extender dichas técnicas al caso funcional, analizando curvas medias, desviaciones típicas o covarianzas funcionales.

2.1.2 Estudios comparativos

Están centrados en encontrar diferencias entre grupos de sujetos, generalmente entre personas sanas y enfermas, o entre distintos niveles de una patología. Como ejemplos podemos citar la revisión [185], que analiza las diferencias en el patrón de marcha entre sujetos con Parkinson y un grupo control sano, la comparación de la cinemática lumbo-pélvica en sujetos con y sin dolor de espalda [84] o la relación entre la cinemática escapular y patologías de la articulación glenohumeral [99].

Habitualmente se trabaja con variables escalares, empleándose pruebas como el test de la t , análisis de la varianza (ANOVA) cuando tenemos más de dos grupos o pruebas no paramétricas. En el caso de trabajar datos funcionales, la técnica más extendida es el ANOVA funcional, que, como se revisará con detalle en la sección 7.3.1, se suele realizar punto a punto, es decir, como un conjunto de ANOVAs repetidos para cada instante de tiempo.

2.1.3 Estudios de valoración de severidad de una patología

En estos estudios se trata de cuantificar el grado de deterioro funcional o daño biomecánico dentro de una población con una determinada patología, a partir del estudio de la cinemática o dinámica del movimiento analizado. Para ello se establecen relaciones entre una variable de severidad (escala de dolor, escalas clínicas de valoración) y las variables biomecánicas que se asumen relacionadas con estos indicadores clínicos. Así, se han empleado determinadas variables cinemáticas para el estudio de la severidad de la artrosis de rodilla [47, 111] o la relación entre rangos de movimiento y escalas de discapacidad en sujetos con dolor de cuello [68], en lesiones en corredores [18], o entre factores clínicos de riesgo de fracturas de cadera por osteoporosis y variables biomecánicas [100], por citar sólo algunos ejemplos.

Para analizar estas relaciones, se suelen utilizar técnicas como modelos de regresión lineal o de regresión ordinal. Más recientemente, empiezan a usarse sistemas de aprendizaje automático, como las redes neuronales, para realizar una clasificación ordinal. En el caso de que las variables sean funciones (registros continuos de fuerzas o movimientos), se podrían usar extensiones de los métodos multivariantes al caso funcional. Sin embargo, las técnicas de regresión escalar sobre función o función sobre escalar no han sido apenas utilizados en el campo de la Biomecánica.

2.1.4 Estudios de clasificación y diagnóstico

El objetivo de este tipo de estudios es establecer reglas de clasificación para distinguir entre sujetos sanos y con patologías, como complemento al diagnóstico basado en otros criterios clínicos. Los estudios clásicos utilizan variables escalares como predictores y técnicas de clasificación basadas en análisis discriminante o regresión logística. Hay numerosos estudios centrados en la clasificación de sujetos con osteoartritis de rodilla [1], identificación de patologías del cuello [13] y lumbalgias [149]. Recientemente se ha extendido el uso de otro tipo de clasificadores basados en aprendizaje automático, como la máquina de vectores soporte (SVM por sus siglas en inglés, Support Vector Machine), árboles de decisión o redes

neuronales. En [79] hay una revisión sistemática del uso de este tipo de técnicas para diagnóstico de patologías de rodilla. Finalmente, el FDA permite utilizar predictores funcionales en modelos de clasificación, mediante las técnicas de regresión logística funcional. No obstante, su uso en el ámbito de la Biomecánica clínica es bastante escaso [78].

2.1.5 Estudios de predicción, pronóstico y eficacia de tratamientos

Se trata de estudios longitudinales cuyo objetivo es analizar la evolución de una lesión, o la eficacia de un tratamiento o programa de rehabilitación en función de las variables biomecánicas medidas en diferentes instantes del tratamiento o en distintas fases de la patología. Aportan información muy valiosa sobre las relaciones individuales entre la patología y las variables biomecánicas aunque, por su complejidad y coste, ha sido menos abordado en la literatura científica, donde son más frecuentes los estudios transversales.

Como ejemplos podemos citar un artículo que utiliza la Biomecánica para evaluar el avance de fibromialgia juvenil durante un programa de 8 semanas, en las que se analizaba el estado funcional antes y después de un tratamiento [162]. Una tesis [6] analiza la marcha en un estudio longitudinal de pacientes con reconstrucción del ligamento anterior cruzado. Otro estudio emplea un ANOVA de medidas repetidas para estudiar la eficacia del uso o no de una órtesis de tobillo-pie en niños con parálisis cerebral [188]. Finalmente, en [27], se analiza la evolución del latigazo cervical tras sucesivas sesiones de rehabilitación.

La técnica más habitual son los modelos mixtos lineales para encontrar diferencias en las diferentes etapas del tratamiento. En el caso de variables funcionales, se utiliza la versión funcional de los modelos de medidas repetidas, empleando modelos funcionales de medidas repetidas [121]. También se han implementado técnicas de aprendizaje automático en estudios longitudinales [138].

2.2 Enfoques en el tratamiento de datos

A la hora de analizar los datos biomecánicos podemos diferenciar tres tipos de enfoques. La mayoría de estudios utilizan un enfoque tradicional, basado en la estadística univariante o multivariante. Recientemente se ha extendido el uso de técnicas de aprendizaje automático (o ML, Machine Learning), que permiten manejar grandes cantidades de variables. Finalmente, hay una tercera línea que utiliza datos funcionales y ha desarrollado extensiones de la estadística multivariante adaptada a este tipo de datos, a través del denominado Análisis de Datos

Funcionales (FDA). Cada uno de estos enfoques tiene sus fortalezas y debilidades, que pasamos a discutir en los apartados siguientes.

2.2.1 Enfoque tradicional

El análisis tradicional de movimientos humanos en Biomecánica se ha basado fundamentalmente en la aplicación de técnicas estadísticas univariantes, como el análisis de la varianza (ANOVA), la regresión lineal, regresión logística o métodos multivariantes como el análisis de componentes principales (PCA). Estas técnicas permiten establecer relaciones entre distintas variables, comparar grupos o generar modelos predictivos a partir de variables extraídas del movimiento.

Casi toda la información biomecánica relevante procede del movimiento humano, caracterizado por variables que son funciones del tiempo. Por ello, para utilizar el enfoque tradicional, es necesario un primer paso que consiste en extraer variables escalares de las curvas del movimiento. Estas variables incluyen, entre otras, el rango de movimiento, la velocidad o aceleración máxima, tiempos de apoyo, máximos o mínimos articulares, pasos por cero de estas curvas, etc. [180, 179]. Más concretamente, de algunas revisiones consultadas, el rango de movimiento es ampliamente utilizado en patologías de espalda [127] o los rangos angulares, momentos, fuerzas de reacción sobre el suelo, velocidad, longitud del paso o de zancada, cadencia, etc. en la marcha [112, 77, 8].

Una vez extraídas estas variables, se aplican distintas técnicas estadísticas. A continuación, se enumeran algunas de ellas:

- ANOVA: se emplea para comparar medias entre grupos. Por ejemplo, en [9] analizan variables cinemáticas y cinéticas de cadera, rodilla y tobillo para encontrar diferencias entre distintos niveles de gravedad de osteoartritis de rodilla.
- Regresión lineal: ampliamente utilizada para estudiar relaciones entre variables, como valores máximos de la curva de movimiento medida en marcha a partir de la velocidad [88] o diversas aplicaciones en el estudio del hombro [54, 108].
- Regresión logística: se aplica para clasificar sujetos en sanos o patológicos en función de variables biomecánicas, como en [111] donde se emplea la regresión logística para predecir la presencia de osteoartritis de rodilla a partir de momentos articulares medidos durante la marcha. Otro trabajo [33] lo emplea para clasificar clases de riesgo asociadas con actividades de levantamiento de cargas.

- Análisis de Componentes Principales (PCA): reduce la dimensionalidad de los datos al expresarlos en función de unas componentes principales, dando una interpretación a estas componentes. Son muy utilizadas en el ámbito de la Biomecánica, especialmente en el análisis de la marcha [44, 28]. En [16] se muestran ejemplos de interpretación de las componentes principales en varios ámbitos de la Biomecánica.

Este enfoque aplica técnicas estadísticas muy estudiadas y conocidas, por lo que su implementación y análisis es relativamente sencillo, con un coste computacional bajo. Además, permite la interpretación de los resultados, lo cual es de suma importancia en el ámbito clínico, para poder conocer cómo cada variable está relacionada con la patología.

Sin embargo, requiere un preprocesado de las curvas de movimiento para extraer las variables escalares relevantes. Este es un proceso laborioso y puede ser especialmente complicado y subjetivo en el caso de patrones patológicos, donde la variabilidad de los patrones de movimiento determina que ciertas características de la curva sean difíciles de identificar o no estén presentes.

Por otra parte, al reducir las curvas de movimiento a un reducido número de variables escalares se está perdiendo información valiosa. Así, es posible que se omitan detalles potencialmente relevantes sobre la variabilidad y las características temporales del movimiento, así como sobre las relaciones entre las variables y sus derivadas, es decir, sobre la dinámica del movimiento.

Una de las posibles consecuencias de esta pérdida de información es la sorprendentemente baja correlación que generalmente aparece entre muchas variables biomecánicas y las escalas clínicas con las que deberían estar relacionadas, que generalmente no supera el valor de 0.5 [27].

Por ejemplo, en [157] se usa el ANOVA funcional para estudiar asimetrías en ciclistas, demostrando que utilizando como variable escalar el máximo no se encuentran diferencias significativas, mientras que al realizar un ANOVA funcional sí que se encuentran diferencias significativas, excepto en la zona del movimiento correspondiente al máximo. Esto pone de manifiesto que en ocasiones se eligen variables escalares que no están muy relacionadas con el problema analizado.

Además, reducir un movimiento continuo a variables escalares prescinde de mucha información y de la propia dinámica del movimiento, por lo que esta podría ser otra de las razones por las que esta correlación es tan baja.

En resumen, aunque el enfoque tradicional basado en la estadística univariante o multivariante tiene ventajas importantes como la utilización de modelos esta-

dísticos robustos ampliamente estudiados que permiten la interpretación de los resultados, presenta como principal limitación la extracción de variables escalares de las curvas de movimiento. Reducir toda la curva de movimiento a unas pocas variables hace que se pierda información que podría ser relevante desde un punto de vista clínico.

2.2.2 Enfoque basado en Inteligencia Artificial

La Inteligencia Artificial es un campo muy amplio que comprende numerosas áreas. En el contexto de esta tesis, las técnicas de análisis están centradas en el aprendizaje automático o Machine Learning (ML), que incluye distintos tipos de algoritmos que se utilizan según el problema que se quiera resolver: máquinas de soporte vectorial (SVM) o Random Forest para clasificación, redes neuronales artificiales o Deep Learning, basado en redes neuronales profundas, entre otros.

La extensión de las técnicas de ML en el campo de las aplicaciones clínicas de la Biomecánica ha sido realmente rápida en los últimos años. La tecnología actual de análisis de movimientos humanos permite obtener cantidades ingentes de información, y las técnicas de ML se han mostrado especialmente eficaces en el análisis de muchos datos sin necesidad de un preprocesado costoso. Se han analizado tres revisiones [58, 49, 137] sobre el uso de algoritmos de ML en Biomecánica.

La revisión realizada por [58] analiza 129 artículos publicados hasta 2017, donde se aplica la Inteligencia Artificial en el campo de la Biomecánica del movimiento humano. La mayoría de los estudios se centran en tareas predictivas, concretamente en clasificación (80,6%) y regresión (11,6%), mientras que un 7,8% en tareas de agrupamiento.

Los algoritmos más utilizados para el modelado predictivo son máquinas de soporte vectorial (SVM), redes neuronales y modelos lineales generalizados, mientras que el algoritmo del k-medias para el agrupamiento. La mayoría de estudios analizados en esta revisión se centran en la clasificación de patrones de movimiento para distinguir la cinemática de sujetos patológicos de la de sujetos sanos. En cuanto a las patologías más estudiadas, muchos trabajos se centran en la de Parkinson, parálisis cerebral, caracterización de patrones de movimiento en pacientes que han sufrido un accidente cerebrovascular, así como el diagnóstico de osteoartritis.

La revisión realizada por [49] analiza 88 artículos publicados desde el 2017 hasta el 2024 sobre el uso de técnicas de Machine Learning en el estudio de movimientos humanos. Las técnicas de conjunto que combinan varios algoritmos de aprendizaje (principalmente árboles de decisión) fueron los más utilizados, junto con el

Random Forest, así como el SVM. Aunque son menos numerosos, también hay trabajos donde se emplean técnicas como el k-Vecinos más próximos, regresión logística y redes neuronales. Los algoritmos de Deep Learning se emplearon en 35 publicaciones.

Finalmente, en otra revisión centrada en las técnicas de IA en la marcha humana [137] destacan que las redes neuronales se usan más ampliamente en el análisis de la marcha normal, la rehabilitación robótica, el monitoreo y las tácticas deportivas o la vigilancia de la atención geriátrica. El algoritmo de SVM en cambio es más utilizado para estudiar las diferencias entre la marcha normal y patológica.

A pesar de la popularidad actual de las técnicas de ML y de su gran capacidad predictiva, sus aplicaciones en el ámbito clínico no están exentas de ciertos riesgos y limitaciones, señaladas en el trabajo de Efron [37]. Para comprender las ventajas e inconvenientes de los modelos basados en ML, utilizaremos tres conceptos señalados en dicho trabajo, que definen las posibles prestaciones deseables de un modelo estadístico: predicción, estimación y atribución.

La **predicción** se refiere a la capacidad de un modelo para predecir resultados desconocidos a partir de una base de datos. Este es el punto fuerte de las técnicas de ML que se suelen utilizar como clasificadores muy eficientes. De hecho las técnicas de ML son, en esencia, "algoritmos de predicción pura". Sin embargo, como señala Efron, en muchas ocasiones, esta predicción se consigue a partir de modelos simples sin comprender la estructura subyacente de los datos. Como ejemplo, las redes neuronales proporcionan predicciones muy precisas, pero sin dar una interpretación de estos resultados o cómo se llega a ellos.

La **estimación** implica la inferencia de parámetros específicos de un modelo que describen la relación entre variables. Este proceso requiere una comprensión profunda de la estructura del modelo y de los datos. La estimación es más compleja que la predicción, ya que implica la determinación de valores precisos para parámetros desconocidos de un modelo, lo cual puede ser complejo en presencia de ruido o si la muestra es limitada.

Finalmente, la **atribución** se refiere a la asignación de un nivel de significación a cada uno de los predictores del modelo. Es decir, la atribución evalúa qué variables tienen un impacto más significativo sobre la variable de interés. Efron indica que la atribución se relaciona con las pruebas de hipótesis y la interpretación de los resultados, y aunque la atribución puede ser de gran utilidad, su precisión depende de la calidad y estructura del modelo implementado.

A partir de estos conceptos, Efron compara los métodos clásicos de regresión con lo que llama algoritmos de predicción pura (algoritmos basados en IA, como los de ML), enumerando algunas diferencias entre ambos:

- Los modelos de superficie más ruidos son clave en la metodología de regresión tradicional. Sin embargo, ni la superficie ni el ruido son necesarios como entrada para algunos algoritmos de ML. Pone como ejemplo, que un médico que se ocupe de posibles casos de cáncer de próstata estará interesado en que el modelo proporcione una predicción eficaz, pero en cambio, la etiología de la enfermedad es de mayor interés para un investigador y es precisamente ahí donde los modelos estadísticos tradicionales tienen mayor importancia.
- Aunque tanto los modelos tradicionales como los basados en ML utilizan criterios de ajuste similares (por ejemplo mínimos cuadrados), lo hacen con distintos enfoques. Los primeros se plantean como objetivo extraer la esencia subyacente de datos ruidosos, de forma que esta se mantenga para cualquier conjunto de datos. En cambio, este enfoque no es el mismo para los modelos de predicción pura, donde se conforman con relaciones más débiles.
- El modelado paramétrico tiene un papel esencial en los métodos tradicionales de inferencia, mientras que los algoritmos de predicción son no paramétricos. Sin embargo, estos últimos pueden involucrar una gran cantidad de parámetros de ajuste, todos relacionados con el algoritmo. El enfoque de la “caja negra” de los modelos de ML es contrario al pensamiento científico, aunque esto puede ser irrelevante si el único objetivo es la predicción. Además, la estadística tradicional implica un alto conocimiento de la teoría de probabilidad. Sin embargo, esta pierde importancia en la predicción pura no paramétrica, donde las técnicas probabilísticamente simples, como la validación cruzada o el bootstrap, asumen esa carga metodológica.
- El modelado parsimonioso es una de las características de la metodología tradicional y es vital para la estimación y la atribución. En contraste, los modelos de predicción pura son complejos y sobreajustados, donde se tiene la creencia de que cuantas más variables predictoras, más información.
- Los métodos tradicionales habitualmente tienen matrices de datos donde el número de sujetos n es sustancialmente mayor que el número de predictores p , habitualmente $n > 5p$. En cambio, los algoritmos de predicción pura permiten “datos amplios” con el número de predictores p mucho mayor que el número de datos n . Los algoritmos de predicción deben evitar un sobreajuste del modelo y para ello hacen una evaluación del error usando un conjunto de prueba y por otro lado, utilizan técnicas de validación cruzada durante

el entrenamiento. Sin embargo, la creciente popularidad de los algoritmos de predicción pura, donde se pueden obtener resultados incluso para valores enormes de n y p , ha llevado a una necesidad de conjuntos de entrenamiento cada vez más grande. Esto tiene un impacto en la predicción, de forma que los datos son más interpolables pero menos extrapolables, y dificulta la atribución.

- La estadística tradicional está basada en un siglo de desarrollo teórico. Sin embargo, en los modelos de predicción, la eficiencia teórica se sustituye por métodos empíricos, habitualmente de estimación de errores de entrenamiento/prueba.

Con todo esto, los modelos basados en ML suelen proporcionar resultados considerablemente mejores que los que se obtienen con el enfoque tradicional. Por ejemplo, en los clasificadores, las métricas de evaluación del modelo, como el porcentaje de exactitud, sensibilidad o especificidad, son más altos que los obtenidos con técnicas como la regresión logística.

Pero aunque estos resultados sean mejores, los modelos basados en ML suelen considerar muchos predictores en relación al tamaño muestral. En el ámbito de la Biomecánica, la mayoría de estos estudios utilizan series de datos temporales con un tamaño muestral relativamente pequeño (la mediana del tamaño muestral de los artículos analizados en [58] es de 40 sujetos, o un número medio de participantes de 19 en [49]), lo que genera ciertos problemas a la hora de utilizar estos algoritmos.

Por otro lado, a diferencia del enfoque tradicional, donde es necesario hacer un preprocesado previo de las curvas, los métodos basados en IA permiten emplear los registros brutos del movimiento. Esto es especialmente útil cuando se utilizan dispositivos portátiles y sensores inerciales, ampliamente utilizados en el registro de movimientos humanos debido a su bajo coste [70, 97, 131]. No obstante, esto aumenta el problema de la dimensionalidad y la validación de los estudios, al obtener un elevado volumen de datos.

Al tener numerosas variables de entrada, y en especial si la muestra es pequeña como suele ocurrir en los estudios biomecánicos, se dificulta la evaluación de estos modelos. Se utilizan técnicas como la validación cruzada k -fold, leave-one-out o bootstrap, aunque su uso puede generar modelos poco robustos. En las revisiones consultadas recomiendan crear bancos de datos amplios para evitar estos problemas, aunque las diferencias en los protocolos de medida dificultan esta tarea.

Finalmente, los algoritmos de ML tienen una baja interpretabilidad, como también se destaca en varios artículos de revisión [58, 49]. Es crucial en Biomecánica interpretar los resultados obtenidos, ya que estos se diseñan con el objetivo de aportar información objetiva adicional para un diagnóstico o rehabilitación, de forma que un médico o rehabilitador pueda conocer qué diferencia a un sujeto sano de uno patológico. En [58] ponen de ejemplo un modelo que predice con un alto nivel de confianza si un paciente desarrollará osteoartritis en función de su patrón de marcha, pero como el modelo de IA es una “caja negra”, no aporta información sobre qué características de la marcha hacen que la patología progrese.

En definitiva, a pesar de las ventajas que presentan los modelos de ML (mayor capacidad predictiva y posibilidad de usar los registros brutos o con poco tratamiento previo), tienen algunas desventajas que limitan su aplicación en el ámbito clínico. En primer lugar, la baja interpretabilidad de los modelos, habitualmente denominados como “cajas negras”. En segundo lugar, el elevado número de variables de entrada que hace que sea un modelo poco robusto y con riesgo de sobreajuste. Por último, los modelos de ML son complejos de implementar y requieren de personal experto para diseñarlos y analizar los resultados obtenidos.

2.2.3 Enfoque basado en Análisis de Datos Funcional

En el análisis de movimientos humanos, los datos registrados son variables que dependen del tiempo. Sin embargo, en la mayoría de análisis biomecánicos se prescinde de este carácter funcional y continuo del movimiento, reduciendo la información registrada a unos pocos escalares como amplitudes, valores máximos o mínimos, duraciones de eventos...

Como se ha señalado anteriormente, con este enfoque se puede perder información valiosa no contenida en esos puntos elegidos. También se prescinde de las relaciones dinámicas entre las variables y sus derivadas y de las relaciones de coordinación entre las funciones asociadas a los diferentes grados de libertad del cuerpo humano. Esta información es importante ya que representa la secuenciación de la acción de los diferentes grupos musculares de los movimientos. De ahí el interés de trabajar con las variables funcionales asociadas a las curvas cinemáticas o dinámicas del movimiento humano. Esto es posible a través del Análisis de Datos Funcionales (FDA por sus siglas en inglés).

El FDA es una rama de la Estadística donde se trabaja con funciones en vez de con datos vectoriales, lo que permite extender muchas técnicas clásicas al análisis de las funciones temporales que constituyen la esencia del análisis de movimientos humanos [139]. El libro *Functional Data Analysis* de J. O. Ramsay

y B. W. Silverman [139] es la referencia del Análisis de Datos Funcionales, ya que ahí se detallan todos los aspectos teóricos de las distintas técnicas del FDA, junto con ejemplos en varios campos. El potencial del FDA en sus aplicaciones a la Biomecánica queda patente en las diferentes revisiones realizadas a partir de la obra seminal de Ramsay [139]. Cabe citar la reciente obra de Gunning [56] centrada en el área de la Biomecánica, donde aparte de describir las técnicas funcionales más habituales en Biomecánica, cita algunos de los artículos más relevantes en cada área de aplicación.

Hay varias revisiones sobre el uso del FDA en el ámbito clínico [167, 26, 22, 172, 119]. En [167] estudian artículos publicados sobre la aplicación clínica del FDA, de los cuales 11 están centrados en Biomecánica. El trabajo divide los resultados de los artículos en cuatro apartados, que son los que habitualmente se emplean en FDA: 1) suavizado, expresando para ello los datos en una base de funciones; 2) reducción de los datos, a través del Análisis de Componentes Principales Funcional (FPCA) en la mayoría de los estudios biomecánicos; 3) clustering, a través de las puntuaciones obtenidas en el FPCA, aunque no es muy utilizado en los artículos de Biomecánica analizados en la revisión y 4) modelos funcionales lineales, aunque esto no está del todo explotado en Biomecánica. La reciente revisión de [119] centrada en el uso de FDA en medicina sigue una estructura similar, destacando igualmente que los apartados anteriores son los más utilizados en el FDA.

La revisión de [26] está específicamente centrada en aplicaciones biomecánicas del FDA, donde analiza 13 artículos. La mayoría emplea el Análisis de Componentes Principales Funcional así como el ANOVA funcional (FANOVA) y, en algún caso aislado, la regresión funcional.

En [172] se centran en la aplicación del FDA en la Biomecánica deportiva, destacando el Análisis de Componentes Principales funcional como una de las herramientas más empleadas. El FDA tiene un gran potencial al permitir analizar e interpretar las curvas de forma visual, lo que puede ayudar al personal clínico en la toma de decisiones.

En [22] hacen una introducción al FDA, comentando primero cómo transformar los datos en funciones y posteriormente cómo realizar un suavizado de las funciones para reducir el ruido. Después, explican el registro de curvas y los análisis estadísticos funcionales que se pueden realizar, como la regresión funcional.

Finalmente, el trabajo de Sørensen [159] expone algunos ejemplos de aplicación del FDA, repasando las distintas fases que se utilizan en FDA (expresar los datos en una base de funciones, alineación de las curvas a través de una normalización del tiempo, análisis de componentes principales funcional, regresión funcional...)

y lo aplica a dos bancos de datos: imágenes del cerebro y datos de aneurisma. Este trabajo resulta de especial interés, sobre todo cuando se comienza en el campo del FDA, ya que ilustra los conceptos básicos y los aplica a un conjunto de datos. Para describir los distintos pasos y herramientas del FDA se va a dividir en tres apartados:

- Preparación de datos, donde se explicarán las bases de funciones para expresar los datos discretos y la normalización del tiempo.
- Descriptivos funcionales para representar un conjunto de curvas.
- Métodos de inferencia, como los modelos de regresión funcional y clasificadores.

Preparación de datos

Bases de funciones Para expresar los datos continuos de un movimiento medidos en un intervalo de tiempo como una función, es necesario expresarlos mediante una base de funciones.

Este proceso transforma las observaciones discretas a lo largo del tiempo en un conjunto de componentes en las funciones de la base. Las componentes se obtienen ajustando las observaciones realizadas a una combinación lineal de las funciones de la base mediante algún proceso basado en mínimos cuadrados o mínimos cuadrados penalizados. Además de reducir la dimensionalidad del problema, generalmente una función con centenares o miles de observaciones puede representarse como una combinación de decenas de funciones de una base, este proceso permite suavizar los datos y calcular con precisión las derivadas de las funciones.

Existen diferentes tipos de bases de funciones. En general, se utilizan bases ortogonales como las bases de Fourier o las basadas en B-Splines. En Biomecánica también es habitual el uso de bases obtenidas mediante Análisis de Componentes Principales funcionales, que se comentará más adelante.

La **base de Fourier** [139, Cap. 3] es periódica y consiste en un término constante y las funciones trigonométricas seno y coseno de frecuencia creciente. Al tratarse de una base periódica se suele utilizar en movimientos humanos cíclicos como la marcha.

La **base de B-Splines** [139, Cap. 3] es una base de funciones splines, es decir, funciones polinómicas por partes de un determinado grado, definidas

sobre subintervalos del dominio. Es una base no periódica y es la más habitual en Biomecánica por su versatilidad y eficacia en los cálculos, ya que derivar es inmediato.

Finalmente, si los datos tienen una alta variabilidad, como es el caso de los datos de electromiografía (EMG), las bases de Fourier o B-Splines no pueden modelar adecuadamente todos esos “picos”. Para este tipo de datos se suele utilizar una representación wavelet. Sin embargo, en análisis de movimientos humanos los datos son relativamente suaves, de forma que las bases de Fourier y B-Splines se ajustan adecuadamente a estos datos.

De la revisión del uso de FDA [167] de los 11 artículos de Biomecánica, solo uno utiliza la base de Fourier, mientras que los demás la base de B-Splines, incluso para la marcha. De igual forma, en la revisión centrada en el uso de FDA en Biomecánica [26], 4 artículos que analizan el movimiento del salto utilizan la base de B-Splines, mientras que 3 artículos que estudian la marcha usan la base de Fourier.

Aparte del suavizado que se obtiene al expresar los datos discretos en una base de funciones, que puede controlarse utilizando más o menos funciones, también hay otros métodos de suavizado. Por ejemplo, considerar un número elevado de funciones y añadir un término de penalización al criterio de mínimos cuadrados que penalice la rugosidad de la función ajustada. En la mayoría de artículos revisados se utiliza la primera opción, sin necesidad de tener que incluir ese parámetro de penalización.

Aparte de las bases de B-Splines o Fourier, también se puede elegir la base de Componentes Principales. El Análisis de Componentes Principales Funcional es una de las técnicas del FDA más utilizada en Biomecánica, aunque en ocasiones no como una base para representar datos, sino para obtener información para aplicar después otra técnica.

La **base de Componentes Principales** es una base ortogonal extraída de las curvas de una muestra representativa, mediante un proceso de Análisis de Componentes Principales Funcional, descrito en [139, Cap. 8]. Así, se obtiene una base ortogonal cuyas componentes explican cada vez menos varianza, de forma similar al análisis de componentes principales multivariante.

Son ampliamente utilizadas en Biomecánica. El FPCA se ha empleado en marcha de sujetos que han sufrido un accidente cerebrovascular [95], en marcha infantil [40], Biomecánica deportiva [59], en variables cinemáticas y cinéticas del miembro inferior en el movimiento de levantamiento de pesas [73], ángulo de tobillo en corredores [107], fuerzas de reacción sobre el sue-

lo en salto de atletas [144], fuerzas de propulsión en remo [175] o control postural [173], entre otros.

Hay versiones, en las que se hace un FPCA multivariante, empleando varias curvas de forma conjunta. En [147] estudian la osteoartritis de cadera aplicando un análisis de componentes principales multivariante (MFPCA) para caracterizar la varianza de los ángulos de cadera, rodilla y tobillo en sujetos sanos y pacientes con osteoartritis de cadera. Como un caso más concreto del caso multivariante, está el caso bivariante, aplicado en otro trabajo en Biomecánica deportiva [174]. Aplican el análisis de componentes principales funcional bivariante (bFPCA) en curvas de fuerza y ángulo en el movimiento del remo.

Finalmente, como última aplicación del FPCA en Biomecánica, se ha encontrado un trabajo en el que aplican el análisis de componentes principales funcional común [21], basado en el PCA pero que encuentra además unas componentes principales que sean comunes. Esto se ha empleado en economía, pero a fecha de publicación de su trabajo no se ha empleado en Biomecánica.

La utilización de las componentes principales como base de funciones presenta la ventaja de que son ortogonales y que explican más varianza con menos funciones, a veces muchas menos que las necesarias con la base de Fourier o de B-Splines. Esto es debido a que es una base que está adaptada al tipo de datos a analizar.

Sin embargo, presentan la limitación de ser computacionalmente menos eficientes que las de B-Splines, especialmente si hay que derivar, ya que es inmediato en el caso de la base de B-Splines, o si se trabaja con las funciones y sus derivadas.

Otra desventaja que hay que destacar sobre el uso del FPCA es el uso que se hace en Biomecánica, donde no se utiliza realmente como una base de funciones, sino como una forma de transformar un conjunto de datos funcionales en un problema de análisis multivariante. Por ejemplo, en [73, 107, 144] emplean el FPCA, pero después se utilizan las puntuaciones de cada componente como variables de entrada para un modelo de regresión clásico, prescindiendo por tanto del carácter funcional. En otras ocasiones, se usan como variables dependientes, analizando si existen diferencias en función de factores como el sexo o la patología [39].

Este planteamiento implica ciertas asunciones que, en nuestra opinión, no tienen una base demostrada. En primer lugar, se asume que las componentes

principales tienen, por sí mismas, un significado biomecánico y responden a patrones o características “naturales del movimiento” [43, 16], lo que nunca ha sido justificado. Las componentes se han obtenido de un proceso de análisis matemático completamente mecánico (la diagonalización de una matriz) y los resultados dependen de las características de la muestra utilizada. Se trata únicamente de una base de funciones que debe ser usada en su totalidad para representar fidedignamente a cualquier curva.

Por otra parte, se asume que la separación en funciones es la mejor forma de identificar los cambios en las curvas asociados al efecto buscado (existencia de la enfermedad o nivel de severidad), lo que no tiene ninguna base. De hecho, este planteamiento suele ir acompañado de un proceso de interpretación del “significado” de cada componente que es ciertamente subjetivo y discutible, especialmente en las componentes que explican menos varianza y cuya forma es mucho más sensible a las características de la muestra.

El FPCA simplemente proporciona una base de funciones cuyas componentes explican cada vez menos varianza y su uso en FDA implica usarlas todas para representar cualquier curva en esa base. Es decir, sin seleccionar ciertas componentes de forma aislada ni analizarlas por separado, dando por hecho que unas componentes son más importantes que otras.

Al margen del tipo de base de funciones utilizadas para representar las variables funcionales, hay un problema fundamental que afecta la parsimonia y robustez de los modelos funcionales, que es el número de funciones adecuado para representar dichos datos. Si se elige un número bajo de funciones en la base puede perderse información al no poder ajustarse bien a los datos, pero si el número es elevado se puede estar ajustando el ruido o variabilidad que se quiere ignorar. Con las bases de B-Splines hay criterios de validación cruzada para asegurar una buena representación y cálculo de derivadas. En FPCA se suele usar el criterio de la varianza explicada. Sin embargo, este criterio puede no ser suficiente. Además es preciso incorporar otros criterios conjuntos de robustez, explicación de varianza y de parsimonia en los modelos. Este aspecto es muy importante a la hora de evitar sobre ajustes en los modelos, siendo una cuestión generalmente ignorada en las aplicaciones biomecánicas y que debería ser tenida en cuenta.

Normalización del tiempo El análisis de movimientos humanos implica comparar curvas de movimientos de sujetos diferentes o repeticiones de movimientos del mismo sujeto. En todos los casos, las duraciones de dichos movimientos son distintas, lo que implica la necesidad de ajustar una escala de tiempos de manera que se puedan comparar curvas de diferente duración.

A esto se le conoce como registro del tiempo y hay diferentes técnicas que se comentan de forma resumida a continuación, ya que revisarán con más detalle en el capítulo correspondiente. Hay varias alternativas de registro, que se pueden clasificar en: métodos lineales, métodos basados en puntos característicos o landmarks y métodos no lineales.

El método más simple y extendido es la normalización lineal, donde se escalan las curvas de forma que se exprese en función del porcentaje del 0 al 100% del movimiento. Sin embargo, este método presenta ciertas limitaciones y altera la descripción de la dinámica del movimiento [123].

El registro basado en puntos característicos alinea las curvas eligiendo puntos característicos de la curva, lo que elimina algunos de los problemas de la normalización lineal [151, 113]. Esta técnica está considerada como la referencia por algunos autores [171]. Sin embargo, no está exenta de problemas importantes, en especial las dificultades para definir de forma clara los puntos de referencia, especialmente en poblaciones de sujetos enfermos donde los patrones de movimiento pueden ser muy distintos a los de la población sana [56]. Por otra parte, la elección de puntos característicos exige un pre-procesado laborioso de las señales, proceso que, además, es específico para cada tipo de variable.

Los métodos no lineales nacen para dar solución a las limitaciones del registro basado en puntos característicos. El registro continuo es todavía un tema en investigación y se basa en alinear toda la curva encontrando funciones de transformación del tiempo que maximicen o minimicen medidas de similitud (o diferencia) entre funciones registradas. En estas técnicas el tiempo se va deformando de forma continua, de manera que se reduce esa diferencia de fase entre curvas. Las dos técnicas más empleadas son el método de Ramsay [94, 122, 140, 189, 23] y el más reciente, basado en la métrica de Fisher-Rao [160, 166, 103].

En conclusión, antes de aplicar cualquier técnica de FDA, las curvas deben estar en el mismo dominio del tiempo. Aunque existen distintas técnicas, todas presentan ciertas ventajas e inconvenientes que conviene analizar en detalle. En cualquier caso, el registro debe aplicarse en Biomecánica con precaución, realizando un análisis de las alteraciones que este hace en los datos.

Descriptivos funcionales

El FDA permite extender los conceptos de media y desviación típica al caso de variables, mediante la media y la desviación típica funcionales, que se calculan en las curvas registradas. Tanto la media como la desviación típica funcional son los parámetros habitualmente usados como descriptivos en la gran mayoría de trabajos revisados.

Sin embargo, esta media funcional presenta una serie de limitaciones importantes. En primer lugar hay que considerar el efecto de cancelación de la media, asociado al aplanamiento de los máximos y mínimos relativos de la media por los desfases entre las curvas originales. Por otra parte, y al igual que sucede con cualquier media, es un valor sensible al sesgo debido a valores extremos de algunas curvas. Estos dos problemas pueden dar lugar a curvas promedio que no tienen la forma ni las características de ninguna de las curvas originales. Es decir, con frecuencia, la curva media no representa a ninguna curva real.

En cuanto a la descripción de la variabilidad, la desviación típica funcional se suele calcular punto a punto sobre las curvas registradas, usando como referencia una curva media y sin tener en cuenta que las observaciones consecutivas no son, en absoluto independientes. Por ello, tampoco refleja correctamente la dispersión de las curvas [19].

Teniendo en cuenta las limitaciones de la media y la desviación funcionales, es evidente que no es posible obtener una región de confianza a partir de estos valores. En numerosos trabajos se representan bandas de confianza a partir de la curva media y la desviación típica calculada punto a punto. Sin embargo, tales bandas no representan una región de confianza, ya que al discretizar la función y construir un intervalo de confianza para cada punto, no se está asegurando realmente que la curva esté dentro de la banda de confianza obtenida en todo su dominio. Este problema se ha abordado mediante otras técnicas, como el bootstrap [34], aunque realmente, en el ámbito de las aplicaciones biomecánicas se ha profundizado muy poco en la comprensión del significado de las regiones de confianza cuando se quieren extender a los datos funcionales.

Ante estas limitaciones, surge la necesidad de profundizar en otras alternativas que respeten el carácter funcional de los datos, usando otros conceptos como las curvas profundas, equivalente a las medianas en el ámbito funcional. Este concepto está desarrollado de forma teórica en varios trabajos [48, 25, 98], sin embargo, en el ámbito de la Biomecánica es poco utilizado. De hecho, solo se ha encontrado un trabajo [142] que lo utiliza en curvas del índice de masa corporal en niños.

También es necesario buscar otros tipos de representación de la variabilidad de las curvas, a través del bootstrap y del equivalente funcional de rango intercuartílico, empleando para ello el concepto de profundidad.

No obstante, todas estas cuestiones no están todavía tratadas en el campo de la Biomecánica y conviene explorarlas, especialmente en aquellos casos donde las curvas presentan mucha variabilidad, ya que es ahí donde la media funcional presenta más limitaciones.

Métodos de inferencia

Modelos de regresión funcionales Desde un punto de vista funcional, los modelos de regresión pueden clasificarse en tres categorías, según la naturaleza de las variables predictoras y la variable respuesta: funcional sobre escalar, escalar sobre funcional o funcional sobre funcional.

La regresión funcional sobre escalar considera predictores escalares y variables respuesta funcionales. Es el tipo de regresión más utilizada en el campo de la Biomecánica, siendo el ANOVA funcional un caso particular de este tipo de análisis.

Así, de la revisión realizada se han encontrado varios trabajos que utilizan un ANOVA funcional [3, 7, 157, 52, 128, 177, 188]. En estos se proponen como objetivo demostrar que el FANOVA es más potente y aporta más información que el ANOVA. En efeco, a diferencia del ANOVA, que utiliza sólo algunas variables escalares (máximos, mínimos, rangos), el FANOVA usa toda la curva, permitiendo identificar diferencias o relaciones en zonas del movimiento no consideradas en los modelos clásicos.

Las principales aplicaciones son el estudio de la marcha en sujetos con accidente cerebrovascular [7], análisis de asimetrías en ciclistas [157], análisis del movimiento de levantamiento de pesas en mujeres [52], curvas de ángulo de rodilla, cadera o tobillo en marcha [128] o la cinemática al realizar un salto triple [177].

Dos trabajos utilizan un FANOVA para medidas repetidas, uno de ellos [3] aplicado a dos bancos de datos en Biomecánica y otro [188] aplicado a una muestra de datos de marcha para ver el efecto de una órtesis de tobillo-pie en niños con parálisis cerebral, utilizando un FANOVA de efectos mixtos.

En varios estudios, se encuentran diferencias significativas entre grupos con el ANOVA funcional, mientras que con el ANOVA clásico no [7, 157]. Por

ejemplo, en el estudio de la asimetría en ciclistas [157], al hacer el ANOVA con los valores máximos de la curva no encuentran diferencias significativas. En cambio, con el ANOVA funcional sí que hay zonas de la curva con un p-valor inferior a 0.05. Es precisamente la zona correspondiente al máximo donde este p-valor no es significativo. Esto demuestra la pérdida de información del enfoque tradicional, que lleva en ocasiones a extraer conclusiones erróneas al no considerar toda la información de la curva.

Una limitación de estos estudios que aplican el ANOVA funcional es que, aunque se considera toda la curva del movimiento, realmente se están haciendo múltiples modelos, punto a punto. Por lo tanto, se están realizando comparaciones múltiples que es necesario corregir. Este aspecto no está considerado en la mayoría de trabajos. En [157] se aplica la corrección de Bonferroni, lo que puede resultar excesivamente conservador cuando se realizan centenares de ajustes.

Menos numerosos son los trabajos que utilizan la regresión escalar sobre funcional. En este caso los predictores son variables funcionales y la respuesta una variables escalar. Esta ha sido empleada para predecir la frecuencia cardíaca máxima [105]. Sin embargo, no se han encontrado muchas aplicaciones más sobre regresión escalar sobre funcional en Biomecánica, a pesar de su interés clínico. Por ejemplo, esta técnica sería la adecuada para estudiar las relaciones entre las variables biomecánicas y las escalas clínicas, es decir, permitirían comprobar en qué medida un conjunto de variables biomecánicas son capaces de predecir un determinado nivel de dolor o discapacidad.

Finalmente, la regresión función sobre función, no es muy utilizada en Biomecánica, pudiendo emplearse para establecer relaciones entre diferentes variables cinemáticas o cinéticas medidas durante un movimiento. Esta además puede utilizarse no solo para establecer relaciones entre variables, sino también entre una variable y sus derivadas, para descubrir así relaciones dinámicas [56, 86].

La principal ventaja de los modelos de regresión funcional es que utilizan toda la información contenida en la curva, sin necesidad de identificar puntos específicos ni tener que realizar un preprocesado complejo o específico para cada variable. Además, los trabajos publicados muestran que los modelos funcionales tienen una mayor capacidad predictiva que los escalares. Finalmente, permiten realizar una interpretación de los resultados obtenidos. Sin embargo, no son muy utilizados, salvo los ANOVA's funcionales, que se realizan en la versión clásica discretizando la función.

En cuanto a sus debilidades, en los modelos funcionales hay que elegir una base de funciones para expresar los datos y por tanto un número de bases para la función coeficiente del modelo. Debido a la alta dimensionalidad de los datos funcionales, es necesario establecer algún criterio para elegir ese óptimo de bases, para conseguir un equilibrio entre conservar la mayor parte de la información y obtener modelos robustos y parsimoniosos, donde se minimice el riesgo de sobre ajuste.

Clasificadores Los clasificadores son modelos donde se pretende asignar las observaciones a grupos predefinidos a partir de variables predictoras de naturaleza funcional y escalar. En esta tesis nos centramos en los modelos de regresión logística, donde la clasificación es binaria, siendo su aplicación más frecuente como ayuda al diagnóstico: tener o no una patología.

Aunque la regresión logística es una técnica ampliamente utilizada en el ámbito de la Salud, su versión funcional apenas ha sido empleada. De hecho, las aplicaciones en el campo de la Biomecánica son escasos. En [93] se emplea la regresión logística funcional para clasificar pacientes con y sin dolor de cuello midiendo variables biomecánicas al andar. Otro trabajo [114] aplica tres enfoques de la regresión logística funcional para la detección de cojera en caballos. En [92] emplean funciones de la EMG y cinemáticas para clasificar sujetos con dolor lumbar de sujetos sanos. Finalmente, se ha publicado un último artículo [78] que emplea la regresión logística funcional pero no como técnica de clasificación, sino como un paso intermedio para después aplicar otra técnica no funcional.

Al igual que ocurría con la regresión funcional, hay pocos trabajos que utilicen la regresión logística funcional en el ámbito de la Biomecánica. Esta presenta ventajas e inconvenientes similares a los modelos de regresión funcional. Por una parte, permiten usar toda la información de las variables funcionales sin necesidad de preprocesados y suelen ser más potentes que los métodos clásicos. Sin embargo, presentan riesgo de sobre ajuste, lo que debe ser controlado mediante el dimensionado adecuado de la base de funciones y el uso de criterios para cuantificar la robustez y parsimonia de los modelos.

Otras técnicas

Aunque en esta tesis doctoral nos centraremos en el FDA, hay otros enfoques posibles para trabajar con variables funcionales mediante técnicas diferentes. Se ha encontrado un trabajo [104] que aplica los modelos multinivel funcionales a datos biomecánicos, donde se compara el ángulo de rodilla en sujetos que entrenan a una intensidad alta y baja. Se preguntan si las diferencias entre ambos grupos son tales o son debidas a la propia variabilidad de los sujetos.

Finalmente, hay otras técnicas que también consideran toda la información de la curva como el mapeo estadístico paramétrico (SPM, de sus siglas en inglés: Statistical Parametric Mapping) o el mapeo estadístico no-paramétrico (SnPM). En la revisión realizada se ha encontrado un artículo [176] donde comparan el FDA, el SPM y el SnPM utilizando datos de Biomecánica del remo, para probar la hipótesis de si hay diferencias en el remo por género y poder comparar las tres técnicas. Para ello analizan las curvas de fuerza de propulsión al remar. Del estudio concluyen que los tres métodos estudiados son similares y que los tres muestran diferencias significativas por género. Destacan que los métodos paramétricos (SPM) son computacionalmente más rápidos frente a los no paramétricos. Por otro lado, que el SPM y SnPM son más útiles cuando los datos son muy variables, ya que en esos casos resulta más complicado representarlos en una base de funciones para el FDA. Además, el SPM y SnPM tratan los datos como vectores, por lo que indican que es más fácil encontrar regiones de importancia o aplicar pruebas estadísticas a esas regiones. En cambio, el FDA es útil cuando se quiere hacer un suavizado de datos o hacer un registro de las curvas. No obstante, en nuestra opinión, las posibilidades que ofrece el FDA son mucho más amplias que las del SPM, que se limita a las comparaciones, mientras que el enfoque funcional permite extender las técnicas y modelos clásicos al tratamiento de datos funcionales.

2.3 Necesidades detectadas

A partir de la revisión realizada en este capítulo se han detectado algunas lagunas de conocimientos para la aplicación del Análisis de Datos Funcionales en el ámbito de la Biomecánica. Dichas necesidades se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Aunque se han publicado diferentes alternativas para la normalización del tiempo, hay aspectos que no han sido estudiados, como el efecto de la normalización sobre las relaciones entre derivadas o sobre la coordinación motora.

Tampoco hemos encontrado estudios que hagan un análisis comparativo entre las diferentes alternativas de registro.

- Los parámetros descriptivos funcionales como la media y desviación típica funcional presentan limitaciones a la hora de representar curvas centrales, de estimar la variabilidad entre curvas y de establecer regiones de confianza. Por ello el concepto de curva profunda puede ser un indicador de centralidad más idóneo que la media. Asimismo, se debería analizar las posibilidades de la utilización de técnicas como el bootstrap, junto con un equivalente funcional de rango intercuartílico, para representar la variabilidad de las curvas respetando su carácter funcional.
- Centrándonos en los métodos de inferencia funcionales, su uso en Biomecánica ha sido escaso y no ha aprovechado todas las ventajas y posibilidades de un enfoque funcional. En particular, se han detectado las siguientes necesidades:
 - Se debe controlar el riesgo de tipo I en las comparaciones múltiples asociadas a los modelos de regresión función sobre escalar, como el ANOVA funcional, que se realizan punto a punto. Es necesario definir procesos de corrección de los p-valores adaptados a este tipo de análisis. Por otra parte, es conveniente complementar estos análisis con métodos de ANOVA realmente funcionales que consideren toda la información de la curva en su conjunto y proporcione un p-valor único.
 - Los modelos de regresión escalar sobre función son muy poco utilizados, pese a su gran potencial para establecer relaciones relevantes desde el punto de vista clínico entre las escalas clínicas y las variables biomecánicas.
 - Explorar el interés y utilidad de las técnicas de regresión logística funcional, como clasificador binario de apoyo al diagnóstico. Una aplicación muy poco utilizada en el campo de la Biomecánica.
 - Finalmente, en casi todas las aplicaciones de inferencia, hay que ajustar modelos de una elevada dimensionalidad. Dado que las muestras disponibles en muchos estudios no son muy numerosas, es preciso disponer de criterios de evaluación y control de la calidad de los modelos, que no sólo consideren su capacidad predictiva, sino que tengan en cuenta otros aspectos como la simplicidad del modelo y su robustez, en definitiva, su parsimonia.

Estas carencias representan oportunidades para avanzar en la aplicación rigurosa y efectiva del Análisis de Datos Funcionales en el ámbito de la Biomecánica, desde una perspectiva tanto metodológica como aplicada, y servirán de base para plantear los objetivos de esta tesis doctoral, que se describen en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Objetivos e hipótesis

El objetivo principal de esta tesis es el desarrollo de mejoras en las aplicaciones del FDA en la valoración biomecánica clínica del aparato locomotor, que resuelvan algunos de los problemas señalados en la revisión anterior. En particular, se trata de profundizar en el conocimiento de las ventajas e inconvenientes de los distintos tipos de normalización del tiempo, estudiar alternativas para describir las curvas centrales y la dispersión funcional, establecer criterios claros para controlar el riesgo de sobre ajustes y el error de tipo I, y mostrar las posibilidades del FDA en el desarrollo de modelos lineales y de clasificación.

Siendo natural la aplicación del FDA en biomecánica, es sorprendente la escasa utilización de estas técnicas en aspectos tan importantes como son la descripción de variables, los modelos descriptivos y de clasificación.

A continuación se detallan los objetivos específicos e hipótesis del trabajo:

Objetivos específicos

1. Comparar las distintas alternativas de normalización de la escala de tiempos y evaluar algunas de sus propiedades más relevantes en el análisis de movimientos humanos: efectividad de la reducción de las diferencias de fase y efectos sobre el cálculo de derivadas, la coordi-

nación motora y la coherencia en la alineación de las componentes de magnitudes vectoriales.

2. Explorar otras formas de describir los datos funcionales más allá de la media funcional a partir del concepto de profundidad. Comparar los resultados obtenidos a partir de la media y desviación típica funcional con los que se obtienen a partir de la mediana y rango intercuartílico funcional.
3. Diseñar un procedimiento para la estimación de regiones de confianza asociadas a curvas, estableciendo criterios que permitan definir el grado de normalidad de una función respecto a una población dada.
4. Plantear las distintas versiones funcionales de los modelos de regresión lineal: función sobre escalar y escalar sobre función, así como el ANOVA funcional, comparándolo con los enfoques previos.
5. Desarrollar soluciones para el control del error tipo I y del riesgo de sobre ajuste asociado a los modelos punto a punto o de alta dimensionalidad que aparecen en el enfoque funcional. Definir criterios de robustez y parsimonia.
6. Adaptar los modelos lineales generalizados funcionales (regresión logística) para la clasificación de sujetos a partir de variables funcionales del movimiento, incorporando también otras características complementarias escalares.

Estos objetivos previos se concretarán con mayor detalle a partir de la revisión en el estado del arte de cada capítulo de esta tesis, en los que se mostrarán las necesidades y lagunas específicas.

Hipótesis principales

1. Los enfoques habituales de tratamiento de datos en movimientos humanos basados en la Estadística multivariante y en la Inteligencia Artificial presentan ciertas limitaciones que pueden ser solucionadas por el uso de los procedimientos estadísticos conocidos como Análisis de Datos Funcionales (Functional Data Analysis, FDA), estudiando la curva del movimiento completa.
2. Los modelos de FDA presentan ventajas frente al enfoque multivariante, al permitir usar la información completa de las curvas, sin la necesidad de extraer variables escalares asociadas a puntos característicos. Ello permite identificar relaciones entre variables que no aparecen en los enfoques tradicionales.
3. Los modelos de FDA son más parsimoniosos y robustos que los basados en Inteligencia Artificial, a la vez que permiten una interpretación de los resultados, aspecto clave en el ámbito clínico como complemento y ayuda al diagnóstico.

Hipótesis secundarias

1. El FDA ofrece varias posibilidades de normalización no lineal del tiempo que todavía están por explorar, en especial en lo que se refiere a la alteración de la dinámica del movimiento y a las relaciones entre variables asociadas a diferentes grados de libertad, base de los análisis de coordinación motora.
2. La curva más profunda es un concepto complementario al de media funcional que no ha sido apenas utilizado en biomecánica y puede ser muy adecuado para una correcta representación de los valores centrales.
3. Las técnicas basadas en bootstrap son útiles para definir regiones de confianza para medias y medianas funcionales, ofreciendo una idea mucho más realista de la variabilidad real de las variables funcionales.
4. Los modelos de regresión funcionales permiten relacionar escalas clínicas y variables biomecánicas funcionales, estableciendo relaciones más claras que las obtenidas mediante la regresión multivariante. Además, pueden ofrecer información sobre qué partes de las curvas tienen mayor interés clínico.
5. Los modelos lineales generalizados funcionales para clasificación de sujetos en base a variables biomecánicas utilizan toda la información de la curva, permitiendo establecer una relación más clara entre variables.

Capítulo 4

Datos experimentales

En este capítulo se describen los estudios experimentales que han dado lugar a las bases de datos utilizadas en esta tesis doctoral para ilustrar la aplicación de los métodos funcionales, evaluar su efectividad y validar las hipótesis planteadas. En todos los casos se han usado datos reales obtenidos en estudios experimentales sobre valoración biomecánica. Se trata de bases de datos públicas o estudios de investigación cuyos datos han sido facilitados por sus autores. Les agradecemos desde aquí su amabilidad al permitir el acceso a datos experimentales muy valiosos.

En cada apartado se describen los objetivos del estudio, los criterios de inclusión y exclusión, características de los participantes, técnicas experimentales y variables registradas.

4.1 Datos de cinemática cervical en pacientes con cervicalgia inespecífica

Los datos cinemáticos sobre el movimiento del cuello corresponden a un estudio previo cuyo objetivo era examinar el impacto de una sesión de manipulación en pacientes con dolor inespecífico de cuello [156]. En este estudio, solo se utilizaron variables numéricas habituales, como los rangos de movimiento o velocidad. Sin embargo, dichas variables se extrajeron de las curvas del movimiento en ejercicios

con varios ciclos de movimiento continuo. Son estos datos brutos los que hemos usado para analizar los registros bajo un enfoque funcional.

El estudio incluyó a 28 participantes. Como criterio de inclusión, los participantes debían tener principalmente dolor de cuello de origen no traumático y características mecánicas (es decir, dolor que empeora por factores mecánicos y se alivia en ciertas posiciones). Además, los síntomas debían ser identificables mediante pruebas de provocación clínica local. Se excluyó a los participantes si tenían antecedentes de cirugía de cuello, hallazgos radiológicos como fracturas vertebrales o tumores, dolor de cuello irradiado o dolor acompañado de vértigo, trastornos psicológicos diagnosticados y señales de alerta como dolor nocturno, espasmos musculares severos y pérdida de peso inexplicable. La discordancia de síntomas, definida como síntomas que no se podían explicar dentro del contexto clínico, también formó parte de los criterios de exclusión.

Se midieron el movimiento y el estado funcional de cada participante antes y después del tratamiento, lo que resultó en un total de 56 observaciones. Se encontraron diferencias significativas en los valores del NDI antes y después del tratamiento.

Todos los participantes dieron su consentimiento informado y los protocolos del estudio recibieron la aprobación del Comité de Ética de la Universidad de Valencia (H1450106985729). Todos los procedimientos se adhirieron a la última revisión de la Declaración de Helsinki.

Las pruebas experimentales consistieron en movimientos cíclicos y continuos en los tres planos de movimiento: flexión-extensión, flexión lateral y rotación axial de cuello. Se utilizó el protocolo descrito en Venegas et al. [169], cuyos pasos se detallan a continuación.

Los participantes se sentaban en una silla especialmente diseñada que aseguraba el tronco y las piernas, permitiendo solo el movimiento del cuello y la cabeza.

El movimiento se capturó utilizando un sistema de videofotogrametría (Kinescan-IBV) con ocho marcadores reflectantes colocados en una diadema que el sujeto llevaba rígidamente fija a la cabeza. Para minimizar la variabilidad en la posición de referencia, se indicó a los participantes que miraran su reflejo en un pequeño espejo (3x8 cm) colocado a 2,5 metros frente a ellos a la altura de los ojos. Se realizó una medición de calibración adicional para establecer un sistema de referencia anatómico en esta posición. Este sistema se definió por un conjunto adicional de cinco marcadores ubicados en el trago izquierdo y derecho de la oreja, el hueso nasal y los huesos infraorbitales izquierdo y derecho; estos tres marcadores se montaron en un marco de gafas. Después de la calibración, se retiraron estos

marcadores anatómicos. Durante cada sesión de medición (antes y después del tratamiento), los participantes realizaron movimientos cíclicos y continuos en los tres planos a la velocidad máxima que les resultó cómoda. A partir de las coordenadas del marcador, se calcularon los ángulos desde la posición de referencia y las velocidades mediante el método descrito en Page et al. [125]. Se obtuvo un registro continuo en cada sesión, dividido en ciclos completos (7 por participante), descartando el primero y el último ciclo, por lo que se tenían 5 ciclos por sujeto. La escala de tiempo se normalizó linealmente para que todos los movimientos se representaran como porcentajes de la duración del ciclo.

Tabla 4.1: Valores de media (desviación típica) del NDI (Neck Disability Index), edad (años), longitud de cuello (cm), masa de cabeza y cuello (kg) para la muestra de datos de cuello, por género y total.

	Mujer	Hombre	Total
NDI	11.53 (5.46)	8.35 (3.96)	10.39 (5.18)
Edad (años)	35.78 (12.19)	33.3 (13.06)	34.89 (12.45)
Longitud cuello (cm)	14.47 (1.76)	16.15 (0.97)	15.07 (1.72)
Masa cabeza (kg)	3.7 (0.4)	4.44 (0.49)	3.97 (0.56)
Masa cuello (kg)	1.4 (0.17)	1.78 (0.15)	1.54 (0.24)

Tabla 4.2: Valores medios (desviación típica) del rango de movimiento (RoM), rango de velocidad (RoV) y rango de aceleración (RoA) de los tres movimientos medidos.

Movimiento	RoM ($^{\circ}$)	RoV ($^{\circ}/s$)	RoA ($^{\circ}/s^2$)
Flexo-extension	102.72 (22.05)	171.08 (69.49)	401.83 (236.77)
Flexión lateral	72.03 (16.63)	121.01 (41.51)	325.42 (149.44)
Rotación axial	126.49 (14.65)	243.72 (97.98)	690.77 (414.77)

Como indicador del estado funcional del paciente se usó la versión en español del Índice de Discapacidad del Cuello (NDI) [120], que se utilizó como variable dependiente. Dicho cuestionario evalúa la capacidad de las personas para realizar tareas funcionales diarias. El NDI consta de diez preguntas categorizadas en dominios como intensidad del dolor, cuidado personal, levantar objetos, lectura, dolores de cabeza, concentración, trabajo, conducción, sueño y ocio. Para cada pregunta, los encuestados seleccionan entre seis posibles respuestas, con puntuaciones que van de 0 (sin discapacidad) a 5 (con discapacidad total). Las puntuaciones de cada sección se suman, de forma que la puntuación general es una escala de 0 a 50, donde 0 representa la ausencia de discapacidad y 50 el nivel más alto de discapacidad. Este cuestionario se completó antes de cada sesión de medición (antes y después del tratamiento) para obtener una medición numérica de la variable dependiente para cada observación de las variables independientes funcionales.

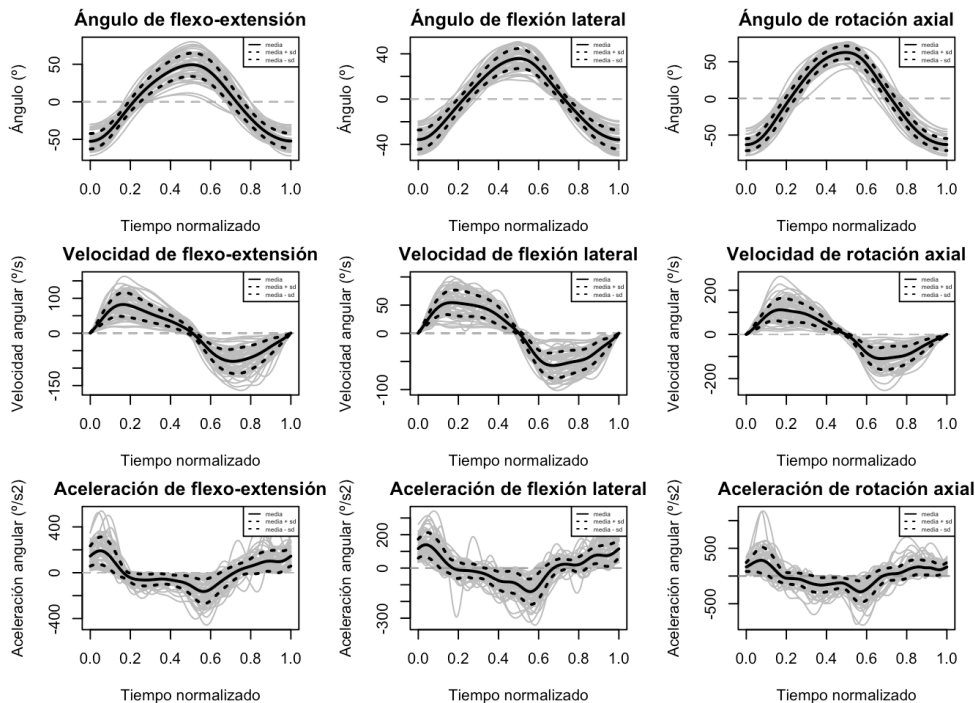


Figura 4.1: Curvas de ángulo (arriba), velocidad angular (medio) y aceleración angular (abajo) para los movimientos de flexo-extensión (izquierda), flexión lateral (medio) y rotación axial (derecha). Se representa en línea sólida negra la media y en discontinuo la media más y menos una desviación típica.

En la tabla 4.1 se muestran los valores de ciertas características de la muestra, por género y para el total. La tabla 4.2 muestra los rangos de movimiento, velocidad y aceleración para los tres movimientos. Finalmente, la Figura 4.1 muestra las curvas de posición, velocidad y aceleración angular para los tres movimientos.

Para representar los datos en una base de funciones se han utilizado 40 B-Splines de orden 4.

4.2 Datos de fuerzas en marcha de pacientes con dolor de rodilla

Estos datos corresponden a un proyecto de investigación llevado a cabo por el Departamento de Medicina Física y Rehabilitación del Hospital La Fe de Valencia, como parte del proyecto OACTIVE H2020 [63]. Uno de los objetivos de este estudio fue verificar la pertinencia y exactitud del diagnóstico de artrosis de rodilla en estadio temprano (EKOA) de acuerdo con los criterios clínicos existentes. Para ello, se llevó a cabo un estudio piloto de diseño longitudinal transversal. Tras el reclutamiento de los pacientes, estos fueron clasificados como sujetos sanos (HS) o pacientes con EKOA mediante criterios diagnósticos, con el fin de mejorar la detección precoz y fiable de la enfermedad. Los criterios utilizados fueron los propuestos por Mahmoudian et al. [102] que incluyen medidas autorreportadas, hallazgos radiológicos según la clasificación de Kellgren y Lawrence (KL), y resultados de la exploración clínica. Además, como objetivo secundario, se planteó evaluar la progresión clínica tanto de los sujetos sanos en riesgo de desarrollar artrosis como de los pacientes con EKOA.

El diseño del estudio siguió las recomendaciones internacionales para el fortalecimiento de la presentación de estudios observacionales en epidemiología (STROBE). Todos los participantes fueron informados adecuadamente sobre los procedimientos del estudio, los cuales se planificaron conforme a las normas éticas de la Declaración de Helsinki, y contaron con la aprobación del Comité de Ética de Investigación con Medicamentos del hospital (CEIm 2017/0147). Cada participante otorgó su consentimiento informado por escrito, tras una explicación clara del objetivo del estudio y de las pruebas específicas a las que sería sometido.

Los criterios de exclusión fueron idénticos para ambos grupos e incluyeron la presencia de patologías autoinmunes, reumáticas o infecciosas, así como alteraciones cognitivas que dificultaran la visualización del material audiovisual, analfabetismo, dificultades de comprensión o comunicación, y un conocimiento insuficiente del idioma español para seguir las instrucciones de medición.

El reclutamiento de participantes se inició en verano de 2018 y el seguimiento se extendió hasta finales de febrero de 2021. En total, se incluyeron 105 participantes, si bien no todos realizaron el estudio biomecánico que, debido a la pandemia de COVID, se limitó a 56 pacientes (31 pacientes sanos y 25 con EKOA).

El estudio biomecánico consistió en pruebas de marcha sobre plataforma de fuerzas para registrar las fuerzas de reacción con el suelo. También se recopilaron datos antropométricos como la altura, el peso y la altura de cadera. Para cuantificar la intensidad del dolor se utilizó la Escala Visual Analógica (EVA). La EVA

consiste en una línea horizontal de 100 mm de longitud, con descriptores verbales en cada extremo que representan los extremos de la sensación dolorosa (desde “ausencia de dolor” hasta “el mayor dolor imaginable”). Los pacientes debían marcar el punto de la línea que mejor reflejara la gravedad de sus síntomas. La escala EVA ha demostrado una buena fiabilidad test-retest ($r = 0,94$, $p < 0,001$) y un cambio mínimo detectable de 15,0 mm [65].

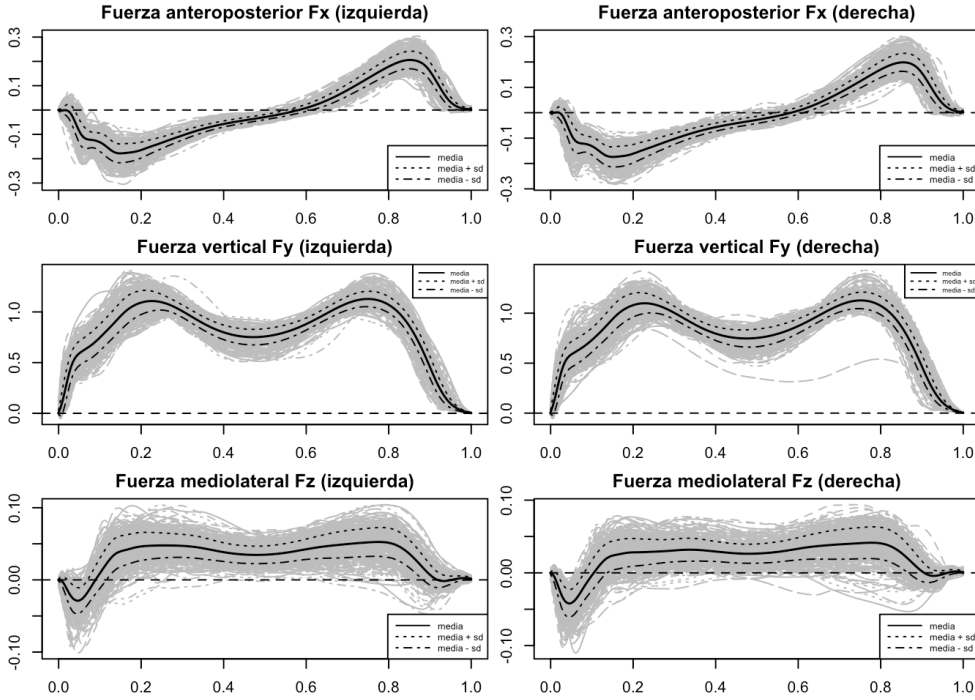


Figura 4.2: Curvas de fuerzas de reacción sobre el suelo normalizadas por el peso y normalizadas linealmente en el tiempo: anteroposterior F_x (arriba), vertical F_y (mitad) y mediolateral F_z (abajo) para la pierna izquierda y derecha, representadas ambas a la izquierda y derecha, respectivamente. En línea negra sólida la media y en discontinua más y menos una desviación estándar.

Las pruebas biomecánicas se llevaron a cabo en el Instituto de Biomecánica de Valencia (IBV) utilizando plataformas de fuerza (Dinascan/IBV [153]) para capturar las fuerzas de reacción sobre el suelo y los parámetros espaciotemporales. Los participantes caminaron cinco pasos a un ritmo cómodo, subiéndose a la plataforma, con seis ensayos realizados para cada pierna. Las fuerzas anteroposterior (F_x), vertical (F_y) y mediolateral (F_z) se registraron a 100 Hz. Estas fuerzas se

normalizaron en el tiempo del 0 al 100% de la fase de apoyo. La Figura 4.2 muestra todas las curvas medidas para cada una de las piernas, junto con la media (línea negra sólida) y más y menos una desviación estándar (en discontinuo). Se ha realizado una normalización lineal del tiempo. Para representar los datos en una base de funciones se han utilizado 40 B-Splines de orden 4.

