

LA CATENARIA Y LOS ARCOS Y ÓVALOS EN LA BÓVEDAS DE LA INGENIERÍA MILITAR ESPAÑOLA DEL SETECIENTOS

THE CATENARY, ARCHES, AND OVALS IN SPANISH MILITARY ENGINEERING VAULTS OF THE EIGHTEENTH CENTURY

Cinta Lluís-Teruel; orcid: 0000-0002-5280-1147

Josep Lluís i Ginovart; orcid: 0000-0001-5957-762X

UNIVERSITAT INTERNACIONAL DE CATALUNYA

doi: 10.4995/ega.2026.22573

La catenaria se introdujo en España a través de la Academia de Matemáticas (1720) para la formación de los ingenieros militares borbónicos, utilizando la obra de Bernard Forest de Bélidor. A partir del inventario de 271 proyectos de polvorines, se han identificado 37 casos de bóvedas construidas con una relación flecha/luz ($f > 1/2 l$), clasificadas como apuntadas (T-2) y de sección especial (T-4). El estudio geométrico de estas representaciones gráficas, trazadas mediante ojivas y óvalos, revela que sus centros están situados por debajo de la imposta. Como resultado, el ángulo de incidencia sobre el paramento vertical es menor de 90° , con una propiedad geométrica que comparten con las bóvedas catenarias. Dadas las consideraciones de Frézier

en *La théorie et la pratique de la coupe de pierres* (1738) sobre la congruencia estructural de estas figuras, se concluye que el sistema gráfico empleado por los ingenieros militares hispánicos constituye un intento simplificado de representar la geometría estructural de la bóveda catenaria.

PALABRAS CLAVE: BÓVEDAS; CATENARIA; INGENIEROS MILITARES; MECÁNICA CIENTÍFICA; OJIVA; ÓVALO

Abstract: The catenary was introduced in Spain through the Academy of Mathematics (1720) for the training of Bourbon military engineers, utilizing the work of Bernard Forest de Bélidor. From an inventory of 271 powder magazine projects, 37 cases have been identified where the constructed vaults exhibit a rise/

*span ratio ($f > 1/2 l$), categorized as pointed (T-2) and special section (T-4). The geometric study of these graphic representations, drawn using ogives and ovals, reveals that their centers are located below the springing line (impost). Consequently, the angle of incidence on the vertical wall face is less than 90° , a geometric property they share with catenary vaults. Given Frézier's observations in *La théorie et la pratique de la coupe de pierres* (1738) regarding the structural congruence of these figures, it is concluded that the graphic system employed by Hispanic military engineers constitutes a simplified attempt to represent the structural geometry of the catenary vault.*

KEYWORDS: VAULTS; CATENARY; MILITARY ENGINEERS; SCIENTIFIC MECHANICS; OGIVE; OVAL



El encuentro de la forma funicular: la catenaria

La utilización de bóvedas apuntadas por los ingenieros militares formados en la Academia de Matemáticas de Barcelona (1720), parte de su condición constructiva medieval (Agustín-Hernández, et. Al. 2023, 96-109). Esta circunstancia invita a reflexionar sobre su posible relación con las geometrías más modernas de formas peraltadas, aquellas cuya relación flecha (f), luz (l) es de ($f > 1/2 l$). A estas pertenecen las elípticas, ovaladas y catenarias, las cuales presentan menor empuje estructural que aquellas más rebajadas y que, por ello, también fueron utilizadas. Especial interés presentan las de forma catenaria, introducidas por *La science des ingénieurs* (1729) de Bernard Forest de Bélidor (1698-1761) (Belidor 1729, liv. II, lam. 6, fig. 7-8, 64) (Fig. 2.a).

La catenaria es una figura propuesta como un acertijo por Robert Hooke (1635-1703) *A description of helioscopes, and some other instruments* (1676) (Hooke 1676, 31). No obstante, Simon Stevin (1548-1620) ya la había intuido, al utilizar un cable colgante para demostrar el equilibrio de los cuerpos, en la portada *De Beghinselen der Weeghconst* (1586) (Stevin 1586, 41) (Figura 1.a). A pesar de ello, no existía ningún enfoque matemático. Por esta razón, Jakob Bernoulli (1654-1705), lanzó un reto en *Actae Eruditorum* (1690) (Bernoulli 1690, 217-219), cuyas soluciones fueron abordadas por Johann Bernoulli (1667-1748) en *Solutio problematis funicularii* (Bernoulli 1691, 274-278) (Figura 1.b) y por Christiaan Huygens (1629-95), con la *Dynastae Zulichemii, solutio problematis funicularii* (Huygens 1691, 281-290) (Figura 1.c).

Su ecuación fue formulada por David Gregory (1659-1708) y publicada en *Philosophical Transactions of the Royal Society* (1697) (Gregory 1697, 632-657). Posteriormente, fue James Stirling (1692-1770) quien, en sus *Lineae Tertii Ordinis Neutoniana* (1717), la construyó formalmente a partir de las esferas colgantes (Stirling 1717, 11-14) (Figura 1.d).

Su utilización se conocía también en la Academia de Artillería de Segovia y en la de Guardia Marinas en Cádiz a través de la estereotomía de Amédée François Frézier (1682-1773). Frézier, define la *Chaînette* (cadena) como una curva conveniente para el equilibrio de las dovelas, aunque no es bella, ya que produce un quiebro en el estribo, indicando que su cimbrado es más parecido a la forma apuntada (Frézier 1737-1739.2, 97-98) (Fig. 2x.c). Considera, además, la catenaria como la forma ideal del arco para un espesor constante, comparándola con la de medio punto y la ojival, y dibujándola dentro de su espesor (Frézier 1737-1739.2 lam 33, fig. 50). Frézier hace referencia a la *De la poussée des voûtes* (1729) de Pierre Couplet (c.1670-1743) y expone que la *chaînette* es la mejor de las formas para la construcción de bóvedas (Couplet 1729, 95-97, lam. 6, fig. 5, 116) (Fig. 2.b).

La catenaria es la función de una cadena colgada sobre dos puntos con luz (l_c), y flecha (f_c) tiene la función:

$$f(x_c) = a \cosh \dots [1]$$

donde (a) depende del peso por unidad de longitud (λ) y a tensión horizontal en los extremos del cable (σ_x), $a =$

The emergence of the funicular form: the catenary

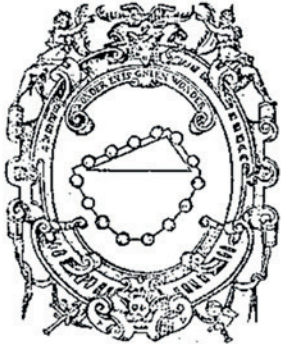
The adoption of pointed vaults by the military engineers trained at the Barcelona Academy of Mathematics (1720) forms part of their medieval constructive tradition (Agustín-Hernández, et al. 2023, 96–109). This circumstance encourages reflection on their potential relationship with the more modern geometries of high-rise forms, specifically those whose rise (f), span (l) ratio is ($f > 1/2 l$). These include elliptical, oval, and catenary arches, which present a lower structural thrust compared to the more depressed (or low-rise) arches that were also employed. Of particular interest are the catenary forms, introduced in *La science des ingénieurs* (1729) by Bernard Forest de Bélidor (1698–1761) (Belidor 1729, liv. II, lam. 6, fig. 7–8, 64) (Fig. 2.a).

The catenary was proposed as a riddle by Robert Hooke (1635–1703) in *A description of helioscopes, and some other instruments* (1676) (Hooke 1676, 31). However, Simon Stevin (1548–1620) had already intuitively grasped the concept on the cover of *De Beghinselen der Weeghconst* (1586), where he used a hanging cable to demonstrate the equilibrium of bodies (Stevin 1586, 41) (Figure 1.a). Despite this, a mathematical approach to the curve was lacking. For this reason, Jakob Bernoulli (1654–1705) issued a challenge in *Acta Eruditorum* (1690) (Bernoulli 1690, 217–219). The solutions to this challenge were subsequently provided (or addressed) by Johann Bernoulli (1667–1748) in *Solutio problematis funicularii* (Bernoulli 1691, 274–278) (Figure 1.b) and by Christiaan Huygens (1629–1695) with *Dynastae Zulichemii, solutio problematis funicularii* (Huygens 1691, 281–290) (Figure 1.c).

Its equation was formulated by David Gregory (1659–1708) and published in the *Philosophical Transactions of the Royal Society* (1697) (Gregory 1697, 632–657). Subsequently, it was James Stirling (1692–1770) who, in his *Lineae Tertii Ordinis Newtoniana* (1717), formally constructed it using the principle of hanging spheres (Stirling 1717, 11–14) (Figure 1.d).

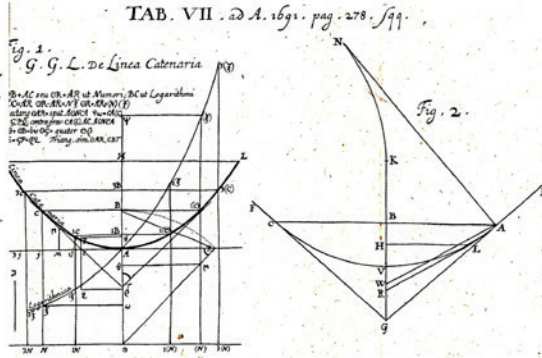
Its use was also known at the Artillery Academy in Segovia and the Marine Guards Academy in Cádiz through the stereotomy of Amédée François Frézier (1682–1773). Frézier defines the *chaînette* (catenary) as a suitable curve for the equilibrium of voussoirs, although he finds it aesthetically displeasing

DE
 BEGHINSELEN
 DER WEEGHCONST
 BESCHREVEN DVER
 SIMON STEVIN
 van Brugghe.

