

ANÁLISIS AVANZADO DE ESTRUCTURAS

TEMA 2

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS POR EL MÉTODO
DE RIGIDEZ

Carlos Lázaró

Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos
Universitat Politècnica de València

Version 1.1
Febrero de 2025

Índice

Índice **I**

2	Análisis de estructuras por el método de rigidez	1
2.1.	Introducción	1
2.2.	Proceso de análisis	3
2.3.	Discretización	4
2.4.	Matriz de rigidez del elemento en ejes locales	5
2.5.	Ensamblaje del sistema completo	11
2.6.	Solución del Estado 1: Desplazamientos generalizados	19
2.7.	Postproceso: Reacciones y esfuerzos	20
2.8.	Desconexiones	23
2.9.	Apoyos elásticos	26
2.10.	Apoyos no concordantes	27
A	Modelos de la teoría de vigas	29
A.1.	Modelo de viga de Timoshenko	31
A.2.	Modelo de viga de Navier-Bernoulli	40
B	Matriz de rigidez de la viga de Timoshenko	43
	Bibliografía	45

TEMA 2

Análisis de estructuras por el método de rigidez

En este capítulo desarrollamos el **método de análisis lineal de estructuras en rigidez**, también llamado **método de los desplazamientos**, para el análisis de estructuras formadas por barras. La idea fundamental es que **la estructura es un sistema elástico** cuya **respuesta mecánica** se puede describir mediante un conjunto de **grados de libertad** (traslaciones y rotaciones de los nudos). Nos limitamos a estructuras compuestas por elementos lineales (denominados barras o vigas). Admitimos que los desplazamientos y rotaciones son pequeños y pueden considerarse infinitesimales. Incluimos las expresiones correspondientes al caso plano, para insistir en el significado del método.

2.1. Introducción

El punto de partida común a cualquier método de análisis de estructuras es la *idealización* de la estructura como un **sistema estructural** formado por elementos estructurales unidos entre sí en los nudos, vinculado al exterior mediante apoyos. El comportamiento de los elementos responde a un modelo mecánico simplificado, resultado de asumir una determinada cinemática de la sección transversal en el caso de los elementos viga, o de la normal a la superficie media en el caso de elementos tipo placa o lámina. Generalmente, los elementos barra se modelarán como viga de Navier-Bernoulli, o bien como viga de Timoshenko. (En el caso tridimensional, se deberá considerar también el modelo apropiado para la torsión.) La solución al problema de obtener la deformación y los esfuerzos en cada barra como elemento aislado, es, por tanto, conocida. Las acciones exteriores que actúan sobre la estructura idealizada pueden ser **fuerzas y momentos aplicados sobre los nudos**, y/o **fuerzas y momentos distribuidos** sobre las barras.

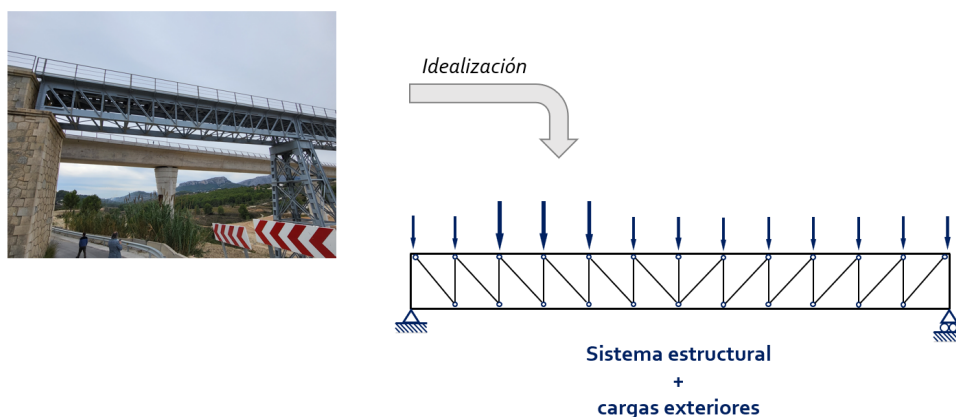


Figura 2.1: Idealización de la estructura

Las **incógnitas** fundamentales del método de rigidez son los **desplazamientos generalizados** (traslaciones y rotaciones), o grados de libertad, **de los nudos** de la estructura. En los nudos que representan las uniones a la cimentación o algún tipo de restricción externa, algunos o todos los grados de libertad están coaccionados. Su valor será conocido: nulo, o algún valor impuesto.

El concepto fundamental es que la estructura en conjunto es un sistema elástico cuya respuesta se puede describir mediante un conjunto finito de grados de libertad (traslaciones y giros en nudos). En este sentido, es similar a un resorte en el que la relación entre la fuerza y el desplazamiento del extremo depende linealmente de la rigidez k del resorte (Figura 2.2):

$$F = k u. \quad (2.1)$$

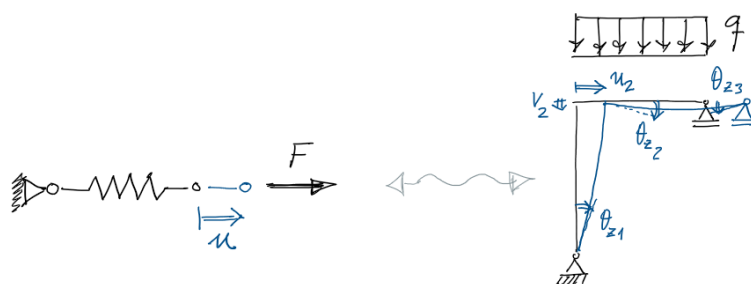


Figura 2.2: La estructura como sistema elástico

El **método de rigidez** (o método de los desplazamientos) consiste en formular una ecuación análoga a la del muelle aplicable al sistema estructural completo. En esa ecuación intervienen las componentes de fuerza y momento aplicadas sobre los nudos de la estructura (que se agrupan en el vector $\mathbf{f}'$), y las componentes desconocidas de desplazamiento y giro de los nudos (agrupadas en el vector $\mathbf{d}'$):

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}' \mathbf{d}', \quad (2.2)$$

$\mathbf{K}'$ es la **matriz de rigidez** de la estructura. Se puede demostrar que, en problemas lineales, si la estructura no es un mecanismo, la matriz de rigidez es simétrica y definida positiva, y por lo tanto es invertible [Liv78]. De este modo, **a partir de la matriz de rigidez de la estructura, es posible calcular los desplazamientos generalizados de los nudos debidos a un cierto sistema de fuerzas exteriores resolviendo el sistema de ecuaciones (2.2).**

NOTACIÓN

Denotamos matrices y vectores mediante **negrita**. Por regla general emplearemos mayúsculas para las matrices ($\mathbf{K}$), y minúsculas para los vectores ($\mathbf{d}$). En este tema, la notación mediante primas hace referencia a que las componentes de los vectores y las matrices que intervienen en la ecuación están referidas al sistema de referencia global (¡no confundir con la notación de la derivada!), y cuando no usamos la prima, las componentes estarán referidas al sistema de referencia local del elemento.

El hecho de que el comportamiento completo de la estructura se pueda formular como muestra la ecuación (2.2) se fundamenta en que siempre es posible formular una ecuación

similar a la anterior *para cada uno de los elementos* que forman la estructura. Esta **ecuación de rigidez del elemento** relaciona las fuerzas generalizadas aplicadas en los extremos con los desplazamientos generalizados que éstos experimentan:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e, \quad (2.3)$$

donde el superíndice hace referencia al elemento de índice e .

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene ensamblando las matrices de rigidez de barra (expresadas en componentes del sistema de referencia global) para formar la matriz global de la estructura. La conectividad de las barras y las ecuaciones de equilibrio de los nudos determinan las reglas de ensamblaje de la matriz de rigidez global, como veremos a continuación. Para llegar a la forma final de la ecuación de rigidez (2.2) es necesario (a) aplicar las condiciones de contorno cinemáticas, lo que reduce el tamaño de la matriz de rigidez y el número de incógnitas y ecuaciones, y (b) obtener las fuerzas nodales equivalentes a las cargas distribuidas sobre las barras, que se añadirán a las fuerzas exteriores directamente aplicadas sobre las barras.

2.2. Proceso de análisis

El proceso parte de la estructura y de las acciones idealizadas y se puede sintetizar del siguiente modo:

Preproceso – Estructura. En esta fase se determina la rigidez de cada elemento estructural y, en función de la conectividad entre elementos, se procede a ensamblar la matriz de rigidez completa de la estructura, antes de imponer condiciones de contorno.

- Discretización de la estructura (elementos y nudos)
- Evaluación de la matriz de rigidez local de cada elemento
- Cambio de base de las matrices a ejes globales
- Ensamblaje de la matriz de rigidez completa

Preproceso – Acciones. Las fuerzas generalizadas sobre los elementos y las acciones puntuales directamente aplicadas sobre los nudos del modelo se ensamblan para formar el vector de fuerzas del término independiente de la ecuación de rigidez.

- Evaluación de reacciones de empotramiento perfecto en barras con cargas distribuidas (ejes locales)
- Cambio de base y evaluación de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas (ejes globales)
- Ensamblaje del vector de fuerzas

Solución. La imposición de condiciones de contorno reduce el tamaño de la matriz de rigidez. La matriz resultante es cuadrada e invertible, lo que permite resolver el sistema y obtener las componentes incógnita de desplazamiento y rotación en los nudos de la estructura.

- Imposición de condiciones de contorno cinemáticas
- Solución del sistema para obtener desplazamientos generalizados nodales

Postproceso. Conocidos los desplazamientos se pueden calcular las reacciones y también los esfuerzos en cada barra.

- Cálculo de las reacciones
- Cálculo de esfuerzos en las barras (ejes locales)

2.3. Discretización

El punto de partida del método de rigidez es el modelo de la estructura, formado por los distintos elementos estructurales unidos en los nudos y vinculados al exterior mediante apoyos. El proceso de formación del modelo se denomina **discretización**, e involucra los siguientes pasos:

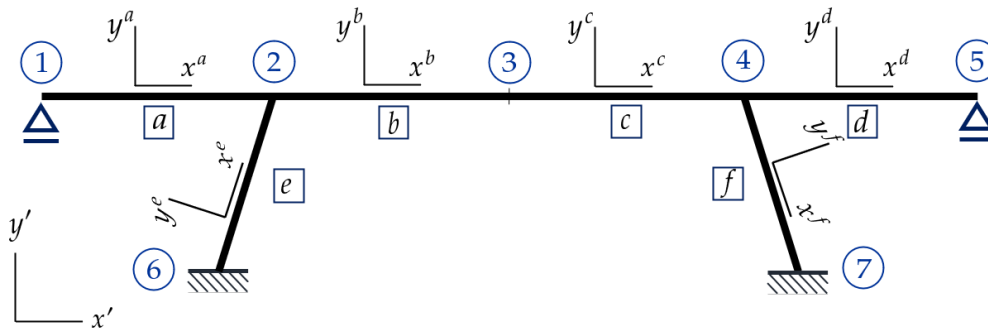


Figura 2.3: Discretización

1. División de la estructura en elementos unidos en los nudos. Los criterios *orientativos* de división son los siguientes:
 - Las uniones en las que confluyen varias barras serán nudos del modelo.
 - Los cambios de dirección de una barra serán nudos del modelo a los que se unen dos elementos.
 - Los cambios de sección de las barras serán nudos del modelo a los que se unen dos elementos de distinta sección.
 - En aquellas secciones en las que se desea obtener resultados de desplazamientos generalizados se dividirá la barra introduciendo un nudo al que se unen dos elementos.

En general, una misma barra puede subdividirse en varios elementos, por ejemplo para obtener más datos de desplazamientos, o en modelos no lineales para aumentar la precisión del resultado. Las barras de sección variable se pueden modelar como una sucesión de elementos de distinta sección, o bien se puede deducir la matriz de rigidez apropiada (ver [Liv78]). Lo mismo es aplicable a barras curvas.

2. Numeración de nudos y elementos (Fig. 2.3).
3. Definición de un **sistema de referencia local** para cada elemento, que se denota x^e, y^e, z^e para un elemento genérico e . En adelante prescindiremos del superíndice e por comodidad, siempre que no haya lugar a confusión. En estructuras planas consideramos que los ejes x e y están contenidos en el plano de la estructura, y el eje z es, por tanto, perpendicular a éste. (Ver comentarios relativos al sistema local de referencia en la Sección 2.4.) La orientación del eje x^e del elemento se escoge con independencia del orden de numeración de los nudos a los que se une. (Por tanto, el eje x^e puede orientarse de

modo que vaya del eje de mayor al de menor numeración.). La posición del origen del sistema local únicamente influye en la deducción de la matriz de rigidez del elemento, y no tiene repercusión en cálculos posteriores. Por este motivo, a veces representamos el sistema local con su origen en la sección inicial de la barra, y otras veces en otra posición a lo largo del elemento.

4. Las coordenadas de los nudos se referirán al **sistema de referencia global**, que denotamos x', y', z' . Las longitudes de los elementos y la orientación de su eje x^e relativa a los ejes globales se calculan a partir de las coordenadas de los nudos.

2.4. Matriz de rigidez del elemento en ejes locales

La respuesta elástica de un elemento estructural se define mediante una ecuación matricial que relaciona las componentes de las fuerzas generalizadas $\mathbf{f}^e$ y de los desplazamientos generalizados $\mathbf{d}^e$ en extremos el elemento mediante la matriz de rigidez $\mathbf{K}^e$ —ver Ec. (2.3)—. Las matrices de rigidez de los elementos del sistema constituyen los bloques de información que componen la matriz de rigidez del sistema. Por su importancia, desarrollamos en esta sección el concepto de matriz de rigidez del elemento ya que facilita la comprensión del método de rigidez.

SISTEMA DE REFERENCIA LOCAL DEL ELEMENTO

Para obtener las expresiones que definen la matriz de rigidez del elemento en ejes locales definimos un **sistema de referencia local** que denotamos $\{x^e, y^e, z^e\}$. Cuando no hay lugar a confusión, prescindimos del superíndice que denota el elemento para aligerar la notación: $\{x, y, z\}$. El eje x coincide con la directriz del elemento (lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones transversales). En problemas planos en los que las directrices de todas las barras flectan dentro del plano medio de la estructura, supondremos que el eje z es perpendicular al papel y apunta hacia nosotros, salvo que se indique lo contrario. En general, el origen del sistema local se hace coincidir con el centroide de la sección transversal y los ejes x e y con los ejes principales de inercia de la sección. Las matrices de rigidez que se deducen en esta sección se obtienen con esta hipótesis^a. En problemas tridimensionales, la orientación de los ejes y, z se debe especificar en cada barra.

^aCuando el sistema de referencia local no es central ni principal las matrices de rigidez contienen los momentos estáticos y el producto de inercia correspondientes. La matriz correspondiente a la viga recta 3D se puede consultar en [Mon99].

Denominando genéricamente 1 y 2 a los nudos inicial y final del elemento e , y **suponiendo que no hay cargas aplicadas a lo largo de la directriz y que solo actúan fuerzas y momentos en los extremos del elemento**, la ecuación de rigidez en ejes locales (2.3) se expande en bloques de este modo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Los vectores $\mathbf{f}_1^e, \mathbf{f}_2^e$ contienen las componentes de fuerza y momento aplicadas sobre las secciones extremas 1 y 2 del elemento e expresadas en el sistema de referencia local, y los vectores $\mathbf{d}_1^e, \mathbf{d}_2^e$ contienen las componentes de traslación y rotación de los nudos 1 y 2 en dicho sistema.