Los valores medios de ciertas características de la muestra como edad, masa (kg), altura (mm), altura de cadera (mm) y EVA figuran en la Tabla 4.3, divididos por grupo de sanos, patológicos y para la muestra total y a su vez por género.

Tabla 4.3: Valores medios y desviación típica (entre paréntesis) de la edad, masa (kg), altura (mm), altura de cadera (mm) y EVA de la muestra.

Grupo		Edad (años)	Masa (kg)	Altura (mm)	Altura cadera (mm)	VAS
Sanos (N=31)	Mujeres (N=20)	52.5 (5.9)	73.7 (12.6)	1605 (56.1)	828.5 (40.2)	1.1 (1.8)
	Hombres (N=11)	50.1 (4.5)	83.3 (10.8)	1720.5 (48.6)	890.2 (34.7)	0.7 (2.1)
Patológicos (N=25)	Mujeres (N=15)	54.5 (7.1)	69.3 (13.1)	1613.3 (57.2)	839.7 (43)	3.6 (2.5)
	Hombres (N=10)	54.1 (5.1)	78.9 (10.9)	1741 (54.9)	904 (41.4)	3 (2.6)
Total (N=56)	Mujeres (N=35)	53.4 (6.4)	71.8 (12.8)	1608.6 (55.9)	833.3 (41.2)	2.2 (2.4)
	Hombres (N=21)	52 (5.1)	81.2 (10.8)	1730.2 (51.5)	896.8 (37.8)	1.8 (2.6)

Los datos sobre estas medidas biomecánicas no habían sido procesados ni publicados previamente, por lo que los análisis desarrollados en esta tesis doctoral son originales e inéditos.

4.3 Datos cinemáticos sobre carrera

Esta base de datos corresponde a los datos tomados en la tesis doctoral "Estudio del estado de fatiga en corredores de fondo a partir de patrones biomecánicos. Monitorización mediante sistemas integrados en el calzado", realizada por E. Medina Ripoll [106]. Uno de los objetivos de esta tesis era el desarrollo de un sistema basado en sensores inerciales ubicado en el calzado para obtener los patrones cinemáticos de la carrera y detectar los cambios asociados la fatiga en corredores de fondo. Para ello, se desarrolló un estudio experimental destinado a comprobar si era posible identificar los patrones de las articulaciones de la cadera, rodilla y tobillo a partir de las medidas tomadas en el pie.

Se realizó un estudio de laboratorio para obtener las relaciones funcionales entre la orientación del pie y el resto de variables cinemáticas del miembro inferior. La carrera se realizó sobre un cicloergómetro (modelo h/p/cosmos: Pulsar -p), especialmente adecuado para simular condiciones de carrera. Los corredores fueron instrumentados con marcadores anatómicos en las espinas ilíacas, trocánter mayor y cóndilos de la pierna derecha, así como otros juegos de marcadores técnicos

(3 en muslo, en la pierna y el pie) que permitían definir la posición de cada segmento corporal y expresar los movimientos en sistemas de referencia anatómicos estándar.

El movimiento durante la carrera fue medido con un sistema Kinescan-IBV, con una frecuencia de 200 Hz. El protocolo de medida consistió en varias etapas: primero se preparaban los equipos y se calibraban las cámaras. Luego, se recibía al sujeto, se le informaba del estudio, firmaba el consentimiento informado y se verificaban los criterios de inclusión. Si era apto, se le proporcionaba ropa adecuada y se le colocaban los marcadores en puntos anatómicos específicos. Después, se tomaba una medida de referencia con el sujeto en posición estática. Posteriormente, el sujeto se adaptaba al cicloergómetro durante 10 minutos de calentamiento. La toma de datos se realizaba mediante nueve grabaciones de 30 segundos sin previo aviso para no alterar el movimiento natural. Al finalizar, se reducía la velocidad gradualmente, se retiraban los marcadores y se almacenaban los datos.

La muestra estuvo compuesta de 16 corredores voluntarios (10 hombres y 6 mujeres). Todos los participantes cumplían con criterios específicos de inclusión: no haber tenido lesiones en los últimos seis meses, no presentar alteraciones en la marcha, ser corredores habituales (mínimo 5 km semanales), no usar plantillas correctoras y estar familiarizados con cintas andadoras. En la Tabla 4.4 se muestran las características de los sujetos del estudio.

Tabla 4.4: Características de la muestra: edad (años), altura (metros), peso (kg) y talla de calzado (europea) para el grupo de hombres, mujeres y muestra total. Se muestran los valores medios y entre paréntesis la desviación típica.

	Hombres	Mujeres	Total
Número de sujetos	10	6	16
Edad (años)	26.4 (7.5)	24.3 (4.2)	25.4 (6.2)
Altura (m)	1.77 (0.05)	1.61 (0.05)	1.70 (0.10)
Peso (kg)	70.1 (6.4)	54.0 (4.5)	62.9 (9.9)
Talla de calzado (europea)	43.7 (1.3)	37.6 (1.4)	25.4 (6.2)

Para cada instante de tiempo del registro se calcularon las rotaciones de cada segmento respecto de la posición de referencia mediante los vectores de Rodrigues. Se realizó un suavizado de ajuste local basado en regresión polinómica, ya que las curvas presentaban ruido aleatorio y su presencia provoca que las curvas no sean derivables. Cada uno de los pasos de cada registro se segmentó a la duración del ciclo de carrera. Como la duración de cada ciclo es diferente para cada sujeto, todas las curvas tienen una longitud variable. Para realizar un análisis conjunto

de las curvas todas deben tener la misma longitud, por lo que cada curva se ajustó a 100 puntos mediante un algoritmo de interpolación de Spline cúbico.

El número total de registros medidos fue de 144, ya que se obtuvieron 9 para cada uno de los participantes. En cada registro se obtuvieron las curvas de los ángulos de tobillo, rodilla y cadera, y las curvas angulares de la orientación del pie en el plano sagital. Sin embargo, debido a errores en la medida de algunas curvas, solo se tienen 136 curvas para la pierna izquierda y 133 para la derecha. En las Figuras 4.3 y 4.4 se representan las curvas de ángulo obtenidas para la cadera, rodilla, tobillo y pie para la pierna derecha e izquierda, respectivamente. Se han centrado las curvas respecto del eje horizontal.

En la citada tesis, estas curvas se usaron para establecer las relaciones funcionales entre la orientación del pie y los ángulos de tobillo, rodilla y cadera a partir de un modelo de regresión de mínimos cuadrados parciales (PLS).

En esta tesis se han usado los registros temporales para analizar el efecto de la normalización no lineal de la base de tiempos sobre la coordinación del movimiento.

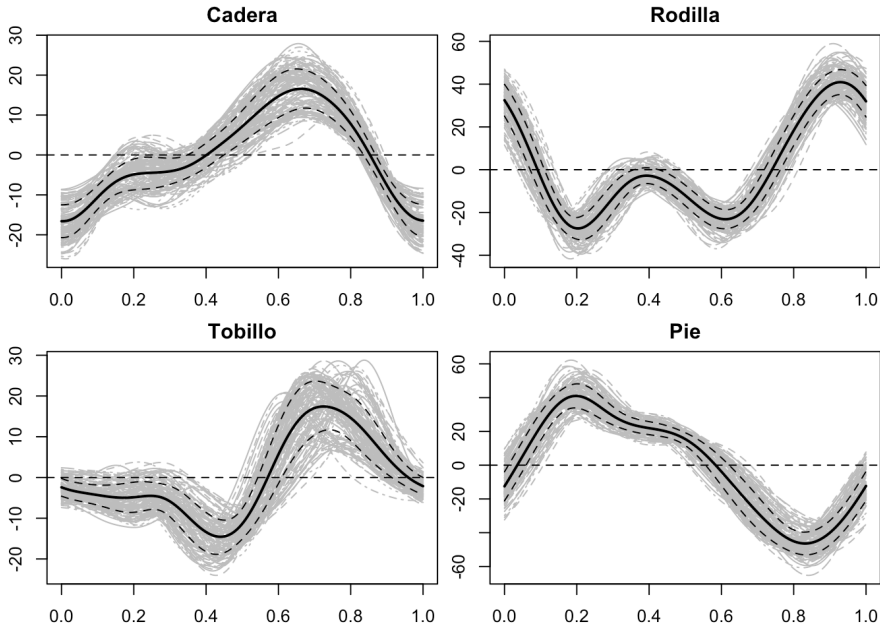


Figura 4.3: Curvas del ángulo de cadera (arriba izquierda), rodilla (arriba derecha), tobillo (abajo izquierda) y pie (abajo derecha) medidas durante la carrera para la pierna **derecha**. Se representa con una línea sólida negra la media y en discontinuo la media más y menos una desviación típica.

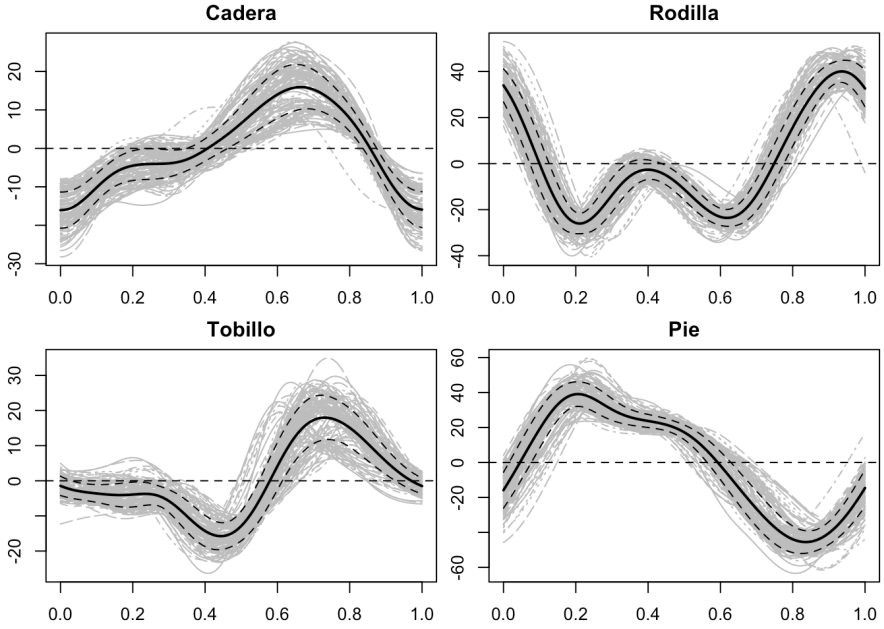


Figura 4.4: Curvas del ángulo de cadera (arriba izquierda), rodilla (arriba derecha), tobillo (abajo izquierda) y pie (abajo derecha) medidas durante la carrera para la pierna **izquierda**. Se representa con una línea sólida negra la media y en discontinuo la media más y menos una desviación típica.

4.4 Base de datos de marcha GaitRec

Esta base de datos contiene las fuerzas de reacción sobre el suelo de 211 controles sanos y 2085 pacientes con diferentes discapacidades musculoesqueléticas. De estos últimos, 450 tienen afectada la cadera, 625 la rodilla, 627 el tobillo y 382 el calcáneo. Se trata de una base de datos pública, publicada y detallada en el artículo de Horsak et al. [66].

El conjunto de datos proviene de una base de datos clínica de marcha gestionada por un centro de rehabilitación en Austria que atiende a pacientes en todo el país. La recopilación de datos se realizó durante la práctica clínica de 2007 a 2018. Se midieron las fuerzas de reacción sobre el suelo de ambas piernas, haciendo que los sujetos caminaran sin ayuda a un ritmo elegido por ellos por una pasarela de aproximadamente 10 metros equipada con dos plataformas de fuerza. Durante cada sesión, los participantes caminaron hasta obtener, al menos, diez registros

válidos. Los sujetos patológicos caminaron a la velocidad que ellos mismos eligieron, mientras que los sanos a tres velocidades distintas (lenta, autoseleccionada y rápida).

Las tres señales de fuerza se digitalizaron usando una frecuencia de muestreo de 2000 Hz. La base de datos incluye metadatos adicionales como edad, sexo, velocidad de la marcha, condiciones de calzado (para los controles sanos), etc. que puede consultarse en más detalle en [66]. Las gráficas de las tres componentes de fuerzas de reacción sobre el suelo para los distintos grupos se corresponden con las Figuras 4.5 y 4.6.

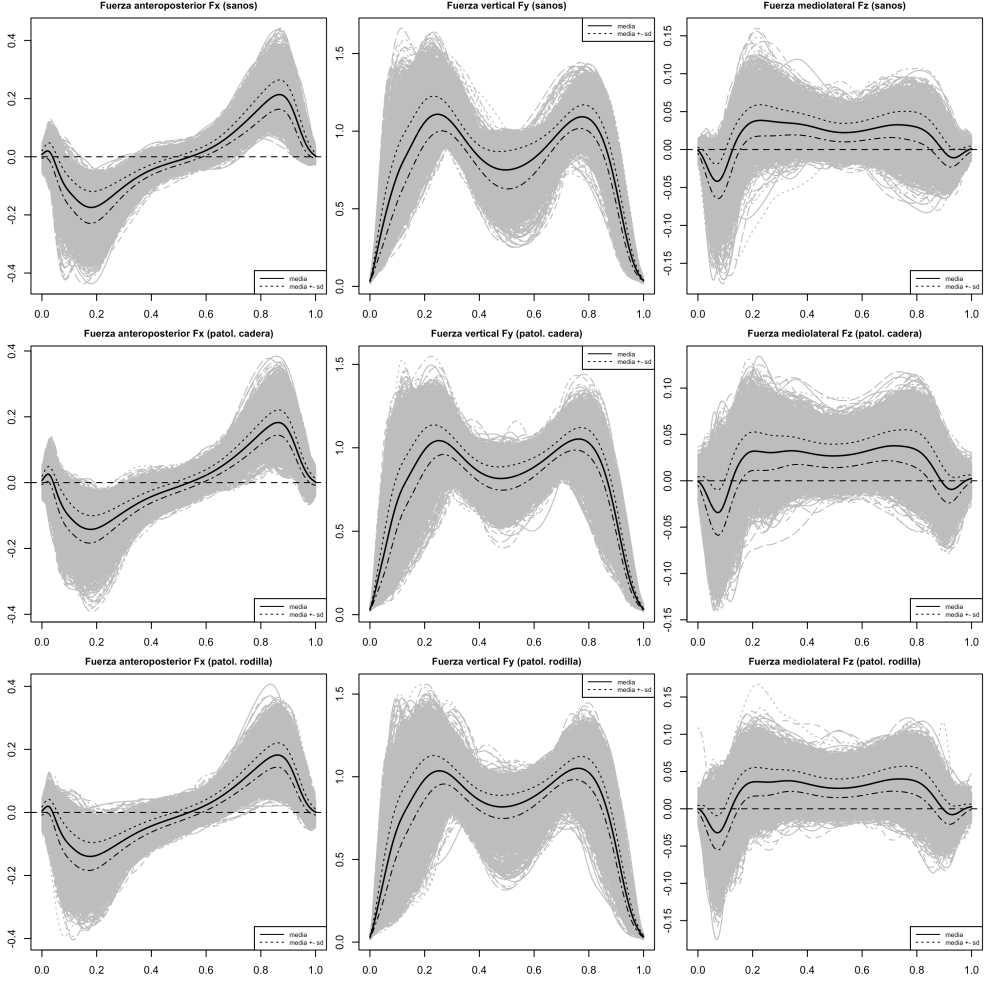


Figura 4.5: Curvas de fuerzas de reacción sobre el suelo de la base de datos de GaitRec normalizadas por el peso y normalizadas linealmente en el tiempo: anteroposterior F_x (izquierda), vertical F_y (mitad) y mediolateral F_z (derecha) para el grupo de sanos (arriba), patológicos de cadera (medio) y de rodilla (abajo). En línea negra sólida la media y en discontinua más y menos una desviación típica.

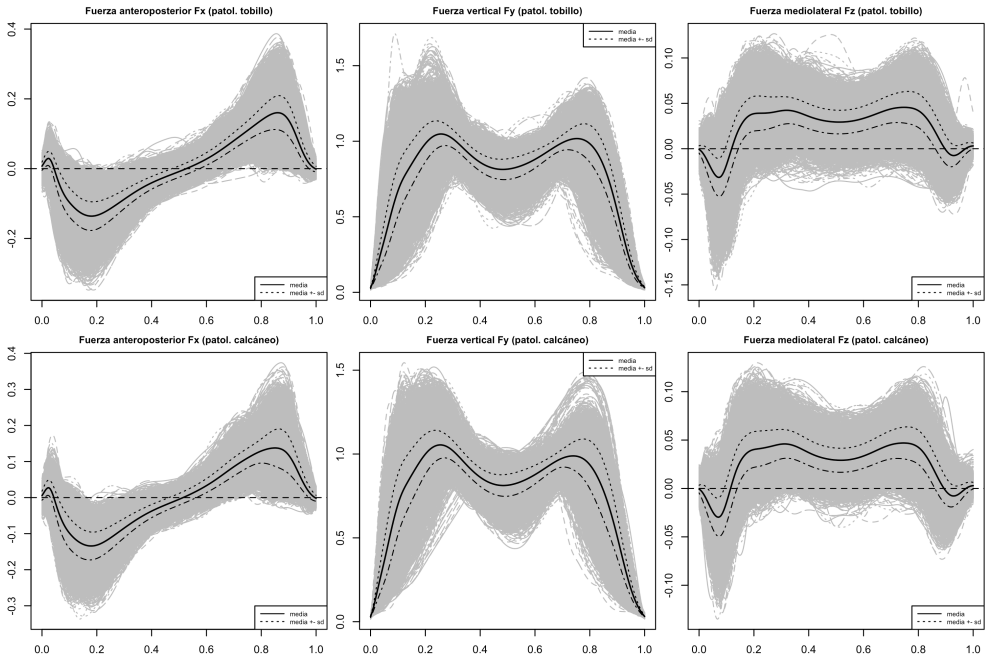


Figura 4.6: Curvas de fuerzas de reacción sobre el suelo de la base de datos de GaitRec normalizadas por el peso y normalizadas linealmente en el tiempo: anteroposterior F_x (izquierda), vertical F_y (mitad) y mediolateral F_z (derecha) para el grupo patológicos de tobillo (arriba) y calcáneo (abajo). En línea negra sólida la media y en discontinua más y menos una desviación típica.

Capítulo 5

Normalización de la escala temporal

En este capítulo se estudia el problema de la normalización de la escala de tiempos en el FDA. La normalización de la escala de tiempos es un paso previo necesario para poder comparar curvas de duraciones diferentes. En este capítulo se revisan las diferentes alternativas de normalización utilizadas, discutiendo sus ventajas e inconvenientes. A partir de las necesidades detectadas se plantea un estudio comparativo con el objetivo de evaluar algunas propiedades relevantes en el análisis de movimientos humanos: efectividad de los diferentes métodos en la alineación de curvas, coherencia en el cálculo de derivadas, coherencia con la coordinación motora y coherencia en la alineación de fuerzas. En base a los los resultados obtenidos se elegirá el método que se usará a lo largo de la tesis y se plantearán nuevas líneas de investigación para trabajos futuros. En este capítulo se trata el objetivo específico [1](#).

5.1 Introducción

5.1.1 Estado del arte

A la hora de aplicar técnicas estadísticas del Análisis de Datos Funcionales se plantea el problema de que las curvas no están medidas en el mismo intervalo de tiempo, ya que no todos los sujetos tardan el mismo tiempo en realizar un movimiento determinado. La normalización del tiempo es un primer paso necesario en el FDA, ya que se tienen que comparar curvas con principios y finales en instantes diferentes. Esto implica tener que elegir una base de tiempos común a todas las curvas para que todas empiecen y terminen en los mismos instantes.

En la inmensa mayoría de trabajos sobre análisis de movimientos humanos, abordados o no con FDA, se usa una normalización lineal, donde se eligen como puntos característicos el comienzo y final del movimiento. Así, se sustituye el tiempo por una nueva variable que es el porcentaje sobre la duración total del gesto. Además, se han desarrollado otros métodos alternativos que intentan mejorar el ajuste lineal, como los basados en *landmarks* o puntos característicos; el registro no lineal o los basados en la fase del movimiento. En lo que sigue comentamos los distintos métodos.

Independientemente del tipo de normalización elegida, cualquier alteración de la escala de tiempos para representar las curvas asociadas a un movimiento produce los siguientes efectos:

- Se modifican los desfases entre curvas, lo que afecta a los cálculos de las medias y varianzas funcionales.
- Se alteran las duraciones de las diferentes fases del movimiento.
- Modificar la base de tiempos altera las relaciones entre las variables de posición y sus derivadas, de manera que las velocidades en la nueva escala no son las derivadas de las funciones respecto a la nueva variable.
- Se modifican los desfases entre curvas de posición asociadas a diferentes grados de libertad, lo que modifica la descripción de la coordinación entre articulaciones.

A continuación se describen estos problemas y, posteriormente, se discute cómo se han abordado desde diferentes enfoques.

Desfase entre curvas y efecto sobre los descriptivos funcionales

Las diferencias entre curvas de una misma variable funcional están asociadas a dos tipos de variabilidad: las diferencias de amplitud y las diferencias de fase. La variación de amplitud afecta al eje vertical, presentando diferencias en los valores que la función toma en instantes específicos, como variaciones en la velocidad máxima, rango angular, etc. Esto puede considerarse como una diferencia de intensidad. En cambio, la variación de fase está relacionada con diferencias en el tiempo de ejecución de las distintas etapas del movimiento [139, Capítulo 7].

La normalización en el tiempo no afecta a esa variación de amplitud, sino que actúa únicamente sobre los desfases entre curvas. En particular, la normalización lineal no tiene por qué eliminar dichos desfases, ya que, aunque se puede hacer que todas las curvas empiecen y terminen en los mismos puntos, es posible que determinadas características relevantes del movimiento (máximos, mínimos, pasos por cero...) correspondan a instantes diferentes después de la normalización.

Estos desfases pueden plantear dos problemas para obtener descriptivos funcionales. El primero afecta al cálculo de las medias funcionales, debido al efecto de cancelación en los máximos y mínimos relativos, lo que produce medias demasiado suavizadas. Este exceso de suavizado puede producir una alteración en la forma de las curvas medias, perdiéndose características relevantes o dando lugar a una media que no se parece a las curvas originales, por lo que no es representativa del conjunto [12]. En segundo lugar, se produce un aumento de la dispersión en las zonas de mayor pendiente y una mala estimación de las varianzas funcionales [122].

Este problema ha sido el origen del desarrollo de alternativas a la normalización lineal del tiempo que se describen más adelante.

Alteración de las duraciones de las etapas de un movimiento

Es una consecuencia del problema anterior. En general, las etapas del movimiento se definen a partir de hitos que se identifican por determinadas características de las curvas del movimiento. La posición temporal de estas características, como máximos o mínimos relativos, pasos por cero, puntos de inflexión, etc., dependen del tipo de normalización de la escala de tiempos y, por tanto, la duración de estas etapas también.

A pesar de la idea generalizada de que la normalización lineal reduce la variabilidad en la duración de las fases o etapas de un movimiento, la realidad es que esto no tiene por qué ser así. Es decir, el hecho de que se hagan coincidir el principio

y final de un movimiento no tiene por qué llevar asociada una sincronización de cada una de sus partes. En [123] se analiza cómo la normalización lineal afecta a la variabilidad en la duración de las fases de un movimiento, tanto absolutas como relativas a la duración total. En el artículo se demuestra cómo la normalización lineal sólo es adecuada en aquellos movimientos en los que la duración de las etapas tengan una correlación positiva y elevada con la duración total del movimiento. En el caso de bajas correlaciones entre la duración total y la de sus partes, se incrementan las varianzas y la normalización lineal no funciona correctamente.

En los movimientos más o menos armónicos [13] las duraciones de las fases son proporcionales a la duración total y la normalización lineal puede ser adecuada, aspecto confirmado en [23]. En otros tipos de movimientos estas relaciones son claramente no lineales y es preferible utilizar otro tipo de normalización del tiempo [122].

Alteración de las derivadas. Coherencia dinámica

En el análisis de movimientos humanos es habitual considerar, aparte de las variables de posición, otras que dependen de derivadas de funciones como velocidades, aceleraciones, fuerzas y momentos, potencias, etc.

Estas funciones son derivadas de la función que nos da la posición respecto del tiempo. El uso de una normalización del tiempo altera la escala de tiempos, de manera que en la nueva escala las derivadas de las posiciones no coinciden con las velocidades representadas, y por tanto, tampoco las aceleraciones con las derivadas de la velocidad. Esto es especialmente relevante cuando se aplican métodos de registro no lineal, donde el tiempo se ajusta localmente y se está alterando la forma de las curvas de velocidad, aceleración y fuerzas de manera incompatible con la dinámica real del movimiento.

En el caso de la normalización lineal del 0 al 100%, el problema no es relevante, siempre y cuando no se tome esa escala como un tiempo, sino como un simple escalado para comparar curvas.

Coherencia en la descripción de la coordinación motora

La normalización de la base de tiempos afecta a los desfases entre curvas, pero no solo entre sujetos, sino que también puede afectar de manera distinta a las diferentes variables articulares implicadas en un movimiento. Es decir, la descripción entre desfases relativos de curvas de diferentes ángulos articulares se ve también afectada por el tipo de normalización de la escala de tiempos. Esto puede llevar a interpretaciones erróneas de la coordinación entre articulaciones si no se considera adecuadamente.

Este es un tema poco estudiado en la literatura, donde se prefiere el uso de diagramas ángulo-ángulo, que no requieren normalización temporal. Estos diagramas permiten visualizar la relación entre dos variables articulares sin depender de una escala de tiempo común. Se han encontrado algunos artículos que lo utilicen en análisis de la marcha [135] o en análisis de movimientos del hombro [116].

El problema es especialmente relevante en los sistemas de registro no lineal, donde las funciones de transformación del tiempo pueden ser diferentes para cada grado de libertad, lo que da lugar a diferentes interpretaciones según la variable elegida como referencia para el ajuste.

En la normalización lineal se utiliza un único criterio (inicio o final del movimiento), pero incluso en este método se elige una variable como referencia para definir el movimiento. Si se cambia la variable, las duraciones pueden ser ligeramente distintas y por tanto, también los desfases entre curvas.

De todos los problemas señalados anteriormente, los más estudiados en la literatura son los dos primeros: desfase entre curvas y alteración de las duraciones de las fases de un movimiento, dando lugar a otras alternativas a la normalización lineal, revisados en [103].

El método más simple y el primero en plantearse es el uso de la alineación de curvas basado en puntos característicos o *landmarks*, estudiado en detalle por Kneipp y Gasser [76, 51]. Este método se basa en identificar una serie de puntos característicos de la curva, para alinearlos a través de unas funciones de transformación del tiempo. Como ejemplo de puntos característicos se suelen utilizar los máximos o mínimos, por lo que resulta más cómodo identificarlos a través de las funciones derivadas. Se pueden encontrar varios trabajos del registro basado en landmarks aplicados a biomecánica, así como del desarrollo teórico del método [151, 35, 32, 113, 67, 15, 177].

Se evalúa la capacidad de alineamiento de estos métodos [151, 35]. A partir de esta evaluación se comprueba que presenta ventajas sobre la normalización lineal

ya que controla mejor los desfases y mejora la estimación de medias y varianzas funcionales [151, 189] y elimina el problema de las diferencias en las duraciones de las fases. Sin embargo, la alineación de curvas basada en *landmarks* tiene una serie de inconvenientes.

- En primer lugar, la dificultad de extraer esos puntos característicos, elegidos en algunos casos arbitrariamente por ser fácilmente identificables, como lo son los extremos de una función o los pasos por cero. Si se eligen otros puntos característicos se obtiene un registro diferente [151].
- La alineación depende de la variable utilizada para definir los puntos característicos, presentando problemas de coherencia en la descripción de la coordinación motora [113].
- Surgen problemas prácticos a la hora de identificar automáticamente estos puntos característicos en el caso de personas con patrones alterados, como sujetos patológicos, o en variables con mucha variabilidad, como por ejemplo las fuerzas mediolaterales medidas en marcha [151].
- El ajuste depende del número de puntos característicos elegidos. Si se eligen pocos puntos, puede que se estén ignorando las variaciones en otras regiones de la curva [103], habiendo un sub-registro. En cambio, si se eligen muchos *landmarks*, o estos no son adecuados, se produce un sobre-registro [113].

Aunque se han sugerido posibles mejoras a estos problemas [151], realmente es un método complejo y poco efectivo, en general [103]. De hecho, el ajuste por puntos característicos no es más que una versión de los métodos de registro no lineal que se describen a continuación, ya que se divide la función en intervalos definidos por esos puntos característicos y se ajusta el tiempo en dichos intervalos.

Los métodos de registro no lineal tratan de obtener una función de transformación del tiempo $h(t)$ minimizando una cierta cantidad previamente definida relacionada con los desfases entre curvas. Se han definido diferentes alternativas de registro, que se diferencian por el tipo de métrica utilizada para evaluar el alineamiento entre curvas. Dichos métodos se pueden clasificar en dos grupos: los que usan la distancia $\mathbb{L}^2$ y el que usa la métrica de Fisher-Rao [165].

Existen varios métodos de registro del tiempo que emplean la distancia $\mathbb{L}^2$, descritos en [103]. Nos centramos en el propuesto en [139], que obtiene la función de transformación del tiempo minimizando el segundo valor propio de la matriz de covarianzas entre cada curva que se quiere registrar y una curva patrón que habitualmente es la media. Puesto que inicialmente las curvas están sin alinear,

esa media puede sufrir el efecto de cancelación, por lo que es necesario seguir un proceso Procrustes iterativo. Se han encontrado varios artículos que lo utilicen en el ámbito de la Biomecánica [94, 122, 189, 124, 150, 23].

Se quiere prestar especial atención a algunos de estos trabajos por el interés de sus resultados y conclusiones. Un estudio [23] lo aplica a datos cinemáticos cíclicos, concretamente a movimientos de mandíbula durante la masticación. Comparan este método de registro no lineal con la normalización lineal, a través de la comparación de curvas medias, valores RMS y evaluación de las funciones de transformación del tiempo. Concluyen que, aunque el registro disminuyó ligeramente los valores RMS, éste no afectó significativamente las curvas medias, obteniendo funciones de transformación del tiempo prácticamente lineales. Esto sugiere la importancia de evaluar los efectos del registro y que este puede no ser necesario en ciertos movimientos cíclicos. En cambio, el estudio realizado en [122] sobre el movimiento de sentarse-levantarse demostró que el proceso de registro redujo eficazmente la variabilidad intra-sujeto, permitiendo extraer patrones medios más consistentes sin alterar la variabilidad de amplitud. Las funciones de transformación del tiempo obtenidas, generalmente eran no lineales, lo que pone de manifiesto que había diferencias de fase en las distintas curvas.

La diferencia obtenida en los dos estudios anteriores [23, 122] puede explicarse a partir del criterio establecido en [123]. En los movimientos cíclicos y muy armónicos, la relación entre la duración de las fases y la total es casi lineal, lo que hace innecesario un registro no lineal. En cambio, en el movimiento de levantarse los cambios en la duración total afectan de manera muy distinta a las fases del movimiento y el registro lineal ofrece resultados muy limitados.

El otro método de registro continuo del tiempo es el basado en la métrica de Fisher-Rao. Se propone otra métrica conocida como de Fisher-Rao, definiendo una función SRVF, denominada función raíz cuadrada de la velocidad, que cumple una serie de propiedades que facilitan la aplicación de este método. De esta forma, la distancia de Fisher-Rao entre dos funciones se puede calcular como la distancia L^2 entre sus SRVFs. Este enfoque proporciona una base matemática sólida para separar la variación de fase y amplitud en datos funcionales, superando algunas limitaciones de los métodos tradicionales, sin embargo, es relativamente reciente y poco utilizado en biomecánica hasta la fecha. Este método de registro se encuentra descrito en [160, 165, 166, 103]. Solo se han encontrado dos trabajos [86, 129] que empleen este método de registro a datos biomecánicos.

Las ventajas e inconvenientes del registro no lineal respecto a los métodos anteriores se resumen en las siguientes:

- Son mucho más efectivos que el método lineal o el basado en *landmarks* en la obtención de curvas medias y disminución de la varianza [122, 189]. Su efectividad es mejor en movimientos no periódicos o periódicos pero no muy armónicos. En los movimientos armónicos, el resultado es similar al ajuste lineal [23].
- Sin embargo, no ofrecen las mismas funciones de transformación del tiempo si se registran las curvas de posición o de velocidad, lo que indica que no se mantiene la coherencia dinámica [94, 62].
- No se han encontrado estudios que evalúen las diferencias entre las funciones de transformación del tiempo obtenidas al usar distintas variables asociadas al mismo movimiento, por lo que se no se ha evaluado hasta la fecha su coherencia en la descripción de la coordinación motora
- Es necesario una curva patrón para alinear el resto de curvas. En el método de Ramsay es habitual utilizar la curva media, mientras que en el de Fisher-Rao utilizan la Karcher mean. Puesto que en el método de Ramsay se utiliza la curva media, antes de alinear las curvas esta media presenta el problema de cancelación. Esto hace que sean necesarias varias iteraciones, por lo que este método es computacionalmente más costoso.
- En ocasiones las funciones de transformación del tiempo presentan el efecto “pellizco”, que se trata de cambios bruscos en estas funciones [103], que deben ser suaves, ya que desde el punto de vista físico no se puede producir un cambio brusco en el tiempo en un determinado movimiento.
- Hay pocos estudios que comparen estos métodos de registro en datos biomecánicos con el objetivo de conocer cuál puede ser más adecuado [35, 94, 177, 189] según el tipo de datos, en especial que involucren el método basado en la métrica de Fisher-Rao.

Finalmente, existen otros métodos basados en la fase relativa del movimiento [12]. A diferencia de los anteriores, lo que se hace no es modificar la base de tiempos, sino sustituir el tiempo por otra variable que represente el avance en la ejecución de la maniobra. Esta variable sería la fase, definida a partir del diagrama velocidad-posición de la variable, en términos análogos a la fase en un diagrama de fases en un movimiento armónico. De esta manera, los ciclos del movimiento se normalizarían en fases de 0 a 360°. En [85] hay una revisión sobre diferentes formas de calcular las fases del movimiento y sus aplicaciones al estudio de la coordinación motora. En [94] se usa la transformada de Hilbert y se compara este método con la normalización lineal y el registro no lineal de Ramsay. Este

método ofrece resultados mejores que la normalización lineal y similares a los del registro, con la ventaja de mantener mejor la coherencia dinámica, ya que en la fase intervienen la variable de posición y su derivada. No se valora la coherencia entre variables. Sin embargo, presenta el inconveniente de que solo se puede aplicar bien en movimiento periódicos regulares, y no tiene sentido en el caso de medidas de fuerzas. Aun teniendo potencial para la descripción de coordinación motora, a partir de las fases relativas entre grados de libertad [62], no es una herramienta de uso general por lo que no será utilizada en el resto de esta tesis.

5.1.2 Necesidades detectadas. Objetivos.

A la vista de la revisión realizada, cabe extraer algunas conclusiones relacionadas con lagunas de conocimientos que darán lugar a los objetivos de este capítulo:

- Aunque la normalización lineal es el procedimiento estándar para alinear curvas como paso previo al FDA, su uso puede afectar a los desfases en las curvas y ofrecer una descripción inadecuada de las medias y varianzas funcionales. Estos aspectos pueden resolverse con métodos de registro no lineal.
- Sin embargo, no se dispone de suficiente información comparativa entre los métodos de Ramsay y Fisher-Rao en aplicaciones a la Biomecánica.
- Tampoco se ha comparado la coherencia dinámica entre ambos métodos. No se han analizado las diferencias entre las funciones warping $h(t)$ al usar posiciones o velocidades y cómo se podría realizar un ajuste que proporcione un conjunto único de funciones $h(t)$ que registren a la vez posiciones y velocidades.
- No se ha cuantificado el efecto del registro sobre la coordinación entre variables asociadas a diferentes grados de libertad.
- Finalmente, tampoco se ha estudiado el registro sobre distintas componentes de una magnitud física como por ejemplo la fuerza, descompuesta en los tres ejes de coordenadas.

Este capítulo tiene por objetivo la comparación de los métodos de registro no lineal entre sí con la normalización lineal, con la finalidad de responder a las siguientes preguntas:

- ¿Qué método proporciona una mejor estimación de las curvas medias y una mayor reducción del desfase entre curvas?

- ¿Qué método ofrece mejores resultados desde el punto de vista de coherencia dinámica?
- ¿Es posible obtener un conjunto de funciones $h(t)$ que permitan registrar a la vez una variable y sus derivadas?
- ¿Cómo afecta el registro a la coherencia en la coordinación entre variables?
¿Existe una función de transformación del tiempo $h(t)$ común a todos los grados de libertad de un movimiento?
- ¿Cómo afecta el registro a la coherencia mecánica? ¿Existe una única función $h(t)$ que permita alinear las tres componentes de una fuerza?

Para ello, se aplicará el método de normalización lineal y los dos métodos de registro no lineal a tres bases de datos de movimientos, una de cuello, otra de marcha y por último una de carrera, de acuerdo con la metodología que se explica en el apartado siguiente.

5.2 Métodos de normalización del tiempo

En esta sección se describen brevemente los métodos de normalización del tiempo que se van a utilizar en esta tesis: la normalización lineal y los dos métodos de registro continuo del tiempo. No se utilizará el método basado en *landmarks* por las limitaciones comentadas en la revisión realizada. Tampoco el basado en la transformada de Hilbert [94], ya que funciona muy bien en movimientos periódicos más o menos armónicos, pero no está comprobada su viabilidad en otras aplicaciones, como por ejemplo en fuerzas medidas en marcha, etc.

A continuación, se describen las bases matemáticas de los tres métodos a comparar.

5.2.1 Normalización lineal

Consideremos un conjunto de N curvas $x_i(t)$ que representa un cierto movimiento medido para cada uno de los N sujetos. Puesto que estas curvas dependen del tiempo, cada curva i se puede expresar como un conjunto de valores $x_{ij}(t)$, en los tiempos t_{ij} medidos en el intervalo de duración del movimiento $[0, T_i]$: $x_{ij} = x_i(t_{ij})$ con $i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, k$, siendo k el número de datos del sujeto i .

La normalización lineal del tiempo se realiza escalando el tiempo del 0 al 100%, expresado como tanto por uno, del tiempo de ejecución del movimiento, dividiendo para ello cada instante entre el tiempo total T_i que el sujeto i ha empleado en realizarlo. Es decir, el tiempo normalizado se obtiene como $t_{n,ij} = \frac{t_{ij}}{T_i}$, $t_{n,ij} \in [0, 1]$.

5.2.2 Registro continuo: método de Ramsay

En los métodos de registro no lineales el objetivo es reducir la variabilidad de fase a través de unas funciones de transformación del tiempo $h_i(t)$, también denominadas funciones *warping* que transforman el tiempo t de la curva i . Estas funciones de transformación del tiempo cumplen una serie de características:

- Son estrictamente crecientes, ya que el tiempo no puede retroceder. Es decir, si $s < t$ implica que $h_i(s) < h_i(t)$.
- Si se trabaja en el intervalo de tiempo $[0, T]$, las funciones $h(t)$ deben satisfacer que $h(0) = 0$ y $h(T) = T$. Como se trabaja ya con curvas normalizadas linealmente, el intervalo es $[0, 1]$, por lo que se debe cumplir que $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$.
- Estas funciones deben tener una segunda derivada integrable.

De esta forma, cada función registrada $x_i^*(t)$ se obtiene a través de la composición de funciones como:

$$x_i^*(t) = x_i \circ h_i(t) = x_i[h_i(t)] \quad (5.1)$$

El objetivo es encontrar esa función de transformación del tiempo que permite alinear la curva de cada sujeto. Según la estrategia seguida para hallar las funciones de transformación del tiempo se tiene un método de registro no lineal.

La idea detrás del método de Ramsay, más detalladamente explicado en [122, 139, 140], está en que una curva ya registrada $x_i^*(t)$ debe diferir solo en términos de amplitud con una curva objetivo $x_0(t)$, que es la media funcional de todas las curvas. Es decir,

$$x_0(t) = \bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t). \quad (5.2)$$

Se emplea una idea parecida a la del análisis de componentes principales (PCA), encontrando la función $h_i(t)$ que minimiza el segundo autovalor de la matriz de productos cruzados:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \int x_0^2(t)dt & \int x_0(t)x_i[h_i(t)]dt \\ \int x_0(t)x_i[h_i(t)]dt & \int x_i^2(t)dt \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Esta matriz es simétrica, por lo que tiene dos autovalores reales. El más grande (μ_1) corresponde a la varianza asociada a las diferencias de amplitud, mientras que el segundo autovalor (μ_2) a las variaciones de fase. Por tanto, la función $h_i(t)$ será aquella que minimice el segundo autovalor μ_2 de la matriz Σ . En la práctica, la función que se minimiza es la del logaritmo del autovalor más pequeño $F(h_i) = \log(\mu_2)$.

Las funciones $h(t)$ deben tener una derivada segunda integrable y además ser estrictamente crecientes, por lo que cada función se puede describir por la ecuación diferencial homogénea:

$$D^2h = wDh \quad (5.4)$$

donde D y D^2 son la primera y segunda derivada, respectivamente, y $w(t)$ es una función de pesos. Puesto que además las funciones *warping* deben cumplir la restricción de $h(0) = 0$ y $h(T) = T$, la ecuación diferencial anterior tiene la solución general:

$$h(t) = C_1 \int_0^T \exp\left(\int_0^u w(v)dv\right) du \quad (5.5)$$

donde $C_1 = T / \int_0^T \exp\left(\int_0^u w(v)dv\right) du$. La función w se expresa como una combinación lineal de una base de funciones.

El método de registro se realiza comparando cada función $x_i(t)$ con la media funcional $x_0(t) = \bar{x}(t)$. Puesto que inicialmente las funciones no están alineadas, esta media funcional está afectada por el efecto de cancelación de la media. Para evitar este problema se utiliza un método Procrustes iterativo, donde el proceso de registro de las curvas se repite varias veces, de forma que en cada iteración se calcula la curva $x_0(t)$, que sirve de patrón para la siguiente iteración. Este proceso se repite hasta que el método converge.

Así se obtienen las funciones $h_i(t)$ que contienen información temporal de cada sujeto, de forma que si la función de transformación del tiempo se encuentra por debajo de la función identidad (tiempo transformado menor que tiempo) se tiene un sujeto que se mueve más rápido que la media.

5.2.3 Registro continuo: método basado en la métrica de Fisher-Rao

Un enfoque común para cuantificar la distancia entre dos curvas x_1 y x_2 es mediante la norma $\mathbb{L}^2$. Una forma diferente de estudiar la variación de amplitud y fase es a través de las clases de equivalencia. Este concepto no es nuevo en estadística, pues es ampliamente usado en análisis de formas. Así, las clases de equivalencia se definen agrupando curvas que pueden ser transformadas entre sí mediante transformaciones temporales a través de las funciones de transformación del tiempo. Este enfoque es innovador porque proporciona una forma natural de definir y separar la variación de amplitud y fase, permitiendo desarrollar métricas que comparen estas clases de equivalencia en lugar de funciones individuales, lo que es más robusto.

La principal idea de este método de registro es elegir una métrica que permita comparar clases de equivalencia, y no solo funciones independientes. Esto se consigue definiendo una métrica invariante a deformaciones idénticas de sus dos argumentos:

$$d(x_1, x_2) = d(x_1 \circ h, x_2 \circ h) \quad (5.6)$$

La distancia de Fisher-Rao d_{FR} satisface la ecuación anterior. Un aspecto clave en este método de registro es la definición de la función raíz cuadrada de la velocidad (SRVF):

$$SRVF(x) = \text{sgn}(Dx) \sqrt{|Dx|} \quad (5.7)$$

donde $\text{sgn}(x) = 1$ si $x \geq 0$ y -1 en caso contrario; y Dx es la primera derivada de x . La razón por la que se define esta función SRVF es porque la distancia de Fisher-Rao entre dos funciones cualesquiera viene dada por la distancia $\mathbb{L}^2$ entre sus SRVF:

$$d_{FR}(x_1, x_2) = \|SRVF(x_1) - SRVF(x_2)\|. \quad (5.8)$$

Esta función SRVF está bien definida y cumple una serie de propiedades, entre las que destacamos que si transformamos una función x en el tiempo a través de h , el SRVF de $x \circ h$ viene dado por $SRVF(x \circ h) = (q \circ h) \sqrt{Dh}$ donde por simplicidad se ha designado $q = SRVF(x)$ [160, 166]. Con esta expresión, para dos curvas x_1 y x_2 :

$$\|q_1 - q_2\| = \|(q_1, h) - (q_2, h)\| \quad (5.9)$$

donde q_1, q_2 son las SRVFs de x_1 y x_2 , respectivamente. Esto lo denominan la propiedad de isometría y sugiere un nuevo término de coste, de forma que el problema del registro viene dado por:

$$\inf_h \|SRVF(x_1) - SRVF(x_2 \circ h)\| = \inf_h \|SRVF(x_1 \circ h) - SRVF(x_2)\| \quad (5.10)$$

La ecuación (5.10) sugiere que podemos registrar los SRVFs de dos funciones cualquiera y después devolver la transformación para obtener las funciones registradas.

Por último, al igual que en el método de Ramsay se utilizaba como curva patrón la media funcional, en este método de registro hay que definir una curva patrón similar y consistente a la distancia que se está empleando. Se puede calcular el promedio de las clases de equivalencia $[x_1], \dots, [x_n]$ utilizando el concepto de Karcher mean o Fréchet mean [160]. El patrón se considera entonces como el centro de la clase de equivalencia de la Karcher mean, elegida de forma que el promedio de las fases de $x_1, \dots, x_n$ con respecto a ese centro, sea la identidad h_{id} . Se puede encontrar más detalles sobre los desarrollos matemáticos de este método en el trabajo de [160].

5.3 Aplicaciones

En este apartado se plantean una serie de aplicaciones de los dos métodos de registro continuo:

- Comparación de métodos de registro: se quieren comparar los distintos métodos de registro del tiempo comentados, con el objetivo de determinar las diferencias entre ambos y analizar la conveniencia de utilizar uno u otro en base a un mejor alineamiento de las curvas.
- Coherencia dinámica: se estudia si se mantiene una coherencia dinámica en el proceso de registro del tiempo. Es decir, si es posible que la función de transformación del tiempo que registra una curva, como la posición, también registre sus derivadas, como la velocidad o aceleración.
- Coordinación motora: se analiza si las funciones de transformación del tiempo obtenidas para un grado de libertad son las mismas que las obtenidas para el resto de grados de libertad del mismo movimiento. Es decir, si las $h(t)$ que registran por ejemplo las curvas de la cadera en la marcha, permiten también alinear las curvas de rodilla o tobillo.
- Coherencia mecánica: por último, se quiere comprobar si existe una coherencia mecánica en el registro de la descomposición en los tres ejes de una magnitud física vectorial. Así, se realiza el registro de las tres componentes de fuerza de reacción sobre el suelo F_x , F_y y F_z y se comparan las funciones de transformación del tiempo.

5.3.1 Comparación de métodos de registro

El primer objetivo de este capítulo es comparar los métodos de registro continuos entre sí y con la normalización lineal. Para ello, partiendo de un conjunto de curvas normalizadas linealmente en el tiempo se van a aplicar los dos métodos de registro no lineal: el de Ramsay y el de Fisher-Rao.

Material y métodos

Se realizará el registro de las curvas de posición del movimiento de flexo-extensión del cuello (Apartado 4.1, [156]). Se han tomado 100 curvas elegidas aleatoriamente de toda la base de datos. Se eligen 5 bases de B-Splines para expresar funcionalmente las funciones de transformación del tiempo.

Para comparar los métodos de registro hay que definir una serie de cantidades que permitan evaluarlos y compararlos entre sí:

- **Desfase θ entre curvas:** cuanto menor sea el desfase entre curvas mayor capacidad de alinear tiene el método. Este desfase θ , entre cada curva y la de referencia, se calcula como [94]:

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \quad (5.11)$$

donde x e y son dos vectores correspondientes a los valores que toma la función en cada uno de los puntos, $\langle x, y \rangle$ es el producto escalar de ambos vectores y $\|x\|$ es la norma o módulo del vector, obtenido como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Para comparar los métodos de registro, uno de los vectores corresponde a la media de las curvas registradas, mientras que el otro vector es cada una de las curvas de la muestra, ambas evaluadas en una partición del intervalo $[0, 1]$. Se obtiene así un desfase para cada una de las funciones, a partir de los cuales podemos calcular su valor medio, desviación típica y rango, en grados.

- **Amplitud de las curvas promedio:** para evaluar el efecto de cancelación asociado a los desfases entre curvas, se usará el valor cuadrático medio de las medias, como indicador del efecto del registro sobre las amplitudes de los máximos y mínimos relativos. El RMS de la curva promedio $\bar{x}$ es:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i^2} \quad (5.12)$$

donde se ha discretizado la función promedio $\bar{x}$ en k valores.

De esta forma mayores RMS indican una mejor capacidad de alineación de curvas del método, al mitigar el efecto de cancelación de la media. Esta cantidad ha sido empleada previamente por varios investigadores con el mismo propósito [23, 35, 94, 151].

- **Suavidad de las funciones de transformación del tiempo $h(t)$:** se utiliza la primera derivada de la función de transformación del tiempo, $Dh(t)$, para cuantificar la suavidad, ya que cambios bruscos en la función $h(t)$ se pueden apreciar muy evidentemente en su primera derivada. Así, se calcula la longitud de curva de esta derivada $Dh(t)$ como:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + [D^2h(t)]^2} dt \quad (5.13)$$

donde $D^2h(t)$ es la segunda derivada de la función $h(t)$. Menores valores de esa longitud de curva L indican que la función $h(t)$ es más suave.

- **Coherencia dinámica:** el método de registro empleado debe garantizar cierta coherencia dinámica, es decir, las funciones de transformación del tiempo que alinean las funciones de posición deben alinear igualmente las de velocidad angular. Por tanto, se aplican las funciones de transformación del tiempo obtenidas en el registro del ángulo $h_\alpha(t)$ a las curvas de velocidad angular $\omega(t)$ para analizar si estas también las alinean. Así, a partir de las curvas de velocidad normalizadas linealmente, se evalúan en los tiempos transformados obtenidos del registro de las curvas de posición, por lo que la velocidad angular registrada se obtiene como $\omega^*(t) = \omega \circ h_\alpha(t) = \omega[h_\alpha(t)]$.

Resultados

La Figura 5.1 muestra las curvas de ángulo (arriba) registradas con los tres métodos mencionados, junto con la media (línea sólida negra) más y menos una desviación (línea negra discontinua). En la parte de abajo se muestran las funciones de velocidad registradas a partir de las funciones de transformación del tiempo obtenidas en el proceso de registro del ángulo.

Las funciones $h(t)$ se muestran en la Figura 5.2 tanto para el método de Ramsay (izquierda) como para el método basado en la métrica de Fisher-Rao (derecha). En el eje horizontal se muestra el tiempo normalizado, mientras que en el eje vertical el tiempo transformado. Para poder comparar mejor las funciones de

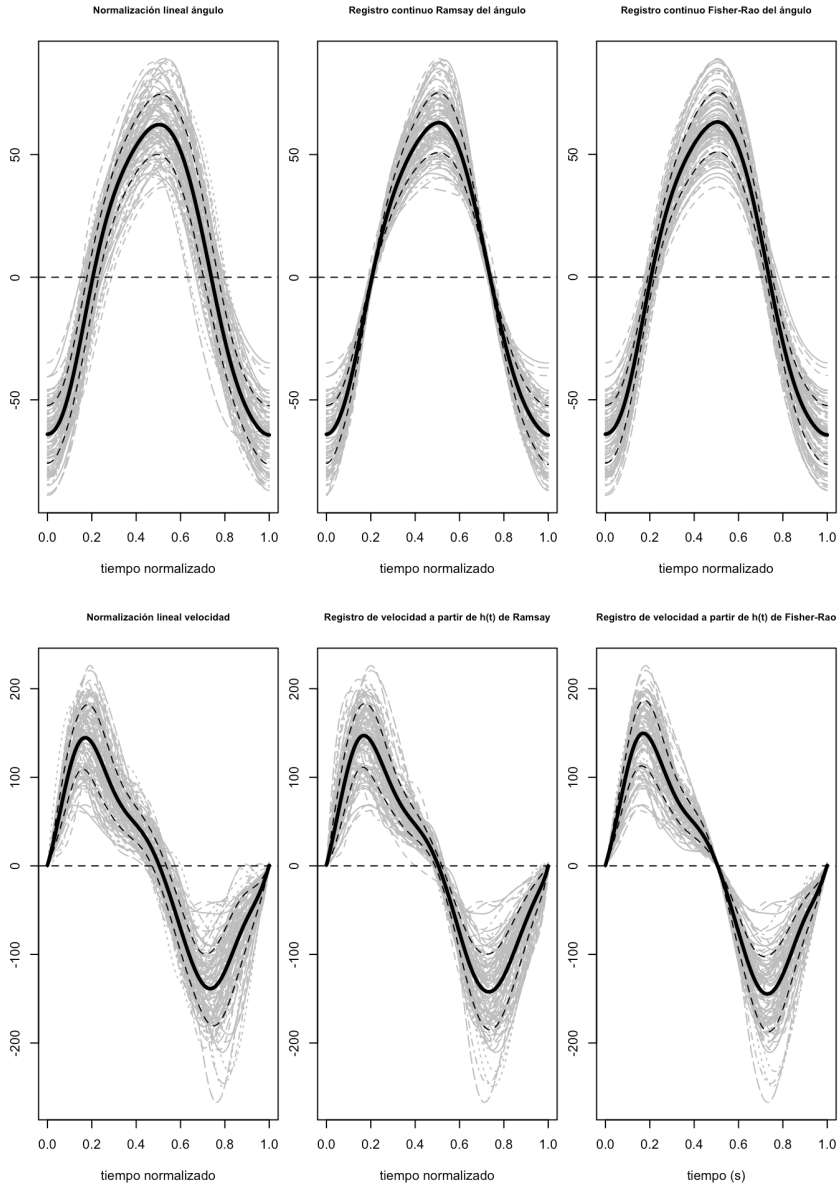


Figura 5.1: Arriba: curvas de ángulo normalizadas linealmente en el tiempo (izquierda), con el método de registro continuo de Ramsay (medio) y con el método basado en la métrica de Fisher-Rao (derecha). La línea sólida negra marca la media funcional de las curvas y la discontinua la media más y menos una desviación típica. Abajo aparecen las gráficas de velocidad normalizadas linealmente en el tiempo (izquierda) y registradas con las funciones de transformación del tiempo obtenidas para el ángulo, con el método de Ramsay (medio) y el de Fisher-Rao (derecha).

transformación del tiempo obtenidas por ambos métodos, se han elegido cuatro repeticiones aleatorias y se han representado de forma conjunta las funciones $h(t)$ obtenidas en cada método, como se muestra en la Figura 5.3, en negro para el método de Ramsay y en rojo para el de Fisher-Rao.

Tabla 5.1: Valores RMS de la función media del ángulo y velocidad obtenida con los tres métodos de registro del tiempo: normalización lineal, método de Ramsay y método de Fisher-Rao.

Método	RMS del ángulo	RMS de la velocidad
Normalización lineal	45.65	89.50
Ramsay	45.50	92.46
Fisher-Rao	46.20	92.49

Tabla 5.2: Valor medio y desviación típica (entre paréntesis) en grados del desfase entre la curva media y cada curva registrada obtenida con cada uno de los tres métodos de registro del tiempo: normalización lineal, método de Ramsay y método de Fisher-Rao.

Método	Desfase (°) del ángulo	Desfase (°) de velocidad
Normalización lineal	10.95 (5.91)	11.29 (5.21)
Ramsay	4.22 (3.08)	8.37 (3.43)
Fisher-Rao	6.42 (5.03)	6.69 (2.5)

En la Tabla 5.1 se muestran los valores RMS de las medias funcionales de las curvas tras la normalización. El método de Fisher-Rao presenta los valores más altos, tanto para el ángulo (46.20) como para la velocidad (92.49).

Se calcula también el desfase, en grados, entre la curva media y cada curva registrada, obteniendo los valores medios, junto con la desviación típica, que se muestran en la Tabla 5.2. El mayor desfase entre curvas se da para la normalización lineal, tanto para el ángulo (10,95°) como para la velocidad (11,29°). El método de Ramsay proporciona el menor valor medio de desfase en el ángulo (4,22°), mientras que es el método basado en la métrica de Fisher-Rao el que da menor valor medio en la velocidad (6,69°). Para evaluar si esta reducción del desfase en los métodos de registro continuo respecto del método de normalización lineal son significativos se ha realizado un ANOVA. En todos los casos la diferencia entre las medias de los desfases es significativa (p-valor<0.001).

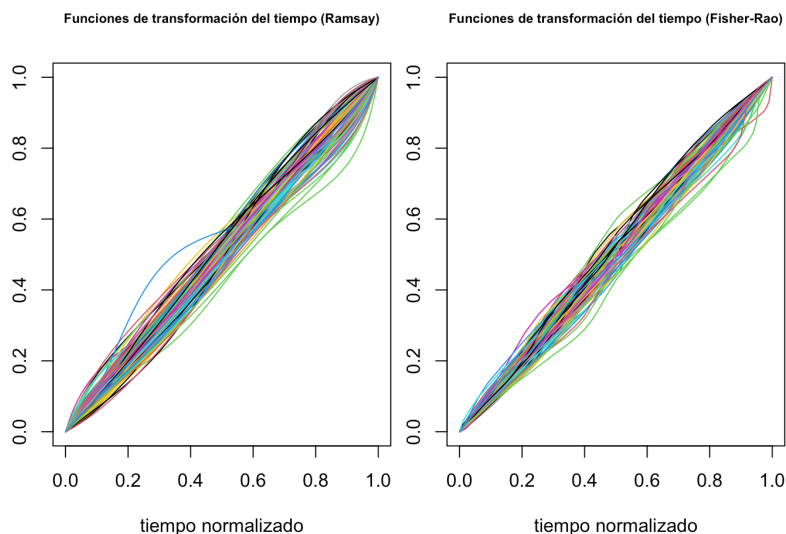


Figura 5.2: Funciones de transformación del tiempo obtenidas con el método de Ramsay (izquierda) y el de Fisher-Rao (derecha), obtenidas al registrar el ángulo.

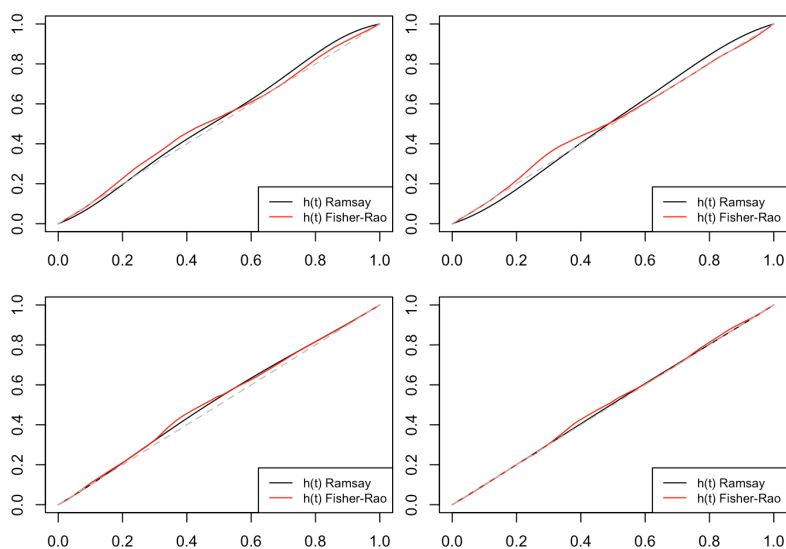


Figura 5.3: Comparación de las funciones $h(t)$ obtenidas con el método de Ramsay (negro) y el de Fisher-Rao (rojo) para cuatro repeticiones elegidas aleatoriamente.

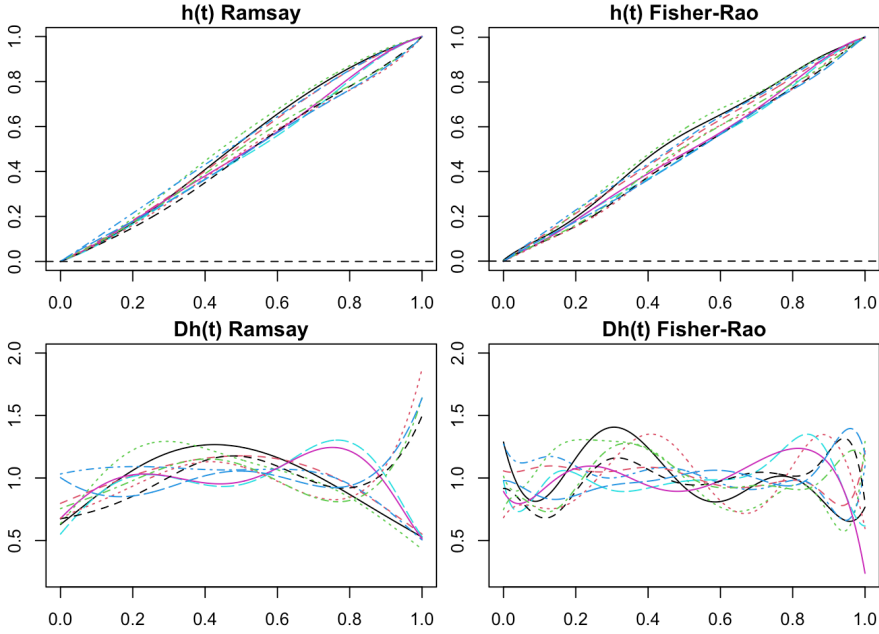


Figura 5.4: Funciones $h(t)$ de las 10 primeras repeticiones (arriba) junto con sus derivadas (abajo) para el método de Ramsay (izquierda) y el de Fisher-Rao (derecha).

Para evaluar la suavidad de las funciones de transformación del tiempo se calcula su primera derivada y se calcula la longitud de la curva. Así, el valor medio para el método de Ramsay es 2,03 con una desviación típica de 1,03 y de 2,23 para la media y 0,73 de desviación típica para el de Fisher-Rao. Para visualizar mejor la suavidad de estas $h(t)$ y sus derivadas, se representan en la Figura 5.4 estas funciones para las 10 primeras repeticiones, de ambos métodos, junto con sus derivadas (abajo).

Discusión

A partir de los resultados anteriores, se comparan entre sí los de registro continuo y con el de la normalización lineal.

En la Figura 5.1 se muestra cómo los métodos de registro no lineal permiten alinear las curvas angulares mejor que la normalización lineal, reduciendo la variabilidad. El método de Ramsay alinea mejor las curvas en los pasos por cero, mientras que el método de Fisher-Rao es más eficiente en los extremos de la cur-

va. Estas diferencias se aprecian mejor al analizar las curvas de velocidad (Figura 5.1 abajo), donde de nuevo los métodos de registro no lineales alinean mejor que la normalización lineal. En este caso, el método de Fisher-Rao proporciona un mejor alineamiento de las funciones velocidad que el método de Ramsay. Estos resultados son similares a los obtenidos en los trabajos de [94, 23] en lo referente a la comparación entre el método de Ramsay y la normalización lineal. Sin embargo, no se ha encontrado ningún trabajo que utilice el método de Fisher-Rao en el análisis de movimientos humanos.

Es importante destacar que el paso por el cero en las curvas registradas por el método de Fisher-Rao coincide en todas las curvas en el mismo punto, de ahí que el máximo del ángulo esté perfectamente alineado. En cambio, en las curvas de velocidad obtenidas con el método de Ramsay, en ese paso por cero hay mayor variabilidad entre las curvas. Además, los extremos de la velocidad en el método de Fisher-Rao están mejor alineados que con el método de Ramsay. Así, el método de Fisher-Rao parece proporcionar mejor alineamiento de las curvas de velocidad, mientras que el de Ramsay funciona muy bien con la curvas angulares.

Para analizar la amplitud de las curvas promedio se ha calculado el valor cuadrático medio (RMS) de las funciones medias después de aplicar los tres métodos. Mayores valores de RMS indican mayor capacidad del método para alinear las curvas, ya que se reduce el efecto de cancelación de la media. Para el ángulo, el método de Fisher-Rao es el que obtiene mayor valor de RMS (46,20), aunque la diferencia en el RMS entre los tres métodos es bastante reducida.

Aunque el método de Ramsay alinee mejor las curvas angulares que el método de normalización lineal, el valor RMS es ligeramente inferior. Esto puede deberse a que, aunque el valor máximo de la media en el ángulo es más alto con el método de Ramsay, la pendiente con la que se alcanza ese máximo es mayor, haciendo que la curva media sea más “apuntada” o estrecha. Como resultado, en los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los valores de la media obtenida con el método de Ramsay son ligeramente inferiores a los de la media de la normalización lineal. Esto indica que se ha mitigado el efecto de cancelación de la media. En cuanto a la velocidad, los dos métodos no lineales proporcionan mejores valores RMS que la normalización lineal.

Respecto al desfase entre curvas, los dos métodos de registro continuo mejoran el desfase entre las curvas respecto a la normalización lineal. En el caso de las curvas angulares, la reducción del desfase es mayor para el método de Ramsay (desfase de $4,22^\circ$ vs. $6,42^\circ$), mientras que para la velocidad es el de Fisher-Rao el que reduce más este desfase (desfase de $6,69^\circ$ vs. $8,37^\circ$). Es coherente que los resultados en la velocidad angular sean ligeramente mejores en el método de Fisher-Rao, puesto

que utilizan la función SRVF donde está implicada la primera derivada de las funciones que se quieren alinear, en este caso, la velocidad angular.

En cuanto a las funciones de transformación del tiempo, en la Figura 5.2 se observa que las funciones obtenidas con el método de Ramsay son ligeramente más suaves que las de Fisher-Rao. Estas últimas presentan algunos cambios bruscos en el tiempo en especial al final del movimiento, donde se exige a la función que cumpla que $h(1) = 1$ lo que parece originar un cambio brusco en la pendiente. Los cambios bruscos de $h(t)$ implican contracciones o dilataciones temporales muy acusadas, lo que no tiene sentido desde un punto de vista físico, y son comportamientos indeseables en el proceso de registro.

Para contrastar los dos métodos no lineales se comparan las funciones de transformación de algunos sujetos elegidos al azar (Figura 5.3). En algunos sujetos las diferencias son bastante notables, concretamente el mostrado en la esquina superior derecha, donde en la primera mitad del movimiento los dos métodos transforman el tiempo de forma opuesta, adelantando el método de Fisher-Rao y retrasando el método de Ramsay, la curva del ángulo respecto de la original.

Estas curvas de transformación del tiempo son más suaves para el método de Ramsay que para el de Fisher-Rao, con una longitud media de la primera derivada de 2,03 frente a 2,23, respectivamente. Por lo que las $h(t)$ del método de Fisher-Rao son menos suaves, en especial en los extremos. No obstante, como se puede observar en la Figura 5.4, ambos métodos presentan valores altos en su derivada en los extremos, lo que indica cambios bruscos en el tiempo.

Las funciones de transformación del tiempo tienen como objetivo alinear las funciones, adelantando o retrasando ciertos eventos en los distintos intervalos de tiempo. Pero se puede apreciar que las funciones registradas con el método de Fisher-Rao tienen una forma distinta respecto de las curvas originales antes del registro. Es decir, parece que aparte de alinear las curvas está aplicando un leve suavizado, eliminando en algunos casos algunos extremos relativos. Este es un inconveniente del método, ya que el objetivo del registro es únicamente alinear las funciones reduciendo esa variabilidad de fase, sin alterar la forma ni las características principales de la curva.

Finalmente hay que señalar que, en este caso, el registro se ha realizado a partir de las curvas de posición. Por lo tanto, el alineamiento de las curvas de velocidad nos puede dar información sobre la coherencia dinámica del registro. Así, los dos métodos de registro continuo son mejores que el lineal, proporcionando una mejor coherencia dinámica. El método de Fisher-Rao es el que alinea mejor las curvas de

velocidad. Esto tiene sentido, como se comentaba anteriormente, ya que utiliza la primera derivada de las funciones que se quieren alinear para realizar el registro.

En definitiva, se puede concluir que los métodos de registro continuo, como el método de Ramsay o el basado en la métrica de Fisher-Rao, permiten un buen alineamiento de curvas biomecánicas, mejorando los resultados de la normalización lineal.

