MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 4, No. 4, 2011.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

La resolución de problemas como herramienta para la modelización matemática

Sixto Romero
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

Abstract

La conexión entre las matemáticas y la realidad que nos rodea se ejecuta por medio de actividades de la resolución de problemas contextualizados en nuestro entorno de vida. No hay que olvidar que la Matemática ha evolucionado a través de la historia a partir del planteamiento y el abordaje de problemas; estos dos procesos, que podemos resumir como resolución de problemas, han impulsado su enorme crecimiento y, lo que es más importante, caracterizan la labor del matemático como tal. Ante una situación problemática real, un resultado numérico no tiene sentido desligado del contexto, es necesario darle sentido teniendo en cuenta las condiciones impuestas por la situación. Pero numerosas investigaciones ponen de manifiesto que los estudiantes se limitan a obtener un resultado numérico que dan como solución sin considerar el contexto (Greer, 1993; Silver, 1992). La modelización matemática se entiende como el proceso por el cual se interpreta matemáticamente situaciones para tomar algún tipo de decisión lo que implica centrarse en elementos de la situación, sus relaciones, patrones y características, teniendo como producto un modelo en algún nivel de sofisticación con relación al propósito. Siguiendo a Schoenfeld presentaremos algunos ejemplos concretos de situaciones (problemas) desarrolladas con alumnos/as de Secundaria, que bien pueden extrapolarse a alumnos/as de niveles superiores donde se expondrán las diferentes fases y heurísticos por las que debemos pasar cuando nos enfrentamos a un problema. También abordaremos algunas consideraciones teóricas en torno al Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) como uno de los métodos de enseñanza-aprendizaje que ha tomado más arraigo en las instituciones de educación superior en los últimos años.

The resolution of mathematical problems in connexion with the real world establishes a link between Mathematics and Reality. We can not forget that the History of Mathematics is plenty of examples where the resolution of problems has impulse the growth of the knowledge in Mathematics. In front of a real situation, a numerical result cannot have sense if we analyse it in the context of the problem. Mathematical Modelling is understood as the process in which real situations are analysed in terms of Mathematics in order to determine the main elements of the problem their relations, their regularities, ? In this paper we present several examples developed by students of secondary level related to modelling and we also analyse some theoretical questions related to the Solving Problem Learning (SPL) as one of the models that nowadays is the most extended.

Keywords: Aprendizaje, modelización matemática, ingeniería.

Una mirada matemática de las cosas es siempre posible y que, como en una novela o una canción, pueda aparecer la emoción, el misterio y la belleza.

Ritmo, Matemáticas e Imágenes
Eliseo Borrás

1 Breves consideraciones sobre el informe pisa

Sabemos que hace aproximadamente 15 años la OCDE estableció una serie de indicadores educativos, relevantes para expresar el desarrollo de una sociedad. Estos indicadores pretenden mostrar la calidad del sistema educativo por medio de las competencias que alcanzan los escolares en una serie de disciplinas básicas, que comprende los dominios de la lectura comprensiva y la alfabetización matemática y científica.

El estudio PISA es un programa cooperativo, de carácter cíclico, con un sistema internacional de gestión y de control, en el que intervienen organismos, vinculados con la OCDE, consorcios educativos y grupos internacionales de expertos, se discute en foros especializados y se conecta con proyectos, grupos y equipos de los países participantes. El estudio PISA se concibe como una herramienta para contribuir al desarrollo del capital humano de los países miembros de la OCDE. Tal capital lo constituyen los conocimientos, destrezas, competencias y otros rasgos individuales, que son relevantes para el bienestar personal, social y económico. La finalidad de PISA se centra:

"...Cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer qué contenidos del currículo han aprendido."

Las evaluaciones se llevan a cabo cada tres años y ofrecen a los responsables de la política educativa de los países participantes información relevante para llevar a cabo el seguimiento de los resultados de los alumnos a lo largo del tiempo, evaluar las fortalezas y debilidades de sus propios sistemas y conocer la relación con los resultados de otros países. Un informe de la OCDE sobre España, propone una serie de diagnóstico donde la finalidad de la evaluación se centra:

"En la deficiente calidad de la escolaridad obligatoria. El objetivo principal de las reformas en curso consiste en remediar los malos resultados en educación. Aparte de los cambios de carácter pedagógico, debe otorgarse prioridad a las medidas que dotan de mayor autonomía a las escuelas, permitiéndoles que experimenten y que se adapten a las condiciones locales, así como aumentar los incentivos para el personal docente, de acuerdo con su formación y rendimiento"

El dominio que se evalúa en el estudio PISA/OCDE se denomina Alfabetización Matemática. Dicha alfabetización o competencia matemática general, se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Podemos apreciar en la alfabetización o competencia matemática una versión básica de las competencias prácticas generales que se postulan para los profesionales de las matemáticas, según las directrices de los planes de estudios españoles. Las competencias que se están enunciando para la nueva titulación en Matemáticas, dentro del marco de la Convergencia Europea, son.

1. Resolver problemas de Matemáticas mediante habilidades de cálculo básico y otras técnicas.

2. Proponer, Analizar, Validar e Interpretar modelos de situaciones sencillas reales sencillas, utilizando las herramientas más adecuadas a los fines que se persigan.

3. Planificar la resolución de un problema.

El marco matemático del estudio PISA/OCDE se sostiene en la creencia de que aprender a matematizar debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes. La actividad matemática se concreta en la actividad de matematización, que se identifica en el estudio con la resolución de problemas. Tradicionalmente se han distinguido distintas fases en el proceso de resolución de problemas. Así, como ANTECEDENTES:

a) **Dewey (1933)** señala las siguientes fases:

    1. Se siente una dificultad: localización de un problema.
    2. Se formula y define la dificultad: delimitar el problema en la mente del sujeto.
    3. Se sugieren posibles soluciones: tentativas de soluciones.
    4. Se obtienen consecuencias. Desarrollo o ensayo de soluciones tentativas.
    5. Se acepta o se rechaza la hipótesis puesta a prueba.

b) **Polya (1945)**

    1. Comprender el problema.
    2. Concebir un plan.
    3. Ejecutar el plan.
    4. Examinar la solución obtenida.

c) **PISA (2003)**

    En esta misma tradición, los responsables de matemáticas en el estudio de PISA/OCDE (2003) caracterizan cinco fases la actividad de hacer matemáticas que presentamos en el siguiente ejemplo:

    El Ayuntamiento de VALENCIA ha decidido Colocar una farola en un pequeño parque triangular del centro de la ciudad de modo que ilumine el parque completo. ¿Dónde debe colocarlo?

    1. *Comenzar con un problema ubicado en la realidad.*

        Localizar donde se colocan las farolas en un parque.

    2. *Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos.*

        El parque se puede representar como un triángulo y la iluminación como un círculo en cuyo centro está la farola.

    3. *Progresivamente hay que despegarse de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema que son importantes, generalizar y formalizar.*

        El problema se transforma en localizar el centro de un círculo que circunscriba al triángulo.

    4. *Resolver el problema.*

        Utilizar el hecho de que el centro de un círculo que circunscribe al triángulo equidista de los vértices contiguos y, por tanto, está en la mediatriz de los lados del triángulo.

5. *Proporcionar sentido a la solución matemática, en términos de la situación real inicial.*
   Relacionar esta solución con el parque real. Reconocer, por ejemplo, que si una de las tres esquinas fuese un ángulo obtuso la solución podría no ser razonable ya que la farola estaría fuera del parque.

Es la actuación secuenciada por medio de estos procesos lo que caracteriza, en sentido amplio, cómo los matemáticos hacen matemáticas, cómo las personas emplean matemáticas en una variedad de profesiones y trabajos de manera completa y competente, cómo al abordar la respuesta a cuestiones y problemas abstraen y, por ello, matematizan sobre los datos de su contexto de trabajo. La actividad matemática se resume en dos tipos de matemáticas, matemática horizontal y matemática vertical:

2 Proyecto Klein

El nuevo currículo se diferencia de los anteriores por la introducción de las conocidas competencias básicas, entre ellas, la competencia matemática. De entre, los elementos que aparecen en el currículo, aparte de las competencias básicas están:

1) los métodos pedagógicos,

2) Los objetivos específicos de la materia. En definitiva, objetivos que el/la alumno/a va adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica para valorar las Matemáticas como parte integrante de nuestra cultura.

3) Otros elementos que conforman el currículo son los contenidos a desarrollar en la enseñanza de las Matemáticas. Una primera característica diferencial respecto del currículo de las enseñanzas LOGSE aprobado en el 2002 y que es el que ha venido impartiéndose hasta el momento, —de hecho aún es de aplicación en el presente año académico 2007/2008 en los cursos segundo y cuarto—, es que los contenidos se agrupan en seis bloques temáticos a desarrollar en los cuatro cursos de la etapa.

   — Contenidos comunes
   — Números
   — Álgebra
   — Geometría
   — Funciones y gráficas
   — Estadística y probabilidad.

Debido al carácter orientador que debe tener la etapa, los bloques no debería tratarse como compartimentos estancos: en todos los bloques se utilizan técnicas numéricas y algebraicas, y en cualquiera de ellos puede ser útil confeccionar una tabla, generar una gráfica o suscitar una situación de incertidumbre probabilística. A continuación, solo unos minutos para presentarles el **Proyecto Klein**.

