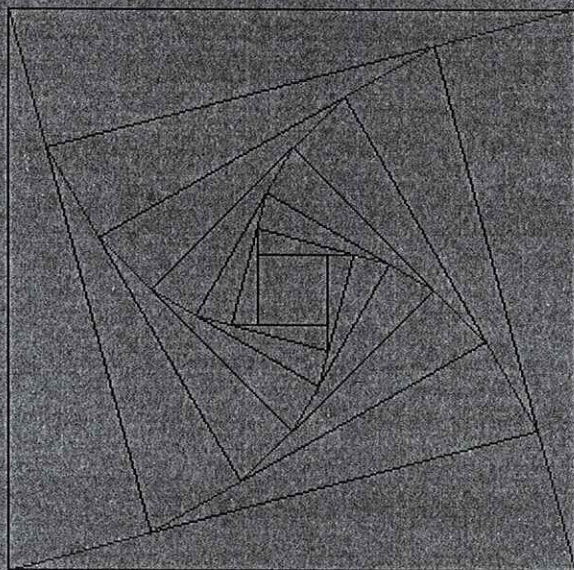


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 103
ABRIL DE 2017**

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SEDE: Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n 28040 – Madrid
Correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

Junta Directiva de la Sociedad "Puig Adam"

Presidente: José Javier Etayo Gordejuela

Vicepresidente:

Eugenio Roanes Macías

Vocales:

Enrique Rubiales Camino (Relaciones Institucionales)

Eugenio Roanes Lozano (Gestión de publicaciones)

Joaquín Hernández Gómez (Actividades y concursos)

Juan Jesús Donaire Moreno (Redacción de Publicaciones)

Secretario: José María Sordo Juanena

Vicesecretaria: María Gaspar Alonso-Vega

Tesorero: José Manuel Gamboa Mutuberría

Bibliotecario: Antonio Hernando Esteban

Boletín de la Sociedad "Puig Adam"

ISSN: 1135-0261 Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).

Telf.: 91 611 59 94 – loureiro@graficasloureiro.es

El Boletín se distribuye gratuitamente a nuestros socios. Las instrucciones para hacerse socio aparecen en la página 96 del mismo.

Las instrucciones para publicar en el Boletín aparecen en la página 94 del mismo. Las propuestas de publicación de artículos, reseñas, etc, deben hacerse a través del correo electrónico de la Sociedad: puigadam@mat.ucm.es

En la portada aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam". Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual".

Página web de la

<http://www.s>

Contenido:

Nuestra nueva web
Sociedad, *Boletín* de
Adam" y otros conc

Sobre la publicación

Nuestro Boletín se l
nuestra Sociedad. M
cia se nos pide info
de copiar reiteradan
do a adoptar la solu

Teniendo en cue
a algunos de nuest
también de países s
varios de nuestros s
tra web, al igual que
can revistas.

En respuesta a e
web en formato pdf
más de cinco años
cados en los cinco ú

Ya se ha comenz
números hacia atrás
colgados en la web
años 2001 al 2011,
años. Y, poco a po
con mayor antigüed

Mantenedoras de la

Beatriz Barrero Día
nuestra Sociedad.

ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas	2
Edición del Boletín y Comité Editorial	4
Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2017	6
Convocatoria del XXXV Concurso de Resolución de Problemas	7
XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, por <i>Joaquín Hernández y Juan Jesús Donaire</i>	8
Fallecimiento del Prof. Fco. Javier Peralta Coronado	15
Número especial dedicado al Prof. Javier Peralta	16
Fallecimiento del Prof. Luis Laíta	16
El Problema de Castillon y la Recta Proyectiva Real, por <i>Julio Castiñeira</i>	17
Ecuaciones algebraicas y soluciones racionales, por <i>Jesús Álvarez Mesa</i>	41
Aleatorizando el modelo de crecimiento malthusiano, por <i>J.C. Cortés López, E. García Moreno y A. Navarro Quiles</i>	52
Determinación de la "circunferencia de los 9 puntos" mediante relaciones cuadrangulares cíclicas entre ellos, por <i>José Alberto García Suárez</i>	66
Sobre el cuadrilátero de superficie máxima, por <i>Ricardo Moreno Castillo</i>	69
¿Comprenden los alumnos los enunciados de los problemas? por <i>Sergio Falcón Santana, Pedro Medina Rodríguez y Ángel Plaza de la Hoz</i>	72
Reseña de libros	90
Instrucciones para el envío de originales	94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95
Boletín de inscripción en la Sociedad "Puig Adam"	96