En cuanto a cuál de los dos métodos es más adecuado para reducir esa variabilidad de fase, el de Ramsay reduce más el desfase entre ángulos, mientras que ocurre al revés para la velocidad. El método de Fisher-Rao proporciona una media registrada con mayor amplitud, lo que indicaría un mejor alineamiento del método. Si bien este método da buenos resultados en especial para la derivada, por la propia definición del método, presenta unas funciones de transformación del tiempo menos suaves que las del método de Ramsay. Esto no tiene mucho sentido físico, ya que el movimiento original es continuo y suave, sin cambios bruscos en una determinada fase del mismo. Además, altera ligeramente las formas de las curvas registradas, aplicando un leve suavizado, alterando por tanto características de las funciones que pueden ser importantes para un estudio posterior.

En conclusión, en conjunto, el método de Ramsay proporciona buenos resultados, presentando más ventajas, en especial al ofrecer un buen comportamiento tanto en las funciones originales como en sus derivadas, sin alterar la forma de las curvas ni presentar saltos bruscos en el tiempo.

5.3.2 Coherencia dinámica

En este apartado se estudia si las funciones warping obtenidas en el registro de las funciones de posición son capaces de alinear también las curvas correspondientes a sus derivadas. Para ello se plantea, en primer lugar, cómo deberían transformarse las velocidades para que sus transformadas sean las derivadas de las posiciones después del registro. Posteriormente, se comprueba si al aplicar esta transformación se produce un correcto alineado de las velocidades y se analiza el comportamiento de esta transformación para los dos métodos de registro no lineal descritos anteriormente.

Material y métodos

Para explicar el procedimiento seguido para derivar funciones registradas, se ilustra primero con un caso particular. Dadas dos curvas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ cuyas respectivas derivadas son $v_1(t)$ y $v_2(t)$, el objetivo es alinearlas, transformando el tiempo de $x_2(t)$ para hacerla coincidir con $x_1(t)$, aplicando una función $h(t)$ de forma que $x_2^*(t) = x_2 \circ h(t) = x_2[h(t)]$.

Tomemos como ejemplo las funciones $x_1(t) = \text{sen}(2\pi t)$ y $x_2(t) = \text{sen}(2\pi t^2)$, de forma que $h = t^2$. Las velocidades se obtienen derivando $v_1(t) = 2\pi \cos(2\pi t)$ y $v_2(t) = 4\pi t \cos(2\pi t^2)$.

Sin embargo, si partimos de la función $x_2^*(h) = \text{sen}(2\pi h)$ con $h = t^2$ y la derivamos obtenemos $v_2^*(h) = 2\pi \cos(2\pi h)$ que vemos que no coincide con la expresión $v_2(t) = 4\pi t \cos(2\pi t^2) = 4\pi \sqrt{h} \cos(2\pi h)$.

Las velocidades difieren en el término $\sqrt{h}$, por lo que las curvas tienen distinta amplitud. Esto significa que, al efectuar un registro que modifica la escala de tiempos, la derivada de la función registrada no coincide con el registro de la derivada. Para mantener la coherencia dinámica es necesario corregir las derivadas, teniendo en cuenta que el tiempo nuevo no es t , sino $h(t)$. Por ello, la velocidad registrada debería calcularse como:

$$v_2 = \frac{dx_2^*(h)}{dh} = v_1(t) \quad (5.14)$$

De donde

$$\frac{dx_2^*(h)}{dt} \frac{dt}{dh} = v_1 \quad (5.15)$$

Por lo que

$$v_2^*(h) = v_1(t) \frac{dh}{dt} = v_1(t) Dh(t) \quad (5.16)$$

O bien:

$$v_2^*(h) = \frac{v_2(t)}{Dh(t)} = v_1(t) \quad (5.17)$$

Aparte de esta consideración, hay que tener en cuenta también que las curvas de posición están normalizadas linealmente en el tiempo, es decir, cada curva está dividida entre la duración total T_i del movimiento:

$$x_n(t) = \frac{x_i(t)}{T_i} \quad (5.18)$$

De forma que su derivada será:

$$v_n(t) = Dx_n(t) = \frac{Dx_i(t)}{T_i} \quad (5.19)$$

Las curvas de velocidad obtenidas a partir de la derivada de la posición registrada se obtendrán teniendo en cuenta los dos aspectos mencionados, según las ecuaciones (5.17) y (5.19):

$$v^*(t) = Dx^*(t) \frac{1}{Dh(t)} \frac{1}{T_i} = \frac{Dx^*(t)}{Dh(t)T_i}. \quad (5.20)$$

La transformación anterior permitiría registrar a la vez las curvas de posición y sus derivadas. Para comprobar esta coordinación dinámica se han registrado con los dos métodos no lineales las 100 curvas de posición del movimiento de flexo-extensión del cuello (4.1) y posteriormente se han derivado según la ecuación 5.20, obteniendo unas curvas de velocidad angular registradas. Estas se han comparado con las curvas de velocidad obtenidas al realizar la composición de las curvas de velocidad normalizadas linealmente con la función de transformación del tiempo obtenida en el registro del ángulo, es decir, $\omega^*(t) = \omega \circ h_\alpha(t) = \omega[h_\alpha(t)]$.

Se han aplicado ambos métodos de registro no lineales y se han comparado las curvas de velocidad obtenidas a partir de la derivación y a partir de la composición con la $h_\alpha(t)$ obtenida del ángulo.

Resultados

La Figura 5.5 muestra la función media de la velocidad obtenida cuando las velocidades se han registrado a partir de las $h(t)$ del registro del ángulo (en negro) y se han corregido, además, con la regla de la cadena. En rojo se muestra la media obtenida derivando las funciones del ángulo registradas (rojo), tanto para el método de Ramsay como para el de Fisher-Rao. Se ha representado esta última en discontinuo para una mejor visualización. La coincidencia es perfecta en el método de Ramsay, mientras que en el de Fisher-Rao hay ligeras diferencias

entre ambas medias. Esto se aprecia mejor en la Figura 5.6, donde se representan estas mismas curvas pero para dos repeticiones específicas de la muestra, elegidas al azar. En el método de Ramsay ambas curvas son idénticas, mientras que en el de Fisher-Rao, aunque son similares, se aprecian ciertas variaciones en algunas zonas de la curva, especialmente en el mínimo de velocidad.

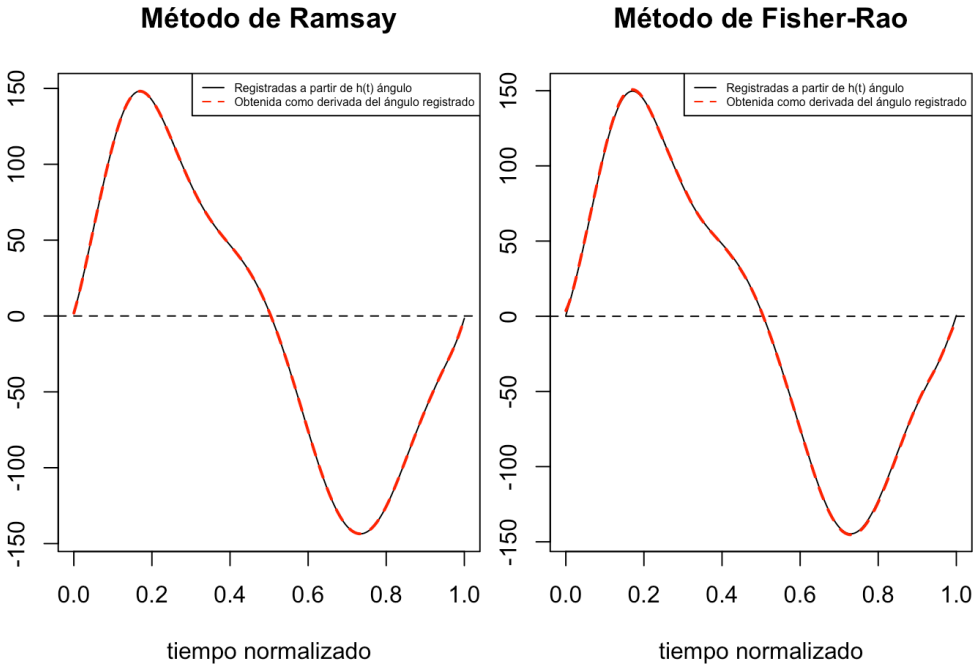


Figura 5.5: En negro, la curva media obtenida alineando las funciones de velocidad evaluando en cada punto los valores de tiempo obtenidos con la función de transformación del tiempo $h(t)$ obtenida en el proceso de registro de las curvas de ángulo. En rojo, la curva media obtenida derivando las funciones de ángulo registradas. A la izquierda para el método de Ramsay y a la derecha para el método de Fisher-Rao.

En la Figura 5.7 se muestran las diferencias de las velocidades obtenidas entre las curvas registradas de dos sujetos elegidos al azar. En rojo se muestra el registro lineal de la velocidad. En negro, las velocidades registradas a partir de la función warping $h(t)$ del registro de las correspondientes funciones angulares. Finalmente, en azul se muestran las curvas registradas directamente a partir de la velocidad. Los registros continuos se han realizado con el método de Ramsay, puesto que para el de Fisher-Rao los resultados son similares.

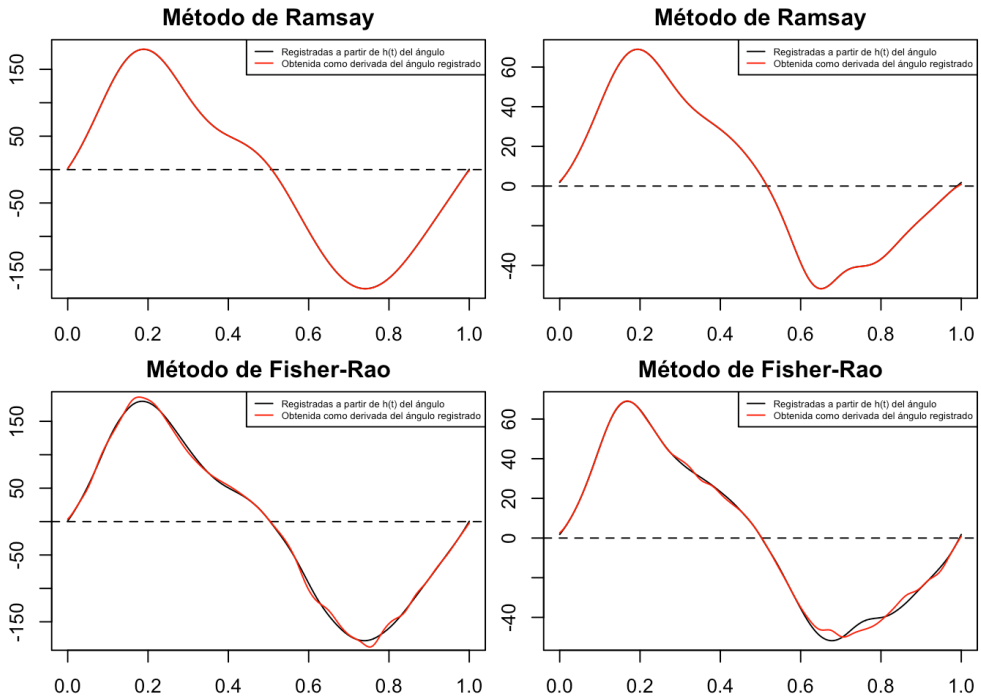


Figura 5.6: En negro la curva de velocidad obtenida aplicando las funciones $h(t)$ obtenidas del registro del ángulo y en rojo la velocidad obtenida derivando el ángulo registrado. Arriba para el método de Ramsay y abajo para el de Fisher-Rao. Las gráficas de la izquierda corresponden a una repetición y las de la derecha a otra distinta, elegidas aleatoriamente.

Aunque para la gráfica de la izquierda ambas curvas registradas son similares en algunas zonas de la curva, estas no coinciden, como puede verse más claramente para el sujeto representado en la derecha. En la parte inferior de la Figura 5.7 se han representado las funciones de transformación del tiempo obtenidas con el registro del ángulo (negro) y de la velocidad (azul), donde puede verse cómo estas funciones son distintas en ambos métodos, llegando incluso a registrar de forma contraria las curvas de velocidad en el sujeto representado en la derecha. La función registrada a partir de las funciones del ángulo se retrasa en la primera mitad del movimiento, mientras que en la segunda mitad se adelanta, al contrario de lo que sucede con la curva registrada a partir de las propias curvas de la velocidad.

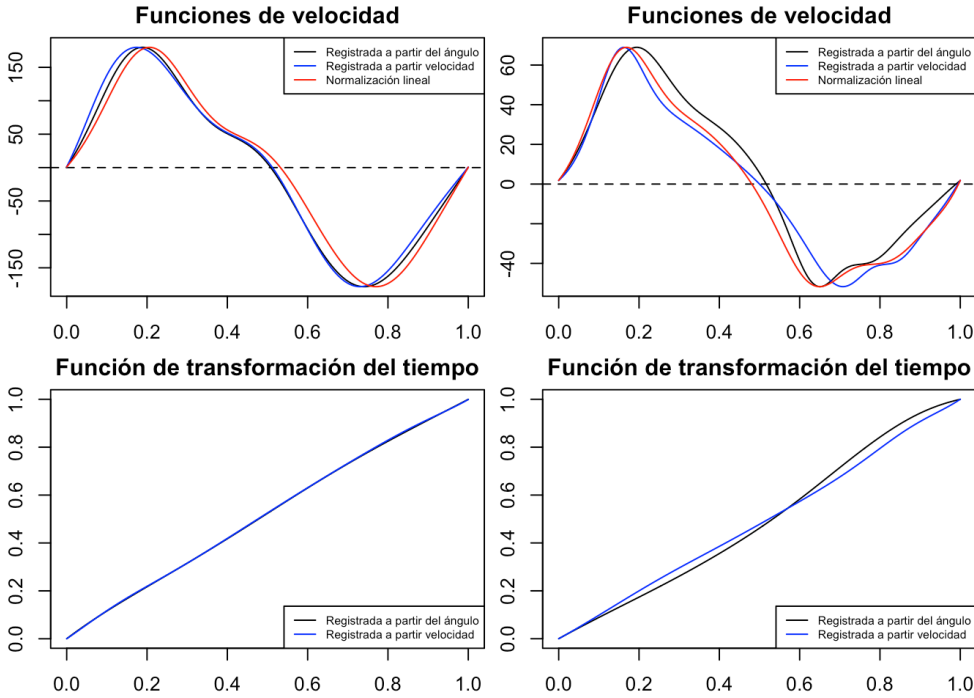


Figura 5.7: Funciones de velocidad obtenidas a partir de las curvas registradas del ángulo (negro), registradas directamente a partir de todas las curvas de velocidad (azul) y las curvas aplicando simplemente una normalización lineal (rojo). Abajo las funciones de transformación del tiempo correspondientes, en negro la obtenida para el ángulo y en azul la de la velocidad. A la izquierda, para una repetición y a la derecha para otra.

Discusión

Los resultados anteriores muestran que el registro de funciones derivadas no debería hacerse sin tener en cuenta que el cambio de la escala de tiempos afecta a las derivadas, y ese cambio es diferente para los métodos de Ramsay y de Fisher-Rao, como se aprecia en las Figuras 5.5 y 5.6.

Por el contrario, cuando se aplica la regla de la cadena al obtener las velocidades registradas, la función warping obtenida del registro angular alinea también las funciones de velocidad. Esto significa que el método de Ramsay mantiene la coherencia dinámica (la misma función warping alinea a la vez posiciones y velocidades), siempre que el cálculo de las derivadas tenga en cuenta los cambios

asociados al reescalado no lineal del tiempo. El método de Fisher-Rao da resultados ligeramente peores, posiblemente porque en éste aparece la velocidad y es, además, más sensible al error.

De estos resultados se pueden deducir dos conclusiones importantes. La primera es que basta con registrar la función de posición para conseguir a la vez el alineado de ángulos y de velocidades corregidas a partir de la regla de la cadena.

La segunda es que registrar las velocidades como si fuesen curvas primitivas no tiene demasiado sentido físico, ya que modificar la escala de tiempos implica cambios en las derivadas que deben incorporarse en el propio proceso de registro, algo que habitualmente no se hace. Esa es la razón por la cual los registros de posiciones y velocidades dan lugar a diferentes funciones warping. Esto supone un problema desde el punto de vista físico, ya que parece lógico que se utilice la misma escala de tiempos en un mismo movimiento para las posiciones y todas sus derivadas.

Si las derivadas se calculan adecuadamente, el método de Ramsay proporciona una función warping por observación, que ya contiene la información sobre el patrón temporal. Por ello, parece recomendable hacer el registro sobre las curvas de posición que suelen ser, por otra parte, más suaves y menos sensibles al ruido. El registro de curvas de velocidad o aceleración puede ser más problemático por dos motivos. El primero porque las funciones warping obtenidas no mantendrán la coherencia dinámica, salvo que se vayan corrigiendo las curvas en el proceso de registro, lo que es innecesario si se registran las posiciones. Por otra parte, a medida que se calculan derivadas numéricas de un orden mayor pueden aparecer problemas de ruido o cambios de morfología que hagan más ineficiente el proceso de registro. Nuestros resultados muestran que, con el método de Ramsay, la información sobre el patrón temporal ya se puede extraer de la curva de posición y no tiene ninguna ventaja realizar el registro usando las derivadas.

No podemos comparar estos resultados con trabajos previos ya que no hemos encontrado ningún artículo sobre análisis de movimientos humanos que se plantee la coherencia dinámica en el proceso de registro del tiempo.

5.3.3 Coordinación motora

En este apartado se estudia si existe una única función de transformación del tiempo que permita alinear distintos grados de libertad de un mismo movimiento. Por ejemplo, si en un análisis de la marcha, la función $h(t)$ obtenida para las curvas de flexión de cadera alinea las curvas del resto de articulaciones como rodilla o tobillo.

Material y métodos

Para evaluar la coordinación motora entre las variables asociadas a diferentes grados de libertad se van a emplear las curvas de ángulo flexión de cadera, rodilla, tobillo y pie medidas en carrera (Apartado 4.3, [106]). Se analizan dos aspectos:

- En primer lugar, se van a registrar por separado las curvas de ángulo de flexión de cada articulación y se comparan las funciones de transformación del tiempo obtenidas para estudiar si estas son las mismas o parecidas.
- Por otro lado, de las funciones $h(t)$ obtenidas para una determinada articulación se aplica al resto para ver si reduce la variación de fase. Esto se va a realizar para dos casos: se aplican las funciones $h(t)$ obtenidas del registro de cadera al resto de articulaciones. Se repite este procedimiento pero para las funciones de transformación del tiempo obtenidas del registro de rodilla.

Como las curvas presentan variabilidad en amplitud y no están centradas, para optimizar el proceso de registro y evitar el efecto pellizco de las funciones $h(t)$, siguiendo las recomendaciones de Ramsay [139], se han normalizado en amplitud todas las curvas y se han centrado.

Se ha usado la base de B-Splines para las funciones de transformación del tiempo, tomando 8 funciones de orden 5.

Resultados

Las Figuras 5.8 y 5.9 muestran las curvas normalizadas linealmente en el tiempo (izquierda) y las registradas por el método de Ramsay (derecha), para la cadera, rodilla, tobillo y pie. En rojo se marca la media funcional.

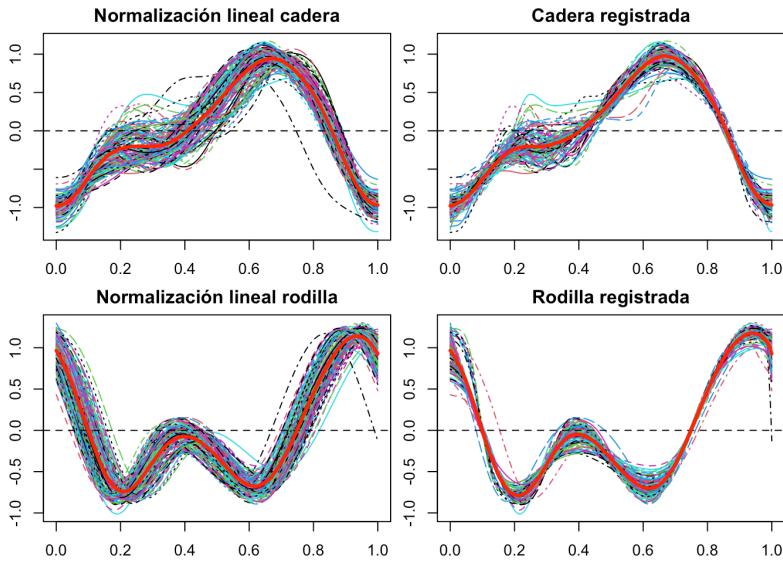


Figura 5.8: Curvas de cadera y rodilla normalizadas linealmente y registradas con el método de Ramsay.

En la Figura 5.10 se muestran las funciones de transformación del tiempo obtenidas para estas articulaciones. Se aprecian bastantes diferencias en estas curvas, en especial en las de la cadera. Para poder visualizarlo mejor, se han representado de forma conjunta las funciones de transformación del tiempo obtenidas del registro de cada articulación (Figura 5.11) para dos sujetos elegidos aleatoriamente. Como puede observarse a simple vista, estas funciones $h(t)$ son completamente distintas entre articulaciones para un mismo sujeto.

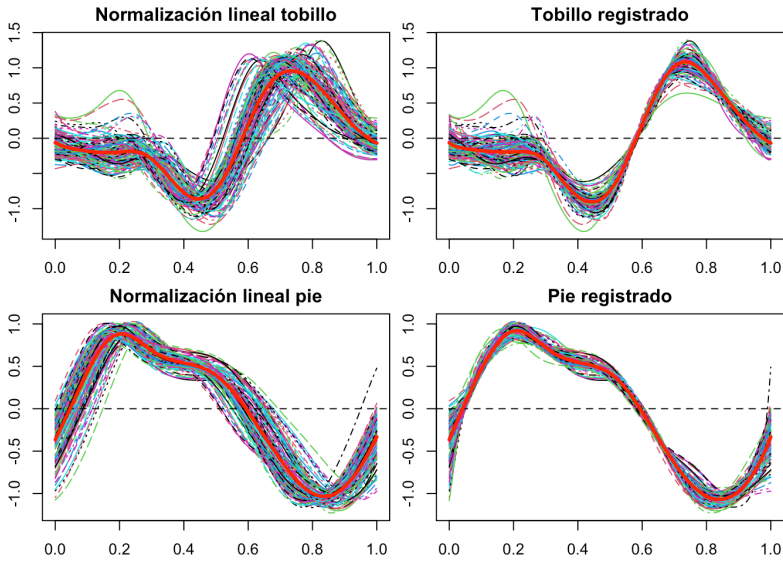


Figura 5.9: Curvas de tobillo y pie normalizadas linealmente y registradas con el método de Ramsay.

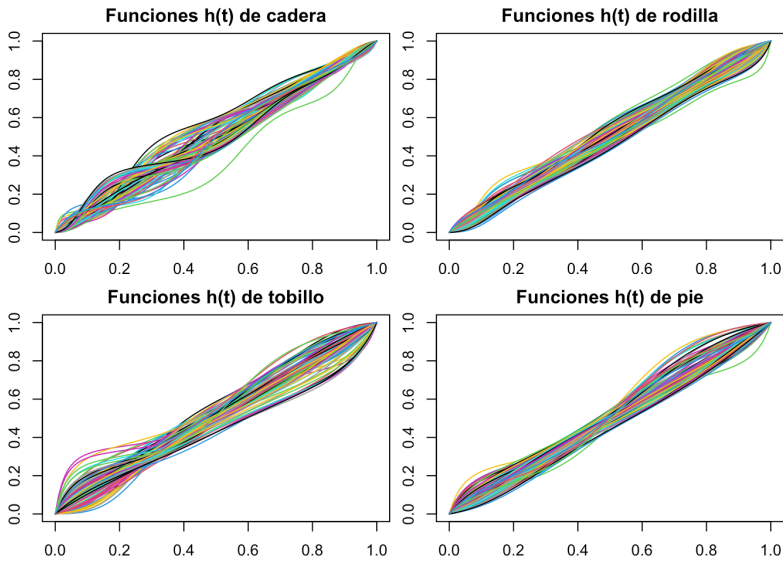


Figura 5.10: Funciones de transformación del tiempo obtenidas del registro de cada articulación: cadera, rodilla, tobillo y pie.

Para comprobar mejor la coordinación motora, a partir de las funciones de transformación del tiempo obtenidas del registro de las curvas de cadera, se evalúan en estos tiempos transformados las curvas de rodilla, tobillo y pie. Los resultados se muestran en la Figura 5.12: a la izquierda las curvas normalizadas linealmente, en medio las obtenidas del registro de la curva de esa articulación y a la derecha las obtenidas al aplicar la función $h(t)$ de la cadera. En rojo está la curva media.

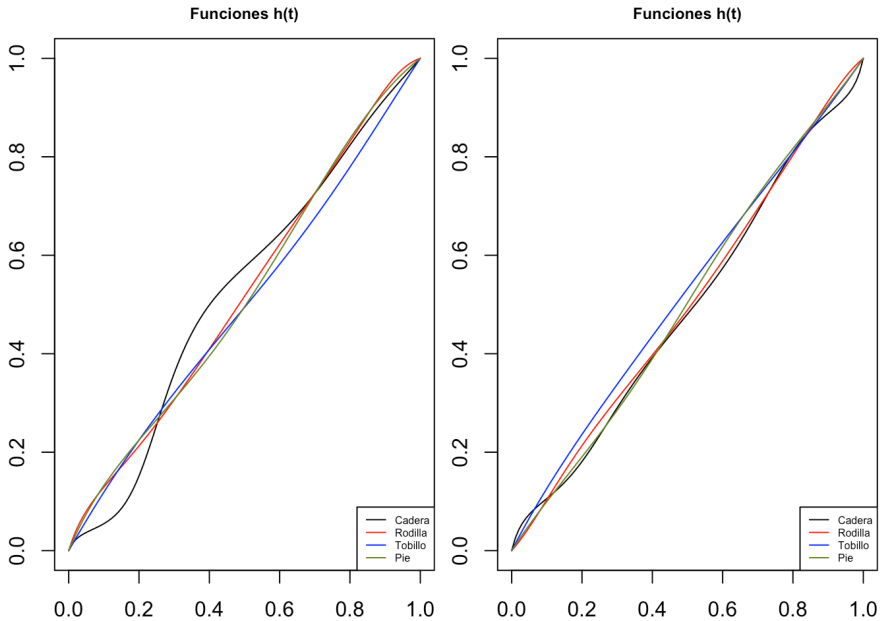


Figura 5.11: Comparación de las curvas de transformación del tiempo de una determinada repetición, elegida al azar, obtenidas para las cuatro articulaciones. Cada gráfica corresponde a una repetición distinta elegida de forma aleatoria.

El registro no lineal de cada articulación reduce la variabilidad respecto de la normalización lineal. En cambio, si se aplican las funciones $h(t)$ de la cadera a las curvas de las otras articulaciones, no se produce mayor alineamiento sino que están más desfasadas que en la normalización lineal.

Algo parecido ocurre si se registran las curvas con la $h(t)$ obtenida del registro de rodilla (Figura 5.13). Sin embargo, en este caso las curvas no están tan desalineadas como en el caso anterior.

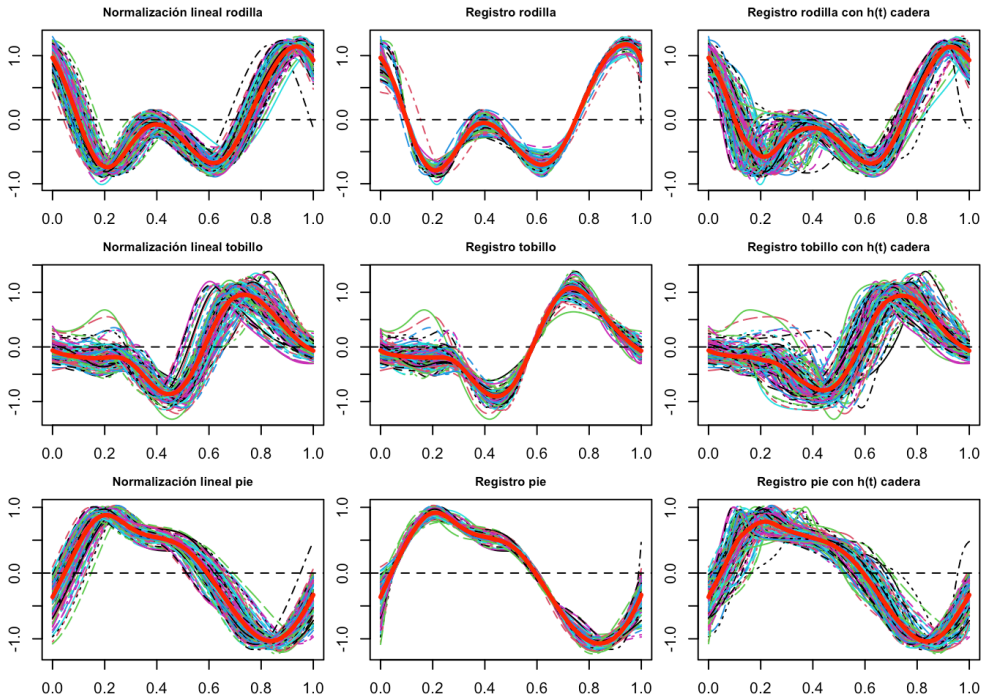


Figura 5.12: Curvas de rodilla, tobillo y pie normalizadas linealmente (izquierda), registradas con el método de Ramsay a partir de las curvas de cada articulación (medio) y alineadas a partir de las funciones $h(t)$ obtenidas del registro de la cadera.

En la parte superior de la Figura 5.14 se comparan las medias de la normalización lineal (azul), el registro de las curvas de cada articulación (rojo) y el registro a partir de las $h(t)$ de la cadera (negro), junto con la banda de la media más y menos una desviación estándar. La media de las curvas registradas a partir de la cadera tienen menor amplitud. Además, también presentan mayor variabilidad, ya que la banda es más ancha que la obtenida en el registro de las curvas de cada articulación por separado. En la parte inferior se muestra lo análogo para cadera, tobillo y pie empleando las $h(t)$ de la rodilla.

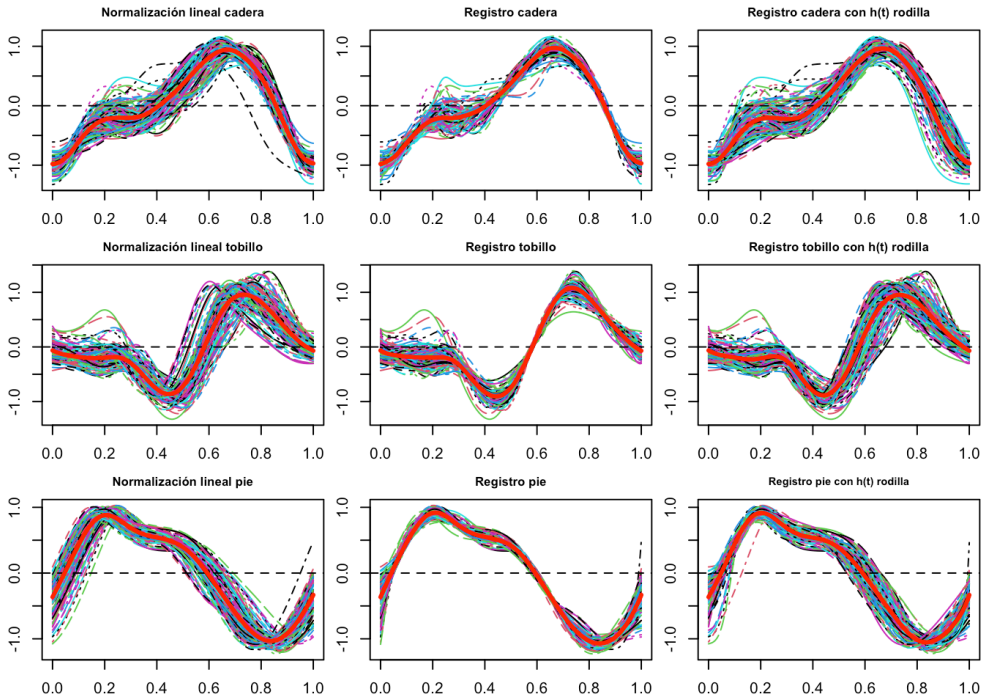


Figura 5.13: Curvas de rodilla, tobillo y pie normalizadas linealmente (izquierda), registradas con el método de Ramsay a partir de las curvas de cada articulación (medio) y alineadas a partir de las funciones $h(t)$ obtenidas del registro de la rodilla.

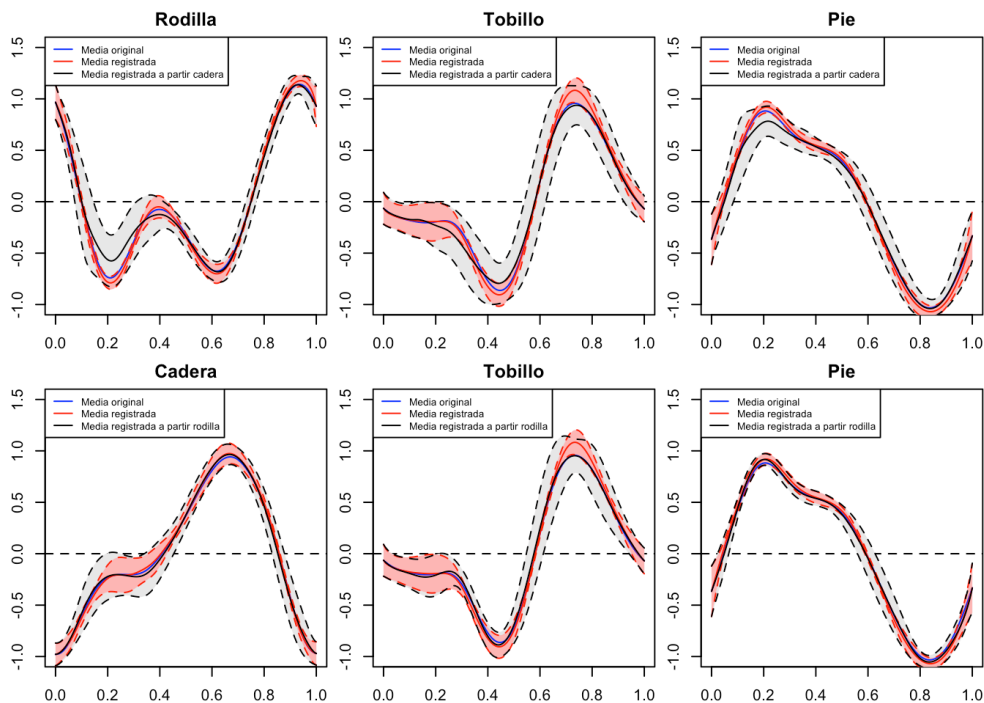


Figura 5.14: Comparación de las curvas medias de la normalización lineal (azul), del registro de las propias curvas de la articulación (rojo) y registradas a partir de las $h(t)$ de la cadera (negro), para las articulaciones de rodilla, tobillo y pie en la parte superior. De forma análoga, en la parte inferior, las articulaciones de cadera, tobillo y pie, obtenidas aplicando la $h(t)$ de la rodilla. La zona sombreada marca la banda de la media más y menos una desviación típica, en rojo para las curvas registradas para la propia articulación y en negro para las curvas obtenidas al aplicar la $h(t)$ de la cadera (arriba) y la rodilla (abajo).

Discusión

El proceso de registro continuo de curvas correspondientes a los grados de libertad de un mismo movimiento altera la descripción de la coordinación entre variables. Por un lado, las funciones warping, $h(t)$, calculadas por separado para cada articulación son bastante diferentes entre sí (Figura 5.10). Asimismo, en la Figura 5.11 se puede comprobar que esas diferencias apreciables en el conjunto de curvas se mantienen en individuos concretos.

Por otra parte, se ha comprobado si las funciones $h(t)$ obtenidas en el registro de una articulación, la cadera por ejemplo, permite alinear a las de los otros grados de

libertad (rodilla, tobillo y pie). Como puede apreciarse en la Figura 5.12 (derecha), lejos de reducir el desfase, este aumenta respecto de la normalización lineal. El aumento respecto del registro de las curvas de forma independiente es todavía mayor, como se observa en la parte superior de la Figura 5.13. Esto se produce no solo para el registro del resto de articulaciones a partir del de la cadera, sino que también si se aplican las funciones $h(t)$ de la rodilla a las demás articulaciones. La peor alineación se traduce en un claro efecto de cancelación, con valores inferiores en los extremos relativos, así como un incremento de la variabilidad entre curvas (Figura 5.14).

Esto mismo se observa en el ángulo de tobillo, tanto para las curvas registradas con las funciones de la cadera como de rodilla. El máximo tiene mayor amplitud en la media de las curvas de tobillo registradas, mientras que tanto para la media de la normalización lineal como la obtenida del registro de cadera o rodilla, ambos son menores y similares.

En algunos casos, registrar las curvas con las $h(t)$ de otra articulación empeora la variabilidad de fase incluso comparada con la normalización lineal. Esto se puede ver en las curvas del pie registradas a partir de la cadera (gráfica superior derecha de la Figura 5.14), donde el máximo de la media registrada a partir de la cadera es inferior al máximo de la media de la normalización lineal. Es decir, las curvas están más desfasadas entre sí y es por lo que ese máximo se ve mitigado.

Todo esto demuestra que no existe un “tiempo del sistema” [103] como plantean algunos autores, de forma que no existe un tiempo biológico único de cada sujeto que permita alinear las curvas de forma conjunta. El proceso de registro no lineal del tiempo altera la coordinación entre distintos grados de libertad en un mismo movimiento, por lo que deben registrarse por separado cada una de las articulaciones.

En nuestro conocimiento no se han publicado artículos que analicen el registro coordinado de los diferentes grados de libertad asociados al movimiento humano.

5.3.4 Coherencia mecánica

Para terminar con el análisis de los efectos del registro no lineal sobre las curvas asociadas a un movimiento, analizaremos su efecto sobre las tres componentes de una magnitud vectorial. En concreto, estudiaremos el caso particular de la fuerza de reacción sobre el suelo medida en marcha, donde se registran las componentes vertical, mediolateral y anteroposterior. Así, de forma similar al análisis realizado en el apartado anterior, se van a comprobar dos aspectos:

- Similitud entre las funciones warping. Se registran por separado las curvas de fuerza F_x , F_y y F_z y se comparan las funciones de transformación del tiempo obtenidas.
- A partir de las funciones $h(t)$ obtenidas para una determinada componente se evalúan las demás en esos tiempos transformados para analizar si se reduce la variación de fase.

Material y métodos

Se ha utilizado la base de datos de fuerzas de reacción sobre el suelo de OActive (Apartado 4.2). Dicha base consta de 56 sujetos, con 6 repeticiones para cada uno de los sujetos. Puesto que solo se quiere comprobar esta coherencia mecánica, se eligió como curva representativa de cada sujeto la más profunda, concepto definido más adelante en el apartado 6.2. Se normalizan todas las curvas en amplitud dividiendo por el rango, ya que de lo contrario el proceso no converge en la fuerza mediolateral F_z .

Se registran por separado cada una de las componentes de fuerza F_x , F_y y F_z . Después, a partir de las funciones de transformación del tiempo obtenidas para cada una de las componentes de fuerza, se evalúan las otras dos componentes de fuerza para comprobar si estas $h(t)$ permiten alinear las demás componentes.

Se emplea el método de registro no lineal de Ramsay. Para la base de funciones de las $h(t)$ se emplean 5 funciones de B-Splines de orden 4.

Resultados

En primer lugar se realiza un registro de cada conjunto de curvas correspondientes a las distintas componentes de fuerza. Estas curvas registradas son las mostradas en la Figura 5.15 (arriba y centro) junto con las funciones de transformación del tiempo $h(t)$ obtenidas (Fig. 5.15 abajo).

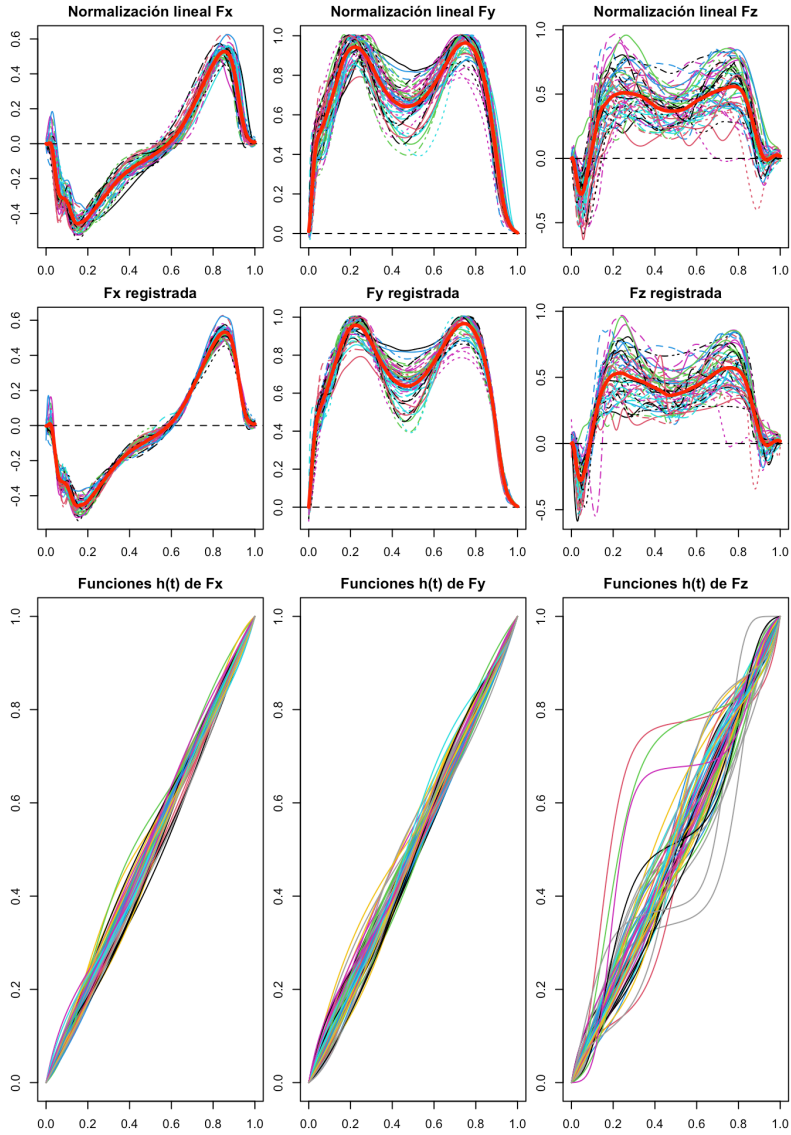


Figura 5.15: Curvas de fuerza de reacción sobre el suelo (anteroposterior F_x , izquierda, vertical F_y en el centro y mediolateral F_z , derecha) normalizadas linealmente en el tiempo (arriba) y registradas con el método de Ramsay (centro), junto con las funciones de transformación del tiempo $h(t)$ (abajo). Se representa en rojo la curva media del conjunto de curvas de cada gráfico.

El registro funciona correctamente en la fuerza anteroposterior F_x y vertical F_y , alineando las curvas. Sin embargo, el método no funciona adecuadamente en la fuerza mediolateral F_z , ya que no se aprecia un alineamiento de las curvas. Esto se puede ver también en las funciones de transformación del tiempo de la fuerza F_z , que presentan efecto pellizco y hay cambios bruscos en estos tiempos transformados. Esto puede ser debido a la gran variabilidad que tienen estas curvas y los numerosos extremos relativos que presentan. En cambio, la fuerza anteroposterior y vertical tienen patrones más claros, por lo que el método funciona correctamente. Debido a esto, no se van a usar las funciones de transformación del tiempo $h(t)$ obtenidas para la fuerza F_z para alinear las curvas F_x y F_y . En cambio, las $h(t)$ obtenidas del registro de F_x y F_y sí que se aplican a la F_z para estudiar la coherencia mecánica.

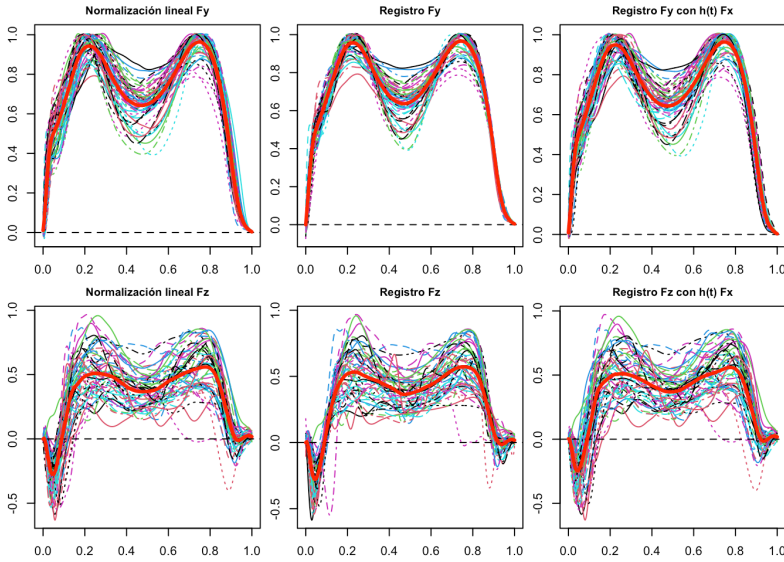


Figura 5.16: Curvas normalizadas linealmente en el tiempo (izquierda), registradas a partir de las propias curvas (centro) y registradas aplicando los **tiempos transformados del registro de la fuerza F_x** (derecha), para la fuerza vertical F_y (arriba) y mediolateral F_z (abajo). Se marca en rojo la curva media del conjunto de curvas.

Visualmente ya se puede apreciar que las funciones de transformación del tiempo obtenidas (Figura 5.15 abajo) del registro de la fuerza F_x y F_y son distintas.

En la Figura 5.16 se muestran las curvas después de aplicar las funciones $h(t)$ obtenidas del registro de las fuerzas F_x . En la fuerza vertical (arriba), aplicar

la función $h(t)$ obtenida de la fuerza F_x no alinea las curvas, incluso se aprecia más desfase en el último máximo respecto de la normalización lineal. En la fuerza mediolateral F_z no se aprecia ni un mejor ni peor alineamiento respecto de la normalización lineal o la del registro de F_z debido a la elevada variabilidad de estas curvas.

En la Figura 5.17 (derecha) se muestran los resultados del registro de las fuerzas anteroposterior F_x y mediolateral F_z al aplicar los tiempos transformados de la fuerza vertical F_y . En la fuerza anteroposterior F_x , alinea ligeramente el máximo respecto de la normalización lineal, pero claramente no alinea tan bien como si se realiza el registro de las propias curvas. En general, introduce más desfase en la zona donde la función crece, desde el mínimo al máximo. Además, hay que destacar que el primer mínimo local que presenta la función antes del mínimo absoluto se suaviza prácticamente al aplicar la $h(t)$ de la fuerza vertical. En la fuerza mediolateral F_z ocurre lo mismo que lo comentado para la Figura 5.16.

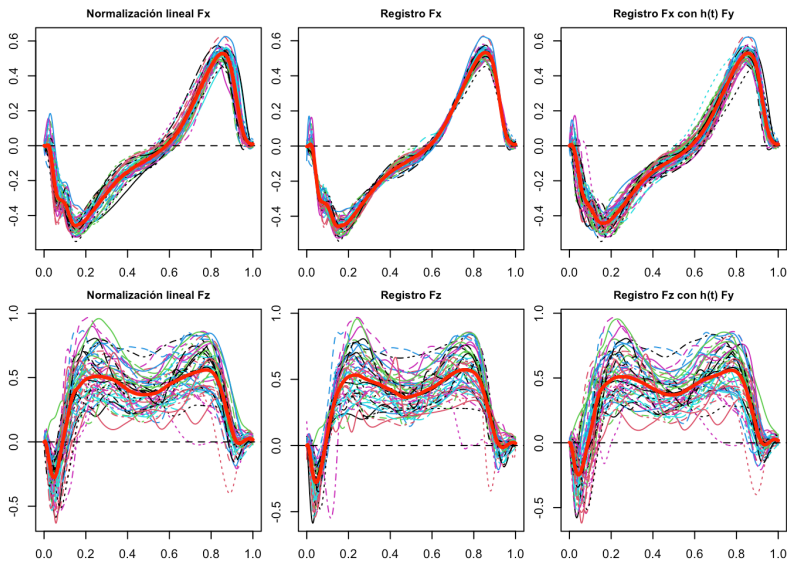


Figura 5.17: Curvas normalizadas linealmente en el tiempo (izquierda), registradas a partir de las propias curvas (centro) y registradas aplicando los **tiempos transformados del registro de la fuerza F_y** (derecha), para la fuerza anteroposterior F_x (arriba) y mediolateral F_z (abajo). Se marca en rojo la curva media del conjunto de curvas.

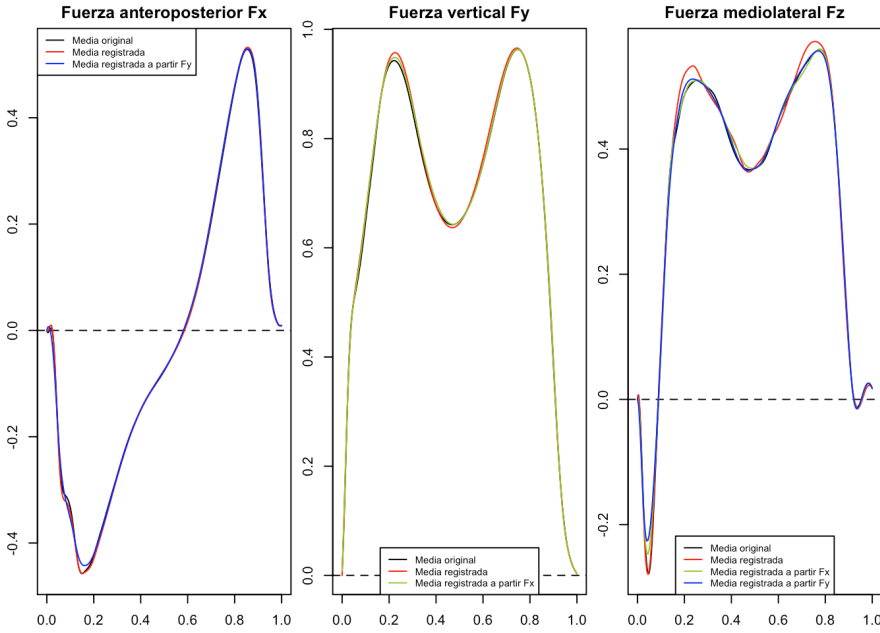


Figura 5.18: Comparación de las curvas medias obtenidas en cada registro: en negro la media de la normalización lineal, en rojo la media de las curvas registradas a partir de las curvas de la fuerza considerada, en verde la media de las curvas registradas a partir de los tiempos transformados de la función F_x y en azul la obtenida del registro de la F_y .

Finalmente, se comparan las medias obtenidas a partir del registro de las propias curvas y tras aplicar a estas la $h(t)$ del registro de otras funciones (Figura 5.18). Así, en la fuerza anteroposterior F_x , la media registrada a partir de la fuerza vertical (azul) da una media con menor amplitud que la obtenida con la normalización lineal (negro) o la del registro propio (rojo), siendo estas dos últimas muy similares. En la fuerza vertical, la media registrada de las curvas originales tiene mayor amplitud ya que se ha reducido el desfase entre curvas. La media registrada a partir de la fuerza F_x (verde) es similar a la de la normalización lineal, salvo que el primer máximo es ligeramente superior en esta primera. Finalmente, en la fuerza mediolateral F_z la media obtenida del registro de las propias funciones tiene mayores extremos, concretamente el primer mínimo y ambos máximos son considerablemente superiores a los de las demás medias. Salvo pequeñas rugosidades de las funciones medias, la media obtenida de aplicar la $h(t)$ de la F_x y de la F_y son prácticamente similares entre sí y a la de la normalización lineal, por lo que no se está reduciendo el desfase entre curvas.

Discusión

Se ha realizado un análisis similar al de la coordinación motora, extrayendo conclusiones similares. En la Figura 5.15 se muestran las curvas de fuerza F_x , F_y y F_z registradas, donde se puede ver la reducción del desfase entre curvas en la fuerza anteroposterior F_x y mediolateral F_y . No obstante, ya se aprecia que las funciones $h(t)$ no son iguales en ambas fuerzas, por lo que ya se concluye que no existe esa coherencia mecánica. Es importante la conclusión extraída de la fuerza mediolateral F_z donde pese a realizar una normalización en amplitud el método de registro no reduce esa diferencia de fase y se obtienen funciones de transformación del tiempo poco suaves y con efecto pellizco. Esto puede ser debido a que las curvas F_z presentan mucha variabilidad y tienen numerosos extremos locales. Es decir, el método no puede alinear correctamente estos extremos porque son distintos entre curvas. Por tanto, en curvas con mucha variabilidad el método de registro no funciona correctamente.

Por otro lado, en las Figuras 5.16 y 5.17 se muestran las curvas registradas con las $h(t)$ de la fuerza anteroposterior F_x (Fig. 5.16) y de la fuerza vertical F_y (Fig. 5.17). En general se puede concluir que las funciones de transformación del tiempo obtenidas con una componente de la fuerza no permiten alinear las otras componentes de fuerza. En algunos casos, mantiene las curvas como en la normalización lineal, pero en otros incluso aumenta más el desfase entre curvas, como ocurre para el segundo máximo de la fuerza vertical F_y (gráfica superior derecha de la Figura 5.16).

Esto se corrobora con la comparación de las medias de las curvas registradas con los distintos procedimientos (Figura 5.18). En todos los casos, la media del registro de las propias funciones analizadas proporciona extremos de mayor amplitud, lo que indica que se está reduciendo esa variabilidad de fase al reducirse el efecto de cancelación de la media. En cambio, las medias obtenidas del registro tras aplicar la $h(t)$ de otra fuerza producen medias similares a la de la normalización lineal o incluso de menor amplitud, como ocurre en la fuerza anteroposterior F_x (gráfica izquierda de la Fig. 5.18).

Por lo que sabemos es el primer trabajo en el que se estudia el efecto del registro de la base de tiempo sobre la alineación de las distintas componentes de una magnitud vectorial.

5.4 Conclusiones

En base a todos los resultados planteados en este capítulo se pueden extraer algunas conclusiones clave del proceso de registro del tiempo:

- Los métodos de registro no lineal permiten alinear las curvas reduciendo considerablemente su variabilidad.
- Sin embargo, presentan algunos inconvenientes, como el efecto pellizco, en especial el de Fisher-Rao al final del movimiento. Esto lleva a plantearse si realmente estos métodos tienen en cuenta los aspectos físicos del movimiento o simplemente se trata de métodos de optimización que alinean las curvas en base a ello. Quizá este efecto pellizco en el método de Fisher-Rao se evite ajustado bien las amplitudes antes del proceso de normalización, como sugiere Ramsay en las recomendaciones finales de su Capítulo 7 [139]. Quedaría por investigar cómo afecta esta normalización al propio proceso de registro.
- Hay que tener una serie de consideraciones a la hora de registrar curvas y sus derivadas. Se mantiene la coordinación dinámica en el método de Ramsay si se deriva correctamente, teniendo en cuenta la regla de la cadena.
- El método de Ramsay presenta más ventajas que el de Fisher-Rao, como se ha podido observar de la comparación de métodos y de la coordinación dinámica.
- El proceso de registro no mantiene la coordinación motora entre diferentes grados de libertad implicados en un movimiento. No existe ese tiempo del sistema, o lo que es lo mismo, una coordinación temporal entre articulaciones que permita alinear de igual forma varios grados de libertad.
- Tampoco se mantiene una coherencia mecánica. Es decir, las curvas de transformación del tiempo que registran una componente de la fuerza en un eje no son las mismas que las que alinean al resto de componentes.
- Cuando la curva presenta mucha variabilidad y se trata de una función con muchos extremos locales, como el caso de la fuerza mediolateral F_z analizada de las fuerzas de reacción sobre el suelo en marcha, el proceso de registro del tiempo no funciona correctamente. Esto puede ser debido a que el método no identifica claramente los puntos que debe alinear.

Con todo esto, cabe plantearse si merece la pena emplear métodos de registro no lineal, en especial si después se van a emplear otros métodos estadísticos, como por ejemplo modelos de regresión. Por ello, quizá la normalización lineal que se ha empleado hasta ahora puede ser la mejor opción, ya que no altera la información contenida en las curvas.

En cualquier caso, no debe perderse de vista que la normalización lineal de la escala de tiempos afecta a la duración relativa de las fases del movimiento, a los desfases reales entre articulaciones y al cálculo de derivadas, alterando la dinámica del movimiento. Por tanto, el tiempo normalizado no debe entenderse como una escala común de tiempos, que no son comparables, sino como una forma de representar los movimientos en una escala en la que se hace coincidir el principio y el final de las funciones objeto de análisis.

De hecho, no es la única posibilidad para realizar este ajuste. Por ejemplo, se podría trabajar en el dominio de la posición, en lugar de utilizar el dominio del tiempo. En este caso, los estudios dinámicos se realizarían con diagramas en el espacio de fases, donde el tiempo no aparece como variable explícita, y los de coordinación en función de la variable principal del movimiento, como por ejemplo, el ángulo de flexo-extensión de cadera en la marcha. En este caso, la normalización se haría respecto de los rangos y no del tiempo, lo que arrojaría una visión complementaria y diferente de los actuales análisis. Se deja este enfoque como futura línea de investigación.

Capítulo 6

Descriptivos funcionales

Este capítulo se cubren los objetivos específicos 2 y 3. Se analiza qué descriptivos funcionales son más adecuados como medidas de centralidad y dispersión de un conjunto de curvas en unas aplicaciones dadas. Se detectan una serie de limitaciones de la media funcional y del estudio de la variabilidad, que pueden ser mejoradas con el concepto de curva más profunda, el equivalente de mediana en el caso de datos numéricos. Se estudian las diferencias entre la curva más profunda y media funcional de un conjunto de curvas, así como el cálculo de regiones de confianza. Se analiza la variabilidad a través de la desviación típica punto a punto y un rango intercuartílico funcional, obtenido a partir de la envolvente del 50% de las curvas más profundas. Finalmente, puesto que la media no siempre es adecuada y en ocasiones no representa una curva real de un sujeto, se investiga si el uso de la curva profunda como curva patrón en el registro del tiempo proporciona resultados similares al caso de considerar como curva de referencia la media funcional.

6.1 Introducción

6.1.1 Estado del arte

Al igual que en la estadística univariante es fundamental describir un conjunto de datos numéricos utilizando medidas numéricas de localización como la media o la mediana y de variación como la desviación típica o el rango intercuartílico, en el contexto funcional surge la necesidad de utilizar descriptivos funcionales análogos. Estos descriptivos funcionales permiten tener una visión global del comportamiento promedio del movimiento analizado y de su variabilidad.

Las medidas de resumen habituales en variables numéricas tienen su análogo funcional ([139], págs. 22-26) como son la media funcional o la varianza y desviación típica funcional. Son ampliamente usadas en aplicaciones en Biomecánica donde se emplea la media funcional y se construyen regiones de confianza calculadas punto a punto.

Sin embargo, aunque su uso sea habitual, la media funcional presenta limitaciones similares a la media muestral:

- Efecto de cancelación de la media: si las curvas presentan variabilidad de fase, se puede producir un suavizado de los máximos y mínimos, e incluso que se produzcan pequeñas mesetas si esa variabilidad de fase es elevada.
- La media funcional puede presentar un sesgo debido a que algunas curvas presenten valores extremos.
- La media puede ser una curva que no se asemeja a ninguna de las curvas originales, por lo que no sería representativa. Esto ocurre especialmente cuando las curvas presentan mucha variabilidad.
- Construir regiones de confianza basadas en la media punto a punto no es del todo correcto, al realizar comparaciones múltiples. Son válidas en cada punto pero no en total de la curva estudiada.

Se describen más en detalle algunos de estos problemas.

Efecto de cancelación de la media

Este problema ya ha sido descrito en el Capítulo 5 de esta tesis. Debido a los desfases en el tiempo se produce un efecto de cancelación de la media especialmente en los máximos y mínimos relativos, con un suavizado de la media. Por tanto, esta media puede no ser representativa [12] al no parecerse a ninguna de las curvas originales, presentando incluso características distintas. Esto lleva asociado también que aumente la dispersión en las zonas de mayor pendiente y que no se haga una correcta estimación de las varianzas funcionales [122].

Regiones de confianza punto a punto

Es habitual en análisis de datos funcionales discretizar la función, por ejemplo en 100 puntos, y construir los intervalos de confianza de la media en cada punto. Sin embargo, se están construyendo regiones de confianza simultáneamente. Esto es porque al discretizar la función y construir un intervalo de confianza en cada uno de esos puntos, no se está asegurando que la curva real esté dentro de la banda de confianza obtenida en todo su dominio, sino solo que en cada punto individualmente haya un determinado nivel de confianza.

Existen otros enfoques donde se calculan esas regiones de confianza a través de técnicas como el bootstrap [34, 29].

Ante estas limitaciones de la media, cabe preguntarse si existe un equivalente funcional al concepto de mediana de datos numéricos y su medida de variabilidad, el rango intercuartílico, que es una medida robusta en especial cuando tenemos datos anómalos. En análisis de datos funcionales, el concepto de curva profunda sería este equivalente funcional. La curva profunda sería aquella que representa el centro del conjunto de funciones, considerando su posición global respecto a todas las demás curvas. Para ello, se utiliza una medida de profundidad funcional, que evalúa cómo de central se encuentra una curva respecto del conjunto. Existen diferentes definiciones de profundidad funcional, por lo que cada una lleva a una curva profunda, aunque el concepto es similar. Esto ayudaría a definir percentiles funcionales, ya que no existe el equivalente funcional de los percentiles de datos numéricos. Así, se puede estudiar y analizar cuándo una curva no sigue el mismo patrón que el resto de curvas, ya que hasta ahora se hace de forma más bien cualitativa.

No se han encontrado trabajos en Biomecánica que utilicen el concepto de curva profunda como descriptivo funcional de un conjunto de curvas. Sí que hay trabajos donde se define de forma teórica este concepto y se aplican a otros conjuntos de

datos o incluso datos simulados [25, 48, 98]. En la literatura revisada, no se han encontrado estudios en el ámbito de la Biomecánica que utilicen la curva más profunda en lugar de la media funcional. Solo se ha encontrado un trabajo que utiliza las curvas más profundas del índice de masa corporal medido en niños de 2 a 18 años [142]. Concluyen que el concepto de curva más profunda ayuda a ordenar las curvas y detectar valores atípicos. Sin embargo, se ha utilizado más como herramienta para detectar curvas atípicas que como descriptivo funcional de un conjunto de curvas, que es lo que se está discutiendo en este capítulo. En el Capítulo 3 de [56] sí que utilizan el concepto de curva profunda y el equivalente funcional del diagrama de cajas y bigotes aplicado a la base de datos de marcha de GaitRec, para mostrar una aplicación de esta representación gráfica.

6.1.2 Necesidades detectadas y objetivos

De la revisión realizada, se detectan una serie de necesidades en los descriptivos funcionales:

- La media funcional presenta una serie de limitaciones, siendo el principal problema que en ocasiones puede ser una curva ficticia que no se corresponde con ninguna de las características individuales de las curvas originales. Así, la curva profunda, como equivalente funcional de la mediana, puede solucionar algunas de estas limitaciones. Sin embargo, el concepto de curva profunda no está todavía explorado en Biomecánica.
- Habitualmente se obtienen regiones de confianza punto a punto, aunque algunos trabajos utilizan el bootstrap para obtenerla. Si se va a emplear la curva más profunda surge la necesidad de obtener unas regiones de confianza apropiadas a este descriptivo funcional, que permitan también estudiar correctamente la variabilidad de las curvas.
- En muchas aplicaciones se utiliza la media como curva representativa. Por ejemplo, en el registro del tiempo se utiliza como curva patrón. Sin embargo, si esta curva no es una curva real que tenga las características de ninguna de las curvas originales, puede que se esté eligiendo una referencia que altera el tiempo. Por ello, se plantea la necesidad de considerar otro tipo de curva de referencia, como la mediana funcional, que sí que es una curva real.

Se establecen los siguientes objetivos en este capítulo:

- Explorar el concepto de curva más profunda y compararla con la media de un conjunto de curvas para estudiar cuándo esta puede ser más adecuada que una media funcional.
- Comparar los intervalos de confianza punto a punto de la media con las regiones de confianza obtenidas para la curva más profunda por bootstrap.
- Comparar las medidas de análisis de dispersión basadas en la desviación típica calculada punto a punto con un rango intercuartílico funcional obtenido a través del concepto de profundidad.
- Realizar el registro del tiempo utilizando como curva de referencia la curva más profunda y comparar los resultados con lo obtenido con la media funcional, que es el procedimiento habitual.

6.2 Descriptivos funcionales

6.2.1 Media y varianza funcional

Dado un conjunto de N datos funcionales $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ en el intervalo $[0, T]$, la media funcional viene dada por la expresión:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t), \quad (6.1)$$

que es la media funcional calculada punto a punto a lo largo de todas las repeticiones de la muestra, con $t \in [0, T]$. De forma análoga, la varianza funcional se obtiene como:

$$var_X(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [x_i(t) - \bar{x}(t)]^2. \quad (6.2)$$

La desviación típica funcional se calcula como la raíz cuadrada de la varianza funcional. Se puede encontrar más información sobre estos descriptivos funcionales y ejemplos de aplicación en las págs. 22-26 de [139] y págs. 25-27 de [56].

6.2.2 Curva profunda

Existen varias definiciones de profundidad que dan lugar a distintas curvas profundas. Se puede encontrar más información sobre estas definiciones en [25]. Se va a utilizar la h -moda. Así, la profundidad h de un dato z en una población se define a través de la expresión:

$$f_h(z) = E[K_h(\|z - X\|)] \quad (6.3)$$

donde X es una variable aleatoria funcional que representa a la población, $\|\cdot\|$ es una norma adecuada, por ejemplo la L^2 y $K_h(t)$ es un *kernel* o núcleo reescalado del tipo $K_h(t) = \frac{1}{h}K(\frac{t}{h})$, siendo K la función *kernel*. Se usa el núcleo gaussiano $K(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}e^{-t^2/2}$. Finalmente, h es un parámetro fijo de ajuste.

Se define la h -moda de X como el valor más profundo de z maximizando z en la ecuación (6.3). En la práctica, dada una muestra $X_1, \dots, X_n$, el estimador lo obtenemos considerando el valor medio respecto de la distribución empírica.

$$\hat{f}_h(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(\|z - X_i\|) \quad (6.4)$$

Cuando se trabaja con datos funcionales, este concepto recuerda a los de profundidad multivariante. Sin embargo, la analogía con el caso de dimensión finita presenta ciertas limitaciones, ya que en este contexto no existe una densidad subyacente propiamente dicha que pueda estimarse mediante la ecuación (6.4), haciendo que h tienda a 0 de manera suficientemente lenta conforme $n \rightarrow \infty$. Esto se relaciona con la ausencia de una medida de referencia estándar e invariante por traslación, como es la medida de Lebesgue en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$.

No obstante, dentro del marco funcional es posible conservar ciertos aspectos de esta idea, manteniendo h constante y considerando la ecuación (6.3) como una función auxiliar que refleja cómo de “rodeada” está la función z en el espacio muestral.

El objetivo de este método es medir la profundidad o centralidad de un dato z dentro de una muestra de datos funcionales. Un dato es más profundo cuanto más rodeado esté por otros. Para ello:

- Primero calcula las distancias $\|z - X_i\|$ entre el punto de interés y todos los datos de la muestra.

- Aplica una función núcleo (por ejemplo la gaussiana) a cada distancia, ponderando más a los puntos cercanos.
- Suma esos valores y los promedia obteniendo $\hat{f}_h(z)$.
- Finalmente el punto con mayor $\hat{f}_h(z)$ es considerado el más profundo (la h -moda).

Puede encontrarse más información en [25].

6.3 Aplicaciones

En este subapartado se analizan una serie de aplicaciones de estos descriptivos funcionales, haciendo una comparación entre ellos.

- Comparativa entre media funcional y curva profunda: se quiere comparar la media funcional con la curva más profunda de un conjunto de curvas.
- Regiones de confianza: se comparan las regiones de confianza obtenida para la media punto a punto y su análoga para el concepto de curva más profunda obtenida a través de la envolvente de un conjunto de curvas profundas obtenidas por bootstrap.
- Estudio de la variabilidad: se analizan distintas formas de estudiar la variabilidad, a través de la desviación típica punto a punto y de un rango intercuartílico funcional a partir del concepto de curva profunda.
- Uso de curvas profundas para el registro de funciones: puesto que hay diferencias considerables entre la curva media y la más profunda, se realiza el registro de funciones tomando como curva de referencia la media y la más profunda, analizando las diferencias obtenidas.