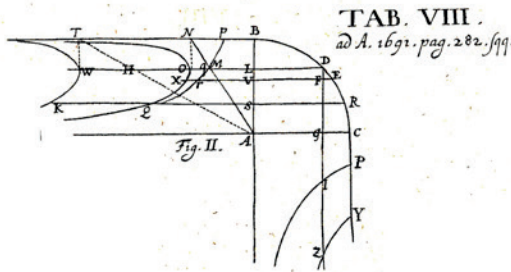


TOT LEYDEN,
 Inde Druckerye van Christoffel Plantijn
 By François van Raphelinghen.
 c13. 13. LXXXVI.

a)



b)

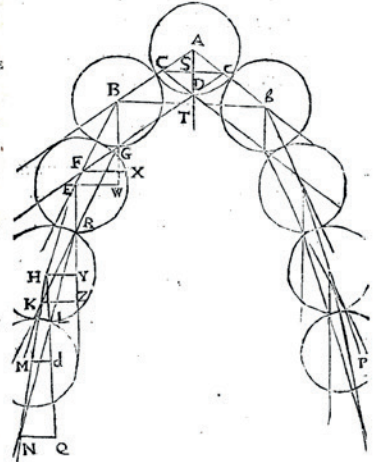


c)

[12]

Demonstratio.

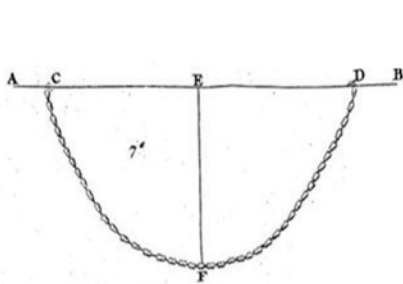
Omnes hæ Sphæræ triplici potentia urgentur : & constat ex *Mechanica*, quod tres potentie in æquilibrio consistentes eam ad se invicem rationem habent, quam



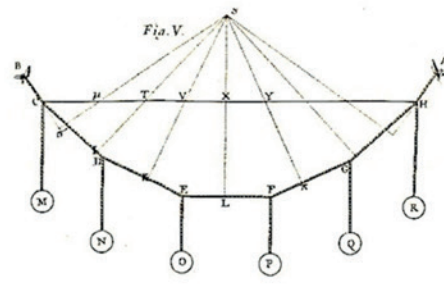
tres recte potentiarum directionibus respective parallelæ & ad ipsarum interfectiones mutuas terminate. Sphæra AD urgetur gravitate ab A versus D tendente, & actione

d)

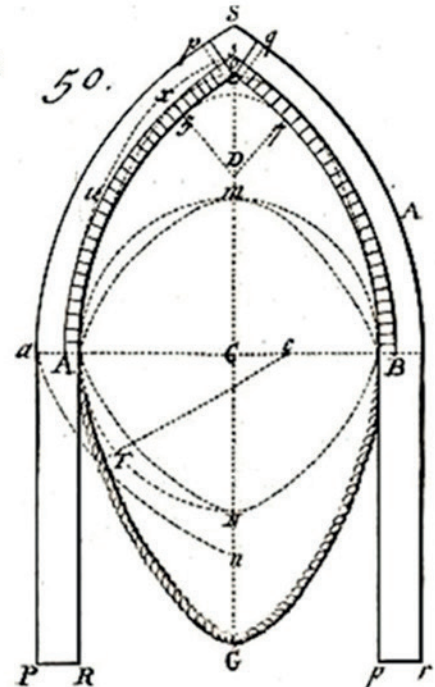
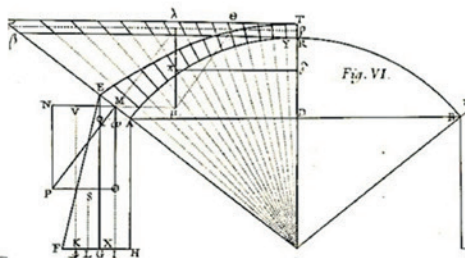
1



a)



b)



c)

2

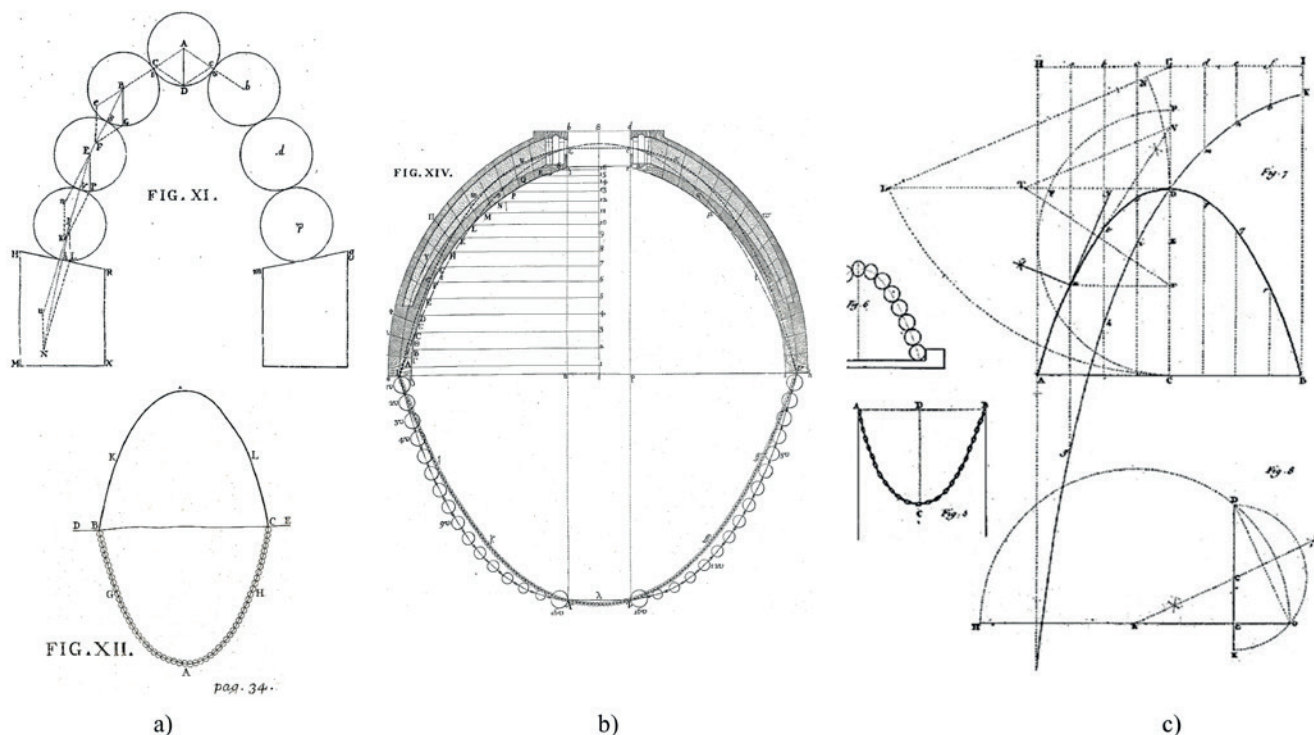
due to the kink it produces at the abutment, suggesting that its centering is more similar to the pointed form (Frézier 1737–1739.2, 97–98) (Fig. 2x.c). Furthermore, he considers the catenary the ideal arch form for constant thickness, comparing it to the semicircular and pointed (Gothic) arches, and drawing it within its thickness (Frézier 1737–1739.2, plate 33,

La facilidad gravitatoria con que se dispone esta función en el espacio contrasta con su complejo su trazado geométrico, dado que no es construible con la geometría tradicional. Johann Bernoulli lo resolvió basándose en la conservación de la proporcionalidad entre dos segmentos que se trasladan (Figura 1.b, fig. a). Fue representada por Giovanni Poleni (1683-1761) en la *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano* (1748) (Figura 3.b), (Poleni 1748, lam.C,E , 30-50), apoyándose en Gregory (Figura 3.a).



1. Referencias de la geometría de la catenaria
2. La catenaria en la tratadística de la Ilustración francesa
3. Trazado de la catenaria. a), b) Método gravitatorio Poleni (1748); c) Sistema geométrico Rondelet (1804)

1. Geometric references for the catenary
2. The catenary in the treatise literature of the French Enlightenment
3. Catenary Plotting: a) and b) Poleni's gravitational method (1748); c) Rondelet's geometric system (1804)



3

El trazado gráfico pudo ser introducido en España a través de Escuela Especial de Arquitectura de Madrid (1844), con el *Traite Theorique et Pratique de L'art de bâtir* (1802-17) de Jean Rondelet (1742-1829) (Rondelet 1804, 137-144) (Figura 3.c), y con los *Elements of civil engineering* (1839) de John Millington (1779-1868) (Millington 1839, fig 267, 642-647), traducidos como *Elementos de arquitectura* (1848) (Millington 1848, fig.153, 472-477). En la actualidad, se puede construir geoméricamente con los sistemas *Computer-Aided Design* (CAD) (1977), requiriendo un plug-in complementario o un código Lisp.

Las bóvedas en el proyecto de polvorines

La relación entre forma y estructura de estas geometrías se puede comprobar principalmente en la construcción de sus polvorines. Por ello, se han revisado 528 de estos proyectos realizados entre 1610-1887, en archivos hispánicos (1). La metodología ha permitido reducir la muestra a 271 proyectos que disponen de planta y sección, lo que ha facilitado su clasificación morfológica y tipológica. De estos proyectos, 138 están construidos con bóvedas de fábrica, de los que 131 trabajan por gravedad y otros siete con sistema tabicado (Figura 4.d).

Para su estudio metodológico, se toma como referencia a sus autores más influyentes, como Vicente Tomás Tosca (1651-1723), quien define el arco de medio de punto, el apuntado y el elíptico (Tosca 1712, 93-94), y Belidor,

fig. 50). Frézier references Pierre Couplet's (c.1670-1743) *De la poussée des voûtes* (1729), asserting that the *chaînette* is the best form for vault construction (Couplet 1729, 95-97, plate 6, fig. 5, 116) (Fig. 2.b).