Las componentes de los vectores de fuerza y desplazamiento y la composición de la matriz de rigidez dependerán de los grados de libertad asociados al problema (son diferentes, por ejemplo, en una estructura articulada plana que en un entramado plano, un emparrillado o una estructura espacial) y del modelo de viga asociado al elemento (una viga de Navier-Bernoulli o una de Timoshenko). Por ejemplo, en un elemento viga en flexión en el plano xy ,

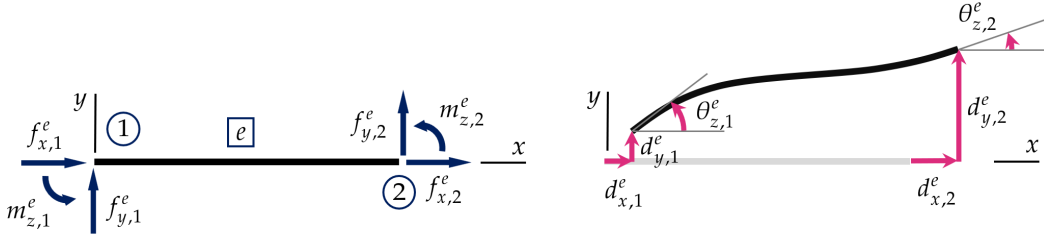


Figura 2.4: Fuerzas y desplazamientos generalizados en extremos de un elemento plano en componentes del sistema local de referencia. (La escala de los desplazamientos se ha exagerado deliberadamente.)

las componentes de fuerzas y desplazamientos en extremos son¹ —Figura 2.4—:

$$\mathbf{f}_1^e = \begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{y,1}^e \\ m_{z,1}^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_1^e = \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ d_{y,1}^e \\ \theta_{z,1}^e \end{bmatrix} \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{f}_2^e = \begin{bmatrix} f_{x,2}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_2^e = \begin{bmatrix} d_{x,2}^e \\ d_{y,2}^e \\ \theta_{z,2}^e \end{bmatrix} \quad (2.5b)$$

Hay varias formas de obtener la matriz de rigidez en ejes locales de un elemento. Señalamos a continuación tres procedimientos:

1. A partir de la solución homogénea sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la respuesta de la viga. Conocida la solución, la matriz se obtiene mediante un proceso sistemático. La mayor desventaja es que requiere obtener de antemano la solución analítica del problema. En el Apéndice B se emplea este procedimiento para obtener la matriz de rigidez de la viga de Timoshenko plana.
2. Empleando el concepto de matriz de flexibilidad y de matriz de equilibrio. Es aplicable a elementos curvos o de sección variable en los que previamente se han obtenido los desplazamientos generalizados en el extremo final suponiendo el elemento empotrado en su sección inicial. El desarrollo del método se puede consultar en [Liv78, Capítulo 5].
3. Mediante el método de flexibilidad, se obtienen las reacciones en los extremos del elemento viga biempotrado debidas a valores unitarios impuestos a cada uno de los grado de libertad en los extremos. Cada valor impuesto proporcionará un conjunto de reacciones que, expresadas en el sistema local de la barra y ordenadas adecuadamente,

¹Las ecuaciones (2.5), y en general, la distinción mediante primas (o sin ellas) entre expresiones en componentes globales o locales supone un abuso de la notación, ya que un vector es un único objeto, con independencia del sistema de referencia que se use para representarlo en componentes. Sacrificamos el rigor a cambio de eliminar ambigüedad en las expresiones que manejamos.

proporciona la columna de la matriz de rigidez correspondiente a la componente de desplazamiento (o giro) impuesto.

2.4.1. Matriz de rigidez de la viga plana de Navier-Bernoulli

Empleamos el tercer método para obtener la matriz de rigidez de la viga plana de Navier-Bernoulli. La viga tiene una longitud L y es de sección constante (área A y momento de inercia de eje perpendicular al plano de flexión I_z). El material es elástico lineal, con módulo de elasticidad E .

Una primera observación que resulta muy útil es que el comportamiento frente a esfuerzos de tracción/compresión está desacoplado del comportamiento a flexión/cortante en el caso lineal.

El método consiste en analizar la respuesta del elemento completamente coaccionado en ambos extremos al imponer un valor unitario a cada uno de los grados de libertad. Las componentes de las reacciones que aparecen en los extremos componen la columna de la matriz de rigidez correspondiente al grado de libertad cuyo valor imponemos.

Rigidez frente a fuerzas axiales

Partimos de un elemento en el que los desplazamientos están coaccionados en el extremo 1 ($d_{x,1}^e = 0$). Aplicando una fuerza axial $f_{x,2}^e$ en el extremo final, el desplazamiento del extremo final² es:

$$d_{x,2}^e = \frac{L}{EA} f_{x,2}^e. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, si imponemos un valor unitario del desplazamiento $d_{x,2}^e = 1$, la fuerza necesaria para producirlo es

$$f_{x,2}^e = \frac{EA}{L}, \quad (2.7)$$

y la reacción en el extremo 1 es

$$f_{x,1}^e = -\frac{EA}{L}. \quad (2.8)$$

Estas reacciones forman la segunda columna de la matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{x,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & -EA/L \\ \cdot & EA/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ d_{x,2}^e \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Dado que el comportamiento del elemento debe ser simétrico, es inmediato completar la matriz, que queda así³:

$$\begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{x,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ d_{x,2}^e \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

²Se puede obtener, por ejemplo, empleando teoremas de Mohr, o bien mediante el teorema de las fuerzas virtuales.

³En general omitiremos el superíndice e en la longitud del elemento y las características de su sección para no sobrecargar la notación.

CUESTIÓN 2.1.

Calcula el determinante de la matriz de rigidez de la ecuación (2.10). El resultado indica que la matriz es singular, o lo que es lo mismo, no se puede invertir. (Esto sucede en cualquier ecuación de rigidez de un elemento aislado.) ¿Qué implicación tiene este hecho en cuanto a la solución del sistema de ecuaciones (2.10)? (Sugerencia: Supón que conoces las fuerzas en los extremos de la barra —y que estas están en equilibrio—. ¿Puedes calcular los desplazamientos de los extremos resolviendo (2.10)? ¿Qué hay que hacer para obtener una solución?)

Rigidez frente a fuerzas transversales y momentos

El siguiente ejercicio proporciona los resultados que necesitamos para determinar la matriz de rigidez.

CUESTIÓN 2.2.

Determina los desplazamientos en el extremo de un elemento viga de Navier-Bernoulli empotrado - libre, de longitud L , inercia de flexión I_z y módulo de elasticidad E sometido a una fuerza transversal $f_{y,2}^e$ y a un momento $m_{z,2}^e$ aplicados en el extremo libre. (Sugerencia: Emplea el teorema de las fuerzas virtuales, o bien los teoremas de Mohr.)

Resultado:

$$d_{y,2} = \frac{L^3}{3EI_z} f_{y,2}^e + \frac{L^2}{2EI_z} m_{z,2}^e \quad (2.11a)$$

$$\theta_{z,2} = \frac{L^2}{2EI_z} f_{y,2}^e + \frac{L}{EI_z} m_{z,2}^e \quad (2.11b)$$

En primer lugar calculamos el desplazamiento transversal debido a una fuerza transversal sobre el extremo 2, suponiendo coaccionados el resto de los desplazamientos. Se trata de un problema hiperestático de grado 1 (el comportamiento axial está desacoplado y se ha resuelto independientemente.) Empleamos el método de flexibilidad, escogiendo el momento reacción $m_{z,2}^e$ como incógnita hiperestática. Imponemos la condición de compatibilidad $\theta_{z,2} = 0$ para despejar la incógnita. De la ecuación (2.11b) se deduce:

$$m_{z,2}^e = -\frac{L}{2} f_{y,2}^e. \quad (2.12)$$

Conocida la reacción hiperestática en función de la fuerza transversal aplicada podemos sustituir en (2.11a) para obtener el desplazamiento en función de la fuerza:

$$d_{y,2} = \frac{L^3}{12EI_z} f_{y,2}^e. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, las reacciones en el extremo 2 debidas a un desplazamiento $u_{y,2}^e = 1$ resultan

$$f_{y,2}^e = \frac{12EI_z}{L^3} \quad m_{z,2}^e = -\frac{6EI_z}{L^2}. \quad (2.14)$$

Las reacciones en el extremo 1 son antimétricas y valen:

$$f_{y,1}^e = -\frac{12EI_z}{L^3} \quad m_{z,1}^e = -\frac{6EI_z}{L^2}. \quad (2.15)$$

CUESTIÓN 2.3.

Operando de forma análoga, obtén las reacciones en el extremo 2 de la viga biempotrada debidas a una rotación impuesta $\theta_{z,2}^e = 1$.

Resultado:

$$f_{y,2}^e = -\frac{6EI_z}{L^2} \quad m_{z,2}^e = \frac{4EI_z}{L}. \quad (2.16)$$

Las reacciones en el extremo 1 debidas a la rotación unitaria en el extremo 2 se obtienen por equilibrio a partir del resultado inmediatamente anterior:

$$f_{y,1}^e = \frac{6EI_z}{L^3} \quad m_{z,1}^e = \frac{2EI_z}{L^2}. \quad (2.17)$$

Conocidas las reacciones podemos escribir dos de las columnas de la matriz de rigidez que relaciona fuerzas transversales y momentos con desplazamientos transversales y rotaciones:

$$\begin{bmatrix} f_{y,1}^e \\ m_{z,1}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \cdot & \cdot & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \cdot & \cdot & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \cdot & \cdot & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{y,1}^e \\ \theta_{z,1}^e \\ d_{y,2}^e \\ \theta_{z,2}^e \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Las dos columnas restantes se completan considerando la simetría del problema.

Juntando este último resultado con las ecuaciones (2.10) correspondientes a la rigidez frente a fuerzas axiales, y teniendo en cuenta el desacoplamiento entre el comportamiento axial y el comportamiento a flexión, se obtiene finalmente la ecuación de rigidez en el sistema local de la viga plana de Navier-Bernoulli:

$$\begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{y,1}^e \\ m_{z,1}^e \\ f_{x,2}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ d_{y,1}^e \\ \theta_{z,1}^e \\ d_{x,2}^e \\ d_{y,2}^e \\ \theta_{z,2}^e \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

En las siguientes secciones incluimos las matrices de rigidez de elemento en sistemas típicos.

2.4.2. Matriz de rigidez de la viga plana de Timoshenko

La matriz de rigidez de la viga de Timoshenko se deduce en el anexo B a partir de la solución analítica de las ecuaciones que rigen el problema. Depende del **factor de cortante**

$$\alpha = \frac{12EI_z}{GA_{Vy} L^2} \quad (2.20)$$

que determina la relación entre la rigidez a flexión y a cortante de la sección transversal. Reproducimos a continuación el resultado:

$$\begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{y,1}^e \\ m_{z,1}^e \\ f_{x,2}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ d_{y,1}^e \\ \theta_{z,1}^e \\ d_{x,2}^e \\ d_{y,2}^e \\ \theta_{z,2}^e \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

2.4.3. Matriz de rigidez de una barra en una estructura intraslacional

El análisis de estructuras intraslacionales es un procedimiento fundamental del cálculo de estructuras clásico. Suponiendo que la deformación axial de las barras es despreciable, el único grado de libertad en los nudos es la rotación θ_z y la ecuación de rigidez se reduce a esta expresión:

$$\begin{bmatrix} m_{z,1}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{L} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{2EI_z}{L} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{z,1}^e \\ \theta_{z,2}^e \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

2.4.4. Matriz de rigidez de una barra de estructura articulada plana

Los nudos de las estructuras articuladas planas tienen únicamente dos grados de libertad: las componentes de traslación en el plano. Por ello, a partir de (2.10), la ecuación de rigidez (en componentes locales) es:

$$\begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{y,1}^e \\ f_{x,2}^e \\ f_{y,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ d_{y,1}^e \\ d_{x,2}^e \\ d_{y,2}^e \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

CUESTIÓN 2.4.

La matriz de rigidez en ejes locales de una barra de estructura articulada plana tiene la composición dada por la ecuación (2.23).

1. Explica el significado físico de las columnas de ceros.
2. Explica el significado físico de las filas de ceros.

2.4.5. Matriz de rigidez de una viga de un emparrillado plano

Supongamos un emparrillado formado por vigas cuyas directrices se sitúan en un mismo plano. Escogemos un sistema de referencia local para la viga del emparrillado de modo que la directriz de la barra se alinea con el eje x , la viga flecha en el plano xz y por tanto el eje de flexión de la viga es el y . Si las vigas están conectadas rígidamente, la deformación de la estructura fuera de su plano produce flexión y torsión en las vigas que componen el sistema. Suponiendo que no hay deformación dentro del plano de la estructura, los únicos grados de libertad en los extremos de la viga serán la traslación de eje perpendicular al plano del emparrillado d_z^e y las rotaciones θ_x^e y θ_y^e .

Despreciando la deformación por cortante (hipótesis de Navier-Bernoulli) y suponiendo que el comportamiento a torsión responde a la teoría de Saint-Venant [CC18], la ecuación de rigidez se puede deducir por cualquiera de los procedimientos mencionados. El resultado es:

$$\begin{bmatrix} f_{z,1}^e \\ m_{x,1}^e \\ m_{y,1}^e \\ f_{z,2}^e \\ m_{x,2}^e \\ m_{y,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} \\ -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{z,1}^e \\ \theta_{x,1}^e \\ \theta_{y,1}^e \\ d_{z,2}^e \\ \theta_{x,2}^e \\ \theta_{y,2}^e \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Donde EI_y es la rigidez a flexión de la sección, y GJ es la rigidez a torsión (de Saint-Venant).

2.5. Ensamblaje del sistema completo

2.5.1. Matriz de rigidez del elemento en ejes globales

La ecuación (2.4) representa la relación lineal entre fuerzas generalizadas y desplazamientos generalizados en extremos de barra, expresada en el sistema de referencia local asociado a la

barra, $\{x, y, z\}$. El objetivo de esta sección es deducir una expresión análoga a (2.4) expresada en el sistema de referencia global, para poder operar con ella a nivel del conjunto de la estructura.

Denotamos el sistema de referencia global mediante primas: $\{x', y', z'\}$. Denominamos $\mathbf{T}^e$ a la matriz (ortogonal) de cambio del sistema de referencia local al sistema global correspondiente al elemento e . Los elementos de la matriz dependen del ángulo φ^e que forma el eje x local del elemento e con el eje x' global.