Randomizing Malthusian growth model

Aleatorizando el modelo de crecimiento malthusiano

J.C. Cortés López, E. García Moreno, A. Navarro Quiles

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València
jccortes@mat.upv.es, egarmo3@alumni.uv.es,
annaqui@doctor.upv.es

Resumen

Este trabajo ilustra, mediante el modelo de crecimiento clásico malthusiano, cómo introducir la aleatoriedad utilizando el enfoque markoviano. Se prueba que la función generatriz de probabilidad del proceso estocástico solución, denominado de nacimiento, es una distribución binomial negativa desplazada. Se detalla una técnica para simular el proceso estocástico solución. También se realiza una breve digresión acerca de otras formas posibles de introducir la incertidumbre en el modelo determinista malthusiano.

Abstract

This paper deals with the randomization of the classical Malthusian growth model, using a Markovian approach. We show that the solution stochastic process, usually referred to as birth process, corresponds to the shift negative binomial distribution. A simulation procedure is included. A brief discussion regarding alternative ways to consider randomness into the Malthusian model are also included.

Introducción

La ubicuidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) en la modelización matemática de fenómenos reales (leyes físicas, reacciones químicas,

procesos biológicos, etc) tiene sus raíces en los trabajos pioneros de los hermanos Bernoulli en el siglo XVII y llega hasta nuestros días. La aplicación de las EDOs clásicas a datos reales requiere asignar un valor nominal para cada uno de los *inputs* (coeficientes, término fuente, condiciones iniciales y/o frontera). Sin embargo, debido a la incertidumbre de los fenómenos bajo estudio y/o de los errores asociados a las mediciones para fijar los valores nominales de los *inputs*, es natural considerar aleatoriedad en la formulación de las EDOs de los modelos matemáticos. En este trabajo se estudia, a partir de un ejemplo sencillo -el modelo de crecimiento de Malthus- una forma de introducir aleatoriedad en modelos matemáticos basados en EDOs usando para ello un enfoque markoviano. A lo largo del trabajo la terna $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ denotará un espacio de probabilidad.

Como se verá posteriormente la distribución binomial negativa desempeñará un papel clave en el estudio que se realizará en este trabajo. Por ello, empezaremos recordando que una variable aleatoria (v.a.) X se dice que tiene una distribución binomial negativa de parámetros $n \in \{1, 2, \dots\}$ y $p \in (0, 1)$, $X \sim \text{Bineg}(n; p)$, si su función de probabilidad (f.p.) es

$$f_X(x) = \mathbb{P}[X = x] = \binom{x+n-1}{n-1} p^n (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

El valor de $f_X(x)$ puede ser interpretado como la probabilidad de n éxitos en $n+x$ intentos o pruebas, siendo p la probabilidad de éxito. Se puede probar, [3, 8, 10], que la función generatriz de probabilidad (f.g.p.) de X , $\mathcal{P}_X(z)$, su media, μ_X , y su varianza, σ_X^2 están dadas respectivamente por

$$\mathcal{P}_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \frac{p^n}{(1 - (1-p)z)^n}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \frac{n(1-p)}{p}, \quad \sigma_X^2 = \mathbb{V}[X] = \frac{n(1-p)}{p^2}. \quad (3)$$

A partir de (1) se puede definir la f.p., $f_Y(y)$, de una v.a. binomial negativa desplazada, $Y \sim \widehat{\text{Bineg}}(n; p)$, que en lugar de empezar en el valor $y = 0$ empieza en el valor $y = n$, siendo n un entero positivo (téngase en cuenta (1) y que $x = y - n$)

$$f_Y(y) = \binom{y-1}{n-1} p^n (1-p)^{y-n}, \quad y = n, n+1, \dots \quad (4)$$

Por tanto, la f.g.p. de $Y \sim \widehat{Bineg}(n; p)$ está dada por

$$\mathcal{P}_Y(z) = \mathbb{E}[z^Y] = \mathbb{E}[z^{X+n}] = z^n \mathbb{E}[z^X] = z^n \mathcal{P}_X(z) = \frac{(pz)^n}{(1 - (1-p)z)^n}. \quad (5)$$

Claramente como $Y = X + n$, por las propiedades de la media y la varianza se tiene, por (3), que

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] + n = \frac{n}{p}, \quad \sigma_Y^2 = \mathbb{V}[Y] = \mathbb{V}[X] = \frac{n(1-p)}{p^2}. \quad (6)$$

1. El modelo de crecimiento malthusiano determinista: una revisión

Uno de los modelos clásicos de crecimiento más conocidos y, posiblemente el más sencillo, es el modelo de crecimiento geométrico o malthusiano. Se asumen las siguientes hipótesis: H1: Inicialmente hay n_0 individuos; H2: Ningún individuo muere, es decir, solo se producen nacimientos; H3: No existe interacción entre los individuos; H4: La tasa de nacimiento, $b > 0$, para todos los individuos es la misma.