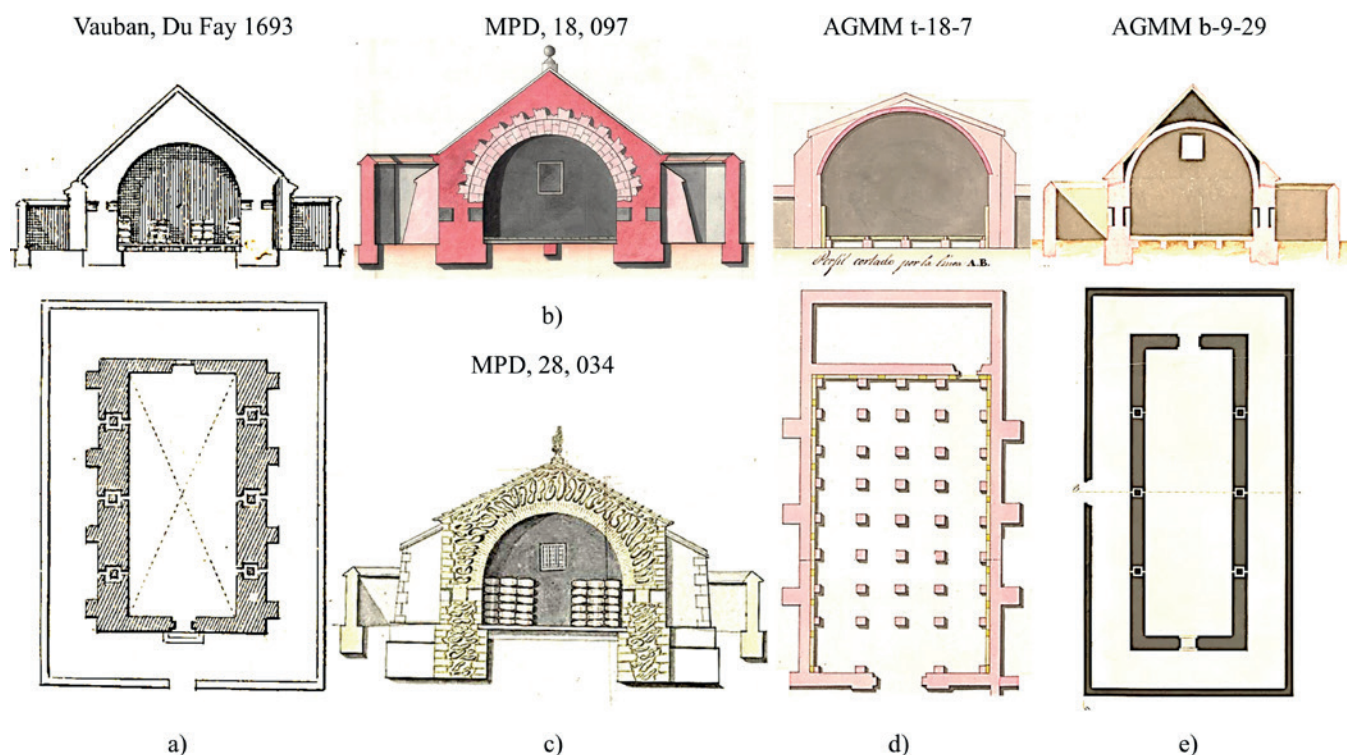
The catenary is the function of a chain suspended between two points, defined by a span (l_c) and a rise (f_c), has the function:

$$f(x_c) = a \cosh \dots [1]$$

where (a) depends on the weight per unit length (λ) and the horizontal tension at the ends of the cable (σ_x), $a =$

The gravitational ease with which this function is arranged in space contrasts with the complexity of its geometric plotting, given that it cannot be constructed using traditional geometry. Johann Bernoulli solved it based on the conservation of proportionality between two translating segments (Figure 1.b). It was represented by Giovanni Poleni (1683-1761) in his *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano* (1748) (Figure 3.b), relying on Gregory's work (Figure 3.a) (Poleni 1748, plates C and E, pp. 30-50).

The graphic plotting may have been introduced



4

in Spain through the Special School of Architecture in Madrid (1844), with Jean Rondelet's (1742–1829) *Traité Théorique et Pratique de L'art de bâtir* (1802–17) (Rondelet 1804, 137–144) (Figure 3.c), and with John Millington's (1779–1868) *Elements of civil engineering* (1839) (Millington 1839, fig. 267, 642–647), which was translated as *Elementos de arquitectura* (1848) (Millington 1848, fig. 153, 472–477). Currently, it can be constructed geometrically using Computer-Aided Design (CAD) systems (since 1977), although this often requires a complementary *plug-in* or a Lisp code.

Vaults in powder magazine projects

The relationship between the form and structure of these geometries can be primarily verified in the construction of their powder magazines. For this reason, 528 such projects carried out between 1610 and 1887 have been reviewed in Hispanic archives (1). The methodology allowed the sample to be reduced to 271 projects that include both plan and section, facilitating their morphological and

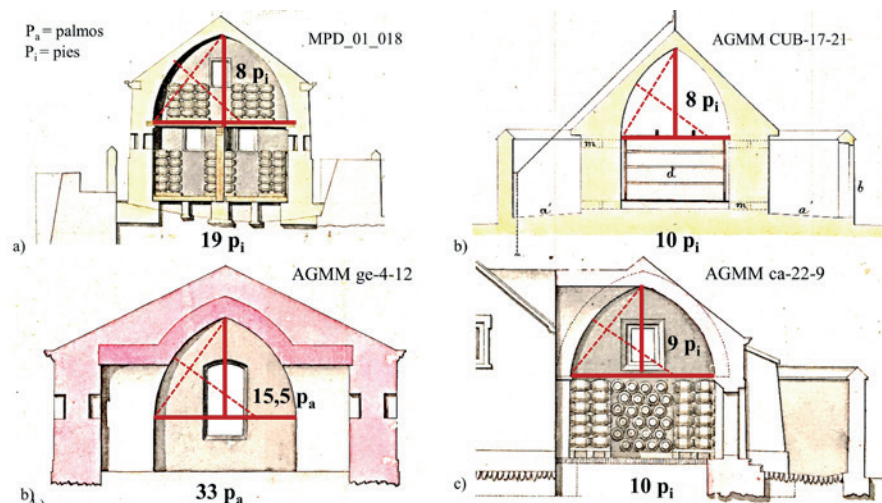
quien añade la cadena (Belidor 1729, liv. II, 64). De este modo, el modelo de Vauban (Figura 4.a), con bóveda de medio punto ($f=1/2 l$) se impone en 81 proyectos realizados entre (1715-1882) (T-1) (Figura T.b). Trece proyectos son de bóvedas rebajadas ($f<1/2 l$), realizadas entre (1731-1877) (T-3) (Figura T.c). Otros 37 proyectos son de bóvedas peraltadas ($f>1/2 l$), subdividas entre: 31 apuntadas entre (1689-1874) (T-2) y seis de sección especial (1718-1736) (T-4). Metodológicamente se establece un análisis gráfico a través de improntas de las representaciones gráficas, con de las líneas de encaje, puntas de compás y notas caligráficas con grafito.

Del estudio de las bóvedas ojivales (T-2) a través de los centros del arco, hemos podido diagnosticar de que nueve tienen su punto en la línea de la imposta T-2_A (Fig. 5), veinte por debajo de ella T-2_B (Fig. 6), y otros tres que no hemos podido visualizar (Tabla 1). Los resultados determinan metrológicamente que la luz y la flecha del arco que las genera, deduciendo así, la tirantez de la bóveda (Tabla 1). Las dimensiones máximas (l, f) utilizadas son (28, 20 toesas), (6,580, 4,700 metros) en Ciudad Rodrigo (1715) (MPD, 12, 142) con la relación ($l/f=1,400$) cercana a $(4/3)$. En el caso de los proyectos trazados con varas, en San Sebastián (1722) (AGMM ss-7-17) las dimensiones son (32, 21 varas) (6,688, 4,389 metros), con una relación ($l/f=1,524$) muy próxima a $(3/2)$, siendo la media de los proyectos (4,138, 2,447 m) con ($l/f=1,691$). Aquellas bóvedas cuyo centro de la generatriz se sitúa por debajo de la imposta plantean dos características: en primer lugar, que el ángulo con el paramento vertical en menor de 90° , y en segundo, que el diámetro que

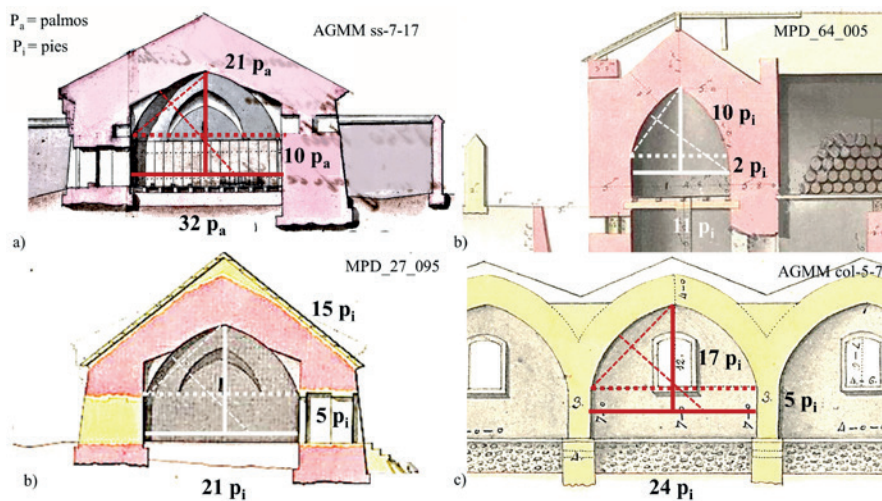


- 4. Tipología de polvorines construidos con bóveda de fábrica
- 5. Bóvedas apuntadas con centros en la imposta
- 6. Bóvedas apuntadas con centros debajo de la imposta

- 4. Typology of powder magazines constructed with masonry vaults
- 5. Pointed vaults with centers on the springer
- 6. Pointed vaults with centers below the springer



5



6

genera el arco es mayor que la distancia entre paramentos. Estas particularidades tienen consecuencias en el dimensionado teórico de los estribos.

En el grupo de bóvedas de sección especial (T-4), se han inventariado aquellas cuyas generatrices que se construyen a partir de diferentes arcos de circunferencia. La bóveda elíptica construida por Hércules Torelli (c.1625-1728) en Pamplona en 1694 toma como base *Le Timon du Capitaine* (1587) de Ambroise Bachot (d.1587) en (Bachot 1587, fig. 20-21).