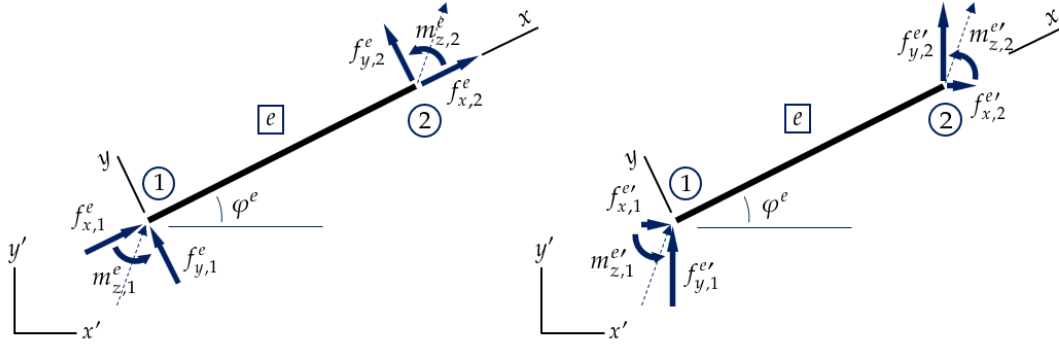


Figura 2.5: Fuerzas generalizadas en extremos de viga en componentes locales y globales

En el caso plano, la matriz de cambio de base es:

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \cos \varphi^e & -\sin \varphi^e & 0 \\ \sin \varphi^e & \cos \varphi^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Por lo tanto, la relación entre componentes de las fuerzas y los desplazamientos en el sistema local y global es (Figura 2.5):

$$\mathbf{f}_1^{e'} = \mathbf{T}^e \mathbf{f}_1^e \quad \mathbf{d}_1^{e'} = \mathbf{T}^e \mathbf{d}_1^e \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{f}_2^{e'} = \mathbf{T}^e \mathbf{f}_2^e \quad \mathbf{d}_2^{e'} = \mathbf{T}^e \mathbf{d}_2^e \quad (2.26b)$$

La matriz de cambio de base es una matriz ortogonal, luego cumple $(\mathbf{T}^e)^{-1} = (\mathbf{T}^e)^T$. Por lo tanto, para cada extremo de barra $i = 1, 2$, la relación (inversa) entre componentes del desplazamiento en ejes locales en función de las componentes globales es:

$$\begin{bmatrix} d_{x,i} \\ d_{y,i} \\ \theta_{z,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^e & \sin \varphi^e & 0 \\ -\sin \varphi^e & \cos \varphi^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,i}^{e'} \\ d_{y,i}^{e'} \\ \theta_{z,i}^{e'} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (2.27)$$

Y la relación análoga entre fuerzas en extremo de barra en ejes locales en función de las componentes globales es análoga:

$$\begin{bmatrix} f_{x,i}^e \\ f_{y,i}^e \\ m_{z,i}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^e & \sin \varphi^e & 0 \\ -\sin \varphi^e & \cos \varphi^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x,i}^{e'} \\ f_{y,i}^{e'} \\ m_{z,i}^{e'} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (2.28)$$

Se observa que en el caso plano las rotaciones y los momentos no se ven afectados por el cambio de sistema de referencia.

Sustituyendo las transformaciones inversas en la ecuación de rigidez del elemento en ejes locales (2.4) resulta

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{f}_1^{e'} \\ (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{f}_2^{e'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{d}_1^{e'} \\ (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{d}_2^{e'} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Desarrollando los productos y despejando las fuerzas en componentes globales se obtiene la **ecuación de rigidez del elemento e en componentes globales**, que relaciona fuerzas generalizadas y desplazamientos en extremos del elemento expresados en el sistema global (Fig. 2.6):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{e'} \\ \mathbf{f}_2^{e'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}^e \mathbf{K}_{11}^e (\mathbf{T}^e)^T & \mathbf{T}^e \mathbf{K}_{12}^e (\mathbf{T}^e)^T \\ \mathbf{T}^e \mathbf{K}_{21}^e (\mathbf{T}^e)^T & \mathbf{T}^e \mathbf{K}_{22}^e (\mathbf{T}^e)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{e'} \\ \mathbf{d}_2^{e'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{e'} & \mathbf{K}_{12}^{e'} \\ \mathbf{K}_{21}^{e'} & \mathbf{K}_{22}^{e'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{e'} \\ \mathbf{d}_2^{e'} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

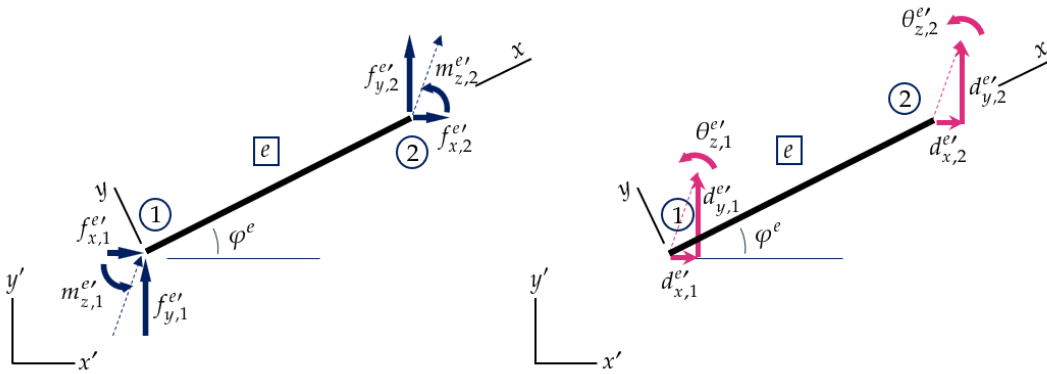
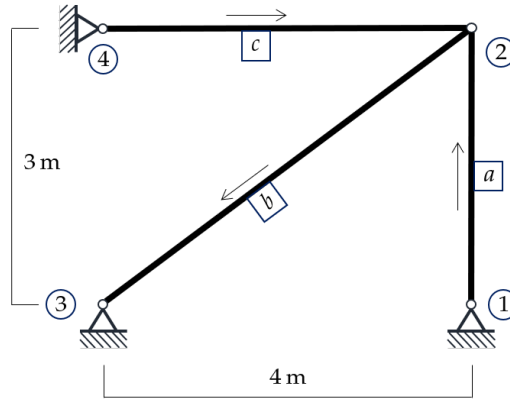


Figura 2.6: Fuerzas generalizadas en extremos de viga y desplazamientos en componentes del sistema global

EJERCICIO 2.1.

Evalúa la matriz de rigidez de la barra b de la estructura articulada plana de la figura en componentes globales. Todas las barras son de madera, de sección rectangular $0,1 \text{ m} \times 0,2 \text{ m}$, con módulo de elasticidad $E = 10 \times 10^3 \text{ MPa}$.



2.5.2. Ensamblaje de la matriz de rigidez global

Suponemos ahora que **la estructura es un sistema formado por elementos viga unidos entre sí mediante nudos rígidos**, que transmiten por tanto fuerzas y momentos. Los extremos de las barras adyacentes a cada uno de los nudos experimentan los mismos desplazamientos y rotaciones. En una sección posterior, trataremos el caso de elementos que se unen al nudo sin compatibilizar alguno de los grados de libertad (por ejemplo, un elemento con una articulación en el extremo final supone una *desconexión* de la rotación del elemento respecto de la del nudo al que se une mediante la articulación).

Considerando pues elementos unidos entre sí mediante nudos rígidos, **estudiamos el caso en el que las barras e y h se unen al nudo j** (Fig. 2.7) —cuando en un nudo confluyen más barras el tratamiento es análogo—. Debemos imponer dos condiciones:

Compatibilidad de desplazamientos en el nudo j : En una estructura de nudos rígidos los desplazamientos y las rotaciones de los extremos de las barras que se unen al nudo deben ser necesariamente iguales entre sí, e iguales a los desplazamientos y rotaciones del nudo:

$$\mathbf{d}_2^{e'} = \mathbf{d}_1^{h'} = \mathbf{d}_j' \quad (2.31)$$

Equilibrio del nudo j : Sobre el nudo actúan las fuerzas ejercidas por los elementos e y h , así como las acciones exteriores aplicadas directamente sobre él, que denotamos

$$\mathbf{f}_j' = [f'_{x,j}, f'_{y,j}, m'_{z,j}]^T. \quad (2.32)$$

Por el principio de acción y reacción, las fuerzas y momentos que los elementos e y h ejercen sobre el nudo j son iguales en magnitud y tienen sentido opuesto a las

fuerzas que actúan sobre los extremos de los elementos adyacentes al nudo j . Este es el motivo por el que entran con signo negativo en la ecuación de equilibrio (Fig. 2.7), que queda así:

$$-f_2^{e'} - f_1^{h'} + f_j' = 0. \quad (2.33)$$

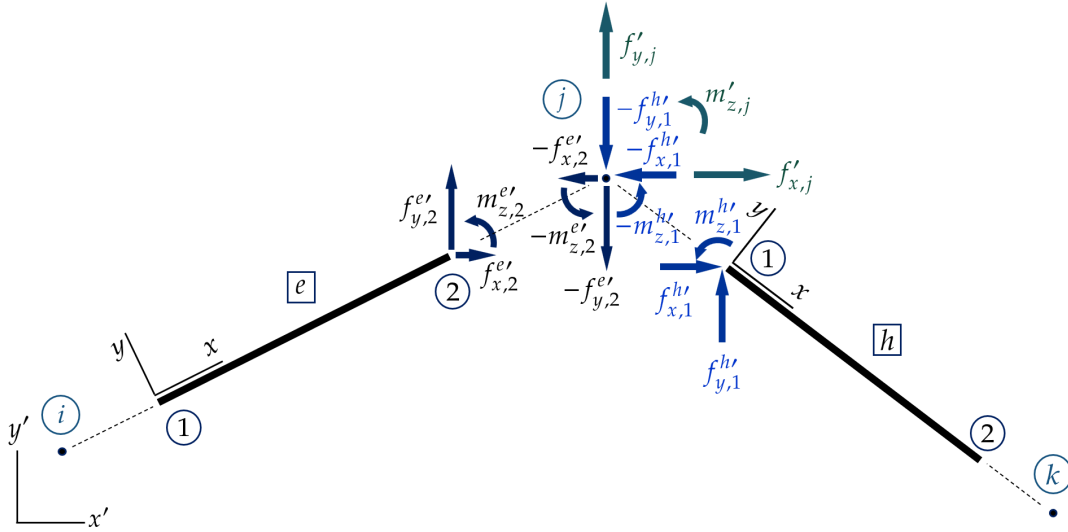


Figura 2.7: Equilibrio del nudo j .

Teniendo en cuenta ambas condiciones, suponiendo que el extremo 1 de la barra e se une al nudo i y el extremo 2 de la barra h al nudo k , y sustituyendo la expresión de las fuerzas en función de los desplazamientos —Ec. (2.30)— tendremos:

$$-K_{21}^{e'} d_i' - K_{22}^{e'} d_j' - K_{11}^{h'} d_j' - K_{12}^{h'} d_k' + f_j' = 0. \quad (2.34)$$

Agrupando los términos que multiplican a los desplazamientos, obtenemos que las fuerzas generalizadas exteriores aplicadas sobre el nudo j están relacionadas con los desplazamientos generalizados de los nudos i, j, k (en general, con todos los nudos unidos al extremo opuesto de las barras que confluyen en el nudo j):

$$f_j' = K_{21}^{e'} d_i' + [K_{22}^{e'} + K_{11}^{h'}] d_j' + K_{12}^{h'} d_k'. \quad (2.35)$$

Si repetimos el proceso para cada uno de los nudos de la estructura y organizamos el resultado en forma matricial, obtenemos la ecuación de rigidez de la estructura (previa a considerar las condiciones de contorno cinemáticas). La organización matricial de las ecuaciones de equilibrio de nudo se denomina **ensamblaje**. El ensamblaje comienza con una matriz nula cuyo tamaño es $3N \times 3N$ (en problemas planos —tres grados de libertad por nudo—), o $6N \times 6N$ (en problemas espaciales —seis grados de libertad por nudo—). Cada conjunto de $3N$ (o $6N$) filas y columnas corresponde a los grados de libertad de cada uno de los nudos de la estructura, de acuerdo con la numeración escogida en el primer paso del método (discretización).

El proceso de ensamblaje de la matriz consiste en sumar los bloques de la matriz de rigidez de cada elemento (en ejes generales) en las posiciones correspondientes a las filas y columnas

de los nudos a los que se unen los extremos del elemento:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{f}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{f}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{f}'_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \mathbf{K}_{11}^{e'} & \dots & \mathbf{K}_{12}^{e'} & \dots & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \mathbf{K}_{21}^{e'} & \dots & \mathbf{K}_{22}^{e'} + \mathbf{K}_{11}^{h'} & \dots & \mathbf{K}_{12}^{h'} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_{21}^{h'} & \dots & \mathbf{K}_{22}^{h'} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{d}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{d}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{d}'_k \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

EJERCICIO 2.2.

Define el esquema de ensamblaje de la estructura del Ejercicio 2.1.

2.5.3. Fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas

Además de fuerzas y momentos actuando sobre los nudos, puede haber cargas distribuidas actuando sobre los elementos de la estructura, como en el caso de la estructura de la Figura 2.8. El objetivo es calcular las fuerzas generalizadas sobre los nudos estáticamente equivalentes a

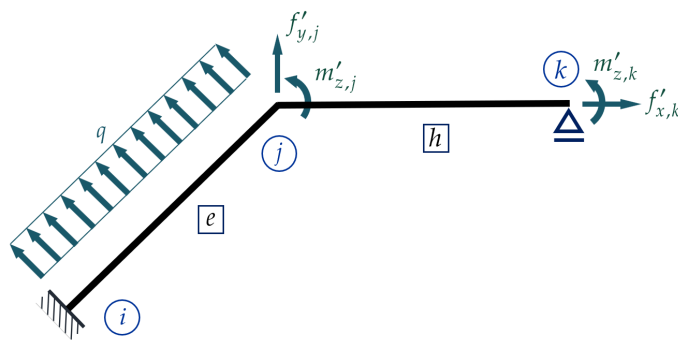


Figura 2.8: Estructura con cargas en los nudos y cargas distribuidas sobre los elementos.

las cargas distribuidas que actúan sobre los elementos.

Para ello, consideramos un **Estado 0** en el que (a) *bloqueamos* todos los grados de libertad de los nudos, y (b) aplicamos *únicamente* las cargas distribuidas sobre los elementos. Para lograr que los desplazamientos y giros de los nudos sean nulos en este estado, debemos aplicar sobre los extremos de cada elemento fuerzas iguales a las reacciones de empotramiento perfecto que aparecen cuando los elementos se analizan como vigas biempotradas (Figura 2.9). **Las reacciones de empotramiento perfecto son precisamente las fuerzas en los extremos del elemento en el Estado 0.** En un elemento e genérico las denominamos $\mathbf{f}_1^{0e}$ y $\mathbf{f}_2^{0e}$.

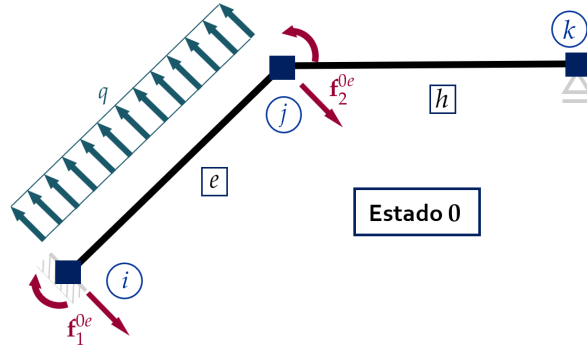


Figura 2.9: Estado 0: desplazamientos bloqueados. Carga distribuida y reacciones de empotramiento perfecto.