Denotando por $n(t)$ el número de individuos en el instante $t > 0$, entonces por la ley de conservación de masas (en este caso de la población) en un intervalo de longitud Δt , se cumple:

$$n(t + \Delta t) - n(t) = bn(t)\Delta t, \quad (7)$$

siendo la constante de proporcionalidad $b > 0$ (que por H4 no depende de t). De (7) se deduce, mediante un paso al límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y utilizando la definición de derivada, que

$$n'(t) = bn(t). \quad (8)$$

Teniendo en cuenta H1 (con tiempo inicial $t_0 = 0$),

$$n(0) = n_0, \quad (9)$$

y resolviendo el problema de valor inicial (PVI) (8)–(9), se obtiene la dinámica poblacional en cualquier instante t finito,

$$n(t) = n_0 e^{bt}. \quad (10)$$

Este modelo ha sido aplicado para estudiar, por ejemplo, el crecimiento de especies en intervalos de tiempo finitos donde es plausible asumir H1-H4, pero obviamente no es válido en el largo plazo, ya que, al ser $b > 0$, la expresión (10) predice un crecimiento ilimitado ($n(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$), y los recursos siempre son limitados [5].

2. Aleatorización del modelo de crecimiento malthusiano: ecuaciones de Kolmogorov

El objeto de este apartado es mostrar una posible aleatorización del modelo de Malthus (8)-(9), basado en el hecho de que los nacimientos, en la práctica, no se producen de forma "segura", sino con cierta probabilidad. En primer lugar, conviene señalar que existen diferentes formas de llevar a cabo la aleatorización:

1) Asumiendo directamente que la tasa de nacimiento $b > 0$ es una v.a. positiva, B , en cuyo caso la ecuación (8) se denomina *Ecuación Diferencial Aleatoria (EDA)*. La solución del PVI (8)-(9) es el proceso estocástico (p.e.) $N^{EDA}(t)$, [11], con funciones media, $\mu_N(t)$, y desviación típica, $\sigma_N(t)$,

$$N^{EDA}(t) = n_0 e^{Bt}, \quad \begin{cases} \mu_{N^{EDA}}(t) = n_0 \mathbb{E} [e^{Bt}] , \\ \sigma_{N^{EDA}}(t) = (n_0)^2 \left\{ \mathbb{E} [e^{2Bt}] - (\mathbb{E} [e^{Bt}])^2 \right\} . \end{cases}$$

2) Perturbando la tasa de nacimiento b mediante un ruido aleatorio con cierta intensidad $\sigma > 0$. Típicamente se elige esta perturbación a través de la derivada del proceso de Wiener, $W'(t)$, que se denomina ruido blanco. Esto conduce a una *Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)* de tipo Itô:

$$n'(t) = bn(t) \xrightarrow[n(t) \equiv N(t)]{b \Rightarrow b + \sigma W'(t), b, \sigma > 0} \frac{dN(t)}{dt} = (b + \sigma W'(t)) N(t),$$

$$dN(t) = (b + \sigma W'(t)) N(t)dt \Rightarrow dN(t) = bN(t)dt + \sigma N(t)W'(t)dt,$$

y teniendo en cuenta la definición formal de la diferencial, $dW(t) = W'(t)dt$ se llega a

$$dN(t) = bN(t)dt + \sigma N(t)dW(t). \quad (11)$$

El modelo (8) y (11) se ha utilizado en el área de las Finanzas para estudiar la dinámica de un subyacente, [1, 6]. Utilizando el cálculo de Itô se puede probar, [6],

$$N^{\text{EDE}}(t) = n_0 e^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}, \quad \begin{cases} \mu_{N^{\text{EDE}}}(t) = n_0 e^{bt}, \\ \sigma_{N^{\text{EDE}}}^2(t) = (n_0)^2 e^{2bt} (e^{\sigma^2 t} - 1). \end{cases}$$