Esta bóveda fue sustituida en 1718 por Francisco Larrando de Mauleon (1644-1736) por una de cañón (MPD, 31, 031) (Figura 7.a). Dicho autor explica su proceso constructivo (Figura 7.c), donde la bóveda elíptica de semiejes (18, 13) es representada por un óvalo, cuyos centros están situados en las coordenadas (x-y) (-6,5-0,0) (+6,5-0,0) y (0,0-+9,0) (Figura 7.b).

typological classification. Of these projects, 138 are constructed with masonry vaults, 131 of which operate by gravity, and the other seven utilize a partitioned system (Figure 4.d). For the methodological study, reference is made to their most influential authors, such as Vicente Tomás Tosca (1651–1723), who defines the semicircular, pointed, and elliptical arches (Tosca 1712, 93–94), and Belidor, who adds the catenary (Belidor 1729, liv. II, 64). Thus, Vauban's model (Figure 4.a), featuring a semicircular vault ($f=1/2 \lambda$), dominates 81 projects carried out between 1715 and 1882 (T-1) (Figure 4.b). Thirteen projects feature low-rise vaults ($f<1/2 \lambda$), built between 1731 and 1877 (T-3) (Figure 4.c). Another 37 projects consist of high-rise vaults ($f>1/2 \lambda$), subdivided into: 31 pointed vaults (1689–1874, T-2) and six with special sections (1718–1736, T-4). Methodologically, a graphic analysis is established through imprints of the graphic representations, including setting-out lines, compass points, and calligraphic graphite notes. The study of the ogival vaults (T-2) based on the arch centers allowed us to diagnose that nine have their center point on the impost line (T-2A, Fig. 5), twenty below it (T-2B, Fig. 6), and three others that we could not visualize (Table 1). The results metrically determine the span and the rise of the generating arch, thus inferring the vault's slenderness (Table 1). The maximum dimensions (l, f) used are (28, 20 *toesas*), equivalent to (6.580 m, 4.700 m) in Ciudad Rodrigo (1715) (MPD, 12, 142), with an ($l/f=1,400$) close to (4/3). Regarding the projects plotted using *varas* (an older unit of measurement), in San Sebastián (1722) (AGMM ss-7-17), the dimensions are (32, 21 *varas*), or (6.688 m, 4.389 m), with an ($l/f=1,524$) very close to (3/2). The average dimensions for the projects are (4.138 m, 2.447 m) with an ($l/f=1,691$). Those vaults whose generating center is located below the impost present two characteristics: first, the angle with the vertical face is less than 90°, and second, the diameter generating the arch is greater than the distance between the faces. These particularities have consequences for the theoretical dimensioning of the abutments. Within the special section vaults (T-4) group, those whose generatrices are constructed from different circular arcs have been inventoried. The elliptical vault built by Hércules Torelli (c.1625–1728) in Pamplona in 1694 is based on Ambroise Bachot's (d.1587) *Le Timon du Capitaine* (1587) (Bachot 1587,



fig. 20–21). This vault was replaced in 1718 by Francisco Larrando de Mauleon (1644–1736) with a barrel vault (MPD, 31, 031) (Figure 7.a). This author explains his construction process (Figure 7.c), where the elliptical vault with semi-axes (18, 13) is represented by an oval whose centers are located at $(x-y)$ $(-6,5-0,0)$ $(+6,5-0,0)$ y $(0,0-+9,0)$ (Figure 7.b).

A similar circumstance is observed in four projects represented by ovals: Barcelona (1731) (MPD, 07, 057) (Figure 8.a), Tortosa (1733) (AGMM t-18-16, MPD, 13, 035) (Figure 8.b), and La Coruña (1736) (MPD, 17, 057) (Figure 8.c).

This geometric arrangement, given its horizontal tangent at the crown and the internal angle at the abutment ($<90^\circ$), has led to the hypothesis that this representation using ovals, by setting the principal axes, can be interpreted as a graphic approximation of the catenary (Lluis i Ginovart, et al. 2017a, 85–99).

In the project by Juan Pedro Subreville (fl. 1718–1739) in San Sebastián (1727) (CGE. Ar. F-T-2-C1_180.a), numerical notes are observed in the auxiliary traces of his delineation (Figure 9.b).

Referencia gráfica	Referencia Proyecto	Toesas (pies)				Varas (palmos)				Tip.
		<i>l</i>	<i>f</i>	<i>f</i> ₁	<i>f</i> ₂	<i>l</i>	<i>f</i>	<i>f</i> ₁	<i>f</i> ₂	
	1 MPD, 09, 101	22	19	19	0					A,B
	2 MPD, 12, 142	28	20	20	0					A
	3 MPD, 26, 119	20	13	10	3					B
	4 AGMM ss-7-17	-	-	-	-	32	21	10	11	B
	5 MPD, 64, 005	11	10	8	2					B
	6 CGE Ar.G-T.2-77	21	16	11	5					B
	7 MPD, 59, 046	14	9	9	0					A
	8 MPD, 59, 047	14	9	9	0					A
	9 CGE Ar.F-T.2-C1-180.b	19	15	14	1					B
	10 AGMM ca-22-20	-	-	-	-					-
	11 MPD, 08, 239	14	9	8,5	0,5					B
	12 CGE Ar.F-T.2-C.3-250	11	9	7,5	1,5					B
	13 MPD, 19, 193	14	9	8	1					B
	14 MPD, 07, 180	-	-	-	-					-
	15 MPD, 19, 194	15	9	8,75	0,25					B
	16 MPD, 01, 018	19	15	15	0					B
	17 MPD, 07, 181	14	9	8,5	0,5					B
	18 MPD, 27, 094	20	16	9	7					B
	19 AGMM l-2-17 A	24	15	15	0					B
	20 AGMM l-2-17 B	24	14	12,5	1,5					B
	21 MPD, 27, 095	21	15	10	5					B
	22 MPD, 71, 069	-	-	-	-	7	6	6	0	A
	23 AGMM CUB-17-21	10	8	8	0					A
	24 AGMM ge-4-12	-	-	-	-	33	15,5	15,5	0	A
	25 AGMM col-5-7	24	17	12	5					-
	26 MPD, 65, 093	-	-	-	-					-
	27 AGMM ca-11-12	-	-	-	-	18	10	10	0	A
	28 AGMM ca-10-6	14	8	5	3					B
	29 AGMM vi-2-14 A	19	13	12	1					B
	30 AGMM vi-2-14 B	11	8	5	3					B
	31 AGMM ca-22-9	10	9	9	0					B

Tabla 1

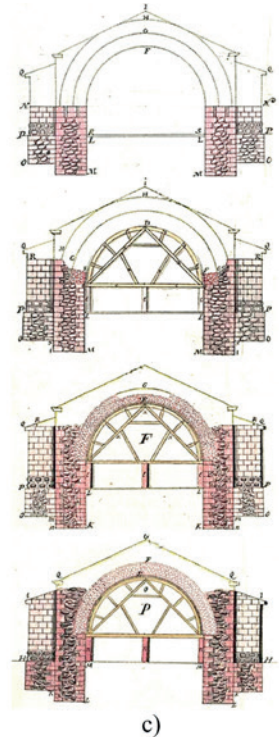
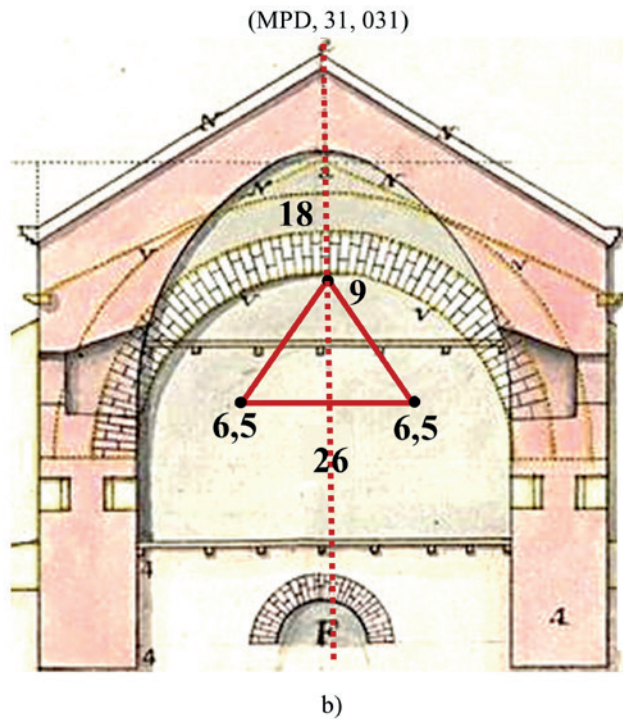
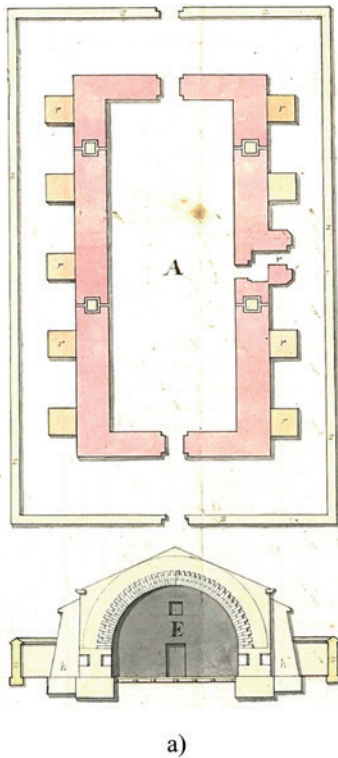
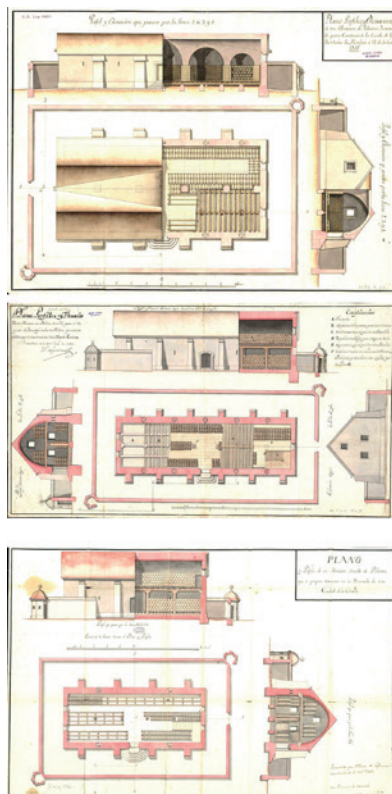