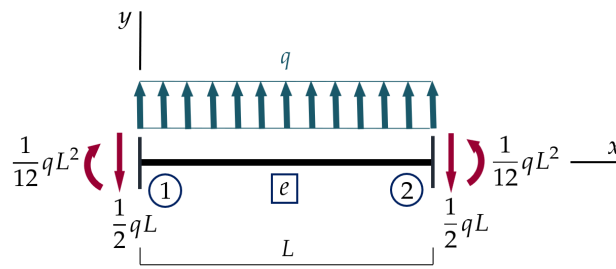


Figura 2.10: Reacciones de empotramiento perfecto en ejes locales debidas a una carga uniforme q .

Por ejemplo, en el elemento e (Figura 2.10), las reacciones de empotramiento perfecto expresadas en ejes locales tienen los valores siguientes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{0e} \\ \mathbf{f}_2^{0e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ \hline 0 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{bmatrix}.$$

El efecto de las cargas distribuidas sobre la estructura es equivalente al de las reacciones de empotramiento perfecto *actuando en sentido opuesto*. Denominaremos **fuerzas nodales equivalentes a las cargas distribuidas** a estas fuerzas y momentos, iguales en magnitud y de sentido opuesto (*y por tanto de signo opuesto*) a las reacciones de empotramiento perfecto (Figura 2.11). Las fuerzas nodales equivalentes a las cargas distribuidas sobre el elemento genérico e expresadas en componentes del sistema global se obtienen a partir de las componentes locales utilizando la matriz de cambio de base del elemento:

$$-\mathbf{f}_1^{0e'} = \mathbf{T}^e(-\mathbf{f}_1^{0e}) \qquad -\mathbf{f}_2^{0e'} = \mathbf{T}^e(-\mathbf{f}_2^{0e}). \quad (2.37)$$

A continuación consideramos el **Estado 1** sobre el que actúan las fuerzas nodales equivalentes a las cargas distribuidas sobre cada elemento *más* las fuerzas exteriores sobre los nudos

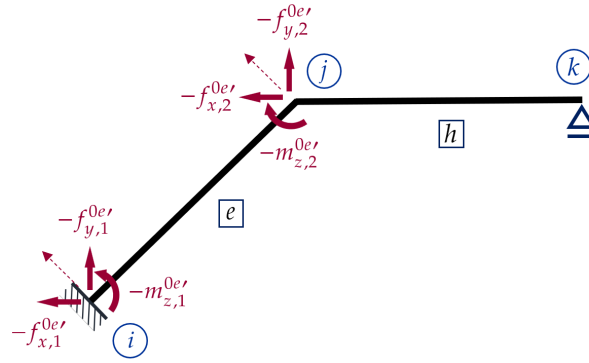


Figura 2.11: Fuerzas nodales equivalentes a la carga uniforme q_y , opuestas a las reacciones de empotramiento perfecto.

de la estructura. La clave para resolver el problema con cargas distribuidas sobre las barras, es que la superposición del Estado 0 y el Estado 1 conduce precisamente al problema original de la Figura 2.8.

Como se aprecia en la Figura 2.12, al superponer ambos estados:

1. Las reacciones de empotramiento perfecto y las fuerzas nodales equivalentes se cancelan.
2. Los desplazamientos nodales del Estado 1 son los buscados en el problema original, ya que en el Estado 0 son nulos por hipótesis.

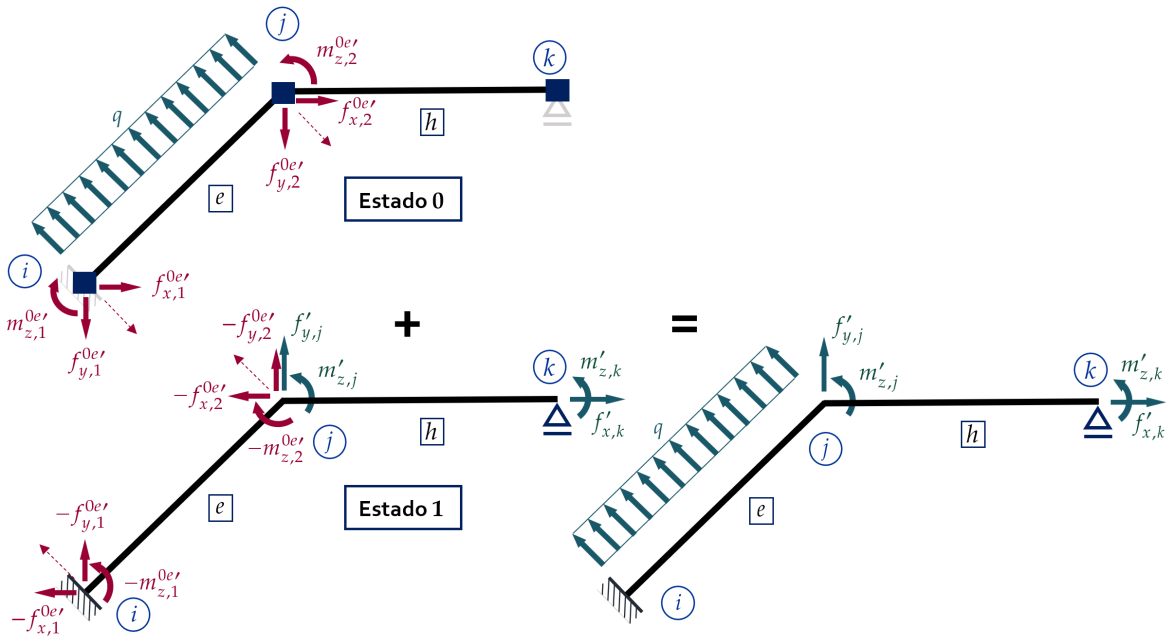


Figura 2.12: La superposición del Estado 0 y el Estado 1 es equivalente al problema original.

Para resolver el Estado 1 es necesario **ensamblar** las fuerzas nodales equivalentes en los bloques adecuados del vector de fuerzas en el lado izquierdo de la ecuación (2.36). El ensamblaje de las fuerzas sigue la misma lógica que el de las matrices. Recordando que las fuerzas y momentos aplicados directamente sobre un nudo genérico j se denotan $\mathbf{f}'_j$ y suponiendo que

sobre los elementos e y h actúan cargas distribuidas, el resultado del ensamblaje es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{f}'_i - \mathbf{f}_1^{0e'} \\ \vdots \\ \mathbf{f}'_j - \mathbf{f}_2^{0e'} - \mathbf{f}_1^{0h'} \\ \vdots \\ \mathbf{f}'_k - \mathbf{f}_2^{0h'} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{K}_{11}^{e'} & \dots & \mathbf{K}_{12}^{e'} & \dots & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{K}_{21}^{e'} & \dots & \mathbf{K}_{22}^{e'} + \mathbf{K}_{11}^{h'} & \dots & \mathbf{K}_{12}^{h'} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_{21}^{h'} & \dots & \mathbf{K}_{22}^{h'} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{d}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{d}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{d}'_k \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

El vector de fuerzas (lado izquierdo de la igualdad) contiene la suma de las fuerzas exteriores y las fuerzas nodales equivalentes a las cargas distribuidas. Las fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas sobre el elemento e se ensamblan en los bloques de filas correspondientes a los nudos i y j a los que se une el elemento, y las fuerzas equivalentes sobre el elemento h se ensamblan en los bloques correspondientes a los nudos j y k (ver Fig. 2.7). Con el resto de elementos se procede del mismo modo

La ecuación (2.38) aún no se puede resolver, ya que el vector de desplazamientos generalizados contiene datos (las componentes de desplazamiento impuestas en el contorno) y el vector de fuerzas contiene incógnitas (las reacciones). En la siguiente sección explicamos cómo tratar la información para poder resolver el sistema.

2.6. Solución del Estado 1: Desplazamientos generalizados

2.6.1. Imposición de condiciones de contorno cinemáticas

El siguiente paso consiste en reordenar el sistema (2.38) agrupando componentes de desplazamiento (y giro) incógnitas (los grados de libertad), y componentes cuyo valor es impuesto por las condiciones de contorno. Por ejemplo, en un empotramiento (problema plano), las tres componentes del desplazamiento generalizado serán, en principio, nulas, aunque en general, alguna de las componentes puede tener un valor conocido diferente de 0 (traslación o giro impuesto). Denominaremos $\mathbf{d}'_F$ al vector que agrupa los grados de libertad desconocidos (que son las incógnitas del problema de rigidez), y $\mathbf{d}'_R$ al vector que agrupa aquellos grados de libertad con valores conocidos (nulos en general, o valores impuestos a determinados g. de l. en casos particulares). Los subíndices escogidos hacen referencia a grados de libertad incógnita, o *libres* $\equiv$ *free* (F) y grados de libertad dato, o *coaccionados* $\equiv$ *restrained* (R). Agrupamos las fuerzas del mismo modo: $\mathbf{f}'_F$ son las componentes de fuerza (o momento) que actúan sobre los grados de libertad incógnita, y **son conocidas**. $\mathbf{f}'_R$ son las componentes de fuerza (o momento) que actúan sobre componentes de desplazamiento impuestas; estas componentes son las **reacciones**, cuyo valor puede calcularse después de obtener los desplazamientos **incógnita**.

Reordenando el sistema global de acuerdo con el criterio que acabamos de exponer, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_F \\ \mathbf{f}'_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{FF} & \mathbf{K}'_{FR} \\ \mathbf{K}'_{RF} & \mathbf{K}'_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_F \\ \mathbf{d}'_R \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

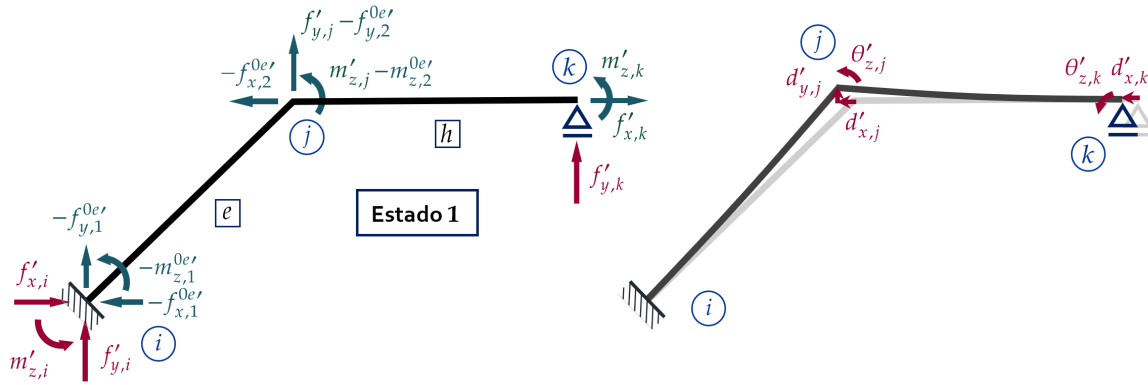


Figura 2.13: Fuerzas sobre la estructura completa (en rojo las reacciones), coacciones y desplazamientos incógnita (también en rojo).

Desarrollando por el primer bloque de filas y agrupando a la izquierda de la igualdad los datos obtenemos la **ecuación de rigidez de la estructura**:

$$\mathbf{f}'_F - \mathbf{K}'_{FR} \mathbf{d}'_R = \mathbf{K}'_{FF} \mathbf{d}'_F. \quad (2.40)$$

La matriz $\mathbf{K}'_{FF}$ es la **matriz de rigidez de la estructura**. Se puede demostrar [Liv78] que, con las hipótesis de linealidad asumidas, y en el supuesto de que la estructura sea estable (o lo que es lo mismo, que no sea un mecanismo parcial o total), la matriz de rigidez:

1. Es simétrica y definida positiva.
2. Es regular: su determinante es distinto de 0, y es invertible. Por tanto, el sistema tendrá solución para cualquier sistema de cargas $\mathbf{f}'_F$ dado, y cualquier sistema de desplazamientos impuestos $\mathbf{d}'_R$.

2.6.2. Solución del sistema: desplazamientos generalizados

La **solución** del sistema (2.40) proporciona las **componentes de los desplazamientos generalizados** (traslaciones y rotaciones de los nudos) en el sistema de referencia global:

$$\mathbf{d}'_F = (\mathbf{K}'_{FF})^{-1} (\mathbf{f}'_F - \mathbf{K}'_{FR} \mathbf{d}'_R). \quad (2.41)$$

Recordamos que los desplazamientos nodales calculados, que son los del Estado 1, también son los desplazamientos nodales de la estructura original, ya que los del Estado 0 son nulos⁴.

2.7. Postproceso: Reacciones y esfuerzos

2.7.1. Cálculo de reacciones

Las reacciones del Estado 1 se calculan desarrollando el bloque de filas correspondiente del sistema (2.39):

$$\mathbf{f}'_R = \mathbf{K}'_{RF} \mathbf{d}'_F + \mathbf{K}'_{RR} \mathbf{d}'_R. \quad (2.42)$$

⁴Esto no es así en secciones intermedias de los elementos, en las que los desplazamientos del Estado 0 no son nulos y se deben sumar a los del Estado 1.

Las reacciones en la estructura original son el resultado de la suma de las componentes de las reacciones de empotramiento correspondientes al Estado 0 que actúan sobre grados de libertad coaccionados, y de las reacciones obtenidas en el Estado 1⁵. Por ejemplo: si s es un nudo completamente coaccionado unido a la barra e por el extremo 1 entonces las reacciones en s en la estructura original valen

$$\mathbf{f}'_s = \mathbf{f}_1^{0e'} + \mathbf{f}_s^{1'}, \quad (2.43)$$

donde $\mathbf{f}_s^{1'}$ se extrae de las reacciones $\mathbf{f}'_R$ del Estado 1.

2.7.2. Cálculo de esfuerzos

Para obtener los **esfuerzos** en los extremos del elemento viga, *deshacemos* el proceso. Recordamos que las componentes del vector $\mathbf{d}'_F$ que acabamos de obtener como solución, son precisamente los desplazamientos generalizados expresados en ejes globales en todos los nudos. Seleccionamos los valores de los desplazamientos en los nudos 1 y 2 del elemento e , y a continuación calculamos sus componentes en el sistema local del elemento invirtiendo las transformaciones (2.26):

$$\mathbf{d}_1^e = (\mathbf{T}^e)^\top \mathbf{d}_1^{e'} \quad \mathbf{d}_2^e = (\mathbf{T}^e)^\top \mathbf{d}_2^{e'}. \quad (2.44)$$

Una vez obtenidos los desplazamientos en los extremos, la ecuación de rigidez en ejes locales del elemento e (2.4) proporciona las fuerzas en extremos del elemento **correspondientes al Estado 1**, que denotamos $\mathbf{f}_1^{1e}$ y $\mathbf{f}_2^{1e}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{1e} \\ \mathbf{f}_2^{1e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Las fuerzas en extremos de elemento correspondientes al problema original se obtienen sumando las reacciones de empotramiento perfecto del **Estado 0** a las fuerzas correspondientes al **Estado 1** (Fig. 2.14):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{0e} \\ \mathbf{f}_2^{0e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{1e} \\ \mathbf{f}_2^{1e} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

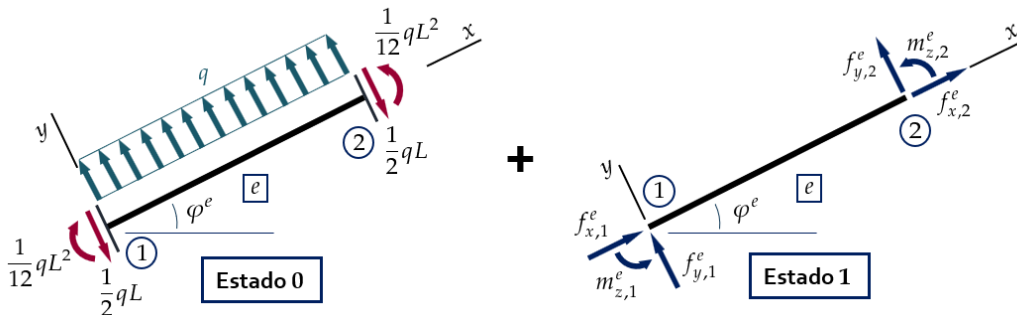


Figura 2.14: Superposición de los Estados 0 y 1 para obtener las fuerzas en extremos y los esfuerzos correspondientes al problema original en cada elemento.