La Unión Matemática Internacional, entre otras actividades de pública notoriedad, organiza cada cuatro años el Congreso Internacional de Matemáticos (el último, en Madrid 2006) y la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI, ver

http://www.mathunion.org/icmi)

es el órgano de IMU encargado de los temas relacionados con la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos. Su primer presidente y fundador fue el eminente matemático alemán Félix Klein (1849-1925). ICMI organiza cada cuatro años un congreso internacional de educación matemática (ICME), como el celebrado en Sevilla en 1996.

Hace 102 años, en 1908, el catedrático de la Universidad de Göttingen, el Profesor, Félix Klein, publicaba una obra magistral, titulada Matemática elemental desde un punto de vista superior, con la declarada intención de contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas en Alemania, mostrando la repercusión, en la consideración de los objetos matemáticos de la enseñanza no universitaria, de los avances de esta disciplina a lo largo del siglo XIX.

La obra de Klein marcó, en muchos sentidos, un hito pero han pasado ciento dos años desde entonces y a lo largo del siglo XX las matemáticas han soportado una crisis de fundamentos, se han abierto, con el advenimiento de los computadores, a nuevos ámbitos de actividad, han logrado resolver problemas centenarios.

El Proyecto Klein es una iniciativa conjunta de IMU/ICMI para desarrollar una versión actualizada (en la forma y en el fondo) del hito que supuso la publicación, en 1908, del libro citado anteriormente. Se trata de producir, a lo largo de cuatro años, una serie de materiales de diversa naturaleza (libros; recursos de Internet: wikis, foros, portales; audiovisuales, etc.), para profesores de secundaria, que ayuden a trasmitir la amplitud y vitalidad que la investigación matemática ha alcanzado a lo largo del siglo XX, conectándola con el currículo de la enseñanza secundaria. Se persigue, en definitiva, acercar al currículo escolar los múltiples "y en muchos casos, insospechados" ámbitos de presencia de las matemáticas en la sociedad actual, alcanzados gracias a la investigación desarrollada durante los últimos cien años y que, por tanto, no pudieron ser reflejados en la obra original de Klein. El acuerdo de IMU/ICMI contempla la edición de los distintos materiales en alemán, chino mandarían, español, francés e inglés, al menos.

El carácter universal (destinado a todos los profesores de secundaria del mundo) y enciclopédico (abarcando todas las ramas de la matemática) del objetivo marcado para el proyecto Klein exigirá recabar múltiples colaboraciones y patrocinios y, también, lograr la implicación de investigadores y docentes de diversas especialidades y niveles educativos. Entre otras acciones está prevista la organización de una serie de Conferencias Klein para facilitar la difusión del proyecto y la participación en el mismo de distintos colectivos. Tras la aprobación del proyecto por los comités ejecutivos de ICMI e IMU en marzo y abril de 2004, respectivamente, se ha procedido a constituir la Comisión Klein. Es una comisión que ha de diseñar y llevar a término, en los próximos cuatro años, dicho proyecto, formada por ocho personas, cuatro propuestas por el comité ejecutivo ICMI, cuatro por el comité ejecutivo IMU, con un coordinador —W. Barton, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Auckland, Nueva Zelanda— consensuado por ambas partes. La Comisión Klein está constituida en la actualidad por los profesores:

- Michèle Artigue, Universidad de Paris VII, Francia
- Ferdinando Arzarello, University de Turín, Italia
- Graeme Cohen, Universidad Tecnológica, Sydney, Australia
- William McCallum, Universidad de Arizona, USA
- Tomás Recio, Universidad de Cantabria, España
- Christiane Rousseau, Universidad de Montreal, Canadá
- Hans-Georg Weigand, Universidad de Wurzburg, Alemania.

Se estima que la comisión mantendrá un par de reuniones anuales, y que organizará dos o tres conferencias para recabar ideas y/o difundir la marcha de sus trabajos. Además la comisión distribuirá sus miembros en algunas subcomisiones creadas, con sus correspondientes reuniones, para atender diversos aspectos concretos (creación de una serie de DVD's, desarrollo de una wiki, etc.) del trabajo. La primera reunión tuvo lugar en Madeira, en Octubre de 2009 y el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos de Castro Urdiales (Santander) se ha encargado de organizar la segunda, el 2 y 3 de junio de 2010, con el objetivo de que la comunidad matemática española se involucre en el proyecto y haga sugerencias explícitas que ayuden al equipo a responder las preguntas que se plantea, tales como:

¿Cuáles son los desarrollos matemáticos del Siglo XX que los profesores de secundaria deberían conocer, y cómo se les pueden hacer accesibles?

La redacción final del libro correrá a cargo de autores invitados, de probada capacidad narrativa y divulgadora.

En este contexto, la Comisión quiere invitar ahora a enviar comentarios sobre la siguiente elección de títulos para los capítulos del libro:

- Introducción
- Capítulos temáticos
  - Aritmética
  - Lógica
  - Álgebra y Estructuras
  - Geometría
  - Funciones y Análisis
  - Matemática Discreta y Algorítmica
  - Matemáticas de la Computación
  - Probablidad y Estadística
- Capítulos misceláneos
  - Intradisciplinariedad (esto es, conexiones internas)
  - Las matemáticas como disciplina viva en la ciencia y la sociedad
  - ¿Cómo trabajan los matemáticos?

3 La resolución de problemas como vehículo del aprendizaje matemático

3.1 Introducción

Se puede pensar que es redundante mencionar la resolución de problemas (RP) cuando se habla de hacer matemáticas. El proceso de creación matemática es un proceso basado en la resolución de problemas. Puede ser que este término sea muy fuerte pero sea creación o descubrimiento, la RP es el proceso natural asociado.

¿Quién duda que la Matemática ha avanzado a través de la historia a partir del planteamiento y abordaje de problemas? Estos dos procesos que podemos resumir como resolución de problemas, han impulsado su enorme crecimiento y, lo que es más importante, caracterizan la labor del matemático como tal.

Este puede ser un motivo más que suficiente para que la RP esté presente en la enseñanza. Y no debe estar de forma anecdótica, sino como caracterizadora del proceso de formación matemática de los alumnos. Habrá ejercicios, en particular, y otras estrategias metodológicas, pero, en general, deberán provenir del planteamiento y enfrentamiento a problemas: será su resolución lo que motive la dedicación a otras tareas, incluyendo en éstas la presentación de conceptos. Ahora bien, para llevar esto a cabo, el profesor necesita ser consciente de lo que conlleva hacer resolución de problemas en el aula; en particular, ha de tener claro para qué lo hace (que puede conseguir, cual es su finalidad) y en algunos elementos propios del proceso (fases y heurísticos) que puedes ayudar a los alumnos a progresar como resolutores.

3.2 Finalidad

La respuesta a la cuestión de la finalidad de la resolución de problemas es aludir a las recomendaciones de los diseños curriculares. Es una respuesta administrativa que todo matemático debe tener en cuenta y ponerlo en práctica desde la óptica de la educación matemática.

Desde el punto de vista de las actitudes y concepciones el papel de la RP como vehículo del aprendizaje matemático destaquemos que:

a) *Desarrolla una actitud abierta*

   No se puede pretender desarrollar una actitud abierta si las tareas matemáticas propuestas por el profesor se caracterizan por tener una única forma de abordarse, una única solución y una única manera de entender el enunciado.

b) *Ejemplifica una concepción dinámica de la evolución del conocimiento*

   Algunos problemas son propicios para poner de relieve que diferentes que diferentes procedimientos pueden conducir a solucionar la misma situación, incluso pudiendo plantearse el mismo problema en niveles sucesivos (abordándose con herramientas más potentes). En este proceso los alumnos crean su conocimiento matemático, pero además, en ocasiones, llegan a obtener resultados no habituales en los manuales de uso.

c) *Da una visión integrada de la Matemática*

   Los núcleos temáticos no son compartimentos estancos.

d) *Facilita la introducción significativa de un nuevo concepto*

   No debe emplearse la RP exclusivamente a la hora de aplicar los conocimientos previamente adquiridos, sino como vehículo introductorio.

e) *Pone de relieve los procesos inductivos y deductivos de forma rigurosa (el método depende del contexto)*

   Los alumnos deben ser capaces de llevar a cabo procesos inductivos y deductivos según convengan. El método más conciso y elegante desde el punto de vista matemático debe provenir de la necesidad de sintetizar y formalizar los argumentos esbozados con anterioridad. Algunos problemas, planteados en cursos sucesivos, ponen de manifiesto la potencia de los métodos matemáticos. Riguroso es que los alumnos entiendan qué significan rigor y cómo puede aplicarse.

f) *Refuerza la idea de que las verdades son relativas, dependen del contexto*

   Suele ser habitual que los alumnos no interpreten las soluciones obtenidas. Los problemas dan luz a la necesidad de interpretar los resultados en su contexto, fomentando la consciencia de que le modelo matemático suele ser más potente que la situación real, aportando soluciones matemáticas que no son soluciones de la situación.

g) *Muestra la necesidad de algunas exigencias*

   Algunos problemas evidencian la bondad de la resolución de problemas para propiciar conocimiento significativo, a través de situaciones en las que se desarrolla el empleo de estrategias y se pone en práctica el conocimiento del qué, del cómo y condicional.

h) *Muestra la utilidad de la Matemática en la vida*

i) *"Desea" que el alumno no establezca el centro educativo como un mundo paralelo al real*

Un gran listado de problemas se podría dar: trigonometría, semejanzas y escalas, probabilidad, divisibilidad,...no son más que ejemplos de bloques de contenido cercanos a la realidad entre los muchos que existen.

j) *Desarrolla estrategias para cualquier ciudadano*

Las estrategias heurísticas empleadas en los problemas matemáticos son extensibles a los problemas cotidianos presentes y futiros, por lo que los alumnos se convierten en individuos más competentes y capaces de enfrenarse a situaciones nuevas.