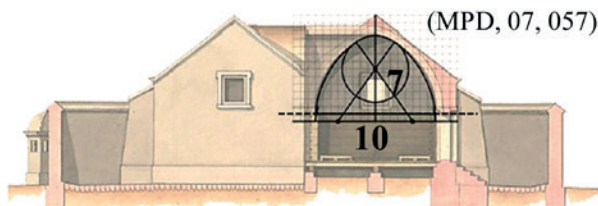


Tabla 1. Proporcionalidad metroológica centro de las bóvedas apuntadas
 7. Derribo de bóveda elíptica en Pamplona (1718) (MPD, 31, 031)
 8. Bóvedas representadas por óvalos, cuyos centros están por debajo de la imposta
 9. Representación de bóvedas de sección especial T-4

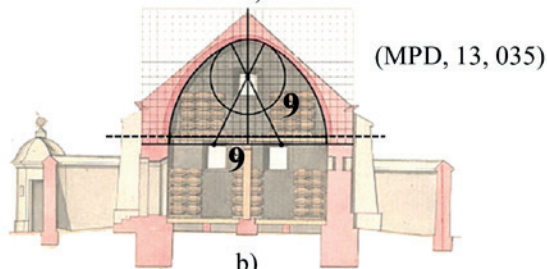
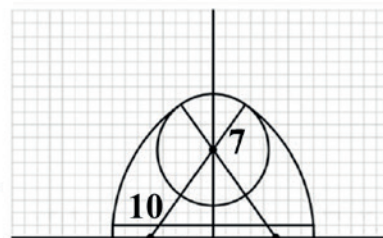
Table 1. Metrological proportionality of the center of pointed vaults
 7. Demolition of elliptical vault in Pamplona (1718) (MPD, 31, 031)
 8. Vaults represented by ovals, whose centers are below the springer
 9. Representation of special section vaults T-4



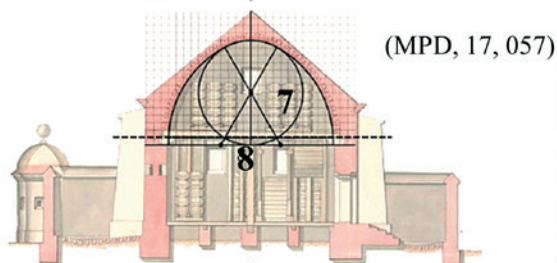
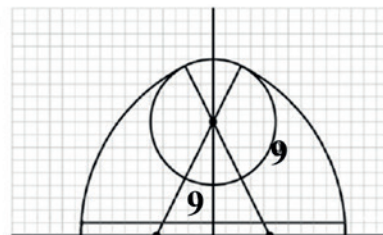
8



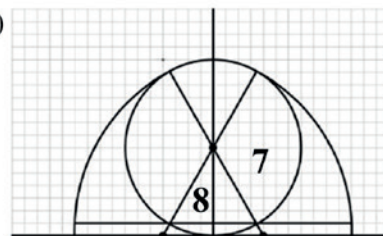
a)



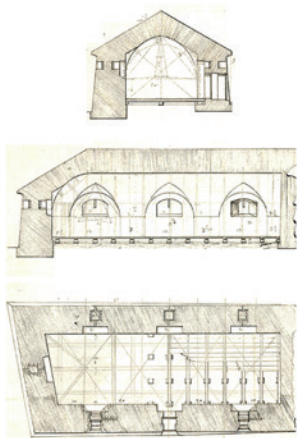
b)



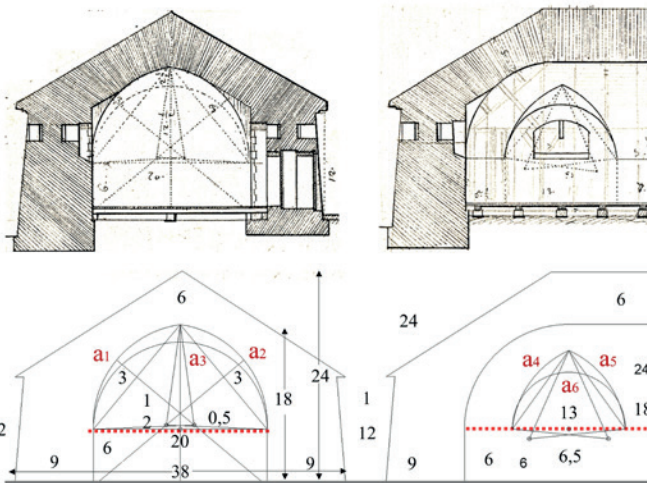
c)



(CGE. Ar. F-T.2-C1_180.a).



a)



b)

c)

9

The main vault is drawn with two pointed arches (a_1, a_2) having two centers above the springer, which would generate a horseshoe vault. The slope at the springer forms an internal angle greater than 90° , and it is also observed that it lacks a horizontal tangent at the keystone. A semicircular arch (a_3) of 20 feet in diameter is drawn above the springer, the measure of which will be slightly less than the span of the arches (a_1, a_2) (Figure 9.b). In the vaults with pointed lunettes, the semicircular arch (a_6) is situated on the springer, while the centers of the arches (a_4, a_5) are below it (Figure 9.c).

The plotting of pointed arches and ovals

In the Villard de Honnecourt Codex (c.1175–c.1240) (ms. fr. 190093), the nomenclature *tiirc ou quint point* (fol. 20v) and *Par chu fait om trois manieres d'ars à compas ouvrir one fois* (fol. 21r) appears (Figure 10.a). Beyond the etymological interpretations of the relationship between the span and the plotting point (Branner 1960, 91–96; Figure



10.b; Shelby 1969, 537–548; Figure 10.c; Bechmann 1993, 212–230), the pointed arch is determined by its span (l), and by setting the slenderness (t), understood as the center of curvature for the voussoirs. From this, the (f), and, consequently, the keystone is deduced. The term *quinto acuto* is used by Giovanni di Gherardo da Prato (c.1360–c.1446) in the section of the dome of Santa Maria del Fiore in Florence (1426) (Saalman 1959, 11–20) (Figure 10.d). In this plotting typology, which we call $A_{(l/n_i, l/n_i-1)}$, the arch's span is divided into n_i parts (l/n_i), and the center of the arch is located at (l/n_{i-1}) (Figure 10.e).

Another possibility is to fix the span and the keystone, and from this deduce the slenderness (*tirantez*). In this way, the proportions can be governed by the ratios from Plato's (c. 424 – c. 347 B.C.) *Timaeus* (c. 360 B.C.), which were used in Gothic architecture, such as the sesquialtera (2:3), sesquitercia (4:3), and sesquioctava (9:8) (Tim. 35B–36B). These proportions are used by the metrological systems in the treatise literature of military engineers (Belidor 1729, Bk. II, fig. 7.a, p. 64) (Figure 10.f), such that given the span (l) and the rise (f) the slenderness is determined as $A_{(l/f)}$ (Figure 10.g).

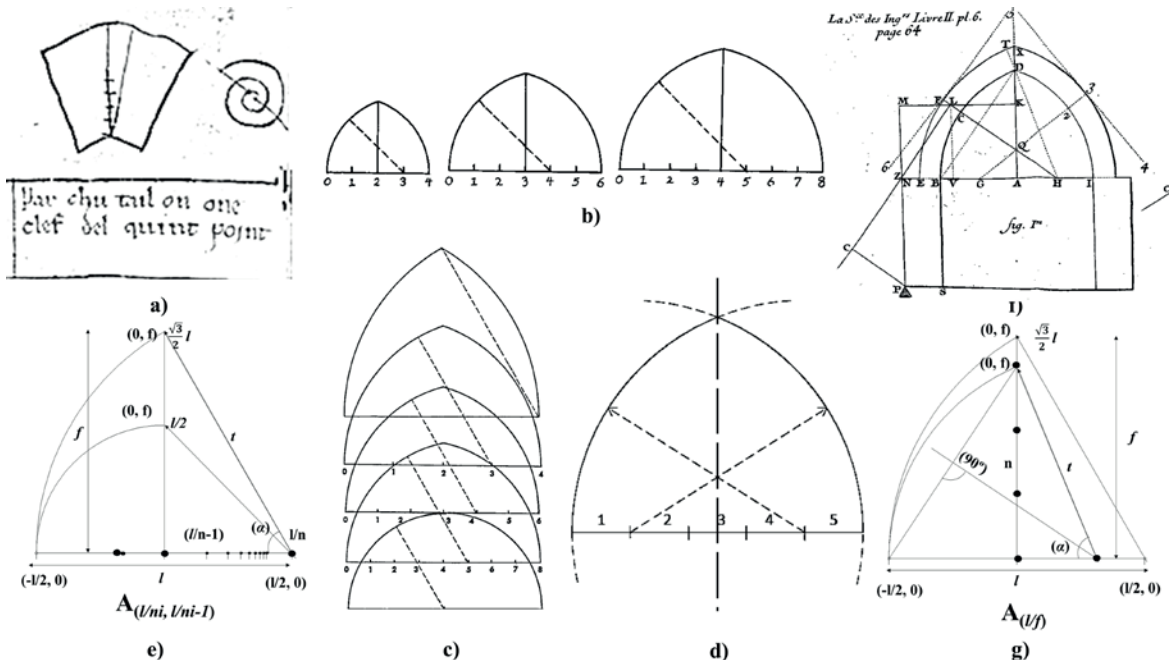
In a pointed arch, there is always a derived geometric parameter: the center lies within the interval $[l/2, l]$, while its rise falls between

Una circunstancia similar se observa en cuatro proyectos representados a través de óvalos: Barcelona (1731) (MPD, 07, 057) (Figura 8.a), Tortosa (1733) (AGMM t-18-16), (MPD, 13, 035) (Figura 8.b) y La Coruña (1736) (MPD, 17, 057) (Figura 8.c). Esta disposición geométrica, dada su tangente horizontal en la clave y ángulo interno sobre el paramento ($<90^\circ$), ha permitido formular la hipótesis de que esta representación con óvalos, fijando los ejes principales, puede ser interpretada como una aproximación gráfica a la catenaria (Lluis i Ginovart, et al. 2017a, 85-99).