⁵Esto es coherente con el hecho de que las componentes de $\mathbf{f}'_R$ incluyen las fuerzas equivalentes a las cargas repartidas sobre los grados de libertad coaccionados (en el caso en que haya barras que lleguen a nudos coaccionados) —ver Ec. (2.38)—.

Un comentario final sobre los esfuerzos: debemos tener en cuenta que la orientación de los esfuerzos depende de la cara de la rebanada sobre la que actúan, por lo que responden a un criterio de signos diferente del que hemos empleado para representar las fuerzas generalizadas en los extremos. Por ello, en las secciones extremas del elemento tendremos:

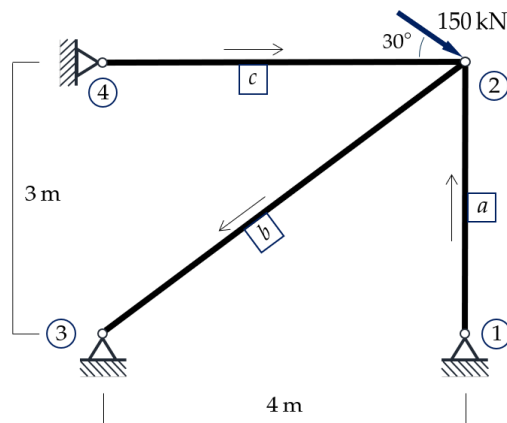
$$\begin{bmatrix} N^e(0) \\ V_y^e(0) \\ M_z^e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{x,1}^e \\ -f_{y,1}^e \\ -m_{z,1}^e \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N^e(L) \\ V_y^e(L) \\ M_z^e(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x,2}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

El motivo del cambio de signo en los valores correspondientes a la sección inicial $x = 0$ es que **las fuerzas en la sección inicial actúan en la cara dorsal del elemento**, mientras que en la sección final $x = L$ las fuerzas actúan en la cara frontal.

Los mismos razonamientos, en cuanto a la superposición de estados y al criterio de signos, son aplicables a la obtención de diagramas de esfuerzos a lo largo de cada uno de los elementos.

EJERCICIO 2.3.

Sobre la estructura del Ejercicio 2.1 actúa una fuerza puntual sobre el nudo 2. Despreciando el efecto del peso propio, (a) Calcula los desplazamientos del nudo 2 y representa la deformada. (b) Calcula y representa las reacciones. (c) Calcula y representa los esfuerzos en las barras.

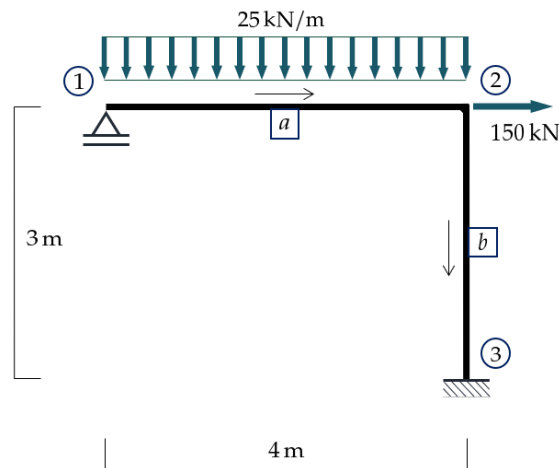


EJERCICIO 2.4.

En la estructura del Ejercicio 2.1 queremos analizar (únicamente) el efecto de un asiento impuesto de 25 mm en el apoyo 1. Calcula los desplazamientos del nudo 2.

EJERCICIO 2.5.

La estructura de la figura es de hormigón pretensado. Las barras a y b están rígidamente unidas en el nudo 2. La sección de ambas es rectangular, maciza, de 0,25 m de ancho y 0,40 m de canto. La orientación de las secciones es tal que el eje fuerte es perpendicular al plano de la estructura. Despreciando la deformación por cortante, analiza la respuesta de la estructura debida a las cargas indicadas. El módulo de elasticidad del hormigón es igual a 33 GPa.



2.8. Desconexiones

En muchos casos, el modelo de la estructura incluye elementos en cuyas secciones inicial y/o final uno o varios grados de libertad no están conectados al nudo al que se une el elemento (Fig. 2.15). Decimos que la barra posee una desconexión (frontal o dorsal) del grado de libertad en cuestión. La matriz de rigidez de esta clase de elementos es diferente de la matriz de la barra rígidamente unida al nudo en sus extremos. Planteamos dos formas de deducir la matriz de un elemento con desconexiones:

1. Utilizar el método de flexibilidad, mediante un desarrollo análogo al de la sección 2.4.1. Lo planteamos como ejercicio al final de esta sección.
2. Partiendo de la matriz de rigidez de la barra rígidamente unida a la estructura, *condensar* los grados de libertad desconectados. Por condensar, entendemos eliminar, o lo que es lo mismo, no calcular esos grados de libertad al solucionar el problema. Lo desarrollaremos a continuación.

Describimos a continuación el proceso de **condensación de grados de libertad desconectados**. Denominamos d_D^e a los grados de libertad que queremos condensar (desconectar), y f_D^e a las componentes del vector de fuerzas en extremos correspondientes a esos grados de libertad,

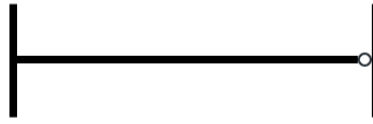


Figura 2.15: Desconexión de la rotación en el extremo de una barra

y $\mathbf{d}_F^e, \mathbf{f}_F^e$ a las restantes componentes de desplazamientos y fuerzas generalizadas en extremos. La ecuación de rigidez del elemento se puede reordenar en bloques:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_F^e \\ \mathbf{f}_D^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF}^e & \mathbf{K}_{FD}^e \\ \mathbf{K}_{DF}^e & \mathbf{K}_{DD}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_F^e \\ \mathbf{d}_D^e \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Las fuerzas generalizadas asociadas a las componentes de desplazamiento que deseamos condensar son nulas: $\mathbf{f}_D^e = \mathbf{0}$. Por ejemplo: en la barra con desconexión frontal del giro, el momento en el extremo frontal es nulo debido a la desconexión. Por lo tanto, el segundo bloque de ecuaciones es:

$$\mathbf{0} = \mathbf{K}_{DF}^e \mathbf{d}_F^e + \mathbf{K}_{DD}^e \mathbf{d}_D^e \quad (2.49)$$

Despejamos los grados de libertad a condensar,

$$\mathbf{d}_D^e = -(\mathbf{K}_{DD}^e)^{-1} \mathbf{K}_{DF}^e \mathbf{d}_F^e, \quad (2.50)$$

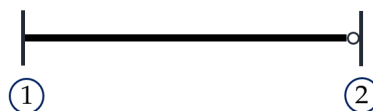
y los sustituimos en la primera ecuación. El resultado es:

$$\mathbf{f}_F^e = [\mathbf{K}_{FF}^e - \mathbf{K}_{FD}^e (\mathbf{K}_{DD}^e)^{-1} \mathbf{K}_{DF}^e] \mathbf{d}_F^e. \quad (2.51)$$

La matriz de rigidez en esta ecuación tiene tantas filas y columnas menos que la original como grados de libertad hemos condensado. Para poder ensamblarla con el resto de matrices es necesario añadir filas y columnas de ceros en las posiciones correspondientes a los grados de libertad condensados.

CUESTIÓN 2.5.

Empleando el procedimiento de condensación, deduce la ecuación de rigidez en ejes locales de una **viga plana de Navier-Bernoulli con desconexión frontal** (en el extremo 2) **de la rotación**.

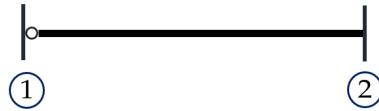


Solución:

$$\begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{y,1}^e \\ m_{z,1}^e \\ f_{x,2}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} & 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ d_{y,1}^e \\ \theta_{z,1}^e \\ d_{x,2}^e \\ d_{y,2}^e \\ \cdot \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

CUESTIÓN 2.6.

Empleando el método de flexibilidad, deduce la ecuación de rigidez en ejes locales de una **viga plana de Navier-Bernoulli con desconexión dorsal** (en el extremo 1) **de la rotación**.



Solución:

$$\begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{y,1}^e \\ m_{z,1}^e \\ f_{x,2}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ d_{y,1}^e \\ \cdot \\ d_{x,2}^e \\ d_{y,2}^e \\ \theta_{z,2}^e \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Dos comentarios relativos a las matrices:

1. La fila de ceros que hemos añadido en cada matriz tiene una interpretación evidente: sean cuales sean los desplazamientos generalizados en los extremos, la componente de fuerza generalizada asociada al grado de libertad desconectado (en este caso el momento en el extremo desconectado) es nula.
2. Las columnas de ceros se pueden interpretar como un recordatorio de que **el grado de libertad desconectado** (en este caso la rotación en el extremo) no va a tener influencia

en la respuesta de la estructura ya que, al multiplicarlo por 0, no va a participar en el ensamblaje y por lo tanto **no se obtiene al solucionar el sistema de ecuaciones de la estructura**. Por este motivo lo hemos sustituido en cada ecuación por una posición vacía. Para llevar a cabo el cambio de sistema de referencia y el ensamblaje trataremos la matriz del mismo modo que la de una barra sin desconexión.

CUESTIÓN 2.7.

Una vez resuelta la estructura y obtenidos los desplazamientos nodales, ¿cómo se calcula el valor del grado de libertad desconectado? (Sugerencia: revisa la explicación de la condensación.)

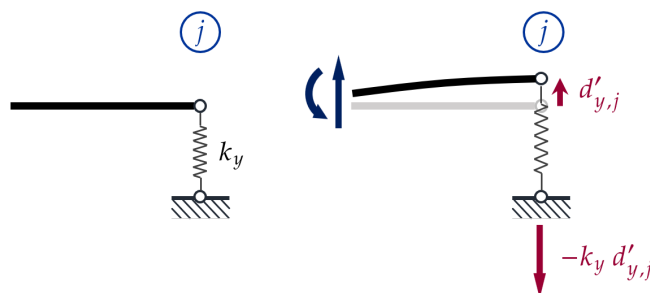
Finalizamos esta sección incluyendo la **matriz de rigidez en ejes locales de una barra plana biarticulada**, es decir, con desconexión de la rotación en ambos extremos:

$$\begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{y,1}^e \\ m_{z,1}^e \\ \hline f_{x,2}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline d_{x,2}^e \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

La diferencia entre esta matriz y la matriz correspondiente a la barra de una estructura articulada plana —Ec. (2.23)— se debe a que en la estructura formada por barras convencionales y barras biarticuladas necesitamos manejar los tres grados de libertad en cada nudo (incluida la rotación) y no solo las traslaciones como en la estructura articulada.

2.9. Apoyos elásticos

Consideramos un dispositivo de apoyo en el que alguno(s) de los grados de libertad está coaccionado elásticamente. Para ilustrar cómo tratar este tipo de apoyo, estudiamos el caso particular de un apoyo en el que existe un resorte que coacciona elásticamente el desplazamiento vertical del nudo j .



La ecuación que relaciona la reacción vertical que actúa sobre el nudo j y el desplazamiento vertical nudo es:

$$f'_{y,j} = -k_y d'_{y,j} \quad (2.55)$$

donde k_y es la rigidez del muelle, y el signo negativo indica que la reacción vertical se opone al desplazamiento del nudo, cosa que sucede sea cual sea el sentido de éste.

Al ensamblar el sistema de ecuaciones completo, la reacción vertical en el nudo j se sustituye por su valor en función del desplazamiento vertical, por lo que en el término independiente de la ecuación aparece una incógnita que impide resolver directamente el sistema:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ -k_y d'_{y,j} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \\ \dots & K'_{jj} & \dots \\ & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ d'_{y,j} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

En esta ecuación K'_{jj} es el término de la diagonal de la matriz de rigidez (que resulta del ensamblaje) correspondiente a la columna del grado de libertad $d'_{y,j}$. Para resolver el sistema, sumamos $k_y d'_{y,j}$ a ambos lados de la ecuación del momento reacción en el nudo j , resultando

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \\ \dots & K'_{jj} + k_y & \dots \\ & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ d'_{y,j} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Además del caso del muelle vertical, este procedimiento es de aplicación directa para apoyos elásticos orientados en la dirección de los grados de libertad considerados en el análisis global (muelles horizontales y resortes al giro, por ejemplo). Simplemente se suma la rigidez del apoyo elástico al término de la diagonal de la matriz de rigidez que multiplica al grado de libertad coaccionado elásticamente, y se anula la posición del vector de cargas correspondiente a la reacción. Una vez resuelto el sistema y obtenido el valor del grado de libertad (el desplazamiento $d'_{y,j}$ en el caso desarrollado) la reacción se calcula mediante la ecuación (2.55).

2.10. Apoyos no concordantes

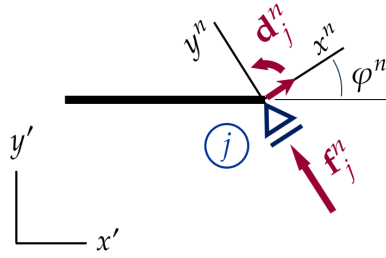
En determinados apoyos como los carritos y las deslizaderas, es posible que los movimientos permitidos tengan lugar en direcciones no concordantes con el sistema de referencia global. Será necesario entonces establecer un sistema de referencia propio para el nudo del apoyo, orientado de acuerdo con las dirección de los movimientos permitidos, que denominamos $\{x^n, y^n, z^n\}$.