Los apartados anteriores conforman lo que serían las características deseables en cualquier alumno (deseables como características y como elementos para reflexionar) aunque existen más.

Por último, una característica que debe estar presente en toda persona

k) *Favorece la capacidad reflexiva del alumno*

No sólo es importante que los alumnos se enfrenten a problemas, sino que sean capaces de discutir sus propios procesos de resolución. Por ello, la reflexión sobre los procesos de resolución debe ser tenida en cuenta en el diseño de cualquier actividad (escolar o no) de RP y, consecuentemente, erigirse como instrumento de aprendizaje de la RP.

3.3 Fases en la RP

Sobre las diferentes fases de la RP mucho se ha escrito; no obstante de manera general se entiende que cualquier resolutor puede transitar por momentos en los que trata de comprender el enunciado, otros en los que intenta elaborar un plan, que a continuación ejecuta, y por otros momentos en los que revisa lo que ha hecho o trata de extender o generalizar el problema. Son las fases de:

a) Comprensión

b) Planificación

c) Ejecución

d) Verificación

Son muchas las etiquetas que se han colocado a las fases, hoy día existe cierto consenso en que, bajo una denominación u otra, son las anteriormente citadas. En cuanto a los heurísticos, Schoenfeld (1980) considera que un heurístico es una insinuación o sugerencia general o estrategia, independiente de cualquier tópico particular o materia de estudio, que ayuda al resolutor a aproximarse y comprender un problema y ordenar eficientemente sus recursos para resolverlo. Con esta definición Carrillo (2001) propone la siguiente lista de heurísticos, clasificados en función de las diferentes fases por las que transita un resolutor cuando se enfrenta a un problema.

 ISSN 1988-3145

3.4 Heurísticos para la fase de comprensión

- Imaginar mentalmente la situación. Releer el enunciado. Seleccionar el material adecuado. Disponer de un modelo manipulativo. Utilizar algún tipo de esquema gráfico (dibujar un diagrama).
- Ejemplificar Imponer a un ejemplo las condiciones del enunciado. Examinar casos especiales.
- Expresar en otros términos Formular con otras palabras la situación descrita en el enunciado. Introducir notación adecuada.

3.5 Heurísticos para la fase de planificación y exploración

- Simplificar Usando simetría o sin perder generalidad. Descartando casos. Eliminando una condición. Explotando el papel de una sola variable o condición. Imponiendo condiciones a las variables.
- Estimar
- Buscar regularidades con intención de generalizar
- Tantear aleatoria o sistemáticamente
- Considerar problemas equivalentes. Reformulando el problema cambiando de notación o de perspectiva. Reemplazando condiciones por equivalentes. Combinado los elementos de diferentes formas. Introduciendo elementos auxiliares.
- Argüir por contradicción. Búsqueda de contraejemplos
- Asumir la solución.
- Partir de lo que se sabe.
- Planificar de forma jerárquica la solución
- Descomponer el problema
- Explorar problemas similares
- Conjeturar.

3.6 Heurísticos para la fase de ejecución

- Registrar todos los cálculos
- Resaltar los logros intermedios
- Actuar con orden y precisión
- Explicar el estado de la ejecución

3.7 Heurísticos para la fase de verificación

- Analizar la consistencia de la solución Comprobar si se usan todos los datos pertinentes. Ver si la solución es razonable. Ver si la solución resiste ensayos de simetría, análisis dimensional, condiciones de equivalencia o cambio de escala. Concretar en casos particulares. Analizar la posibilidad de reducir la solución a resultados conocidos.
- Expresar de otra forma la solución
- Analizar la consistencia del proceso Evaluar la adecuación de la representación del problema. Describir esquemáticamente el trabajo. Analizar la corrección de cada paso. Evaluar la conveniencia de cada estrategia. Analizar la consistencia de los resultados intermedios con los planes existentes y las condiciones del problema.
- Analizar si se puede llegar al resultado de otra manera.
- Generalizar. Ver si se puede utilizar la solución para genera algo conocido. Proponer generalización (método o resultado) de manera informal o formalmente.

A modo de resumen: para resolver bien los problemas se debe poseer un conocimiento profundo de la materia, dominar una serie de técnicas (estrategias) heurísticas y ser capaz de regular el proceso de resolución en cuanto a la aplicación de sus conocimientos y estrategias. Se insiste mucho en que los estudiantes hagan, lo que es muy importante, pero no debe olvidarse la necesidad y la conveniencia de que también reflexionen sobre lo que hacen. Si pretendemos mejorar la capacidad de nuestros alumnos ente la resolución de problemas, hemos de propiciar las ocasiones en las que reflexione sobre su proceder.

3.8 Dominios inexplorados

Hay muchos dominios matemáticos casi inexplorados en la Enseñanza Primaria y/o Secundaria que, organizados de una manera original y creativa, permitirían el diseño de actividades del aula enriquecedoras. Por ejemplo, estaría bien explorar y trabajar en:

- Teoría de grafos y Optimización
- Teoría del Caos
- Topología
- Tratamiento de la Información
- Teoría de códigos y criptografía
- Modelos matemáticos
- Fractales
- Etc...

Muchos de estos dominios pueden ser planificados de manera que puedan transformarse en potentes generadores de importantes competencias, no sólo matemáticas, sino de carácter transversal.

4 Modelización matemática

En la presentación ulterior de varios ejemplos sobre modelización, para diferentes niveles de enseñanza, cada uno de ellos ilustrativo de los diferentes niveles de complejidad que pueden aparecer en el proceso de mate matización, se va haciendo explícito el marco teórico que fundamenta globalmente cada uno de los pasos dados, los enfoques adoptados o los resultados obtenidos.

Modelar matemáticamente significa que con el desarrollo de los ejemplos se pone también de manifiesto las conexiones entre la resolución de problemas y el proceso de creación y descubrimiento en matemáticas; en definitiva, conseguir el descubrimiento o la creación de modelos y teorías, es uno de los objetivos.

En cuanto al papel que asume el alumno o alumna en el proceso, es similar al que vive un matemático en el desarrollo de una investigación, sólo hay una diferencia: el nivel de los conocimientos con los que se trabaja (los casos que se van a estudiar pueden corresponder a diferentes niveles de enseñanza: Secundaria, ESO, Bachillerato e incluso Universidad).

Soy consciente de la dificultad que entraña tratar este tema en determinados niveles de enseñanza pero me gustaría formular y fundamentar algunas ideas para justificar el concepto de modelización:

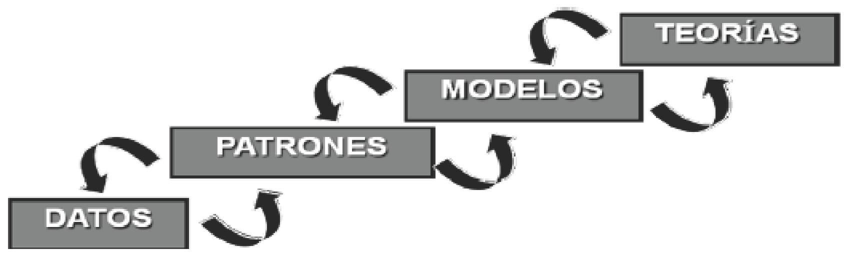
- ¿Qué aspectos del proceso de creación y/o descubrimiento en Matemáticas debemos focalizar para que al ser llevados al aula podamos conseguir los objetivos didácticos que nos hayamos planteado?
- ¿Podemos en Secundaria o Bachillerato, con el alumnado de estas edades, vivir el proceso utilizando como marco teórico algunas ideas sobre el mismo junto con los modelos de RP?

Por otra parte, a la hora de plantearnos llevar el tema al aula, debemos hacer explícitos los objetivos didácticos que nos vamos a plantear. En nuestro caso son los siguientes:

- Profundizar en los métodos propios de investigación en matemáticas: la particularización, la búsqueda de leyes generales, la construcción de modelos, la generalización, el uso de analogías, conjeturas y demostraciones.
- Utilizar modelos matemáticos para la mate matización de la realidad y la resolución de problemas, experimentando su validez y utilidad, criticando sus limitaciones, mejorándolos y comunicando sus resultados y conclusiones.
- Practicar la resolución de problemas como la actividad más genuina en cualquier campo específico de las matemáticas.
- Acercar a los alumnos y alumnas a los conocimientos matemáticos priorizando el planteamiento y resolución de retos, la búsqueda de modelos explicativos, la indagación y el descubrimiento.
- Propiciar que los alumnos/as vean el verdadero rostro de las matemáticas, asumiendo en muchos momentos el papel de matemático investigador.
- Preparar a nuestros estudiantes para la invención, incrementando el gusto por ella y regando sus gérmenes inventivos.

- Aumentar la cultura matemática de nuestros alumnos y alumnas, desechando creencias erróneas sobre la naturaleza del conocimiento y quehacer matemático y sus resultados.

Estos planteamientos didácticos deben ir acompañados de una reflexión personal sobre las principales ideas que pueden ayudar a situarnos en cada momento o a explicarnos, de manera coherente, el tipo de situaciones que están pasando o que nos vamos encontrando. Conviene recordar los distintos niveles de resultados, que podemos obtener en el tratamiento de la información a lo largo del proceso:



Si nos centramos en la construcción de modelos, nuestro marco de referencia sitúa esta tarea dentro del proceso de matematización de la realidad, caracterizado también por la puesta en práctica de estrategias de pensamiento útiles en cada fase.