6.3.1 Comparativa entre media funcional y curva profunda

Puesto que la media presenta algunas limitaciones como el efecto de cancelación debido a un desfase temporal entre las curvas, se explora el concepto de curva profunda como curva representativa de un conjunto de funciones. Esta curva sí que se corresponde con una curva real de un determinado sujeto, a diferencia de la media. Así, se compara la media funcional obtenida punto a punto con la curva más profunda. El objetivo es determinar si existen diferencias entre ambos descriptivos funcionales y en qué condiciones el uso de una u otra es determinante.

Material y métodos

Se van a utilizar las curvas de fuerza de reacción sobre el suelo de un conjunto de 56 sujetos con osteoartritis temprana de rodilla (Cap. 4.2). Se toman solo las curvas de la pierna izquierda.

Como cada sujeto realiza 6 repeticiones, se va a obtener una única curva que represente a cada sujeto. Por un lado, se va a calcular esta curva individual como la media de las 6 repeticiones y por otro lado, se obtiene la curva más profunda de las 6 repeticiones de cada sujeto, que sí corresponde a una curva real.

Para no comparar solo estas curvas visualmente a través de las gráficas, se comparan valores característicos específicos de las fuerzas para las curvas más profundas y medias. Así, se obtienen los valores mínimos y máximos mostrados en la Figura 6.1. Se extraen estos valores extremos de cada fuerza para las 56 curvas medias y las 56 curvas más profundas de cada sujeto y se realiza un t-test pareado para determinar si existen diferencias significativas entre estos valores extremos. De esta forma, se puede determinar si el hecho de considerar una curva media o profunda presenta diferencias o bajo qué condiciones existen diferencias significativas entre estos valores.

Se utiliza la función `fda.usc::depth.mode()` [42] para calcular la curva más profunda.

Resultados

La curva de cada sujeto se obtiene haciendo la media de las 6 repeticiones y, con el otro enfoque, la curva más profunda de esas 6 curvas. Se calcula el máximo y mínimo de cada fuerza (marcados en la Figura 6.1) y después los valores medios y la desviación. Estos se muestran en la Tabla 6.1 para los máximos y en la Tabla 6.2 para los mínimos.

Comenzando con los máximos (Tabla 6.1) para la fuerza anteroposterior toman el mismo valor medio, aunque los de la curva más profunda tienen más dispersión, con una desviación de 3,6 frente a 3,4 de la media funcional. En la fuerza vertical, el valor medio obtenido en las curvas profundas es ligeramente superior al de las medias (113,1 vs. 112,6), con una dispersión de nuevo mayor en el caso de la curva más profunda (8,8 vs. 8,6). En la fuerza mediolateral este máximo es mayor en la curva profunda (5,8 vs. 5,6) con el mismo valor de desviación. Se muestra en la tabla los p-valores del test de la t pareado realizado, donde únicamente se encuentran diferencias significativas entre los máximos de la media funcional y de la curva más profunda en la fuerza mediolateral (p-valor = 0,02).

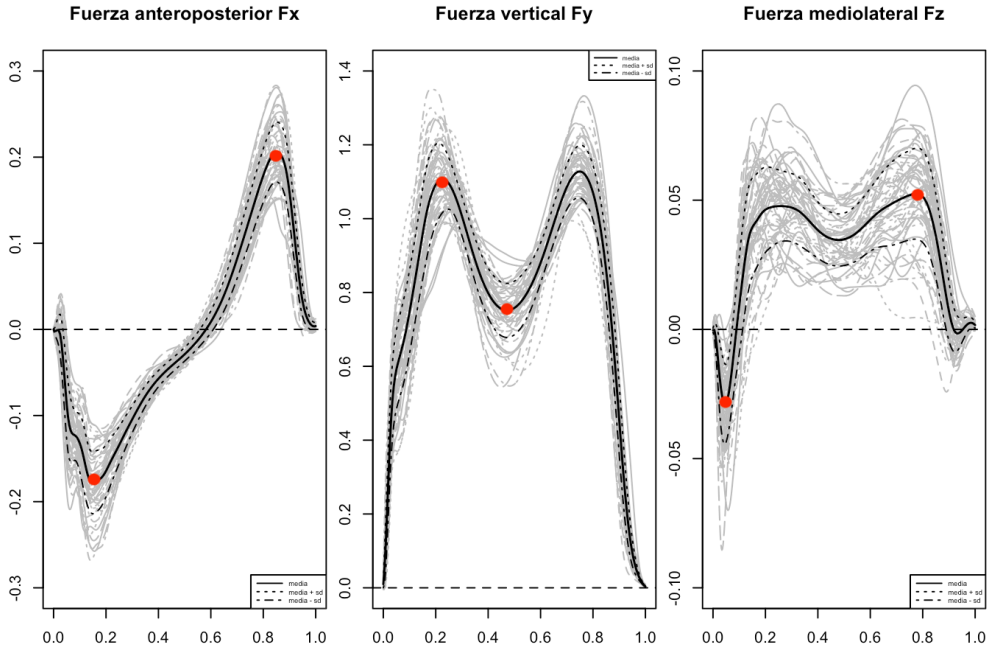


Figura 6.1: Curvas de fuerza de reacción sobre el suelo anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z , junto con la media (negro) más y menos una desviación (discontinua). Se marcan los puntos que se han seleccionado como máximos y mínimos para comparar la curva media y profunda.

Algo similar ocurre para los mínimos (Tabla 6.2), alcanzando mayor valor absoluto en la curva más profunda para la fuerza anteroposterior (-18,1 vs. -18) y en la fuerza mediolateral (-3,5 vs. -3,3). En las curvas profundas estos valores mínimos presentan una ligera dispersión mayor que las curvas medias en la fuerza vertical (7,2 vs. 7,1) y mediolateral (1,9 vs. 1,7). En cuanto a los p-valores del test de la t pareado, ni la fuerza anteroposterior ni la vertical presentan diferencias significativas. En la fuerza mediolateral este p-valor es 0,08, por lo que atendiendo al tamaño de la muestra ($N=56$) podría considerarse significativo.

La Figura 6.2 muestra la función media (negro) y la más profunda (en rojo) para las tres fuerzas. En la fuerza anteroposterior la curva media presenta mayor amplitud, mientras que en la fuerza vertical ocurre al revés. Es decir, en la F_y se produce un efecto de cancelación de la media debido a las distintas amplitudes de las curvas. En la fuerza mediolateral la curva media y la más profunda son

Tabla 6.1: Valores medios y desviación típica (entre paréntesis) del máximo considerado para cada fuerza (Fig. 6.1) junto con la desviación entre paréntesis, para las curvas medias funcionales y para las más profundas de cada sujeto. Se muestra el p-valor del t-test pareado.

Fuerza	Media funcional	Curva más profunda	p-valor
Anteroposterior F_x	20,8 (3,4)	20,8 (3,6)	0,866
Vertical F_y	112,6 (8,6)	113,1 (8,8)	0,224
Mediolateral F_z	5,6 (1,5)	5,8 (1,5)	0,02

Tabla 6.2: Valores medios y desviación típica (entre paréntesis) del mínimo considerado para cada fuerza (Fig. 6.2) junto con la desviación entre paréntesis, para las curvas medias funcionales y para las más profundas de cada sujeto. Se muestra el p-valor del t-test pareado.

Fuerza	Media funcional	Curva más profunda	p-valor
Anteroposterior F_x	-18 (3,6)	-18,1 (3,5)	0,473
Vertical F_y	74,3 (7,1)	74 (7,2)	0,197
Mediolateral F_z	-3,3 (1,7)	-3,5 (1,9)	0,08

muy diferentes, ya no solo difiriendo en los extremos sino en la propia forma de la curva.

Esto puede verse más en detalle para dos sujetos seleccionados al azar (Figura 6.3), donde se observan estas diferencias comentadas para la muestra total. En la fuerza mediolateral estas diferencias entre la curva media de las 6 repeticiones del sujeto o la profunda son más evidentes. La curva media es más suave, al promediar los valores del conjunto de curvas, mientras que la profunda representa una curva real.

Discusión

De las Tablas 6.1 y 6.2 se observa cómo la diferencia entre los máximos y mínimos de la curva de cada sujeto considerando la media de las 6 repeticiones o la más profunda es pequeña. En todos los casos, excepto para el mínimo de la fuerza vertical F_y (Tabla 6.2), el valor es ligeramente superior para la curva más profunda. Esto es debido a que la media presenta el efecto de cancelación y estos extremos se ven suavizados al hacer el promedio por la propia amplitud de las distintas curvas y posibles desfases entre las curvas. En cambio, como la curva más profunda es una curva real de un sujeto, mantiene todas las características.

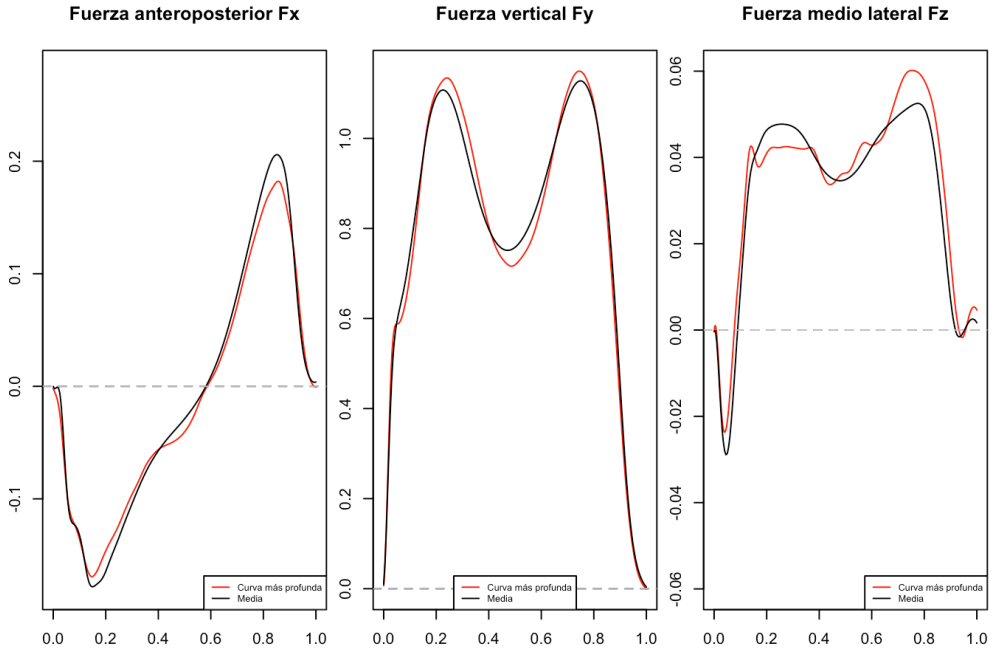


Figura 6.2: Función media (negro) y más profunda de la profunda de cada sujeto (rojo) para la fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y medio lateral F_z .

Se ha realizado un test de la t pareado para ver si estas diferencias entre máximos y mínimos entre curvas medias y curvas más profundas eran estadísticamente significativas. Solo en los máximos de la fuerza mediolateral estas diferencias son significativas (p -valor = 0,02), aunque en base al tamaño muestral ($N=56$), también podrían considerarse diferencias significativas en los mínimos de esta misma fuerza (p -valor = 0,08). Esto tiene especial sentido en esta fuerza, ya que es una fuerza que presenta mucha variabilidad, por lo que considerar una media suaviza los puntos característicos de esta.

Esto se aprecia visualmente muy claramente en la Figura 6.2 donde se compara la media de toda la muestra y la curva profunda de las 56 curvas profundas de cada sujeto. La fuerza anteroposterior tiene una media con mayor amplitud que la profunda. Aunque se ha comentado el efecto de cancelación de la media, en este caso no ocurre. Sin embargo, esto se puede explicar por el hecho de que hay curvas que presentan un rango más amplio que las demás, lo que hace que esta media tenga mayores extremos.

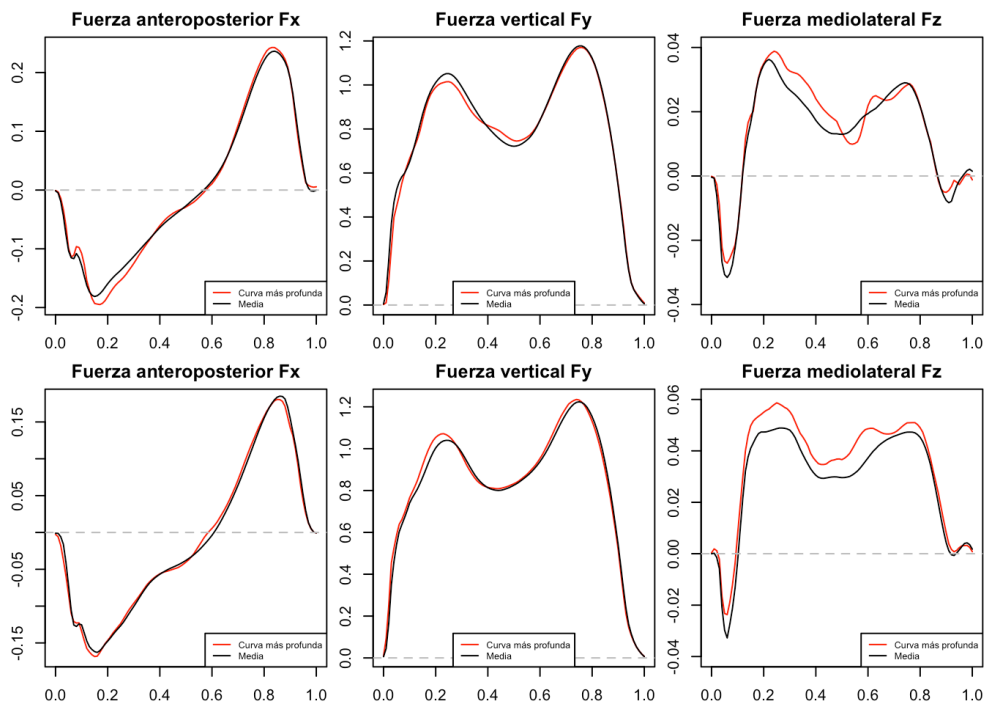


Figura 6.3: Función media (negro) y profunda (rojo) de las 6 repeticiones de un determinado sujeto para las tres fuerzas F_x , F_y y F_z . Las gráficas de arriba corresponden a un sujeto y las de abajo a otro diferente, elegidos ambos al azar.

En la fuerza vertical sí que se produce el efecto de cancelación de la media. Puede verse no solo en que la media funcional tiene menores valores extremos que la profunda, sino porque además presenta un ligero desfase. En la fuerza mediolateral estas diferencias son muy evidentes. Esto es debido a que es una fuerza con mucha variabilidad. En la Figura 6.3 se comprueba mejor este efecto en la fuerza F_z , donde incluso la media funcional y la curva más profunda tienen amplitudes distintas (figura izquierda abajo).

De los valores de máximos y mínimos de las Tablas 6.1 y 6.2 y las figuras anteriores, se puede concluir que no hay diferencias entre máximos y mínimos en las fuerzas anteroposterior y vertical entre las curvas medias y más profundas, por lo que si se va a hacer un estudio estadístico posterior considerando valores escalares, resulta indiferente considerar un enfoque o el otro. En cambio, estas diferencias sí que son significativas en la fuerza mediolateral F_z , y no solo en estos extremos, sino en la propia forma de la curva. En casos como este, donde las cur-

vas presenten mucha variabilidad, es más recomendable utilizar curvas profundas que curvas medias. En especial si se está utilizando análisis de datos funcionales, donde se analiza toda la curva.

Si se quiere realizar un análisis estadístico basado en máximos, mínimos o rangos, la curva media es robusta, en especial para la fuerza F_x y F_y . Sin embargo, si el objetivo es utilizar análisis de datos funcionales, donde toda la información está contenida en la curva, entonces el uso de la la curva mediana o más profunda puede ser un aspecto decisivo.

Los resultados obtenidos no pueden compararse con otros trabajos ya que no hemos encontrado ningún estudio que utilice la mediana funcional y la compare con la media.

6.3.2 Regiones de confianza

Según la revisión realizada, lo habitual es construir regiones de confianza para la media punto a punto, pero este enfoque no es correcto para el caso funcional. Así, se compararán en este apartado las bandas de confianza de la media construida punto a punto con la región obtenida a partir de la envolvente de un determinado porcentaje de curvas más profundas calculadas a partir de un bootstrap. El objetivo es comparar ambas regiones y demostrar que las regiones de confianza de la media obtenida punto a punto no contienen a curvas de la muestra.

Material y métodos

Para este subapartado se utiliza la base de datos de las fuerzas de reacción sobre el suelo de 56 sujetos con osteoartritis temprana de rodilla (Cap. 4.2). Por simplicidad se toman solo las curvas de la pierna izquierda. Como cada sujeto realiza 6 repeticiones, se va a obtener una única curva que represente a cada sujeto. Por un lado, se va a calcular esta curva individual como la media de las 6 repeticiones. Después, se va a obtener la media funcional de cada componente de fuerza (anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z) junto con su banda de confianza al 90% calculada punto a punto.

Por otro lado, se obtiene la curva más profunda de las 6 repeticiones de cada sujeto. Después, de las 56 curvas profundas obtenidas, se calcula la más profunda de ese conjunto. Para obtener una región equivalente a la de confianza para la curva más profunda, se realiza un bootstrap con 500 replicaciones, para obtener en cada una de esas repeticiones una curva profunda. Se obtienen así 500 curvas profundas de las que nos quedamos solo con el 90% que tengan mayor profundidad

y sobre estas se calcula su envolvente. Puesto que no se trata del cálculo de intervalos de confianza, lo llamaremos intervalos de tolerancia.

Se compararán por un lado la curva media y la más profunda y por otro lado estas regiones, estudiando si la curva profunda se encuentra dentro de la región de confianza de la media.

Se utiliza la función `fda.usc::depth.mode()` [42] para calcular la curva más profunda. Para el bootstrap no se utiliza una función ya previamente programada por un paquete específico de bootstrap, sino que se ha programado para cumplir con las necesidades de lo que se quiere probar.

Resultados

La Figura 6.4 muestra la curva media (negro) y la curva más profunda (rojo) de las 56 curvas de fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z , junto con la banda de confianza de la media para un nivel de confianza del 90% sombreado en gris. El equivalente para la curva profunda es la región sombreada en amarillo que corresponde a la envolvente del 90% de las curvas más profundas obtenidas tras realizar un bootstrap con 500 replicaciones. Para cada repetición, se obtiene la curva más profunda de las 56 curvas elegidas. Como resultado, se obtienen 500 curvas profundas, de las que se descarta el 10% de las menos profundas y se calcula su envolvente. De la comparación de las curvas media y la profunda, en la fuerza anteroposterior F_x se observa cómo la curva profunda tiene menor amplitud que la media. La forma es similar. En cuanto a la fuerza vertical F_y ambas curvas son similares, aunque la profunda presenta picos de mayor valor que la media, probablemente por un efecto de cancelación de la media. También se observa que hay un desfase temporal entre la curva media y profunda. En la fuerza anteroposterior F_z es donde se observan más diferencias entre ambas curvas. La curva más profunda presenta mucha más variabilidad que la curva media, que es mucho más suave y con unos extremos bien definidos.

En cuanto a las regiones de confianza, la banda de confianza de la media para las tres fuerzas es bastante estrecha, en especial para la fuerza F_x y F_y . En la fuerza F_z es algo mayor debido a que es una fuerza que presenta más variabilidad. En cambio, la envolvente de la curva profunda es mucho más ancha, concretamente para la fuerza F_z . Es importante destacar que en las tres fuerzas, la curva más profunda se encuentra fuera de la región de confianza de la media.

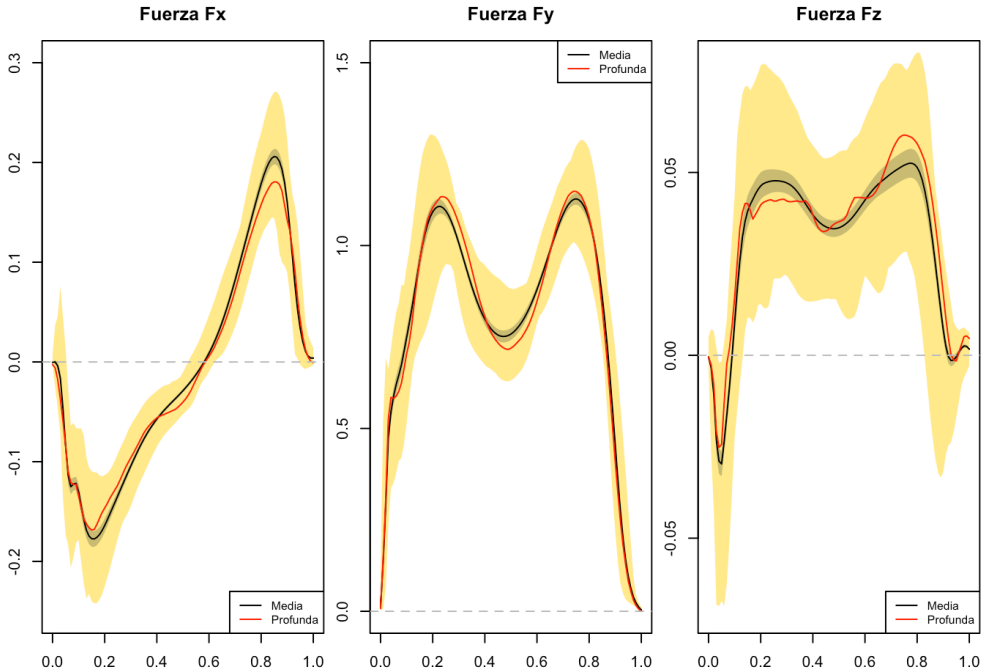


Figura 6.4: Curva media (negro) y curva profunda (rojo), junto con el intervalo de confianza de la media del 90% (sombreado gris) y la envolvente del 90% de las curvas más profundas (sombreado amarillo) obtenido por bootstrap.

Discusión

En la Figura 6.4 se muestran la media y curva más profunda para las 56 curvas estudiadas. Como primera conclusión, se puede ver que la media está sesgada. En la fuerza anteroposterior F_x la amplitud de la curva media es mayor que la de la más profunda. Esto puede ser debido a que hay algunas curvas que presentan de forma aislada extremos de mayor valor que el resto de curvas. Esto hace que la media presente mayor valor ahí que la curva más profunda, que sí que es una curva real de un determinado sujeto. Para la fuerza vertical F_y este sesgo se puede ver en el efecto de cancelación de la media. Esto se aprecia en dos aspectos: primero que la curva media presenta extremos de menor valor que la curva más profunda y segundo por el desfase temporal que hay entre ambas curvas, en especial en el primer máximo del apoyo del talón y en el mínimo posterior. Finalmente, en la fuerza mediolateral F_z es donde más diferencias se aprecian entre ambas curvas. La curva media es una curva suave, mientras que la más profunda tiene más

rugosidad. En este caso, se está produciendo un suavizado de la media obteniendo una curva que no es representativa realmente de ningún sujeto.

Así, la media funcional no es una medida que represente adecuadamente a un conjunto de curvas, porque está sesgada por efectos de cancelación de la media, suavizados y desfases entre las curvas.

En lo que respecta a las regiones de confianza, para la media se obtiene la banda de confianza calculada punto a punto para un nivel de confianza del 90%, que es la práctica habitual. Por otro lado, se ha calculado la envolvente del 90% de las curvas más profundas obtenidas por bootstrap. En la Figura 6.4 se observa cómo ninguna de las curvas profundas está dentro de la banda de confianza de la media. Además, esta región es considerablemente más estrecha que la envolvente de la curva profunda. Esto demuestra que la banda de confianza de la media obtenida punto a punto no es adecuada en el caso funcional y que además al hacer comparaciones punto a punto debería corregirse.

El planteamiento seguido en este capítulo es original en cuanto a las aplicaciones al análisis de movimientos humanos, no habiéndose encontrado ningún artículo en la revisión bibliográfica realizada.

6.3.3 Estudio de la variabilidad

Se estudia la variabilidad a través de la desviación típica calculada punto a punto, obteniendo así una región a partir de la media funcional sumando y restando 0,674 veces la desviación típica, para obtener una banda donde se encuentre el 50% de las curvas. Se compara esta región con la envolvente del 50% de las curvas más profundas, lo que sería equivalente a un rango intercuartílico en el caso funcional.

Material y métodos

Para analizar distintas formas de estudiar la variabilidad, se utiliza la base de datos de fuerzas de reacción sobre el suelo de GaitRec (Apartado 4.4) tomando el grupo de sanos y el grupo de patológicos de rodilla que tienen fractura de fémur o tibia cerca de la articulación de rodilla. Se va a realizar el estudio de la variabilidad en los dos grupos para poder analizar cómo afecta el estudio de la variabilidad según sean patrones de sujetos sanos o patológicos, donde presuntamente hay más variabilidad. Cada sujeto realiza un número de repeticiones que puede ser hasta de 10. Se va a calcular la media de estas repeticiones como representativo de ese sujeto y por otro lado, la más profunda de esas repeticiones para el enfoque basado en la mediana funcional.

Así, por un lado se va a comparar los resultados de un descriptivo representativo de promedio o centralidad de datos y por otro lado, de dispersión. Comenzando con el promedio, para cada grupo se va a calcular la curva media de las curvas medias obtenidas de cada sujeto y en base a esto, una región de confianza al 90%. Por otro lado, se obtiene la curva profunda de cada curva profunda obtenida para cada sujeto. Para encontrar un intervalo de tolerancia de esta curva profunda, se descartan el 10% de las curvas menos profundas y con las restantes se calcula la envolvente. Se compararán estas regiones para cada componente de la fuerza y cada grupo (sano y patológico).

Para estudiar la variabilidad, se calcula la región donde se encuentra el 50% de las curvas medias de cada sujeto, sumando y restando a la media funcional total 0,674 veces la desviación típica de la muestra en cada punto. Se está asumiendo que los datos numéricos en cada instante de tiempo siguen una distribución normal, lo cual puede asumirse según el Teorema Central del Límite, ya que el tamaño muestral de la base de datos considerada es elevado. Para el enfoque basado en la mediana funcional, se calcula una región similar a la del rango intercuartílico, considerando el 50% de las curvas más profundas. Sobre estas, se calcula la envolvente. Estas regiones se calculan tanto para la muestra de sanos como la de patológicos para estudiar a su vez el comportamiento de esta variabilidad según los dos enfoques planteados.

Resultados

Los resultados del estudio de la variabilidad se han realizado con la base de datos de las fuerzas de reacción sobre el suelo de GaitRec (Cap. 4.4). Se ha realizado el análisis sobre el conjunto de curvas de sanos y patológicos de rodilla que tienen fractura de fémur o tibia cerca de la articulación de rodilla. Cada sujeto realiza varias repeticiones, por lo que se considera como representativa de cada sujeto la curva media y la más profunda para el enfoque de la mediana funcional. Después de elegir esa curva representativa para cada sujeto, el tamaño muestral para el grupo de sanos es de $N = 219$ y para los patológicos de rodilla de $N = 938$.

Para cada muestra, se calcula la media del conjunto de curvas medias (negro) y la curva más profunda del conjunto de las profundas (rojo) para la muestra de sanos (Figura 6.5 arriba) y la de patológicos (Figura 6.5 abajo). En la muestra de sanos (Fig. 6.5 arriba) los resultados son similares a los obtenidos para la base de datos de pacientes con osteoartritis estudiado en el apartado 6.3.2. Es decir, en la fuerza anteroposterior F_x el máximo de la curva media es superior al de la curva más profunda y existe un ligero desfase entre las curvas en el paso por cero. En este caso, además, el mínimo también tiene menor amplitud en la curva

media que en la más profunda. En la fuerza vertical F_y los máximos de ambas son similares, aunque se aprecian grandes diferencias en el mínimo del valle entre ambas curvas. Hay también un ligero desfase entre la curva media y la profunda en la zona del primer máximo. En la fuerza mediolateral F_z la curva más profunda presenta más variabilidad que la curva media. El segundo máximo de esta fuerza es notablemente superior al de la función media. Además, esta curva profunda no presenta un patrón tan claro de extremos como sí que lo tiene la curva media.

En cuanto a la muestra de patológicos (Figura 6.5 abajo), en la fuerza anteroposterior F_x no hay diferencias tan evidentes como sí que las había en la muestra de sanos, presentando la curva más profunda una amplitud ligeramente mayor a la de la curva media. En la fuerza vertical F_y tampoco hay mucha diferencia entre los extremos de ambas funciones, aunque sí que se aprecia un desfase temporal. Finalmente, en la curva mediolateral F_z se observan diferencias en la forma de ambas curvas, con mínimos en el inicio y final del movimiento más pronunciados en el caso de la más profunda. A su vez, en el primer máximo, la curva profunda presenta más variabilidad y extremos locales que la curva media.

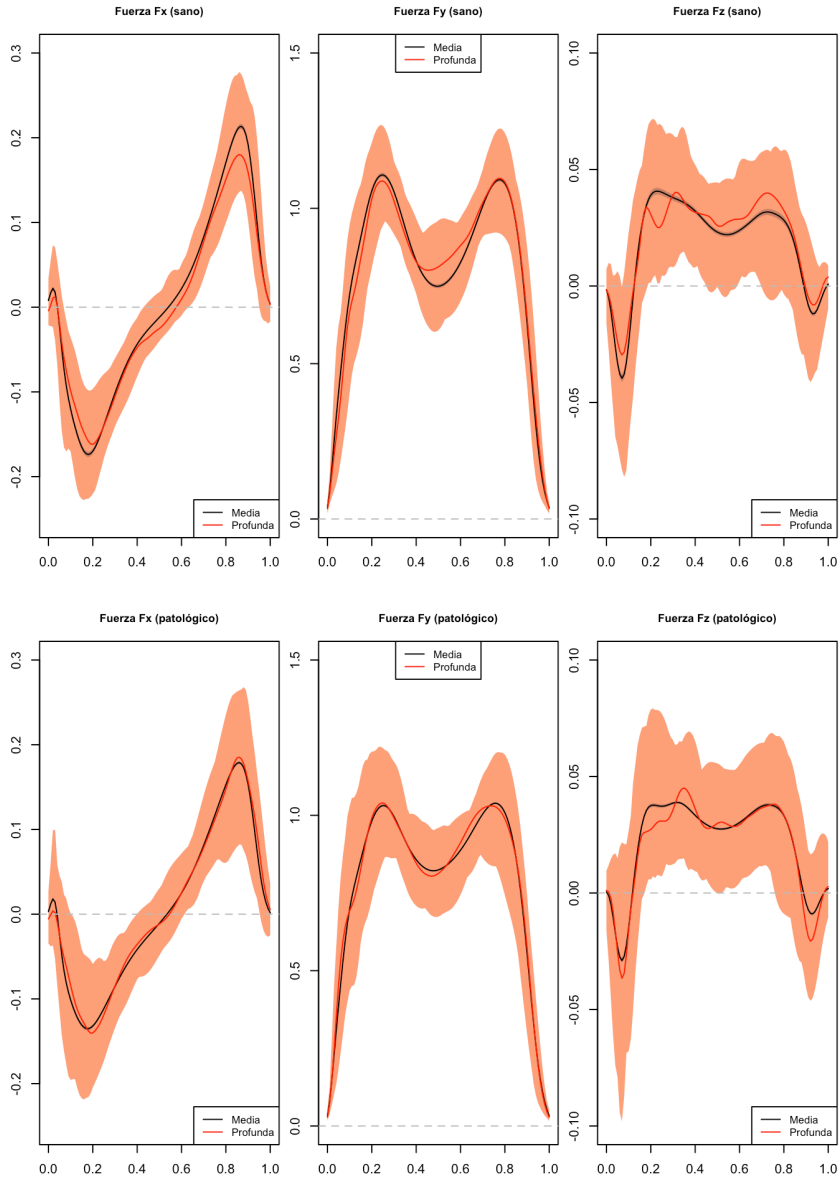


Figura 6.5: Media (negro) y curva más profunda (rojo), junto con el intervalo de confianza del 90% de la media (sombreado gris) y la envolvente del 90% de las curvas más profundas (sombreado naranja) para el grupo de sanos (arriba) y patológicos (abajo) para la fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z .

Se calcula también la banda de confianza para la media punto a punto a un nivel de confianza del 90%, que es la región sombreada en gris. En las gráficas de sanos se observa cómo esta región es bastante estrecha, aunque algo menos para la fuerza mediolateral F_z , ya que es la que presenta más variabilidad. En las gráficas equivalentes de patológico (Fig. 6.5 abajo) esta banda es mucho más reducida todavía, debido al número elevado de muestras ($N = 938$). Se representa en naranja la envolvente del 90% de las curvas más profundas de la muestra. En ambos grupos la fuerza mediolateral F_z es la que presenta una región más amplia. Esta es mayor para la muestra de patológicos (Fig. 6.5 abajo) que para la de sanos (Fig. 6.5 arriba). En todos los casos la curva más profunda se encuentra fuera de la banda de confianza de la media.

Para estudiar la variabilidad del conjunto de curvas, se calcula la desviación punto a punto para representar la banda en la que se encuentra el 50% de las curvas. Para ello se representa la media más y menos 0,674 veces la desviación típica. Se obtienen las bandas sombreadas en gris de la Figura 6.6 para el grupo de sanos (arriba) y patológicos (abajo), respectivamente. En negro se marca la media. De forma análoga, para la curva más profunda (azul) se obtiene la envolvente del 50% de las curvas más profundas, sombreada en azul claro. Esta región sería el equivalente funcional del rango intercuartílico de los datos numéricos.

Estas envolventes tienen mayor anchura que el equivalente de la media, tanto para el grupo de sanos como el de patológicos. Las curvas de patológicos (Fig. 6.6 abajo) presentan más variabilidad que las del grupo de sanos (Fig. 6.6 arriba). Por último, en el grupo de sanos, en la fuerza anteroposterior F_x en la zona del paso por cero y el máximo, la curva profunda se encuentra fuera de la banda de variabilidad obtenida con la desviación típica. Esto mismo ocurre con la curva vertical F_y y mediolateral F_z (Figura 6.6 arriba). En el grupo de patológicos esto solo ocurre en el último mínimo de la fuerza mediolateral (Fig. 6.6 abajo) y ligeramente entre el valle y el segundo máximo de la fuerza vertical.

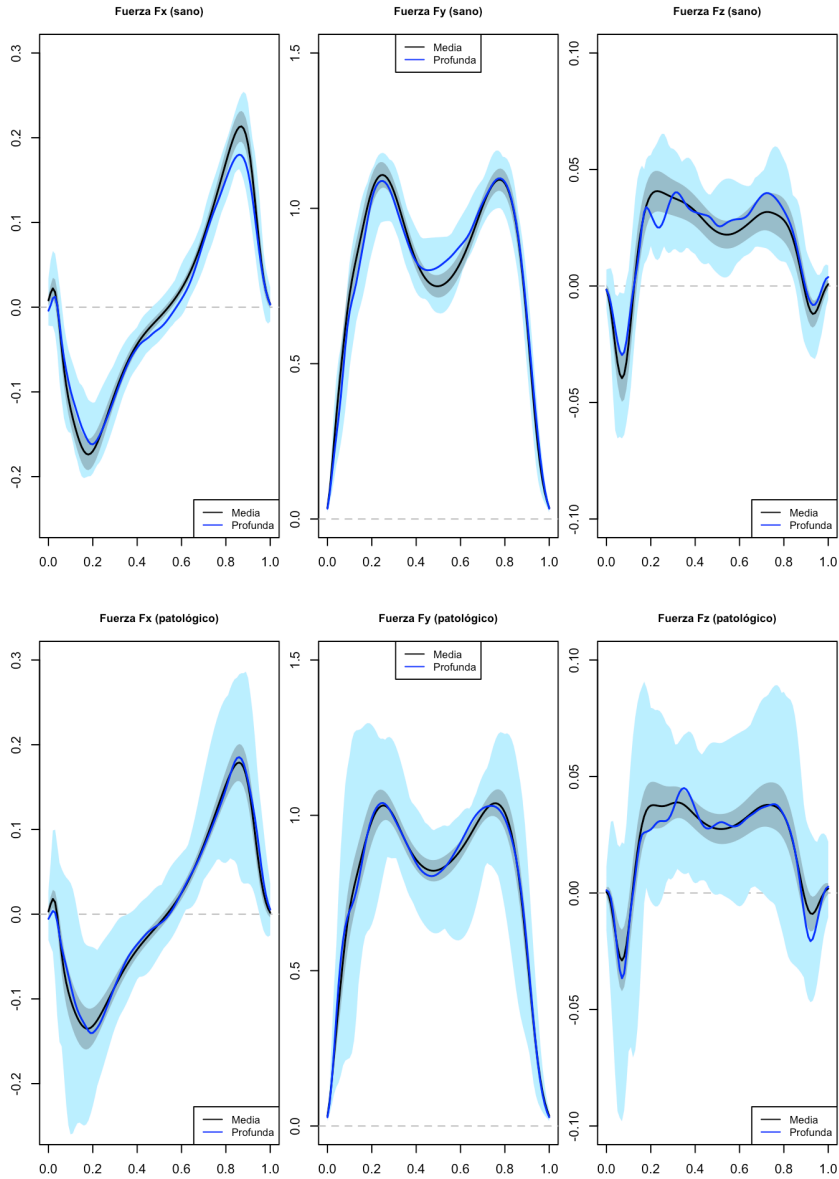


Figura 6.6: Media (negro) y curva más profunda (azul), junto con la banda de la media más y menos $0,674 \times \text{sd}$ (sombreado en gris) donde se encuentra el 50% de las curvas y la envolvente del 50% de las curvas más profundas (sombreado en azul) para el grupo de sanos (arriba) y patológicos (abajo) para la fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z .

Discusión

En la Figura 6.5 se muestra la media y curva más profunda, junto con la banda de confianza al 90% de la media y la envolvente del 90% de las curvas más profundas, para el grupo de sanos (arriba) y patológicos (abajo), respectivamente. Aunque se ha utilizado una base de datos diferente a la del apartado 6.3.2 las conclusiones extraídas son similares. No obstante, en este caso la envolvente corresponde a la del 90% de las curvas más profundas de la muestra. En el apartado 6.3.2 correspondía al 90% de las curvas más profundas obtenidas al realizar un bootstrap.

Para esta base de datos ocurre algo similar en la fuerza anteroposterior F_x , donde los extremos son menores en la curva profunda y hay un desfase entre ambas curvas en el paso por el cero. En la vertical, las diferencias son más sutiles, presentando solo diferencias en la amplitud del mínimo en el valle. Por último, en la fuerza mediolateral F_z la curva profunda es completamente distinta a la curva media. Para el grupo de patológicos, en la fuerza anteroposterior F_x , solo hay ligeras diferencias en la amplitud de la curva, siendo la más profunda la que tiene mayor amplitud. En la fuerza vertical se presentan algunos desfases temporales entre ambas curvas. En la mediolateral la forma de la curva profunda es completamente distinta a la de la curva media en la primera mitad del movimiento.

De nuevo se demuestra que la media funcional no es buen estimador para el conjunto de curvas de una muestra, en especial cuando estas presentan mucha variabilidad como en el caso de la fuerza mediolateral F_z . Además, ninguna curva profunda se encuentra dentro de la banda de confianza de la media.

De igual forma hay que preguntarse sobre el estudio de la variabilidad en el caso funcional y si el cálculo de la desviación punto a punto proporciona información adecuada sobre la variabilidad del conjunto de curvas. En la Figura 6.6 se representa sombreado en gris la región donde se encontrarían el 50% de las curvas, mientras que sombreado en azul la envolvente del 50% de las curvas más profundas. Esta última es mucho más ancha, lo que indicaría que la variabilidad del conjunto de curvas es mayor que la mostrada a través de la desviación típica. Además, hay algunas zonas de la curva anteroposterior F_x y vertical F_y del grupo de sanos y de la curva mediolateral F_z de ambos grupos donde la curva profunda se encuentra fuera de la banda del 50% de las curvas obtenido a través de la desviación típica punto a punto. Esto demuestra que estimar la variabilidad funcional a través de la desviación punto a punto no aporta información adecuada sobre la dispersión de la muestra.

Finalmente, la muestra de patológicos presenta mucha más dispersión que la del grupo de sanos. Esto se puede ver a través de las curvas envolventes, que son

mucho más amplias. Sin embargo, este aumento no se aprecia tan notablemente en la región de la desviación típica, ya que si bien aumenta ligeramente, no en la misma proporción a la que lo hace la envolvente de las profundas.

De este apartado se puede concluir que la desviación funcional obtenida como una desviación típica punto a punto no es un buen estimador de la dispersión de un conjunto de curvas, ya que no capta correctamente la variabilidad de la muestra. Esto se ha podido ver al comparar las regiones obtenidas con la desviación típica (gris) y con la envolvente del 50% de las curvas más profundas (azul). Además, en algunas zonas del movimiento, la curva más profunda de la muestra se encuentra fuera de la banda sombreada en gris. Esto demuestra que una banda de confianza de la media es una visión muy optimista para representar los datos y que las curvas profundas muestran mejor esa variabilidad. Es importante mostrar esta variabilidad y no solo una media, ya que puede dar información sobre la variabilidad del conjunto de curvas y así poder determinar qué variables son más o menos fiables que otras.

Aunque se han publicado algunos artículos orientados a definir rangos intercuartílicos funcionales, revisados en [56], en dichos trabajos no se utiliza el concepto de mediana funcional. Por ello es difícil hacer comparaciones entre los resultados y los mostrados en la citada revisión.

6.3.4 Uso de curvas profundas para el registro de funciones

Una de las cuestiones planteadas en este capítulo es que la curva media puede no ser representativa del conjunto de curvas, en especial cuando estas tienen mucha variabilidad, y por tanto no coincidir con ninguna curva original de la muestra. En procesos como el del registro del tiempo, donde se utiliza como curva patrón la media, cabe preguntarse qué resultados se obtendrían si se utilizase la curva más profunda. Se va a realizar este análisis con el método de registro no lineal de Ramsay ([139, Cap. 7]). Se compararán así las medias de las curvas registradas habiendo tomado como curva patrón la media de las curvas originales o la curva más profunda.

Material y métodos

Se utiliza la base de datos de sujetos con osteoartritis temprana de rodilla a los que se les miden las fuerzas de reacción sobre el suelo en marcha (Cap. 4.2). Se toman solo las fuerzas de la pierna izquierda por simplicidad. La muestra está compuesta por 56 sujetos, los cuales realizan 6 repeticiones, por lo que en total se tienen 336 curvas. Se va a realizar el registro de las 336 curvas utilizando dos curvas patrón: por un lado la media de las 336 repeticiones y por otro lado la curva profunda de la curva profunda de cada sujeto. Es decir, como cada sujeto realiza 6 repeticiones, se calcula su curva profunda obteniendo así 56 curvas profundas. De estas 56, se vuelve a calcular la curva profunda y es la que se utiliza como patrón para hacer el registro de las 336 curvas.

Se normalizan todas las curvas de fuerza por el rango para optimizar el método de registro, ya que en especial en la fuerza mediolateral F_z este no funciona del todo bien si no se normaliza.

Se compararán después las medias de las curvas registradas con ambos métodos. Para las funciones de transformación del tiempo se utilizan 5 funciones de la base de B-Splines. Se utiliza la función `fda.usc::depth.mode()` [42] para el cálculo de la curva más profunda y `fda::register.fd()` [141] para el registro de funciones.

Resultados

Se realiza el registro de las 336 curvas de fuerza de reacción sobre el suelo para las tres componentes F_x , F_y y F_z utilizando como curva patrón la media funcional de toda la muestra y la curva más profunda de la curva más profunda de las 6 repeticiones de cada sujeto. Las curvas originales y las registradas con estas dos curvas patrones se muestran en la Figura 6.7, junto con la media de todas las curvas (negro). En estas gráficas no se aprecian grandes diferencias en las curvas registradas, si bien en la gráfica de la fuerza mediolateral F_z registrada con la curva profunda se aprecian curvas registradas con más extremos locales que las obtenidas con el registro de la media.

Para visualizar mejor estas diferencias se representa la media de las curvas registradas con ambos métodos junto con las curvas patrones (Figura 6.8). En la fuerza anteroposterior F_x no hay grandes diferencias entre los extremos de ambas medias, pero sí que hay un ligero desfase entre estas entre el mínimo y máximo, estando la media registrada con las profundas más adelantada. Los resultados para la fuerza vertical F_y son similares. No hay diferencias en los valores extremos, pero sí un desfase entre las dos curvas entre ambos extremos. En la fuerza

mediolateral F_z aparte del desfase que hay en prácticamente toda la curva entre ambas medias, sí que la media de las registradas con la profunda presenta un segundo máximo de mayor valor que la registrada con la media. Sin embargo, también presenta un mínimo menos pronunciado.

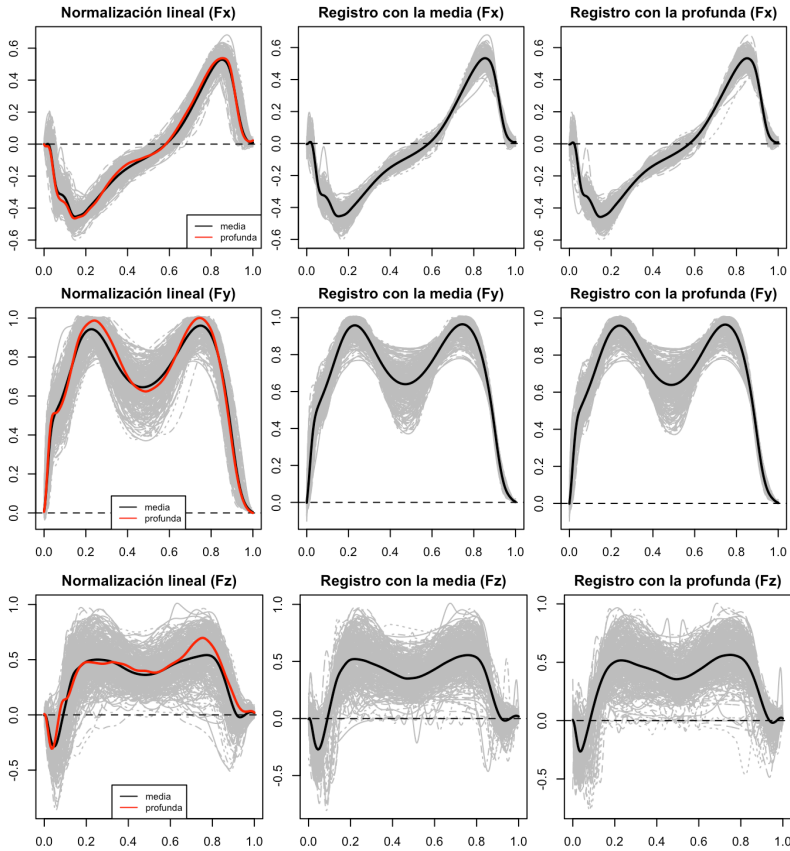


Figura 6.7: Curvas de fuerza de reacción sobre el suelo anteroposterior F_x (arriba), vertical F_y (medio) y mediolateral F_z (abajo) para la normalización lineal (izquierda) representando en esta la curva media (negro) y más profunda (rojo). En la columna central se muestra el registro realizado tomando como curva patrón la media funcional de la muestra, se marca en negro la media de las curvas registradas. En la columna derecha se muestran las curvas registradas tomando como curva patrón la curva profunda. En negro se marca la curva media de las registradas.

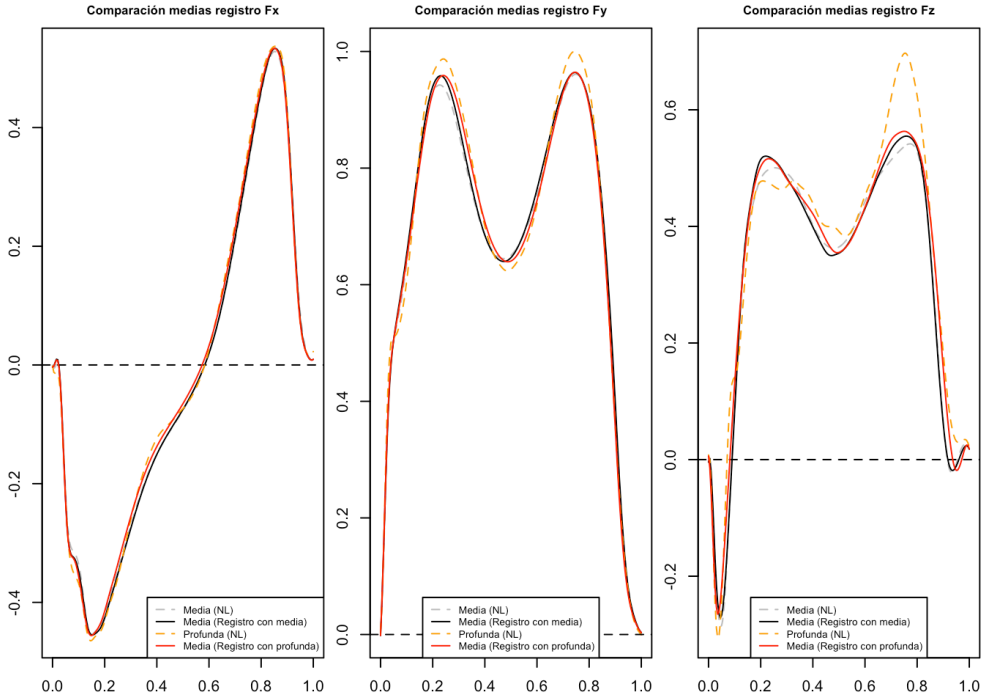


Figura 6.8: Comparación de las curvas medias obtenidas con ambos registros para la fuerza anteroposterior F_x (izquierda), vertical F_y (medio) y mediolateral F_z (derecha). En línea discontinua se marca la media (gris) y la curva profunda (naranja) de las curvas originales. Las medias de las curvas registradas empleando como curva patrón la media se muestra en negro, mientras que la media usando la curva más profunda en rojo.

Discusión

Se ha realizado el registro del tiempo utilizando el método de Ramsay de las curvas de reacción sobre el suelo de la base de datos del Capítulo 4.3. Por un lado se ha registrado utilizando como curva patrón la media de las 336 curvas y por otro lado, la curva más profunda de la curva más profunda de las repeticiones de cada sujeto. No se aprecian diferencias en términos de amplitud de las curvas medias registradas en las fuerzas anteroposterior F_x y vertical F_y , aunque sí desfases entre ambas medias (Fig. 6.8). Por tanto, en estos casos, registrar con la curva media o la más profunda no supone grandes diferencias.

En cambio, en la fuerza mediolateral F_z aparte de estos desfases también hay una diferencia en amplitud del último máximo y el mínimo de la zona central del movimiento. El máximo se explica por la posición de este extremo en la curva más profunda (naranja discontinuo) respecto del de la media (gris discontinuo). Puesto que estas curvas presentan más variabilidad, hay un efecto de cancelación de la media y es por ello que este máximo se encuentra ligeramente desplazado hacia la derecha en el caso de la media. El hecho de que la amplitud de este máximo sea considerablemente mayor en la profunda que en la media no afecta al registro, ya que alinea en posición, pero no en amplitud. El mínimo de las curvas registradas con la curva patrón es menos pronunciado que el que se obtiene para el caso de registrar con la media. Observando las curvas patrón, esto podría explicarse en el sentido de que este mínimo en la profunda está desplazado respecto al de la media. Las curvas mediolaterales presentan mucha variabilidad y estos extremos no están muy definidos en muchas de las curvas.

En resumen, registrar en el tiempo un conjunto de funciones utilizando la curva media o la curva más profunda solo produce diferencias cuando hay mucha variabilidad entre las curvas originales, como es el caso de la fuerza mediolateral. Esto es debido a que la curva media antes de registrar está muy suavizada al haber más desfase entre las funciones. En cambio, la curva profunda es una curva real de un sujeto determinado, por lo que alinea el resto de curvas a esta y a sus puntos característicos que no están suavizados.

Este es el primer trabajo en el que se utiliza la mediana funcional como curva patrón para el proceso del registro del tiempo.

6.4 Conclusiones

Las principales conclusiones que se extraen de este trabajo son las siguientes:

- Cuando las curvas presentan mucha variabilidad la media funcional no es un buen descriptivo del conjunto, ya que se produce el efecto de cancelación de la media y se obtiene una curva que no presenta características similares a las de ningún sujeto. En estos casos, la curva más profunda, como el equivalente funcional de la mediana, es más adecuada, ya que se corresponde con una curva real de un determinado sujeto.
- En curvas con poca variabilidad la media funcional es robusta y puede emplearse tanto esta como la curva más profunda. Si posteriormente se va a realizar un estudio estadístico basado en valores extremos, el hecho de considerar la media o profunda no plantea grandes diferencias. En cambio, si se va

a utilizar la curva completa como en análisis de datos funcionales, entonces sí que es importante reflexionar sobre el uso de la curva profunda en lugar de la media funcional, en especial si estas presentan mucha variabilidad.

- Calcular los intervalos de confianza de la media punto a punto no es correcto. Estas bandas de confianza no representan al conjunto. Esto se puede ver porque la curva más profunda se sale de esta banda. Como alternativa se propone el uso de unos intervalos de tolerancia obtenidos a partir de la envolvente de un porcentaje determinado de curvas más profundas obtenido por bootstrap.
- Estudiar la variabilidad en términos de la media y desviación típica punto a punto no tiene en cuenta toda la variabilidad de la muestra. Curvas representativas como la curva más profunda incluso se salen de la banda donde se encuentra el 50% de las curvas obtenido a partir de la media. Se plantea la alternativa de representar el equivalente funcional del rango intercuartílico, que sería la envolvente del 50% de las curvas más profundas. Esta banda es considerablemente más ancha que la obtenida con la desviación típica y capta correctamente toda la variabilidad de la muestra.
- En el registro del tiempo se usa como curva patrón la media funcional, pero si esta a veces no se corresponde con la de ningún sujeto, puede estar produciendo alteraciones temporales. Se ha comprobado esto realizando el registro con la media y con la más profunda y en todos los casos hay desfases entre las medias de las curvas registradas por ambos métodos. Si además las curvas presentan mucha variabilidad, también hay diferencia en los extremos de estas medias. Por tanto, en estos casos sería más conveniente considerar la curva profunda en lugar de la media funcional.

De forma general en este capítulo se ha reflexionado sobre el uso de descriptores funcionales, encontrando ciertas limitaciones en las versiones clásicas realizadas punto a punto. En cambio, el concepto de curva más profunda permite solucionar gran parte de estas limitaciones, obteniendo bandas de tolerancia y de variabilidad que representan mejor al conjunto de curvas que los obtenidos punto a punto a través de la media, demasiado optimistas y favorables para el caso funcional.

Como trabajos futuros se plantea explorar otras definiciones de curva profunda y estudiar las diferencias entre estas y a su vez con los descriptivos de media y desviación típica funcional.

Capítulo 7

Modelos lineales funcionales

En este capítulo se plantean y desarrollan diferentes aplicaciones de los modelos lineales funcionales en la valoración biomecánica clínica. Corresponden con los objetivos específicos 4 y 5. Se comienza por una revisión de las aplicaciones de las técnicas de regresión utilizadas en los estudios biomecánicos, discutiendo sus logros y limitaciones. A partir de dichas limitaciones se plantean los objetivos a cubrir mediante un enfoque funcional, que abarca dos planteamientos: la regresión de función sobre escalar y los modelos de regresión de escalar sobre función. En cada caso se plantean soluciones para resolver algunas cuestiones asociadas al enfoque funcional, como son el riesgo de error tipo I y el riesgo de sobre ajuste. Se aplican a estudios sobre valoraciones funcional de la marcha y el cuello y se comparan los enfoques clásicos, discutiendo sus ventajas, limitaciones y posibles aplicaciones futuras.

7.1 Introducción

7.1.1 *Estado del arte*

Los modelos de regresión lineal múltiple son modelos estadísticos ampliamente utilizados en Biomecánica para establecer relaciones cuantitativas entre variables independientes (predictores) y dependiente (respuesta).

Se emplean en diversas aplicaciones, desde la comparación de parámetros biomecánicos entre grupos (sanos vs. patológicos), hasta la evaluación del efecto de determinados factores, como la edad o el sexo. Una de las aplicaciones más relevantes de los modelos de regresión es la de establecer una relación entre niveles de severidad de una patología y variables biomecánicas. Esto tiene implicaciones directas en el diagnóstico y tratamiento de lesiones.

A continuación, se describen algunas de las aplicaciones de los modelos lineales en el campo de la biomecánica y se discuten sus limitaciones.

Los modelos de regresión lineal múltiple se emplean en Biomecánica para establecer relaciones entre variables. Algunos ejemplos incluyen la predicción de la torsión humeral en lanzadores de béisbol profesionales [17], la relación entre la torsión del hombro y el esfuerzo muscular percibido en tareas de transferencia de carga [31] y la predicción del ritmo del hombro [54, 182]. En el análisis de la marcha, estos modelos se han empleado para predecir la mejoría de la marcha agachada [64], analizar la marcha en pacientes con artroplastia total de rodilla [87] y predecir la velocidad de marcha en pacientes con hemiplejía [117], entre otros.

Una característica común en estos estudios es la gran cantidad de variables biomecánicas extraídas del movimiento que se consideran como posibles predictores. Por ejemplo, en un estudio de marcha [64] parten de 26 variables, en otro [87] de 22 o incluso de hasta 29 variables [117]. Este número elevado de posibles predictores del modelo requiere de un proceso de selección de variables para identificar cuáles son más relevantes para el modelo.

Para solucionar este problema, la mayoría de los estudios emplean el método de selección por pasos. Este método permite reducir el número de predictores, seleccionando solo aquellos más relacionados con la variable respuesta. Por ejemplo, en uno de los estudios [117] redujeron las 29 variables iniciales a solo 4 para el modelo final.

Esta fase de selección de variables es vital para evitar el sobre ajuste del modelo y mejorar su interpretabilidad. Sin embargo, estas variables escalares en muchas ocasiones se eligen arbitrariamente por ser puntos característicos de la curva del movimiento, perdiendo información valiosa de la curva como por ejemplo pendientes de la función. Además, la elección del método de selección de variables puede influir en los resultados del modelo. Por tanto, el empleo de toda la curva a través del Análisis de Datos Funcionales podría solucionar este problema al no tener que seleccionar variables escalares.

Por otro lado, de más interés clínico son los estudios que relacionan las variables biomecánicas y escalas clínicas. Centrándonos primero en estudios de marcha, un estudio [155] analiza parámetros de aceleración de la marcha con algunas escalas clínicas, obteniendo valores de correlación de 0,24 con el EVA (Escala Visual Analógica), de 0,09 con el WOMAC (cuestionario utilizado para evaluar el dolor en pacientes con osteoartritis) o de 0,41 con el KSS (escala funcional para cirugía de rodilla) en pacientes con artroplastia total de rodilla. Otro estudio [74] investiga la relación entre parámetros normalizados en comparación con un grupo de control sano del análisis de la marcha y medidas de resultados informados por el paciente tras una artroplastia total de rodilla, obteniendo algunas correlaciones de 0,708 en el caso de algunas escalas clínicas. Otro estudio similar [90] analiza sujetos a la espera de una artroplastia de rodilla para encontrar relación entre dos escalas clínicas y parámetros de la marcha. Encontraron correlaciones moderadas (menores a 0,6) con estas escalas clínicas y variables biomecánicas.

En análisis de movimiento de hombro, un trabajo [89] estudia la relación entre la biomecánica del hombro con 5 escalas clínicas en pacientes a las que se les ha realizado una mastectomía y reconstrucción mamaria. Se encontraron relaciones entre medidas de rigidez del hombro y algunas de estas escalas clínicas con R^2 no superiores en el mejor de los casos a 0,299, lo que equivale a un coeficiente de correlación múltiple r de 0,546.

En el caso del movimiento de cuello, hay numerosos estudios que relacionan las puntuaciones de escalas clínicas y variables cinemáticas. La mayoría de estos estudios utilizan el rango de movimiento cervical como variable de referencia. Aunque la mayoría afirman que el rango de movimiento cervical disminuye a medida que aumenta la puntuación de la escala de dolor o el índice de discapacidad, la correlación entre estas variables es baja, con valores absolutos entre 0,1 y 0,4 en la mayoría de estudios [68].

Hay menos trabajos que evalúen la relación entre variables cinemáticas del cuello obtenidas a partir de movimientos continuos y cuestionarios [163, 101, 133, 152, 30, 164]. Los resultados de estos estudios de cuello son más dispersos, debido a la variabilidad del tipo de ensayos realizados y las diferencias en las patologías analizadas. Sin embargo, existe evidencia de que a medida que aumenta el dolor o el nivel de discapacidad, los movimientos son más lentos, aunque las correlaciones no son muy altas, por debajo de 0,4. Hay algunos estudios con un tamaño muestral pequeño y sujetos con dolor agudo o altos niveles de discapacidad donde esta correlación es superior.

Resulta difícil comparar todos los estudios entre sí, porque utilizan distintas técnicas de medición y se aplican a pacientes con distintas lesiones y, sobre todo,

diferentes niveles de gravedad. Se observa que en general la relación entre las variables biomecánicas y las escalas clínicas de dolor o discapacidad no son altas, salvo cuando se analizan muestras que cubren todos los rangos de severidad, desde los leves hasta los muy severos. Cuando se estudian las variaciones en muestras de pacientes con niveles leves o moderados de severidad, la relación entre las variables biomecánicas y las clínicas decae [68, 163, 101, 133, 30, 164], lo que pone en duda la sensibilidad real de algunas variables biomecánicas para evaluar la evolución del estado de los pacientes. Por el contrario, las escalas clínicas tienen elevados niveles de fiabilidad y son ampliamente usadas en el ámbito clínico. Por tanto, quizá los predictores utilizados no son del todo adecuados. Además, estos modelos de regresión utilizan en muchas ocasiones numerosas variables escalares que deben extraerse previamente de la curva de movimiento.

La simplicidad y facilidad de interpretación de los modelos de regresión lineal hace que sean una herramienta muy útil en el campo de la Biomecánica. Además, no solo permiten identificar y cuantificar relaciones entre variables sino que también realizan una estimación de coeficientes y atribución de los predictores, esto es, determinar aquellos que son significativos. Esto tiene especial relevancia en el ámbito clínico, ya que permite comprender cómo las variables biomecánicas afectan a una determinada patología, ayudando en la toma de decisiones y en el diseño de programas de rehabilitación.

En Biomecánica se utilizan los modelos de regresión lineal múltiple, donde se relacionan diversas variables escalares (predictores) extraídas de las curvas de movimiento con la variable respuesta, también escalar. Estos modelos presentan una serie de limitaciones.

- Los niveles de correlación entre las variables biomecánicas y las escalas clínicas son bajos, inferiores a 0,5 en la mayoría de estudios. Esto sugiere que los modelos pueden no estar capturando correctamente la información del movimiento.
- Por otra parte, los predictores escalares se extraen de las curvas del movimiento, como máximos, mínimos, pasos por cero, duración de determinados eventos, rangos, etc. Por tanto, se utilizan numerosos predictores para muestras que en muchas ocasiones son reducidas. Esto incrementa el riesgo de sobre ajuste, lo que compromete la generalización de los resultados.
- Finalmente, la selección de estas variables escalares en ocasiones es arbitraria y quizá por esta razón los coeficientes de correlación sean tan bajos. Además, estas variables a veces están correlacionadas, por lo que puede distorsionar

las estimaciones de los coeficientes del modelo, dificultando la interpretación del modelo.

Frente a estas limitaciones, se plantea un enfoque que permita utilizar toda la información contenida en la curva a través de los modelos de regresión funcionales. Estos son modelos en los que la respuesta, predictores o ambos son funciones. Se estudian más en detalle dos de estos modelos: uno en los que las funciones pueden ser la variable dependiente y otro en los que esa función es la variable independiente. La primera es la habitual en Biomecánica, donde se hacen muchas regresiones punto a punto, cayendo en el problema de error tipo I, al hacer comparaciones múltiples. La segunda, es mucho menos empleada en Biomecánica aunque presenta numerosas ventajas.

Estos problemas pueden solucionarse al menos parcialmente utilizando un enfoque funcional, donde se emplee toda la curva del movimiento a través de modelos de regresión funcional. A diferencia de los modelos lineales clásicos, en los funcionales se pueden utilizar tres enfoques, según el papel de las variables funcionales ([139, Cap. 12]). Así, los modelos de regresión función sobre escalar son aquellos en los que la respuesta es funcional y los predictores son escalares. Al contrario, en los modelos de regresión escalar sobre función los predictores son funcionales y la respuesta escalar. Finalmente, los modelos función sobre función emplean tanto para la respuesta como los predictores funciones.

Modelos de regresión función sobre escalar

En estos modelos la variable dependiente es una curva y los predictores son escalares o categóricos. Se ha usado para analizar el efecto de determinadas variables sobre curvas de fuerza o movimiento [36, 57, 53].

Sin embargo, la aplicación más extendida en el campo de la Biomecánica es la versión funcional del ANOVA o FANOVA, donde esos predictores escalares se pueden codificar para representar un factor o grupo. La mayoría de estudios que emplean el FANOVA en Biomecánica plantean como objetivo demostrar que este aporta más información que el ANOVA a la vez que puede interpretarse la curva de movimiento.

El FANOVA se ha utilizado en diversas áreas de la Biomecánica, como en marcha [148, 188, 132, 7], en aplicaciones de salto en sujetos con patologías del ligamento anterior cruzado [177, 61, 2] o para el estudio de asimetría en ciclistas [157]. Hay muchas aplicaciones de FANOVA en el miembro inferior, aunque también se han

encontrado trabajos que lo utilizan para el análisis de la fatiga en extremidades superiores [71] o para analizar la carga lumbar empleando exoesqueletos [181].

Una de las ventajas que presenta el ANOVA funcional es que al emplear toda la información contenida en la curva, se pueden encontrar diferencias entre grupos que con el ANOVA clásico no aparecen. Esto se pone de manifiesto en algunos de los trabajos revisados [7, 157, 177]. Concretamente, en el estudio de asimetría en ciclistas [157] realizan un ANOVA considerando el máximo de la curva, no habiendo diferencias significativas. Sin embargo, al realizar el FANOVA sí que encuentran zonas de la curva donde el p-valor es significativo, excepto en la zona del máximo. Es decir, en ocasiones se eligen variables escalares que no están relacionadas con la variable de estudio, pudiendo extraer conclusiones erróneas. En cambio, con el enfoque funcional se analiza toda la información de la curva.

Sin embargo, a pesar de estas ventajas, la forma de plantear estos análisis de la varianza funcionales no están exentos de problemas. En efecto, aunque en estos modelos la variable pronosticada es una función, en el análisis dicha función se suele discretizar, realizando un análisis punto a punto. Esto supone, por una parte, que se hacen contrastes múltiples, típicamente 100 o más, lo que aumenta el riesgo de cometer errores de tipo I si no se corrigen los p-valores de los análisis. Además, se obvia que los ajustes se realizan sobre observaciones que no son independientes. Es decir, al comparar curvas se hace una inferencia local, esto es, se prueba una hipótesis nula para cada uno de los puntos de la curva, lo que implica muchos contrastes de hipótesis y produce un gran número de falsos positivos [130]. Los métodos clásicos, como la corrección de Bonferroni, son muy conservadores para muchos tests, por lo que no son muy adecuados en FDA, aunque algunos trabajos revisados la utilicen [157]. Por lo que se tienen que emplear otras correcciones, como la de Benjamini-Hochberg [118].

Una alternativa al análisis punto a punto es representar las funciones originales por sus componentes en una base de funciones con menos dimensionalidad, habitualmente una base de componentes principales funcionales. Este enfoque se ha empleado en varios trabajos para representar patrones de movimientos y fuerzas [95, 40, 173, 59, 73, 107]. Sin embargo, algunos estudios extraen las componentes principales funcionales y después comparan las puntuaciones obtenidas para caracterizar patrones de movimiento [95, 107] o comparar distintas articulaciones [73]. También se usan estas puntuaciones como predictores de un modelo de regresión no funcional [144, 147]. Es decir, realmente no se está usando el enfoque funcional y el potencial de este.

A pesar de lo atractivo que resulta este planteamiento, no está exento de algunas limitaciones. En primer lugar, no es infrecuente que las componentes que

muestran relaciones significativas con los predictores no sean las que explican más varianza, lo que plantea dudas acerca de su robustez frente a sujetos anómalos o modificaciones en la muestra de donde ha salido la base.