De modo análogo a la barra, la matriz de cambio de base para un nudo no concordante j es:

$$\mathbf{T}_j^n = \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & -\sin \varphi^n & 0 \\ \sin \varphi^n & \cos \varphi^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Por lo tanto, la relación entre componentes de las fuerzas y los desplazamientos en el sistema global y el local del nudo:

$$\mathbf{f}'_j = \mathbf{T}_j^n \mathbf{f}^n_j \quad \mathbf{d}'_j = \mathbf{T}_j^n \mathbf{d}^n_j \quad (2.59)$$



Para entender cómo tratar un apoyo no concordante, supondremos que en el nudo j confluyen las barras e y h (no representada en la figura), y que sobre estas no actúan cargas repartidas. La ecuación de equilibrio del nudo j en componentes globales es:

$$\mathbf{f}'_j = \mathbf{K}_{21}^{e'} \mathbf{d}'_i + [\mathbf{K}_{22}^{e'} + \mathbf{K}_{11}^{h'}] \mathbf{d}'_j + \mathbf{K}_{12}^{h'} \mathbf{d}'_k. \quad (2.60)$$

Expresamos ahora las fuerzas y los desplazamientos en el nudo j en componentes del sistema local del nudo:

$$\mathbf{T}_j^n \mathbf{f}_j^n = \mathbf{K}_{21}^{e'} \mathbf{d}'_i + [\mathbf{K}_{22}^{e'} + \mathbf{K}_{11}^{h'}] \mathbf{T}_j^n \mathbf{d}_j^n + \mathbf{K}_{12}^{h'} \mathbf{d}'_k. \quad (2.61)$$

Y premultiplicando por la matriz de cambio traspuesta, resulta:

$$\mathbf{f}_j^n = (\mathbf{T}_j^n)^T \mathbf{K}_{21}^{e'} \mathbf{d}'_i + (\mathbf{T}_j^n)^T [\mathbf{K}_{22}^{e'} + \mathbf{K}_{11}^{h'}] \mathbf{T}_j^n \mathbf{d}_j^n + (\mathbf{T}_j^n)^T \mathbf{K}_{12}^{h'} \mathbf{d}'_k. \quad (2.62)$$

Por lo que, tras el ensamblaje, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{f}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{f}_j^n \\ \vdots \\ \mathbf{f}'_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \mathbf{K}_{11}^{e'} & \dots & \mathbf{K}_{12}^{e'} & \dots & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & (\mathbf{T}_j^n)^T \mathbf{K}_{21}^{e'} & \dots & (\mathbf{T}_j^n)^T [\mathbf{K}_{22}^{e'} + \mathbf{K}_{11}^{h'}] \mathbf{T}_j^n & \dots & (\mathbf{T}_j^n)^T \mathbf{K}_{12}^{h'} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_{21}^{h'} & \dots & \mathbf{K}_{22}^{h'} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{d}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{d}_j^n \\ \vdots \\ \mathbf{d}'_k \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Debido a que en la misma ecuación coexisten distintos sistemas de referencia, la matriz de rigidez pierde su simetría. Esto puede suponer una pérdida de eficiencia de la solución numérica en modelos con muchos grados de libertad. Existen técnicas para paliar esta desventaja, que quedan fuera del alcance de este texto.

Al resolver el sistema se obtienen las componentes de los desplazamientos y reacciones en el apoyo no concordante en componentes del sistema local.

CUESTIÓN 2.8.

Modificar la ecuación (2.63) suponiendo que sobre el elemento e actúa una carga repartida que produce reacciones de empotramiento perfecto $\mathbf{f}_1^{0e}$ y $\mathbf{f}_2^{0e}$.

APÉNDICE A

Modelos de la teoría de vigas

Un **modelo matemático de viga** es un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones describen con precisión suficiente el comportamiento mecánico de una viga, entendida como sólido deformable en el que una dimensión (longitudinal) es considerablemente mayor que las otras dos (las asociadas a las secciones transversales). Habitualmente se emplea la expresión *Teoría de Vigas* para referirse a un cierto modelo de viga.

Los modelos de viga se introducen para reducir la complejidad desproporcionada asociada a obtener la respuesta mecánica de una viga a partir, directamente, de las ecuaciones de la elasticidad tridimensional. Para ello se introduce un conjunto de funciones incógnita dependientes de una única variable (la posición a lo largo de la directriz). El problema matemático se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, en lugar de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. La disciplina tradicionalmente llamada *Resistencia de Materiales*, además de la formulación de la teoría de vigas (basada generalmente en el modelo de Bernoulli-Euler), incluye la formulación de métodos de determinación de soluciones de las ecuaciones del modelo en todo el dominio (la longitud de la viga) —la integración de la ecuación de la elástica o el método de Müller-Breslau—, o en secciones concretas —los Teoremas de Mohr o el método de Castigliano—, por nombrar algunos de ellos.

La clasificación de modelos de viga en ingeniería se basa en la **cinemática de la sección transversal**. El modelo habitualmente usado en cálculos manuales es el **modelo de viga Navier-Bernoulli**, también llamado **modelo de Bernoulli-Euler**, que asume que las secciones inicialmente planas y perpendiculares a la directriz de la viga no deformada permanecen planas y perpendiculares a la directriz deformada. Cuando se admite que las secciones pueden girar sin permanecer perpendiculares a la directriz deformada, se obtiene el **modelo de viga de Timoshenko**. En vigas sometidas a torsión se emplea, o bien la teoría de **Saint-Venant** (torsión uniforme), o bien la de **Umanski-Vlasov** (torsión no uniforme). La referencia [Mon17] contiene un estudio sistemático y detallado de los modelos mencionados.

En esta sección, nos limitamos a revisar la formulación de los modelos planos más habituales (Navier-Bernoulli y Timoshenko) que servirá de base para introducir los correspondientes modelos no lineales de viga.

Antes de entrar en el detalle de la teoría conviene mencionar el **campo de aplicación habitual** de cada modelo. El modelo de Navier-Bernoulli proporciona buenos resultados en vigas cuya relación canto - luz es inferior a 1/10. (Si la viga es muy esbelta —por ejemplo para relaciones inferiores a 1/30— la hipótesis de desplazamientos infinitesimales deja de ser válida y es necesario recurrir a modelos geoméricamente no lineales que pueden estar basados en la hipótesis misma cinemática.) El modelo de Timoshenko se considera apropiado para vigas

con una relación canto-luz comprendida entre $1/10$ y $1/5$. Para relaciones canto-luz mayores la teoría de vigas no es una herramienta apropiada.

En la mayoría de los textos introductorios de Resistencia de Materiales se presenta la *Teoría de Vigas* basada en el modelo de Navier-Bernoulli. El desarrollo suele ser el siguiente:

1. Deducir las *ecuaciones* (diferenciales) *de equilibrio interno* planteando el equilibrio de una rebanada infinitesimal de viga; estas ecuaciones relacionan los esfuerzos (fuerzas internas) con las cargas exteriores (fuerzas generalizadas).
2. Estudiar la deformación de la rebanada mediante las *ecuaciones cinemáticas* y obtener el momento flector como resultante de tensiones normales sobre la sección transversal empleando las *ecuaciones constitutivas*, que relacionan los esfuerzos con las deformaciones del modelo.
3. Desarrollar la *ecuación diferencial de la elástica* (la forma de la directriz deformada) a partir de (1) y (2).

En este texto, presentaremos en primer lugar el resultado de este desarrollo, pero sin incluir los detalles del mismo, que pueden consultarse en cualquier referencia básica (v.g. [Ger02]). A continuación, **deduciremos las ecuaciones** que describen el comportamiento de la viga **aplicando el PDV** a un sólido con la cinemática asociada al modelo. Este procedimiento es, sin duda, menos intuitivo y más abstracto que el desarrollo clásico, y en ese sentido es, *aparentemente*, menos didáctico. Sin embargo, tiene varias **ventajas** que hacen de él una herramienta imprescindible en cursos avanzados de análisis de estructuras. Las citamos a continuación:

- Los esfuerzos (fuerzas internas) y las deformaciones generalizadas consistentes con el modelo no se introducen a priori, sino que se deducen. Esto garantiza la consistencia de los mismos.
- La misma afirmación es aplicable a las cargas generalizadas o fuerzas exteriores consistentes con el modelo.
- El procedimiento proporciona la totalidad de las ecuaciones que describen el problema, incluyendo las ecuaciones cinemáticas, constitutivas y de equilibrio interno y en el contorno.
- Este mismo proceder es el que se emplea para desarrollar el método de elementos finitos.

Tanto en el desarrollo del modelo de Timoshenko, como en el de Navier-Bernoulli, se consideran las siguientes **hipótesis generales**:

1. El material es elástico, lineal, homogéneo e isótropo (material de Hooke).
2. Los desplazamientos y las rotaciones de las secciones debidos a la actuación de las cargas son muy pequeños y pueden considerarse infinitesimales.
3. Las deformaciones se pueden considerar infinitesimales.

Una consecuencia de la hipótesis 2 es que el equilibrio de fuerzas y momentos en la estructura se establece, a efectos del análisis, en la geometría inicial (libre de cargas) de la viga. Esta afirmación es una consecuencia de la hipótesis anterior.

A.1. Modelo de viga de Timoshenko

Cinemática del modelo de viga de Timoshenko

Las secciones transversales de la viga son indeformables en su plano, y permanecen planas en la viga deformada (aunque, en general, no permanecen perpendiculares a la directriz deformada).

El modelo de Timoshenko reproduce el comportamiento de **vigas deformables a cortante**. Es el modelo implementado por defecto en los elementos viga en programas comerciales de análisis por elementos finitos en el ámbito de la ingeniería civil, completado con el comportamiento torsional de Saint-Venant. En esta sección lo desarrollamos para una **viga recta de sección constante simétrica respecto del eje y** , formada por un **material de Hooke homogéneo y solicitada por acciones que producen una deformación simétrica respecto del plano x, y** . (De forma poco rigurosa, diremos que la viga se deforma dentro del plano x, y .) El considerar únicamente el comportamiento plano permite manejar expresiones más simples y presentar una versión simple del modelo sin restar generalidad al método empleado.

Consideramos un sistema de referencia central y principal: el eje x une los centroides (centros geométricos) de las secciones transversales, y en cada sección, los ejes y, z son ejes principales de inercia. Las secciones transversales se consideran indeformables en su plano. Las cargas aplicadas no producen desplazamientos en la dirección z . Admitimos que los desplazamientos, las rotaciones y sus derivadas, son infinitesimales.

A.1.1. Síntesis del modelo de Timoshenko

La Figura A.1 representa la rotación y la traslación de una sección transversal de la viga en el modelo de Timoshenko. Los **desplazamientos generalizados** $u(x)$, $v(x)$, $\theta_z(x)$ describen la traslación del centro de gravedad y la rotación debida a la flexión de la sección transversal situada en la coordenada x , y son las incógnitas del problema de flexión. Es importante fijarse en que la rotación de la sección es, en general, diferente de la derivada del desplazamiento transversal, $v'(x)$, ya que la sección no permanece perpendicular a la directriz deformada.

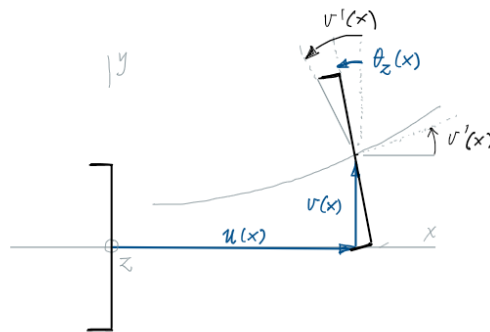


Figura A.1: Cinemática del modelo de Timoshenko.

El diagrama de la figura A.2 muestra todas las funciones involucradas en el modelo, y las relaciones entre ellas, dadas por las ecuaciones cinemáticas, constitutivas y de equilibrio interno. Todas las funciones incluidas en el diagrama dependen de la variable independiente x ; la dependencia se ha omitido por claridad.

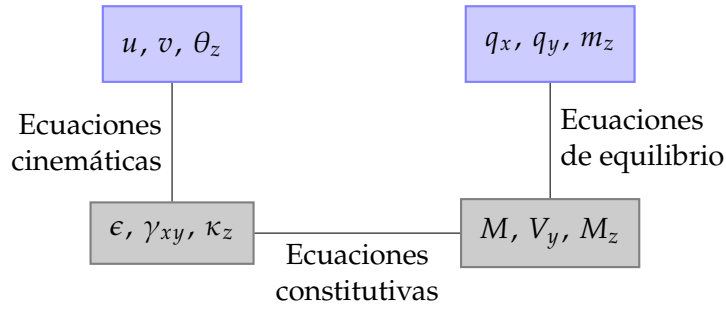


Figura A.2: Variables y ecuaciones del modelo de Timoshenko.

Los *esfuerzos* en una rebanada de la viga (fuerzas internas consistentes con el modelo) en el caso plano se representan en la Figura A.3. Son el **esfuerzo axial** $N(x)$, el **esfuerzo cortante** $V_y(x)$, y el **momento flector** $M_z(x)$. El criterio de signos con el que se ha desarrollado la teoría es fácil de recordar: cada uno de los esfuerzos es positivo si actúa en el sentido positivo del eje correspondiente sobre la cara frontal de la rebanada.

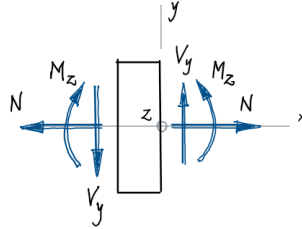


Figura A.3: Esfuerzos en una rebanada de viga (caso plano).

Las *deformaciones generalizadas* del modelo de Timoshenko (medidas de la deformación consistentes con el modelo) guardan una correspondencia directa con los esfuerzos enumerados en el apartado anterior. Son: el **alargamiento unitario de la directriz** $\epsilon(x)$, la **distorsión angular de la sección** $\gamma_{xy}(x)$, y la **rotación unitaria de la sección** $\kappa_z(x)$. (En este contexto, el adjetivo *unitario/a* es equivalente a la expresión *por unidad de longitud*.) El significado físico de estas variables se representa en la Figura A.4.

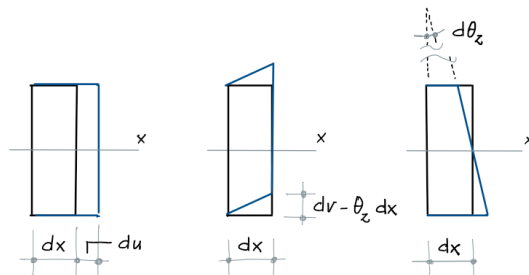


Figura A.4: Interpretación de las deformaciones generalizadas tomando como referencia la cara dorsal de una rebanada de viga de espesor diferencial (caso plano).

Las ecuaciones que relacionan las distintas variables son las siguientes:

Ecuaciones cinemáticas

$$\epsilon = \frac{du}{dx}, \quad (\text{A.1a})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} - \theta_z, \quad (\text{A.1b})$$

$$\kappa_z = \frac{d\theta_z}{dx}. \quad (\text{A.1c})$$

Ecuaciones constitutivas

$$N = EA \epsilon, \quad (\text{A.2a})$$

$$V_y = GA_{Vy} \gamma_{xy}, \quad (\text{A.2b})$$

$$M_z = EI_z \kappa_z. \quad (\text{A.2c})$$

Ecuaciones de equilibrio interno

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0, \quad (\text{A.3a})$$

$$\frac{dV_y}{dx} + q_y = 0, \quad (\text{A.3b})$$

$$\frac{dM_z}{dx} + V_y + m_z = 0. \quad (\text{A.3c})$$

En la ecuación (A.2b), el área de cortante en dirección y es $A_{Vy} = kA$, donde k es el factor de cortante de la sección transversal, que vale 5/6 en el caso de una sección rectangular. En la referencia [Ger02] se pueden consultar los valores de k para otros tipos de sección.

Observando las ecuaciones anteriores, salta a la vista que en la viga recta el comportamiento a tracción/compresión está desacoplado del comportamiento a flexión: en ninguna de las ecuaciones (A.1a), (A.28a), (A.3a) intervienen variables incluidas en las otras dos ecuaciones de su grupo. Esto quiere decir que en una viga recta, en teoría lineal (también llamada de primer orden), cada *problema* (tracción/compresión por una parte, y flexión por la otra) se puede resolver de manera independiente. Así pues, reordenando y eliminando las deformaciones generalizadas de las ecuaciones, tenemos los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

Tracción/compresión:

$$\begin{bmatrix} u' \\ N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/EA \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ q_x \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Es interesante señalar que sustituyendo la segunda ecuación en la derivada de la primera, obtenemos una única ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{q_x}{EA}, \quad (\text{A.5})$$

que puede integrarse directamente para obtener la solución de los desplazamientos longitudinales.