5 Estudio de casos

5.1 La Resolución de Problemas en Geometría: Problema de Dobögókó

La Geometría, además de un conjunto de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes, consiste, sobre todo, en describir y analizar propiedades y relaciones, y en clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención.

Con este problema de optimización de un caso de la vida real, presentamos el estudio y desarrollo de algunas formas geométricas y expresiones que aparecen en el espacio que configura el hábitat de unos pájaros en los jardines del Hotel Manreza en la provincia de Dobögókó en Hungría a unos 60 kms. de Budapest como consecuencia de la observación directa del autor.

5.2 Contextualización del problema

Situación.

Los jardines del Centro de Convenciones de Manresa (Dobögókó), un poblado de tilos, plátanos y una gran variedad de coníferas.

Figura 1: Jardines del Centro de Convención Manreza (Dobögókó).

Información.

Había carteles con información acerca de los hongos y los pájaros de ese entorno. Como una invitación a proteger a las aves se muestran al visitante algunos modelos de casitas que pueden ser construidas como refugios para aquéllas. En cada caso se incluye un croquis y las medidas para facilitar la construcción.

La mayoría de los modelos tiene la forma de un paralelepípedo, salvo uno- particularmente interesante-que se asemeja a un prisma recto de base triangular.

Figura 2: Hábitat para pájaros (Casita).

5.3 Cuestión: El problema de Dobögókó

Para la construcción de la casita –veáse Figuras 2 y 3– y como el refugio ha de adosarse a un tronco cilíndrico, con las medidas que aparecen en la figura 3, hallar el radio mínimo del tronco al que puede adherirse el refugio de modo que su altura sea de por lo menos de 8 centímetros.

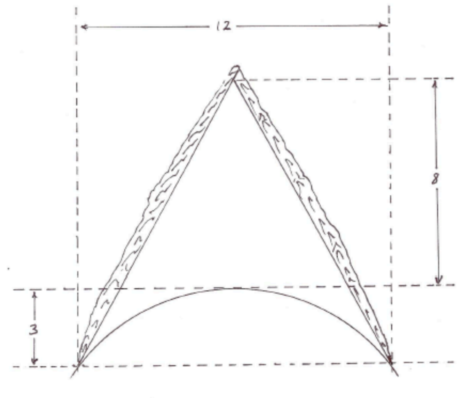


Figura 3: Croquis del hábitat.

Resolución.

Sugerencias a las formas de resolución

Es importante que el alumno/a se ejercite en la toma de decisiones en función de criterios. Este es un problema que les puede proporcionar la oportunidad de decidir los criterios en función de los cuales un radio va a convenir más que otro. Respuestas basadas en que los pajaritos deben tener una vivienda amplia, o que el circulo de entrada sea suficiente estable para evitar que entren otros inquilinos no deseables. De cualquiera de las maneras debe tratarse de dirigir al alumno/a hacia criterios que puedan modelizarse matemáticamente, emergiendo el criterio de adosamiento al árbol (tronco cilíndrico). Esto debe dar motivos para, según el nivel de enseñanza donde nos encontremos, abordar el problema de diferentes maneras. En cualquier caso, una cuestión específica sería averiguar el radio mínimo con los datos que se han proporcionado.

También el alumno debe enfrentarse a este problema con la capacidad de discutir su propio proceso de resolución, intentando ver o descubrir las diferentes formas de resolución. Para ello debe tener claro las fases y los heurísticos a emplear en la resolución del problema concreto planteado:

a) Comprensión

b) Planificación

c) Ejecución

d) Verificación

En función de las diferentes fases por las que un alumno/a debe transitar en la resolución de problemas está claro que puede utilizar los heurísticos correspondientes. Haremos especial énfasis en algunos de éstos según sean en cada uno de los modelos de resolución que planteamos.

MODELO 1. Utilización del teorema de Pitágoras Esta aproximación al problema trata de reunir el uso de incógnitas con varios temas geométricos y fórmulas del *Teorema de Pitágoras*. En el triángulo $OO'B'$, llamamos a $B'C' = L$. Como $OO' = r - d$ y $B'O' = L/2$ se tiene

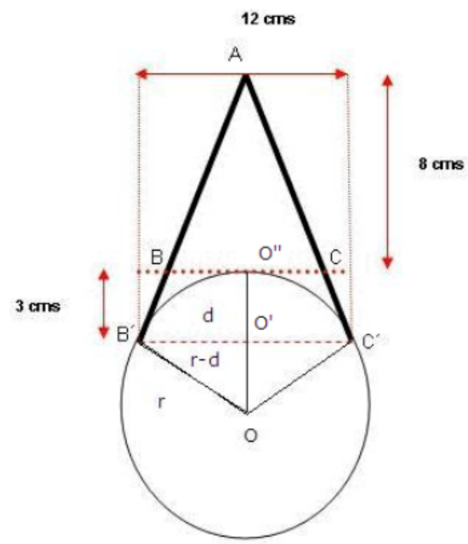


Figura 4: Esquema disposición del hábitat.

$$r^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (r-d)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{4} + r^2 + d^2 - 2rd \Rightarrow r = \frac{L^2+4d^2}{8d}.$$

Una primera restricción que determina el radio del tronco en que se sitúa la casita del croquis donde $L = 12$ y $d = 3$ se tiene que

$$r = \frac{12^2 + 4\cdot 3^2}{8\cdot 3} = \frac{144+36}{24} = \frac{180}{24} = 7.5.$$

MODELO 2. Utilización del Teorema de Thales

En desarrollos anteriores no ha aparecido el número 8 que se refleja en el croquis de la Figura 3 de los paneles informativos del jardín. Surge, por tanto, la pregunta, ¿por qué aparece en el croquis junto al árbol el número 8 que representa la altura del triángulo ABC en la Figura 5?

Para dar respuesta a esta interesante cuestión e intentar justificar la presencia del número 8, apliquemos el **Teorema de Thales** al triángulo AB'O' que aparece en la Figura 6. Con la identificación de los triángulos semejantes del croquis, se cumple que $\frac{B'O'}{O'A} = \frac{BO''}{O''A}$, por lo que tenemos $B'O' = O'A'\left(\frac{BO''}{O''A}\right)$.

Por lo tanto se obtiene la siguiente relación $\frac{L/2}{b} = \frac{d+h}{h}$ siendo h la altura del triángulo ABO", y b la mitad de la base del triángulo ABC. Tomando los datos que aparecen en el croquis para $L = 12$, y por lo tanto $d = 3$ como se ha demostrado ut-supra, se tiene la relación entre h y b

$$h = \frac{3b}{6-b}.$$

Al llegar a esta expresión en un intento de que el alumno/a pueda comprobar la consistencia de la heurística empleada puede ensayar dándole valores a b y su correspondiente h.

Por ejemplo, dándole a $h = 8$ se tiene que $b = \frac{48}{11}$. Este resultado debe ser consistente ya que aplicando el *teorema de Thales* en la Figura 7, para los valores $h = 8$ y $d = 3$ se tiene

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{8}{11} \Rightarrow AB = AB'\left(\frac{8}{11}\right).$$

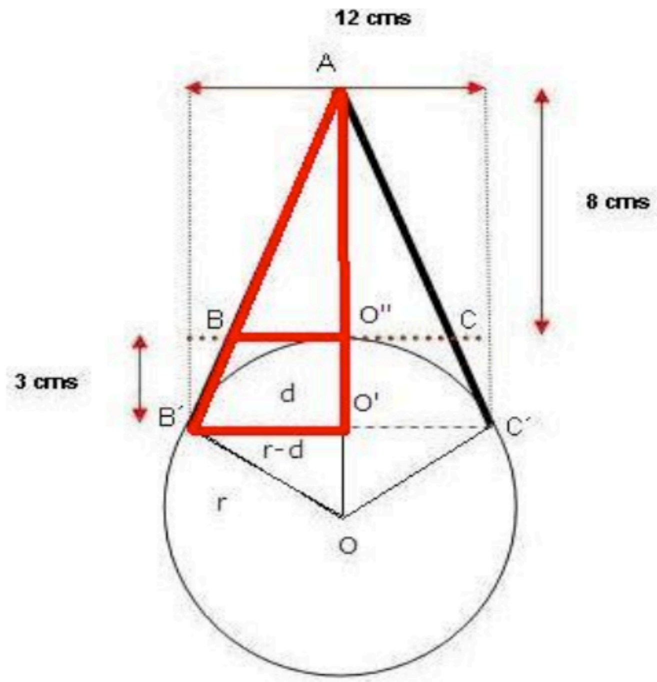


Figura 5: Esquema disposición del hábitat.

Aplicando el *teorema de Pitágoras* en el triángulo AB'O' se obtiene $AB' = \sqrt{36+121} = \sqrt{157}$ por lo que $AB = \frac{8}{11}\sqrt{157}$. De aquí podemos calcular

$$b = BO''\sqrt{AB^2 - (AO'')^2} = \sqrt{\frac{157 \cdot 64}{121} - 64} = 8\sqrt{\frac{157-121}{121}} = 8\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{48}{11}.$$

Utilizando el *teorema de Thales* se ve que el heurístico de consistencia en la fase de verificación hace que el valor de la altura $h = 8$ en el triángulo ABC no sea un valor elegido al azar.