Por otra parte, la interpretación de los resultados está ligada a la del significado de las funciones de la base, que dependen también de la muestra elegida (ya que a veces se usan mezclas de sujetos sanos y patológicos y en otras ocasiones solo sanos o patológicos), sin discutir su representatividad. Esta interpretación no está exenta de un elevado grado de subjetividad.

Finalmente, se obvia el carácter funcional del problema, que simplemente se reduce a un problema de análisis escalar sobre escalar. Se asume que las funciones obtenidas en un FPCA tienen algún tipo de propiedad que las hace especialmente indicadas para identificar diferencias entre sanos y enfermos o especialmente sensibles a determinadas variaciones de las variables independientes. Sin embargo, son simplemente un tipo de base de funciones cuyas componentes deben considerarse en su conjunto para representar a las funciones originales.

Modelos de regresión escalar sobre función

Es sorprendente que no se haya usado más este enfoque, ya que es el que permite establecer en qué medida una variable biomecánica es capaz de predecir cambios en el estado funcional medido mediante escalas clínicas. Esta información es precisamente la que se obtiene con la regresión escalar sobre función, por ejemplo al relacionar una escala clínica con variables de fuerzas o de movimientos, lo que es útil para evaluar el interés clínico de las variables biomecánicas.

Sin embargo, los estudios en esta línea son escasísimos. Así, en la revisión realizada solo se ha encontrado un trabajo que utiliza este modelo en la predicción de la frecuencia cardíaca máxima [104].

Modelos de regresión función sobre función

Finalmente, la regresión función sobre función, no es muy utilizada en Biomecánica, pudiendo emplearse para establecer relaciones entre diferentes variables cinemáticas o cinéticas medidas durante un movimiento. Esta además puede utilizarse no solo para establecer relaciones entre variables, sino también entre una variable y sus derivadas, para descubrir así relaciones dinámicas [56, 86].

7.1.2 Necesidades detectadas. Objetivos

De la revisión realizada sobre los modelos de regresión en Biomecánica, se plantean las siguientes limitaciones de estos modelos:

- Los modelos de regresión emplean numerosas variables extraídas de las curvas de movimiento, por lo que hay que establecer criterios de selección de variables, habitualmente una regresión por pasos. Además, las correlaciones entre escalas clínicas y variables biomecánicas son bajas, inferior a 0,5 en la mayoría de casos.
- Los modelos de regresión funcional podrían solucionar estos problemas al considerar toda la información contenida en la curva.
- Se han encontrado trabajos que utilicen el ANOVA funcional en Biomecánica. Sin embargo, todavía está por explorar el modelo de regresión escalar sobre función, que puede ser de gran ayuda para relacionar curvas biomecánicas con escalas clínicas o niveles de dolor, que son datos escalares.
- Es muy importante poder realizar una interpretación de los resultados sobre la propia curva de movimiento, lo cual es posible con el FDA. Esto no es tan fácil o evidente con el enfoque clásico.
- El uso del FDA introduce el problema de la alta dimensionalidad al considerar curvas y la necesidad de resolver dos problemas: por un lado, controlar el número de variables para evitar sobre ajustes; y por otro lado, evitar falsos positivos en los contrastes.

El objetivo principal de este capítulo es explorar los modelos de regresión funcional, en especial los modelos escalar sobre función, muy poco utilizados en Biomecánica. Así, los objetivos que se plantean son:

- Aplicar correcciones de p-valores en modelos de respuesta funcional para controlar los falsos positivos cuando se realizan ajustes punto a punto.
- Comparar los modelos de ANOVA funcional punto a punto con un ANOVA funcional que considere toda la curva en su conjunto.
- Establecer un criterio para encontrar el número óptimo de funciones de la base de la función coeficiente, controlando así el número de parámetros del modelo, evitando sobre ajustes y controlando la robustez del modelo.

- Aplicar modelos de regresión escalar sobre función a distintas bases de datos, para relacionar escalas clínicas con variables biomecánicas, comparando con el modelo de regresión sin predictores funcionales.
- Interpretar los resultados obtenidos de los modelos de regresión funcionales a partir de la curva de movimiento, para extraer conclusiones sobre qué zonas de la función están más o menos relacionadas con la patología. Esto aporta gran valor al personal clínico en la toma de decisiones.

7.2 Modelos de regresión

En este apartado se describen los dos modelos de regresión funcional que se van a implementar: escalar sobre función y función sobre escalar.

7.2.1 Modelo de regresión escalar sobre función

Para comprender el planteamiento de los modelos de regresión funcional, comenzaremos por repasar los modelos de regresión con variables escalares. Sea una variable respuesta y_i que depende de un predictor escalar x_i , entonces el conjunto de datos consta de parejas (x_i, y_i) con $i = 1, \dots, n$ donde un x_i dado puede corresponder a diferentes respuestas. El objetivo es modelar la distribución de probabilidad de la respuesta Y_i dado el predictor x_i . El modelo de regresión más simple es:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \quad (7.1)$$

donde los errores aleatorios ϵ_i 's se asume que son independientes y distribuidos normalmente con media nula y varianza σ^2 , es decir, ϵ_i son i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidos) con $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Si se usan varios predictores escalares, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$, el modelo de regresión múltiple viene dado por:

$$Y_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j + \epsilon_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i, \quad (7.2)$$

donde $\mathbf{x}_i^T$ es la traspuesta del vector columna $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$ y $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ con ϵ_i 's i.i.d. con $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$. Es decir, se asume que $Y_i \sim N(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$.

Vamos ahora a extenderlo al caso funcional. Si se tiene un predictor funcional, x_i , y una respuesta escalar, Y_i , entonces la extensión natural del modelo de regresión simple es:

$$Y_i = \beta_0 + \int_T \beta_1(t) x_i(t) dt + \epsilon_i, \quad (7.3)$$

con los errores aleatorios ϵ_i 's i.i.d. con $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Se asume que $x \in L^2$, es decir, $\int_T x^2(t)dt < \infty$, esto es, el cuadrado de la función es integrable. Recordando que para dos funciones definidas en un dominio T , $f, g \in L^2(T)$, el producto interior se define como $\langle f, g \rangle = \int_T f(t)g(t)dt$. El modelo 7.3 se puede reescribir como:

$$Y_i = \beta_0 + \langle x_i, \beta_1 \rangle + \epsilon_i \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (7.4)$$

Así, el coeficiente numérico correspondiente al predictor escalar se sustituye por un coeficiente funcional correspondiente al predictor funcional en el modelo de regresión simple dado por la ecuación (7.1). Las funciones x_i y β_1 se pueden expresar en diferentes bases: $x_i(t) = \sum_{r=1}^{K_{x_1}} c_{ir} \psi_r(t)$ y $\beta_1(t) = \sum_{s=1}^{K_\beta} b_s \theta_s(t)$ de forma que:

$$\begin{aligned} \int_T \beta_1(t) x_i(t) dt &= \int_T \sum_{r=1}^{K_{\beta_1}} b_r \theta_r(t) \sum_{k_2=1}^{K_x} c_{ik_2} \psi_{k_2}(t) dt = \\ &= \sum_{k_1=1}^{K_{\beta_1}} \sum_{k_2=1}^{K_x} b_{k_1} c_{ik_2} \int_T \theta_{k_1}(t) \psi_{k_2}(t) dt = \sum_{k_1=1}^{K_{\beta_1}} \sum_{k_2=1}^{K_x} c_{ik_2} J_{k_1 k_2} b_{k_1} = \sum_{k_1=1}^{K_{\beta_1}} v_{k_1} b_{k_1}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde $v_{k_1} = \sum_{k_2=1}^{K_x} c_{ik_2} J_{k_1 k_2}$ es conocido.

El modelo de regresión lineal múltiple viene dado por:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{K_{\beta_1}} v_j b_j + \epsilon_i, \quad (7.6)$$

donde b_j 's son los coeficientes. Los coeficientes c_{ik} se estiman utilizando mínimos cuadrados. La base elegida y el número de funciones de la base es fundamental para la forma de la función coeficiente.

Si se consideran varios predictores funcionales $x_i^{(s)}$ con $s = 1, \dots, S$ junto con predictores escalares $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^q$, entonces el modelo de regresión funcional se puede escribir como:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{s=1}^S \langle x_i^{(s)}, \beta_s \rangle + \sum_{r=1}^q \beta_r^{(\mathbf{u})} u_{ir} + \epsilon_i. \quad (7.7)$$

Se pueden elegir distintas bases de funciones para las distintas funciones coeficiente β_s .

Se puede encontrar más información en [139, Cap. 15] y en [80, Cap. 4].

7.2.2 Modelo de regresión función sobre escalar

Habiendo extendido en el apartado anterior el modelo de regresión lineal con escalares al caso funcional, el razonamiento seguido para el modelo de regresión función sobre escalar es similar. Por tanto, se expresa directamente ya con la notación funcional.

Así, para una muestra de funciones $y_1(t), \dots, y_n(t)$ con predictores escalares x_{ij} , $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, p$, el modelo de regresión función sobre escalar viene dado por:

$$y_i(t) = \beta_0(t) + \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j(t) + \epsilon_i(t) \quad (7.8)$$

donde β_0 es la función constante del modelo y $\beta_1(t), \dots, \beta_p(t)$ son las funciones coeficiente de los predictores escalares $x_1, \dots, x_p$, y ϵ_i son i.i.d. con $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Se puede encontrar más información sobre estos modelos en [80, Cap. 5].

Cuando los predictores escalares del modelo (7.8) se codifican para expresar un factor o grupo, entonces se trata de un ANOVA funcional o FANOVA. En ellos, se obtiene un p-valor global para toda la curva que permite saber si hay diferencias significativas entre las curvas medias de los grupos [24].

Sin embargo, en la mayoría de trabajos consultados en Biomecánica se realizan modelos punto a punto. Es decir, el efecto de los predictores se analiza en cada uno de los instantes de tiempo que definen las curvas. Este planteamiento parece eficaz, y es frecuente que las variables funcionales sean más sensibles a los predictores que muchas de las variables escalares obtenidas de ellas. Sin embargo, se trata de un procedimiento que no tiene en cuenta un aspecto fundamental. En efecto, al hacer muchos análisis (habitualmente 101, si se consideran instantes de movimiento entre el 0% y el 100% del ciclo de movimiento), se está incrementando notablemente la probabilidad de cometer error de tipo I. Es decir, es posible que muchas de las aparentes ventajas del enfoque “funcional” de estos análisis sea una consecuencia de no corregir adecuadamente los p-valores, para adaptarlos a un número tan grande de análisis. Esto podría resolverse mediante algún tipo de corrección de los p-valores obtenidos por comparaciones múltiples. Una opción frecuente es el método de Bonferroni. Sin embargo, este enfoque es demasiado conservador en el caso de cientos de contrastes, que harían difícil obtener p-valores significativos.

Por ello, se propone la utilización de un modelo del campo de estadística de datos ómicos, el modelo **Limma** (modelos lineales para datos de microarrays), para abordar los problemas asociados con la alta dimensionalidad de los contrastes

en datos funcionales. Este modelo trata datos de alta dimensionalidad y baja replicación, como ocurre con los datos funcionales. A diferencia del modelo lineal clásico, basado en el ajuste por mínimos cuadrados, el modelo Limma emplea un modelo empírico bayesiano que ayuda a estabilizar las estimaciones del modelo e incorpora una corrección para pruebas múltiples, lo que se complementa después con la corrección de Benjamini-Hochberg de un modo habitual aunque se puede utilizar alguna otra técnica de corrección de p-valores.

7.2.3 Modelo limma

El conjunto de datos consiste en unos predictores escalares y una respuesta funcional $(\mathbf{x}_i, y_i)$ con $i = 1, \dots, n$ donde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$ y y_i es una función definida en el intervalo $[0, T]$. Vamos a considerar un modelo lineal para el conjunto de datos $(\mathbf{x}_i, y_i(t))$ con $i = 1, \dots, n$. Suponemos que la respuesta aleatoria $Y_i(t)$ se puede modelar como:

$$Y_i(t) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(t) + \epsilon_i(t), \quad (7.9)$$

donde los errores aleatorios $\epsilon_i(t)$ (para diferentes i 's) son independientes e idénticamente distribuidos, con una distribución normal de media cero y varianza $\sigma^2(t)$.

Se considera un conjunto discreto de tiempos, $\{t_1, \dots, t_K\}$, dentro del intervalo $[0, T]$. Para hacer hincapié en su naturaleza discreta, usaremos t_k en lugar de t . Es importante que las observaciones de diferentes tiempos no son independientes y que el número de tiempos es mucho mayor que el número de observaciones. Además, las respuestas no son independientes. Se utiliza un método conocido en la literatura de estadística ómica: el método limma, propuesto en [158] e implementado en el paquete de R [146, limma].

Para cada tiempo t_k , denotamos $\hat{\boldsymbol{\beta}}(t_k) = (\hat{\beta}_1(t_k), \dots, \hat{\beta}_p(t_k))^T$ como los estimadores de máxima verosimilitud del vector de coeficientes $\boldsymbol{\beta}(t_k) = (\beta_1(t_k), \dots, \beta_p(t_k))^T$. El estimador insesgado de $\sigma^2(t_k)$ es: $S^2(t_k) = \sum_{i=1}^n (Y_i(t_k) - \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(t_k))^2 / (n - p)$.

El método empírico bayesiano limma toma información de distintos tiempos para mejorar la estimación de la varianza $\sigma^2(t_k)$, en lugar de estimar la varianza en cada tiempo por separado. Se asume una distribución chi-cuadrado para $\sigma^2(t_k)$ que denotamos por $\sigma_k^2: \frac{1}{\sigma_k^2} \sim \frac{1}{d_0 s_0^2} \chi_{d_0}^2$.

También se asume una distribución previa para los coeficientes $\boldsymbol{\beta}$. Para el coeficiente j -ésimo en el tiempo t_k , se asume que es distinto de cero con una probabilidad p_j . Esta probabilidad no depende de t_k , es decir, $P(\beta_j(t_k) \neq 0) = p_j$. Además, se asume una distribución normal para los coeficientes no nulos,

$\beta_j(t_k) | \sigma^2(t_k), \beta_j(t_k) \neq 0 \sim N(0, v_{0j} \sigma^2(t_k))$. En [158] se demuestra que la media a posteriori de $1/\sigma^2(t_k)$ viene dada por

$$E \left[\frac{1}{\sigma^2(t_k)} \middle| s^2(t_k) \right] = \frac{1}{\tilde{s}^2(t_k)},$$

con

$$\tilde{s}^2(t_k) = \frac{d_0 s_0^2 + d(t_k) s^2(t_k)}{d_0 + d(t_k)}.$$

Se define el estadístico t moderado como:

$$\tilde{T}_j(t_k) = \frac{\hat{\beta}_j(t_k)}{\tilde{S}^2(t_k) \sqrt{v_{jj}^{(t_k)}}}. \quad (7.10)$$

Se demuestra que $\tilde{T}_j(t_k)$ y $S^2(t_k)$ son independientes y, bajo la hipótesis nula de coeficiente nulo ($H_k : \beta_j(t_k) = 0$), el estadístico t moderado $\tilde{T}_j(t_k)$ sigue una distribución t de Student, con $d(t_k) + d_0$ grados de libertad ([158, sección 4]),

$$\tilde{T}_j(t_k) \sim t_{d(t_k) + d_0}. \quad (7.11)$$

Los hiperparámetros d_0 y s_0 se estiman a partir de los datos (se puede encontrar más información en [158]) y por ello estamos usando lo que se conoce como un método empírico Bayes. Se realiza el test de hipótesis: $H_k : \beta_j(t_k) = 0$ vs $K_k : \beta_j(t_k) \neq 0$. El p-valor correspondiente se evalúa bajo la distribución nula, esto es, asumiendo cierta la hipótesis nula,

$$p_j(t_k) = P \left(\left| \tilde{T}_j(t) \right| > \tilde{t}_j(t_k) \middle| H_k \right), \quad (7.12)$$

donde $\tilde{t}_j(t_k)$ es el valor observado de $\tilde{T}_j(t_k)$.

Empleando la ecuación (7.12) se tiene una función p_j observada en tiempos discretos t_k 's. De hecho, se puede describir como un objeto funcional utilizando el análisis de datos funcionales. El número de tiempos utilizado es un criterio a elección del usuario y se puede elegir un gran número de puntos si así se considera.

Dado que se realizan múltiples pruebas (una por cada tiempo y cada coeficiente) se presenta el problema de pruebas múltiples. El p-valor obtenido en la ecuación (7.12) lo denominamos p-valor crudo. Si usamos directamente este p-valor sin aplicar ningún tipo de corrección, la posibilidad de cometer un error de tipo I es

elevada. Por lo que hay que controlar un índice global de error. Se utiliza la tasa de falsamente rechazados (False Discovery Rate, FDR), que busca controlar la proporción de falsos positivos entre los resultados significativos.

La FDR se propuso en [14]. De alguna manera se vió que la tasa FWER (family wise error rate) que cuantifica la probabilidad de cometer al menos un error tipo I era demasiado exigente y se trataba de conseguir procedimientos más potentes sin que por ello se dejase de tener una tasa de error razonable controlada. Definimos la variable aleatoria $Q = V/R$ si $R > 0$ y $Q = 0$ en otro caso. Esta variable da la proporción de test que rechazamos erróneamente. Rechazamos R de los cuales V no debieran de ser rechazados, por tanto, la proporción de hipótesis nulas falsamente rechazadas es Q . Se tiene el problema de si no se rechaza ninguna hipótesis. En este caso se tiene que $0/0$, por lo que se define el cociente como cero. De nuevo, Q es una proporción aleatoria. Lo que se quiere controlar de este valor aleatorio es la conocida como tasa de falsamente rechazados o *false discovery rate* denotada como FDR y que se define como

$$\begin{aligned} FDR = E(Q) &= \\ E\left(\frac{V}{R} \middle| R > 0\right) P(R > 0) + 0 \times P(R = 0) &= \\ E\left(\frac{V}{R} \middle| R > 0\right) P(R > 0), \end{aligned} \quad (7.13)$$

que nos da la proporción esperada de hipótesis erróneamente rechazadas entre aquellas hipótesis que se han rechazado. A la tasa FDR se le denomina tasa de falsamente rechazados que no hay que confundir con la tasa de falsos positivos.

Así, los p-valores crudos se ajustan para controlar la tasa de error (el FDR en este caso). Se pueden utilizar distintos métodos de corrección de los p-valores, en este caso se va a utilizar la corrección de Benjamini-Hochberg [14].

7.2.4 Medidas de calidad del modelo

Una de las necesidades detectadas en este capítulo es que debido a la alta dimensionalidad del FDA hay que controlar el número de variables para evitar sobre ajustes. Es decir, hay que elegir un número óptimo de bases de funciones para la función coeficiente que permita expresar correctamente la función β sin que este número sea excesivo, para tener así un modelo robusto. Está claro que si solo nos fijamos en cantidades como el coeficiente de correlación múltiple r , a más funciones mayor será este valor, pero también implica un modelo menos robusto.

Por ello, hay que considerar otras cantidades que controlen el número de bases empleado.

Se definen una serie de medidas de calidad del modelo que permitan elegir este número óptimo de bases de funciones. Se utilizan cuatro criterios:

Coefficiente de correlación múltiple r : se busca un modelo con un valor alto.

Estadístico F y p-valor del modelo : Se comprueba si todos los coeficientes del modelo pueden considerarse simultáneamente nulos, es decir, se compara el modelo anidado con todos los predictores con el modelo solo con la constante. Para ello se puede utilizar el estadístico F habitual o el p-valor correspondiente.

Criterio de Información de Akaike (AIC) [4]: definido como menos el doble de la máxima log-verosimilitud del modelo más el doble del número de parámetros del modelo:

$$AIC = -2 \max \log \text{verosimilitud} + 2p.$$

Criterio de Información Bayesiano (BIC) [154]: definido como menos el doble de la máxima log-verosimilitud más el producto del número de parámetros del modelo por el tamaño muestral,

$$BIC = -2 \max \log \text{verosimilitud} + p \ln n.$$

Tanto el AIC como el BIC son cantidades que tienen en cuenta el número de variables utilizadas, penalizando su uso. Así, un mejor modelo corresponde con un menor valor de AIC, por su propia definición. La otra cantidad, el BIC, es más restrictiva que el AIC, al penalizar el número de variables con $p \ln n$, ya que $\ln n > 2$ para valores no muy pequeños del tamaño muestral n . La medida AIC atiende más a la predicción, buscando modelos con mejores predicciones. En cambio, el BIC exige que, para incorporar variables al modelo, estas realmente lo mejoren. Es decir, busca modelos más simples aunque con una capacidad más limitada de proporcionar buenas predicciones. Por tanto, se busca minimizar tanto el AIC como el BIC, siendo este último más restrictivo.

Así, un número óptimo de funciones para la base de la función coeficiente será aquel que proporcione valores altos del coeficiente de correlación múltiple r , junto con un AIC y BIC bajo y un valor razonable del estadístico F . En ocasiones no

pueden darse los cuatro criterios a la vez, por lo que se trata de una solución de compromiso.

7.2.5 Aplicaciones y modelos implementados

Se describen varios modelos implementados como aplicación de los modelos de regresión funcional. Dos aplicaciones corresponden a modelos función sobre escalar y tres a modelos de regresión escalar sobre función.

- **ANOVA funcional.** Se compara el enfoque de realizar un modelo lineal punto a punto con un ANOVA funcional para encontrar diferencias significativas en las fuerzas de reacción sobre el suelo entre sujetos sanos y patológicos. En el modelo punto a punto se utiliza también el modelo limma, corrigiendo los p-valores con la corrección de Benjamini-Hochberg. Se comparan los resultados obtenidos con ambos enfoques.
- **Regresión función sobre escalar: relación entre curvas de movimiento de flexo-extensión del cuello y variables clínicas e individuales.** Se diseña un modelo lineal con predictores escalares y respuesta funcional (curvas del movimiento de flexo-extensión del cuello) aplicando el modelo limma.
- **Regresión escalar sobre función: relación entre el NDI y el movimiento de flexo-extensión del cuello.** En esta aplicación se realiza un modelo de regresión escalar sobre función para relacionar el NDI (respuesta) con las curvas del movimiento de flexo-extensión del cuello.
- **Regresión escalar sobre función: relación entre el EVA y las fuerzas de reacción sobre el suelo en sujetos con osteoartritis temprana de rodilla.** Se plantea otra aplicación similar a la anterior, pero para los datos de EKOA, donde se quiere relacionar el EVA (respuesta) con las curvas de fuerza de reacción sobre el suelo.
- **Regresión escalar sobre función: relación entre el NDI y movimientos del cuello. Selección de variables.** La última aplicación está más centrada en la selección de variables del modelo de regresión. Así, primero se comparan los modelos funcionales obtenidos en tres movimientos analizados del cuello y sobre el que tiene mayor capacidad predictiva se hace una selección de variables escalares.

Para realizar los modelos de regresión escalar sobre función no se ha utilizado ninguno de los paquetes de R sobre FDA, sino que se ha programado la matriz

del modelo y se han usado las funciones de R de modelos lineales habitualmente empleadas para realizar este tipo de análisis. El código de esta matriz de modelo está desarrollado en el Anexo [A.1](#).

7.3 Aplicaciones

7.3.1 ANOVA funcional

Uno de los objetivos planteados en este capítulo es el de comparar los modelos lineales punto a punto cuyo predictor sea categórico con un ANOVA funcional que considere toda la curva en su conjunto. Además, al realizar un modelo punto a punto es necesario corregir los p-valores para controlar los falsos positivos. La aplicación que se propone en este subapartado trata de alcanzar esos objetivos, aplicando un modelo lineal sobre los datos de fuerza de reacción sobre el suelo medidos en pacientes con EKO. Así, se quieren encontrar diferencias significativas entre el grupo de sanos y enfermos utilizando las curvas de fuerza de reacción sobre el suelo.

Material y métodos

Partiendo de la base de datos de marcha en sujetos con osteoartritis temprana de rodilla (Cap. 4.2) se realiza primero un modelo lineal punto a punto, discretizando la función y evaluándola en 100 puntos. Se realiza el ajuste utilizando también el modelo limma, corrigiendo posteriormente los p-valores a través de la corrección de Benjamini-Hochberg. Para el modelo limma se usa la función de R `limma::lmFit()` y `limma::eBayes()` del paquete [146].

Después, se hace el ANOVA funcional planteado en [24], para comparar los resultados obtenidos. El objetivo es analizar si hay diferencias significativas en las fuerzas de reacción sobre el suelo entre sujetos sanos y patológicos. Para ello, se usa la función `fda.usc::fanova.onefactor()` [42].

Resultados

La Figura 7.1 muestra las curvas de las fuerzas de reacción sobre el suelo para el grupo de sanos (verde) y patológicos (rojo), junto con sus respectivas medias y la media de toda la muestra (negro). Visualmente no se observan diferencias entre las medias de ambos grupos ni en la fuerza anteroposterior ni en la fuerza vertical.

En la fuerza mediolateral sí que se observan diferencias entre ambas medias en algunas zonas de la curva.

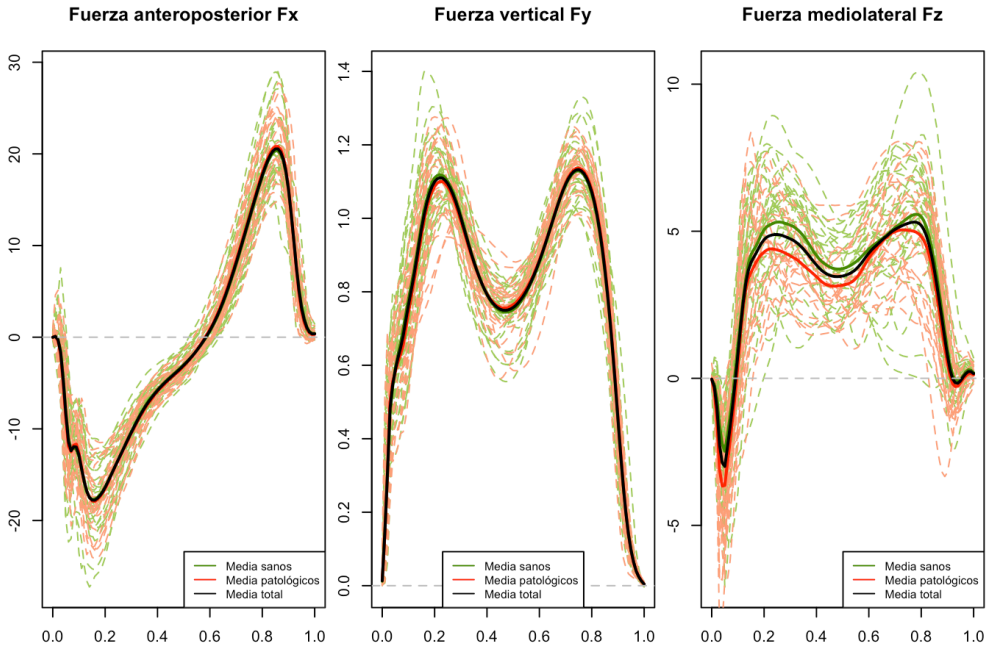


Figura 7.1: Curvas de los sujetos sanos (discontinua verde) y patológicos (rojo) junto con la media del grupo de sanos (línea sólida verde), de patológicos (línea sólida roja) y de la muestra total (línea sólida negra) para la fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z .

Se ajusta el modelo y se contrasta si el correspondiente coeficiente es nulo, obteniendo la función de p-valores que se muestra en la Figura 7.2 (negro). Se marca con una línea horizontal gris el valor de 0,05 para poder identificar mejor qué zonas serían significativas. En la gráfica de la fuerza mediolateral se ha marcado también con una línea gris discontinua el valor de 0,10. Como se están haciendo comparaciones múltiples es necesario corregir estos p-valores crudos, en este caso a través de la corrección de Benjamini-Hochberg, obteniendo las funciones de p-valores marcadas en rojo. Por último, las funciones en azul muestran los p-valores obtenidos del modelo limma tras aplicar la corrección de Benjamini-Hochberg. La corrección hace que los p-valores crudos aumenten notablemente su valor, en especial en la fuerza anteroposterior y vertical. También en la mediolateral, pero en menor medida.

Ni en la fuerza anteroposterior ni en la mediolateral se encuentran diferencias significativas entre el grupo de sanos y patológicos, puesto que ningún p-valor es inferior a 0,05, ni siquiera en la función de p-valores crudos. En cambio, en la fuerza mediolateral F_z sí que hay ciertas zonas de la curva donde esta función de p-valor cruda $p(t)$ toma valores inferiores a 0,05. Sin embargo, después de aplicar la corrección la función $\tilde{p}(t)$ toma valores superiores a 0,05. No obstante, podrían considerarse algunas zonas de la curva significativas, con p-valores inferiores a 0,10, ya que se trata de una muestra pequeña ($N=56$).

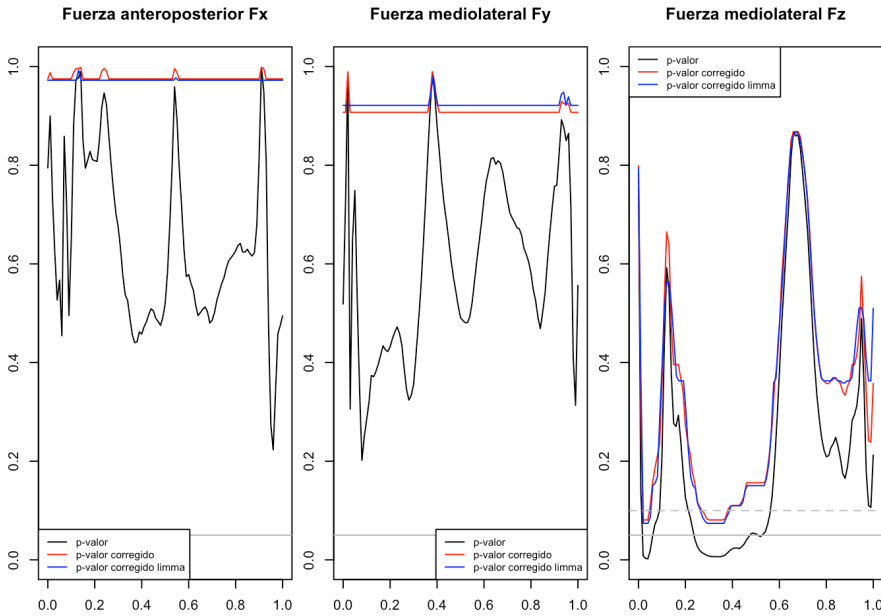


Figura 7.2: Funciones de p-valor al hacer el ANOVA punto a punto. En negro la función $p(t)$ para el ANOVA clásico, en rojo el corregido con la corrección de Benjamini-Hochberg y en azul el obtenido con el modelo limma tras aplicar la corrección de Benjamini-Hochberg. Se muestran las funciones de p-valores para las tres fuerzas de reacción sobre el suelo. Se marca con una línea horizontal continua gris el p-valor=0,05. Solo para la fuerza mediolateral se marca también el valor de 0,10 con una línea discontinua gris.

Por último, se ha realizado un ANOVA funcional de forma conjunta para todas las funciones de fuerza de reacción sobre el suelo [24]. Así, se obtiene un p-valor único para cada una de las fuerzas que permite determinar si hay diferencias significativas entre ambos grupos para ese conjunto de curvas dado. En la fuerza anteroposterior F_x el p-valor obtenido es 0,88, mientras que para la fuerza vertical

F_y de 0,78 y para la mediolateral F_z de 0,09. Por tanto, ni la fuerzas F_x ni la F_y presentarían diferencias significativas entre grupos. Para la fuerza F_z aunque el p-valor es superior a 0,05, es inferior a 0,1 y se trata de un tamaño muestral pequeño, por lo que podría considerarse que habría ligeras diferencias significativas entre las medias de ambos grupos.

Discusión

Se ha realizado un modelo lineal punto a punto sobre las funciones de fuerza de reacción sobre el suelo en sujetos sanos con dolor de rodilla y sujetos patológicos, para determinar si hay diferencias significativas entre las medias de ambos grupos. Se ha discretizado la función utilizando 100 puntos. Visualmente se observa que hay diferencias entre las medias del grupo de sanos y patológicos en la fuerza mediolateral (Figura 7.1). Al realizar el modelo lineal punto a punto, se obtiene un p-valor en cada tiempo ajustado, que son los mostrados en la Figura 7.2. Se hace notable la importancia de corregir estos p-valores, ya que aumenta considerablemente su valor. El modelo limma disminuye ligeramente el valor de la función de p-valores respecto de los obtenidos al aplicar el modelo lineal punto a punto y la corrección de Benjamini-Hochberg.

Ni la fuerza anteroposterior ni la mediolateral presentan p-valores significativos. En cambio, en la fuerza mediolateral sí que hay zonas de la curva significativas antes de aplicar la corrección. Sin embargo, tras aplicar la corrección de Benjamini-Hochberg, tanto en el modelo lineal como en el modelo limma, estos valores aumentan y solo pequeñas zonas de la función tienen un p-valor inferior a 0,1. Sin embargo, como es una muestra pequeña, podría considerarse significativo. Estas zonas coinciden con las diferencias que se observan entre la media de sanos y patológicos de la Figura 7.2.

Estos resultados guardan relación con los p-valores obtenidos al aplicar el ANOVA funcional propuesto en [24], ya que tanto para la fuerza anteroposterior F_x como vertical F_y no son significativos (0,88 y 0,78 respectivamente), mientras que para la fuerza mediolateral F_z podría considerarse significativo (0,09) de acuerdo al tamaño muestral.

Por tanto, con esto se ha podido comprobar que realizar un modelo funcional punto a punto proporciona información valiosa sobre qué zonas de la curva presentan diferencias significativas entre ambos grupos. Sin embargo, es de suma importancia corregir estos p-valores al estar haciendo comparaciones múltiples para evitar el error de tipo I. Esto se puede observar en especial en la fuerza mediolateral, donde las zonas donde la función presentaba diferencias significativas

se ve notablemente reducida tras aplicar la corrección de Benjamini-Hochberg. Esta corrección resulta más adecuada cuando se tiene una alta dimensionalidad, ya que la corrección de Bonferroni resulta demasiado conservadora. Por último, la utilización del modelo limma reduce ligeramente estos p-valores en algunas zonas de la curva.

No obstante, en ocasiones también conviene saber si de forma general las funciones de un determinado grupo presentan diferencias significativas respecto de las de otro grupo. Un modelo lineal punto a punto no proporciona esta información, ya que da una función de p-valores en cada punto en el que se ha hecho el ajuste. Es más conveniente en este caso el ANOVA funcional propuesto por [24] donde se obtiene un p-valor global. Sin embargo, la totalidad de trabajos publicados en aplicaciones biomecánicas utilizan modelos punto a punto [148, 188, 132, 7].

7.3.2 Regresión función sobre escalar: relación entre curvas del movimiento de flexo-extensión del cuello y variables clínicas e individuales

En esta aplicación se aplica de nuevo un modelo de regresión función sobre escalar, con la diferencia de que en este caso hay también predictores escalares numéricos. Se realizan modelos lineales punto a punto para obtener las curvas del movimiento de flexo-extensión del cuello a partir del nivel de discapacidad, edad, género y longitud de cuello. Se utiliza el modelo limma y la corrección de Benjamini-Hochberg para corregir los p-valores al realizar comparaciones múltiples.

Material y métodos

Se implementa un modelo lineal donde se tienen predictores escalares y cuya respuesta son las funciones del movimiento de flexo-extensión del cuello (Cap. 4.1). La muestra está compuesta por 56 repeticiones, de las cuales solo se consideran 55 porque una presenta errores en la medición de las curvas del movimiento.

Se ajustan tres modelos diferentes de regresión funcional sobre escalar, punto a punto, utilizando 100 puntos. La respuesta funcional es el ángulo, velocidad y aceleración angular, respectivamente. Los predictores escalares son el nivel de discapacidad (NDI), edad, longitud de cuello y género.

Se realiza un modelo de regresión punto a punto para cada tiempo t_k de las curvas. Para cada tiempo t_k , se tiene un vector de coeficientes correspondiente a los predictores, $\beta(t_k)$. La estimación del error estándar de estos coeficientes se hace a través de dos procedimientos: por el método habitual (sin utilizar información

entre distintos tiempos) y el modelo `limma` (los diferentes ajustes se usan para estimar la varianza del error aleatorio). De acuerdo a estos dos enfoques, se obtendrán los estadísticos t habituales y los estadísticos t moderados, y dos p-valores, uno por estadístico, para contrastar el coeficiente j -ésimo nulo en el tiempo t_k . Es decir, para el j -ésimo predictor escalar, se tienen dos p-valores que podemos denotar por p_{uj} y p_{lj} cuando se utiliza el estadístico t habitual y moderado para el j -ésimo coeficiente.

Para el j -ésimo coeficiente, los p-valores $p_{uj}(t_k)$ para los diferentes tiempos t_k deben corregirse debido al problema de los múltiples contrastes con una fuerte correlación entre tiempos cercanos. Se utiliza para ello la corrección de Benjamini-Hochberg.

Se usa la función de R `limma::lmFit()` y `limma::eBayes()` del paquete [146].

Resultados

Se ajustan tres modelos en cada tiempo t_k para cada una de las respuestas funcionales: ángulo, velocidad y aceleración angular del movimiento de flexo-extensión del cuello. Los predictores escalares son el nivel de discapacidad (NDI), longitud de cuello, género y edad.

Las Figuras 7.3 y 7.4 muestran los p-valores para los diferentes modelos y predictores. En cada gráfica se muestra el p-valor crudo, es decir, sin ajustar obtenido del modelo clásico (gris) para compararlo con el que se obtiene al corregirlo con la corrección de Benjamini-Hochberg (negro) y el corregido por el modelo `limma` y posteriormente con Benjamini-Hochberg (rojo). Se muestra una línea discontinua negra correspondiente a un p-valor de 0,05 para poder identificar mejor qué zonas de la curva son significativas en cada predictor.

La corrección de Benjamini-Hochberg tiene un impacto notable en los p-valores, aumentando su valor y haciendo que predictores que antes de la corrección eran significativos, después de aplicarlo no lo sean. Esto ocurre por ejemplo para la longitud del cuello en el modelo de velocidad angular (Figura 7.3 abajo) o en el de aceleración angular (Figura 7.4).

Ningún predictor sería estadísticamente significativo en el modelo angular (Figura 7.3 arriba) y solo el NDI y la edad serían significativos en los modelos de velocidad (Figura 7.3 abajo) y aceleración angular (Figura 7.4) en ciertas partes de la curva.

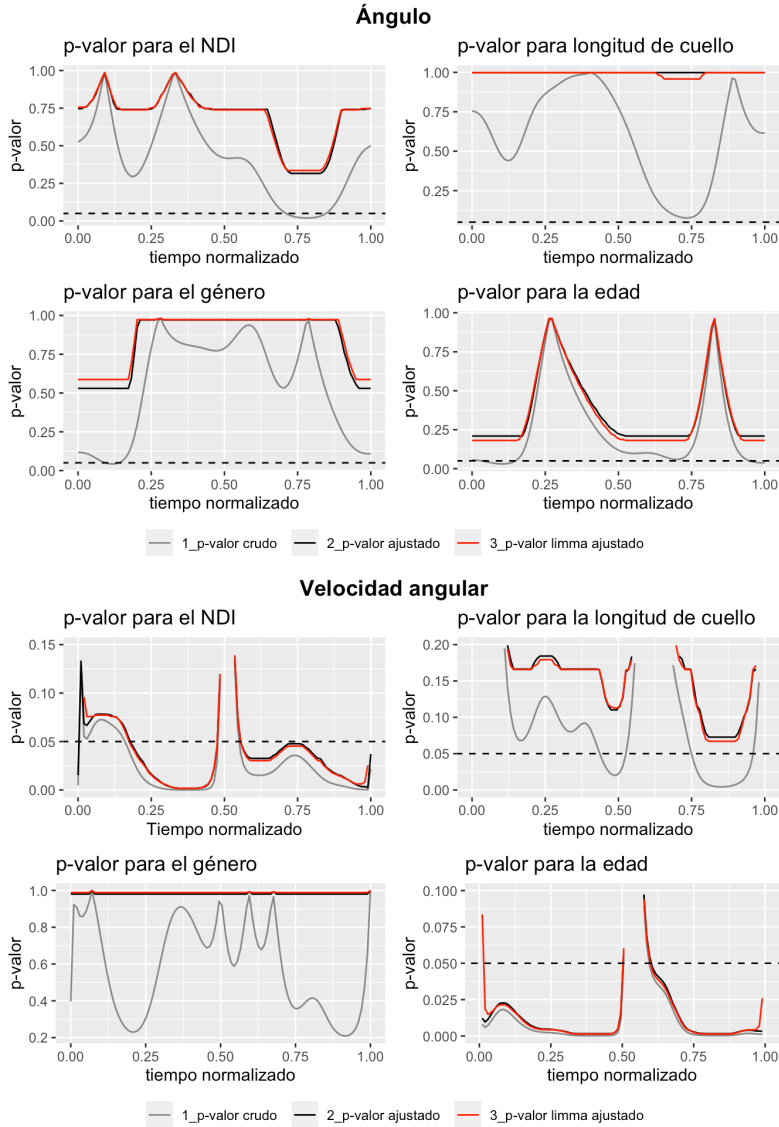


Figura 7.3: Funciones de los p-valores, $p(t)$, para los cuatro predictores: NDI, longitud de cuello, género y edad para el modelo angular (arriba) y de velocidad (abajo). En cada gráfica hay tres funciones $p(t)$: el p-valor crudo $p(t)$ con el modelo de regresión punto a punto habitual (gris), estos p-valores ajustados $\tilde{p}(t)$ (negro) y los p-valores de limma ajustados $\tilde{p}(t)$ (rojo). Se muestra el umbral del p-valor de 0,05 con una línea discontinua.

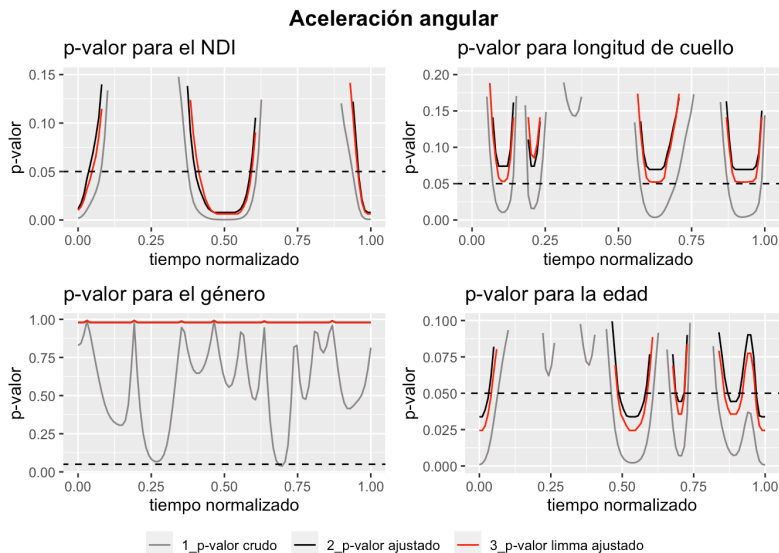


Figura 7.4: Funciones de los p-valores, $p(t)$, para los cuatro predictores: NDI, longitud de cuello, género y edad para el modelo de aceleración. En cada gráfica hay tres funciones $p(t)$: el p-valor crudo $p(t)$ con el modelo de regresión punto a punto habitual (gris), estos p-valores ajustados $\tilde{p}(t)$ (negro) y los p-valores de limma ajustados $\tilde{\tilde{p}}(t)$ (rojo). Se muestra el umbral del p-valor de 0,05 con una línea discontinua.

En la Figura 7.5 se muestra el gráfico de efectos para los modelos de velocidad y aceleración angular para distintos valores de NDI y edad, puesto que solo estos dos predictores son significativos en estos dos modelos. No se muestra el gráfico de efectos para el modelo angular ya que ningún predictor es significativo.

En estas figuras se puede observar que conforme aumenta el NDI disminuye el rango de velocidad angular, ya que disminuyen los máximos y mínimos. La edad tiene un efecto similar sobre la velocidad. El modelo predice movimientos más lentos para sujetos mayores.

Estos efectos son similares en la aceleración, donde incrementos en el NDI y edad están asociados con una disminución en la amplitud de la aceleración. Sin embargo, en este caso, la zona donde estos predictores son significativos es más estrecha que en la velocidad.

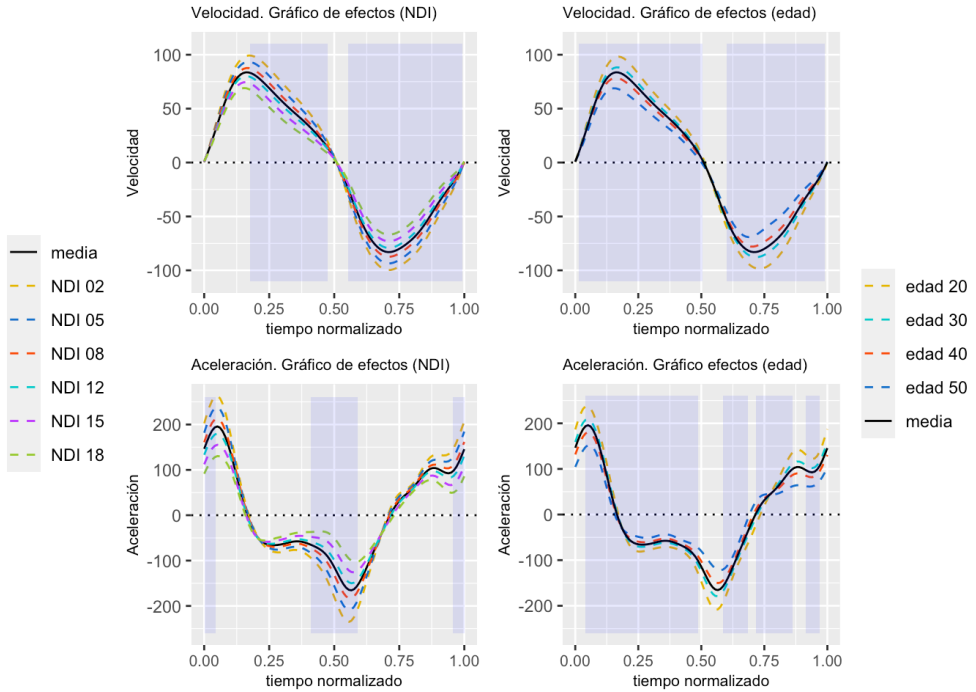


Figura 7.5: Gráfico de efectos para la velocidad (arriba) y aceleración (abajo). A la izquierda el gráfico de efectos para diferentes valores de NDI, manteniendo constante la edad, longitud de cuello y género con su valor medio. A la derecha se muestra el gráfico de efectos para diferentes valores de la edad, manteniendo constante el NDI, longitud de cuello y género en su valor medio. Las áreas que han salido significativas en el modelo se somborean en azul.

Para comprobar la robustez del modelo, se ha estudiado el efecto de considerar distintos puntos de ajuste: 100, 1.000 y 10.000. En la Figura 7.6 se muestran los p-valores corregidos con limma y Benjamini-Hochberg para el modelo de velocidad para 100 (negro), 1.000 (rojo) y 10.000 puntos (azul). Como se puede observar, no hay prácticamente diferencia entre los p-valores según el número de puntos elegido.

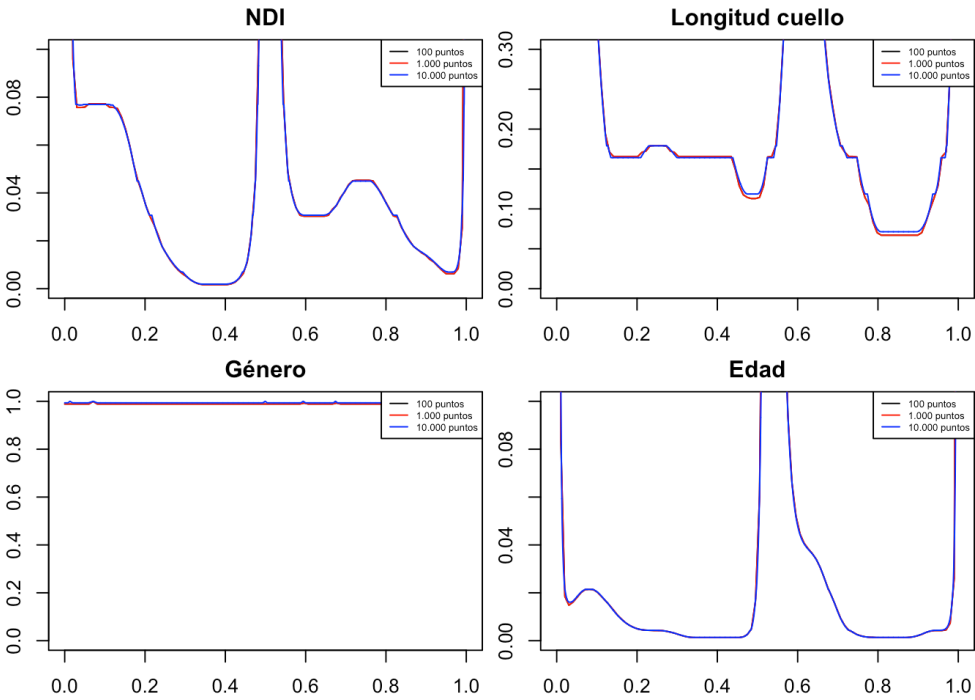


Figura 7.6: Comparación de los p-valores corregidos obtenidos con el modelo limma según el número de puntos considerado (100 en negro, 1.000 en rojo o 10.000 en azul) para el modelo de velocidad.

Discusión

Se ha utilizado un modelo de regresión lineal para estudiar el efecto del nivel de discapacidad (NDI) en curvas de movimiento en pacientes con dolor inespecífico de cuello. El NDI se ha utilizado como variable predictora y de control para características individuales como el género, la edad o longitud de cuello. Como variables dependientes se han utilizado las curvas de posición, velocidad y aceleración angular del movimiento de flexo-extensión.

Cada curva se ha representado mediante 100 puntos en una escala de tiempo normalizada y se ha ajustado punto a punto al modelo en cada tiempo t_k , generando curvas de p-valores, $p(t)$, que se corrigen a través de la corrección de Benjamini-Hochberg para reducir el riesgo de errores tipo I debido a las comparaciones múltiples. Además, se ha utilizado la regresión limma junto con la

regresión clásica, ya que mejora el ajuste del modelo mediante la regularización bayesiana empírica, que mejora la estimación de la varianza del error y estabiliza las correcciones del modelo.

Los resultados tras aplicar la corrección de Benjamini-Hochberg muestran el drástico aumento de los p-valores brutos. Esto provoca que los predictores que inicialmente eran significativos en ciertas áreas de la curva, ya no lo sean tras la corrección (Figuras 7.3 y 7.4). Esto pone de manifiesto la importancia de corregir el p-valor cuando se analizan curvas de movimiento, subrayando el riesgo de errores tipo I. Las diferencias entre los p-valores corregidos del modelo de regresión lineal y los corregidos del modelo limma son menores. En la mayoría de casos, la corrección del modelo de limma es ligeramente menos conservadora que la del modelo de regresión lineal.

En el caso de las curvas del modelo angular, ninguna de las variables predictoras es significativa después de la corrección, mientras que el NDI y la edad sí que lo son para los modelos de velocidad y aceleración. Estos resultados son coherentes con estudios previos, donde se han encontrado correlaciones muy débiles entre el NDI y el rango de movimiento [68, 163].

Las funciones $p(t)$ correspondientes a las curvas de velocidad y aceleración muestran una relación significativa con el NDI y la edad, tanto en los valores brutos sin corregir, como en menor medida en los corregidos. La longitud del cuello afecta a las velocidades y aceleraciones cuando se utilizan los p-valores brutos, pero no en cambio tras la corrección. El género no es significativo ni antes ni después de la corrección. El efecto del NDI y la edad en la velocidad y aceleración muestra una disminución de estos conforme aumenta el NDI y la edad de los sujetos. Así, según la Figura 7.5, a mayor nivel de discapacidad, menor velocidad y aceleración. Asimismo, a medida que aumenta la edad, los máximos y mínimos de ambas variables también disminuyen. Estos resultados guardan relación con los obtenidos en otros estudios previos donde se utilizan rangos o valores máximos de velocidades o aceleraciones [11, 13, 30, 101, 133].

El efecto de la edad y NDI en las curvas cinemáticas se muestra en la Figura 7.5, donde se puede ver cómo cambia la velocidad y aceleración en función de la edad del paciente y la puntuación en el NDI. Estas curvas representan el ajuste del modelo, que es independiente del método de corrección de los p-valores. El método de corrección solo afecta a la estimación del error sin influir en los coeficientes del modelo ni en el efecto del tamaño estimado. Respecto al efecto de la edad en la velocidad, el modelo predice movimientos más lentos conforme aumenta la edad del paciente. Ocurre algo similar para la aceleración, donde la aceleración es menor para mayores edades, con una reducción especialmente pronunciada en

los extremos del movimiento (flexión y extensión máximas), donde la aceleración alcanza sus valores máximos. Estos resultados coinciden con estudios previos [11, 13], donde estudiaron los valores máximos en lugar de las curvas cinemáticas completas.

Se observa un comportamiento similar en el efecto del NDI sobre las curvas cinemáticas. Así, una puntuación más alta en el NDI se asocia con movimientos más lentos, lo que implica una menor velocidad y aceleración en todo el rango de movimiento, especialmente en los máximos y mínimos locales. Estos resultados son coherentes con otros estudios previos que reportan una correlación negativa entre el NDI y las velocidades pico en diversas patologías [30, 101, 133, 163], aunque ninguno ha analizado el efecto del NDI sobre la curva completa. Ningún trabajo estudió la correlación entre el NDI y la aceleración, aunque en [13] reportaron una reducción significativa en la aceleración pico en pacientes con latigazo cervical en comparación con sujetos controles sanos.

El uso de variables continuas en lugar de valores discretos como máximos o mínimos permite identificar qué zonas de la curva un predictor tiene una influencia más significativa, como se muestra en las zonas sombreadas de la Figura 7.5. En el caso del NDI, hay dos zonas que afectan significativamente tanto a las curvas de velocidad como las de aceleración (gráficas de la izquierda de la Fig. 7.5). Estas serían en la fase de frenado de los movimientos de extensión y flexión. En el caso de la aceleración, el NDI afecta significativamente en los extremos del rango de movimiento. Finalmente, no se encontraron relaciones significativas en ninguna zona de la curva del ángulo para el NDI. Esto sugiere que las curvas de velocidad y aceleración proporcionan información más relevante para evaluar la discapacidad cervical. Esto además coincide con estudios previos que han demostrado que las velocidades angulares están más estrechamente relacionadas con las discapacidades funcionales y el dolor cervical que el rango de movimiento [101, 133].

Finalmente, se ha estudiado la influencia en los p-valores al considerar un número determinado de puntos de la curva. Se muestra en la Figura 7.6 donde están representados los p-valores para el modelo de velocidad angular. Las funciones $p(t)$ son muy similares aunque el número de puntos cambie de 100 a 10.000. Esto demuestra la robustez del método y de la corrección empleada, pese a que al aumentar el número de puntos se aumente el número de comparaciones.

7.3.3 Regresión escalar sobre función: relación entre NDI y movimiento de flexo-extensión del cuello.

En esta aplicación se implementa un modelo de regresión escalar sobre función para relacionar el nivel de discapacidad con las curvas del movimiento de flexo-extensión del cuello. Se aplican como criterios para elegir el número óptimo de funciones de la base las medidas de calidad del modelo descritas en el apartado 7.2.4. Estas medidas también sirven para comparar modelos y determinar qué modelos funcionales tienen mayor capacidad predictiva. Finalmente, se hace una interpretación de la función de coeficientes que permite extraer conclusiones sobre qué zonas del movimiento están más relacionadas con el nivel de discapacidad.

Material y métodos

Se van a implementar dos modelos de regresión funcional, considerando en uno las curvas de ángulo y en el otro las de velocidad angular, con el NDI como respuesta escalar. Se usa la base de datos de cuello descrita en el apartado 4.1 considerando el movimiento de flexo-extensión. De nuevo, en vez de considerar las 56 repeticiones, se consideran solo 55 porque una presenta errores de medición en la curva de movimiento.

Primero se obtiene el número óptimo de funciones de la base para la función de coeficiente. De los dos enfoques empleados para elegir este óptimo, se elige el de usar una base de baja dimensión en lugar de usar el enfoque de la penalización de rugosidad. Se prefiere esta opción porque permite una mejor interpretación de la función coeficiente. Se utilizan los criterios definidos en el apartado anterior para obtener este número de funciones. La base utilizada es la de Fourier. Así, como esta base está formada por una constante más parejas de senos y cosenos, el número de bases debe ser un número impar.

Se implementan también modelos no funcionales para comparar los resultados respecto de los modelos funcionales. Todos los modelos implementados están descritos en la Tabla 7.1.

Por otro lado, se ha ajustado un modelo anidado para evaluar la mejora de los modelos funcionales en comparación con los no funcionales. Se realizará solo para el modelo funcional de velocidad angular. Así, en un primer análisis se analiza la mejora del NDI añadiendo al modelo de velocidad $\omega(t)$ las dos variables escalares RoM y RoV. Después, se realiza la comprobación contraria. Es decir, partiendo del modelo no funcional de RoM y RoV, si añadir la variable funcional mejora el modelo previo. Para ello, se realiza un contraste de hipótesis donde la hipótesis

Tabla 7.1: La tabla muestra los distintos modelos implementados según la naturaleza de los predictores. En primer lugar, cuatro modelos de regresión escalar sobre escalar utilizando el rango angular (RoM) y la velocidad angular (RoV); dos modelos escalar sobre función considerando las curvas de ángulo $\varphi(t)$ y de velocidad $\omega(t)$; y por último dos modelos donde se utiliza un predictor funcional (velocidad) y predictores escalares (RoM y RoV). Se usa la notación de las formulas de R, por ejemplo $ndi \sim RoM$ corresponde a $ndi_i = \beta_0 + \beta_1 RoM_i + \epsilon_i$. La interacción entre predictores se representa con los dos puntos, por ejemplo $RoM : RoV$.

Tipo de predictor	Modelo
Escalar	$ndi \sim RoM$
	$ndi \sim RoV$
	$ndi \sim RoM + RoV$
	$ndi \sim RoM + RoV + RoM : RoV$
Funcional	$ndi \sim \varphi(t)$
	$ndi \sim \omega(t)$
Escalar y funcional	$ndi \sim \omega(t) + RoV$
	$ndi \sim \omega(t) + RoV + RoM$

nula H_0 corresponde a que ambos modelos no son diferentes. Es decir, que los coeficientes de las variables introducidas en el modelo más complejo M_1 son nulos. Si el p-valor es alto, no hay evidencia para rechazar la hipótesis nula, por lo que las variables añadidas no mejoran el modelo previo. Al contrario, si este p-valor es bajo, hay evidencia para rechazar la H_0 , por lo que las variables añadidas al modelo más simple M_0 mejoran significativamente los resultados.

Resultados

- **Número de funciones de la base.** En la Tabla 7.2 y 7.3 se muestran los resultados de los criterios de selección del número de funciones de la base de Fourier (AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y el p-valor del modelo), para el modelo funcional del ángulo y de la velocidad, respectivamente.

Se trata de encontrar una solución de compromiso entre las diferentes cantidades. Por ejemplo, aunque para la velocidad (Tabla 7.3) considerar 5 bases proporciona el valor más alto del estadístico F y más bajo de AIC y BIC, el coeficiente de correlación también es el más bajo. En cambio, considerando 9 bases, se llega a un óptimo de coeficiente de correlación (0,64), con un AIC similar (320), aunque el BIC haya aumentado ligeramente y el estadístico F sea menor. Para el ángulo, este óptimo de número de bases se alcanza para 9 funciones también.

En conclusión, se consideran 9 funciones de la base de Fourier para la función coeficiente, tanto para el modelo angular como para el de velocidad. Es decir, la constante y cuatro pares de senos y cosenos.

Tabla 7.2: Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor del modelo para distintos números de base para el modelo funcional del ángulo.

Número bases	AIC	BIC	r	F	p-valor
5	324	339	0.51	3.38	0.011
7	327	345	0.52	2.55	0.026
9	328	350	0.56	2.32	0.031
11	331	357	0.58	1.94	0.061

Tabla 7.3: Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor del modelo para distintos números de base para el modelo funcional de la velocidad.

Número bases	AIC	BIC	r	F	p-valor
5	319	333	0.58	4.88	0.001
7	320	338	0.61	3.88	0.002
9	320	342	0.64	3.48	0.002
11	323	350	0.64	2.75	0.009

- **Comparación de modelos.** La Tabla 7.4 muestra diferentes cantidades de bondad del ajuste de los modelos no funcionales, funcionales y los que mezclan predictores funcionales con escalares. Los modelos no funcionales son los que presentan peores valores de correlación múltiple, con $r < 0$, 349 para el caso del modelo más completo. El ajuste considerando el RoV es considerablemente mejor que el que considera el RoM ($r = 0.298$ vs. $r = 0.017$), siendo además un modelo con un p-valor no significativo ($p = 0.902$). Si se añade la interacción de ambos predictores escalares el coeficiente de correlación mejora ligeramente ($r = 0.352$), pero a costa de empeorar los valores del estadístico F y del p-valor.

Los modelos funcionales mejoran la correlación con el NDI, con un estadístico F significativo. Así, el modelo que usa las curvas de ángulo $\varphi(t)$ tiene una correlación múltiple de $r = 0.563$, en comparación al no funcional que considera el RoM, con un $r = 0.017$. En el caso de la velocidad angular, la mejora en el coeficiente de correlación múltiple del modelo funcional respecto del no funcional es también evidente ($r = 0.64$ vs. $r = 0.298$).

El modelo de velocidad angular $\omega(t)$ es mejor que el angular $\varphi(t)$ en todas las cantidades analizadas: presenta un coeficiente de correlación múltiple

mayor ($r = 0.64$ vs. $r = 0,563$), un estadístico F mayor (3,475 vs. 2,322), y un p-valor menor (0.002 vs. 0.031). Además de que el modelo angular tiene menor capacidad predictiva, hay que mencionar que las funciones $\varphi(t)$ son variables geométricas que dependen de la referencia considerada como posición neutra. En cambio, **la velocidad angular $\omega(t)$ es una variable física que toma valores asociados al movimiento y no dependen de ninguna posición neutra considerada**. Por estas razones, se considera la velocidad angular $\omega(t)$ como el único predictor funcional al que se le añaden los predictores escalares RoV y RoM. También será el predictor considerado para el resto de análisis.

Añadir variables escalares como el RoV o el RoM al modelo funcional de velocidad no mejora sustancialmente el modelo más simple funcional. Así, el modelo que añade el RoV presenta el mismo coeficiente de correlación, pero peores valores del estadístico F (3,06 frente a 3,475) y p-valor (0.005 frente a 0.002). El modelo que usa como predictores las curvas de velocidad $\omega(t)$ y los escalares RoV y RoM apenas mejora el coeficiente de correlación (0.643 vs. 0.64), disminuyendo considerablemente el estadístico F , pasando de 3,475 a 2,755 y aumentando el p-valor (0.009 vs. 0.002).

Tabla 7.4: Valores de coeficiente de correlación r , coeficiente de determinación R^2 , estadístico F y p-valor para los distintos modelos implementados: cuatro modelos de regresión no funcionales con diferentes predictores (rango angular RoM y rango de velocidad RoV), dos modelos funcionales considerando las curvas de ángulo $\varphi(t)$ y velocidad angular $\omega(t)$, y dos modelos funcionales junto con variables escalares (curvas de velocidad angular $\omega(t)$, rango angular RoM y rango de velocidad RoV).

Tipo	Modelo	r	R^2	F	p-valor
No funcional	$ndi \sim RoM$	0.017	<0.001	0.015	0.902
	$ndi \sim RoV$	0.298	0.089	5.174	0.027
	$ndi \sim RoM + RoV$	0.349	0.122	3.597	0.034
	$ndi \sim RoM + RoV + RoM : RoV$	0.352	0.124	2.401	0.078
Funcional sin escalares	$ndi_i \sim \varphi_i(t)$	0.563	0.317	2.322	0.031
	$ndi_i \sim \omega_i(t)$	0.640	0.410	3.475	0.002
Funcional con escalares	$ndi_i \sim \omega_i(t) + RoV$	0.640	0.410	3.060	0.005
	$ndi_i \sim \omega_i(t) + RoV + RoM$	0.643	0.413	2.755	0.009

Para comprobar la hipótesis de que el modelo funcional que considera la velocidad es mejor que los modelos escalares, se analiza el modelo completo que considera las funciones de velocidad $\omega(t)$ y los dos predictores escalares RoM y RoV. A este modelo lo llamamos M_1 y se compara con los modelos más simples (Tabla 7.5). El primer modelo, M_{01} , es el modelo que solo considera las funciones de velocidad $\omega(t)$. El segundo modelo, M_{02} , es el modelo con los dos predictores escalares.

Los resultados de la Tabla 7.5 muestran que las mejoras que se producen en el modelo al añadir los dos predictores escalares no es significativa (p-valor = 0.884), lo que implica que no se puede rechazar la hipótesis de que los coeficientes correspondientes a los predictores escalares sean nulos. En cambio, la mejora del modelo escalar al añadir el predictor funcional sí que es significativa (p-valor = 0.028).

Tabla 7.5: Valores del estadístico F y el p-valor para comparar los modelos anidados y evaluar cuándo añadir predictores al modelo más simple M_0 lo mejora. Se comparan dos casos de modelos anidados: el primero donde las variables escalares RoV y RoM se añaden al modelo de velocidad funcional M_{01} . El segundo se parte de un modelo escalar M_{02} y se añade el predictor funcional de velocidad.

Modelos anidados	Modelos	F	p valor
M_{01} : Funcional sin escalares	$ndi_i \sim \omega_i(t)$	0.124	0.884
M_1 : Funcional con escalares	$ndi_i \sim \omega_i(t) + RoV + RoM$		
M_{02} : Escalar	$ndi \sim RoM + RoV$	2.378	0.028
M_1 : Funcional con escalares	$ndi_i \sim \omega_i(t) + RoV + RoM$		

- **Interpretación de la función coeficiente.** Aparte de mejorar la capacidad predictiva del modelo, una de las ventajas del FDA es la interpretación de los resultados sobre las curvas de movimiento. Así, la regresión funcional puede ayudar a interpretar la relación entre la curva predictora y la respuesta escalar. Para ello, analizamos la contribución de cada parte de la curva $\omega(t)$ al valor del NDI basado en el valor del producto $\beta_1(t)\omega(t)$ a lo largo de todo el ciclo de movimiento.

La Figura 7.7 muestra las curvas correspondientes a tres NDIs (4, 9 y 14, respectivamente). Cada gráfica muestra la velocidad angular $\omega(t)$ en línea negra discontinua, la función coeficiente $\beta_1(t)$ en azul, y el producto $\beta_1(t)\omega(t)$ en línea negra continua.

El valor estimado de NDI se obtiene a partir de la constante del modelo $\beta_0 = 14,95$ más el término de la integral $\int \beta_1(t)\omega(t)dt$ que viene dada por las áreas sombreadas en verde (correspondiente a valores positivos) y naranjas (valores negativos) de la Figura 7.7. De los tres casos analizados, hay tres zonas con área positiva y otras tres con una contribución negativa. Aunque se muestra solo para estos tres casos, el patrón es similar para los demás. Si las áreas positivas (verdes) son mayores que las negativas (naranjas), el NDI será mayor que la media. En caso contrario, sería menor.