En el proyecto de Juan Pedro Subreville (fl. 1718-1739) en San Sebastián (1727) (CGE. Ar. F-T.2-C1_180.a), se observan unas notas numéricas en las trazas auxiliares de su delineación (Figura 9.b). La bóveda principal está dibujada con dos arcos apuntados (a_1, a_2), con dos centros por encima de la imposta, lo cual generaría una bóveda de herradura. La pendiente en la imposta forma un ángulo interno mayor a 90° , y se observa, además, que no dispone de una tangente horizontal en la clave. Sobre la imposta se dibuja un arco (a_3) de medio punto de 20 pies de diámetro, cuya media será algo menor que la luz los arcos (a_1, a_2) (Figura 9.b). En las bóvedas con lunetos apuntados, el arco de medio punto (a_6) se sitúa sobre la imposta, mientras que los centros de los arcos (a_4, a_5) están por debajo de ella (Figura 9.c).

La traza de arcos ojivos y de óvalos

En códice Villard de Honnecourt (c.1175-c.1240) (ms. fr. 190093), aparece la nomenclatura, *tiirc o quint point* (fol. 20v), *Par chu fait om trois manires d'ars à compas ouvrir one fois* (fol. 21r) (Figura 10.a). Más allá de las interpretaciones etimológicas de la relación entre la luz y el punto de trazado, (Branner 1960, 91-96) (Figura 10.b), (Shelby 1969, 537-548) (Figura 10.c), (Bechmann 1993, 212-230), la ojiva se determina por su luz (l) y fijando la





10. Trazado de arcos apuntados
11. Metodología de trazado de óvalos

10. Plotting of pointed arches
11. Methodology for plotting ovals

tirantez o centro de curvatura de las dovelas (t). De ello, se deduce la flecha (f), y por tanto, la clave. El término, *quinto acuto* lo utiliza Giovanni di Gherardo da Prato (c.1360- c.1446) en la sección de la cúpula de Santa Maria del Fiore de Florencia (1426) (Saalman 1959, 11-20) (Figura 10.d). En esta tipología de trazado que denominamos $A_{(l/n_i, l/m_i-1)}$, la luz del arco se divide en n_i partes (l/n_i), y el centro de la ojiva se sitúa en (l/n_{i-1}) (Figura 10.e).

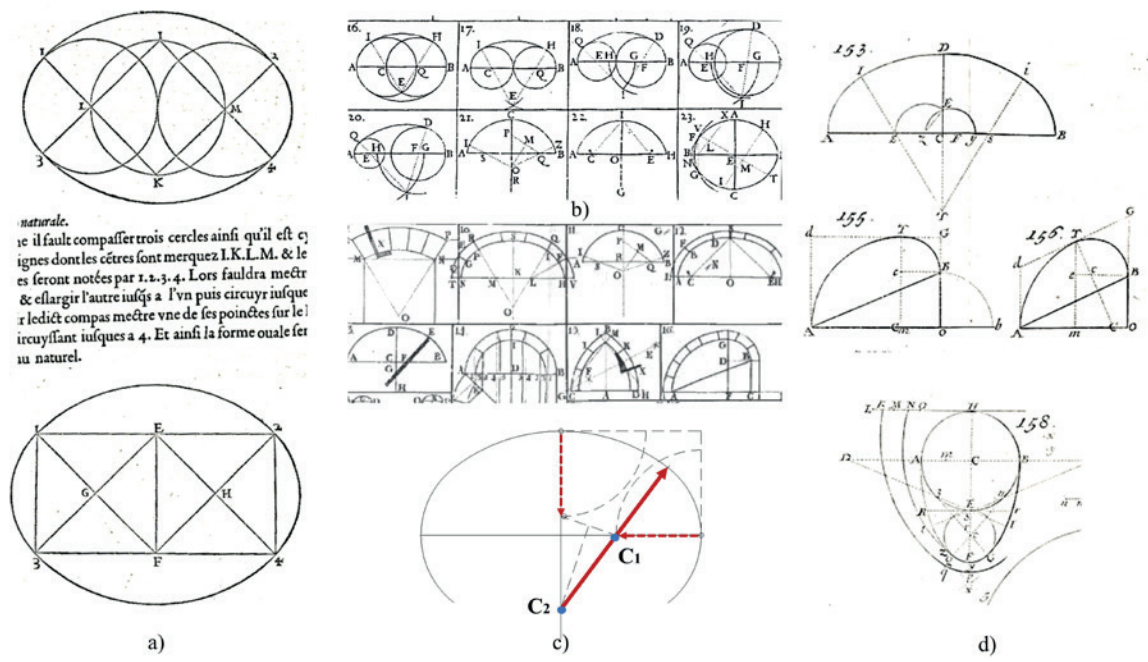
Otra posibilidad sería fijar la luz y la clave, y de aquí deducir la tirantez. De esta manera se pueden regir con la proporción del Timeo (c. 360 a.C.) de Platón (c. 424 - c. 347 a.C.), utilizadas en el gótico, como (2:3) sesquiáltera, (4:3) sesquitercia, (9:8) sesquioctava (Tim. 35B-36B). Estas proporciones son utilizadas por los sistemas metrológicos de la tratadística de los ingenieros militares (Belidor 1729, L II, fig. 7a., 64) (Figura 10.f), de manera que, dada la luz (l) y la flecha (f) se determina la tirantez $A_{(l/f)}$ (Figura 10.g).

En un arco apuntado existe siempre un parámetro geométrico deducido: el centro se sitúa en un intervalo $[l/2, l]$, y su flecha queda comprendida entre $[f/2, f]$. Este caso se corresponde con lo que definimos como un arco de medio punto o *plein cintre*, inscrito en un triángulo equilátero.

Sebastiano Serlio (1475-1554) en el *Il Primo libro d'architettura*, determinó el trazado del óvalo (Serlio 1545, fol.17v-18v). Lo hizo a partir de un eje y los centros de las circunferencias, donde el otro eje es deducido (Figura 11.a). Pietro Cataneo (d.1569), trató el óvalo, *Come si causi la figura ovale, con il filo*, aunque en realidad se trate de una elipse (Cataneo 1567,157-158). La confusión entre ambas figuras hará que en el Tomo V del *Compendio mathematico* de Tosca se publique la metodología del *arco de cordel*. Determina también el óvalo a partir de las medidas de los dos ejes principales, dando infinitas soluciones para la tirantez del óvalo (Figura 11.b) (Tosca 1712, 99-

$[f/2, f]$. This configuration corresponds to what is defined as a semicircular or *plein cintre* arch, inscribed within an equilateral triangle.

Sebastiano Serlio (1475–1554), in his *Il Primo libro d'architettura*, determined the plotting of the oval (Serlio 1545, fols. 17v–18v). He did this using one axis and the centers of the circles, from which the other axis is deduced (Figure 11.a). Pietro Cataneo (d.1569) addressed the oval with the method *Come si causi la figura ovale, con il filo* (How the oval figure is caused, with thread), although it is actually an ellipse (Cataneo 1567, 157–158). The confusion between both figures led to the publication of the string arch method in Volume V of Tosca's *Compendio mathematico*. He also determines the oval based on the measurements of the two principal axes, yielding infinite solutions for the oval's slenderness (Figure 11.b) (Tosca 1712, 99–104). This method had already been published in Volume I (Tosca 1707) and manages to make the figure commensurable based on its two axes, depending on the location of the first center C, (Figure 11.c) (Tosca 1707, 292–295). For his part, Frézier published the proposition *Deux Axes étant donnes, imiter une Ellipse par un assemblage de quatre Arcs de Cercles* (Given Two Axes, imitate an Ellipse by an assembly of four Arcs of Circles) (Figure 11.d) (Frézier 1737–1739, Vol. 1, Pl. 14, Fig. 153, p. 183).





Pointed arches and ovals versus catenary

By comparing the set of pointed vaulted systems $C_{(xa)}$ (Figure 12.a) with an arch whose span is divided into n_i parts (l/n_i), the center of the ogive is situated at (l/n_{i-1}) (Figure 10.g), within the interval $[-l/2, 0]$. The equation that describes this curve is:

$$f(x_a) = \sqrt{r^2 - x^2} \dots [2]$$

This is compared with the set of catenary vaulted forms $C_{(xc)}$ (Figure 12.c), which have the same span and rise in the same interval $[-l/2, 0]$:

$$f(x_c) = a \cosh \dots [3]$$

The comparison of the set $C_{(xa)} \leftrightarrow C_{(xc)}$ is carried out considering the length of their semi-arches:

$$L f(x_a) = dx \dots [4]$$

$$L f(x_c) = dx \dots [5]$$

As well as their interior surface area:

$$S f(x_a) = 2 \, dxy \dots [6]$$

$$L f(x_c) = \dots [7]$$

The graphic calculation indicates that the most congruent values in terms of lengths and surface areas between the catenaries and arches sharing the same span and rise (Figure 12.d) correspond to the proportions $A_{(l/n_i, l/(n_i-1))}$, specifically the arches $A_{(4,3)}$ y $A_{(5,4)}$, (Table 2).

The same methodology can be employed using the function of a semi-oval, although there are infinite solutions for the same span and rise:

[8]

From the analysis of the 28 pointed vaults, seven of them fall within the range of the span/rise ratio (l/f) [1,5238, 1,556] with an average measure (l, f) of (4,138m x 2,447m). This ratio is very close to the $[3/2]$ geometry. The average difference between the ogive and the catenary is observed at the upper part of the ogive's intrados, where the catenary is situated at a maximum distance of 0,057m. In the lower part, the ogive lies on the catenary's intrados, at a maximum distance of 0,154m. In the case of the oval with a similar tension at its center along the (x) axis, the oval's keystone would be located 0,152m below the catenary. In the lower part, the oval has a maximum difference of 0,154m above the catenary's extrados.