MODELO 3. Utilización del Cálculo Diferencial

Este problema podía ser tratado en nivel superior usando algunos conceptos de Cálculo Diferencial. De una manera genérica si trabajamos el proceso en 3D, y considerando a como una función de dos variables L y d, se trata de una función escalar

$$\begin{array}{cccc} r & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (L,d) & \mapsto & \frac{L^2+4d^2}{8d}, \end{array}$$

de dos variables reales definidas en todo $\mathbb{R}^2$ excepto para $d = 0$ (que justifica el hecho de la imposibilidad de construir una casita con un sólo punto de tangencia con el árbol. ¡Se tendría una casita inestable!).

A partir de aquí podemos pensar en niveles superiores de enseñanza, por ejemplo en un primer curso de Universidad, y hacer ver a nuestros alumnos como a partir de un ejercicio sencillo de la vida real, caso u objeto, podemos llegar a introducirnos en estudio detallado de EXISTENCIA DE EXTREMOS (Máximos y mínimos) EN CAMPOS ESCALARES:

a) Comprobación de los teoremas que permiten determinar si un punto crítico de un campo escalar es máximo, mínimo o punto de silla mediante una condición algebraica de la matriz jacobiana del campo escalar en el punto crítico.

b) Introducirnos en el Teorema de Taylor de segundo orden para campos escalares.

c) Deducción de criterios para la clasificación de los puntos críticos de campos escalares para funciones de varias variables, como el caso que nos ocupa a través de las formas cuadráticas y matriz Hessiana.

d) Utilización del método de los mínimos cuadrados como aplicación del cálculo de extremos relativos.

e) Existen ocasiones en las que interesa calcular los extremos relativos de una función escalar cuyo dominio ha sido restringido de alguna manera (¡puede ser nuestro caso: limitación del radio del cilindro (árbol)!). Tendríamos que proponer al alumno que utilice el método de los multiplicadores de Lagrange.

El modelo utilizado puede ser obtenido en tres dimensiones representando superficies cuyo estudio detallado sobrepasa el nivel de enseñanza secundaria.

5.4 La Resolución de Problemas en la Aritmética de los números

La **teoría de números** es la rama de matemáticas puras que estudia las propiedades de los números, en particular los enteros, pero más en general, estudia las propiedades de los elementos de Dominios Enteros (Anillos conmutativos con elemento unitario y cancelación) así como diversos problemas derivados de su estudio. Contiene una cantidad considerable de problemas que podrían ser comprendidos por "no matemáticos". De forma más general, este campo estudia los problemas que surgen con el estudio de los números enteros. Tal como cita Jürgen Neukirch:

"La teoría de números ocupa entre las disciplinas matemáticas una posición idealizada análoga a aquella que ocupan las matemáticas mismas entre las otras ciencias."

Según los métodos empleados y las preguntas que se intentan contestar, la teoría de números se subdivide en diversas ramas:

- Teoría elemental de números
- Teoría analítica de números
- Teoría de números aditiva
- Teoría algebraica de números
- Teoría geométrica de números
- Teoría combinatoria de números
- Teoría computacional de números

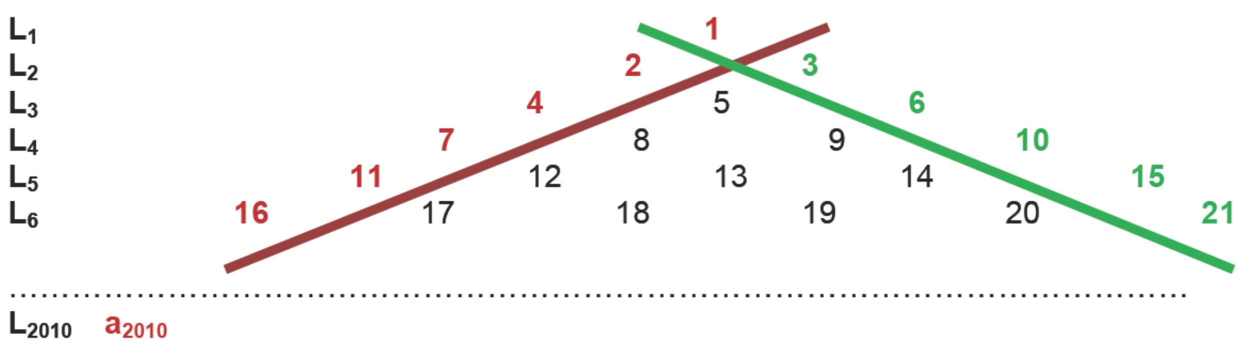
En la teoría elemental de números, se estudian los números enteros sin emplear técnicas procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias. Son enunciados típicos el pequeño teorema de Fermat y el teorema de Euler que lo extiende, el teorema chino del resto y la ley de reciprocidad cuadrática. En esta rama se investigan las propiedades de las funciones multiplicativas como la función de Möbius y la función φ de Euler; así como las sucesiones de números enteros como los factoriales y los números de Fibonacci. Diversos cuestionamientos dentro de la teoría elemental de números parecen simples, pero requieren consideraciones muy profundas y nuevas aproximaciones, incluyendo las siguientes:

- Conjetura de Goldbach
- Conjetura de los números primos gemelos
- Último teorema de Fermat (demostrado en 1995)
- Hipótesis de Riemann sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann, íntimamente conectada con el problema de la distribución de los números primos.
- ...

Lo importante, a nivel de secundaria y en todos los cursos, no son sólo las destrezas de cálculo y los algoritmos de lápiz y papel, sino una comprensión de las operaciones que permita el uso razonable de las mismas, en paralelo con el desarrollo de la capacidad de estimación y cálculo mental que facilite ejercer un control sobre los resultados para detectar posibles errores. Presentemos algunos ejemplos que se pueden considerar como *"joyitas"* de naturaleza aritmética.

JOYITA 1. Sucesión de números naturales en forma triangular

Sea la sucesión de números naturales no nulos escritos así:



a) ¿Cuál es el primer término de la línea 2010 de la tabla anterior?

b) ¿Cuál es el último término de la línea 2010 de la tabla anterior?

c) ¿Cuál es la suma de los términos de la línea 2010?

d) ¿Sabías decir cuál es el primer término de una línea cualquiera?¿Y el último?

Solución

a) En la primera línea, tenemos un número natural, en la segunda dos,...,en la línea 2010 tendremos 2010, luego en total tendremos en la línea 2009:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2009 = \frac{(1 + 2009) \cdot 2009}{2} = 1005 \cdot 2009 = 2019045,$$

Por lo tanto el primer número de la línea 2010 es $2019045 + 1 = 2019046$.

b) El último de la L_{2010} se consigue con la fórmula

$$2019046 + (2010 - 1)1 = 2019046 + 2009 = 2021055.$$

c) La suma de los términos de la línea L_{2010} es:

$$2019045 + 2019046 + ... + 2021055 = \frac{(2019045 + 2021055)2010}{2} = 4060300500.$$

Estimulando al estudiante para que se convierta en agente activo de su aprendizaje, y para que esta actividad de descubrimiento contribuya a tal fin, debemos hacerle ver que esto no es un proceso acabado y que puede encontrar nuevos caminos de resolución.

d) **d.1**. Para resolver este apartado basta con encontrar, para cada primer término de cada línea el término general de la sucesión

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 11 \quad 16 \quad 22 \quad 29 \quad 37 \quad 46...$$

Se trata de una progresión aritmética superior de orden dos:

a_i:	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46............
Δa_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9....................	
$\Delta^2 a_i$:	1	1	1	1	1	1	1	1		
$\Delta^3 a_i$:	0	0	0	0	0	0	0...........................			

Cuyo término general es:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n-1}{k} \Delta^k a_1 = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \\ &= 1 + n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}. \end{aligned}$$

De aquí el primer término de la línea 2010, L_{2010} es:

$$a_{2010} = \frac{2010^2 - 2010 + 2}{2} = 2019046.$$

d.2. Para hallar el último término de la línea L_{2010} razonamos de forma análoga que en el apartado anterior pero en este caso con la progresión aritmética es:

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21 \quad 28 \quad 36 \quad 45...$$

Se trata de una progresión aritmética superior de orden dos:

a_i:	1	3	6	10	15	21	28	36	45............
Δa_i:	2	3	4	5	6	7	8	9............	
$\Delta^2 a_i$:	1	1	1	1	1	1	1	1	1.......................
$\Delta^3 a_i$:	0	0	0	0	0	0	0............................		

Cuyo término general es:

$$\begin{aligned} a_n &= a_n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n-1}{k} \Delta^k a_1 = \binom{n-1}{0} + 2\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \\ &= 1 + 2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2+n}{2}. \end{aligned}$$

Es fácilmente deducible que el término general del número triangular a_n viene dado por la fórmula anterior basta con contar las filas desde arriba De aquí el último término de la línea 2010, L_{2010} es:

$$a_{2010} = \frac{2010^2 + 2010}{2} = 2021055.$$

JOYITA 2. Un número curioso el 6174

Consideremos el número 6174, reordenemos sus dígitos para construir con ellos el mayor número posible; es decir, coloquémoslo en orden decreciente. Reordenémoslo también para construimos el menor número posible y restemos. Obtenemos así:

$$7641 - 1467 = 6174,$$

que es el número con el que empezamos. Consideremos otro número por ejemplo 4959. Obtenemos,

$$9954 - 4599 = 5355.$$

Hasta aquí no parece que haya sucedido nada interesante. Hagamos lo mismo con la diferencia 5355

$$5553 - 3555 = 1998.$$

Nada especial. Seguimos con 1998:

$$9981 - 1899 = 8082 \qquad 8820 - 0288 = 8532 \qquad 8532 - 2358 = 6174.$$

¡Otra vez el dichoso número!

 ISSN 1988-3145

Con respecto a este problema, surgen las siguientes preguntas:

¿Siempre será así? ¿Habrá restricciones al problema?