La principal contribución al aumento del NDI es en la región positiva desde el principio del ciclo (máxima extensión, hasta alcanzar la máxima veloci-

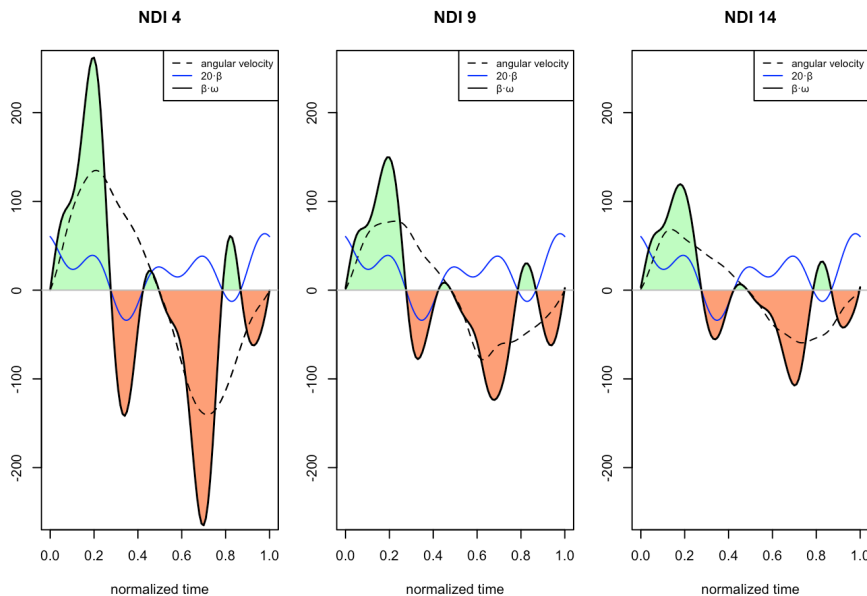


Figura 7.7: Resultados para sujetos con distintos niveles de discapacidad: NDI = 4 para la izquierda, NDI = 9 en el centro y NDI = 14 derecha. La línea discontinua marca la velocidad angular, la continua azul la función coeficiente escalada por 20 para visualizarla mejor y la línea continua negra es el producto de la velocidad por la función coeficiente. Se rellena en verde el área positiva y en naranja la negativa que produce la función producto con el eje de abscisas.

dad de extensión). Después, hay otras dos zonas que contribuyen en menor medida, una aproximadamente en la mitad del ciclo (correspondiente a la máxima extensión) y otra después de pasar la posición neutra después de la velocidad de flexión máxima. Las áreas negativas que contribuyen a disminuir el NDI predicho son también tres: la primera se da después de alcanzar el máximo de extensión, la segunda en la fase de aceleración hasta alcanzar el máximo de flexión y la última, al final del movimiento.

El RoV está relacionado con las velocidades máximas de flexión y extensión, que son variables correladas. Pero su contribución al NDI estimado es contraria. Esta es una razón por la que la correlación entre el RoV y el NDI es tan baja. De hecho, es relativamente común encontrar sujetos con un RoV similar pero con diferentes NDI, ya que presentan curvas de velocidad distintas. En la Figura 7.8 se muestran dos sujetos con estas características. Se

usan estos ejemplos para explicar mejor la contribución de cada parte de la curva al aumento o disminución del NDI.

La línea negra corresponde con el sujeto con el NDI más bajo (5 para la figura de la izquierda y 4 para la derecha). La roja es para el sujeto con el NDI más alto (14 y 15, respectivamente). La línea discontinua representa la velocidad de cada sujeto. En línea continua se representa la función producto $\beta_1(t)\omega(t)$, escalada para el sujeto con mayor NDI con la ratio del RoV. Se han sombreado tres zonas de la gráfica, denotadas por las letras A, B y C para poder explicar mejor los resultados. Se han incluido también figuras esquemáticas de la cabeza para entender mejor la fase del movimiento a la que corresponde cada zona.

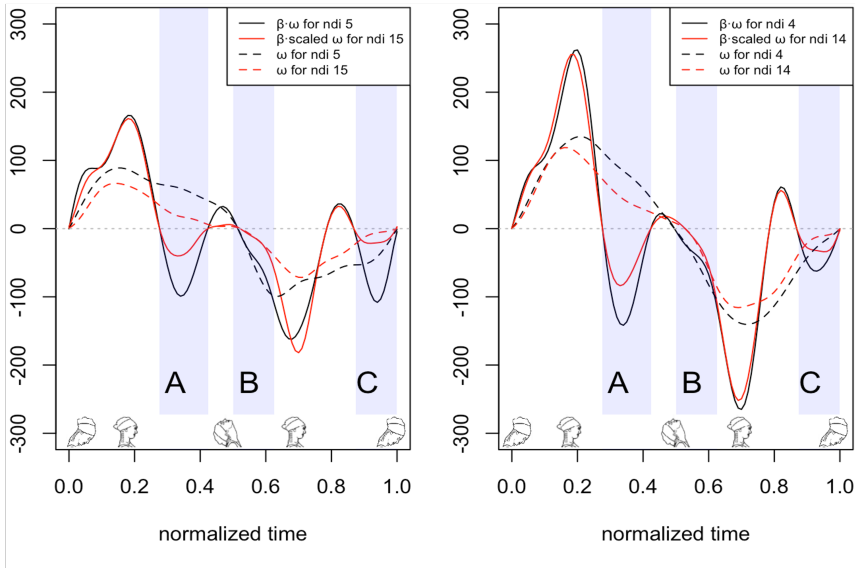


Figura 7.8: Función producto de la velocidad y la función de coeficiente para dos sujetos con NDI muy distintos pero con un rango de velocidad similar. Para el sujeto con mayor NDI se ha escalado su función producto por la ratio de velocidad. En cambio, las velocidades de ambos sujetos están sin escalar, para poder ver las diferencias entre ambas.

Como se muestra en la Figura 7.8 en ambas gráficas, el máximo y mínimo de la función producto escalada presentan valores similares en cada par de sujetos, aunque tengan un NDI muy diferente. Por tanto, la contribución del RoV a las diferencias en el NDI no puede ser muy notable. Las diferencias entre las curvas producto se observan básicamente en las áreas sombreadas A, B y C. Las zonas A y C corresponden a la fase de frenado de los mo-

vimientos de extensión y flexión, respectivamente. En este caso, el extremo para los sujetos con un NDI más bajo es más prominente, por lo que el área bajo la curva es mayor y, por tanto, el valor total del NDI disminuye. El área sombreada B corresponde al inicio de la flexión, y los sujetos con un NDI menor tienen mayor velocidad angular que aquellos con un NDI alto, por lo que tienen mayor área en esta zona. Estas áreas negativas explicarían más las diferencias en el NDI que los extremos de las velocidades angulares.

Discusión

La correlación entre variables biomecánicas y escalas clínicas de cuello generalmente es baja, con valores inferiores a 0,4 [134, 145, 184, 163, 133]. Una de las posibles razones es la pérdida de información al reducir toda la curva de movimiento a unos valores escalares como rango o extremos. Los modelos funcionales se presentan como una posible solución a este problema, analizando toda la información contenida en la curva.

Los modelos funcionales presentan un problema de dimensionalidad, ya que la curva de movimiento puede contener cientos de observaciones asociadas a instantes de muestreo. Este problema se resuelve representando estas curvas mediante bases de funciones. En este caso se ha elegido la base de Fourier, desarrollando un procedimiento para identificar el número óptimo de funciones de la función coeficiente que conserva toda la información de la curva, consigue un buen ajuste del modelo a la vez que es robusto.

Se han comparado los resultados de distintos modelos de regresión utilizando predictores numéricos (RoM, RoV y RoM + RoV) con modelos funcionales basados en ángulos, velocidad angular y modelos que usan tanto predictores funcionales como escalares. Los resultados muestran que los modelos funcionales tienen mayor relación con el NDI que los escalares. Así, las correlaciones con el NDI son mucho mayores cuando las variables funcionales sustituyen a los rangos, obteniendo una correlación de $r = 0.64$ frente a $r = 0.298$ y $r = 0.017$ de los modelos que usan el RoV y RoM, respectivamente.

También el ajuste es considerablemente mejor, como se desprende del estadístico F y el nivel de significancia. Además, la comparación de los modelos anidados confirma que el modelo funcional basado en la curva de velocidad es mejor que cualquier modelo numérico basado en rangos. Añadir variables de rango al modelo funcional no proporciona una mejora significativa, mientras que añadir la curva de velocidad al modelo de rango supone una mejora considerable en el ajuste (Tabla 7.5).

Esto demuestra que considerar variables escalares como máximos o rangos de movimiento o velocidad no tiene por qué estar relacionado con un nivel de discapacidad. En cambio, si se considera toda la curva, se conserva toda la información por lo que se refuerza la relación. El valor de correlación obtenido con el modelo funcional es superior a todos los obtenidos en otros estudios donde se analizan pacientes con un rango mayor de NDI [134, 145, 184, 163, 133].

Por otro lado, el Análisis de Datos Funcionales tiene el potencial de poder interpretar los resultados según las zonas de la curva. Así, el modelo de regresión funcional permite interpretar qué partes de la curva de movimiento están más relacionadas con la variación del NDI. Aunque generalmente los sujetos con un mayor nivel de discapacidad presentan menores valores pico de flexión y extensión, no explica por qué los pacientes con valores de RoV similares tienen valores de NDI muy diferentes. Estas diferencias se pueden interpretar desde un punto de vista funcional. Las zonas donde se encuentran diferencias entre sujetos están justo después del máximo de velocidad de extensión (zona A de la Figura 7.8), en el inicio del movimiento de flexión (zona B de la Fig. 7.8) y en el frenado al final del ciclo de flexión (zona C).

Los individuos con un NDI más alto presentan menor velocidad angular tras el máximo de velocidad de extensión (zona A, Fig. 7.8), comienzan con una velocidad angular más baja en el movimiento de flexión (zona B, Fig. 7.8), y se paran antes al final del movimiento de flexión (zona C). En el modelo funcional se observa que las velocidades máximas de extensión y flexión contribuyen de manera opuesta al aumento del NDI, lo que podría explicar la baja correlación entre el RoV y el NDI.

7.3.4 Regresión escalar sobre función: relación entre el EVA y fuerzas de reacción sobre el suelo en sujetos con osteoartritis temprana de rodilla.

Esta aplicación es similar a la anterior, utilizando otro tipo de datos, concretamente los de fuerza de reacción sobre el suelo en sujetos con osteoartritis temprana de rodilla para relacionar estas fuerzas con el EVA a través de un modelo de regresión escalar sobre función.

Material y métodos

Se plantea otro ejemplo de modelo de regresión escalar sobre función utilizando la base de datos de fuerzas de reacción sobre el suelo de marcha (Cap. 4.3). Se eligen solo los sujetos con un EVA distinto de cero, por lo que se tienen 31 sujetos. Como cada sujeto realiza 6 repeticiones, se calcula la curva profunda de las 6 repeticiones. Se consideran solo las curvas de la pierna izquierda.

Se diseñan tres modelos de regresión funcional utilizando como predictores las tres fuerzas de reacción sobre el suelo (anteroposterior F_x , vertical F_y y medio-lateral F_z), con el EVA como respuesta.

En este caso se usa la base de funciones de B-Splines, tomando 40 funciones para la base de las fuerzas. Para elegir el óptimo de las funciones de la base de la función coeficiente se utilizan los criterios mencionados anteriormente.

En el Anexo A.2 se encuentra el código que reproduce el modelo implementado para la fuerza más relacionada con el EVA, utilizando la matriz de modelo, cuyo código está detallado en el Anexo A.1.

Resultados

Antes de comparar las componentes de fuerza y analizar cuál está más relacionada con el EVA, hay que seleccionar el número óptimo de bases de B-Splines para la función coeficiente. Las Tablas 7.6, 7.7 y 7.8 muestran los valores de AIC, BIC, r , estadístico F y p-valor para los modelos de fuerza antero posterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z , respectivamente.

En la fuerza anteroposterior F_x el número óptimo de bases es 9. En la Tabla 7.6 se observa cómo para este número de bases se produce el mínimo del AIC y BIC (148 y 164, respectivamente), con la mayor correlación (0,53). En la fuerza vertical F_y se toman 12 bases, pues minimizan las cantidades anteriores, con un AIC de 136, un BIC de 156 y una correlación de 0,773. Finalmente, en la fuerza mediolateral F_z , este óptimo se da para 7 bases, ya que considerar más bases mejora ligeramente el r pero empeora el AIC y BIC.

En la Tabla 7.9 se comparan los tres modelos funcionales para el número óptimo de bases elegido. El modelo que considera la fuerza vertical F_y es el que proporciona mayor correlación múltiple con un valor de 0,773 frente al anteroposterior con 0,534 y el mediolateral con 0,419. También es el modelo con menores valores de AIC (136 vs. 148 y 149 para F_x y F_z respectivamente) y de BIC (156 vs. 164 para F_x y 162 para F_z). Ninguno de los modelos de fuerza anteropos-

Tabla 7.6: Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor según el número de bases de B-Splines consideradas para el modelo de fuerza anteroposterior F_x . Se marca en negrita el número elegido de bases.

Número de bases	AIC	BIC	r	F	p-valor
5	148	158	0.270	0.407	0.840
6	150	161	0.290	0.380	0.884
7	151	164	0.310	0.346	0.924
8	154	168	0.300	0.269	0.969
9	148	164	0.530	0.931	0.519
10	151	168	0.520	0.757	0.667
11	150	169	0.580	0.855	0.594

Tabla 7.7: Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor según el número de bases de B-Splines consideradas para el modelo de fuerza vertical F_y . Se marca en negrita el número elegido de bases.

Número de bases	AIC	BIC	r	F	p-valor
5	141	151	0.510	1.755	0.159
6	143	154	0.524	1.516	0.215
7	143	156	0.549	1.418	0.246
8	144	158	0.586	1.440	0.235
9	146	162	0.574	1.146	0.376
10	143	160	0.656	1.507	0.208
11	139	157	0.732	1.996	0.090
12	136	156	0.773	2.232	0.060
13	141	162	0.751	1.697	0.152

terior ni mediolateral son estadísticamente significativos, con p-valores de 0,519 y 0,673, respectivamente. El modelo de fuerza vertical tiene un valor que puede considerarse significativo (0,06) en base al tamaño muestral (31 sujetos).

Finalmente, como el modelo de fuerza vertical es el más relacionado con el EVA, se ha implementado también un modelo de regresión no funcional, considerando como predictores escalares los siguientes tres: fuerza vertical en el apoyo del talón (primer máximo), fuerza vertical en el valle (mínimo) y fuerza vertical en el despegue (segundo máximo). El coeficiente de correlación de este modelo es de 0,42 con un p-valor del modelo de 0,149.

En la Figura 7.9 se muestran las EVAs estimadas por cada modelo frente al EVA medido para los tres modelos funcionales implementados. Se marca en rojo la función identidad que marcaría un ajuste perfecto entre ambos valores. Se puede

Tabla 7.8: Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor según el número de bases de B-Splines consideradas para el modelo de fuerza mediolateral F_z . Se marca en negrita el número elegido de bases.

Número de bases	AIC	BIC	r	F	p-valor
5	145	155	0.394	0.916	0.487
6	147	158	0.408	0.798	0.581
7	149	162	0.419	0.699	0.673
8	149	164	0.459	0.735	0.660
9	151	167	0.458	0.620	0.767
10	153	171	0.458	0.530	0.849
11	155	173	0.478	0.513	0.871

Tabla 7.9: Valores de AIC, BIC, coeficiente de correlación r , estadístico F y p-valor para comparar los modelos funcionales de fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z para el número óptimo de bases seleccionado.

Modelo	Número bases	AIC	BIC	r	F	p-valor
Anteroposterior (F_x)	9	148	164	0.534	0.931	0.519
Vertical (F_y)	12	136	156	0.773	2.232	0.060
Mediolateral (F_z)	7	149	162	0.419	0.699	0.673

observar cómo el modelo de fuerza vertical F_y es el que da unos valores de EVA estimados más parecidos a los medidos, puesto que los puntos están más próximos a la función identidad.

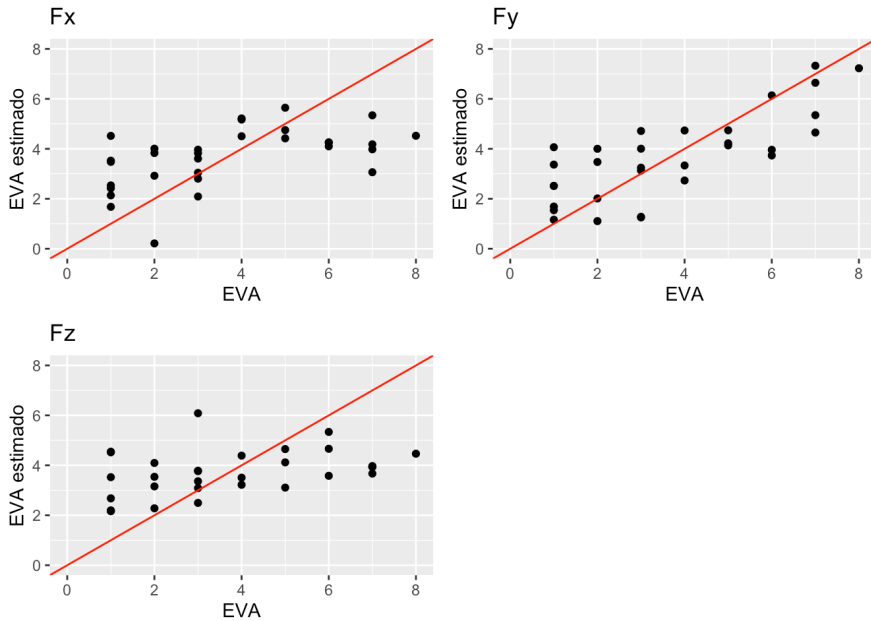


Figura 7.9: EVA estimado frente a EVA medido para cada uno de los tres modelos de regresión funcional implementados: F_x , F_y y F_z . Se marca en negrita el número elegido de bases.

Discusión

No se han encontrado trabajos en la literatura revisada que utilicen modelos de regresión para relacionar escalas de dolor con fuerzas de reacción sobre el suelo en sujetos con osteoartritis de rodilla. Sí que se han encontrado estudios que relacionan estas escalas con el momento de abducción de rodilla utilizando modelos basados en Inteligencia Artificial [41] o que empleen modelos de regresión lineal clásicos [143].

Se han diseñado modelos de regresión funcional para relacionar el nivel de dolor usando la escala EVA con las fuerzas de reacción sobre el suelo. Para ello, primero se ha seleccionado el número óptimo de funciones de la base de B-Splines para la función coeficiente que permita expresar toda la información contenida en la curva evitando caer en el problema del sobreajuste. Después, se comparan los tres modelos funcionales.

El modelo basado en la fuerza vertical F_y es el más relacionado con la EVA, con un coeficiente de correlación lineal múltiple de 0,773, seguido del modelo que usa las fuerzas anteroposteriores F_x ($r=0,534$) y finalmente el mediolateral F_z con un r de 0,419. Además, solo el modelo que usa la fuerza vertical puede considerarse estadísticamente significativo ($p\text{-valor} = 0,06$). Esto puede verse también gráficamente en la Figura 7.9, donde la EVA estimada por cada modelo es más cercana al EVA medido en el modelo de fuerza vertical.

Como el modelo que usa la fuerza vertical es el que tiene mayor capacidad predictiva, se implementa un modelo de regresión no funcional para comparar la diferencia entre ambos modelos. Se diseña un modelo donde se consideran como predictores escalares la fuerza vertical en el apoyo del talón (primer máximo), fuerza vertical en el valle (mínimo) y fuerza vertical en el despegue (segundo máximo). El coeficiente de correlación múltiple es de 0,42, casi la mitad que el obtenido en el modelo funcional (0,773) con un $p\text{-valor} = 0,149$. Es decir, el modelo funcional proporciona resultados considerablemente mejores que los del no funcional.

Esto puede ser debido a que en el modelo funcional se está considerando toda la información contenida en la curva, no solo extremos como en el modelo de regresión habitual. Además, puede que los predictores escalares que se están considerando no estén tan relacionados con el nivel de dolor como otras partes de la curva. De ahí el potencial de los modelos de regresión funcionales, donde se considera toda la curva y evita el problema de tener que extraer puntos característicos de las curvas.

7.3.5 Regresión escalar sobre función: relación entre el NDI y movimientos de cuello. Selección de variables.

La última aplicación de este capítulo está centrada en analizar los modelos en base a distintas medidas de calidad para determinar qué movimiento del cuello está más relacionado con el NDI. Posteriormente, se hace una selección de variables escalares. Se emplea la base de Componentes Principales, haciendo uso además de un FPCA bivalente, ya que dos movimientos resultan estar muy relacionados con el NDI.

Material y métodos

Los modelos de regresión funcional se pueden utilizar para seleccionar variables funcionales relevantes en una determinada patología. Se va a utilizar para identificar qué movimiento del cuello (rotación axial, flexo-extensión y flexión lateral) está más relacionado con el nivel de discapacidad NDI. Se utiliza la base de datos descrita en el Capítulo 4.1, donde de las 56 repeticiones se consideran solo 55 porque una de las curvas de movimiento presentaba errores de medida.

Se emplea el Análisis de Componentes Principales Funcional (FPCA). Tomamos 40 B-Splines como base de funciones para los datos y las componentes principales funcionales.

Cuando se quiere estudiar la variabilidad simultánea de dos o más funciones, las componentes principales bivariantes son una buena opción. Puesto que dos curvas del movimiento del cuello resultan relevantes para la patología estudiada, se usa el FPCA bivalente (bPCA).

Para elegir el número óptimo de componentes principales se siguen los mismos criterios ya comentados: AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor. Pero como además se está utilizando un análisis de componentes principales, se fija también el criterio de elegir un número mínimo de componentes de forma que se explique al menos el 95% de la variabilidad.

En definitiva, el método para elegir el número óptimo de componentes principales es el que sigue:

- Se implementan diversos modelos de regresión aumentando el número de componentes principales hasta que la variabilidad explicada sea al menos del 95%.
- Para ese número mínimo de componentes principales, se buscan modelos con coeficientes de correlación múltiple r altos, a la vez que el estadístico F es significativo
- De forma simultánea se tiene que controlar que el número de componentes principales es bajo para evitar sobre ajustes. Por tanto, se busca minimizar el valor de AIC y BIC.

Así, se implementan 17 modelos de regresión para cada predictor funcional, haciendo variar el número de componentes principales de 4 a 20, teniendo en cuenta los criterios anteriores.

Este criterio no solo es válido para elegir el número óptimo de componentes principales, sino que además permite comparar los modelos de regresión para determinar qué movimiento tiene mayor capacidad predictiva.

Así, atendiendo a los diferentes predictores funcionales disponibles, se implementan 6 tipos de modelos de regresión: 3 usan las curvas de ángulo como predictores y los otros 3 las curvas de velocidad angular. En ambos casos, las 3 curvas corresponden a los 3 movimientos medidos en el cuello: rotación axial (RA), flexión lateral (FL) y flexo-extensión (FE).

Las componentes principales bivariantes se utilizan con las curvas de los movimientos de flexión lateral y flexo-extensión, ya que ambas tienen buena capacidad predictiva.

Así, en primer lugar se determina el número óptimo de componentes principales para cada modelo y después estos modelos se comparan para analizar qué movimiento de los 3 analizados es el más discriminante.

Una vez que se selecciona el modelo con la mayor capacidad predictiva, se estudia el problema de la selección de variables. Se consideran las variables escalares de sexo, edad, longitud de cuello, masa de cabeza y masa de cuello. Es evidente que a mayor número de predictores, mayor coeficiente de correlación múltiple, pero a su vez mayor riesgo de sobre ajuste.

Por tanto, hay que analizar si introducir estos predictores escalares mejora el modelo base original (solo funcional). Para ello, se usan de nuevo las cantidades anteriores: AIC, BIC y coeficiente de correlación múltiple. Se realiza también un contraste de hipótesis, donde se comprueba si el coeficiente del predictor escalar añadido es nulo.

Se implementan 5 modelos más, donde partiendo del modelo base funcional se añaden los predictores escalares: género, edad, longitud de cuello, masa de cabeza y masa de cuello. Se analiza el AIC, BIC, r , estadístico F y p-valor.

Resultados

- **Modelos no funcionales.** Se muestran en primer lugar los resultados para los modelos no funcionales tomando como predictores el rango de movimiento (RoM), rango de velocidad (RoV) y la interacción entre ambos en los tres movimientos. Los resultados de coeficiente de correlación múltiple, estadístico F y p-valor se muestran en la Tabla 7.10. El mayor r se obtiene en el

movimiento de flexión lateral (0,391), seguido de la flexo-extensión (0,356) y por último el de rotación axial (0,296).

Solo los modelos de flexión lateral y rotación axial presentan un estadístico F significativo (0,036 en ambos casos), mientras que para el movimiento de flexo-extensión es de 0,073.

Tabla 7.10: Valores del coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F , p-valor de los modelos de regresión para los tres movimientos: flexo-extensión, flexión lateral y rotación axial. En todos los modelos se ha usado el rango de movimiento (RoM), el rango de velocidad (RoV) y la interacción entre ellos.

Movimiento	r	F	p-valor
Flexo-extension	0.356	2.460	0.073
Flexión lateral	0.391	3.072	0.036
Rotación axial	0.296	1.634	0.036

- **Número óptimo de componentes principales.** Según los criterios de selección del número óptimo de componentes principales descrito, para cada uno de los 6 predictores funcionales disponibles, se implementan 17 modelos, variando el número de componentes desde 4 hasta 20.

La Figura 7.10 muestra los valores de AIC (negro) y BIC (azul) frente al coeficiente de correlación múltiple r para los distintos números de componentes principales considerados. Así, se elige el número óptimo de componentes principales que proporcione el mínimo AIC, BIC a la vez que el r sea lo mayor posible. Aplicando el criterio del codo (Figura 7.10) serían 11 componentes principales las que proporcionan el mínimo valor de AIC y BIC para el modelo representado en la gráfica de la izquierda.

No en todos los modelos este número óptimo de componentes principales se da tan claramente. En ocasiones hay que buscar una solución de compromiso entre estas cantidades. Esto se puede ver en la gráfica derecha de la Figura 7.10, que corresponde al modelo de componentes principales que concatena las velocidades de flexo-extensión y flexión lateral. Se considera como óptimo 11 bases, aunque para 16 se vuelve a producir otro mínimo en el AIC. Sin embargo, considerar 5 componentes más apenas reduce el AIC y el valor de r es similar, pero sí que aumenta considerablemente el BIC. Por ello, es preferible considerar 11 componentes.

En base a estos criterios se ha elegido el número óptimo de componentes principales para cada predictor y movimiento. La Tabla 7.11 muestra el

porcentaje de variabilidad explicada por ese número de componentes, el AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple, estadístico F y el p-valor. En todos ellos, la variabilidad explicada es aproximadamente del 99%. Para todos los modelos angulares y el modelo que considera la velocidad de flexo-extensión el óptimo de componentes principales es 9, mientras que los que consideran la velocidad de flexión lateral o rotación axial es de 11.

En cuanto a los valores de AIC y BIC, los menores valores se obtienen para los modelos de velocidad de flexo-extensión y flexión lateral, siendo a su vez los que obtienen mayor coeficiente de correlación lineal múltiple (0,603 y 0,652, respectivamente).

Puesto que estos dos predictores son los que proporcionan mejores modelos, se implementa otro modelo utilizando componentes principales bivariantes, concatenando las funciones de velocidad de ambos movimientos. El óptimo de componentes principales también es de 11. Este modelo proporciona el menor valor de AIC (319) y BIC (345), a la vez que el mayor coeficiente de correlación múltiple (0,677), junto con el menor p-valor de todos los modelos. Por ello, este será el modelo que se considera para el resto de análisis.

Los modelos angulares tienen menor capacidad predictiva que los modelos basados en velocidad, como se puede observar de los valores de AIC, BIC y r mostrados en la Tabla 7.11.

En cuanto al análisis de los tres movimientos, la rotación axial es la que tiene menor capacidad predictiva, ya que tanto para el ángulo como para la velocidad, el coeficiente de correlación múltiple es considerablemente menor al obtenido en los modelos de los otros dos movimientos (0,274 vs. 0,535 y 0,555 para los modelos angulares de rotación axial frente a los de flexo-extensión y flexión lateral, respectivamente; y 0,463 frente a 0,603 y 0,652 para el equivalente en los modelos de velocidad). Aunque los modelos de flexo-extensión y flexión lateral proporcionen valores de correlación altos, en el modelo de flexión lateral es ligeramente superior (0,652 frente a 0,603 para el modelo de velocidad). Es por ello que se ha decidido combinar la información de ambos movimientos utilizando para ello componentes principales funcionales bivariantes.

- **Selección de variables escalares.** Como modelo base se considera el modelo funcional de 11 bPCA de las curvas de velocidad de flexo-extensión y flexión lateral concatenadas. Sobre este, se estudia si introducir las variables escalares género, edad, longitud de cuello, masa de cabeza y masa de cuello de forma individual mejoran el modelo previo.

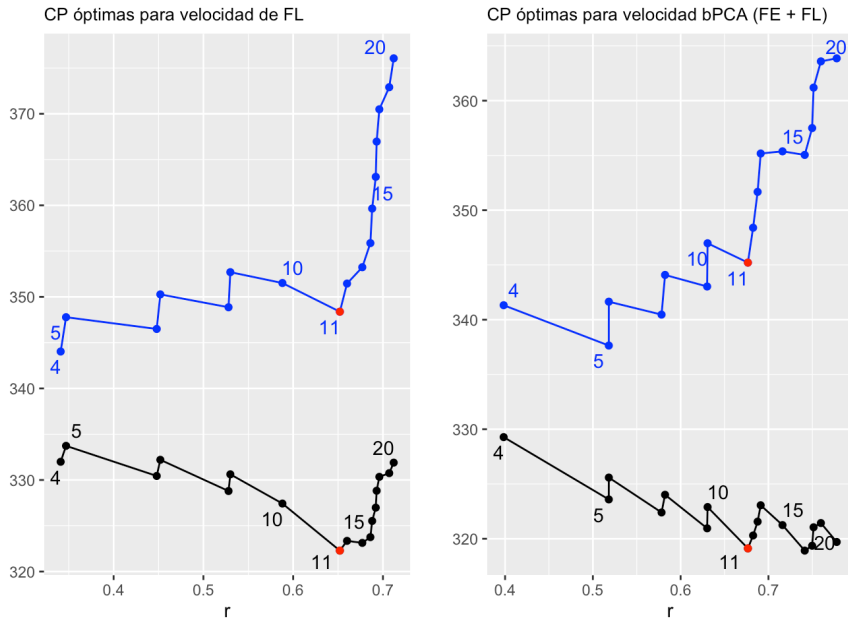


Figura 7.10: El gráfico muestra el coeficiente de correlación múltiple r (eje x) frente al AIC y BIC (eje y) según el número de componentes principales elegido, desde 4 (primer punto) hasta 20 (último punto). La línea negra representa los valores para el AIC y la azul para el BIC. El punto rojo marca el número óptimo de componentes principales elegido. El gráfico de la izquierda corresponde al modelo de regresión funcional que considera las curvas de velocidad de flexión lateral como predictor, mientras que el de la derecha el modelo concatenando las curvas de velocidad de flexo-extensión y flexión lateral.

La Tabla 7.12 muestra los valores de AIC, BIC, r , estadístico F y p-valor correspondiente a la hipótesis nula de que el coeficiente del predictor escalar es nulo. La primera fila muestra el modelo base sobre el que se añaden los demás predictores escalares.

En todos ellos, el valor de AIC y BIC aumenta. De igual forma el r aumenta, pero muy ligeramente. Ningún p-valor es significativo, por lo que añadir estos predictores escalares no mejoran significativamente el modelo previo.

- **Modelo de bFPCA para la velocidad de flexo-extensión y flexión lateral.** Puesto que ningún predictor escalar mejora el modelo funcional, se analiza el modelo de 11 componentes principales concatenando las curvas de velocidad de flexo-extensión y flexión lateral.

Tabla 7.11: Variabilidad explicada (%), AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor para el número óptimo de componentes principales en los modelos funcionales implementados para los movimientos de flexo-extensión (FE), flexión lateral (FL) y rotación axial (RA). Se marcan en negrita los modelos con mayor capacidad predictiva.

Modelo	Óptimo de CP	Variabilidad %	AIC	BIC	r	F	p-value
Ángulo FE	9	99.9	330	352	0.535	2.002	0.061
Ángulo FL	9	99.9	329	351	0.555	2.222	0.038
Ángulo RA	9	99.8	344	367	0.275	0.409	0.924
Velocidad FE	9	99.7	324	346	0.603	2.851	0.010
Velocidad FL	11	99.7	322	348	0.652	2.897	0.006
Velocidad RA	11	99.6	340	366	0.463	1.065	0.410
Velocidad FE+FL	11	98.7	319	345	0.677	3.300	0.002

Tabla 7.12: AIC, BIC, coeficiente de correlación múltiple r , estadístico F y p-valor de los modelos de regresión. Se añaden distintos predictores escalares al modelo base (solo funcional que considera las curvas de flexo-extensión, FE, y flexión lateral, FL) para analizar si introducir estos predictores escalares mejoran el modelo funcional.

Modelo	AIC	BIC	r	F	p-valor
bPCA (FE+FL)	319	345	0.677	-	-
bPCA (FE+FL) + sexo	319	347	0.693	1.840	0.182
bPCA (FE+FL) + edad	321	349	0.679	0.223	0.639
bPCA (FE+FL) + longitud cuello	321	349	0.677	0.017	0.896
bPCA (FE+FL) + masa cabeza	320	349	0.682	0.554	0.461
bPCA (FE+FL) + masa cuello	320	348	0.682	0.587	0.448

Aunque la función coeficiente β obtenida es única, se ha dividido en dos partes, correspondientes al intervalo de flexo-extensión y al de flexión lateral para poder interpretar mejor los resultados. La Figura 7.11 muestra esta función para la velocidad de flexo-extensión (arriba) y flexión lateral (abajo) para dos sujetos con NDI extremos cuyo residuo es bajo. El sujeto con NDI bajo (4) está representado a la izquierda, mientras que a la derecha el sujeto con NDI alto (15).

El NDI predicho se obtiene sumando a la constante del modelo el área bajo la curva de la función producto. De esta forma, más áreas positivas y menos negativas se traducen en un incremento del NDI.

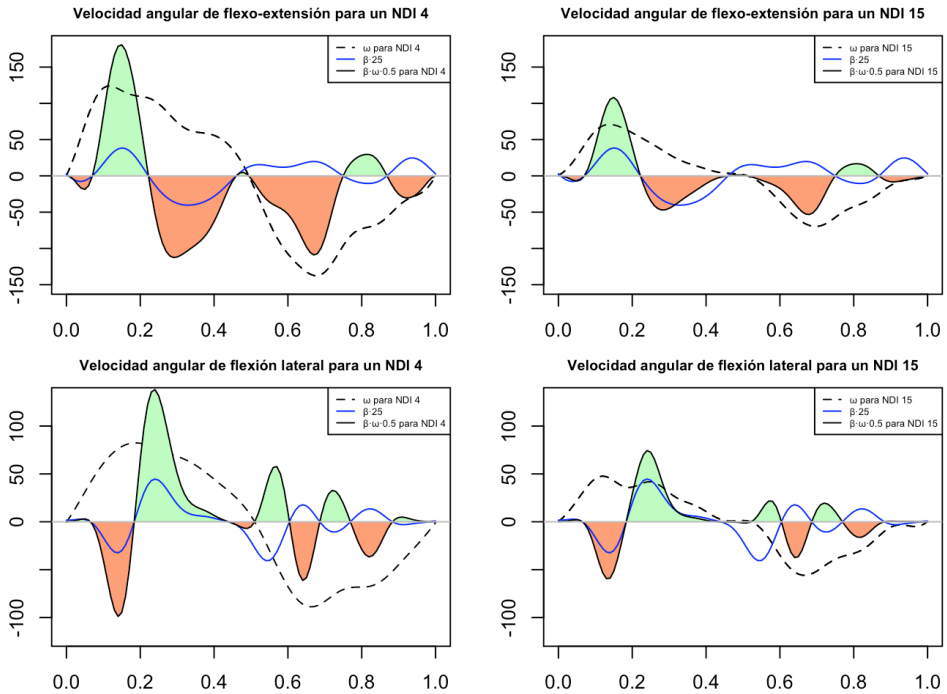


Figura 7.11: Funciones coeficiente y funciones producto para el modelo de 11 componentes bivariantes de flexo-extensión (arriba) y flexión lateral (abajo) para un sujeto con un NDI de 4 (izquierda) y de 15 (derecha). Aunque la función coeficiente es única, para una mejor representación se ha separado para cada movimiento. En discontinuo se representa la velocidad, en línea continua azul la función de coeficiente escalada y en continua negra la función producto de ambas. Las áreas bajo la curva positivas y negativas se marcan en verde y naranja, respectivamente. Se escala la función de coeficiente y la función producto para una mejor visualización.

Discusión

Se ha establecido un criterio para elegir el número óptimo de componentes principales, añadiendo al criterio ya mencionado el estudio del porcentaje de variabilidad explicada. Esto permite obtener un modelo robusto minimizando el riesgo de sobre ajustes.

Se aplican estos criterios para seleccionar primero el número óptimo de componentes principales. En la Figura 7.10 se muestra cómo se aplican estos criterios, donde al aumentar el número de componentes principales aumenta la correlación

múltiple, pero a su vez empeoran los valores de AIC y BIC, que controlan el número de variables del modelo. Aunque tanto el AIC como el BIC penalizan el número de parámetros del modelo, el BIC es más restrictivo. Por lo que esta cantidad puede utilizarse como un criterio más restrictivo a la hora de seleccionar el número óptimo de funciones de la base. En los modelos analizados se han elegido 9 y 11 componentes como óptimas 7.11.

Basado en este número óptimo de componentes principales, se observa que los modelos funcionales tienen mayor capacidad predictiva que los no funcionales, obteniendo valores de correlación múltiple superiores a 0,677 (7.11) frente a r que no superan el valor de 0,4 en los modelos no funcionales (7.10).

Por otro lado, el ángulo tiene menor relación con el NDI que la velocidad en cada uno de los tres movimientos analizados. De hecho, de estos tres movimientos, solo el ángulo es significativo en el movimiento de flexión lateral. Esto guarda relación con los resultados obtenidos en otros estudios que emplean variables numéricas [30, 133, 164, 68, 163, 50], donde las velocidades angular tienen mayor capacidad predictiva que los ángulos.

De los tres movimientos analizados, la flexión lateral y la flexo-extensión tienen mayor relación con el NDI que la rotación axial, tanto para el modelo angular como para el que emplea la velocidad, obteniendo un coeficiente de correlación más bajo y una relación estadísticamente no significativa. Respecto a la flexión lateral y flexo-extensión, es la flexión lateral la que proporciona resultados ligeramente mejores, tanto para el ángulo como para la velocidad. No se han encontrado estudios que empleen estas variables funcionales, por lo que no se puede comparar o corroborar con otros trabajos previos.

Se estudia el efecto de variables escalares como el género, edad, longitud de cuello, masa de cabeza o masa de cuello al añadirlas sobre el modelo funcional. Ninguna de estas variables produce mejoras significativas sobre el modelo funcional basado en velocidades. Esto puede llamar la atención puesto que hay estudios que relacionan la edad con la movilidad cervical [126]. Sin embargo, la información sobre la edad y la movilidad cervical ya está incluida dentro de las curvas de movimiento y por tanto esta variable escalar por separado no tiene por qué afectar al NDI.

Por último, los modelos de regresión funcionales permiten analizar qué partes de la curva están más relacionadas con la patología. Esto se puede estudiar a partir de las funciones de coeficientes, más concretamente a través de las funciones producto de la velocidad, en este caso, por la función de coeficiente. Así, la Figura 7.11 muestra la función producto $\beta(t)\omega(t)$, sombreando las áreas positivas que

contribuyen a un aumento del NDI en verde y en naranja las negativas, que harían disminuir este NDI.

Aunque esta función coeficiente es única, para poder interpretar mejor los resultados de cada movimiento, se ha dividido en dos: una para el movimiento de flexo-extensión y otra para el de flexión lateral. En la Figura 7.11 se observa de los gráficos superiores correspondientes a la flexo-extensión, que las diferencias entre sujetos con NDI extremos se dan en las zonas de frenado, donde el área negativa se reduce en el sujeto con mayor NDI. Esto es lo mismo que se obtenía en el modelo funcional donde solo se usaba como predictor funcional la velocidad de flexo-extensión utilizando la base de Fourier en lugar de componentes principales. Esto demuestra la robustez del método, siendo independiente de la base de funciones empleada.

Para la flexión lateral (abajo en la Figura 7.11) las diferencias entre sujetos con NDI extremos no son tan evidentes como en la flexo-extensión. Esto es debido a que esta parte de la función coeficiente depende de la anterior, correspondiente a la flexo-extensión. Así, la contribución de las áreas positivas y negativas del movimiento de flexión lateral aporta ligeros matices a la contribución previa del movimiento de flexo-extensión, modificando levemente su valor y, por tanto, el del NDI.

7.4 Conclusiones

De los resultados obtenidos en este capítulo, se pueden extraer varias conclusiones sobre los modelos de regresión funcional. Comenzando con los modelos de regresión **función sobre escalar**:

- En la literatura revisada es frecuente utilizar el ANOVA punto a punto, lo cual es adecuado porque proporciona información a lo largo de la curva. Sin embargo, en este capítulo se ha demostrado la importancia de corregir los p-valores obtenidos al realizar comparaciones múltiples para evitar falsos positivos. Así, zonas de la curva que antes de la corrección eran significativas, después no lo son. Se puede aplicar también un ANOVA funcional que analiza las funciones de forma global [24], dando un único p-valor.
- Cuando los predictores son escalares (pero no codificados para expresar un grupo o factor como en el ANOVA), ocurre algo similar. Es necesario ajustar los p-valores para evitar errores de tipo I.

- Se propone la utilización del modelo limma, que aunque es habitualmente empleado en el ámbito de la genómica, debido a la gran dimensionalidad de los datos, se puede emplear también en el caso funcional por el gran número de datos disponibles. Este modelo mejora el ajuste a través de regularización bayesiana empírica, que mejora la estimación de la varianza del error y estabiliza las correcciones del modelo.

En cuanto a las conclusiones de los modelos de regresión **escalar sobre función**:

- Es necesario establecer un criterio para controlar el número de parámetros del modelo para evitar sobre ajustes. Se han fijado criterios para encontrar el número óptimo de funciones de la base de la función coeficiente como un bajo AIC y BIC, alto coeficiente de correlación múltiple r y p-valor del modelo significativo. En el caso de usar componentes principales, se añade también un porcentaje mínimo de variabilidad explicada.
- Los modelos de regresión clásicos que relacionan variables clínicas con biomecánicas proporcionan coeficientes de correlación muy bajos. En cambio, se ha podido comprobar que con los modelos de regresión funcionales, estos valores son más que aceptables, superiores a 0,6 y doblando incluso a los que se obtienen con el modelo equivalente no funcional.
- Los modelos funcionales permiten una interpretación de los resultados, analizando qué zonas de la curva están más relacionadas con la patología. Además, se demuestra la robustez de estos modelos ya que tras la interpretación de las curvas en las aplicaciones analizadas en este capítulo, las conclusiones extraídas del modelo que relaciona las curvas de movimiento del cuello con variables clínicas (apartado 7.3.2) y las obtenidas del modelo de regresión escalar sobre función (apartado 7.3.3) son similares. Concretamente, se llega desde el modelo de regresión escalar sobre función que las zonas que diferencian a los sujetos con distintos niveles de la patología son las zonas de frenado. A su vez, del modelo de regresión función sobre escalar, son esas mismas zonas de la curva de velocidad las que resultan significativas en el predictor del nivel de discapacidad (NDI).
- Estos modelos de regresión funcional no se han utilizado en Biomecánica hasta la fecha de redacción de esta tesis. Consideramos que son de gran utilidad ya que proporcionan coeficientes de correlación elevados al estar analizando toda la información de la curva, a la vez que permiten una interpretación de los resultados, lo que es clave para el personal clínico.

Es importante destacar que los modelos implementados en este capítulo se han realizado utilizando muestras con sujetos con dolor inespecífico de cuello o sujetos

con osteoartritis temprana de rodilla, empleando como grupo de sanos un grupo de sujetos que no tienen osteoartritis pero sí dolor de rodilla. Estas muestras difieren de las empleadas en muchos estudios previos, donde el grupo de control está compuesto por individuos completamente sanos y el grupo de patológicos presenta patologías en ocasiones avanzadas y con signos evidentes. La sutileza en las diferencias entre los grupos de las muestras empleadas en este capítulo destacan la robustez y capacidad predictiva de los modelos funcionales. Este aspecto es especialmente relevante para el personal clínico, ya que precisamente en los casos donde la presencia de una patología no es evidente es cuando más se requiere información complementaria para ayudar en el diagnóstico.

Como trabajos futuros de los modelos de regresión funcional se plantea aplicarlos a otro tipo de patologías y regiones anatómicas, como hombro o espalda. No obstante, en este capítulo se han analizado patologías cervicales y de rodilla, dando resultados satisfactorios en ambos casos.

Capítulo 8

Clasificadores

En este capítulo se trata de cubrir el objetivo específico 6. Se hace una breve revisión de los dos enfoques habituales en los modelos de clasificación binaria: uso de modelos de regresión logística (enfoque de la estadística clásica) y el enfoque basado en Inteligencia Artificial. Se detectan una serie de limitaciones, que pueden ser solucionadas por el análisis de datos funcional, a través de un modelo de regresión logística funcional. Se establece un criterio de selección del número óptimo de funciones de la base de coeficiente, para evitar el sobre ajuste, un problema que puede surgir debido a la alta dimensionalidad del FDA. Se aplica el modelo de regresión logística funcional a dos bases de datos, por un lado para comparar con el equivalente no funcional y analizar las diferencias entre el caso funcional y no funcional. Por otro lado, se aplica el modelo de regresión logística funcional para clasificar sujetos con EKOA, empleando información biomecánica y clínica de forma conjunta, demostrando la importancia de utilizar ambos tipos de información. De este capítulo se desprende la utilidad de los modelos funcionales de regresión logística, que obtienen métricas de evaluación del modelo superiores a las obtenidas por el modelo clásico y similares a las que se obtienen con la IA, con la gran ventaja de que se evita el sobre ajuste y permite una interpretación de los resultados obtenidos, aspecto esencial en el ámbito clínico.

8.1 Introducción

8.1.1 Estado del arte

Los clasificadores son modelos matemáticos que permiten clasificar una muestra en clases o grupos (sano vs. patológico o dentro de una misma patología, distintos niveles de severidad). Estos modelos pueden estar basados en varios enfoques: en la estadística univariante o los más recientes, basados en Inteligencia Artificial.

Dentro de los clasificadores, nos centramos en los de respuesta binaria, es decir, donde solo existen dos grupos: éxito o fracaso. Este tipo de clasificación es muy útil en el ámbito clínico, donde el objetivo del estudio puede ser clasificar a un grupo de sujetos en función de si tienen o no una determinada patología.

En el enfoque estadístico, un modelo muy utilizado que permite clasificar cuando la respuesta es binaria es el modelo de regresión logística. Modela la probabilidad de que una determinada observación pertenezca a un grupo, utilizando la función logística. Es un modelo simple que ofrece interpretaciones claras de los coeficientes, por lo que es una herramienta útil cuando se busca conocer la aportación que cada predictor tiene sobre la clasificación.

Un enfoque más moderno es el basado en Inteligencia Artificial (IA). Hay numerosas técnicas que se emplean como clasificadores: las redes neuronales; las máquinas de soporte vectorial (SVM), que buscan el hiperplano que mejor separa las clases; los k-vecinos más próximos (K-NN), un clasificador que asigna la clase observando las clases mayoritarias entre sus “k” vecinos más próximos en el espacio de características; o los árboles de decisión (Random Forest por ejemplo), que se basan en una estructura de árbol donde las decisiones se toman según condiciones lógicas sobre las variables, por citar algunos ejemplos.

Tanto los modelos de regresión logística como los basados en IA se emplean en Biomecánica. Ambos presentan una serie de ventajas y limitaciones. Comenzando con los modelos de **regresión logística**, presentan las siguientes ventajas:

- Son modelos simples y efectivos, ya que son fáciles de implementar y de interpretar. Permiten modelar la relación entre variables dependientes y predictores, lo que los hace especialmente útiles en el ámbito clínico.
- Permiten una interpretación de los resultados obtenidos, a través de los coeficientes del modelo, lo que es especialmente relevante para el personal clínico, ya que permite conocer cómo las variables biomecánicas afectan a la probabilidad de tener o no la patología.

- Permiten realizar predicciones sobre la probabilidad de que un sujeto desarrolle o no una patología.
- Son modelos parsimoniosos, buscando la menor cantidad posible de parámetros, lo que se traduce en modelos más simples, interpretables y con menor riesgo de sobre ajuste.

Las limitaciones más importantes serían las siguientes:

- Algunas medidas de calidad del modelo como la exactitud (porcentaje de sujetos correctamente clasificados), sensibilidad, especificidad o área bajo la curva ROC (AUC) no son muy elevadas.
- Estos modelos utilizan numerosas variables escalares extraídas previamente del movimiento, por lo que necesitan un procesamiento de las curvas previo, que en la mayoría de veces es costoso.
- La regresión logística asume una relación entre las variables independientes y el logaritmo de las probabilidades, lo que limita la capacidad del modelo si estas relaciones no son lineales.

En cuanto a los modelos basados en **Inteligencia Artificial**, las principales ventajas:

- Son modelos con alta capacidad predictiva, con mejores métricas de evaluación, como exactitud o AUC que los modelos de regresión logística.
- Aunque emplean numerosas variables escalares extraídas de las curvas de movimiento, no requieren un preprocesado tan costoso como en la regresión logística, ya que incorporan métodos propios de detección de estas características.
- Capturan relaciones no lineales e interacciones complejas entre variables.

Sin embargo, presentan las siguientes limitaciones:

- Son modelos de “caja negra”, por lo que son difíciles de explicar y conocer por qué el modelo clasifica de una forma u otra. Esto supone una limitación importante en el ámbito clínico, ya que no solo se quiere una clasificación, sino conocer qué predictores influyen más en la patología.

- Necesitan numerosas variables, incluso a veces mayor que el tamaño muestral, lo que supone un problema de sobre ajuste.
- Presentan problemas de validación al no usar estimadores estadísticos ni p-valores.
- Son modelos complejos de implementar y analizar, lo que requiere de personal cualificado y experto. Esto dificulta su uso en el ámbito clínico.

En resumen, la principal ventaja de los métodos basados en IA es su mayor precisión en comparación con la regresión logística y su menor preprocesamiento, ya que la IA puede utilizar directamente los datos de movimiento. Sin embargo, estos métodos presentan inconvenientes, principalmente su baja interpretabilidad, a menudo descrita como una “caja negra” donde los resultados se basan en numerosas variables de entrada. Además, los modelos de IA pueden producir resultados de menor calidad que los métodos estadísticos clásicos, ya que no tienen en cuenta factores críticos como la estimación y la atribución [37]. El sobre ajuste es otro de los problemas, ya que los modelos de IA requieren de más variables de entrada que en ocasiones el tamaño muestral, lo que dificulta la validación y compromete la robustez del modelo.

Como alternativa a los problemas detectados por ambos enfoques, se plantea el uso de la regresión logística funcional, que presenta las ventajas de la regresión logística, obteniendo mejores métricas de evaluación del modelo, pero sin caer en los excesos de la Inteligencia Artificial.

A continuación se justifican cada una de estas limitaciones a través de la literatura revisada en ciertas patologías del aparato locomotor. La revisión se realiza más en detalle en la patología de osteoartritis temprana de rodilla (EKOA) ya que es el caso estudiado en este capítulo.

Modelos de clasificación en EKOA de rodilla

Se han identificado tres revisiones relevantes sobre clasificación en OA de rodilla. En una [83] destacan que la técnica más empleada en la SVM, otra [79] está centrada en el uso de técnicas de Machine Learning (ML), mientras que en [1] presentan una revisión más general sobre clasificadores en patologías de rodilla. En esta, señalan que de nuevo, las técnicas de ML son las más empleadas, con porcentajes de clasificación que varían entre el 77% y el 98,5%, para el caso de las redes neuronales. En estas revisiones se hace notable la escasa utilización de la regresión logística en esta patología.

La mayoría de trabajos revisados emplean técnicas de ML basadas en variables derivadas de las fuerzas de reacción sobre el suelo medidas durante la marcha. Se emplean distintas técnicas, como el Random Forest [82], con exactitudes que no superan el 65,22%, aunque aumenta hasta el 77,78% cuando se limita la muestra a pacientes con OA unilateral, por lo que se reduce el tamaño muestral. Otros estudios emplean el clasificador del vecino más cercano (NNC) [110, 109], donde los pacientes patológicos presentan grados de severidad según la escala Kellgren-Lawrence (KL) entre 1 (el más bajo) y 4 (el más alto). Ambos estudios alcanzan un 91% de exactitud, obteniendo que la fuerza más discriminante es la mediolateral [109]. El enfoque basado en árboles de decisión difusos con SVM [115] proporciona porcentajes de clasificación del 89% en sujetos con patología moderada (KL 1-2) y del 91,5% en severos (KL 3-4), donde esa clasificación es más evidente. El rendimiento del modelo disminuye al clasificar pacientes con OA moderada. En contraste con lo obtenido en [109], la fuerza mediolateral resulta ser la menos discriminante.

También se emplean redes neuronales [186, 187] empleando medidas de cinemática de rodilla para clasificar sujetos con y sin OA, alcanzando porcentajes de clasificación superiores al 95%, aunque no especifican la severidad de la OA.

Como ya se desprendía de las revisiones estudiadas, el uso de modelos de regresión logística es más escaso. Así, hay estudios [10] que emplean técnicas de ML para seleccionar variables cinemáticas para después aplicar una regresión logística. Sin embargo, no se usa para clasificar entre sujetos sanos y patológicos, sino entre pacientes con y sin dolor. Otro trabajo [38] desarrolla tres modelos de regresión logística con distintos tipos de predictores, obteniendo para el modelo basado en las fuerzas de reacción sobre el suelo un 83,3% de exactitud y un AUC de 0,894. No obstante, la muestra es reducida, con 31 sujetos, de los cuales 12 son sanos y 19 tienen una OA grave (KL 3-4), en espera de cirugía. Un tercer estudio [183] aplica la regresión logística empleando componentes principales para clasificar sujetos con reemplazo total de rodilla de aquellos sin ella, obteniendo un 74,1% de exactitud.

Finalmente, otro estudio [183] compara el SVM con la regresión logística utilizando datos cinemáticos de cadera, rodilla y tobillo, alcanzando porcentajes correctos de clasificación del 85,6% y 83,9%, respectivamente. Destacan, que aunque con el SVM se obtienen resultados ligeramente superiores, la regresión logística debe considerarse por su menor complejidad y necesidad de menos variables de entrada.

Modelos de clasificación en cervicalgia inespecífica

Un estudio [91] compara métodos de aprendizaje automático con la regresión logística en pacientes con dolor inespecífico de cuello, incluyendo 26 predictores. Emplearon el AUC como medida del rendimiento del modelo, obteniendo el valor más bajo para la regresión logística. Sugieren que la mejora en el rendimiento de la predicción entre los modelos de aprendizaje automático y la regresión logística puede deberse a una posible no linealidad entre los predictores y los resultados clínicos.

El trabajo de [161] usa varios modelos predictivos, entre ellos la regresión logística, para predecir la presencia de dolor en latigazo cervical. En regresión logística obtienen una exactitud del 86,6%, que aunque es aceptable, es inferior a la obtenida por otros modelos de predicción automática como el SVM, Random Forest, redes neuronales, etc.

Finalmente, en [69] emplean varios modelos de clasificación de aprendizaje automático para clasificar sujetos con dolor inespecífico de cuello. En la regresión logística, tanto el AUC como la exactitud son inferiores a 0,6.

Modelos de clasificación en patología de hombro

Un estudio sobre la predicción del dolor de hombro en nadadores [45] emplea un modelo de regresión logística para identificar los factores de riesgo de desarrollar dolor de hombro. Solo proporcionan el valor de AUC (0,71). Al usar la regresión logística, hacen una interpretación de los resultados para saber cuáles son los riesgos de desarrollar dolor en esta articulación al nadar.

Otro trabajo [96] aplica de nuevo distintos métodos de aprendizaje automático, junto con la regresión logística, para evaluar la validez de ciertas escalas clínicas para predecirlas después de haber realizado una operación artroscópica en pacientes con la patología del manguito rotador. En este estudio no se emplea información biomecánica. La precisión media del modelo de regresión logística fue del 46,5%, que aunque es inferior a la obtenida con otras técnicas de aprendizaje automático, fue superior a la obtenida con el Random Forest.

Modelos de clasificación en patología de dolor lumbar

El estudio de [46] desarrolla un modelo de regresión logística para clasificar sujetos con y sin pérdida del rendimiento funcional lumbar a partir de factores de riesgo biomecánicos, individuales y psicosociales. El modelo proporciona una sensibilidad del 68,5% y especificidad del 71,9%. En cambio, en otro trabajo [33] emplean de nuevo la regresión logística utilizando variables obtenidas con unidades de medida inercial (IMU) para clasificar clases de riesgo asociadas con actividades de levantamiento de cargas. La exactitud obtenida es del 82,8%, sensibilidad del 84,8% y especificidad del 80,9%.

Finalmente, en [170] usan modelos de aprendizaje automático, entre ellos la regresión logística, para clasificar sujetos sanos de sujetos con dolor lumbar midiendo para ello ejercicios de rango de movimiento. La regresión logística proporciona una exactitud del 86,67%, superior a la obtenida con un árbol de decisión o al k-vecinos más cercanos, pero inferior a las del Random Forest (92%), SVM (95,3%) o redes neuronales (93%).

Como se observa de esta revisión realizada en distintas patologías, muchos de los estudios se centran en comparar los métodos basados en Inteligencia Artificial con la regresión logística, obteniendo mejores métricas de evaluación del modelo como exactitud o AUC, excepto en algunos casos [96, 170]. Sin embargo, aunque estos valores sean superiores, requieren de numerosas variables de entrada [183], cayendo en el problema del sobre ajuste del modelo. Esto se ve agravado cuando además son muestras pequeñas, lo que es habitual en el ámbito de la biomecánica y de la salud en general.

Asimismo, los modelos basados en IA no permiten una interpretación de los resultados, lo cual sí es posible en los modelos de regresión logística [45]. Esto dificulta posteriormente su aplicación en la definición de intervenciones terapéuticas.

También llama la atención que solo un estudio [55] de los analizados en la patología de EKOA considere de forma conjunta información clínica y biomecánica para clasificar sujetos, ya que ambos predictores pueden proporcionar información adicional y complementaria para la clasificación.

Ante estas limitaciones, se plantea el uso de modelos de regresión logística funcional. Sin embargo, estos no son muy usados en biomecánica. Solo se han encontrado tres artículos que lo utilicen como técnica para clasificar. Por un lado, en [93] emplean la regresión logística funcional para clasificar pacientes con y sin dolor de cuello en una muestra de 47 sujetos donde miden variables biomecánicas al andar. Después de realizar una selección de variables, utilizan dos predictores funcionales

y uno escalar obteniendo un AUC de 80,8%. Si bien es un valor de AUC aceptable, no proporcionan porcentajes de clasificación.

Otro estudio [114] describe y aplica tres enfoques de la regresión logística funcional: wavelets y penalización LASSO, utilización de componentes principales y regresión logística funcional penalizada. Aplica estos tres enfoques para la detección de cojera en caballos, utilizando las funciones de aceleración vertical. Aunque la exactitud llega hasta el 95%, la muestra es pequeña y se trata de caballos sanos a los que se les simula la cojera a través de una herradura.

En [92] usan funciones cinemáticas y de la EMG para clasificar sujetos con distintos tipos de dolor lumbar de sujetos sanos. Analizan el movimiento de levantamiento de cargas bajas. Utilizan un total de 40 predictores de los que después de hacer una selección de variables se quedan con 9. Solo proporcionan valores de AUC, que es de hasta el 96,7%, un valor más que aceptable. Por último, se ha encontrado otro trabajo que emplea regresión logística funcional, pero no como técnica de clasificación, sino como un paso intermedio después de aplicar una técnica no funcional [78].

8.1.2 Necesidades detectadas. Objetivos

Ante la revisión realizada se detectan las siguientes necesidades:

- La regresión logística clásica presenta limitaciones para clasificar grupos en base a variables biomecánicas, presentando métricas de evaluación del modelo bajas como la exactitud, sensibilidad, especificidad o área bajo la curva ROC.
- Los modelos basados en Inteligencia Artificial proporcionan exactitudes más altas, pero son modelos de “caja negra” que no permiten interpretar los resultados. Además, estos presentan también el inconveniente del sobre ajuste al utilizar muchas variables de entrada, así como problemas de validación en muestras pequeñas al no usar estimadores estadísticos ni p-valores.
- Surge la necesidad de implementar modelos de regresión funcional, no muy usados en el ámbito de la biomecánica, que proporcionen mayores porcentajes de clasificación al analizar toda la información contenida en la curva, a la vez que permiten una interpretación de los resultados.
- Debido a la alta dimensionalidad de los datos funcionales es necesario establecer algún criterio para elegir el número óptimo de bases de funciones.

- En los modelos de clasificación revisados se emplea información biomecánica o información clínica, pero no es habitual considerarla de forma conjunta. Utilizarlas a la vez puede aportar información complementaria que ayude a una mejor clasificación.

Así, los objetivos que se plantean en este capítulo son los siguientes:

- Diseñar un procedimiento para elegir el número óptimo de bases de funciones que asegure un modelo de regresión logística funcional robusto.
- Implementar modelos de regresión logística funcional en el ámbito de la Biomecánica. Concretamente:
 - Un modelo de regresión que permita clasificar sujetos sanos de aquellos que tienen patología de cadera, empleando exclusivamente información biomecánica y compararlo con el modelo de regresión logística clásico.
 - Un modelo de regresión que clasifique sujetos sanos de aquellos con EKOA, empleando información biomecánica y clínica, estudiando la importancia de considerarlas de forma conjunta.

8.2 Modelos lineales generalizados

Hay problemas donde la variable respuesta no sigue una distribución normal, como por ejemplo cuando se tiene un conteo o una respuesta binaria. En estos casos, los modelos de regresión lineal con respuesta normal no son adecuados. Los modelos lineales generalizados (GLM) extienden los modelos de regresión lineal con respuesta normal permitiendo además relaciones no lineales entre la media de la respuesta y el predictor lineal.

Un modelo lineal generalizado está formado por tres componentes:

Componente aleatoria: es la respuesta Y y su distribución de probabilidad. Se supone que tenemos n observaciones $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ independientes.

Predictor lineal o componente sistemática: especifica las variables explicativas: $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$ siendo p el número de predictores.

Función de enlace: es una función g que relaciona el valor esperado $\mu = E[Y]$ con la componente sistemática: $g(\mu) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$.

Los parámetros de un modelo lineal generalizado se estiman maximizando la log-verosimilitud. Para el caso binario, donde la respuesta puede ser “tener una patología” o “no tener esa patología”, solo se tienen las opciones de “éxito” o “fracaso”, codificadas como $Y_i = 1$ si el sujeto tiene la patología o $Y_i = 0$ si no la tiene.

Así, la distribución de probabilidad de Y_i viene dada por las probabilidades de éxito $P(Y_i = 1|\mathbf{x}_i) = \pi_i(\mathbf{x}_i) = \pi_i$ y fracaso $P(Y_i = 0) = 1 - \pi_i$, donde $i = 1, \dots, n$ son las observaciones del experimento. La distribución de probabilidad Y_i es por tanto una distribución binomial $Y_i \sim (n_i, \pi_i)$, donde el valor esperado es $\mu_i = E(Y_i) = \pi_i$. Como π_i es una probabilidad, su valor está comprendido entre 0 y 1.

La función logística $g(\mu) = \ln(\mu/(1 - \mu))$ como función de enlace es apropiada cuando $0 < \mu < 1$, como en el caso de una probabilidad. El modelo lineal generalizado que usa la función logística como función de enlace se denomina modelo de regresión logística, y se emplea cuando la variable respuesta es binaria. Así, para la respuesta binaria Y_i el modelo es:

$$\text{logit}(\pi_i) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1 - \pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} \quad i = 1, \dots, n \quad (8.1)$$

y la probabilidad π_i es

$$\pi_i = P(Y_i = 1) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}}}. \quad (8.2)$$

En las ecuaciones anteriores, tanto la respuesta como los predictores son escalares. Sin embargo, cuando los predictores son funciones, es necesario emplear un enfoque funcional. Por simplicidad en la transición al modelo funcional, se va a considerar un modelo donde la componente sistemática solo tiene un único predictor. Así, cuando el predictor x se sustituye por una función $x(t)$, la función de enlace es: $g(\mu) = \beta_0 + \int_0^T \beta(t)x(t)dt$ donde $x \in L^2$, es decir, $\int_T x^2(t)dt < \infty$, o lo que es lo mismo, que el cuadrado de la función es integrable.

Las funciones $x(t)$ y $\beta(t)$ se pueden expresar en distintas bases: $x(t) = \sum_{r=1}^{K_x} c_{ir} \psi_r(t)$ y $\beta(t) = \sum_{s=1}^{K_\beta} b_s \theta_s(t)$ de forma que

$$\begin{aligned} \int \beta(t)x_i(t)dt &= \int_T \sum_{r=1}^{K_\beta} b_r \theta_r(t) \sum_{k_2=1}^{K_x} c_{ik_2} \psi_{k_2}(t)dt = \\ &= \sum_{k_1=1}^{K_\beta} \sum_{k_2=1}^{K_x} b_{k_1} c_{ik_2} \int_T \theta_{k_1}(t) \psi_{k_2}(t)dt = \sum_{k_1=1}^{K_\beta} \sum_{k_2=1}^{K_x} c_{ik_2} J_{k_1 k_2} b_{k_1} = \sum_{k_1=1}^{K_\beta} v_{k_1} b_{k_1}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

donde $v_{k_1} = \sum_{k_2=1}^{K_x} c_{ik_2} J_{k_1 k_2}$ es conocido. Así la función de enlace es

$$g(\mu) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{K_\beta} v_j b_j, \quad (8.4)$$

donde los distintos b_j son los coeficientes. Los coeficientes c_{ik} se estiman utilizando mínimos cuadrados. Por tanto, el problema se ha reducido a un modelo lineal generalizado.

El modelo de regresión logística funcional para un único predictor se puede escribir de la siguiente forma:

$$\pi_i = P(Y_i = 1) = \frac{e^{\beta_0 + \int \beta(t) x_i(t) dt}}{1 + e^{\beta_0 + \int \beta(t) x_i(t) dt}}. \quad (8.5)$$

Si se emplean varios predictores funcionales $x_i^{(s)}$ con $s = 1, \dots, S$ junto con predictores escalares $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^q$, es decir $x_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(S)}, u_1, \dots, u_q)$, entonces el modelo de regresión logística funcional se puede escribir como

$$\pi_i = P(Y_i = 1) = \frac{e^{\beta_0 + \sum_{s=1}^S \int x_i^{(s)}(t) \beta_s(t) dt + \sum_{r=1}^q \beta_r^{(u)} u_{ir}}}{1 + e^{\beta_0 + \sum_{s=1}^S \int x_i^{(s)}(t) \beta_s(t) dt + \sum_{r=1}^q \beta_r^{(u)} u_{ir}}}. \quad (8.6)$$

Sin embargo, el modelo de regresión logística proporciona una probabilidad $\hat{\pi}_i$ comprendida entre 0 y 1. Así, para estimar $\hat{y}_i$ es necesario establecer una probabilidad de corte π_0 para la cual si $\hat{\pi}_i > \pi_0$ se corresponde con $\hat{y}_i = 1$, y si $\hat{\pi}_i \leq \pi_0$, $\hat{y}_i = 0$.

Es habitual considerar $\pi_0 = 0.5$, pero a veces este valor no es el óptimo. Por tanto, hay que establecer un criterio para elegir π_0 , como por ejemplo que sea el que proporcione el óptimo de sensibilidad y especificidad, ambas definidas como:

$$\text{Sensibilidad} = P(\hat{Y}_i = 1 | Y_i = 1) \quad (8.7)$$

$$\text{Especificidad} = P(\hat{Y}_i = 0 | Y_i = 0) \quad (8.8)$$

Se puede encontrar más información sobre modelos de regresión logística funcionales en [80, Cap. 6].

8.2.1 Medidas de calidad del ajuste

Para medir la capacidad predictiva de un modelo y poder compararlos entre sí, se van a utilizar una serie de medidas de calidad del ajuste:

- AIC (Criterio de Información de Akaike) [4] y BIC (Criterio de Información Bayesiano) [154]: ya definidos en la sección 7.2 de esta tesis, ambos tienen en cuenta el ajuste del modelo penalizando el número de parámetros empleado. Por lo que se busca que estos valores sean bajos.
- Exactitud del modelo: es el porcentaje correcto de clasificación, que se obtiene dividiendo el número de sujetos correctamente clasificados entre el tamaño muestral.
- Área bajo la curva ROC (AUC): la curva ROC (Receiving Operating Characteristic) es un gráfico donde se representa la sensibilidad y especificidad para diferentes valores de probabilidad de corte π_0 . En el eje vertical se representa la sensibilidad y en el eje horizontal, 1 menos la especificidad. El área bajo la curva ROC (AUC) se suele utilizar para comparar modelos, ya que valores más altos de este área se corresponden con modelos con una mayor capacidad predictiva.
- Sensibilidad y especificidad: se quieren modelos en los que ambas cantidades sean lo más altas posibles.
- Se busca un modelo estadísticamente significativo, controlando para ello el p-valor del modelo que contrasta la hipótesis de que todos los coeficientes del modelo son nulos.