En estas páginas adoptamos otro enfoque, inspirado en [7, Cap.1], para introducir la aleatoriedad en el modelo malthusiano, asumiendo que el número de ejemplares de la población, en lo sucesivo denotado por N_t , solo puede tomar los valores discretos, $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$, en cualquier instante de tiempo $t > 0$. Por tanto, formalmente tenemos un p.e. discreto en tiempo continuo:

$$\{N_t : t \geq 0 : N_t \in \{n_0, n_0 + 1, \dots\}\}, \quad (12)$$

y, por conveniencia, introducimos la siguiente notación:

$$P_n(t) = \mathbb{P}[N_t = n], \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1, n_0, n_0 + 1, \dots \quad (13)$$

asumiendo que al inicio, la población es n_0 con probabilidad 1:

$$P_{n_0}(0) = 1, \quad P_n(0) = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1, n_0 + 1, \dots \quad (14)$$

y que en ningún instante hay un número de ejemplares menor que el inicial, n_0 :

$$P_n(t) = 0, \quad \forall n = 0, 1, \dots, n_0 - 1. \quad (15)$$

Esta condición asegura que $\{N_t, t \geq 0\}$ es un *proceso de nacimiento*.

Del mismo modo que en el modelo malthusiano determinista se han asumido H1–H4, en el contexto aleatorio en lo sucesivo se asumirán las hipótesis: $\hat{H}1$: Inicialmente la población es n_0 , (véase (14)); $\hat{H}2$ y $\hat{H}3$ las mismas que H2 y H3; $\hat{H}4$: La probabilidad de que en un intervalo de tiempo de longitud Δt ocurra un nacimiento es $b\Delta t + o(\Delta t)$, y que ocurra más de un nacimiento es $o(\Delta t)$, siendo $o(\cdot)$ la notación “o”pequeña de Landau, [2, pp. 41–50]. Esta hipótesis nos indica que si Δt es suficientemente pequeño, en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ hay un nacimiento con probabilidad $b\Delta t$ más una cantidad despreciable con respecto al tamaño Δt .

Observemos que a partir de $\hat{H}1$ – $\hat{H}4$ se deducen las siguientes probabilidades para los incrementos de los nacimientos, $\Delta N_t = N_{t+\Delta t} - N_t$,

$$P_{n+j,n}(\Delta t) = \mathbb{P}[\Delta N_t = j \mid N_t = n] = \begin{cases} 1 - bn\Delta t + o(\Delta t) & \text{si } j = 0, \\ bn\Delta t + o(\Delta t) & \text{si } j = 1, \\ o(\Delta t) & \text{si } j \geq 2, \\ 0 & \text{si } j < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Por tanto, obsérvese que los incrementos, ΔN_t , solo pueden tomar los valores 0 (no hay ningún nacimiento), ó 1 (si hay exactamente un nacimiento), en intervalos de longitud Δt ; y el resto de posibles valores del incremento son probabilísticamente despreciados. Esto implica que en el instante $t + \Delta t$ la población es de tamaño n si en el instante t era de tamaño n y no se ha producido ningún nacimiento, o tamaño $n-1$ y se ha producido 1 nacimiento, durante el incremento de tiempo transcurrido, Δt .

Ahora vamos a establecer una relación clave, similar a la expresión (7) usada en el escenario determinístico, que mediante un paso al límite nos va a permitir establecer una ecuación diferencial cuya incógnita es la distribución de probabilidad $P_n(t)$. Para ello, obsérvese que teniendo en cuenta (13), (16) y aplicando el Teorema de la Probabilidad Total se tiene

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= \mathbb{P}[\Delta N_t = 0 \mid N_t = n] \mathbb{P}[N_t = n] \\ &+ \mathbb{P}[\Delta N_t = 1 \mid N_t = n-1] \mathbb{P}[N_t = n-1] \\ &= P_{n,n}(t)P_n(t) + P_{n,n-1}(t)P_{n-1}(t) \\ &= (1 - bn\Delta t + o(\Delta t)) P_n(t) + (b(n-1)\Delta t + o(\Delta t)) P_{n-1}(t), \end{aligned}$$

es decir, reordenando términos

$$P_n(t + \Delta t) - P_n(t) = b(n-1)\Delta t P_{n-1}(t) - bn\Delta t P_n(t) + (P_{n-1}(t) + P_n(t))o(\Delta t).$$

Ahora dividiendo por Δt , tomando límites cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y teniendo en cuenta que por definición de $o(\Delta t)$ se cumple que $o(\Delta t)/\Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, tenemos

$$P'_n(t) = b(n-1)P_{n-1}(t) - bnP_n(t), \quad t > 0, \quad n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots \quad (17)$$

Obviamente por (14) y (15) se tiene

$$\left. \begin{aligned} P'_n(t) &= 0, \quad t > 0, \quad n = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \\ P_n(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