Las respuestas a estos dos interrogantes las comenzará a vislumbrar el estudiante al notar que esto siempre ocurre, con la única condición que los cuatro dígitos no sean iguales.

A medida que el estudiante se introduzca en la resolución del problema, pueden surgir interrogantes como el siguiente: Si ello siempre ocurre, ¿cuál es el número máximo de restas necesarias para obtener el número 6174? Dado cualquier entero de cuatro dígitos, ¿se puede saber cuántos pasos son necesarios para obtener el 6174? Las respuestas a estos interrogantes las dan las siguientes afirmaciones, que se demostrarán a continuación.

1. Siempre es posible llegar al 6174.
2. El número máximo de pasos es siete.
3. El número de pasos está determinado por la relación entre los dígitos y no por la forma de ellos.

Todos los números de cuatro cifras, ordenadas de mayor a menor, se van a agrupar en algunas de las formas siguientes:

$$9-9, 9-8, ..., 9-0; \quad 8-8, 8-7, ..., 8-0; \quad 7-7, 7-6, ..., 7-0; \quad 6-6, 6-5, ..., 6-0$$

$$5-5, 5-4, ..., 5-0; \quad 4-4, 4-3, ..., 4-0; \quad 3-3, 3-2, ..., 3-0; \quad 2-2, 2-1, 2-0; \quad 1-1, 1-0.$$

En estas agrupaciones, el número 6872 es de la forma $4-1$, donde 4 es la diferencia entre 6 y 2; 1 es la diferencia entre 8 y 7.

El número 8651 es de la forma $7-1$, donde 70 es la diferencia entre 8 y 1; 1 es la diferencia entre 6 y 5.

En general, un entero $pqrs$ es de la forma $x-y$, si se cumple que

$$p-s=x, \qquad q-r=y,$$

después de estar ordenados sus dígitos de mayor a menor.

Se demostrará enseguida la siguiente afirmación:

Todo número $pqrs$ conduce al 6174 en un sólo paso si y sólo si es de la forma $6-2$.

En efecto, sea $pqrs$ ese número. Si es de la forma $6-2$, entonces se cumple:

$$p-s=6; s=p-6 \qquad q-r=2; r=q-2.$$

Escribiéndolo en potencias de 10 de mayor a menor y luego de menor a mayor y restando, se tiene:

$$103p+102q+10(q-2)+(p-6)-\big(103(p-6)+102(q-2)+10q+p\big)=$$

$$6\cdot 103+2\cdot 102-20-6=6\cdot 103+1\cdot 102+7\cdot 10+4,$$

que corresponde a la escritura en base 10 del número 6174.

Por otra parte, sea $pqrs$ con $p\geq q\geq r\geq s$ tal que $pqrs-srqp=6174$.

Necesariamente, $p \geq s$, porque si $p = s$ los cuatro dígitos serían iguales. Como $p > s$, y $s - p = 4$, necesariamente se debe cumplir que $p - s = 6$.

Necesariamente, $q > r$ porque si $q = r$ como se está "llevando 1", entonces $r - q = 9$. Esto no es posible. Luego como $r - q = 7$ y se está "llevando 1" se sigue que $q - r = 2$. De las condiciones

$$p - s = 6, \qquad q - r = 2,$$

Se concluye que el número es de la forma $6-2$. Números de esta forma son 8532, 9863, 6420, etc. A pesar de que el número de pasos necesarios para obtener el 6174 depende de la relación entre los dígitos, es bueno aclarar que a partir del primer paso se obtiene un número completamente determinado.

Así dos números de la forma $4 - 2$, como son 9865 y 7753, dan como resultado después del primer paso, el número 4176.

Dos números de la forma $8 - 4$, como son 8400 y 9621, dan como resultado, después del primer paso, el número 8352.

Después de resuelto este interesante problema, siguen otras preguntas como las siguientes:

¿Qué ocurre si el entero es de 2,3, 5, 6 ó cualquier otra cantidad de dígitos?
Es decir, en estos otros casos qué entero juega el papel que cumple 6174
¿Ocurre lo mismo si el número se escribe en cualquier otra base diferente de la base 10*?*

Con estas cuestiones en el aire se puede trabajar dando lugar a nuevos e interesantes problemas de aritmética.

JOYITA 3. El número de Hardy-Ramanujan: 1729

El 1729 es el llamado **número de Hardy-Ramanujan** es el número natural más pequeño que puede ser expresado como la suma de dos cubos positivos de dos formas diferentes:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

El nombre de estos números proviene de la siguiente historia que tiene como protagonistas a Godfrey Harold Hardy, y Ramanujan:

"Una vez, en un taxi (en inglés taxicab) de Londres, a Hardy le llamó la atención su número, 1729*. Debió de estar pensando en ello porque entró en la habitación del hospital en donde estaba Ramanujan tumbado en la cama y, con un "hola" seco, expresó su desilusión acerca de este número. Era, según él, un número aburrido, agregando que esperaba que no fuese un mal presagio. No, Hardy, dijo Ramanujan, es un número muy interesante. Es el número más pequeño expresable como la suma de dos cubos positivos de dos formas diferentes".*

Hardy, a continuación, le preguntó si conocía la respuesta para las cuartas potencias. Ramanujan contestó, tras pensarlo un momento, que no podía ver la respuesta, pero que pensaba que debía ser un número extremadamente grande. De hecho, la respuesta, obtenida mediante cálculos con ordenador, es

$$635318657 = 134^4 + 133^4 = 158^4 + 59^4.$$

De una generalización de esta propiedad surgen los llamados números Taxicab.

JOYITA 4: Los números taxicab

Se dice que un número es el enésimo **número taxicab** si es el menor número que se puede descomponer como n sumas distinta de dos cubos positivos. El nombre de estos números deriva del origen del número de Hardy-Ramanujan. Los números taxicab conocidos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
T_a(1) &= 2 = 1^3 + 1^3 \\
T_a(2) &= 1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 \\
T_a(3) &= 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3 \\
T_a(4) &= 6963472309248 = 2421^3 + 19083^3 = 5436^3 + 18948^3 \\
&= 10200^3 + 18072^3 = 13322^3 + 16630^3 \\
T_a(5) &= 48988659276962496 = 38787^3 + 365757^3 \\
&= 107839^3 + 362753^3 \\
&= 205292^3 + 342952^3 = 221424^3 + 336588^3 \\
&= 231518^3 + 331954^3
\end{aligned}$$

NOTA: Además se conocen valores límite para $T_a(6)$. Se sabe que es mayor que 6.8×1019 y menor o igual que 24153319581254312065344.

5.5 La resolución de problemas a través de las matemáticas vivas en la sociedad

Las perspectivas fenomenológicas que dirigen la atención hacia los diferentes fenómenos o situaciones que enfrenta el que aprende matemática y cómo un mismo fenómeno social es visto desde la perspectiva individual del que aprende, han producido el substrato para nuevos enfoques que centran la investigación en lo que los alumnos comprenden y conciben como resultado de su experiencia individual. Veamos una aportación interesante.

Matemáticas y cine

Material

Desde hace algún tiempo se ha recurrido al cine como medio motivador de la divulgación de casi cualquier disciplina o asunto. Así, hemos visto anunciados ciclos de películas, conferencias y hasta se han venido editando libros y publicaciones con títulos que relacionan el cine con la arquitectura, la música, la pintura, el fútbol, la Guerra Civil, la literatura, la abogacía, etc., temas de lo más variado y, en ocasiones, pintoresco. Y es que el cine nos permite acercarnos a conocimientos de los que posiblemente nunca habríamos tenido referencia de otro modo (acontecimientos históricos de diferentes países, obras literarias, lugares y paisajes de recónditos parajes, etc.), prácticamente sin darnos cuenta, con poco esfuerzo, en nuestro tiempo de ocio.

La presencia de las Matemáticas en el cine se produce a muy diferentes niveles:

a) En ocasiones se trata sólo de una escena centrada en un aspecto matemático (así sucede, por ejemplo, en *El crimen desorganizado, Jungla de cristal 3, 1492 La conquista del Paraíso, El día de la Bestia, Amanece que no es poco o El enigma de Kaspar Hauser*) o incluso varias escenas (*El Código Da Vinci*).

b) Otras veces el protagonista es matemático de profesión o alguien dotado de gran talento matemático. En esos casos, su oficio y sus capacidades no son mera anécdota, sino que, para bien o para mal, impregnan de un cierto estilo toda la trama de la película. Hay historias reales (*Enigma, Una mente maravillosa, Galileo, 21 Blackjack*) y también de ficción (*Contact, Moebius, Pi. Fe en el caos, Cube, Proof, Numb3rs, La habitación de Fermat, Los crímenes de Oxford*). Unas y otras se mueven en los terrenos de lo heroico, épico, fantástico o misterioso; no de lo cotidiano.

c) Sólo en *Lecciones inolvidables* las Matemáticas están en el núcleo de una historia de gente corriente, que además es real y con fuerte contenido social.

d) En *Primer*, el método matemático guía el desarrollo de la trama.

e) Hay títulos de divulgación cuya puesta en escena o su fin de entretenimiento hacen que sobrepasen el género documental y pasen a lo cinematográfico (*Donald en el País de las Matemágicas, Cosmos y Universo Mecánico*).

f) También, algunas rarezas presentadas, no por su interés, sino como algo curioso y sorprendente (*Manga, Francisco el Matemático, etc.*).