Flexión (viga de Timoshenko):

$$\begin{bmatrix} v' \\ \theta'_z \\ V'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/GA_{Vy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/EI_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \theta_z \\ V_y \\ M_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_y \\ m_z \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

En el problema de flexión, también se puede reescribir el sistema como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden eliminando los esfuerzos. Sin embargo, este formato no aporta ningún beneficio para su resolución, y por lo tanto lo omitimos.

En ambos casos la solución al problema se obtiene como suma de la solución del sistema homogéneo (aquel en el que el término independiente —las cargas en este caso— es nulo) más una solución particular del sistema completo. Incluimos aquí la solución del sistema homogéneo en cada problema, puesto que será útil para obtener la matriz de rigidez de la viga. Para definir las condiciones de contorno, denominamos 1 y 2 a los extremos inicial y final de la viga.

1. **Solución del problema homogéneo de tracción/compresión** Suponemos que las condiciones de contorno en la sección $x = 0$ son:

$$u(0) = d_{x,1} \quad N(0) = -f_{x,1} \quad (\text{A.7})$$

El signo negativo en la fuerza se debe a que ésta actúa sobre la cara dorsal de la rebanada. Por tanto, una fuerza positiva actuando sobre el extremo inicial de la viga equivale a un axil negativo (de compresión) en ese mismo extremo. Integrando el sistema (A.4) se obtiene la solución de los desplazamientos longitudinales y los esfuerzos axiles en función de las condiciones de contorno en la sección inicial:

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x/EA \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1} \\ f_{x,1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Como cabía esperar, para la viga libre de carga exterior longitudinal, los axiles son constantes y los desplazamientos longitudinales varían linealmente.

2. **Solución del problema homogéneo de flexión** Suponemos que las condiciones de contorno en la sección $x = 0$ (extremo 1) son:

$$v(0) = d_{y,1} \quad V_y(0) = -f_{y,1} \quad (\text{A.9a})$$

$$\theta_z(0) = \theta_{z,1} \quad M_z(0) = -m_{z,1} \quad (\text{A.9b})$$

Los signos de los esfuerzos tienen la misma explicación que en el caso de tracción/compresión. Integrando el sistema (A.6) se obtiene la solución de los desplazamientos transversales y las rotaciones de flexión, y de los esfuerzos cortantes y momentos flectores en función de las condiciones de contorno en la sección inicial:

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ \theta_z(x) \\ V_y(x) \\ M_z(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^3/(6EI_z) - x/GA_{Vy} & -x^2/(2EI_z) \\ 0 & 1 & x^2/(2EI_z) & -x/EI_z \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{y,1} \\ \theta_{z,1} \\ f_{y,1} \\ m_{z,1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

La solución homogénea está compuesta por cortantes constantes, funciones lineales para los momentos flectores, cuadráticas para las rotaciones y cúbicas para los desplazamientos.

A.1.2. Deducción del modelo de Timoshenko a partir del PDV

En esta sección, vamos a deducir las ecuaciones presentadas en la anterior haciendo uso del Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV).

Las ecuaciones (A.11) describen la **cinemática** de un punto de la sección situado a una distancia y del centroide. Los desplazamientos u^*, v^* del punto¹—definido por sus coordenadas (x, y) — se expresan en función de las traslaciones u, v de la directriz y de la rotación θ_z de la sección (Figura A.5).

$$u^*(x, y) = u(x) - y \theta_z(x), \quad (\text{A.11a})$$

$$v^*(x, y) = v(x). \quad (\text{A.11b})$$

Las tres funciones $u(x), v(x), \theta_z(x)$ son los **desplazamientos generalizados**, que constituyen las

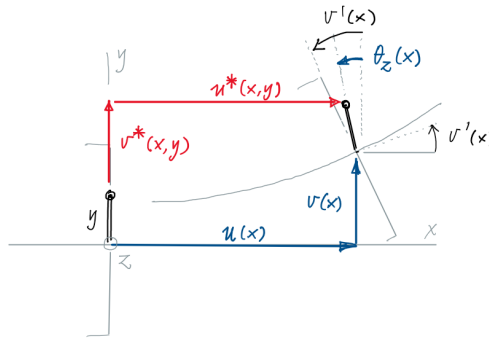


Figura A.5: Desplazamientos de los puntos materiales y desplazamientos generalizados del modelo de Timoshenko.

incógnitas primarias del modelo de Timoshenko. El siguiente paso es calcular las deformaciones empleando la teoría lineal de la elasticidad. Dado que el problema es plano, y a la vista de las expresiones anteriores, únicamente hay dos componentes no nulas de la deformación:

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} = u' - y \theta_z' = \epsilon - y \kappa_z, \quad (\text{A.12a})$$

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} = v' - \theta_z = \gamma_{xy}. \quad (\text{A.12b})$$

En las ecuaciones (A.12), hemos introducido las **deformaciones generalizadas del modelo plano de Timoshenko**, que son exclusivamente función de la variable independiente x :

$$\epsilon := u' \quad \text{Alargamiento unitario de la directriz,} \quad (\text{A.13a})$$

$$\gamma_{xy} := v' - \theta_z \quad \text{Deformación de corte de la sección,} \quad (\text{A.13b})$$

$$\kappa_z := \theta_z' \quad \text{Rotación unitaria de la sección.} \quad (\text{A.13c})$$

Los desplazamientos virtuales y las deformaciones virtuales se obtienen como “derivadas” o **variaciones** de los desplazamientos y las deformaciones:

$$\delta u^* = \delta u - y \delta \theta_z \quad \delta v^* = \delta v \quad (\text{A.14a})$$

$$\delta \varepsilon_x^* = \delta u' - y \delta \theta_z' = \delta \epsilon - y \delta \kappa_z \quad \delta \gamma_{xy}^* = \delta v' - \delta \theta_z = \delta \gamma_{xy} \quad (\text{A.14b})$$

¹Designamos mediante un asterisco a los desplazamientos y/o componentes de la deformación de los puntos materiales del sólido.

Trabajo virtual de las fuerzas internas

Ahora estamos en condiciones de evaluar el trabajo virtual de las fuerzas internas:

$$\begin{aligned}\delta W_{int} &= \int_V \left(\delta \varepsilon_x^* \sigma_x^* + \delta \gamma_{xy}^* \tau_{xy}^* \right) dV \\ &= \int_{x=0}^{x=L} \int_A \left((\delta \varepsilon - y \delta \kappa_z) \sigma_x^* + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}^* \right) dA dx.\end{aligned}$$

Operando y teniendo en cuenta que debido a que el sistema de referencia es central el momento estático $\int_A y dA$ es nulo, se tiene:

$$\delta W_{int} = \int_0^L \left[\delta \varepsilon \left(\int_A \sigma_x^* dA \right) + \delta \gamma_{xy} \left(\int_A \tau_{xy}^* dA \right) + \delta \kappa_z \left(- \int_A y \sigma_x^* dA \right) \right] dx. \quad (A.15)$$

Las integrales son las variables conjugadas de las variaciones de las deformaciones, y proporcionan la **definición estática de los esfuerzos en el modelo plano de Timoshenko**, que justifica la denominación *resultantes de tensiones* que aparece en algunos textos:

$$N := \int_A \sigma_x^* dA \quad \text{Esfuerzo axil,} \quad (A.16a)$$

$$V_y := \int_A \tau_{xy}^* dA \quad \text{Esfuerzo cortante,} \quad (A.16b)$$

$$M_z := - \int_A y \sigma_x^* dA \quad \text{Momento flector.} \quad (A.16c)$$

Por tanto, el trabajo virtual de las fuerzas internas es

$$\begin{aligned}\delta W_{int} &= \int_0^L (\delta \varepsilon N + \delta \gamma_{xy} V_y + \delta \kappa_z M_z) dx \\ &= \int_0^L (\delta u' N + (\delta v' - \delta \theta_z) V_y + \delta \theta_z' M_z) dx\end{aligned} \quad (A.17)$$

En los problemas de estructuras es habitual tener como dato las cargas distribuidas sobre los elementos de la estructura, y/o las cargas (fuerzas y momentos) puntuales, actuando en secciones dadas. Estas acciones provienen generalmente de fuerzas de volumen y superficie que se reducen al modelo con una técnica análoga a la empleada al desarrollar el trabajo virtual de las fuerzas internas. En el caso del modelo plano de Timoshenko tendremos las siguientes fuerzas generalizadas (acciones distribuidas a lo largo de la directriz) conjugadas de los desplazamientos virtuales generalizados δu , δv , $\delta \theta_z$:

$q_x(x)$	Carga distribuida en dirección x ,
$q_y(x)$	Carga distribuida en dirección y ,
$m_z(x)$	Momento exterior distribuido de eje z .

En las secciones inicial (1) y final (2) de la viga, actúan fuerzas y momentos que denominamos $f_{x,1}$, $f_{y,1}$, $m_{z,1}$ (inicial), y $f_{x,2}$, $f_{y,2}$, $m_{z,2}$ (final). No incluimos el proceso de reducción de las fuerzas exteriores de superficie y de volumen al modelo para no sobrecargar innecesariamente el texto. Utilizando estas fuerzas generalizadas podemos escribir el **trabajo virtual de las fuerzas**

exteriores así:

$$\begin{aligned}\delta W_{ext} = & \int_0^L (\delta u q_x + \delta v q_y + \delta \theta_z m_z) dx \\ & + \delta u|_{x=0} f_{x,1} + \delta v|_{x=0} f_{y,1} + \delta \theta_z|_{x=0} m_{z,1} \\ & + \delta u|_{x=L} f_{x,2} + \delta v|_{x=L} f_{y,2} + \delta \theta_z|_{x=L} m_{z,2}.\end{aligned}\quad (A.18)$$

La primera línea representa el trabajo virtual de las acciones exteriores distribuidas a lo largo de la directriz, y la segunda y tercera, las acciones exteriores sobre las secciones inicial y final, respectivamente, de la viga.

El PDV nos dice que la viga de Timoshenko está en equilibrio si, y solo si, $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$ para cualquier sistema de desplazamientos virtuales δu , δv , $\delta \theta_z$ cinemáticamente admisibles. Igualando (A.17) a (A.18),

$$\begin{aligned}\int_0^L (\delta u' N + (\delta v' - \delta \theta_z) V_y + \delta \theta_z' M_z) dx = & \int_0^L (\delta u q_x + \delta v q_y + \delta \theta_z m_z) dx \\ & + \delta u|_{x=0} f_{x,1} + \delta v|_{x=0} f_{y,1} + \delta \theta_z|_{x=0} m_{z,1} \\ & + \delta u|_{x=L} f_{x,2} + \delta v|_{x=L} f_{y,2} + \delta \theta_z|_{x=L} m_{z,2}.\end{aligned}\quad (A.19)$$

Integrando por partes y agrupando a un lado de la igualdad resulta:

$$\begin{aligned}\int_0^L [\delta u (N' + q_x) + \delta v (V_y' + q_y) + \delta \theta_z (M_z' + V_y + m_z)] dx \\ + \delta u|_{x=0} (N(0) + f_{x,1}) - \delta u|_{x=L} (N(L) - f_{x,2}) \\ + \delta v|_{x=0} (V_y(0) + f_{y,1}) - \delta v|_{x=L} (V_y(L) - f_{y,2}) \\ + \delta \theta_z|_{x=0} (M_z(0) + m_{z,1}) - \delta \theta_z|_{x=L} (M_z(L) - m_{z,2}) = 0,\end{aligned}\quad (A.20)$$

ecuación que debe cumplirse para cualquier variación cinemáticamente admisible de los desplazamientos generalizados δu , δv , $\delta \theta_z$. Por lo tanto, los factores de los desplazamientos virtuales generalizados, que deben anularse, proporcionan las **ecuaciones de equilibrio interno** del modelo de Timoshenko:

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0, \quad (A.21a)$$

$$\frac{dV_y}{dx} + q_y = 0, \quad (A.21b)$$

$$\frac{dM_z}{dx} + V_y + m_z = 0. \quad (A.21c)$$

Las dos últimas líneas de la ecuación (A.20) representan el trabajo virtual (interno y externo) en el contorno, y permiten formular las **condiciones de contorno estáticas y cinemáticas** en problemas concretos. Lo vemos en el siguiente ejemplo (Figura A.6).

Las **condiciones de contorno cinemáticas** del ejemplo son:

$$\begin{aligned}u(0) = v(0) = \theta_z(0) = 0 & \quad (\text{empotramiento}), \\ v(L) = 0 & \quad (\text{apoyo deslizando}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, para que las variaciones de los desplazamientos generalizados sean cinemáticamente admisibles debe cumplirse:

$$\delta u|_{x=0} = \delta v|_{x=0} = \delta \theta_z|_{x=0} = \delta v|_{x=L} = 0.$$

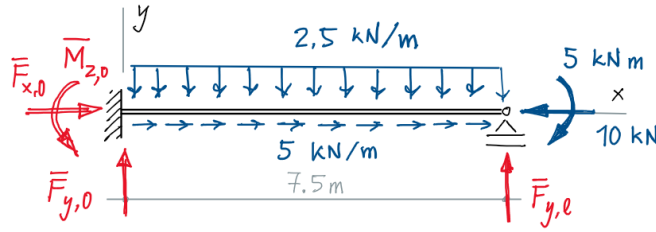


Figura A.6: Ejemplo de condiciones de contorno

con lo que los términos en los que aparecen estas variaciones en la ecuación (A.20) se anulan directamente, y no se tiene información *a priori* de las fuerzas y momentos correspondientes, $f_{x,1}$, $f_{y,1}$, $m_{z,1}$, $f_{y,2}$, que son las **reacciones** en este ejemplo. Sin embargo, $\delta u|_{x=L}$ y $\delta \theta_z|_{x=L}$ serán, en general, no nulas, por lo que es necesario que se anulen sus cofactores. Por tanto, en este caso, las **condiciones de contorno estáticas** son:

$$\begin{aligned} N(L) &= -10 \text{ kN}, \\ M_z(L) &= -5 \text{ kN m}. \end{aligned}$$

Insistimos en los criterios de signos empleados:

1. El criterio de signos de los desplazamientos generalizados es un criterio asociado a los ejes del problema (desplazamientos positivos en el sentido de avance de los ejes).
2. El mismo criterio rige para las fuerzas y momentos exteriores distribuidos, y los que actúan en las secciones extremas. Las reacciones incógnita se han representado como positivas con este criterio.
3. El criterio de signos de los esfuerzos tiene en cuenta que tienen orientaciones opuestas sobre caras opuestas (Figura A.3): los esfuerzos son positivos cuando actúan en el sentido positivo de los ejes en la cara positiva de cada rebanada.