For an average vault measurement, the maximum distortion of the extreme dimensions is very slight when comparing the layout of an ogival formwork and a catenary one. The length of the centering for the ogival arch is 0,089m greater than that of the catenary, while the cross-section of the pointed vault is 1,019m² greater than the catenary's. In turn,

104). Este método había sido publicado ya en el Tomo I, y consigue hacer conmensurable la figura a partir de sus dos ejes, en función de la situación del primer centro C_1 (Figura 11.c) (Tosca 1707, 292-295). Por su parte, Frézier publicará la proposición *Deux Axes étant donnes, imiter une Ellipse par un assemblage de quatre Arcs de Cercles* (Figura 11.d) (Frézier 1737-1739.1, Pl. 14 Fig. 153, 183).

Arcos ojivos y óvalos versus catenaria

Al comparar el conjunto de los sistemas abovedados apuntados $C_{(xa)}$ (Figura 12.a) con un arco cuya luz se divide en n_i partes (l/n_i), el centro de la ojiva se sitúa en (l/n_{i-1}) (Figura 10.g), dentro del intervalo $[-l/2, 0]$. La ecuación que describe la curva es:

$$f(x_a) = \sqrt{r^2 - x^2} \dots [2]$$

Esta se compara con el conjunto de las formas abovedadas catenarias $C_{(xc)}$ (Figura 12.c), las cuales poseen la misma luz y flecha en el mismo intervalo $[-l/2, 0]$:

$$f(x_c) = a \cosh \dots [3]$$

La comparación del conjunto $C_{(xa)} \leftrightarrow C_{(xc)}$ se realiza considerando la longitud de sus semiarcos:

$$L f(x_a) = dx \dots [4]$$

$$L f(x_c) = dx \dots [5]$$

Así como su superficie interior:

$$S f(x_a) = 2 \, dxy \dots [6]$$

$$L f(x_c) = \dots [7]$$

El cálculo gráfico indica que los valores más congruentes en términos de longitudes y superficies entre las catenarias y los arcos que comparten la misma luz y flecha (Figura 12.d) corresponden a las proporciones $A_{(l/n_i, l/(n_i-1))}$, específicamente a $A_{(4,3)}$ y $A_{(5,4)}$, (Tabla2).

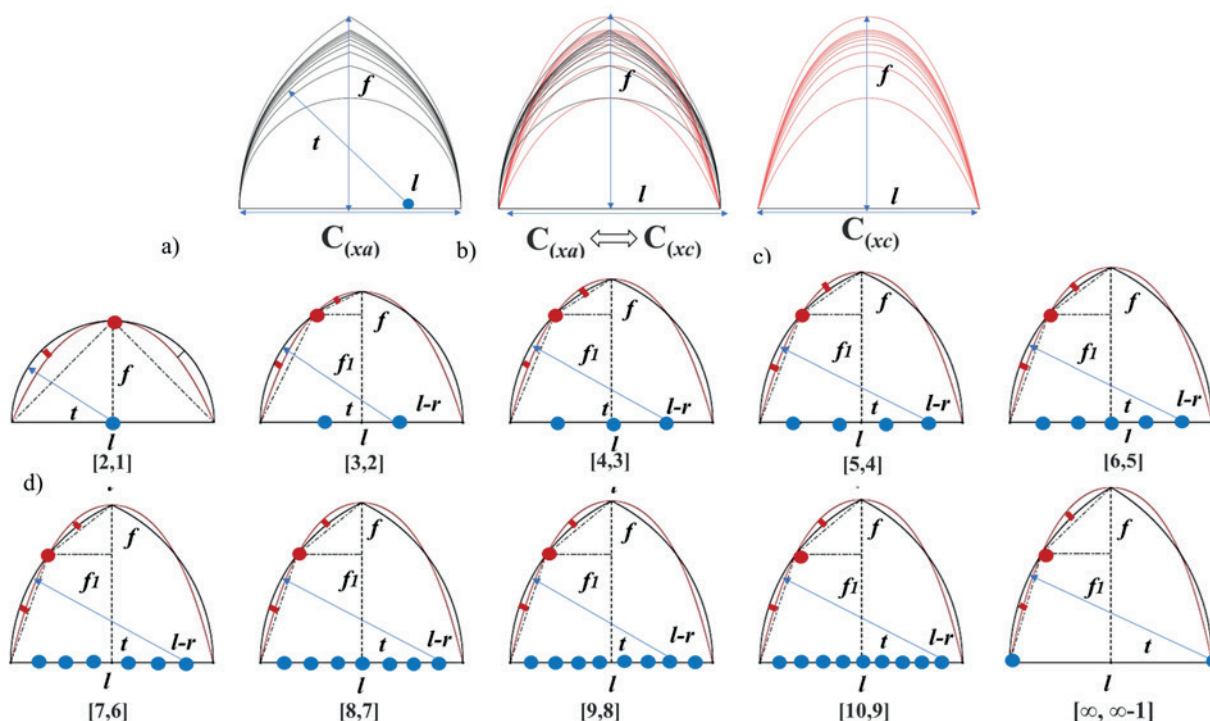
La misma metodología se puede emplear con la función de un semi óvalo, aunque para la misma luz y flecha existen infinitas soluciones:

[8]

Del análisis de las 28 bóvedas apuntadas, siete de ellas están dentro del rango de la relación luz/flecha (l/f) [1,5238, 1,556] con una media promedio (l, f) de (4,138m x 2,447m). Esta relación es muy próxima a la geometría de $[3/2]$. La diferencia promedio entre la ojiva y la catenaria se observa en la parte superior del intradós de la ojiva, donde la catenaria se sitúa a una distancia máxima de 0,057m. En la parte inferior, la ojiva queda en el intradós

12. Comparación bóvedas apuntadas y catenarias
 Tabla 2. Relación geométrica entre la ojiva y la catenaria

12. Comparison between Pointed Vaults and Catenary
 Table 2. Geometric relationship between the ogive and the catenary



12

Prop. l-t	l (m)	t (m)	l-t (m)	f (m)	l-t	lon. arc. (m)	lon. cat. (m)	dif. lon. (m)	sup. arc.	sup. cat.	dif. sup.	f _l (m)	f _l f _l (m)	dif. cat-arc (m)	dif. arc-cat (m)
2-1	1,000	0,500	0,500	0,500	0,200	1,571	1,496	0,075	3,927	3,466	0,461	0,500	0,000	0,048	0,048
3-2	1,000	0,736	0,264	0,646	0,155	1,757	1,736	0,216	4,782	4,536	0,246	0,532	0,114	0,014	0,037
4-3	1,000	0,779	0,221	0,707	0,141	1,846	1,842	0,042	5,156	4,996	0,161	0,532	0,175	0,021	0,033
5-4	1,000	0,797	0,203	0,742	0,135	1,898	1,903	-0,047	5,368	5,255	0,113	0,532	0,209	0,025	0,031
6-5	1,000	0,807	0,193	0,764	0,131	1,932	1,942	-0,098	5,505	5,421	0,083	0,533	0,231	0,027	0,030
7-6	1,000	0,814	0,186	0,779	0,128	1,956	1,969	-0,133	5,600	5,538	0,062	0,534	0,246	0,029	0,030
8-7	1,000	0,818	0,182	0,791	0,127	1,974	1,990	-0,158	5,671	5,624	0,047	0,534	0,257	0,029	0,030
9-8	1,000	0,821	0,179	0,799	0,125	1,988	2,005	-0,175	5,725	5,690	0,035	0,534	0,265	0,031	0,029
10-9	1,000	0,824	0,176	0,806	0,124	1,998	2,018	-0,192	5,768	5,742	0,026	0,535	0,272	0,032	0,028
1-1	1,000	0,843	0,157	0,867	0,115	2,094	2,125	-0,310	6,142	6,196	-0,054	0,538	0,329	0,037	0,026

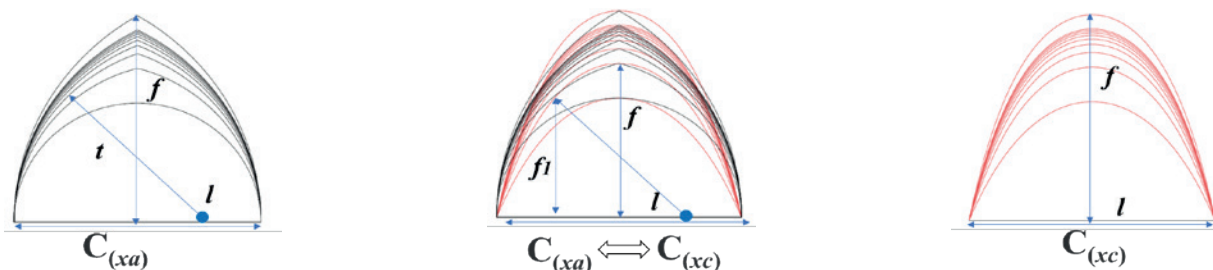


Tabla 2



the oval's centering is 0,051m greater than the catenary's, and its section is 0,942m² greater than the catenary's. Therefore, the geometric difference among the three figures is minimal for this type of construction.

Conclusion

All the outlines of the T-2 ogival vaults show a metrological measurement of the span and rise, from which the tension (or tie-beam thrust) is deduced using the Belidor method (1729) ($A_{(lf)}$ (Figure 10.g)). This also applies to the special T-4 sections, represented as ovals of generatrix constructed according to the Tosca method (1707) (Figure 11.b). In both cases, their centers are located below the springing line (impost), resulting in an angle of incidence on the vertical wall face less than 90°, a geometric property they share with the catenary form. The work of *La théorie et la pratique de la coupe de pierres* (1738) by Frézier already established the structural compatibility and similarity between the catenary and Gothic vaults, to which he attributes the properties of economy, lightness, and lower need for counter-thrust. Given the minimal metric difference between these figures, we can speculate that the representation of these vaults through ogives or ovals may be a simplified attempt to reproduce the structural geometry of the catenary vault.

Notes

1 / Archivo General de Simancas (AGS), Archivo Cartográfico de Estudios Geográficos del Centro Geográfico del Ejército (CGE), Archivo General Militar Madrid (AGMM), Biblioteca Nacional de Madrid (BN), Archivo General Militar de Segovia (AGMS) y Archivo Intermedio Militar de Melilla (AIMML).