En este sentido, pretendemos poner de manifiesto que se pueden promover actividades para llevar al aula, interactivas, para trabajar con lápiz y papel, calculadoras, etc., tomando como base algunas escenas de una película, intentando fomentar el gusto por las Matemáticas a través del cine. ¡Puede parecer extraño! Hemos elegido el film *La jungla de cristal 3*, porque aunque haya sido elegido y tratado por profesionales de educación matemática (profesores e investigadores), el enfoque que le hemos dado nos permite llegar a la formalización de varios e interesantes conceptos matemáticos.

g) Escena: Tomamos la escena que se sitúa entre los minutos $55:30$ y $59:50$ del film.

h) Nivel: Cualquier curso de ESO.

i) Tópico: Álgebra.

j) ¿Qué hacer en el aula? Este conocido problema aparece en casi todas las colecciones de textos de ESO, sin que corresponda a uno u otro curso. Por eso, tras resolverlo en clase, resulta muy curioso y divertido para el/la estudiante ver los apuros que se pasa frente al problema de un héroe cinematográfico.

Argumento y contextualización.

La película *La Jungla de Cristal 3* pone de manifiesto que la matemática puede resolver situaciones perversas: neutralizar una bomba a través de la resolución de un enigma.

Un hombre que se llama a sí mismo *Simon* (interpretado por Jeremy Irons) inicia una oleada de terror por las calles de New York. *Simon*, como astuto terrorista, explota una bomba en un concurrido centro comercial de Nueva York y después revela la existencia de más explosivos que amenazan a la ciudad. El detective *John McClane* (interpretado por Bruce Willis), en la tercera entrega de esta exitosa saga, tendrá que superar las sucesivas pruebas a que le somete el perverso terrorista, con la compañía de Zeus (interpretado por Samuel L. Jackson), un héroe ocasional.

Una de esas pruebas consiste en desactivar una bomba que está en una fuente de un parque y explotará en 5 minutos a menos que *McClane* consiga depositar sobre ella exactamente 4 galones de agua. Para ello dispone de dos garrafas sin graduar: una de 3 galones y otra de 5. El detective y su acompañante se enzarzan en una discusión sobre cómo conseguirlo, que

Figura 6: Jeremy Irons

Figura 7: S.L. Jackson y B. Willis

pronto deriva a terrenos personales. Entre gritos y sobresaltos, cuando el tiempo ya se está acabando, como es de rigor en estos casos, lo consiguen.

Problema

En la película aparece como unidad de medida el galón. El galón es una unidad de volumen que se emplea en los países anglófonos, y sobre todo en Estados Unidos, para medir volúmenes de líquidos. Antiguamente, el volumen de un galón dependía de lo que se estaba midiendo, y dónde. Sin embargo, en el siglo XIX existían dos definiciones de uso común: el galón de vino (*wine gallon*), y el galón de cerveza británico (*ale gallon*). Equivale a 4.546 litros en Gran Bretaña y 3.785 litros en Estados Unidos de América. Nosotros vamos a utilizar para nuestro razonamiento la unidad el litro, que como sabemos es la unidad de capacidad del Sistema Internacional, cuyo símbolo es l. Se define como el volumen de un kilogramo de agua destilada a 4^oC y equivale a $1dm^3$.

Se dispone de dos bidones de 3 y 5 litros respectivamente. Estos bidones están cerca de una fuente y es necesario medir exactamente 4 litros de agua. Con toda seguridad, nos atrevemos a afirmar que el/la lector/a ha visto la película, y como los protagonistas resuelven el enigma. Este es un problema que se puede utilizar como recurso atractivo en el aula.

Figura 8: Discusión para el uso de la estrategia de resolución del acertijo.

Figura 9: B. Willis y S.L. Jackson en acción traspasando agua en los bidones.

Solución

Si reflexionamos un poco, la solución es simple. Veamos los pasos.

Paso 1: Se llena el bidón A de 3 litros y se vierte el contenido en el bidón B de 5 litros. Representemos la situación en la figura siguiente:

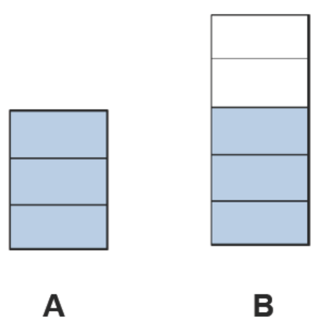


Figura 10: Paso 1, traspaso de agua entre los bidones A y B.

Paso 2: Se llena de nuevo el bidón A, y se vierte el contenido en el bidón B hasta el momento en que se llene. ¿Cuál es la situación ahora? En el bidón A hay 1 litro, y el bidón B está lleno.

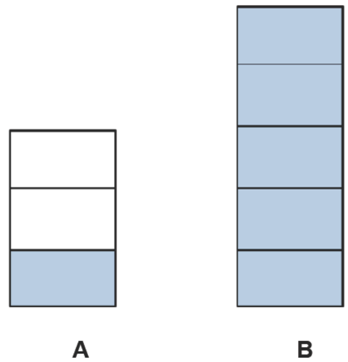


Figura 11: Paso 2, traspaso de agua entre los bidones A y B.

Paso 3: Se vacía el bidón A y se vierte el contenido de 1 litro que hay en el bidón A al bidón B

Figura 12: Paso 3, traspaso de agua entre los bidones A y B.

Paso 4: Se rellena de nuevo el bidón de 3 litros y se vierte en el bidón de 5 litros. Obtenemos entonces los 4 litros solicitados.

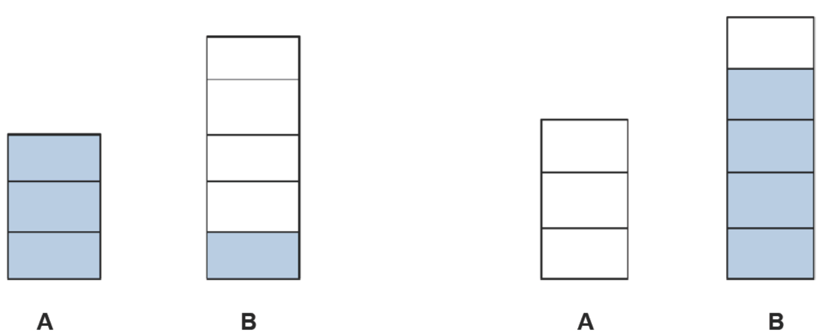


Figura 13: Paso 4, traspaso de agua entre los bidones A y B.

NOTA: El gran matemático francés *Siméon Denis Poisson* (1781-1840) puso de manifiesto el interés de las matemáticas por la resolución de este tipo de problemas.

PROFUNDIZANDO EN EL PROBLEMA.

Con el bidón A, de 3 litros, se pueden obtener $3, 6, 9, ..., 3a, ...$ litros con $a \in \mathbb{N}$, y con el bidón B, de 5 litros, se obtienen $5, 10, 15, ..., 5b, ...$ litros con $b \in \mathbb{N}$.

NOTA: Si se quiere obtener 4 litros, es necesario utilizar los dos bidones y cómo $4 \neq 3a + 5b \ \forall a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: , es necesario verter el agua de un bidón a otro; esto demuestra la necesidad de utilizar números enteros negativos en la resolución del problema.

Por eso la solución adoptada en la película por *B. Willis* y *S.L. Jackson*, se puede escribir como: $4 = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 5$, es decir $a = 3$ y $b = -1$.

¿Se puede obtener cualquier número de litros de agua?

El hecho de obtener un litro manipulando los dos bidones de la forma $1 = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5$ es un resultado interesante, porque permite, reiterando el proceso, obtener un número cualquiera de litros. Así se puede obtener:

a) 4 litros multiplicando por 4 la expresión anterior: $4 \cdot \big(1 = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5\big) \Rightarrow 4 = 8 \cdot 3 + (-4) \cdot 5.$

b) 5 litros multiplicando por 5 la expresión anterior: $5 \cdot \big(1 = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5\big) \Rightarrow 5 = 10 \cdot 3 + (-5) \cdot 5.$

c) En general, cualquier cantidad L multiplicando por L la expresión anterior:

$$L \cdot \big(1 = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5\big) \Rightarrow L = 2L \cdot 3 + (-L) \cdot 5.$$

Notas: * Está claro que no es la solución más económica, por lo que si se solicita menos manipulaciones es necesario un recipiente suplementario que permita almacenar los litros de agua que se vayan midiendo.

** ¡Es evidente que existe infinidad de otras maneras de obtener 4 litros!

*** Este es el momento para proponer en clase que se intente obtener otras soluciones.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA. TEORÍA DE NÚMEROS EN EL PROBLEMA DE LOS BIDONES DE AGUA.

Teorema (Conocido como la identidad de Bezout, en honor al matemático francés Étienne Bézout nacido en Nemours el 31 de marzo de 1730 y muerto en Avon el 27 de septiembre de 1783).

Sea d el máximo común divisor de $a, b \in \mathbb{Z}^+$: $d = \text{mcd}(a, b)$. Entonces existen dos números enteros x,y tales que:

$$ax + by = d. \tag{4.1}$$

No vamos a hacer la demostración pero si queremos notar lo siguiente:

a) Indicar que se trata de una recta si representamos todos los **valores reales** (x, y) que satisfacen la expresión 4.1.

