



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Trabajo de Fin de Máster
**Métodos numéricos para la
resolución de ecuaciones difusas**

Autor: **Miguel Camarasa Buades**
Directores: ALICIA CORDERO, JUAN R. TORREGROSA

Máster en investigación matemática (InvestMat)

Al meu pare i a la meua mare.

Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones difusas

Miguel Camarasa, Alicia Cordero, Juan R. Torregrosa

¹Instituto de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València

miguel.camarasa.buades@gmail.com

acordero@mat.upv.es

jrtorre@mat.upv.es

Las ecuaciones difusas juegan un papel importante en muchas disciplinas, ya que nos permiten describir sucesos de forma más sencilla que con la lógica booleana. Por ejemplo, sería difícil definir un conjunto cuyos elementos estén formados por los números mucho mayores que la unidad.

Este trabajo se centra sobre el estudio de números difusos y de ecuaciones donde las constantes y soluciones son de esta clase de números. Se resolverán dichas ecuaciones mediante los métodos iterativos de Newton y Steffensen, previamente adaptados a este tipo de conjuntos. Además, también se presenta la ecuación logística difusa, que permite el estudio de la evolución del número de individuos en una población con incertidumbre.

Índice general

1. Introducción.	11
1.1. Conjuntos difusos	11
1.2. Números reales difusos.	14
1.3. Principio de extensión de Zadeh.	18
1.3.1. Aritmética difusa de Zadeh.	20
1.4. Funciones difusas.	24
2. Ecuaciones difusas.	31
3. Métodos numéricos para ecuaciones difusas.	37
3.1. Estado del arte.	38
3.2. Newton-Raphson multidimensional.	39
3.2.1. Descripción del método.	40
3.2.2. Convergencia.	40
3.2.3. Esquema iterativo de Newton para ecuaciones difusas.	43
3.3. Método de Steffensen.	47
3.3.1. Convergencia.	49
4. Ecuación logística difusa.	57
4.1. Resultados previos.	57
4.2. Ejemplos.	60
5. Conclusiones y líneas futuras.	63
Referencias	63

Índice de figuras

1.1.	Representación de $\mu(x)$ para un número difuso que es aproximadamente 2.	16
1.2.	Representación de un número en formato LR.	18
1.3.	Representación de un número triangular.	19
1.4.	Representación de u^2 para $u = (1, 2, 3)$.	25
1.5.	Representación de u^2 y $u \cdot u$ para $u = (-1, 0, 1)$.	27
2.1.	Número difuso x solución de la ecuación (2.5).	35
3.1.	Soluciones exacta y aproximada por Newton para $N = 50$.	46
3.2.	Soluciones exacta y aproximada por Newton para $N = 50$.	47
3.3.	Soluciones exacta y aproximada por Steffensen para $N = 50$.	52
3.4.	Soluciones exacta y aproximada por Newton para $N = 50$.	53
3.5.	Soluciones exacta y aproximada de la ecuación (3.21) por Steffensen para $N = 50$.	54
3.6.	Soluciones exacta y aproximada por Newton para $N = 50$.	54
3.7.	Soluciones exacta y aproximada de la ecuación (3.21) por Steffensen para $N = 50$.	55
3.8.	Soluciones exacta y aproximada por Newton para $N = 50$.	56
4.1.	Solución de la ecuación difusa en recurrencia (4.4).	61

Capítulo 1

Introducción.

En muchas ocasiones, la lógica binaria usual no es suficiente para modelar la manera en que las personas resuelven sus problemas cotidianos. Por ejemplo, el conjunto de los seres vivos claramente incluye a los perros, gatos, pájaros, etc., pero elementos como las virus tienen un status bastante ambiguo sobre su pertenencia a este conjunto [5]. Lo mismo pasa con los números reales mucho mayores que 1: ¿pertenece el número 10 a este conjunto? Lo cierto es que este tipo de cuestiones no se pueden responder con los conjuntos o clases usuales que se utilizan en Matemáticas.

Es por eso que, en 1965, surgió lo que se conoce como la teoría de conjuntos difusos: un elemento no sólo puede pertenecer o no a un conjunto, sino que lo puede hacer parcialmente. Para ello, Lotfi Asker Zadeh (1921-2017), matemático estadounidense de origen iraní, propuso en [5] la utilización de una función de pertenencia, con un rango de valores en el intervalo $[0, 1]$. De esta forma, un elemento podría pertenecer parcialmente a un conjunto con un cierto grado de pertenencia. Esto nos permitiría decir, por ejemplo, que los virus pertenecen en un 50 % al conjunto de los seres vivos.