El desarrollo presentado en esta sección pone de manifiesto las ventajas del empleo del PDV: (1) las deformaciones generalizadas son consecuencia de la cinemática; (2) la definición de los esfuerzos y de las fuerzas generalizadas consistentes con el modelo se obtiene al reducir el trabajo virtual de las fuerzas internas y exteriores del 3D al dominio 1D; (3) finalmente, tras integrar por partes se obtienen las ecuaciones de equilibrio interno y de equilibrio en el contorno. Todo este proceso se sintetiza en el diagrama de la figura A.7. Otro aspecto destacable es que **las definiciones estáticas de los esfuerzos, y las ecuaciones de equilibrio se obtienen a partir del PDV con independencia de la ley constitutiva del material.**

En la teoría clásica de vigas se asume que el comportamiento de las fibras longitudinales de la viga es elástico lineal:

$$\sigma_x^* = E \varepsilon_x^* = E (\epsilon - y \kappa_z), \quad (\text{A.22a})$$

$$\tau_{xy}^* = G \gamma_{xy}^* = G \gamma_{xy}. \quad (\text{A.22b})$$

Esta hipótesis permite obtener las **ecuaciones constitutivas del modelo plano de Timoshenko**, que establecen una relación lineal (consecuencia de la ley de comportamiento asumida) entre

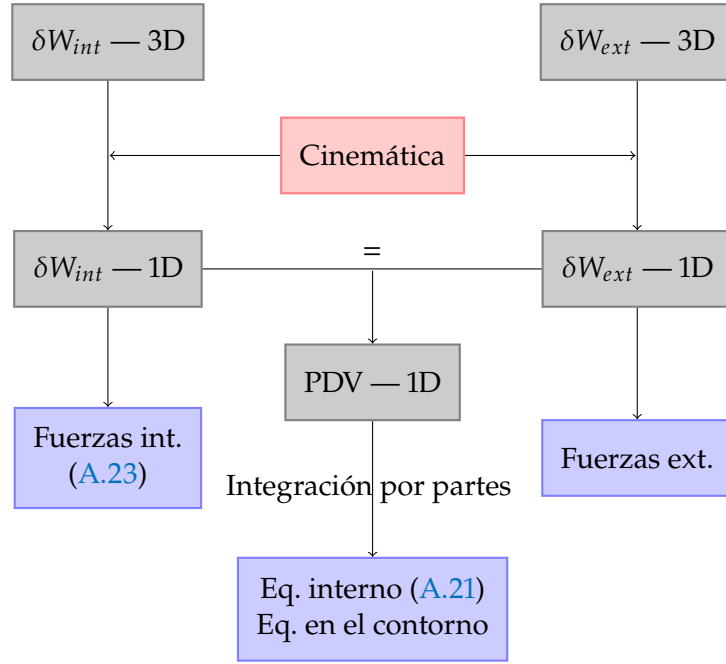


Figura A.7: Sinopsis de la aplicación del PDV.

esfuerzos y deformaciones del modelo:

$$N = \int_A \sigma_x^* dA = E \epsilon \int_A dA = EA \epsilon = EA u' \quad \text{Esfuerzo axial,} \quad (\text{A.23a})$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy}^* dA = G \gamma_{xy} \int_A dA = GA \gamma_{xy} = GA (v' - \theta_z) \quad \text{Esfuerzo cortante,} \quad (\text{A.23b})$$

$$M_z = - \int_A y \sigma_x^* dA = E \kappa_z \int_A y^2 dA = EI_z \kappa_z = EI_z \theta_z' \quad \text{Momento flector.} \quad (\text{A.23c})$$

Para obtener estas expresiones se ha tenido en cuenta que el sistema de referencia es centra, y el momento estático $\int_A y dA$ es nulo.

Conocidos los esfuerzos, es posible evaluar la **distribución de tensiones sobre la sección** despejando las deformaciones generalizadas en las ecuaciones (A.23), y sustituyendo en las ecuaciones de la ley de Hooke (A.22) (Figura A.8):

$$\sigma_x^* = E (\epsilon - y \kappa_z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y, \quad (\text{A.24a})$$

$$\tau_{xy}^* = G \gamma_{xy} = \frac{V_y}{A} \quad (\text{esta distribución es inconsistente}). \quad (\text{A.24b})$$

La definición constitutiva del cortante requiere una corrección. El motivo es que la distribución de tensiones tangenciales derivada de la cinemática de Timoshenko no es consistente con la distribución más precisa obtenida mediante la teoría de Zhuravski-Colignon, que es parabólica y se anula en las fibras superior e inferior de la sección. La tensión tangencial τ_{xy}^* dada por la ecuación (A.24b) debe corregirse de forma que la energía de deformación asociada coincida con la obtenida a partir de la distribución dada por la fórmula de Zhuravski (Fig. A.9).

$$\tau_{xy}^* = \frac{V_y}{A_{Vy}} \quad (\text{A.25})$$

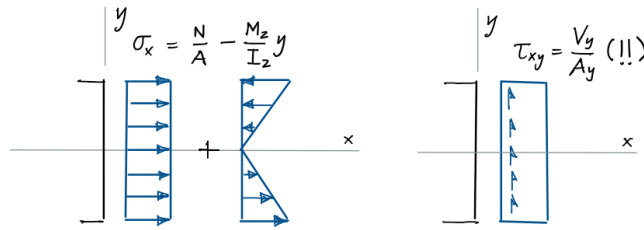


Figura A.8: Distribución de tensiones normales debidas al esfuerzo axial y al momento flector (izq.) y distribución (inconsistente) de tensiones tangenciales debidas al cortante derivada de la hipótesis cinemática.

La fórmula corregida incluye por tanto el *área de cortante* A_{Vy} mencionada anteriormente. El resultado se puede interpretar como un promedio de la distribución dada por la fórmula de Zhuravski.

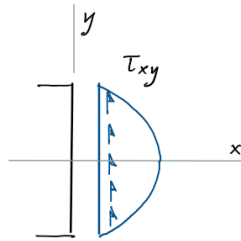


Figura A.9: Distribución de tensiones tangenciales según la fórmula de Zhuravski.

En la sección anterior ya incluimos los sistemas de ecuaciones que describen el comportamiento de la viga de Timoshenko, que se obtienen al sustituir las ecuaciones cinemáticas en las constitutivas y las de equilibrio, eliminando las deformaciones generalizadas. Dado un sistema de cargas exteriores, la solución del sistema proporciona los desplazamientos generalizados y los esfuerzos. A partir de ahí, la cinemática del modelo (A.11), permite obtener los desplazamientos en cualquier punto de una sección, y las ecuaciones (A.24) las tensiones en dichos puntos.

A.2. Modelo de viga de Navier-Bernoulli

Hipótesis cinemática del modelo de viga de Navier-Bernoulli

Las secciones transversales (inicialmente perpendiculares a la directriz de la viga) son indeformables en su plano, y permanecen planas y perpendiculares a la directriz deformada.

Aunque el modelo de Navier-Bernoulli también puede deducirse a partir del PDV, vamos a deducirlo de los resultados obtenidos del modelo de Timoshenko imponiendo la restricción cinemática adicional, que es la siguiente:

$$\theta_z = v'. \quad (\text{A.26})$$

Esta restricción tiene tres consecuencias inmediatas:

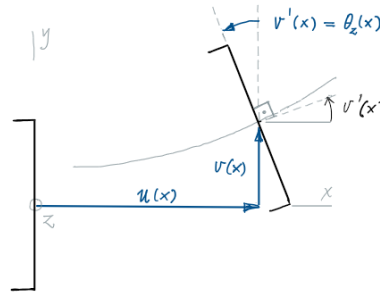


Figura A.10: Cinemática del modelo de Navier-Bernoulli.

- La rotación θ_z deja de ser un grado de libertad.
- La deformación de corte γ_{xy} es nula en todas las secciones —cf. Ec. (A.13b).
- El esfuerzo cortante V_y deja de ser un esfuerzo consistente con la teoría, ya que no tiene una ecuación constitutiva asociada. La ecuación constitutiva (A.23b) solo tiene sentido si se admite que la rigidez $GA \rightarrow \infty$, ya que $\gamma_{xy} = 0$. Es importante señalar que **el esfuerzo cortante en el modelo de Navier-Bernoulli, en general, no es nulo** puesto que es necesario para el equilibrio; simplemente no se puede deducir de la ecuación constitutiva $V_y = \infty \cdot 0$.

Teniendo en cuenta la restricción (A.26), las ecuaciones del modelo se deducen de las de Timoshenko y son las siguientes:

Ecuaciones cinemáticas

$$\epsilon = \frac{du}{dx}, \quad (\text{A.27a})$$

$$\kappa_z = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (\text{A.27b})$$

Ecuaciones constitutivas

$$N = EA \epsilon, \quad (\text{A.28a})$$

$$M_z = EI_z \kappa_z. \quad (\text{A.28b})$$

Ecuaciones de equilibrio interno

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0, \quad (\text{A.29a})$$

$$\frac{d^2M_z}{dx^2} = q_y. \quad (\text{A.29b})$$

De nuevo, el comportamiento a tracción/compresión está desacoplado del comportamiento a flexión, que queda definido mediante solo tres ecuaciones: (A.27b), (A.28b), (A.29b). Estrictamente, el modelo no permite aplicar directamente pares distribuidos de eje y , que son conjugados de la rotación de flexión de las secciones, pues ésta ya no es un grado de libertad.

Por otra parte, el cortante se obtiene como derivada del momento —consecuencia de la ecuación (A.3c)—:

$$V_y = -\frac{dM_z}{dx}, \quad (\text{A.30})$$

y la rotación de las secciones se obtiene como derivada del desplazamiento transversal de acuerdo con (A.26):

$$\theta_z = \frac{dv}{dx}. \quad (\text{A.31})$$

Las variables y ecuaciones se sintetizan en el diagrama de la figura A.11. El cortante se ha escrito entre paréntesis para insistir en la idea de que, aún no siendo nulo, no es un esfuerzo consistente con el modelo.

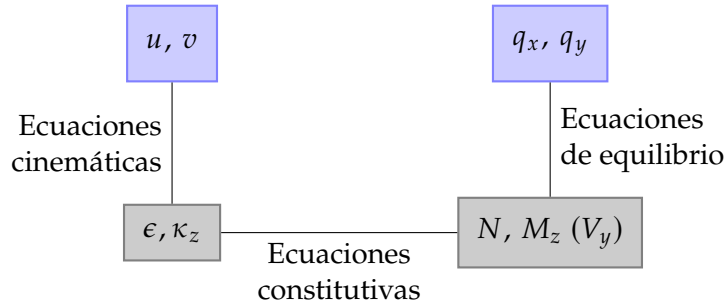


Figura A.11: Variables y ecuaciones del modelo de Navier-Bernoulli.

El motivo de que el modelo de Navier-Bernoulli fuese adoptado durante el s.XIX como *la* teoría de vigas sometidas a flexión, es que se puede reducir a una única ecuación diferencial de cuarto orden fácilmente resoluble. Derivando dos veces (A.28b) y sustituyendo en (A.29b) y (A.27b) se obtiene la **ecuación diferencial de la elástica**:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q_y}{EI_z}. \quad (\text{A.32})$$

O esta versión alternativa, muy útil para obtener la deformada de la directriz una vez conocido el diagrama de momentos,

$$M_z = EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \left(= EI_z \frac{d\theta_z}{dx} \right), \quad (\text{A.33})$$

dando lugar a los denominados *Teoremas de Mohr*.

APÉNDICE B

Matriz de rigidez de la viga de Timoshenko

En esta sección obtendremos la matriz de rigidez de la viga de Timoshenko a partir de las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales que rigen los problemas homogéneos de tracción-compresión y de flexión de Timoshenko, obtenidas en el Apéndice A. Particularizando las soluciones en $x = L$ obtendremos expresiones que relacionan todas las variables que intervienen en la ecuación de rigidez del elemento (2.4).

Comenzamos por la **solución del problema homogéneo de tracción/compresión**—Ec. (A.8) particularizada en el extremo final de la viga—:

$$\begin{bmatrix} d_{x,2}^e \\ f_{x,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(L) \\ N(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{EA} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ f_{x,1}^e \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Recordamos que las variables en los extremos de la viga se denotan mediante los subíndices 1 (extremo inicial, $x = 0$) y 2 (extremo final, $x = L$). Tampoco empleamos el superíndice e en las características de la sección y la longitud del elemento para evitar sobrecargar la notación. Reordenando obtenemos la **ecuación de rigidez del problema de tracción/compresión**:

$$\begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{x,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ d_{x,2}^e \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

A continuación, empleamos el mismo procedimiento para el **problema homogéneo de flexión de Timoshenko**—Ec. (A.10)—. En primer lugar obtenemos la solución en $x = L$:

$$\begin{bmatrix} d_{y,2}^e \\ \theta_{z,2}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y(L) \\ \theta_z(L) \\ V_y(L) \\ M_z(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^3}{6EI_z} - \frac{L}{GA_{Vy}} & -\frac{L^2}{EI_z} \\ 0 & 1 & \frac{L^2}{EI_z} & \frac{L}{EI_z} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{y,1}^e \\ \theta_{z,1}^e \\ f_{y,1}^e \\ m_{z,1}^e \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Reordenando por bloques se obtiene la **ecuación de rigidez del problema de flexión de Ti-**

Timoshenko en el plano x, y :

$$\begin{bmatrix} f_{y,1}^e \\ m_{z,1}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & -\frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{y,1}^e \\ \theta_{z,1}^e \\ d_{y,2}^e \\ \theta_{z,2}^e \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

con el **factor de cortante**:

$$\alpha = \frac{12EI_z}{GA_{Vy} L^2} \quad (\text{B.5})$$

Agrupando las ecuaciones (B.2) y (B.4) obtenemos la **ecuación de rigidez de la viga de Timoshenko en ejes locales** (flexión en el plano x, y)

$$\begin{bmatrix} f_{x,1}^e \\ f_{y,1}^e \\ m_{z,1}^e \\ f_{x,2}^e \\ f_{y,2}^e \\ m_{z,2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x,1}^e \\ d_{y,1}^e \\ \theta_{z,1}^e \\ d_{x,2}^e \\ d_{y,2}^e \\ \theta_{z,2}^e \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

La **matriz de rigidez** de la viga de Timoshenko en problemas planos tiene 6×6 elementos (12×12 en el caso 3D), ya que relaciona los 6 grados de libertad (3 en cada extremo de la viga) con las 6 componentes de fuerza o momento correspondientes que actúan sobre las secciones extremas del elemento (Fig. 2.4). Recordemos que cada columna de la matriz proporciona las reacciones en la viga biempotrada cuando se impone el desplazamiento o giro unidad que corresponde a dicha columna de la matriz.

La **matriz de rigidez de la viga de Navier-Bernoulli** en ejes locales se obtiene fácilmente. Basta tener en cuenta que el factor de cortante se anula, puesto que la indeformabilidad a cortante implica que $GA_{Vy} \rightarrow \infty$, luego $\alpha \rightarrow 0$. Entonces,

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Bibliografía

- [CC18] J. Casanova Colón. *Elementos de Mecánica de los Sólidos Deformables*. Editorial Universitat Politècnica de València, 2018.
- [Ger02] J. Gere. *Timoshenko. Resistencia de Materiales*. Thomson - Paraninfo, 2002.
- [Liv78] R.K. Livesley. *Métodos Matriciales para el Cálculo de Estructuras*. H. Blume Ediciones, 1978.
- [Mon99] S. Monleón. *Análisis de Vigas, Arcos, Placas y Láminas: Una Presentación Unificada*. Editorial Universitat Politècnica de València, 1999.
- [Mon17] S. Monleón. *Teoría Unificada de Elementos Estructurales Esbeltos*. Editorial Universitat Politècnica de València, 2017.