3. Resolviendo las ecuaciones de Kolmogorov

En este apartado resolveremos las ecuaciones diferenciales dadas en (17) y (18), denominadas ecuaciones de Kolmogorov, que determinan la distribución de probabilidad $P_n(t)$ de que en el instante $t > 0$ haya n individuos. Empezamos por el PVI (18), que es más sencillo, y cuya solución es

$$P_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad t \geq 0. \quad (19)$$

Ahora observemos que tomando $n = n_0$ en (17) y considerando que por (19) $P_{n_0-1} = 0$, se tiene

$$P'_{n_0}(t) = b(n_0 - 1)P_{n_0-1}(t) - bn_0P_{n_0}(t) = -bn_0P_{n_0}(t), \quad t > 0. \quad (20)$$

Así, de (20) y de la primera condición de (14) se obtiene el siguiente PVI

$$\left. \begin{aligned} P'_{n_0}(t) &= -bn_0P_{n_0}(t), \quad t > 0, \\ P_{n_0}(0) &= 1, \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es

$$P_{n_0}(t) = e^{-bn_0t}, \quad t \geq 0. \quad (21)$$

Esto nos indica que la probabilidad de que haya n_0 individuos en cualquier instante t decrece exponencialmente con la tasa de natalidad b y el tiempo, siendo esta probabilidad 1 en $t = 0$ (obsérvese que $P_{n_0}(t) \in [0, 1[, \forall t > 0$, $\forall b > 0$, pues $n_0 > 0$).

Vamos ahora a determinar las probabilidades $P_n(t)$ para $n = n_0, n_0+1, \dots$ y $t > 0$ (incluimos el valor $n = n_0$, aunque ya se ha calculado en (21) porque como veremos puede incluirse en la fórmula final), teniendo en cuenta la definición de la f.g.p. del p.e. $N(t)$, [9],

$$\mathcal{P}_N(z, t) = \mathbb{E} \left[z^{N(t)} \right] = \sum_{n=n_0}^{\infty} P_n(t) z^n, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

siendo $P_n(t)$ la probabilidad definida en (13).

Para ello vamos a establecer una ecuación en derivadas parciales para la f.g.p. $\mathcal{P}_N(z, t)$ manipulando adecuadamente la relación (17) y teniendo en cuenta (22). El “truco” consiste en multiplicar (17) por z^n para $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ y sumar las expresiones obtenidas. Esto conduce a:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=n_0}^{\infty} P'_n(t) z^n &= b \sum_{n=n_0}^{\infty} (n-1) P_{n-1}(t) z^n - b \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^n \\
 &= b z^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} (n-1) P_{n-1}(t) z^{n-2} - b z \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1} \\
 &= b z^2 \sum_{n=n_0-1}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1} - b z \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1} \\
 &= b z^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1} - b z \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1} \\
 &= b z(z-1) \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Notar que en el anterior desarrollo se ha aplicado la propiedad dada en (15).

Asumiendo que la serie que define la f.g.p. converge uniformemente respecto t y z , para poder conmutar la derivada respecto de t y z y la suma infinita que la define, de (22) y (23), formalmente se deduce

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{P}_N(z, t)) &= b z(z-1) \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{P}_N(z, t)), \\ \mathcal{P}_N(z, 0) &= z^{n_0}. \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

Obsérvese que se ha formulado una ecuación en derivadas parciales (EDP) para la f.g.p., $\mathcal{P}_N(z, t)$, y una condición inicial, la cual ha sido establecida teniendo en cuenta (22) y que n_0 es un valor determinístico

$$\mathcal{P}_N(z, 0) = \mathbb{E} [z^{N(0)}] = \mathbb{E} [z^{n_0}] = z^{n_0}.$$

Ahora necesitamos resolver el PVI (24), y para ello usaremos el método de las características [4]. Mediante este método se asume que la EDP puede ser

expresada como un sistema de EDOs a lo largo de las curvas características, las cuales se expresan en términos de ciertas variables auxiliares, s y r :

$$\mathcal{P}_N(z, t) \equiv \mathcal{P}_N(z(s, r), t(s, r)) \equiv \mathcal{P}(s, r).$$

Se asume que a lo largo de las curvas características la variable s es constante, por lo que

$$\mathcal{P}_N(z(s, r), t(s, r)) = \mathcal{P}(z(r), t(r)).$$

Las curvas características se determinan resolviendo los siguientes sistemas de EDOs (véase (24))

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= 1, \\ t(s, 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \text{(I)} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= -bz(z-1), \\ z(s, 0) &= s, \end{aligned} \right\} \text{(II)} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_N}{dr} &= 0, \\ \mathcal{P}_N(s, 0) &= s^{n_0}. \end{aligned} \right\} \text{(III)}$$