References

- Agustín-Hernández, L, et al. (2023). Traza y geometría en la bóveda de crucería medieval con nervios de ladrillo en Aragón». *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, 28 (47), 96-109. <https://doi.org/10.4995/ega.2023.19387>
- Bachot, A. (1587). *Le Timon du Capitaine Ab. Bachot, Lequel conduira le lecteur Parmi les guerrières...* Paris: Au faubourg Saint-Germain-des-Prés.
- Bechmann, R. (1993). *Villard de Honnecourt. La pensée technique au XIIIe siècle et sa communication, Nouvelle édition revue et augmentée*. Paris: Picard Éditeur.
- Belidor, B. F. (1729). *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et architecture civile*. Paris: Chez Claude Jombert.
- Bernoulli J. (1690). Analysis problematic ante hac propositi de inventionis lineae descensus a copore gravi percurrendae uniformiter... *Actae*

de la catenaria, a una distancia máxima de 0,154m. En el caso del óvalo con una tirantez similar en su centro en el eje (x), la clave del óvalo se situaría 0,152m por debajo de la catenaria. En la parte inferior, la diferencia máxima del óvalo con respecto al extradós catenario es de 0,154m.

Para una medida promedio de bóvedas, la distorsión máxima de las medidas extremas es muy escasa al comparar el trazado de un encofrado ojival y uno catenario. La longitud del cimbrado del arco ojival es 0,089m mayor que la del catenario, y la sección de la bóveda apuntada es 1,019m² superior a la catenaria. A su vez, el cimbrado del óvalo es 0,051m mayor que el catenario, con una sección 0,942m² mayor que la catenaria. Por lo tanto, la diferencia geométrica entre las tres figuras es mínima para este tipo de construcciones.

Conclusión

La totalidad de las trazas de las bóvedas ojivales T-2 presentan una medida metrológica de la luz y la flecha, de la cual se deduce la tirantez mediante el método de Belidor (1729) ($A_{(lf)}$ (Figura 10.g)). Esto también se aplica a las secciones especiales T-4, representadas como óvalos de generatriz construidos según el método de Tosca (1707) (Figura 11.b). En ambos casos, sus centros se encuentran debajo de la imposta, lo que resulta en un ángulo de incidencia sobre el paramento vertical menor que 90°, una propiedad geométrica que comparten con la forma catenaria. La obra de *La théorie et la pratique de la coupe de pierres* (1738) de Frézier ya establecía la compatibilidad y semejanza estructural entre la bóveda catenaria y la gótica, a las que atribuye las propiedades de economía, ligereza y menor necesidad de contrarresto. Dada la escasa diferencia métrica entre estas figuras, podemos especular que las representaciones de las bóvedas a través de ojivas u óvalos podrían ser un intento simplificado de la geometría estructural de la bóveda catenaria.

Notas

1 / Archivo General de Simancas (AGS), Archivo Cartográfico de Estudios Geográficos del Centro Geográfico del Ejército (CGE), Archivo General Militar Madrid (AGMM), Biblioteca Nacional de Madrid (BN), Archivo General Militar de Segovia (AGMS) y Archivo Intermedio Militar de Melilla (AIMML).

Referencias

- Agustín-Hernández, L, et al. (2023). Traza y geometría en la bóveda de crucería medieval con nervios de ladrillo en Aragón». *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, 28 (47), 96-109. <https://doi.org/10.4995/ega.2023.19387>
- Bachot, A. (1587). *Le Timon du Capitaine Ab. Bachot, Lequel conduira le lecteur Parmi les guerrières...* Paris: Au faubourg Saint-Germain-des-Prés.
- Bechmann, R. (1993). *Villard de Honnecourt. La pensée technique au XIIIe siècle et sa communication, Nouvelle édition revue et augmentée*. Paris: Picard Éditeur.
- Belidor, B. F. (1729). *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et architecture civile*. Paris: Chez Claude Jombert.
- Bernoulli J. (1690). Analysis problematic ante hac propositi de inventionis lineae descensus a co-



- pore gravi percurrendae uniformiter... *Actae Eruditorum*, 217-219.
- Bernoulli J. (1691). Solutio problematis funicularii. *Actae Eruditorum*, 274-281.
 - Branner R. (1960). Villard de Honnecourt, Archimedes, and Chartres. *Journal of the Society of Architectural Historians*, 19 (3), 91-96. <https://doi.org/10.2307/988023>
 - Cataneo, P. (1567). *L'architettura di Pietro Cataneo senese*. Venezia: Aldus.
 - Couplet, P. (1729). *De la poussée des voûtes*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris. Paris: De l'Imprimerie Royale.
 - Frézier, A. F. (1738-1739). *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*. Strasbourg/Paris: Jean Daniel Doulsseker/Charles-Antoine Jombert.
 - Gregory D. (1697). Catenaria. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 19. 637-652.
 - Hooke, R. (1676). *A description of helioscopes, and some other instruments*. London: Printed by T.R. for John Martyn.
 - Huygens C. (1691). Dynastae Zulichemii, solutio problematis funicularii. *Actae Eruditorum*, 281-290.
 - Lluís i Ginovart, J. et al. (2017a). Layout of Catenary Arches in the Spanish Enlightenment and Modernism. *Nexus Network Journal*, 19, 85-99. <https://doi.org/10.1007/s00004-016-0313-9>
 - Millington, J. (1839). *Elements of civil engineering: being an attempt to consolidate the principles of the various*. Philadelphia: J. Dobson.
 - Millington, J. (1848). *Elementos de Arquitectura, escritos en ingles por John Millington*, V2. Madrid: Imprenta Real.
 - Poleni G. (1748). *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Padova: Stamperia del Seminario.
 - Rondelet, J. (1804). *Tratado de Teoría y Práctica del Arte de la Construcción*, V2. Paris: Chez l'auteur, en clos du Panthéon.
 - Saalman, H. (1959). Giovanni di Gherardo da Prato's Designs concerning the Cupola of Santa Maria del Fiore in Florence. *Journal of the Society of Architectural Historians*, 28, 11-20. <https://doi.org/10.2307/987890>
 - Serlio (1545). *Il Primo libro d'architettura di Sebastiano Serlio, bolognese*. Paris: Jean Barbé.
 - Stevin S. (1586). *De Beghinselen der Weeghconst. Beschreven duer Simon Stevin van Brugghe*. Leyden: Druckerye van Cristoffel Plantijn, François van Raphelighen.
 - Selby, L. R. (1969) Setting Out the Keystones of Pointed Arches: A Note on Medieval "Baugeometrie" *Technology and Culture*, 10. 4, 537-548.
 - Stirling, J. (1717). *Lineae Tertii Ordinis Neutoniana*. Oxoniae: E Theatro Sheldoniano
 - Tosca V. (1710). *Compendio mathematico: Que comprehende Trigonometria, Secciones Conicas. Maquinaria Tomo III*. Valencia: Por Antonio Bordazar.
 - Tosca, V. (1712). *Compendio mathematico. Tomo V, Que comprehende Arquitectura civil, montea, y canteria, arquitectura militar, pirotechnia, y artillería*. Valencia: Antonio Bordazar.
 - Eruditorum, 217-219.
 - Bernoulli J. (1691). Solutio problematis funicularii. *Actae Eruditorum*, 274-281.
 - Branner R. (1960). Villard de Honnecourt, Archimedes, and Chartres. *Journal of the Society of Architectural Historians*, 19 (3), 91-96. <https://doi.org/10.2307/988023>
 - Cataneo, P. (1567). *L'architettura di Pietro Cataneo senese*. Venezia: Aldus.
 - Couplet, P. (1729). *De la poussée des voûtes*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris. Paris: De l'Imprimerie Royale.
 - Frézier, A. F. (1738-1739). *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*. Strasbourg/Paris: Jean Daniel Doulsseker/Charles-Antoine Jombert.
 - Gregory D. (1697). Catenaria. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 19. 637-652.
 - Hooke, R. (1676). *A description of helioscopes, and some other instruments*. London: Printed by T.R. for John Martyn.
 - Huygens C. (1691). Dynastae Zulichemii, solutio problematis funicularii. *Actae Eruditorum*, 281-290.
 - Lluís i Ginovart, J. et al. (2017a). Layout of Catenary Arches in the Spanish Enlightenment and Modernism. *Nexus Network Journal*, 19, 85-99. <https://doi.org/10.1007/s00004-016-0313-9>
 - Millington, J. (1839). *Elements of civil engineering: being an attempt to consolidate the principles of the various*. Philadelphia: J. Dobson.
 - Millington, J. (1848). *Elementos de Arquitectura, escritos en ingles por John Millington*, V2. Madrid: Imprenta Real.
 - Poleni G. (1748). *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Padova: Stamperia del Seminario.
 - Rondelet, J. (1804). *Tratado de Teoría y Práctica del Arte de la Construcción*, V2. Paris: Chez l'auteur, en clos du Panthéon.
 - Saalman, H. (1959). Giovanni di Gherardo da Prato's Designs concerning the Cupola of Santa Maria del Fiore in Florence. *Journal of the Society of Architectural Historians*, 28, 11-20. <https://doi.org/10.2307/987890>
 - Serlio (1545). *Il Primo libro d'architettura di Sebastiano Serlio, bolognese*. Paris: Jean Barbé.
 - Stevin S. (1586). *De Beghinselen der Weeghconst. Beschreven duer Simon Stevin van Brugghe*. Leyden: Druckerye van Cristoffel Plantijn, François van Raphelighen.
 - Selby, L. R. (1969) Setting Out the Keystones of Pointed Arches: A Note on Medieval "Baugeometrie" *Technology and Culture*, 10. 4, 537-548.
 - Stirling, J. (1717). *Lineae Tertii Ordinis Neutoniana*. Oxoniae: E Theatro Sheldoniano
 - Tosca V. (1710). *Compendio mathematico: Que comprehende Trigonometria, Secciones Conicas. Maquinaria Tomo III*. Valencia: Por Antonio Bordazar.
 - Tosca, V. (1712). *Compendio mathematico. Tomo V, Que comprehende Arquitectura civil, montea, y canteria, arquitectura militar, pirotechnia, y artillería*. Valencia: Antonio Bordazar.