El objetivo es encontrar un modelo con exactitud, AUC, sensibilidad y especificidad altas, pero sin caer en el riesgo del sobre ajuste al considerar muchos predictores. Esto se tiene en cuenta a través del AIC y BIC, que controlan el número de parámetros del modelo. Así, las primeras cantidades deben ser máximas pero el AIC y BIC mínimos.

Estos mismos criterios son los usados para elegir el número óptimo de bases de funciones de la función coeficiente para evitar el sobre ajuste. Para el caso de considerar además componentes principales, se añade el criterio del porcentaje de variabilidad total explicado.

8.3 Aplicaciones

Se describen dos aplicaciones de los modelos de regresión logística. La primera en la que se compara la versión funcional con la no funcional empleando la base de datos de fuerza de reacción sobre el suelo de GaitRec (apartado 4.4). En la segunda aplicación, se aplica exclusivamente el modelo de regresión logística funcional empleando las GRF de sujetos con y sin EKOA (apartado 4.2).

8.3.1 Comparación entre modelo de regresión logística funcional y no funcional

El objetivo de este apartado es aplicar el modelo de regresión logística funcional eligiendo el número óptimo de bases de la función coeficiente para evitar el problema del sobre ajuste, para después compararlo con el equivalente no funcional. Con esto se quiere probar que efectivamente los modelos de regresión logística funcional son modelos con mayor capacidad predictiva al considerar toda la información contenida en la curva.

Material y métodos

Se implementa un modelo de regresión logística funcional para clasificar sujetos sanos de los que tienen patología de cadera, utilizando las curvas de fuerza de reacción sobre el suelo normalizadas por el peso. Se usa la base de datos experimental de GaitRec, descrita en el Capítulo 4.4. Se seleccionan las medidas correspondientes a la prueba realizada con un zapato normal y sin plantilla. Para los patológicos, se seleccionan los que tienen patología de cadera a nivel de pelvis y se considera solo la medida en la primera sesión. En los patológicos, se toman las curvas de GRF de la pierna afectada. En los sanos, puesto que no hay diferencia entre una pierna u otra, se considera la de la izquierda. Los patológicos realizan la prueba a una velocidad autoseleccionada, por lo que en los sanos se eligen las medidas correspondientes también a esa velocidad autoseleccionada.

Cada sujeto puede tener hasta un total de 10 repeticiones, por lo que solo se considera una de ellas, la más profunda, según lo definido en el Capítulo 6.2 de esta tesis. Así, la muestra está formada por 214 curvas de sujetos sanos y 37 para los patológicos, para cada una de las componentes de fuerza (anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z). Puesto que los grupos están muy descompensados, se eligen aleatoriamente a 40 sujetos sanos, de forma que la muestra ahora está equilibrada, formada por 40 curvas de fuerza de sanos y 37 de sanos (en total 77).

Se utiliza la base de B-Splines para las fuerzas de reacción sobre el suelo y la función de coeficiente del modelo de regresión logística. En primer lugar, debido a la alta dimensionalidad de los datos funcionales, se elige el número óptimo de funciones de la base de la función coeficiente $\beta(t)$ según los criterios ya definidos en el apartado 8.2.1. Una vez elegido el número óptimo de funciones para cada una de las componentes de fuerza F_x , F_y y F_z , se comparan los modelos obtenidos para analizar qué componente es la más relacionada con la probabilidad de tener o no la patología. En todos los modelos se considera una probabilidad de corte para clasificar a los sujetos en sanos y patológicos de 0,5.

Con ese modelo, se estudia si añadir variables escalares como el género, edad o peso mejora el modelo funcional previo. Para ello, se comparan las mismas medidas de calidad del modelo ya comentadas en el apartado 8.2.1.

El código programado en R para realizar este modelo funcional, así como añadirle a este las variables escalares se encuentra detallado en el Anexo A.3. Se utiliza la matriz del modelo programada (Anexo A.1) para poder utilizar la función `glm()` de R.

Después de realizar todo este análisis para elegir el mejor modelo funcional, se compara con el equivalente no funcional. Los predictores escalares que se van a emplear son el género, edad, peso y los dos máximos y dos mínimos de la fuerza mediolateral F_z , que resulta ser la que proporciona un modelo con mayor capacidad predictiva. Es decir:

$$\ln odds_i = \beta_0 + \beta_1 genero_i + \beta_2 edad_i + \beta_3 peso_i + \beta_4 M_{1,i} + \beta_5 M_{2,i} + \beta_6 m_{1,i} + \beta_7 m_{2,i},$$

donde M_1 , M_2 , m_1 y m_2 son los dos máximos y dos mínimos, respectivamente, de la fuerza mediolateral F_z , marcados en la Figura 8.1.

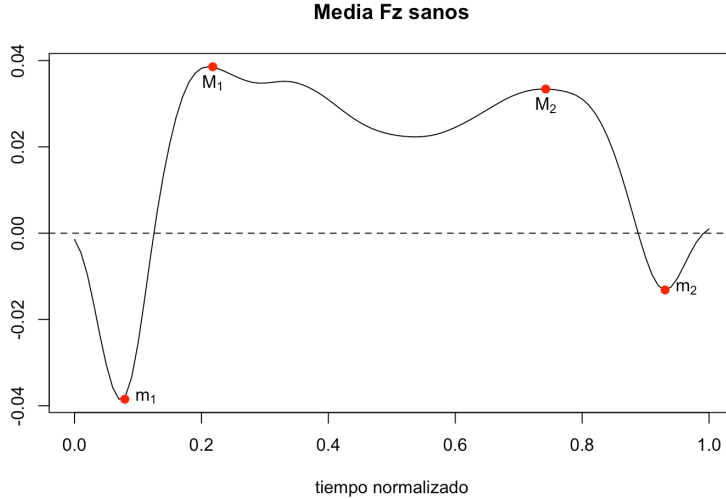


Figura 8.1: Mínimos y máximos considerados en el modelo de regresión logística no funcional de la fuerza mediolateral F_z para cada sujeto.

Resultados

Antes de comenzar a implementar el modelo de regresión logística funcional, se ha realizado un ANOVA funcional para cada componente de la fuerza para determinar si existen diferencias significativas entre el grupo de sanos y el grupo de patológicos. En las tres componentes de fuerza el p-valor es inferior a 0,001 por lo que sí que habría diferencias significativas entre ambos grupos.

- **Elección del número óptimo de bases de la función coeficiente.** En primer lugar, para cada una de las componentes de fuerza F_x , F_y y F_z , se realizan distintos modelos de regresión logística cambiando el número de bases para la función coeficiente para elegir el óptimo en base a los criterios mencionados en el apartado 8.2.1. Estos se muestran en las Tablas 8.1, 8.2 y 8.3, para la fuerza anteroposterior, vertical y mediolateral, respectivamente.

En la fuerza anteroposterior F_x (Tabla 8.1) este número óptimo se daría para 6 bases, donde el AIC es mínimo (100) así como el BIC (116), alcanzando una exactitud de 73,08%. El AUC es de 0,80, el mismo que se obtiene si se considerasen más bases. La sensibilidad es de 0,680 y la especificidad toma uno de los mayores valores (0,78). El p-valor es inferior a 0.001, por lo que sería significativo.

Tabla 8.1: AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de bases de B-Splines para la función coeficiente en el modelo de **fuerza anteroposterior** F_x . Se marca en negrita el número elegido de bases.

Número bases	AIC	BIC	Exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
5	107	122	67.95	0.73	0.660	0.700	0.030
6	100	116	73.08	0.80	0.680	0.780	<0.001
7	102	121	73.08	0.80	0.660	0.800	<0.001
8	103	124	71.79	0.80	0.710	0.720	<0.001
9	104	128	69.23	0.80	0.680	0.700	<0.001
10	105	131	75.64	0.81	0.710	0.800	0.010
11	107	135	76.92	0.81	0.740	0.800	0.010

La Tabla 8.2 muestra todas estas medidas de calidad del ajuste para la fuerza vertical F_y . En este caso, el óptimo de bases se alcanza para 8 B-Splines, con un AIC y BIC de 92 y 113, respectivamente. La exactitud es de 73,08%, con un AUC de 0,84, una sensibilidad de 0,740 y especificidad de 0,720. Igualmente el p-valor es inferior a 0,001. Aunque la exactitud, sensibilidad y especificidad aumentan si se consideran más bases (10), manteniendo constante el valor de AIC, el BIC aumenta. Por esta razón se ha considerado como óptimo 8 bases.

Tabla 8.2: AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de bases de B-Splines para la función coeficiente en el modelo de **fuerza vertical** F_y . Se marca en negrita el número elegido de bases.

Número bases	AIC	BIC	Exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
5	98	112	74.36	0.78	0.740	0.750	<0.001
6	95	111	69.23	0.81	0.680	0.700	<0.001
7	92	110	70.51	0.83	0.660	0.750	<0.001
8	92	113	73.08	0.84	0.740	0.720	<0.001
9	93	116	71.79	0.84	0.710	0.720	<0.001
10	92	118	76.92	0.86	0.790	0.750	<0.001
11	92	121	74.36	0.87	0.760	0.720	<0.001

En la Tabla 8.3 se muestran estas cantidades para el modelo de fuerza mediolateral F_z , siendo 9 bases el óptimo para este modelo. Así, el AIC y BIC son 76 y 100, respectivamente, con una de las mayores precisiones (89,74%), un AUC de 0,93 y sensibilidad de 0,890. La especificidad (0,9) es la mayor de todos los modelos. Son modelos estadísticamente significativos, con p-valores inferiores a 0,001.

- **Comparación de modelos funcionales de fuerza.** Una vez elegido el número óptimo de bases para cada uno de los modelos según la componente

Tabla 8.3: AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de bases de B-Splines para la función coeficiente en el modelo de **fuerza mediolateral** F_z . Se marca en negrita el número elegido de bases.

Número bases	AIC	BIC	Exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
5	81	95	78.21	0.88	0.840	0.720	<0.001
6	74	91	83.33	0.91	0.840	0.820	<0.001
7	75	93	84.62	0.92	0.870	0.820	<0.001
8	76	97	87.18	0.93	0.890	0.850	<0.001
9	76	100	89.74	0.93	0.890	0.900	<0.001
10	75	101	89.74	0.94	0.920	0.880	<0.001
11	75	103	91.03	0.95	0.950	0.880	<0.001

de fuerza considerada, en la Tabla 8.4 se muestran las medidas de calidad del ajuste de cada modelo para compararlas y elegir qué fuerza clasifica mejor sujetos sanos de patológicos.

El modelo de fuerza mediolateral F_z es el que proporcionaría un modelo con mayor capacidad predictiva. Si bien considera una y dos bases más que los modelos de F_x y F_y , respectivamente, no supone ningún problema de sobreajuste ya que es un número aceptable y así como el tamaño muestral ($N=77$). En el modelo de F_z , el valor de AIC es el menor respecto del modelo de F_x y F_y (76 vs. 100 y 92, respectivamente), al igual que para el BIC (100 vs. 116 y 113). La exactitud es del 89,74%, superior a la obtenida en el modelo de fuerza vertical y anteroposterior (73,08% en ambos casos). El AUC es de 0,93 en el modelo F_z , mientras que para el F_y es de 0,84 y de 0,80 para el F_x . En cuanto a la sensibilidad, el modelo de fuerza mediolateral alcanza el mayor valor (0,89), mientras que para el de fuerza vertical es 0,74 y por último, para el de fuerza anteroposterior 0,68. La especificidad es la máxima en el modelo de F_z (0,9), seguida del modelo de fuerza anteroposterior (0,78) y finalmente, de 0,72 para la fuerza vertical. Todos los modelos son estadísticamente significativos (p-valor<0,001).

Ante estos resultados, se considera seguir el resto de análisis con el modelo de fuerza mediolateral, ya que proporciona los mejores valores en todos los criterios considerados.

- **Modelo funcional junto con predictores escalares.** Al modelo considerado de fuerza mediolateral F_z se añaden los predictores escalares de género, edad y peso. En la Tabla 8.5 se muestran las medidas de calidad del modelo para el caso solo funcional y el modelo en el que a partir del funcional se añaden los escalares mencionados. Ninguna medida mejora en el modelo que considera los predictores escalares. Tanto el AIC como el BIC

Tabla 8.4: AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para el número óptimo de funciones de la base de la función coeficiente para los modelos de fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z .

Modelo	Número bases	AIC	BIC	Exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
F_x	6	100	116	73.08	0.80	0.680	0.780	<0.001
F_y	8	92	113	73.08	0.84	0.740	0.720	<0.001
F_z	9	76	100	89.74	0.93	0.890	0.900	<0.001

empeoran respecto del modelo solo funcional, pasando de 76 a 78 para el AIC y de 100 a 109 en el BIC. Es decir, el modelo más completo es menos robusto que el que considera solo las curvas de fuerza F_z . La exactitud disminuye (89,74% en el solo funcional frente a 87,18% con los escalares). El área bajo la curva se mantiene constante (0,93) y tanto la sensibilidad como la especificidad disminuyen (de 0,890 a 0,868 en la sensibilidad y 0,9 a 0,875 en la especificidad). Ambos modelos presentan un p-valor inferior a 0,001.

Tabla 8.5: Comparación del modelo funcional de fuerza mediolateral F_z con este mismo modelo al que se le añaden los predictores escalares: género, edad y peso. Se emplea la notación de fórmulas del lenguaje de programación R. Así, $F_z(t) + \text{genero} + \text{edad} + \text{peso}$ corresponde con el modelo $\ln \text{odds}_i = \beta_0 + \int \beta_1 F_{z_i}(t) + \beta_2 \text{genero}_i + \beta_3 \text{edad}_i + \beta_4 \text{peso}_i$. Cuando el predictor es funcional, se indica su dependencia respecto del tiempo como $F_z(t)$.

Modelo	AIC	BIC	Exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
$F_z(t)$	76	100	89.74	0.93	0.890	0.900	<0.001
$F_z(t) + \text{genero} + \text{edad} + \text{peso}$	78	109	87.18	0.93	0.868	0.875	<0.001

La matriz de confusión del modelo solo funcional se muestra en la Tabla 8.6, mientras que para el modelo que incorpora los predictores escalares se muestra en la Tabla 8.7. En el modelo funcional se predicen correctamente a 36 sujetos sanos y 34 patológicos, mientras que en el modelo que añade los escalares a 35 sujetos sanos y 33 patológicos. Es decir, clasifica incorrectamente a 2 sujetos más respecto del modelo solo funcional.

Tabla 8.6: Matriz de confusión del modelo funcional de fuerza mediolateral F_z .

	Predicho: sano	Predicho: patológico
Real: sano	36	4
Real: patológico	4	34

Las curvas ROC de estos dos modelos se muestran en la Figura 8.2. En la izquierda la curva ROC del modelo solo funcional y en la derecha añadiendo los predictores escalares. Ambas curvas ROC son similares, aunque la

Tabla 8.7: Matriz de confusión del modelo funcional de fuerza mediolateral F_z junto con los predictores escalares: género, edad y peso.

	Predicho: sano	Predicho: patológico
Real: sano	35	5
Real: patológico	5	33

que considera solo las funciones sin los escalares tiene un crecimiento más pronunciado. No obstante, el AUC es el mismo en ambos modelos (0,93).

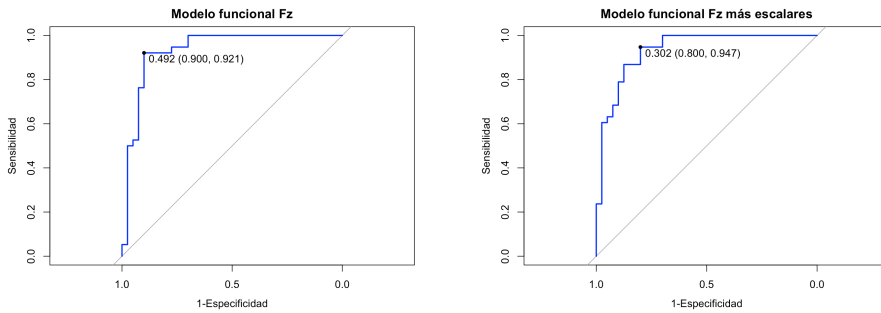


Figura 8.2: Curva ROC para el modelo de regresión logística que considera como único predictor las funciones de fuerza mediolateral F_z a la izquierda. A la derecha para el modelo que además del predictor funcional de fuerza F_z considera los predictores escalares de género, edad y peso. Se marca en la curva el punto donde la probabilidad de corte da el óptimo de sensibilidad y especificidad.

Se ha realizado un contraste de hipótesis del modelo anidado para comprobar si introducir las variables escalares realmente mejora el modelo, obteniendo un p-valor inferior de 0,256, por lo que añadir estos predictores no mejora significativamente el modelo previo solo funcional. Por ello, en base a esto y a que ninguna de las medidas consideradas se mejoran añadiendo los predictores escalares, se continua el análisis con el modelo que emplea solo las curvas de fuerzas anteroposterior F_z .

- **Comparación del modelo de regresión logística funcional con el modelo de regresión logística no funcional.** En la Tabla 8.8 se compara el modelo de regresión funcional F_z con el equivalente no funcional que considera el género, edad, peso y los dos mínimos y dos máximos de la función de fuerza mediolateral F_z descritos en el apartado 8.2.

El modelo no funcional empeora en todas las medidas respecto del funcional. El AIC (95 vs. 76) y BIC (114 vs. 100) aumentan considerablemente su valor en el no funcional. La exactitud, en el no funcional es de 78,21% mientras que en el funcional 89,74%. El área bajo la curva ROC pasa de 0,82 a 0,93 para el funcional. Igualmente los valores de sensibilidad (0,7 vs. 0,89) y especificidad (0,868 vs. 0,9) disminuyen en el no funcional. Además, el p-valor del modelo no funcional no es significativo (0,211), mientras que sí lo es para el funcional.

Tabla 8.8: Comparación del modelo funcional de fuerza mediolateral F_z que incluye predictores escalares con el equivalente no funcional que considera los valores extremos de la función F_z (dos máximos y dos mínimos) junto con el género, edad y peso. Para ello se muestran los valores de AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), área bajo la curva ROC (AUC), sensibilidad, especificidad y p-valor del modelo.

Modelo	AIC	BIC	Exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
Funcional	76	100	89.74	0.93	0.890	0.900	<0.001
No funcional	95	114	78.21	0.82	0.700	0.868	0.211

Discusión

A diferencia del otro caso estudiado en este capítulo (clasificación de sujetos con EKOA) donde la patología está bien definida, en este caso, se trata de sujetos con fractura de cadera a nivel de la pelvis, sin que esto esté asociado a ninguna patología específica. Por ello, no se ha realizado una revisión específica como sí que se ha realizado para la de EKOA. Se trata únicamente de un ejemplo de aplicación de modelos de regresión logística funcional para compararlo con lo obtenido en el modelo de regresión logística clásico.

En primer lugar, para solucionar el problema de un sobre ajuste debido a la alta dimensionalidad de los datos funcionales, se elige el número óptimo de funciones de la base para cada componente de la fuerza. Después, se comparan estos modelos, siendo la fuerza mediolateral F_z la que proporciona mejores medidas de calidad del ajuste (Tabla 8.4) con una exactitud de 89,74% y un área bajo la curva de 0,93. De este análisis se puede observar que no solo hay que fijar el criterio de la exactitud, AUC, sensibilidad o especificidad altos, ya que eso puede llevar a un problema de sobreajuste. Para ello, hay que controlar el número de variables a través de cantidades como el AIC o el BIC, ya que conforme se aumenta el número de bases, aunque la exactitud aumente, el AIC y BIC empeoran. En algunos casos no se puede obtener el óptimo de todas estas cantidades, sino que se trata de encontrar un equilibrio entre todas ellas.

Se estudia si añadir predictores escalares mejora el modelo previo, comparando las medidas de calidad del modelo descritas en el apartado 8.2.1, junto con el análisis de modelos anidados. El modelo añadiendo los tres predictores escalares de género, edad y peso no mejora estas cantidades, y de los modelos anidados se obtiene un p-valor no significativo (0,256), por lo que se decide no considerar estos predictores escalares junto con el funcional.

Finalmente, uno de los aspectos más importantes de este análisis es el de la comparación del modelo funcional con el equivalente no funcional (Tabla 8.8). El modelo funcional obtiene mejores valores en todas las cantidades consideradas (AIC, BIC, exactitud, AUC, sensibilidad y especificidad). La exactitud aumenta considerablemente, pasando del 78,21% del no funcional, a un 89,74% en el caso funcional. Además, el modelo no funcional no es estadísticamente significativo, con un p-valor de 0,211.

De este análisis se desprende que los modelos funcionales proporcionan modelos con mayor capacidad predictiva y robustos, al considerar toda la información contenida en la curva. Además, no requieren un preprocesado previo, como sí que se ha tenido que hacer en el caso del modelo no funcional para obtener los puntos máximos y mínimos. Esto se ve agravado en curvas con mucha variabilidad como la fuerza mediolateral, donde estos extremos no son evidentes en todos los sujetos.

8.3.2 *Modelo de regresión logística funcional: sujetos con EKO*

Este apartado se plantea en base a una de las necesidades detectadas en este capítulo acerca de no considerar de forma conjunta información biomecánica y clínica. El objetivo es demostrar que considerar tanto variables clínicas como biomecánicas aportan información complementaria, de forma que se comparará el modelo clínico no funcional con el modelo de regresión logística funcional considerando solo las curvas de GRF, al que después se le añadirá información clínica.

Material y métodos

Para este análisis se utilizan las curvas de fuerza de reacción sobre el suelo de la base de datos descrita en el Capítulo 4.2. Las curvas están normalizadas por el peso de cada sujeto. Cada sujeto realiza 6 repeticiones, por lo que en lugar de calcular la media de estas curvas, se obtiene la curva más profunda según lo descrito en el Capítulo 6.2. Se tienen así 56 curvas de sujetos, de los cuales 31 son sanos y 25 patológicos (osteoartritis temprana de rodilla, EKO).

Se implementa un modelo de regresión logística funcional para clasificar a los sujetos. En el ANOVA funcional realizado sobre esta base de datos en el apartado 7.3.1 se encontraron diferencias significativas entre el grupo de sanos y enfermos en la fuerza mediolateral F_z . No obstante, se va a realizar el modelo de regresión para cada fuerza y se compararán los resultados.

En primer lugar, se diseñan tres modelos de regresión logística funcional, cada uno para cada una de las fuerzas de reacción sobre el suelo: anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z . Se utiliza la base de componentes principales para expresar estas funciones de fuerza y la función coeficiente. Para determinar el número óptimo de funciones de la base se usan las medidas de calidad del ajuste antes mencionadas, junto con un porcentaje de variabilidad explicado de al menos el 90%. Se tienen las fuerzas de reacción sobre el suelo de las dos piernas, por lo que para no introducir demasiados parámetros al modelo considerándolas como dos predictores, se va a utilizar un Análisis de Componentes Principales bivalente. De esta forma se consideran ambas curvas sin aumentar el número de variables del modelo.

Según qué fuerza de las tres analizadas sea más discriminante, se diseñan tres modelos más:

M_1 Lo designaremos como modelo clínico. No incluye variables biomecánicas, solo los siguientes predictores escalares: EVA, peso y altura de cadera. La función logística del modelo es

$$\ln odds_i = \beta_0 + \beta_1 EVA_i + \beta_2 peso_i + \beta_3 altura_{cadera,i}.$$

M_2 Es el modelo biomecánico e incluye las curvas de fuerza de reacción sobre el suelo de la fuerza más discriminante. Se añaden también características individuales como el peso y altura de cadera (pero no el EVA). Su función logit es

$$\ln odds_i = \beta_0 + \int \beta_1(t)F(t)_i dt + \beta_2 peso_i + \beta_3 altura_{cadera,i}.$$

M_3 El tercer modelo lo denominamos modelo biomecánico y clínico porque usa los dos tipos de variables. Este modelo se implementa para demostrar la mejora que los predictores biomecánicos tienen sobre el modelo respecto del que solo usa información clínica como el EVA. Así, en este modelo se usa la fuerza de reacción sobre el suelo más discriminante y los predictores escalares: EVA, peso y altura de cadera.

$$\ln odds_i = \beta_0 + \int \beta_1(t)F(t)_i dt + \beta_2 peso_i + \beta_3 altura_{cadera,i} + \beta_4 EVA_i$$

El peso y altura de cadera se incluyen dentro de todos los modelos como variables de control debido a su influencia en los patrones de marcha [75, 72].

Por tanto, en primer lugar el modelo M_2 se analiza para cada una de las componentes de fuerza de reacción sobre el suelo (anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z), determinando cuál de las tres tiene mayor capacidad de clasificación. Con esta fuerza se realizan el resto de análisis en los modelos M_1 y M_3 .

Se compararán estos tres modelos según las medidas de calidad del ajuste ya mencionadas (apartado 8.2.1). Además, el modelo completo M_3 se compara con el modelo M_2 que contiene solo predictores biomecánicos, para comprobar la hipótesis de que incorporar variables clínicas, como el nivel de dolor, mejora la predicción obtenida por el modelo basado solo en información biomecánica. Finalmente, se realiza un gráfico similar a un gráfico de efectos para analizar el impacto que las variables biomecánicas tienen en el modelo. En este gráfico se comparan las probabilidades predichas por el modelo clínico (M_1) con las obtenidas en el modelo que además añade a estas las variables biomecánicas (M_3), para distintos valores de nivel de dolor EVA.

Resultados

- **Elección del número óptimo de componentes principales.** Las Tablas 8.9, 8.10 y 8.11 muestran para distintos números de componentes principales el porcentaje de variabilidad explicado, AIC, BIC, porcentaje de exactitud (número de sujetos clasificados correctamente entre el total de la muestra), área bajo la curva ROC (AUC), sensibilidad, especificidad y p-valor del modelo, para los modelos de fuerza anteroposterior F_x , vertical F_y y mediolateral F_z , respectivamente. Se marca en negrita el valor óptimo de número de componentes principales para cada fuerza.

En la fuerza anteroposterior F_x y vertical F_y (Tabla 8.9 y 8.10) ese óptimo se da para 8 componentes principales en ambos casos. Para las dos fuerzas ese porcentaje de variabilidad explicado es superior al 90% (91,78% y 90,40%, respectivamente).

En el caso de la fuerza anteroposterior F_x , aunque para 9 componentes la exactitud (73,21% vs. 69,64%), sensibilidad (0,64 vs. 0,60) y especificidad

Tabla 8.9: Porcentaje de variabilidad explicado según el número de componentes principales, AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de componentes principales de la **fuerza anteroposterior** F_x . Se han concatenado las curvas de ambas piernas, por lo que son componentes principales bivariantes. Se marca en negrita el número de componentes principales elegido.

Número CP	% variabilidad	AIC	BIC	exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
6	86.30	89	107	67.86	0.69	0.56	0.77	0.610
7	89.24	91	111	67.86	0.69	0.60	0.74	0.697
8	91.78	93	115	69.64	0.69	0.60	0.77	0.776
9	93.49	94	118	73.21	0.69	0.64	0.81	0.800
10	94.94	95	121	69.64	0.71	0.60	0.77	0.774

(0,81 vs. 0,77) es superior que para 8 componentes, también los valores de AIC (94 vs. 93) y BIC (118 vs. 115), siendo el área bajo la curva constante (0,69). Así, como solución de compromiso se consideran 8 componentes, teniendo también en cuenta que el tamaño muestral no es muy elevado. En la fuerza vertical F_y , considerar 8 componentes da el óptimo de exactitud (71,43%), sensibilidad (0,64) y especificidad (0,77), con un AUC de 0,71, sin que el AIC (91) y BIC (113) sean muy elevados. En cualquier caso, ni en la fuerza F_x ni en la F_y son modelos significativos, con p-valores de 0,776 y 0,611 respectivamente.

Tabla 8.10: Porcentaje de variabilidad explicado según el número de componentes principales, AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de componentes principales de la **fuerza vertical** F_y . Se han concatenado las curvas de ambas piernas, por lo que son componentes principales bivariantes. Se marca en negrita el número de componentes principales elegido.

Número CP	% variabilidad	AIC	BIC	exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
6	85.16	88	107	66.07	0.71	0.56	0.74	0.575
7	88.24	90	110	69.64	0.70	0.56	0.81	0.643
8	90.40	91	113	71.43	0.71	0.64	0.77	0.611
9	92.48	93	117	69.64	0.71	0.60	0.77	0.685
10	93.91	94	121	66.07	0.72	0.52	0.77	0.730

En la Tabla 8.11 se muestran las cantidades análogas para el modelo de fuerza mediolateral F_z . El óptimo de componentes principales es 7, con las que se explica prácticamente un 90% de variabilidad (89,05%). La exactitud es del 80,36%, el valor más alto de todas las componentes, al igual que la sensibilidad (0,80) y especificidad (0,81). El área bajo la curva ROC es 0,83. El AIC (78) y BIC (98) son los segundos más bajos de los modelos analizados en esta fuerza. Es un modelo estadísticamente significativo, con un p-valor de 0,023.

Tabla 8.11: Porcentaje de variabilidad explicado según el número de componentes principales, AIC, BIC, exactitud (en porcentaje), sensibilidad, especificidad y p-valor para distintos números de componentes principales de la **fuerza mediolateral F_z** . Se han concatenado las curvas de ambas piernas, por lo que son componentes principales bivariantes. Se marca en **negrita** el número de componentes principales elegido.

Número CP	% variabilidad	AIC	BIC	exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
6	86.57	76	94	75.00	0.82	0.76	0.74	0.015
7	89.05	78	98	80.36	0.83	0.80	0.81	0.023
8	91.15	79	101	78.57	0.83	0.76	0.81	0.030
9	92.82	81	105	80.36	0.83	0.76	0.84	0.043
10	94.21	82	109	76.79	0.84	0.68	0.84	0.058

- **Comparación de modelos de fuerza.** Una vez elegido este número óptimo de componentes principales para cada modelo, se comparan en la Tabla 8.12. El modelo de fuerza mediolateral F_z es el que con menos componentes (7) proporciona mejores medidas de calidad del ajuste. El AIC y BIC son menores que en los modelos de la fuerza F_x y F_y (78 vs. 93 y 91 para el AIC y 98 vs. 115 y 113 para el BIC, respectivamente para el modelo de F_z , F_x y F_y). La exactitud del modelo de F_z también es superior (80,36%) a la obtenida en el modelo de F_x (69,64%) y de F_y (71,43%). El área bajo la curva toma un valor de 0,83 en el modelo de la fuerza mediolateral, mientras que es de 0,69 y 0,71 para el de fuerza anteroposterior y vertical, respectivamente. En cuanto a la sensibilidad y especificidad, estas también alcanzan el máximo valor en el modelo F_z (0,80 y 0,81). Finalmente, solo el modelo de fuerza mediolateral es significativo (p-valor = 0,023). Por ello, se considera el modelo de fuerza mediolateral F_z para el resto de análisis.

Tabla 8.12: Número de componentes principales consideradas en el modelo, valores de AIC, BIC, exactitud (porcentaje de sujetos correctamente clasificados), AUC (área bajo la curva ROC), sensibilidad, especificidad y p-valor de los modelos implementados para cada fuerza: anteroposterior (F_x), vertical (F_y) y mediolateral (F_z). Se marca en **negrita** el modelo de fuerza mediolateral F_z ya que es el que presenta mejores medidas de calidad del modelo.

Fuerza	Número CP	AIC	BIC	exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
Anteroposterior F_x	8	93	115	69.64	0.69	0.60	0.77	0.776
Vertical F_y	8	91	113	71.43	0.71	0.64	0.77	0.611
Mediolateral F_z	7	78	98	80.36	0.83	0.80	0.81	0.023

- **Comparación de los modelos clínicos y biomecánicos.** Se implementan los modelos clínico (M_1), biomecánico (M_2) y biomecánico y clínico (M_3) con las medidas de calidad del ajuste mostradas en la Tabla 8.13. El modelo más robusto es el clínico M_1 , con el menor valor de AIC (61) y BIC (69). El menos robusto sería el M_2 , con los valores más altos de AIC (78) y BIC (98). El modelo M_3 que combina variables biomecánicas y clínicas, está

en una posición intermedia, con mejores valores de AIC (66) y BIC (88) que el modelo M_2 , pese a considerar más predictores.

Respecto a la capacidad predictiva, el modelo M_3 es el que presenta cantidades más altas en todos los indicadores (exactitud del 83,93%, AUC de 0,92, sensibilidad de 0,88 y especificidad de 0,81). Estos valores son mejores que los obtenidos en cualquiera de los otros dos modelos.

Tabla 8.13: Valores de AIC, BIC, exactitud (porcentaje de sujetos correctamente clasificados), AUC (área bajo la curva ROC), sensibilidad, especificidad y p-valor para cada uno de los tres modelos implementados: modelo clínico (M_1), biomecánico (M_2) y modelo biomecánico y clínico (M_3). Se ha empleado la notación de fórmulas del lenguaje de programación R. Por ejemplo, $EVA + peso + h_{cadera}$ corresponde con un modelo donde la media está relacionada con la componente sistemática de la siguiente forma $\ln odds_i = \beta_0 + \beta_1 EVA_i + \beta_2 peso_i + \beta_3 h_{cadera,i}$. Cuando hay un predictor funcional, se indica su dependencia respecto del tiempo como $F_z(t)$.

Modelo	AIC	BIC	exactitud (%)	AUC	Sensibilidad	Especificidad	p-valor
$M_1 : EVA + peso + h_{cadera}$	61	69	78.57	0.85	0.80	0.81	< 0.001
$M_2 : F_z(t) + peso + h_{cadera}$	78	98	80.36	0.83	0.76	0.81	0.023
$M_3 : F_z(t) + peso + h_{cadera} + EVA$	66	88	83.93	0.92	0.88	0.81	< 0.001

En la Figura 8.3 se muestran las curvas ROC del modelo clínico (rojo), biomecánico (verde) y biomecánico y clínico (azul). Se representa en la gráfica el punto de la curva ROC que proporciona el máximo de sensibilidad y especificidad, indicando el umbral de probabilidad que proporciona ese valor óptimo. Hay que destacar que tanto para el modelo M_1 como para el M_2 ese umbral de probabilidad se ha fijado en 0,5, mientras que para el modelo M_3 se ha establecido en 0,4 ya que es la probabilidad de corte que da mejor porcentaje de clasificación, sensibilidad y especificidad.

El modelo M_3 , que incluye las fuerzas de reacción sobre el suelo, peso, altura de cadera y EVA, no solo es mejor que los modelos M_1 y M_2 en términos de robustez y capacidad predictiva, sino que también representa una mejora significativa. La comparación entre los modelos M_3 y M_2 muestra un efecto significativo de la variable clínica EVA (p-valor < 0,001), lo que implica que su coeficiente es no nulo y que debería incluirse en el modelo de clasificación junto con la fuerza mediolateral.

El efecto de añadir las variables biomecánicas y clínicas se puede describir con más detalle en el gráfico de la Figura 8.4. En este gráfico se representa, en función de varios valores de EVA, las probabilidades predichas (siendo 0 sanos y 1 sujeto con EKO) por el modelo M_1 que considera el peso, altura de cadera y EVA (rojo) y el M_3 , modelo que añade al anterior las

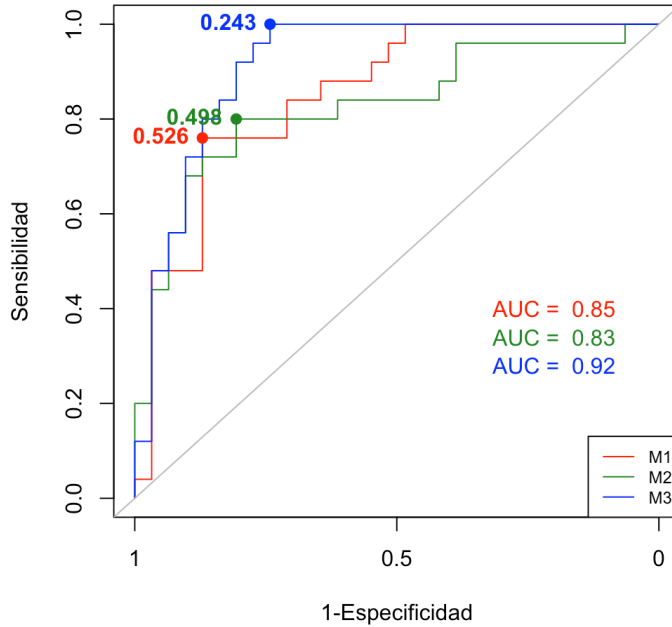


Figura 8.3: Curvas ROC correspondientes a los distintos modelos evaluados: el modelo clínico (M_1) en verde, el modelo biomecánico (M_2) en rojo y el modelo combinado biomecánico y clínico (M_3) en azul. En cada curva se señala el punto que maximiza simultáneamente la sensibilidad y la especificidad, junto con el umbral de probabilidad asociado a dicha optimización.

curvas de fuerza mediolateral (azul). Para ello, se mantienen constantes los demás predictores, excepto la EVA, por lo que se ha considerado la curva más profunda de todas las usadas en el modelo (mediana funcional) con las características de peso y altura de cadera correspondientes al sujeto seleccionado. El modelo M_3 predice probabilidades más altas que el modelo M_1 para un mismo nivel de EVA. Sin embargo, esta diferencia no es la misma en todos los niveles de EVA, siendo mayor en la zona central (con diferencias del orden de 0,1) que en los extremos, donde ambos modelos proporcionan prácticamente la misma probabilidad.

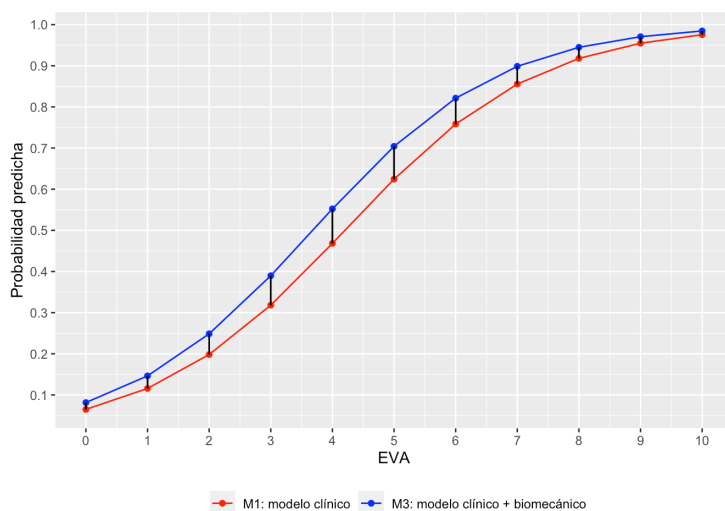


Figura 8.4: La figura presenta la probabilidad predicha para distintos valores de EVA según los modelos clínico (en rojo) y combinado biomecánico-clínico (en azul). La probabilidad estimada por cada modelo se representa en función del valor de la EVA, mientras que el resto de los predictores se han mantenido constantes. Para la curva de fuerza mediolateral, se ha utilizado la más profunda del grupo patológico, y tanto el peso como la altura de la cadera corresponden al sujeto con dicha curva. La línea negra indica la diferencia entre las probabilidades predichas por ambos modelos.

Discusión

Con este modelo se pretende clasificar sujetos con osteoartritis temprana de rodilla (EKOA) utilizando variables cinemáticas (curvas de fuerza de reacción sobre el suelo) así como variables clínicas como la escala de dolor EVA como predictores. La novedad de este enfoque por un lado es la utilización de un modelo funcional, y por otro el uso de variables biomecánicas y clínicas, ya que pocos trabajos emplean de forma conjunta este tipo de información. Además, esos trabajos desarrollan modelos basados en la estadística univariante o multivariante, como la regresión logística, o métodos basados en Inteligencia Artificial.

La capacidad predictiva de estos modelos normalmente se realiza a través de la exactitud en las predicciones (porcentaje de sujetos correctamente clasificados). En este sentido, los modelos basados en Inteligencia Artificial son razonablemente buenos. En un trabajo [82], se alcanza un porcentaje de 77,8% utilizando un Random Forest. Estos resultados incluso son mejores con otras técnicas, como el clasificador de vecinos más próximos [110, 109].

Hay que destacar que en el estudio del clasificador del vecino más próximo, los sujetos patológicos tienen un KL que puede variar entre 1 y 4, el más severo. Esto es fundamental a la hora de comparar resultados en modelos de clasificación, ya que esa exactitud depende del nivel de severidad de la patología. Este hecho se confirma en el trabajo de [115], donde utilizan una máquina de vectores de soporte basada en árboles de decisión difusos, obteniendo distintos porcentajes de clasificación según el nivel de severidad de la patología. Así, clasifica correctamente al 89% de los sujetos con una severidad leve (KL 1 ó 2), mientras que para los que presentan una patología severa (KL 3 ó 4) es del 91,5%. Por tanto, si queremos comparar los resultados obtenidos con el modelo de regresión funcional, tiene que ser con trabajos donde se estudie la patología de osteoartritis temprana de rodilla. Es decir, estudios donde se compare un grupo de sujetos sanos y los patológicos tengan síntomas leves. Sin embargo, solo se ha encontrado un trabajo donde los sujetos patológicos tengan un KL de 1 ó 2 [136], donde utilizando distintas técnicas de Machine Learning obtiene porcentajes de clasificación del 91%. Sin embargo, no analiza fuerzas de reacción sobre el suelo sino datos de equilibrio. Por último, trabajos basados en redes neuronales [186, 187] arrojan porcentajes correctos de clasificación superiores al 95%, aunque no especifican el nivel de gravedad de los pacientes.

Aunque muchas de estas técnicas basadas en Inteligencia Artificial proporcionen porcentajes altos de clasificación, no es el único criterio que hay que considerar cuando se evalúan modelos de clasificación. Hay que tener en cuenta otros criterios, como la robustez del modelo o la posibilidad de interpretar los resultados obtenidos. Es decir, analizar qué variables predictoras influyen más en la patología, ya que este es un aspecto clave para ayudar al personal clínico. Así, los modelos basados en IA tienen el principal inconveniente de ser “cajas negras”, por lo que se dificulta la interpretación de los resultados. Además, como se utilizan numerosas variables predictoras, suelen tener asociado el problema del sobre ajuste [37]. Por ello, la utilización de modelos de regresión logística gana interés [10, 38, 60, 183], ya que solucionan parte de estos problemas.

La mayoría de estudios que utilizan regresión logística presentan peores porcentajes de clasificación respecto de los que se obtienen con IA. Por ejemplo, trabajos que usan modelos de regresión en sujetos con osteoartritis de rodilla obtienen porcentajes de clasificación entre el 74% [60] y el 83% [38]. Sin embargo, en este último trabajo [38], el grupo de patológicos presentaba a través de diagnóstico radiológico una enfermedad avanzada (KL 3 ó 4), en algunos casos incluso estaban esperando una operación de rodilla. Otros estudios comparan técnicas de Machine Learning como la máquina de vectores de soporte (SVM) con regresión logísti-

ca, obteniendo porcentajes del 85,6% para el SVM y de 83,9% para la regresión logística [183].

Dados todos estos resultados, hay que preguntarse si las mejoras en la exactitud de los modelos de IA compensan las limitaciones de este. Modelos que combinen las ventajas de los dos enfoques (el de la estadística tradicional y el de IA) pueden reducir las limitaciones de ambos. Así, los modelos de regresión logística funcional permiten estudiar las curvas completas, sin tener que extraer características de las mismas. Además, permiten identificar la contribución de cada variable predictora al modelo de clasificación. Finalmente, tienen también la ventaja de que permiten establecer pruebas de significancia y criterios de robustez para evaluar la calidad y la verosimilitud de los modelos.

Es por ello, que en este apartado se ha implementado un modelo de regresión logística funcional usando las funciones de fuerza de reacción sobre el suelo junto con variables clínicas como la EVA. No es habitual emplear variables biomecánicas y clínicas de forma conjunta. Solo se ha encontrado un trabajo que las combine, aunque en ese caso utilizan el WOMAC [55] no en la patología de EKOA sino en estabilidad de rodilla.

De los modelos de regresión logística implementados, la fuerza mediolateral F_z es la componente que contribuye más significativamente al modelo. Este resultado es consistente con lo obtenido en otro trabajo [109] donde se usa un clasificador basado en IA. Además, del FANOVA realizado en el apartado 7.3.1 solo había diferencias significativas en la fuerza mediolateral.

Por otro lado, los modelos de clasificación basados en IA no permiten obtener niveles de significancia para los predictores. Solo comparan la exactitud de los modelos de clasificación cuando se usa una variable u otras. Identificar variables significativas es un aspecto crítico para interpretar clínicamente los modelos y elegir aquellas variables que realmente tengan una contribución en el modelo. Uno de los problemas de los modelos de IA es que aunque obtengan porcentajes de clasificación altos, emplean numerosas variables, a veces incluso más que el tamaño muestral.

Comparando los tres modelos implementados una vez seleccionada la fuerza más discriminante, el modelo basado solo en información biomecánica M_2 es ligeramente más preciso que el que solo usa información clínica como la EVA (modelo M_1), con porcentajes de clasificación del 80,36% frente al 78,57%. Sin embargo, esta mejora se obtiene a costa de empeorar los valores de AIC y BIC con un ligero empeoramiento de la sensibilidad (0,76 vs. 0,80). Esto demuestra el efecto que acaba de mencionarse, donde el incremento del número de variables (3 para

el modelo de M_1 y 10 para el M_2), mejora el porcentaje de clasificación pero compromete la robustez del modelo. De ahí la importancia de incluir criterios de robustez en los modelos de IA donde se emplean numerosos predictores.

Las ligeras diferencias encontradas en los modelos M_1 y M_2 sugiere el hecho de reconsiderar la utilidad de emplear solo variables biomecánicas o clínicas por separado. Si las variables biomecánicas aportan información adicional a las clínicas, entonces es lógico considerarlas ambas en un mismo modelo. Así, realmente la mejora se produce con el modelo M_3 que combina las curvas de fuerza mediolateral F_z con la información clínica proporcionada por la EVA. Este modelo presenta la exactitud más alta (83,93%) y los valores más altos de sensibilidad (0,88) y área bajo la curva (0,92). Además, es mucho más robusto (valores bajos de AIC y BIC) que el modelo biomecánico M_2 aunque solo tenga una variable más. Además, la comparación entre los modelos M_2 y M_3 utilizando modelos anidados muestra que el efecto del EVA mejora el modelo previo que solo considera las curvas de fuerza (p -valor $< 0,001$). Sin embargo, los modelos de clasificación en patologías de rodilla usan por separado las variables clínicas y las biomecánicas. Solo en un estudio, pero de estabilidad de rodilla, emplean de forma conjunta variables clínicas (WOMAC) [55]. Por último, en la Figura 8.4 se muestra cómo varían las probabilidades predichas por el modelo para distintos valores de EVA para el modelo clínico M_1 y el biomecánico y clínico (M_3). Estas diferencias son más pequeñas para valores extremos del EVA, pero se hacen más evidentes en valores centrales, precisamente donde hay más dudas sobre la existencia o no de la patología.

La exactitud del modelo de regresión logística funcional implementado es menor que la obtenida por la mayoría de técnicas de Machine Learning, excepto para el Random Forest [82] y es superior a la obtenida por otros estudios donde usan modelos de regresión logística clásicos [38, 60, 183]. Sin embargo, estas comparaciones entre porcentajes de clasificación debe hacerse con cautela, por varias razones. En primer lugar, el número de predictores empleado es diferente según los distintos trabajos y no es comparable al usado en el modelo implementado en esta tesis, que son mucho menores al tamaño muestral y al empleado en otros trabajos. Por ejemplo, en un trabajo [109] la exactitud es del 91%, pero a costa de utilizar 31 variables para cada fuerza; cuando un modelo más simple se usa, entonces la exactitud cae al 67%. En contraste, la exactitud de nuestro modelo es mayor que la obtenida en otros trabajos [82] (78%), donde se usan más de 20 variables predictores.

La segunda razón, la mayoría de estudios revisados aplican diferentes técnicas de clasificación a una muestra de sanos y sujetos con patología severa (KL entre 1 y 4). Cuando la clasificación se hace entre grupos extremos, es mucho más efec-

tiva. Sin embargo, no presenta mucho interés realizar estudios biomecánicos muy costosos para clasificar sujetos con diferencias clínicas evidentes. Sin embargo, un clasificador que diferencia entre sujetos sanos y sujetos con una patología en un estadio inicial donde todavía apenas presenta síntomas, es mucho más valioso. Esto tiene gran interés clínico, ya que puede ayudar a clínicos a tomar decisiones terapéuticas o preventivas. Este es el caso de la muestra analizada en el modelo implementado en este capítulo, donde toda la muestra presenta dolor de rodilla y se quiere clasificar a los sujetos sanos (aunque tengan dolor de rodilla) con aquellos con EKO (KL 1).

8.4 Conclusiones

Según el análisis realizado en este capítulo, se extraen las siguientes conclusiones sobre los clasificadores binarios:

- El enfoque basado en la estadística univariante, a través de los modelos de regresión logística, presentan métricas de evaluación del modelo bajas (exactitud, AUC, sensibilidad o especificidad). Aunque presentan la ventaja de que estos modelos permiten realizar una interpretación de los resultados obtenidos, analizando qué predictores están más o menos relacionados con una probabilidad mayor de tener o no una patología. Estos modelos además requieren un preprocesado previo de las curvas para extraer características que serán los predictores del modelo. Esto se dificulta especialmente en los patrones patológicos, como se ha comentado en el apartado [8.3.1](#).
- La alternativa actual son los modelos de clasificación basados en Inteligencia Artificial, que si bien proporcionan métricas de evaluación mucho más elevadas, presentan grandes inconvenientes. Por un lado, son modelos de “caja negra” [37], esto quiere decir que no se conoce la forma de clasificación del modelo y por qué una probabilidad es más o menos alta que otra. Es decir, no se puede hacer una interpretación de los resultados, lo cual es esencial en el ámbito clínico. Por otro lado, presentan el grave problema del sobre ajuste, al utilizar numerosas variables de entrada, en ocasiones superior al tamaño muestral. Además, no se puede hacer una validación del modelo al no emplear estimadores estadísticos ni p-valores, a diferencia del modelo de regresión logística.
- Como alternativa a estos problemas y solución intermedia se plantea el uso del FDA, a través de modelos de regresión logística funcional que proporcionen valores superiores de exactitud a los que se obtienen en la regresión

logística habitual, similares a los de la IA, sin tener los inconvenientes de esta. Es decir, en los modelos funcionales se puede hacer una interpretación de los resultados y una validación del modelo.

- Se establecen criterios para la elección del número óptimo de funciones de la base de la función coeficiente, para reducir el problema del sobre ajuste. Estos mismos criterios sirven para comparar modelos funcionales entre sí.
- Se ha comparado el modelo de regresión logística funcional con el equivalente no funcional, demostrando que el enfoque funcional proporciona mejores resultados, evitando el problema de tener que extraer características de la función al emplear la curva completa.
- Finalmente, se ha empleado un modelo de regresión logística funcional para clasificar sujetos sanos con dolor de rodilla de aquellos con EKOA. Este estudio resulta innovador por dos cuestiones. La primera, se trata de una muestra con pacientes con una fase inicial de la patología donde se ha podido clasificar la muestra con unos valores de exactitud aceptables. Esto es novedoso ya que la mayoría de estudios analizados emplean muestras donde los sujetos patológicos están en una fase avanzada, por lo que esa clasificación es más evidente. El otro aspecto innovador, es la utilización de información biomecánica y clínica de forma conjunta, ya que no se suelen emplear ambas fuentes de información simultáneamente.

Como trabajos futuros quedaría analizar los modelos de regresión funcional multinomiales y ordinales. Los modelos de regresión funcional multinomial podrían usarse cuando por ejemplo, se tengan curvas biomecánicas y se quiera clasificar según distintas patologías (cadera, rodilla y tobillo). En cambio, los modelos de regresión ordinales funcionales permitirían clasificar cuando esa variable categórica sí que tiene un orden, cuando la valoración se realiza en una escala ordinal y no simplemente en presencia o ausencia de una patología.

Capítulo 9

Conclusiones

En esta tesis doctoral se propuso identificar y abordar diversas lagunas metodológicas en la aplicación del Análisis de Datos Funcionales (FDA) en la evaluación biomecánica del aparato locomotor. Se han explorado áreas como la normalización del tiempo, los descriptores funcionales y la inferencia estadística a través de modelos de regresión lineal y de regresión logística funcional. A continuación se enumeran las principales conclusiones extraídas en cada una de estas áreas.

9.1 Normalización del tiempo (objetivo específico 1)

Del análisis del proceso de normalización del tiempo se extrae que:

- Los métodos de registro no lineales, como el de Ramsay o de Fisher-Rao, permiten reducir la variabilidad de fase, pero introducen algunos problemas como el efecto “pellizco”, en especial el basado en la métrica de Fisher-Rao.
- El método de Ramsay mantiene la coordinación dinámica entre curvas cuando se aplica correctamente la derivación. Sin embargo, ningún método conserva simultáneamente la coordinación motora entre diferentes grados de libertad ni tampoco la coherencia mecánica entre componentes de una misma magnitud física como la fuerza.

- En casos con alta variabilidad entre curvas se detectan fallos en el registro no lineal, al no haber puntos característicos evidentes como extremos.
- Aunque estos métodos de normalización no lineal reduzcan la variabilidad de fase, se altera la duración relativa de las fases del movimiento, los desfases entre articulaciones y el cálculo de derivadas, por lo que se altera la dinámica del movimiento. Así, estos métodos serían más adecuados cuando se quieran calcular curvas medias. En cambio, si después se van a emplear otras técnicas estadísticas, quizá la normalización lineal puede ser la mejor opción, ya que no altera la información contenida en las curvas.

9.2 Descriptivos funcionales (objetivos específicos 2 y 3)

Del capítulo de descriptivos funcionales se obtienen las siguientes conclusiones:

- Se ha demostrado que la media funcional no es un estimador representativo en muestras con alta variabilidad. En estos casos, la curva más profunda da una representación más robusta de la centralidad. En casos de baja variabilidad, ambos descriptivos son similares si el objetivo es extraer variables escalares como extremos o pasos por cero. En cambio, la curva más profunda es más adecuada si se va a hacer un análisis donde se considere la curva completa.
- Las bandas de confianza punto a punto no reflejan adecuadamente la estructura de los datos funcionales. En su lugar, son preferibles técnicas basadas en bootstrap obteniendo envolventes de curvas profundas.
- En cuanto a la variabilidad, la desviación típica funcional punto a punto no describe correctamente la variabilidad de los datos funcionales. Se propone el empleo de un rango intercuartílico funcional obtenido a partir del concepto de curva profunda.
- El uso de la media como curva de referencia para el registro temporal puede llevar a un peor alineamiento de las curvas, en especial cuando estas presentan mucha variabilidad. En estos casos es más adecuado el uso de la curva más profunda como curva patrón, ya que se corresponde con una curva real.

9.3 Inferencia estadística (objetivos específicos 4, 5 y 6)

En esta tesis se han estudiado los modelos de regresión lineal funcional, tanto la regresión función sobre escalar como la de escalar sobre función; así como los modelos de regresión logística funcional como clasificaciones binarios.

Las principales conclusiones extraídas de los **modelos de regresión lineal** son:

- Se ha demostrado la importancia de corregir los p-valores obtenidos al realizar una regresión lineal función sobre escalar, ya que se realizan comparaciones múltiples, controlando así los errores de tipo I. Además, se ha propuesto la utilización del modelo limma, que mejora la estimación de la varianza del error aleatorio con un método bayesiano empírico. Esto proporciona p-valores crudos más fiables a los que aplicar correcciones por comparaciones múltiples.
- Se ha establecido un criterio para controlar el número de parámetros del modelo para evitar sobre ajustes, eligiendo así el número óptimo de bases de la función coeficiente del modelo.
- Los modelos de regresión escalar sobre función obtienen valores de correlación lineal múltiple que son prácticamente el doble de los obtenidos para el equivalente no funcional.
- Los modelos funcionales permiten una interpretación de los resultados, pudiendo analizar qué partes de la curva están más relacionadas con una determinada patología.

En cuanto a las conclusiones de los **modelos de regresión logística**:

- Ofrecen un equilibrio entre los modelos de regresión logística no funcional, al obtener mayores precisiones, y los modelos basados en IA, permitiendo realizar una interpretabilidad y controlando el sobre ajuste.
- De forma análoga a los modelos de regresión lineal, se ha establecido un criterio para seleccionar el número óptimo de funciones de la base de coeficientes para garantizar la robustez del modelo.
- En los modelos de regresión logística funcional se obtienen también mejores medidas de calidad del ajuste que las obtenidas con el equivalente no funcional, evitando el problema de tener que seleccionar características de la curva para el análisis.

9.4 Líneas futuras

Se plantean las siguientes líneas futuras:

- Dada la limitación de la normalización del tiempo, se plantea considerar un cambio de dominio, analizando las curvas en función de la posición en lugar del tiempo, lo que podría ofrecer una visión complementaria y diferente de los análisis actuales.
- En los descriptivos funcionales se ha empleado la curva profunda a través de la definición de la h-moda. Sin embargo, hay otras definiciones de profundidad, por lo que quedaría explorarlas, estudiando las diferencias entre estas y con los descriptivos habituales de media y desviación típica funcional.
- En bases de datos donde se dispongan de varias repeticiones por un mismo sujeto, faltaría analizar cómo afecta el considerar la curva profunda o la curva media de esas repeticiones en un modelo de regresión lineal o de regresión logística funcional, comparando los resultados obtenidos con ambos enfoques.
- Aplicar modelos de regresión lineal funcional a otras patologías y regiones anatómicas, aparte de las estudiadas en esta tesis (patologías cervicales y de rodilla).
- En Biomecánica la mayoría de escalas clínicas utilizadas son escalas ordinales, por lo que se plantea como trabajo futuro implementar modelos de regresión funcional ordinales.
- De forma análoga, los modelos de regresión multinomial funcional son adecuados cuando se tienen varias categorías y se quiere hacer una clasificación. En Biomecánica se pueden aplicar cuando se tengan por ejemplo varias patologías, clasificando los sujetos en base a curvas obtenidas a través del análisis de movimientos.
- Por último, quedaría por explorar el caso en que se tenga dato funcional repetido, como ocurre en estudios longitudinales o cuando se ha medido antes y después de un tratamiento.

Bibliografía

- [1] Mariem Abid, Neila Mezghani y Amar Mitiche. «Knee Joint Biomechanical Gait Data Classification for Knee Pathology Assessment: A Literature Review». En: *Applied Bionics and Biomechanics* 2019 (2019), págs. 1-14. ISSN: 1754-2103. DOI: [10.1155/2019/7472039](https://doi.org/10.1155/2019/7472039).
- [2] Konrad Abramowicz, Charlotte K. Häger, Alessia Pini, Lina Schelin, Sara Sjöstedt de Luna y Simone Vantini. «Nonparametric inference for functional-on-scalar linear models applied to knee kinematic hop data after injury of the anterior cruciate ligament». En: *Scandinavian Journal of Statistics* 45.4 (2018), págs. 1036-1061. ISSN: 1467-9469. DOI: [10.1111/sjos.12333](https://doi.org/10.1111/sjos.12333).
- [3] Christian Acal y Ana M. Aguilera. «Basis expansion approaches for functional analysis of variance with repeated measures». En: *Advances in Data Analysis and Classification* 17.2 (2022), págs. 291-321. ISSN: 1862-5355. DOI: [10.1007/s11634-022-00500-y](https://doi.org/10.1007/s11634-022-00500-y).
- [4] H. Akaike. «A new look at the statistical model identification». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 19.6 (1974), págs. 716-723. DOI: [10.1109/TAC.1974.1100705](https://doi.org/10.1109/TAC.1974.1100705).
- [5] Sabina Asensio-Cuesta; José Antonio Diego-Mas; M^a Carmen González-Cruz; Jorge Alcaide-Marzal. «Análisis de los factores de riesgos relacionados con los trastornos musculoesqueléticos». español. En: *XIII Congreso Internacional de Ingeniería de Proyectos*. Badajoz, España, 2009. ISBN: 978-84-613-3497-1.

- [6] Yasir S. Alshehri. «Gait Analysis Post Anterior Cruciate Ligament Reconstruction Using Inertial Sensors: A Longitudinal Study». Tesis de mtría. University of Kansas, 2019.
- [7] André G. P. Andrade, Janaine C. Polese, Leopoldo A. Paolucci, Hans-Joachim K. Menzel y Luci F. Teixeira-Salmela. «Functional Data Analyses for the Assessment of Joint Power Profiles During Gait of Stroke Subjects». En: *Journal of Applied Biomechanics* 30.2 (2014), págs. 348-352. ISSN: 1543-2688. DOI: [10.1123/jab.2013-0147](https://doi.org/10.1123/jab.2013-0147).
- [8] Juan Carlos Arellano-González. «A Practical Review of the Biomechanical Parameters Commonly Used in the Assessment of Human Gait». Tesis doct. Revista Mexicana de Ingenieria Biomedica, 2021. DOI: [10.17488/rmib.42.3.1](https://doi.org/10.17488/rmib.42.3.1).
- [9] Janie L. Astephen, Kevin J. Deluzio, Graham E. Caldwell y Michael J. Dunbar. «Biomechanical changes at the hip, knee, and ankle joints during gait are associated with knee osteoarthritis severity». En: *Journal of Orthopaedic Research* 26.3 (2007), págs. 332-341. ISSN: 1554-527X. DOI: [10.1002/jor.20496](https://doi.org/10.1002/jor.20496).
- [10] Kathryn L. Bacon et al. «Relation of gait measures with mild unilateral knee pain during walking using machine learning». En: *Scientific Reports* 12.1 (2022). ISSN: 2045-2322. DOI: [10.1038/s41598-022-21142-2](https://doi.org/10.1038/s41598-022-21142-2).
- [11] Hilla Sarig Bahat, Mahmoud Igbariya, June Quek y Julia Treleaven. «Cervical Kinematics of Fast Neck Motion across Age». En: *Journal of Novel Physiotherapies* 6.5 (2016). ISSN: 2165-7025. DOI: [10.4172/2165-7025.1000306](https://doi.org/10.4172/2165-7025.1000306).
- [12] BT Bates, CR James y JS Dufek. «Single-subject analysis». En: *Innovative analyses of human movement* (2004), págs. 3-28.
- [13] José M. Baydal-Bertomeu, Álvaro F. Page, Juan M. Belda-Lois, David Garrido-Jaén y Jaime M. Prat. «Neck motion patterns in whiplash-associated disorders: Quantifying variability and spontaneity of movement». En: *Clinical Biomechanics* 26.1 (2011), págs. 29-34. ISSN: 0268-0033. DOI: [10.1016/j.clinbiomech.2010.08.008](https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2010.08.008).
- [14] Yoav Benjamini y Yosef Hochberg. «Controlling the False Discovery Rate: A Practical and Powerful Approach to Multiple Testing». English. En: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 57.1 (1995), págs. 289-300. ISSN: 00359246.
- [15] Jérémie Bigot. «Landmark-Based Registration of Curves via the Continuous Wavelet Transform». En: *Journal of Computational and Graphical Statistics* 15.3 (2006), págs. 542-564. ISSN: 1537-2715. DOI: [10.1198/106186006x133023](https://doi.org/10.1198/106186006x133023).

-
- [16] Scott C.E. Brandon, Ryan B. Graham, Sivan Almosnino, Erin M. Sadler, Joan M. Stevenson y Kevin J. Deluzio. «Interpreting principal components in biomechanics: Representative extremes and single component reconstruction». En: *Journal of Electromyography and Kinesiology* 23.6 (2013), págs. 1304-1310. ISSN: 1050-6411. DOI: [10.1016/j.jelekin.2013.09.010](https://doi.org/10.1016/j.jelekin.2013.09.010).
- [17] Garrett S Bullock, Charles A Thigpen, Gary S Collins, Nigel K Arden, Thomas K Noonan, Michael J Kissenberth y Ellen Shanley. «Machine Learning Does Not Improve Humeral Torsion Prediction Compared to Regression in Baseball Pitchers». En: *International Journal of Sports Physical Therapy* 17.3 (2022). ISSN: 2159-2896. DOI: [10.26603/001c.32380](https://doi.org/10.26603/001c.32380).
- [18] Linde Ceyskens, Romy Vanelderen, Christian Barton, Peter Malliaras y Bart Dingenen. «Biomechanical Risk Factors Associated with Running-Related Injuries: A Systematic Review». En: *Sports Medicine* 49.7 (2019), págs. 1095-1115. ISSN: 1179-2035. DOI: [10.1007/s40279-019-01110-z](https://doi.org/10.1007/s40279-019-01110-z).
- [19] Tom Chau, Scott Young y Sue Redekop. «Managing variability in the summary and comparison of gait data». En: *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation* 2.1 (2005). ISSN: 1743-0003. DOI: [10.1186/1743-0003-2-22](https://doi.org/10.1186/1743-0003-2-22).
- [20] Alarcos Cieza, Kate Causey, Kaloyan Kamenov, Sarah Wulf Hanson, Somnath Chatterji y Theo Vos. «Global estimates of the need for rehabilitation based on the Global Burden of Disease study 2019: a systematic analysis for the Global Burden of Disease Study 2019». En: *The Lancet* 396.10267 (2020), págs. 2006-2017. ISSN: 0140-6736. DOI: [10.1016/s0140-6736\(20\)32340-0](https://doi.org/10.1016/s0140-6736(20)32340-0).
- [21] N. Coffey, A.J. Harrison, O.A. Donoghue y K. Hayes. «Common functional principal components analysis: A new approach to analyzing human movement data». En: *Human Movement Science* 30.6 (2011), págs. 1144-1166. ISSN: 0167-9457. DOI: [10.1016/j.humov.2010.11.005](https://doi.org/10.1016/j.humov.2010.11.005).
- [22] Elizabeth Crane, David Childers, Geoffrey Gerstner y Edward Rothm. «Functional Data Analysis for Biomechanics». En: *Theoretical Biomechanics*. InTech, 2011. ISBN: 9789533078519. DOI: [10.5772/22382](https://doi.org/10.5772/22382).
- [23] Elizabeth A. Crane, Ruth B. Cassidy, Edward D. Rothman y Geoffrey E. Gerstner. «Effect of registration on cyclical kinematic data». En: *Journal of Biomechanics* 43.12 (2010), págs. 2444-2447. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2010.04.024](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2010.04.024).
- [24] Antonio Cuevas, Manuel Febrero y Ricardo Fraiman. «An anova test for functional data». En: *Computational Statistics & Data Analysis* 47.1 (2004), págs. 111-122. ISSN: 0167-9473. DOI: [10.1016/j.csda.2003.10.021](https://doi.org/10.1016/j.csda.2003.10.021).