Obsérvese que el método funciona porque a lo largo de las curvas características, las soluciones de las ecuaciones dadas en (25) son también soluciones de la EDP (24):

$$\left. \begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{(III)}}{=} \frac{d\mathcal{P}_N}{dr} = \frac{\partial \mathcal{P}_N}{\partial z} \frac{dz}{dr} + \frac{\partial \mathcal{P}_N}{\partial t} \frac{dt}{dr} \stackrel{\text{(I)}}{=} -bz(z-1) \frac{\partial \mathcal{P}_N}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{P}_N}{\partial t}, \\ z^{n_0} &= \mathcal{P}_N(z, 0) = \mathcal{P}_N(s, 0) \stackrel{\text{(III)}}{=} s^{n_0}. \end{aligned} \right\}$$

Las soluciones de los PVI (25)-(I)-(III) son, respectivamente

$$t(s, r) = r. \quad z(s, r) = \frac{s}{s + (1-s)e^{-br}}. \quad \mathcal{P}_N(s, r) = s^{n_0}. \quad (26)$$

Por tanto, sustituyendo la primera igualdad de (26) en la segunda se tiene que $z = s / (s + (1-s)e^{-bt})$ y despejando de aquí s en función de t se llega a que $s = (ze^{-bt}) / (ze^{-bt} - (z-1))$ que sustituido en la última igualdad de (26) nos da la solución buscada

$$\mathcal{P}_N(z, t) = \left(\frac{ze^{-bt}}{ze^{-bt} - (z-1)} \right)^{n_0} = \frac{z^{n_0} e^{-bn_0 t}}{[1 - z(1 - e^{-bt})]^{n_0}}. \quad (27)$$

Observemos que fijado t , (27) se corresponde con la f.g.p. de una v.a. binomial negativa desplazada (véase (5)) tomando $n = n_0$ y $p = e^{-bt} \in (0, 1)$.

Utilizando la identificación $Y = N_t$ y las relaciones dadas en (6), a partir de (27) se deduce el valor de las funciones media y varianza del proceso malthusiano de nacimiento, $\{N_t : t \geq 0\}$, definido en (12)–(15)

$$\mu_N(t) = n_0 e^{bt}, \quad \sigma_N^2(t) = n_0 e^{2bt} (1 - e^{-bt}) = n_0 e^{bt} (e^{bt} - 1). \quad (28)$$

En la Fig. 1 se muestra, para diferentes instantes temporales $\hat{t}$ fijos, la f.p. del p.e. solución, $P_n(t)$, del modelo malthusiano, la cual está dada por (4), con $Y \equiv N_{\hat{t}}$ y, $n = n_0$ y $p = e^{-bt} \in (0, 1)$.

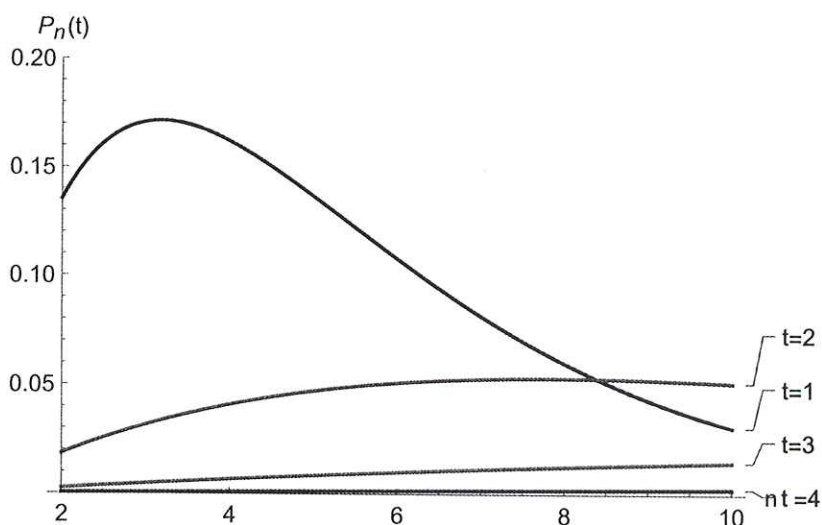


Figura 1: Representación de la f.p. del p.e. solución del modelo malthusiano aleatorizado tomando, $n_0 = 2$, $b = 1$, para los instantes temporales $t = 1, 2, 3, 4$ sobre el dominio $n = 2, 3, \dots, 10$.