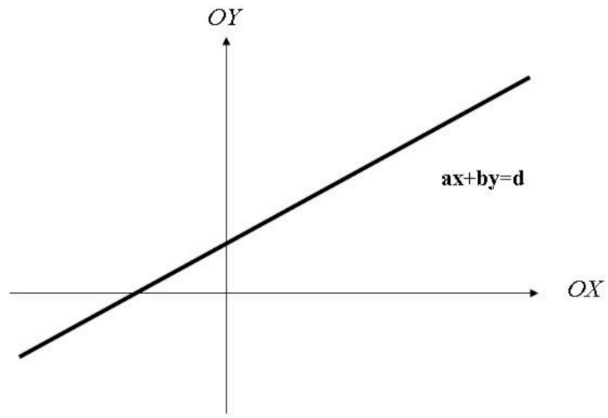


Figura 14: Ecuación de la recta $ax + by = d$.

b) La ecuación $ax + by = d$ posee siempre una infinidad de soluciones en $\mathbb{R}$, como se deduce de la gráfica pero en el caso que nos ocupa deben ser enteros. Se tiene por tanto le que se denomina una *Ecuación Diofántica*.

c) Es un teorema de existencia pero no dice como encontrar las soluciones.

d) En particular, si a y b son números enteros en $\mathbb{Z}^+$ y primos entre sí, entonces existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + by = 1$.

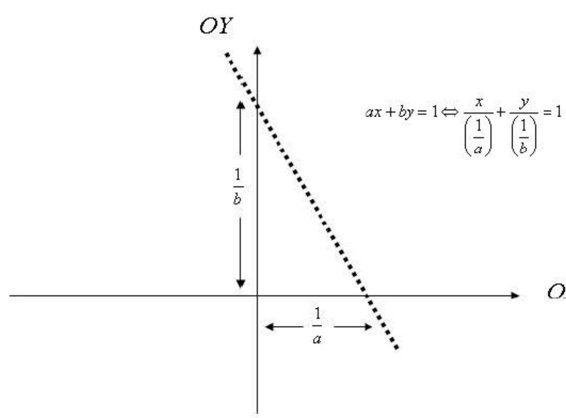


Figura 15: Ecuación de la recta $ax + by = 1$.

Corolario. Si es una solución particular de la ecuación $ax+by = d$, entonces $(x_0+b\alpha, y_0-a\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$ es la solución general de la ecuación 4.1.
Ejemplo La resolución consiste en encontrar una solución particular de la ecuación y de ahí deducir la solución general. Consideremos el caso donde los coeficientes son pequeños. Por tanteo se puede encontrar rápidamente una solución. Por ejemplo, tomemos la ecuación $8x + 3y = 1$, que es equivalente a $3y = 1 - 8x$. Despejando y en función de x: $y = \frac{1-8x}{3}$. Basta con tomar un valor de x para que $1 - 8x$ sea múltiplo entero de 3. Ensayando por tanteo:

$$x = 0 \quad y = \tfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z},$$
$$x = 1 \quad y = -\tfrac{7}{3} \notin \mathbb{Z},$$
$$x = 2 \quad y = -5 \in \mathbb{Z}.$$

Rápidamente se ha encontrado que $(2,-5)$ es una solución de la ecuación $8x+3y=1$. Ello quiere decir que el punto $(2,-5)$ pasa por la recta $8x+3y=1$. Al objeto de evitar puntos por donde pasa la recta de coordenadas no enteras, encontremos otro punto donde las coordenadas sean enteras.

Es fácil comprobar que $x=5$ e $y=-13$ satisfacen la ecuación citada. Ya podemos representar la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(2,-5)$ y $B(5,-13)$.

De aquí se deduce que la solución general de la ecuación diofántica $8x+3y=1$: es $(2+3\alpha,-5-8\alpha), \qquad \forall\alpha\in\mathbb{Z}$..

6 Reflexión final

He pretendido, no sé si lo habré logrado, tomando algunos ejemplos, unos originales y otros no, ver como podemos innovar en el dominio de la infraestructura escolar con la concepción y puesta en escena de lo que podrían ser los `Laboratorios de Matemática Creativa` donde los alumnos/as y los/as enseñantes validen diversos prototipos de materiales que den soporte al estudio de las Matemáticas para MODELIZAR DIFERENTES SITUACIONES y para realizar actividades creativas diversas.

A lo largo de la exposición sólo he mostrado, algunas actividades teóricas y/o prácticas y teniendo como fondo la Resolución de Problemas, la concepción y la puesta en obra se puede abordar con:

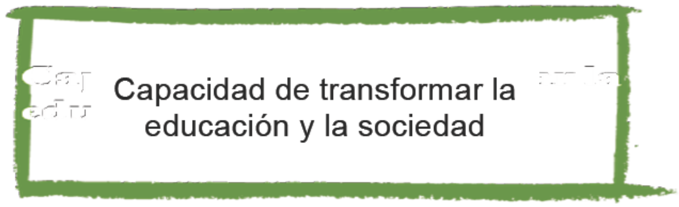
- La radio y el teatro matemáticos.
- Matemática y fotografía.
- Poesía y matemática.
- Videos matemáticos.
- Matemáticas y cine.
- Matemáticas en otras disciplinas.
- Matemáticas y cocina.

Son algunos de los campos dónde, estudiantes y enseñantes, con imaginación pueden conseguir importantes INNOVACIONES.

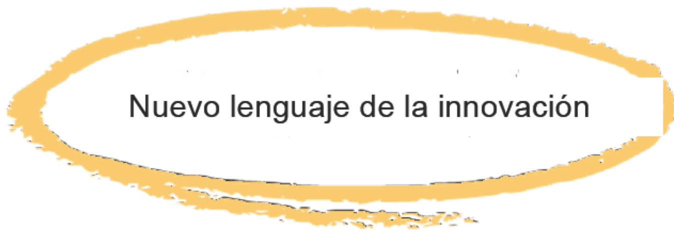
A modo de conclusión final, en torno a procesos de innovación en el actual momento procesal de la Educación en nuestro país, en los diferentes niveles, ante las cuestiones que me planteaba al principio de mi intervención:

- **¿Sucede con frecuencia...pero que ya está todo inventado y no hay nada nuevo?**
- **¿Habría que utilizar argumentos...un cambio en los planteamientos educativos?**

Si hay que administrar nuevos elementos en Educación Matemática...hay que tener



para generar una cultura de la innovación. Para ello necesitamos



un lenguaje fundamental para compartir ya que: *"sin lenguaje es posible pensar, es difícil conocer y es imposible comprender"*(Jorge Wagensberg).

Si *"Innovar es introducir novedades en alguna cosa"*, el reto podría ser pasar de

• La innovación como suceso

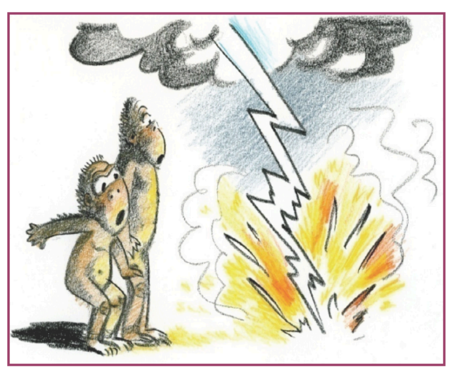


Figura 16: Innovación como suceso.

a

• La innovación como proceso

Figura 17: Innovación como proceso.

En resumen, la innovación se inspira en ATREVERSE, superar los miedos y cambiar de perspectiva. *"El miedo nos indica que estamos entrando en un territorio desconocido, el miedo es la membrana que separa lo nuevo de lo conocido y constituye, así, un interesante indicador de que estamos a punto de abrirnos a algo superior al mundo que estamos acostumbrados"* (J.Kornfield).

Figura 18: Miedo a lo desconocido.

Referencias

[1] Atweh, B; Forsgaz, H; Nebres, B. (Eds). Sociocultural Research on Mathematics Education. An international perspective. 2001. Bishop, A.J. Second International Handbook of Mathematics Education. Kluwer Academic. 2003.

[2] Hernán González G. Innovar en educación matemática. Santiago de Chile. 2002.

[3] Knapp, Michael S. Between Systemic Reforms and the Mathematics and Science Classroom: The Dynamics of Innovation, Implementation, and Professional Learning. NISE. 1997. Univ. Wisconsin.

[4] Lane, S. The Conceptual Framework for the Development of a Mathematics Performance Assessment Instrument. Educational Measurement: Issues and practice. Wiley Interscience. 2005.

[5] Perie, M.; Marion, S.;Gong,B. Moving Toward a Comprehensive Assessment System: A Framework for Considering Interim Assessments.Vol. 28. Wiley Interscience. 2009.

[6] Romero, S. Las matemáticas y la atención a la diversidad. Un ejemplo de aplicación para alumnos con NEE´s. Rev. UNIÓN. 2007.

[7] Romero, S; Castro, F. Modelización matemática en Secundaria desde un punto de vista superior. El problema de Dobogókó. Vol.2. Modelling in Science Education and Learning. 2008. Valencia.

[8] Romero. S. Competencias Matemáticas y otras Áreas Interdisciplinares. III Jornadas de Educación Matemática. Competencias matemáticas y diferentes áreas del currículo. Huelva. 2010.

[9] Ruthven, K. Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology. In Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds.). International handbook of mathematics education. Kluwer. 1996.

[10] Sierpinska, A; Kilpatrick;J. Mathematics Education as a Research Domain: A search for identity. Kluwer Academic. 1997.

[11] Algunos enlaces:

http://www.elboomeran.com/obra/496/ulises-perseo/

http://www.mathunion.org/icmi

http://www.ce-mat.org/educ/educ.htm

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm
http://ualmat.wordpress.com/videos-matematicos
http://video.google.es/videoplay?docid=5134421714409461164#
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm
http://www.catedu.es/matematicas_mundo/CINE/cine_Jungla.htm