- [25] Antonio Cuevas, Manuel Febrero y Ricardo Fraiman. «Robust estimation and classification for functional data via projection-based depth notions». En: *Computational Statistics* 22.3 (2007), págs. 481-496. ISSN: 1613-9658. DOI: [10.1007/s00180-007-0053-0](https://doi.org/10.1007/s00180-007-0053-0).
- [26] Julia Dannenmaier, Christina Kaltenbach, Theresa Kölle y Gert Krischak. «Application of functional data analysis to explore movements: walking, running and jumping - A systematic review». En: *Gait & Posture* 77 (2020), págs. 182-189. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/j.gaitpost.2020.02.002](https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2020.02.002).
- [27] Helios De Rosario, María José Vivas, María Isabel Sinovas y Álvaro Page. «Relationship between neck motion and self-reported pain in patients with whiplash associated disorders during the acute phase». En: *Musculoskeletal Science and Practice* 38 (2018), págs. 23-29. ISSN: 2468-7812. DOI: [10.1016/j.msksp.2018.09.004](https://doi.org/10.1016/j.msksp.2018.09.004).
- [28] K.J. Deluzio y J.L. Astephen. «Biomechanical features of gait waveform data associated with knee osteoarthritis». En: *Gait & Posture* 25.1 (2007), págs. 86-93. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/j.gaitpost.2006.01.007](https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2006.01.007).
- [29] Arnaud Delval et al. «Kinematic angular parameters in PD: Reliability of joint angle curves and comparison with healthy subjects». En: *Gait & Posture* 28.3 (2008), págs. 495-501. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/j.gaitpost.2008.03.003](https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2008.03.003).
- [30] Valter Devecchi, Ahmed Alalawi, Bernard Liew y Deborah Falla. «A network analysis reveals the interaction between fear and physical features in people with neck pain». En: *Scientific Reports* 12.1 (2022). DOI: [10.1038/s41598-022-14696-8](https://doi.org/10.1038/s41598-022-14696-8).
- [31] Clark R. Dickerson, Bernard J. Martin y Don B. Chaffin. «The relationship between shoulder torques and the perception of muscular effort in loaded reaches». En: *Ergonomics* 49.11 (2006), págs. 1036-1051. ISSN: 1366-5847. DOI: [10.1080/00140130600730960](https://doi.org/10.1080/00140130600730960).
- [32] W. R. Wan Din, A. S. Rambely y A. A. Jemain. «Load carriage analysis for Malaysian military using functional data analysis technique: Trial experiment». En: *2011 Fourth International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization*. IEEE, 2011, págs. 1-8. DOI: [10.1109/icmsao.2011.5775506](https://doi.org/10.1109/icmsao.2011.5775506).
- [33] Leandro Donisi, Giuseppe Cesarelli, Edda Capodaglio, Monica Panigazzi, Giovanni D'Addio, Mario Cesarelli y Francesco Amato. «A Logistic Regression Model for Biomechanical Risk Classification in Lifting Tasks». En: *Diagnostics* 12.11 (2022), pág. 2624. ISSN: 2075-4418. DOI: [10.3390/diagnostics12112624](https://doi.org/10.3390/diagnostics12112624).

-
- [34] A. Duhamel, J.L. Bourriez, P. Devos, P. Krystkowiak, A. Destée, P. Derambure y L. Defebvre. «Statistical tools for clinical gait analysis». En: *Gait & Posture* 20.2 (2004), págs. 204-212. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/j.gaitpost.2003.09.010](https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2003.09.010).
- [35] Kate Duquesne, Joris De Roeck, Jose-de-Jesus Salazar-Torres y Emmanuel Audenaert. «Alignment and parameterization of single cycle motion data». En: *IFAC-PapersOnLine* 54.15 (2021), págs. 436-441. ISSN: 2405-8963. DOI: [10.1016/j.ifacol.2021.10.295](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.10.295).
- [36] Juan V. Durá, Juan M. Belda, Rakel Poveda, Álvaro Page, José Llaparra, José Das, Jaime Prat y Ana C. García. «Comparison of Functional Regression and Nonfunctional Regression Approaches to the Study of the Walking Velocity Effect in Force Platform Measures». En: *Journal of Applied Biomechanics* 26.2 (2010), págs. 234-239. ISSN: 1543-2688. DOI: [10.1123/jab.26.2.234](https://doi.org/10.1123/jab.26.2.234).
- [37] Bradley Efron. «Prediction, Estimation, and Attribution». En: *Journal of the American Statistical Association* 115.530 (2020), págs. 636-655. ISSN: 1537-274X. DOI: [10.1080/01621459.2020.1762613](https://doi.org/10.1080/01621459.2020.1762613).
- [38] Jill Emmerzaal et al. «Joint kinematics alone can distinguish hip or knee osteoarthritis patients from asymptomatic controls with high accuracy». En: *Journal of Orthopaedic Research* 40.10 (2022), págs. 2229-2239. ISSN: 1554-527X. DOI: [10.1002/jor.25269](https://doi.org/10.1002/jor.25269).
- [39] Irene Epifanio, Carolina Ávila, Álvaro Page y Carlos Atienza. «Analysis of multiple waveforms by means of functional principal component analysis: normal versus pathological patterns in sit-to-stand movement». En: *Medical & Biological Engineering & Computing* 46.6 (2008), págs. 551-561. ISSN: 1741-0444. DOI: [10.1007/s11517-008-0339-6](https://doi.org/10.1007/s11517-008-0339-6).
- [40] Manuel Escabias, Ana M. Aguilera, Jose M. Heredia-Jiménez y Eva Orantes-González. «Functional data analysis in kinematics of children going to school». En: *Functional Statistics and Related Fields*. Springer International Publishing, 2017, págs. 95-103. ISBN: 9783319558462. DOI: [10.1007/978-3-319-55846-2_13](https://doi.org/10.1007/978-3-319-55846-2_13).
- [41] Julien Favre, Matthieu Hayoz, Jennifer C. Erhart-Hledik y Thomas P. Andriacchi. «A neural network model to predict knee adduction moment during walking based on ground reaction force and anthropometric measurements». En: *Journal of Biomechanics* 45.4 (2012), págs. 692-698. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2011.11.057](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2011.11.057).
- [42] Manuel Febrero-Bande y Manuel Oviedo de la Fuente. «Statistical Computing in Functional Data Analysis: The R Package fda.usc». En: *Journal of Statistical Software* 51.4 (2012), págs. 1-28.

- [43] P. Federolf, R. Reid, M. Gilgien, P. Haugen y G. Smith. «The application of principal component analysis to quantify technique in sports». En: *Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports* 24.3 (2012), págs. 491-499. ISSN: 1600-0838. DOI: [10.1111/j.1600-0838.2012.01455.x](https://doi.org/10.1111/j.1600-0838.2012.01455.x).
- [44] P.A. Federolf, K.A. Boyer y T.P. Andriacchi. «Application of principal component analysis in clinical gait research: Identification of systematic differences between healthy and medial knee-osteoarthritic gait». En: *Journal of Biomechanics* 46.13 (2013), págs. 2173-2178. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2013.06.032](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2013.06.032).
- [45] Stef Feijen, Thomas Struyf, Kevin Kuppens, Angela Tate y Filip Struyf. «Prediction of Shoulder Pain in Youth Competitive Swimmers: The Development and Internal Validation of a Prognostic Prediction Model». En: *The American Journal of Sports Medicine* 49.1 (2020), págs. 154-161. ISSN: 1552-3365. DOI: [10.1177/0363546520969913](https://doi.org/10.1177/0363546520969913).
- [46] Sue A. Ferguson, W. Gary Allread, Deborah L. Burr, Catherine Heaney y William S. Marras. «Biomechanical, psychosocial and individual risk factors predicting low back functional impairment among furniture distribution employees». En: *Clinical Biomechanics* 27.2 (2012), págs. 117-123. ISSN: 0268-0033. DOI: [10.1016/j.clinbiomech.2011.09.002](https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2011.09.002).
- [47] Nasim Foroughi, Richard Smith y Benedicte Vanwanseele. «The association of external knee adduction moment with biomechanical variables in osteoarthritis: A systematic review». En: *The Knee* 16.5 (2009), págs. 303-309. ISSN: 0968-0160. DOI: [10.1016/j.knee.2008.12.007](https://doi.org/10.1016/j.knee.2008.12.007).
- [48] Ricardo Fraiman y Graciela Muniz. «Trimmed means for functional data». En: *Test* 10.2 (2001), págs. 419-440. ISSN: 1863-8260. DOI: [10.1007/bf02595706](https://doi.org/10.1007/bf02595706).
- [49] Fotos Frangoudes, Maria Matsangidou, Eirini C. Schiza, Kleanthis Neokleous y Constantinos S. Pattichis. «Assessing Human Motion During Exercise Using Machine Learning: A Literature Review». En: *IEEE Access* 10 (2022), págs. 86874-86903. ISSN: 2169-3536. DOI: [10.1109/access.2022.3198935](https://doi.org/10.1109/access.2022.3198935).
- [50] Esther Franov, Matthias Straub, Christoph M. Bauer y Markus J. Ernst. «Head kinematics in patients with neck pain compared to asymptomatic controls: a systematic review». En: *BMC Musculoskeletal Disorders* 23.1 (2022). DOI: [10.1186/s12891-022-05097-z](https://doi.org/10.1186/s12891-022-05097-z).
- [51] Theo Gasser y Alois Kneip. «Searching for Structure in Curve Samples». En: *Journal of the American Statistical Association* 90.432 (1995), págs. 1179-1188. ISSN: 1537-274X. DOI: [10.1080/01621459.1995.10476624](https://doi.org/10.1080/01621459.1995.10476624).

-
- [52] A. Godwin, G. Takahara, M. Agnew y J. Stevenson. «Functional data analysis as a means of evaluating kinematic and kinetic waveforms». En: *Theoretical Issues in Ergonomics Science* 11.6 (2010), págs. 489-503. ISSN: 1464-536X. DOI: [10.1080/14639220903023368](https://doi.org/10.1080/14639220903023368).
- [53] Jeff Goldsmith y Tomoko Kitago. «Assessing Systematic Effects of Stroke on Motor Control by Using Hierarchical Function-On-Scalar Regression». En: *Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics* 65.2 (2015), págs. 215-236. ISSN: 1467-9876. DOI: [10.1111/rssc.12115](https://doi.org/10.1111/rssc.12115).
- [54] J.H. de Groot y R. Brand. «A three-dimensional regression model of the shoulder rhythm». En: *Clinical Biomechanics* 16.9 (2001), págs. 735-743. ISSN: 0268-0033. DOI: [10.1016/s0268-0033\(01\)00065-1](https://doi.org/10.1016/s0268-0033(01)00065-1).
- [55] Cheng Gu, Yurong Mao, Haiyan Dong, Yu Cui y Ming Fu. «Nomogram in Knee Instability: 3D Gait Analysis of Knee Osteoarthritis Patients». En: *Indian Journal of Orthopaedics* 56.9 (2022), págs. 1554-1564. ISSN: 1998-3727. DOI: [10.1007/s43465-022-00644-1](https://doi.org/10.1007/s43465-022-00644-1).
- [56] Edward Gunning, John Warmenhoven, Andrew J. Harrison y Norma Bargary. *Functional Data Analysis in Biomechanics: A Concise Review of Core Techniques, Applications and Emerging Areas*. Springer Nature Switzerland, 2024. ISBN: 9783031688621. DOI: [10.1007/978-3-031-68862-1](https://doi.org/10.1007/978-3-031-68862-1).
- [57] Edward Gunning et al. «Analysing kinematic data from recreational runners using functional data analysis». En: *Computational Statistics* (2025). ISSN: 1613-9658. DOI: [10.1007/s00180-024-01591-1](https://doi.org/10.1007/s00180-024-01591-1).
- [58] Eni Halilaj, Apoorva Rajagopal, Madalina Fiterau, Jennifer L. Hicks, Trevor J. Hastie y Scott L. Delp. «Machine learning in human movement biomechanics: Best practices, common pitfalls, and new opportunities». En: *Journal of Biomechanics* 81 (2018), págs. 1-11. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2018.09.009](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2018.09.009).
- [59] Andrew Harrison. «Applications of Functional Data Analysis in Sport Biomechanics». En: *Proceedings of the 32nd International Conference of Biomechanics in Sports*. Ed. por B. Mason. Johnson City, Tennessee, USA, 2014, págs. 30-33.
- [60] G. Hatfield, J. Astephon Wilson, M. Dunbar, W. Stanish y C. Hubley-Kozey. «Three-dimensional lower limb biomechanics during gait predict progression to total knee arthroplasty». En: *Osteoarthritis and Cartilage* 22 (2014), S45-S46. ISSN: 1063-4584. DOI: [10.1016/j.joca.2014.02.102](https://doi.org/10.1016/j.joca.2014.02.102).
- [61] Kim Hébert-Losier, Lina Schelin, Eva Tengman, Andrew Strong y Charlotte K. Häger. «Curve analyses reveal altered knee, hip, and trunk kinematics during drop-jumps long after anterior cruciate ligament rupture». En: *The Knee* 25.2 (2018), págs. 226-239. DOI: [10.1016/j.knee.2017.12.005](https://doi.org/10.1016/j.knee.2017.12.005).

- [62] Nathaniel E. Helwig, Sungjin Hong, Elizabeth T. Hsiao-Wecksler y John D. Polk. «Methods to temporally align gait cycle data». En: *Journal of Biomechanics* 44.3 (2011), págs. 561-566. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2010.09.015](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2010.09.015).
- [63] Luz Herrero-Manley, Ana Alabajos-Cea, Luis Suso-Martí, Enrique Viosca-Herrero e Isabel Vazquez-Arce. «Early Knee Osteoarthritis Classification and Clinical Evolution: A Longitudinal Observational Pilot Study». En: *Biomedicines* 11.6 (2023), pág. 1670. ISSN: 2227-9059. DOI: [10.3390/biomedicines11061670](https://doi.org/10.3390/biomedicines11061670).
- [64] Jennifer L. Hicks, Scott L. Delp y Michael H. Schwartz. «Can biomechanical variables predict improvement in crouch gait?» En: *Gait & Posture* 34.2 (2011), págs. 197-201. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/j.gaitpost.2011.04.009](https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2011.04.009).
- [65] Marianne Jensen Hjerstad et al. «Studies Comparing Numerical Rating Scales, Verbal Rating Scales, and Visual Analogue Scales for Assessment of Pain Intensity in Adults: A Systematic Literature Review». En: *Journal of Pain and Symptom Management* 41.6 (2011), págs. 1073-1093. ISSN: 0885-3924. DOI: [10.1016/j.jpainsymman.2010.08.016](https://doi.org/10.1016/j.jpainsymman.2010.08.016).
- [66] Brian Horsak, Djordje Slijepcevic, Anna-Maria Raberger, Catherine Schwab, Marianne Worisch y Matthias Zeppelzauer. «GaitRec, a large-scale ground reaction force dataset of healthy and impaired gait». En: *Scientific Data* 7.1 (2020). ISSN: 2052-4463. DOI: [10.1038/s41597-020-0481-z](https://doi.org/10.1038/s41597-020-0481-z).
- [67] W. Zachary Horton, Garritt L. Page, C. Shane Reese, Lindsey K. Lepley y McKenzie White. «Template Priors in Bayesian Curve Registration». En: *Technometrics* 63.4 (2020), págs. 487-499. ISSN: 1537-2723. DOI: [10.1080/00401706.2020.1841033](https://doi.org/10.1080/00401706.2020.1841033).
- [68] Emily R. Howell. «The association between neck pain, the Neck Disability Index and cervical ranges of motion: a narrative review.» En: *The Journal of the Canadian Chiropractic Association* 55 (3 2011), págs. 211-221. ISSN: 1715-6181. ppublish.
- [69] Ui-jae Hwang, Oh-yun Kwon, Jun-hee Kim y Sejung Yang. «Machine learning models for classifying non-specific neck pain using craniocervical posture and movement». En: *Musculoskeletal Science and Practice* 71 (2024), pág. 102945. ISSN: 2468-7812. DOI: [10.1016/j.msksp.2024.102945](https://doi.org/10.1016/j.msksp.2024.102945).
- [70] Marco Iosa, Pietro Picerno, Stefano Paolucci y Giovanni Morone. «Wearable inertial sensors for human movement analysis». En: *Expert Review of Medical Devices* 13.7 (2016), págs. 641-659. ISSN: 1745-2422. DOI: [10.1080/17434440.2016.1198694](https://doi.org/10.1080/17434440.2016.1198694).

-
- [71] Setareh Kazemi Kheiri, Zahra Vahedi, Hongyue Sun, Fadel M. Megahed y Lora A. Cavuoto. «Functional ANOVA for Upper Extremity Fatigue Analysis during Dynamic Order Picking». En: *IIE Transactions on Occupational Ergonomics and Human Factors* 11.3-4 (2023), págs. 123-135. ISSN: 2472-5846. DOI: [10.1080/24725838.2024.2331182](https://doi.org/10.1080/24725838.2024.2331182).
- [72] Hyun Kyung Kim, Xiongtao Dai, Shiuan-Huei Lu, Tung-Wu Lu y Li-Shan Chou. «Discriminating features of ground reaction forces in overweight old and young adults during walking using functional principal component analysis». En: *Gait & Posture* 94 (2022), págs. 166-172. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/j.gaitpost.2022.03.012](https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2022.03.012).
- [73] Kristof Kipp, Josh Redden, Michelle Sabick y Chad Harris. «Kinematic and Kinetic Synergies of the Lower Extremities During the Pull in Olympic Weightlifting». En: *Journal of Applied Biomechanics* 28.3 (2012), págs. 271-278. ISSN: 1543-2688. DOI: [10.1123/jab.28.3.271](https://doi.org/10.1123/jab.28.3.271).
- [74] Julia Kirschberg, Szymon Goralski, Frank Layher, Klaus Sander y Georg Matziolis. «Normalized gait analysis parameters are closely related to patient-reported outcome measures after total knee arthroplasty». En: *Archives of Orthopaedic and Trauma Surgery* 138.5 (2018), págs. 711-717. ISSN: 1434-3916. DOI: [10.1007/s00402-018-2891-3](https://doi.org/10.1007/s00402-018-2891-3).
- [75] Chris Kirtley. *Clinical gait analysis*. Includes bibliographical references and index. - Description based on print version record. Edinburgh: Elsevier, 2006. 316 págs. ISBN: 9780702036712.
- [76] Alois Kneip y Theo Gasser. «Statistical Tools to Analyze Data Representing a Sample of Curves». En: *The Annals of Statistics* 20.3 (1992), págs. 1266-1305. ISSN: 00905364, 21688966.
- [77] Dylan Kobsar, Zaryan Masood, Heba Khan, Noha Khalil, Marium Yossri Kiwan, Sarah Ridd y Matthew Tobis. «Wearable Inertial Sensors for Gait Analysis in Adults with Osteoarthritis—A Scoping Review». En: *Sensors* 20.24 (2020), pág. 7143. ISSN: 1424-8220. DOI: [10.3390/s20247143](https://doi.org/10.3390/s20247143).
- [78] Jan Kohout et al. «Advanced Statistical Analysis of 3D Kinect Data: Mimetic Muscle Rehabilitation Following Head and Neck Surgeries Causing Facial Paresis». En: *Sensors* 21.1 (2020), pág. 103. ISSN: 1424-8220. DOI: [10.3390/s21010103](https://doi.org/10.3390/s21010103).
- [79] C. Kokkoti, S. Moustakidis, E. Papageorgiou, G. Giakas y D.E. Tsaopoulos. «Machine learning in knee osteoarthritis: A review». En: *Osteoarthritis and Cartilage Open* 2.3 (2020), pág. 100069. ISSN: 2665-9131. DOI: [10.1016/j.ocarto.2020.100069](https://doi.org/10.1016/j.ocarto.2020.100069).

- [80] Piotr Kokoszka y Matthew Reimherr. *Introduction to Functional Data Analysis*. Chapman y Hall/CRC, 2017. ISBN: 9781315117416. DOI: [10.1201/9781315117416](https://doi.org/10.1201/9781315117416).
- [81] Chantal H. P. de Koning, Sylvia P. van den Heuvel, J. Bart Staal, Bouwien C. M. Smits-Engelsman y Erik J. M. Hendriks. «Clinimetric evaluation of active range of motion measures in patients with non-specific neck pain: a systematic review». En: *European Spine Journal* 17.7 (2008), págs. 905-921. ISSN: 1432-0932. DOI: [10.1007/s00586-008-0656-3](https://doi.org/10.1007/s00586-008-0656-3).
- [82] Margarita Kotti, Lynsey D. Duffell, Aldo A. Faisal y Alison H. McGregor. «Detecting knee osteoarthritis and its discriminating parameters using random forests». En: *Medical Engineering & Physics* 43 (2017), págs. 19-29. ISSN: 1350-4533. DOI: [10.1016/j.medengphy.2017.02.004](https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2017.02.004).
- [83] Navleen Kour, Sunanda Gupta y Sakshi Arora. «A Survey of Knee Osteoarthritis Assessment Based on Gait». En: *Archives of Computational Methods in Engineering* 28.2 (2020), págs. 345-385. ISSN: 1886-1784. DOI: [10.1007/s11831-019-09379-z](https://doi.org/10.1007/s11831-019-09379-z).
- [84] Robert A Laird, Jayce Gilbert, Peter Kent y Jennifer L Keating. «Comparing lumbo-pelvic kinematics in people with and without back pain: a systematic review and meta-analysis». En: *BMC Musculoskeletal Disorders* 15.1 (2014). ISSN: 1471-2474. DOI: [10.1186/1471-2474-15-229](https://doi.org/10.1186/1471-2474-15-229).
- [85] Peter F. Lamb y Michael Stöckl. «On the use of continuous relative phase: Review of current approaches and outline for a new standard». En: *Clinical Biomechanics* 29.5 (2014), págs. 484-493. ISSN: 0268-0033. DOI: [10.1016/j.clinbiomech.2014.03.008](https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2014.03.008).
- [86] Jihui Lee, Gen Li, William F. Christensen, Gavin Collins, Matthew Seeley, Anton E. Bowden, David T. Fullwood y Jeff Goldsmith. «Functional Data Analyses of Gait Data Measured Using In-Shoe Sensors». En: *Statistics in Biosciences* 11.2 (2018), págs. 288-313. ISSN: 1867-1772. DOI: [10.1007/s12561-018-9226-3](https://doi.org/10.1007/s12561-018-9226-3).
- [87] Tae Hyun Lee, Tomitsu Tsuchida, Hiroshi Kitahara e Hideshige Moriya. «Gait analysis before and after unilateral total knee arthroplasty. Study using a linear regression model of normal controls — women without arthropathy». En: *Journal of Orthopaedic Science* 4.1 (1999), págs. 13-21. ISSN: 0949-2658. DOI: [10.1007/s007760050068](https://doi.org/10.1007/s007760050068).
- [88] Jennifer L. Lelas, Gregory J. Merriman, Patrick O. Riley y D. Casey Kerrigan. «Predicting peak kinematic and kinetic parameters from gait speed». En: *Gait & Posture* 17.2 (2003), págs. 106-112. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/s0966-6362\(02\)00060-7](https://doi.org/10.1016/s0966-6362(02)00060-7).

-
- [89] Joshua M. Leonardis, Daniel A. Lyons, Kelley M. Kidwell, Aviram M. Giladi, David B. Lipps y Adeyiza O. Momoh. «The Influence of Functional Shoulder Biomechanics as a Mediator of Patient-Reported Outcomes following Mastectomy and Breast Reconstruction». En: *Plastic & Reconstructive Surgery* 147.1 (2020), págs. 181-192. ISSN: 0032-1052. DOI: [10.1097/prs.00000000000007486](https://doi.org/10.1097/prs.00000000000007486).
- [90] M.C. Liebensteiner, A. Herten, M. Gstöttner, M. Thaler, M. Krismer y C.M. Bach. «Correlation between objective gait parameters and subjective score measurements before and after total knee arthroplasty». En: *The Knee* 15.6 (2008), págs. 461-466. ISSN: 0968-0160. DOI: [10.1016/j.knee.2008.07.001](https://doi.org/10.1016/j.knee.2008.07.001).
- [91] Bernard X. W. Liew, Francisco M. Kovacs, David Rügamer y Ana Royuela. «Machine learning versus logistic regression for prognostic modelling in individuals with non-specific neck pain». En: *European Spine Journal* 31.8 (2022), págs. 2082-2091. ISSN: 1432-0932. DOI: [10.1007/s00586-022-07188-w](https://doi.org/10.1007/s00586-022-07188-w).
- [92] Bernard X. W. Liew, David Rugamer, Alessandro Marco De Nunzio y Deborah Falla. «Interpretable machine learning models for classifying low back pain status using functional physiological variables». En: *European Spine Journal* 29.8 (2020), págs. 1845-1859. ISSN: 1432-0932. DOI: [10.1007/s00586-020-06356-0](https://doi.org/10.1007/s00586-020-06356-0).
- [93] Bernard X.W. Liew, David Rugamer, Almond Stocker y Alessandro Marco De Nunzio. «Classifying neck pain status using scalar and functional biomechanical variables – development of a method using functional data boosting». En: *Gait & Posture* 76 (2020), págs. 146-150. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/j.gaitpost.2019.12.008](https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2019.12.008).
- [94] Carlos Llopis-Albert, William Ricardo Venegas Toro, Nidal Farhat, Pau Zamora-Ortiz y Álvaro Felipe Page Del Pozo. «A New Method for Time Normalization Based on the Continuous Phase: Application to Neck Kinematics». En: *Mathematics* 9.23 (2021), pág. 3138. ISSN: 2227-7390. DOI: [10.3390/math9233138](https://doi.org/10.3390/math9233138).
- [95] Juan Manuel Belda Lois, María José Vivas Broseta, Silvia Mena del Horno, María-Luz Sánchez-Sánchez, Miguel Matas y Enrique Viosca. «Functional Data Analysis for Gait Analysis after Stroke». En: *Converging Clinical and Engineering Research on Neurorehabilitation*. Springer Berlin Heidelberg, 2013, págs. 775-779. ISBN: 9783642345463. DOI: [10.1007/978-3-642-34546-3_126](https://doi.org/10.1007/978-3-642-34546-3_126).

- [96] Umile Giuseppe Longo et al. «Application of Machine Learning Algorithms for Prognostic Assessment in Rotator Cuff Pathologies: A Clinical Data-Based Approach». En: *Diagnostics* 13.18 (2023), pág. 2915. ISSN: 2075-4418. DOI: [10.3390/diagnostics13182915](https://doi.org/10.3390/diagnostics13182915).
- [97] Irvin Hussein Lopez-Nava y Angelica Munoz-Melendez. «Wearable Inertial Sensors for Human Motion Analysis: A Review». En: *IEEE Sensors Journal* 16.22 (2016), págs. 7821-7834. ISSN: 2379-9153. DOI: [10.1109/jsen.2016.2609392](https://doi.org/10.1109/jsen.2016.2609392).
- [98] Sara López-Pintado y Juan Romo. «On the Concept of Depth for Functional Data». En: *Journal of the American Statistical Association* 104.486 (2009), págs. 718-734. ISSN: 1537-274X. DOI: [10.1198/jasa.2009.0108](https://doi.org/10.1198/jasa.2009.0108).
- [99] Paula M. Ludewig y Jonathan F. Reynolds. «The Association of Scapular Kinematics and Glenohumeral Joint Pathologies». En: *Journal of Orthopaedic & Sports Physical Therapy* 39.2 (2009), págs. 90-104. ISSN: 1938-1344. DOI: [10.2519/jospt.2009.2808](https://doi.org/10.2519/jospt.2009.2808).
- [100] Y. Luo. «A biomechanical sorting of clinical risk factors affecting osteoporotic hip fracture». En: *Osteoporosis International* 27.2 (2015), págs. 423-439. ISSN: 1433-2965. DOI: [10.1007/s00198-015-3316-6](https://doi.org/10.1007/s00198-015-3316-6).
- [101] Linda C. Magaña et al. «Subjective and Objective Measures in Assessing Neck Disability and Pain in Head and Neck Cancer». En: *The Laryngoscope* 131.9 (2021), págs. 2015-2022. DOI: [10.1002/lary.29488](https://doi.org/10.1002/lary.29488).
- [102] Armaghan Mahmoudian, L. Stefan Lohmander, Hassan Jafari y Frank P. Luyten. «Towards classification criteria for early-stage knee osteoarthritis: A population-based study to enrich for progressors». En: *Seminars in Arthritis and Rheumatism* 51.1 (2021), págs. 285-291. ISSN: 0049-0172. DOI: [10.1016/j.semarthrit.2020.11.002](https://doi.org/10.1016/j.semarthrit.2020.11.002).
- [103] J. S. Marron, James O. Ramsay, Laura M. Sangalli y Anuj Srivastava. «Functional Data Analysis of Amplitude and Phase Variation». En: *Statistical Science* 30.4 (2015). ISSN: 0883-4237. DOI: [10.1214/15-sts524](https://doi.org/10.1214/15-sts524).
- [104] Marcos Matabuena, Sherveen Riazati, Nick Caplan y Phil Hayes. *Are Multilevel functional models the next step in sports biomechanics and wearable technology? A case study of Knee Biomechanics patterns in typical training sessions of recreational runners*. 2021. DOI: [10.48550/ARXIV.2103.15704](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2103.15704).
- [105] Marcos Matabuena, Juan C. Vidal, Philip R. Hayes, Miguel Saavedra-Garcia y Fernando Huelin Trillo. «Application of Functional Data Analysis for the Prediction of Maximum Heart Rate». En: *IEEE Access* 7 (2019), págs. 121841-121852. ISSN: 2169-3536. DOI: [10.1109/access.2019.2938466](https://doi.org/10.1109/access.2019.2938466).

-
- [106] Enrique José Medina Ripoll. «Estudio del estado de fatiga en corredores de fondo a partir de patrones biomecánicos. Monitorización mediante sistemas integrados en el calzado». Tesis doct. Universitat Politècnica de Valencia, 2018. DOI: [10.4995/thesis/10251/113078](https://doi.org/10.4995/thesis/10251/113078).
- [107] Enrique Medina-Ripoll, Nicolás Palomares, Álvaro Page y Bruno Bazuelo Ruiz. «Analysis of Kinematic Patterns in Runners. An Approach Based on Inertial Sensors and Functional Data Analysis». En: *Proceedings of the International Conference on Biomechanics in Sports*. Valencia, España, 2015.
- [108] C.G.M. Meskers, F.C.T. van der Helm, L.A. Rozendaal y P.M. Rozing. «In vivo estimation of the glenohumeral joint rotation center from scapular bony landmarks by linear regression». En: *Journal of Biomechanics* 31.1 (1997), págs. 93-96. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/s0021-9290\(97\)00101-2](https://doi.org/10.1016/s0021-9290(97)00101-2).
- [109] N. Mezghani, S. Husse, K. Boivin, K. Turcot, R. Aissaoui, N. Hagemeister y J.A. de Guise. «Automatic Classification of Asymptomatic and Osteoarthritis Knee Gait Patterns Using Kinematic Data Features and the Nearest Neighbor Classifier». En: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 55.3 (2008), págs. 1230-1232. ISSN: 1558-2531. DOI: [10.1109/tbme.2007.905388](https://doi.org/10.1109/tbme.2007.905388).
- [110] Neila Mezghani, Karine Boivin, Katia Turcot, Rachid Aissaoui, Nicola Hagmeister y Jacques A. De Guise. «Hierarchical analysis and classification of asymptomatic and knee osteoarthritis gait patterns using a wavelet representation of kinetic data and the nearest neighbor classifier». En: *Journal of Mechanics in Medicine and Biology* 08.01 (2008), págs. 45-54. ISSN: 1793-6810. DOI: [10.1142/s0219519408002474](https://doi.org/10.1142/s0219519408002474).
- [111] Kathryn Mills, Michael A. Hunt y Reed Ferber. «Biomechanical Deviations During Level Walking Associated With Knee Osteoarthritis: A Systematic Review and Meta-Analysis». En: *Arthritis Care & Research* 65.10 (2013), págs. 1643-1665. ISSN: 2151-4658. DOI: [10.1002/acr.22015](https://doi.org/10.1002/acr.22015).
- [112] Dhanya Menoth Mohan, Ahsan Habib Khandoker, Sabahat Asim Wasti, Sarah Ismail Ibrahim Ismail Alali, Herbert F. Jelinek y Kinda Khalaf. «Assessment Methods of Post-stroke Gait: A Scoping Review of Technology-Driven Approaches to Gait Characterization and Analysis». En: *Frontiers in Neurology* 12 (2021). ISSN: 1664-2295. DOI: [10.3389/fneur.2021.650024](https://doi.org/10.3389/fneur.2021.650024).
- [113] Sarah Moudy, Chris Richter y Siobhán Strike. «Landmark registering waveform data improves the ability to predict performance measures». En: *Journal of Biomechanics* 78 (2018), págs. 109-117. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2018.07.027](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2018.07.027).

- [114] Seyed Nourollah Mousavi y Helle Sørensen. «Functional logistic regression: a comparison of three methods». En: *Journal of Statistical Computation and Simulation* 88.2 (2017), págs. 250-268. ISSN: 1563-5163. DOI: [10.1080/00949655.2017.1386664](https://doi.org/10.1080/00949655.2017.1386664).
- [115] S.P. Moustakidis, J.B. Theocharis y G. Giakas. «A fuzzy decision tree-based SVM classifier for assessing osteoarthritis severity using ground reaction force measurements». En: *Medical Engineering & Physics* 32.10 (2010), págs. 1145-1160. ISSN: 1350-4533. DOI: [10.1016/j.medengphy.2010.08.006](https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2010.08.006).
- [116] J.E. Munoz, J. F. Villada, S. Casanova, M. F. Montoya y O. A. Henao. «Dynamic Systems Theory in Human Movement Exploring Coordination Patterns by Angle-Angle Diagrams Using Kinect». En: *2018 10th International Conference on Virtual Worlds and Games for Serious Applications (VS-Games)*. IEEE, 2018, págs. 1-4. DOI: [10.1109/vs-games.2018.8493416](https://doi.org/10.1109/vs-games.2018.8493416).
- [117] Sandra J Olney, Malcolm P Griffin y Ian D McBride. «Temporal, Kinematic, and Kinetic Variables Related to Gait Speed in Subjects With Hemiplegia: A Regression Approach». En: *Physical Therapy* 74.9 (1994), págs. 872-885. ISSN: 1538-6724. DOI: [10.1093/ptj/74.9.872](https://doi.org/10.1093/ptj/74.9.872).
- [118] Niels Lundtorp Olsen, Alessia Pini y Simone Vantini. *False Discovery Rate for Functional Data*. 2019. DOI: [10.48550/ARXIV.1908.05272](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1908.05272).
- [119] Nicolas Orozco, Santiago Ortiz y Gustavo A. Ospina-Tascón. «Functional Data Analysis Applications in Medicine: A Systematic Review». En: *WIREs Computational Statistics* 17.2 (2025). ISSN: 1939-0068. DOI: [10.1002/wics.70026](https://doi.org/10.1002/wics.70026).
- [120] Juan Alfonso Andrade Ortega, Alberto Damián Delgado Martínez y Remedios Almécija Ruiz. «Validation of the Spanish Version of the Neck Disability Index». En: *Spine* 35.4 (2010), E114-E118. DOI: [10.1097/brs.0b013e3181afea5d](https://doi.org/10.1097/brs.0b013e3181afea5d).
- [121] Helena Ortiz, Christian Acal, Manuel Escabias y Ana M. Aguilera. «Characterizing the functional ANOVA model for repeated measures via PCA application to biomechanical data». En: *AIMS Mathematics* 10.4 (2025), págs. 8468-8494. ISSN: 2473-6988. DOI: [10.3934/math.2025390](https://doi.org/10.3934/math.2025390).
- [122] A. Page, G. Ayala, M.T. León, M.F. Peydro y J.M. Prat. «Normalizing temporal patterns to analyze sit-to-stand movements by using registration of functional data». En: *Journal of Biomechanics* 39.13 (2006), págs. 2526-2534. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2005.07.032](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2005.07.032).
- [123] Alvaro Page e Irene Epifanio. «A simple model to analyze the effectiveness of linear time normalization to reduce variability in human movement analysis». En: *Gait & Posture* 25.1 (2007), págs. 153-156. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/j.gaitpost.2006.01.006](https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2006.01.006).

- [124] Alvaro Page, Noelia López, William Ricardo Venegas y Pilar Serra. «Comparación de la normalización lineal de la escala de tiempos con el registro funcional continuo en movimientos cíclicos del cuello». En: *Libro de Actas - 11 Simposio CEA de Bioingeniería*. CEABioIng. Editorial Universitat Politècnica de València, 2019. DOI: [10.4995/ceabioing.2019.10027](https://doi.org/10.4995/ceabioing.2019.10027).
- [125] Álvaro Page, Helios de Rosario, Vicente Mata y Carlos Atienza. «Experimental Analysis of Rigid Body Motion. A Vector Method to Determine Finite and Infinitesimal Displacements From Point Coordinates». En: *Journal of Mechanical Design* 131.3 (2009). DOI: [10.1115/1.3066468](https://doi.org/10.1115/1.3066468).
- [126] Fumin Pan, Rizwan Arshad, Thomas Zander, Sandra Reitmaier, Arno Schroll y Hendrik Schmidt. «The effect of age and sex on the cervical range of motion – A systematic review and meta-analysis». En: *Journal of Biomechanics* 75 (2018), págs. 13-27. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2018.04.047](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2018.04.047).
- [127] Enrica Papi, Anthony M.J. Bull y Alison H. McGregor. «Is there evidence to use kinematic/kinetic measures clinically in low back pain patients? A systematic review». En: *Clinical Biomechanics* 55 (2018), págs. 53-64. ISSN: 0268-0033. DOI: [10.1016/j.clinbiomech.2018.04.006](https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2018.04.006).
- [128] Jihong Park, Matthew K. Seeley, Devin Francom, C. Shane Reese y J. Ty Hopkins. «Functional vs. Traditional Analysis in Biomechanical Gait Data: An Alternative Statistical Approach». En: *Journal of Human Kinetics* 60.1 (2017), págs. 39-49. ISSN: 1899-7562. DOI: [10.1515/hukin-2017-0114](https://doi.org/10.1515/hukin-2017-0114).
- [129] Todd C. Pataky, Mark A. Robinson, Jos Vanrenterghem y Cyril J.W. Donnelly. «Simultaneously assessing amplitude and temporal effects in biomechanical trajectories using nonlinear registration and statistical nonparametric mapping». En: *Journal of Biomechanics* 136 (2022), pág. 111049. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2022.111049](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2022.111049).
- [130] Todd C. Pataky, Jos Vanrenterghem y Mark A. Robinson. «The probability of false positives in zero-dimensional analyses of one-dimensional kinematic, force and EMG trajectories». En: *Journal of Biomechanics* 49.9 (2016), págs. 1468-1476. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2016.03.032](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2016.03.032).
- [131] Pietro Picerno, Marco Iosa, Clive D'Souza, Maria Grazia Benedetti, Stefano Paolucci y Giovanni Morone. «Wearable inertial sensors for human movement analysis: a five-year update». En: *Expert Review of Medical Devices* 18.sup1 (2021), págs. 79-94. ISSN: 1745-2422. DOI: [10.1080/17434440.2021.1988849](https://doi.org/10.1080/17434440.2021.1988849).

- [132] Brian Pietrosimone, Matthew K. Seeley, Christopher Johnston, Steven J. Pfeiffer, Jeffery T. Spang y J. Troy Blackburn. «Walking Ground Reaction Force Post-ACL Reconstruction: Analysis of Time and Symptoms». En: *Medicine & Science in Sports & Exercise* 51.2 (2019), págs. 246-254. ISSN: 0195-9131. DOI: [10.1249/mss.0000000000001776](https://doi.org/10.1249/mss.0000000000001776).
- [133] Carina F. Pinheiro, Anamaria S. Oliveira, Tenyson Will-Lemos, Lidiane L. Florencio, César Fernández-de-las-Peñas, Fabiola Dach y Débora Bevilaqua-Grossi. «Neck Active Movements Assessment in Women with Episodic and Chronic Migraine». En: *Journal of Clinical Medicine* 10.17 (2021), pág. 3805. DOI: [10.3390/jcm10173805](https://doi.org/10.3390/jcm10173805).
- [134] Sara R. Piva, Richard E. Erhard, John D. Childs y David A. Browder. «Inter-tester reliability of passive intervertebral and active movements of the cervical spine». En: *Manual Therapy* 11.4 (2006), págs. 321-330. DOI: [10.1016/j.math.2005.09.001](https://doi.org/10.1016/j.math.2005.09.001).
- [135] Micaela Porta, Massimiliano Pau, Bruno Leban, Michela Deidda, Marco Sorrentino, Federico Arippa y Giuseppe Marongiu. «Lower Limb Kinematics in Individuals with Hip Osteoarthritis during Gait: A Focus on Adaptative Strategies and Interlimb Symmetry». En: *Bioengineering* 8.4 (2021), pág. 47. ISSN: 2306-5354. DOI: [10.3390/bioengineering8040047](https://doi.org/10.3390/bioengineering8040047).
- [136] Ashish John Prabhakar, Srikanth Prabhu, Aayush Agrawal, Siddhisa Banerjee, Abraham M. Joshua, Yogeesh Dattakumar Kamat, Gopal Nath y Saptarshi Sengupta. «Use of Machine Learning for Early Detection of Knee Osteoarthritis and Quantifying Effectiveness of Treatment Using Force Platform». En: *Journal of Sensor and Actuator Networks* 11.3 (2022), pág. 48. ISSN: 2224-2708. DOI: [10.3390/jsan11030048](https://doi.org/10.3390/jsan11030048).
- [137] Chandra Prakash, Rajesh Kumar y Namita Mittal. «Recent developments in human gait research: parameters, approaches, applications, machine learning techniques, datasets and challenges». En: *Artificial Intelligence Review* 49.1 (2016), págs. 1-40. ISSN: 1573-7462. DOI: [10.1007/s10462-016-9514-6](https://doi.org/10.1007/s10462-016-9514-6).
- [138] A. L. Rahlf, T. Hoenig, J. Stürznickel, K. Cremans, D. Fohrmann, A. Sanchez-Alvarado, T. Rolvien y K. Hollander. «A machine learning approach to identify risk factors for running-related injuries: study protocol for a prospective longitudinal cohort trial». En: *BMC Sports Science, Medicine and Rehabilitation* 14.1 (2022). ISSN: 2052-1847. DOI: [10.1186/s13102-022-00426-0](https://doi.org/10.1186/s13102-022-00426-0).
- [139] J. Ramsay y B. W. Silverman. *Functional Data Analysis (Springer Series in Statistics)*. Springer, 2005, pág. 430. ISBN: 9780387400808.

-
- [140] J. O. Ramsay y Xiaochun Li. «Curve Registration». En: *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology* 60.2 (1998), págs. 351-363. ISSN: 1467-9868. DOI: [10.1111/1467-9868.00129](https://doi.org/10.1111/1467-9868.00129).
- [141] James Ramsay. *fda: Functional Data Analysis*. R package version 6.1.4. 2023.
- [142] Yutong Ren. «Functional Analysis of Childhood BMI based on Simplicial Band Depth». En: *E3S Web of Conferences* 218 (2020). Ed. por S.O. Oladokun y S. Lu, pág. 03038. ISSN: 2267-1242. DOI: [10.1051/e3sconf/202021803038](https://doi.org/10.1051/e3sconf/202021803038).
- [143] R.E. Richards, M.S. Andersen, J. Harlaar y J.C. van den Noort. «Relationship between knee joint contact forces and external knee joint moments in patients with medial knee osteoarthritis: effects of gait modifications». En: *Osteoarthritis and Cartilage* 26.9 (2018), págs. 1203-1214. ISSN: 1063-4584. DOI: [10.1016/j.joca.2018.04.011](https://doi.org/10.1016/j.joca.2018.04.011).
- [144] Chris Richter, Noel E. O Connor, Brendan Marshall y Kieran Moran. «Comparison of discrete-point vs. dimensionality-reduction techniques for describing performance-related aspects of maximal vertical jumping». En: *Journal of Biomechanics* 47.12 (2014), págs. 3012-3017. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2014.07.001](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2014.07.001).
- [145] Inge Ris, Marco Barbero, Deborah Falla, Mads H. Larsen, Martin N. Kraft, Karen Sogaard y Birgit Juul-Kristensen. «Pain extent is more strongly associated with disability, psychological factors, and neck muscle function in people with non-traumatic versus traumatic chronic neck pain: a cross sectional study». En: *European Journal of Physical and Rehabilitation Medicine* 55.1 (2019). DOI: [10.23736/s1973-9087.18.04977-8](https://doi.org/10.23736/s1973-9087.18.04977-8).
- [146] Matthew E Ritchie, Belinda Phipson, Di Wu, Yifang Hu, Charity W Law, Wei Shi y Gordon K Smyth. «limma powers differential expression analyses for RNA-sequencing and microarray studies». En: *Nucleic Acids Research* 43.7 (2015), e47. DOI: [10.1093/nar/gkv007](https://doi.org/10.1093/nar/gkv007).
- [147] Koren E. Roach, Valentina Padoia, Jinhee J. Lee, Tijana Popovic, Thomas M. Link, Sharmila Majumdar y Richard B. Souza. «Multivariate functional principal component analysis identifies waveform features of gait biomechanics related to early-to-moderate hip osteoarthritis». En: *Journal of Orthopaedic Research* 39.8 (2020), págs. 1722-1731. ISSN: 1554-527X. DOI: [10.1002/jor.24901](https://doi.org/10.1002/jor.24901).
- [148] Jo Røislien, Øivind Skare, Marit Gustavsen, Nana L. Broch, Linda Rennie y Arve Opheim. «Simultaneous estimation of effects of gender, age and walking speed on kinematic gait data». En: *Gait & Posture* 30.4 (2009), págs. 441-445. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/j.gaitpost.2009.07.002](https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2009.07.002).

- [149] Denise Martineli Rossi, Mary Hellen Morcelli, Adalgiso Coscrato Cardozo, Benedito Sérgio Denadai, Mauro Gonçalves y Marcelo Tavella Navega. «Discriminant analysis of neuromuscular variables in chronic low back pain». En: *Journal of Back and Musculoskeletal Rehabilitation* 28.2 (2015), págs. 239-246. ISSN: 1053-8127. DOI: [10.3233/bmr-140509](https://doi.org/10.3233/bmr-140509).
- [150] H. Sadeghi, P.A. Mathieu, S. Sadeghi y H. Labelle. «Continuous curve registration as an intertrial gait variability reduction technique». En: *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering* 11.1 (2003), págs. 24-30. ISSN: 1558-0210. DOI: [10.1109/tnsre.2003.810428](https://doi.org/10.1109/tnsre.2003.810428).
- [151] Heydar Sadeghi, Paul Allard, Khalil Shafie, Pierre A. Mathieu, Somayeh Sadeghi, Francois Prince y James Ramsay. «Reduction of gait data variability using curve registration». En: *Gait & Posture* 12.3 (2000), págs. 257-264. ISSN: 0966-6362. DOI: [10.1016/s0966-6362\(00\)00085-0](https://doi.org/10.1016/s0966-6362(00)00085-0).
- [152] Reza Salehi, Omid Rasouli, Maryam Saadat, Mohammad Mehravar, Hossein Negahban y Mohammad Jafar Shaterzadeh Yazdi. «Cervical movement kinematic analysis in patients with chronic neck pain: A comparative study with healthy subjects». En: *Musculoskeletal Science and Practice* 53 (2021), pág. 102377. DOI: [10.1016/j.msksp.2021.102377](https://doi.org/10.1016/j.msksp.2021.102377).
- [153] Daniel Sánchez-Zuriaga, Juan López-Pascual, David Garrido-Jaén, Maria Francisca Peydro de Moya y Jaime Prat-Pastor. «Reliability and Validity of a New Objective Tool for Low Back Pain Functional Assessment». En: *Spine* 36.16 (2011), págs. 1279-1288. ISSN: 0362-2436. DOI: [10.1097/brs.0b013e3181f471d8](https://doi.org/10.1097/brs.0b013e3181f471d8).
- [154] Gideon Schwarz. «Estimating the Dimension of a Model». En: *The Annals of Statistics* 6.2 (1978). ISSN: 0090-5364. DOI: [10.1214/aos/1176344136](https://doi.org/10.1214/aos/1176344136).
- [155] Rachel Senden, Bernd Grimm, Kenneth Meijer, Hans Savelberg e Ide C. Heyligers. «The importance to including objective functional outcomes in the clinical follow up of total knee arthroplasty patients». En: *The Knee* 18.5 (2011), págs. 306-311. ISSN: 0968-0160. DOI: [10.1016/j.knee.2010.07.008](https://doi.org/10.1016/j.knee.2010.07.008).
- [156] Pilar Serra-Añó, William Venegas, Alvaro Page, Marta Inglés de la Torre, Marta Aguilar-Rodríguez y Gemma Espí-López. «Immediate Effects of a Single Session of Cervical Spine Manipulation on Cervical Movement Patterns in People With Nonspecific Neck Pain: A Randomized Controlled Trial». En: *Journal of Manipulative and Physiological Therapeutics* (2023). DOI: [10.1016/j.jmpt.2023.05.006](https://doi.org/10.1016/j.jmpt.2023.05.006).

- [157] Jéssica da Silva Soares, Felipe P Carpes, Gislaine de Fátima Geraldo, Fabíola Bertú Medeiros, Marcos Roberto Kunzler, Álvaro Sosa Machado, Leopoldo Augusto Paolucci y André Gustavo Pereira de Andrade. «Functional data analysis reveals asymmetrical crank torque during cycling performed at different exercise intensities». En: *Journal of Biomechanics* 122 (2021), pág. 110478. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2021.110478](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2021.110478).
- [158] Gordon K. Smyth. «Linear Models and Empirical Bayes Methods for Assessing Differential Expression in Microarray Experiments». En: *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology* 1 (2004), pág. 3.
- [159] Helle Sørensen, Jeff Goldsmith y Laura M. Sangalli. «An introduction with medical applications to functional data analysis». En: *Statistics in Medicine* 32.30 (2013), págs. 5222-5240. ISSN: 1097-0258. DOI: [10.1002/sim.5989](https://doi.org/10.1002/sim.5989).
- [160] Anuj Srivastava, Wei Wu, Sebastian Kurtek, Eric Klassen y J. S. Marron. *Registration of Functional Data Using Fisher-Rao Metric*. 2011. DOI: [10.48550/ARXIV.1103.3817](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1103.3817).
- [161] Juan de la Torre, Javier Marin, Sergio Ilarri y Jose J. Marin. «Applying Machine Learning for Healthcare: A Case Study on Cervical Pain Assessment with Motion Capture». En: *Applied Sciences* 10.17 (2020), pág. 5942. ISSN: 2076-3417. DOI: [10.3390/app10175942](https://doi.org/10.3390/app10175942).
- [162] Susan T. Tran et al. «A pilot study of biomechanical assessment before and after an integrative training program for adolescents with juvenile fibromyalgia». En: *Pediatric Rheumatology* 14.1 (2016). ISSN: 1546-0096. DOI: [10.1186/s12969-016-0103-7](https://doi.org/10.1186/s12969-016-0103-7).
- [163] Julia Treleaven, Xiaoqi Chen e Hilla Sarig Bahat. «Factors associated with cervical kinematic impairments in patients with neck pain». En: *Manual Therapy* 22 (2016), págs. 109-115. DOI: [10.1016/j.math.2015.10.015](https://doi.org/10.1016/j.math.2015.10.015).
- [164] Sharon M.H. Tsang, Grace P.Y. Szeto, Billy C.L. So, Rufina W.L. Lau y Jay J. Tai. «Using cervical movement velocity to assist the prediction of pain and functional recovery for people with chronic mechanical neck pain». En: *Clinical Biomechanics* 93 (2022), pág. 105607. DOI: [10.1016/j.clinbiomech.2022.105607](https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2022.105607).
- [165] J. Derek Tucker, John Lewis y Anuj Srivastava. «Elastic Functional Principal Component Regression». Tesis doct. Florida State University, 2018. DOI: [10.48550/ARXIV.1805.11456](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1805.11456).
- [166] J. Derek Tucker, Wei Wu y Anuj Srivastava. «Generative models for functional data using phase and amplitude separation». En: *Computational Statistics & Data Analysis* 61 (2013), págs. 50-66. ISSN: 0167-9473. DOI: [10.1016/j.csda.2012.12.001](https://doi.org/10.1016/j.csda.2012.12.001).

- [167] Shahid Ullah y Caroline F Finch. «Applications of functional data analysis: A systematic review». En: *BMC Medical Research Methodology* 13.1 (2013). ISSN: 1471-2288. DOI: [10.1186/1471-2288-13-43](https://doi.org/10.1186/1471-2288-13-43).
- [168] M.D. de Ulzurrun Sagala. *Transtornos músculo-esqueléticos de origen laboral*. Documentación básica INSL. Instituto Navarro de Salud Laboral, 2007.
- [169] William Venegas, Marta Inglés, Álvaro Page y Pilar Serra-Añó. «Paths of the cervical instantaneous axis of rotation during active movements—patterns and reliability». En: *Medical & Biological Engineering & Computing* 58.5 (2020), págs. 1147-1157. DOI: [10.1007/s11517-020-02153-5](https://doi.org/10.1007/s11517-020-02153-5).
- [170] Fernando Villalba-Meneses et al. «Classification of the Pathological Range of Motion in Low Back Pain Using Wearable Sensors and Machine Learning». En: *Sensors* 24.3 (2024), pág. 831. ISSN: 1424-8220. DOI: [10.3390/s24030831](https://doi.org/10.3390/s24030831).
- [171] Jane-Ling Wang, Jeng-Min Chiou y Hans-Georg Müller. «Functional Data Analysis». En: *Annual Review of Statistics and Its Application* 3.1 (2016), págs. 257-295. ISSN: 2326-831X. DOI: [10.1146/annurev-statistics-041715-033624](https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-041715-033624).
- [172] John Warmenhoven. «Over 30 years of using functional data analysis in human movement. What do we know, and is there more for sports biomechanics to learn?». En: *Sports Biomechanics* (2024), págs. 1-32. ISSN: 1752-6116. DOI: [10.1080/14763141.2024.2398508](https://doi.org/10.1080/14763141.2024.2398508).
- [173] John Warmenhoven, Norma Bargary, Dominik Liebl, Andrew Harrison, Mark A. Robinson, Edward Gunning y Giles Hooker. «PCA of waveforms and functional PCA: A primer for biomechanics». En: *Journal of Biomechanics* 116 (2021), pág. 110106. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2020.110106](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2020.110106).
- [174] John Warmenhoven, Stephen Cobley, Conny Draper, Andrew Harrison, Norma Bargary y Richard Smith. «Bivariate functional principal components analysis: considerations for use with multivariate movement signatures in sports biomechanics». En: *Sports Biomechanics* 18.1 (2017), págs. 10-27. ISSN: 1752-6116. DOI: [10.1080/14763141.2017.1384050](https://doi.org/10.1080/14763141.2017.1384050).
- [175] John Warmenhoven, Stephen Cobley, Conny Draper, Andrew Harrison, Norma Bargary y Richard Smith. «Considerations for the use of functional principal components analysis in sports biomechanics: examples from on-water rowing». En: *Sports Biomechanics* 18.3 (2017), págs. 317-341. ISSN: 1752-6116. DOI: [10.1080/14763141.2017.1392594](https://doi.org/10.1080/14763141.2017.1392594).

- [176] John Warmenhoven et al. «A force profile analysis comparison between functional data analysis, statistical parametric mapping and statistical non-parametric mapping in on-water single sculling». En: *Journal of Science and Medicine in Sport* 21.10 (2018), págs. 1100-1105. ISSN: 1440-2440. DOI: [10.1016/j.jsams.2018.03.009](https://doi.org/10.1016/j.jsams.2018.03.009).
- [177] McKenzie S. White, William Z. Horton, Julie P. Burland, Matthew K. Seeley y Lindsey K. Lepley. «The Utility of Functional Data Analyses to Reveal Between-Limbs Asymmetries in Those With a History of Anterior Cruciate Ligament Reconstruction». En: *Journal of Athletic Training* 56.3 (2021), págs. 272-279. ISSN: 1062-6050. DOI: [10.4085/1062-6050-0081.20](https://doi.org/10.4085/1062-6050-0081.20).
- [178] Michael W. Whittle. «Clinical gait analysis: A review». En: *Human Movement Science* 15.3 (1996), págs. 369-387. ISSN: 0167-9457. DOI: [10.1016/0167-9457\(96\)00006-1](https://doi.org/10.1016/0167-9457(96)00006-1).
- [179] Michael W. Whittle. *Gait analysis. An introduction*. 3rd ed., reprint. Previous ed.: 1996. Oxford [u.a.]: Butterworth-Heinemann, 2003. 220 págs. ISBN: 9780750652629.
- [180] David A. Winter. *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*. Wiley, 2009. ISBN: 9780470549148. DOI: [10.1002/9780470549148](https://doi.org/10.1002/9780470549148).
- [181] Xiaohan Xiang, Masahiro Tanaka, Satoru Umeno, Yutaka Kikuchi y Yoshihiko Kobayashi. «Dynamic assessment for low back-support exoskeletons during manual handling tasks». En: *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology* 11 (2023). ISSN: 2296-4185. DOI: [10.3389/fbioe.2023.1289686](https://doi.org/10.3389/fbioe.2023.1289686).
- [182] Xu Xu, Jia-hua Lin y Raymond W. McGorry. «A regression-based 3-D shoulder rhythm». En: *Journal of Biomechanics* 47.5 (2014), págs. 1206-1210. ISSN: 0021-9290. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2014.01.043](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2014.01.043).
- [183] Jung Ho Yang, Jae Hyeon Park, Seong-Ho Jang y Jaesung Cho. «Novel Method of Classification in Knee Osteoarthritis: Machine Learning Application Versus Logistic Regression Model». En: *Annals of Rehabilitation Medicine* 44.6 (2020), págs. 415-427. ISSN: 2234-0653. DOI: [10.5535/arm.20071](https://doi.org/10.5535/arm.20071).
- [184] Jari Ylinen, Esa-Pekka Takala, Hannu Kautiainen, Matti Nykänen, Arja Häkkinen, Timo Pohjolainen, Sirkka-Liisa Karppi y Olavi Airaksinen. «Association of neck pain, disability and neck pain during maximal effort with neck muscle strength and range of movement in women with chronic non-specific neck pain». En: *European Journal of Pain* 8.5 (2004), págs. 473-478. DOI: [10.1016/j.ejpain.2003.11.005](https://doi.org/10.1016/j.ejpain.2003.11.005).

- [185] Ana Paula Janner Zanardi, Edson Soares da Silva, Rochelle Rocha Costa, Elren Passos-Monteiro, Ivan Oliveira dos Santos, Luiz Fernando Martins Kruehl y Leonardo Alexandre Peyré-Tartaruga. «Gait parameters of Parkinson's disease compared with healthy controls: a systematic review and meta-analysis». En: *Scientific Reports* 11.1 (2021). ISSN: 2045-2322. DOI: [10.1038/s41598-020-80768-2](https://doi.org/10.1038/s41598-020-80768-2).
- [186] Wei Zeng, Limin Ma, Chengzhi Yuan, Fenglin Liu, Qinghui Wang, Ying Wang y Yu Zhang. «Classification of asymptomatic and osteoarthritic knee gait patterns using gait analysis via deterministic learning». En: *Artificial Intelligence Review* 52.1 (2018), págs. 449-467. ISSN: 1573-7462. DOI: [10.1007/s10462-018-9645-z](https://doi.org/10.1007/s10462-018-9645-z).
- [187] Wei Zeng, Limin Ma y Yu Zhang. «Analysis and classification of gait patterns in osteoarthritic and asymptomatic knees using phase space reconstruction, intrinsic time-scale decomposition and neural networks». En: *Multimedia Tools and Applications* 83.7 (2023), págs. 21107-21131. ISSN: 1573-7721. DOI: [10.1007/s11042-023-16322-9](https://doi.org/10.1007/s11042-023-16322-9).
- [188] Bairu Zhang, Richard Twycross-Lewis, Heiko Großmann y Dylan Morrissey. «Testing Gait with Ankle-Foot Orthoses in Children with Cerebral Palsy by Using Functional Mixed-Effects Analysis of Variance». En: *Scientific Reports* 7.1 (2017). ISSN: 2045-2322. DOI: [10.1038/s41598-017-11282-1](https://doi.org/10.1038/s41598-017-11282-1).
- [189] Muhammad Athif Mat Zin, Azmin Sham Rambely y Noratqah Mohd Ariff. «Effectiveness of Landmark and Continuous Registrations in Reducing Inter- and Intrasubject Phase Variability». En: *IEEE Access* 8 (2020), págs. 216003-216017. ISSN: 2169-3536. DOI: [10.1109/access.2020.3038494](https://doi.org/10.1109/access.2020.3038494).

Apéndice A

Código

A.1 Matriz de modelo

En esta sección se detalla el código para la construcción de la matriz del modelo construída para el caso funcional de forma que se puedan utilizar las funciones habituales de R para modelos de regresión.

```
do.model.matrix = function(x,tx,tbasis.x,nb.x,tbasis.b,nb.b,u=NULL)
  ↪ {
  if(!is.list(x)) return("x_must_be_a_list")
  if(!is.list(tx)) return("tx_must_be_a_list")
  if(length(x)!=length(tx)) return("x_and_tx_have_different_
    ↪ lengths")
  if(length(tbasis.x) == 1) tbasis.x = rep(tbasis.x,length(x))
  if(length(tbasis.b) == 1) tbasis.b = rep(tbasis.b,length(x))
  if(length(nb.x) == 1) nb.x = rep(nb.x,length(x))
  if(length(nb.b) == 1) nb.b = rep(nb.b,length(x))

  ## Creating functional data
  fd = vector("list",length(x))
  names(fd) = paste0("fd",1:length(x))
```

```

for(i in 1:length(x)) fd[[i]] = fda.usc::fdata(x[[i]], argvals
  ↪ = tx[[i]])
rtt = sapply(fd,function(i) i$rangeval) ## Ranges

basis.x = vector("list",length(x))
basis.b = vector("list",length(x))
for(i in 1:length(x)){
  if(tbasis.x[i] == "bspline")
    basis.x[[i]] = fda::create.bspline.basis(rangeval = rtt
  ↪ [,i], nbasis=nb.x[i])
  if(tbasis.b[i] == "bspline")
    basis.b[[i]] = fda::create.bspline.basis(rangeval = rtt
  ↪ [,i], nbasis=nb.b[i])
  if(tbasis.x[i] == "fourier")
    basis.x[[i]] = fda::create.fourier.basis(rangeval = rtt[,i
  ↪ ], nbasis=nb.x[i])
  if(tbasis.b[i] == "fourier")
    basis.b[[i]] = fda::create.fourier.basis(rangeval = rtt[,i
  ↪ ], nbasis=nb.b[i])
}

## Creating model matrix
J = vector("list",length(x))
for(i in 1:length(x)){
  J0 = fda::inprod(basis.x[[i]],basis.b[[i]])
  xaux = fda.usc::fdata2basis(fd[[i]], basis.x[[i]])
  J[[i]] = xaux$coefs %*% J0
}
Z = NULL
for(i in 1:length(x)) Z = cbind(Z,J[[i]])
Z = data.frame(Z)
names0 = NULL
for(i in 1:length(x))
  names0 = c(names0,paste0("basis_",i,"_",1:nb.b[i]))
names(Z) = names0
## Is there scalar predictors?
if(!is.null(u)){
  if(! (nrow(u) == nrow(Z)))
    return("Different number of rows in functional and
  ↪ scalar model matrices")
  Z = data.frame(Z,u)
}

```



```

    }
    Z
}

```

A.2 Regresión lineal funcional

En el siguiente código se muestra cómo se ha implementado un modelo de regresión lineal funcional construyendo la matriz de modelo (Anexo A.1) y utilizando la función `lm()`. Se muestra para la aplicación descrita en el apartado 7.3.4.

```

# Construcción de la matriz de modelo
y = VAS # Variable respuesta
x = list(Fy) # Variable predictora funcional
names(x) = paste0("x",1:length(x))
tx = list(seq(0,1,length.out=101))
names(tx) = paste0("t",1:length(x))
tbasis.tx = "bspline"
tbasis.b = "bspline"
nb.x = 40
nb.b = 12
Z = do.model.matrix(x,tx,tbasis.tx,nb.x,tbasis.b,nb.b)

# Ajuste del modelo
fit.y = lm(y ~ ., data = data.frame(y,Z))

# Medidas de calidad del modelo
r.y = sqrt(summary(fit.y)$r.squared) # Coeficiente correlación
AIC.y = AIC(fit.y)
BIC.y = BIC(fit.y)
F.y = summary(fit.y)$fstatistic[1]
p.y = 1-pf(summary(fit.y)$fstatistic[1],summary(fit.y)$fstatistic
  ↪ [2], summary(fit.y)$fstatistic[3])

```

A.3 Regresión logística funcional

El siguiente código corresponde a la aplicación descrita en el apartado 8.3.1. En primer lugar se construye la matriz del modelo para implementar un modelo de regresión logística funcional usando la función `glm()`. La segunda parte del código añade al modelo anterior predictores escalares. En ambos casos se fija la probabilidad de corte en 0,5. Se obtienen en los dos modelos medidas de calidad del ajuste, como la exactitud, sensibilidad, especificidad o área bajo la curva ROC.

```
# Regresión logística funcional con fuerza Fz
x = list(Fz)
y = c(rep(0, each = 40), rep(1, each = 37))
names(x) = paste0("x",1:length(x))
tx = list(seq(0,1,length.out=101))
names(tx) = paste0("t",1:length(x))
tbasis.tx = "bspline"
tbasis.b = "bspline"
nb.x = 40
nb.b = 9
Z1 = do.model.matrix(x,tx,tbasis.tx,nb.x,tbasis.b,nb.b)

fit1 = glm(y ~ ., data=Z1, family = binomial)

haty1=predict(fit1, type="response")
matriz_confusion1=table(y,ifelse(haty1 > 0.5, 1, 0),dnn = c("
  ↪ observaciones", "predicciones"))
clasificacion1 = 100*(matriz_confusion1[1,1]+matriz_confusion1
  ↪ [2,2])/length(y)

roc1=roc(y, haty1, auc=T,ci=T)
plot.roc(roc1,print.auc=T,print.thres = "best",col="blue",xlab="1-
  ↪ Especificidad",ylab="Sensibilidad")

# sensibilidad y especificidad
TN1 = matriz_confusion1[1,1]
FP1 = matriz_confusion1[1,2]
FN1 = matriz_confusion1[2,1]
TP1 = matriz_confusion1[2,2]
# Sensibilidad
sensibl = TP1 / (TP1 + FN1)
# Especificidad
```

```

especif1 = TN1 / (TN1 + FP1)

## Añadir predictores escalares al modelo de Fz
escalares = c(sexo, edad, peso)
df.scalar = data.frame(y, Z1, escalares)
fit2 = glm(y ~ ., data=df.scalar, family = binomial)

haty2=predict(fit2, type="response")
matriz_confusion2=table(y,ifelse(haty2 > 0.5, 1, 0),dnn = c("
  ↪ observaciones", "predicciones"))
clasificacion2 = 100*(matriz_confusion2[1,1]+matriz_confusion2
  ↪ [2,2])/length(y)

roc2=roc(y, haty2, auc=T,ci=T)
plot.roc(roc2,print.auc=T,print.thres = "best",col="blue",xlab="1-
  ↪ Especificidad",ylab="Sensibilidad")

# sensibilidad y especificidad
TN2 = matriz_confusion2[1,1]
FP2 = matriz_confusion2[1,2]
FN2 = matriz_confusion2[2,1]
TP2 = matriz_confusion2[2,2]
# Sensibilidad
sensib2 = TP2 / (TP2 + FN2)
# Especificidad
especif2 = TN2 / (TN2 + FP2)

```


Apéndice B

Publicaciones derivadas de la tesis doctoral

Como resultado de esta tesis doctoral se han publicado los siguientes trabajos:

B.1 Publicaciones en revistas

1. Elisa Aragón-Basanta, William Venegas, Guillermo Ayala, Alvaro Page y Pilar Serra-Añó. «Relationship between neck kinematics and neck dissability index. An approach based on functional regression». En: *Scientific Reports* 14.1 (2024). ISSN: 2045-2322. DOI: [10.1038/s41598-023-50562-x](https://doi.org/10.1038/s41598-023-50562-x).

B.2 Comunicaciones en congresos internacionales

1. Elisa Aragón Basanta, William Ricardo Venegas Toro, Guillermo Ayala Gallago y Álvaro F. Page del Pozo. «Normalización de la escala de tiempos en el análisis de movimientos humanos. Efectividad del registro no lineal». En: *Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica-CIBIM 2022*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (España), 2022. DOI: [10.5944/bicim2022.189](https://doi.org/10.5944/bicim2022.189).

B.3 Trabajos aceptados

1. Elisa Aragón-Basanta, Guillermo Ayala, Álvaro Page y Pilar Serra-Añó. «Non-specific neck pain evaluation using functional linear models with the limma correction.» *Medical & Biological Engineering & Computing*.
2. Elisa Aragón-Basanta, Álvaro Page, Guillermo Ayala, Enrique Viosca-Herrero y Luz Herrero-Manley. «Comparison between the functional mean and the deepest curve in biomechanical curves». *International Conference on Bio-medical Engineering and Systems*. Paris, France, 2025.
3. Elisa Aragón-Basanta, Álvaro Page, Guillermo Ayala, Enrique Viosca-Herrero y Luz Herrero-Manley. «Functional relationship between pain and ground reaction forces in early knee osteoarthritis». *Congress of the European Society of Biomechanics*. Zurich, Switzerland, 2025.

B.4 Trabajos en proceso de revisión

1. Elisa Aragón-Basanta, Álvaro Page, Guillermo Ayala, Enrique Viosca-Herrero, Ana Alabajos-Cea y Luz Herrero-Manley. «Integrating Biomechanical and Clinical Data for Early Knee Osteoarthritis Detection: A Functional Data Analysis Approach.» *Sometido a Scientific Reports*.