Es interesante comparar estas expresiones de las funciones media y varianza del modelo malthusiano aleatorizado según el enfoque markoviano con las expresiones que se obtienen vía EDAs y EDEs. Esta comparativa se detalla en el Cuadro 1. A partir de estos resultados se observan importantes diferencias, sobre todo a nivel de variabilidad (varianza) que indican el impacto

que tiene la forma de modelizar la incertidumbre incluso en un modelo básico como es el proceso de nacimiento o modelo de crecimiento malthusiano. Este análisis comparativo se puede extender a otros momentos estadísticos de orden superior.

Enfoque	Media	Varianza
EDAs	$n_0 \mathbb{E}[e^{Bt}]$	$(n_0)^2 \left\{ \mathbb{E}[e^{2Bt}] - (\mathbb{E}[e^{Bt}])^2 \right\}$
EDEs	$n_0 e^{bt}$	$(n_0)^2 e^{2bt} (e^{\sigma^2 t} - 1)$
Markoviano	$n_0 e^{bt}$	$n_0 e^{bt} (e^{bt} - 1)$

Cuadro 1: Comparación de la media y de la varianza de la solución de un proceso de nacimiento en función del enfoque utilizado para introducir la incertidumbre en el modelo determinístico: EDA's, EDEs y el enfoque Markoviano.

4. Simulación

En aras de poder realizar simulaciones del p.e. $\{N_t : t \geq 0\}$, definido en (12)–(15), es necesario a su vez simular los instantes temporales en los cuales tiene lugar un nacimiento. Con este propósito supongamos que $N_{T_i} = n$ y que $N_{T_{i+1}} = n + 1$ (los tiempos se denotan con letras mayúsculas para enfatizar que son consideradas como v.a.'s), y denotemos por $\tau_i = T_{i+1} - T_i$ la v.a. continua y positiva que representa el tiempo hasta el siguiente nacimiento dado que el proceso está en el estado n (τ_i se denomina *tiempo entre eventos*). Denotemos por $H_n(t) = \mathbb{P}[t + T_i < T_{i+1}] = \mathbb{P}[\tau_i > t]$ la probabilidad de que el proceso permanezca en el estado n durante un período de tiempo t . Asumiendo que la probabilidad de permanecer en el estado n durante un período de tiempo mayor, $t + \Delta t$, vendrá dado por la probabilidad de permanecer en el estado n durante un tiempo t , por la probabilidad de pasar del estado n al mismo estado en un paso de tiempo Δt , y teniendo en cuenta (16), se tiene

$$H_n(t + \Delta t) = H_n(t)P_{n,n}(\Delta t) = H_n(t)(1 - bn\Delta t + o(\Delta t)). \quad (29)$$

Restando $H_n(t)$ a ambos lados de la igualdad anterior, dividiendo por Δt y tomando límites nos queda:

$$\frac{dH_n(t)}{dt} = -bnH_n(t).$$

Como $H_n(0) = \mathbb{P}[\tau_i > 0] = 1$, resolviendo este problema de valor inicial obtenemos su solución, $H_n(t) := \mathbb{P}[\tau_i > t] = e^{-bnt}$, o equivalentemente $\mathbb{P}[\tau_i < t] = 1 - H_n(t) = 1 - e^{-bnt}$, lo cual nos indica que la v.a. tiempo τ_i tiene una función de distribución exponencial de parámetro bn , ($\tau_i \sim \text{Exp}(bn)$), [8]. Entonces, como para una v.a. exponencial se cumple $\mathbb{E}(\tau_i) = 1/(bn)$, el tiempo medio que estaremos esperando hasta que se produzca un nuevo nacimiento será $1/(bn)$. Es importante observar que la relación (29) es intrínseca a la distribución exponencial [8], y ello implica la propiedad de *falta de memoria* que tiene el proceso markoviano $\{N_t : t \geq 0\}$ para sus tiempos entre eventos, τ_i . En base a la distribución exponencial de τ_i y utilizando el método de la función de distribución inversa para simular v.a.'s (véase [9]), a continuación se indican los pasos necesarios para obtener M simulaciones $t = \tau_i(\omega)$, $\omega \in \Omega$:

Paso 1: Generar un valor u de una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$: $u = U(\omega)$, $\omega \in \Omega$, siendo $U \sim U([0, 1])$.

Paso 2: Calcular $t = -(\ln(1 - u))/bn$.

Paso 3: Repetir M veces los Pasos 1 y 2.

En la Fig. 2 se muestran 2 simulaciones del p.e. solución, $\{N_t : t \geq 0\}$, del modelo malthusiano. También se han representado en dicha figura las funciones media más/menos una desviación típica a partir de las expresiones dadas en (28). Las simulaciones se han realizado con el software Mathematica[®] usando el siguiente código basado en los Pasos 1–3.

```
b = 1; time = 5; init = 2; t = List[0]; i = List[init]; j = 1;
While[i[[j]] > 0 && t[[j]] < time,
  U1 = RandomReal[];
  a = b*i[[j]];
  t = Append[t, t[[j]] - Log[U1]/a];
  i = Append[i, i[[j]] + 1];
  j = j + 1; ]
```

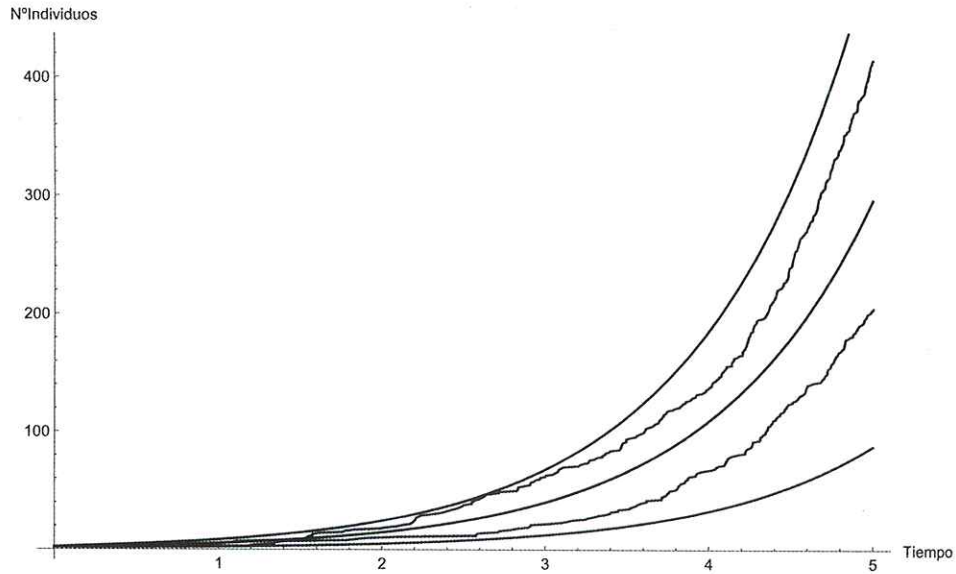


Figura 2: *Dos simulaciones del p.e. solución del modelo malthusiano aleatorizado tomando, $n_0 = 2$, $b = 1$ (líneas quebradas) junto a su función media (línea central) y la media más/menos una desviación típica (líneas continuas superior e inferior).*

5. Conclusiones

En este trabajo se han estudiado, con cierto detalle, los fundamentos matemáticos para introducir aleatoriedad en un sencillo, pero importante modelo, el modelo de crecimiento malthusiano. Para ello se ha seguido el paradigma markoviano. Al mismo tiempo, se han subrayado las diferencias a nivel de función media y varianza del proceso estocástico solución, respecto de otros importantes enfoques disponibles en la literatura. También se ha estudiado un método para simular el proceso estocástico solución. Las ideas expuestas en este trabajo pueden generalizarse a otros modelos relevantes de la biología, como por ejemplo el modelo logístico.

Referencias

- [1] Calbo, G. (2009): El modelo matemático lognormal para valorar activos financieros: un enfoque didáctico. Bol. Puig Adam 81, pp: 13–25.
- [2] Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L. y Stein, C. (2001): Introduction to Algorithms. Second Edition. MIT Press and McGraw–Hill.
- [3] DeGroot, M.H. (1988): Probabilidad y Estadística, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. Madrid.
- [4] Evans, L.C. (2010): Partial Differential Equations, American Math. Soc. New Jersey.
- [5] Martínez Pérez, M.C. y Pérez de Vargas, A. (1993): Métodos Matemáticos en Biología. Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid.
- [6] Mikosch, T. (2000): Elementary Stochastic Calculus with Finance in View. WorldScientific. Singapore.
- [7] Allen, L. (2008): Mathematical Epidemiology (Eds. Brauer, F., van den Driessche, P. y Wu, J.). Mathematical Biosciences Subseries. Lecture Notes in Mathematics. Springer. Heidelberg.
- [8] Quesada, V. y García A. (1988): Lecciones de Cálculo de Probabilidades, Ed. Díaz de Santos. Madrid.
- [9] Ross, S.M. (1997): Simulación. 2ª edición. Ed. Pearson-Prentice Hall. Madrid.
- [10] Ross, S.M. (2009): Introduction to Probability Models. 10th ed. Ed. Academic Press. New York.
- [11] Soong, T.T. (1973): Random Differential Equations in Science and Engineering. Ed. Academic Press. New York.