Zadeh propuso también una serie de operaciones algebraicas definidas alrededor de esta lógica, y demostró que no era más que una generalización de la lógica booleana.

i4

1.1. Conjuntos difusos

Hoy en día, existe una extensa literatura sobre la teoría de conjuntos difusos. Por ejemplo, en [8] se desarrolla toda la teoría que gira entorno a los números difusos, mientras que en el libro *Fuzzy Sets and Systems* [19] se explican los conjuntos difusos de forma más general, sin detenerse solamente en los números. Todos ellos trabajan sobre un conjunto inicial $\mathbb{X}$ al que llaman universo y sobre el que definen la lógica difusa y sus respectivas operaciones. Este trabajo se centrará exclusivamente en el estudio de la lógica difusa sobre el conjunto de los números reales, por lo que aunque se darán algunas definiciones más generales, será conveniente pensar que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$.

Definición. Un **conjunto difuso** sobre un conjunto dado $\mathbb{X}$ (universo) está definido por su función de pertenencia $\mu : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{T} \subseteq [0, 1]$, de forma que está únicamente

caracterizado por los pares $(x, \mu(x))$ para cada $x \in \mathbb{X}$. El valor $\mu(x)$ representa el grado de pertenencia de x al conjunto difuso.

Ejemplo 1. Si se considera $\mathbb{T} = \{0, 1\}$, se obtiene la definición booleana de subconjunto en la teoría de conjuntos. Aquí μ representa la función característica de este subconjunto. Así pues, si consideramos un subconjunto A de un conjunto dado $\mathbb{X}$, entonces cualquier punto $x \in \mathbb{X}$ pertenece o no pertenece al conjunto.

Ejemplo 2. Sea $\mathbb{T} = [0, 1]$. Este es el ejemplo básico de lógica difusa. Siguiendo la misma notación que el ejemplo anterior, ahora x puede pertenecer a A en un rango dentro de $[0, 1]$. Se podría decir que

- $\mu(x) = 1 \longrightarrow x$ pertenece a A .
- $\mu(x) = 0 \longrightarrow x$ no pertenece a A .
- $\mu(x) = c \in (0, 1) \longrightarrow x$ pertenece parcialmente a A con un grado de pertenencia c .

Si no se especifica lo contrario, a partir de ahora se considerará que la función de pertenencia de un conjunto difuso toma valores en el intervalo $\mathbb{T} = [0, 1]$.

Definición. Sea $\mathbb{X}$ un conjunto. Se denota por $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ al conjunto de todos los conjuntos difusos sobre $\mathbb{X}$.

A partir de ahora, se denotará a estos conjuntos difusos usando letras minúsculas como u , v y w , y a sus correspondientes funciones de pertenencia μ_u , μ_v , μ_w . De esta forma quedan completamente determinados.

Un elemento importante de un conjunto difuso es el conjunto formado por todos los elementos que tienen algún grado de pertenencia con él:

Definición. Sea $u \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ y μ_u su función de pertenencia. Se define el **soporte** de u como

$$\text{supp}(u) = \{x \in \mathbb{X} : \mu_u(x) > 0\}.$$

Estas son las definiciones básicas sobre las que se asienta la teoría difusa de conjuntos. Aún así, trabajar con la función de pertenencia suele traer complicaciones adicionales, por lo que normalmente se trabaja con los **α -cortes** de un conjunto difuso:

Definición. Para cada $\alpha \in (0, 1]$, llamaremos **α -corte** (o α -nivel) a los conjuntos:

$$[u]_\alpha = \{x \in \mathbb{X} : \mu_u(x) \geq \alpha\}.$$

En el caso en que $\alpha = 0$, se toma la clausura del soporte:

$$[u]_0 = \text{cl}(\text{supp}(u)).$$

Llamaremos también núcleo de u al conjunto de todos los elementos con máxima pertenencia a u . Es decir:

$$\text{core}(u) = \{x \in \mathbb{X} : \mu_u(x) = 1\}.$$

Se dice que u es **normal** si $\text{core}(u) \neq \emptyset$.

Esta definición es útil para definir las operaciones de los números reales difusos, como se verá más adelante, y hacen mucho más sencilla su manipulación.

Las propiedades de los α -cortes más conocidas son las siguientes

$$[u]_\alpha \subseteq [u]_\beta \quad \text{para } \alpha > \beta, \quad (1.1)$$

$$[u]_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} [u]_\beta \quad \text{para } \alpha \in]0, 1]. \quad (1.2)$$

y si $x \in \text{supp}(u)$ (de lo contrario $\mu(x) = 0$), entonces

$$\mu_u(x) = \sup\{\alpha \mid \alpha \in]0, 1] \text{ para los cuáles } x \in [u]_\alpha\}.$$

Todas ellas se pueden encontrar en el capítulo 12 de [8].

Se necesita también una forma de decir que dos conjuntos difusos son iguales.

Definición. Diremos que dos conjuntos difusos $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ son iguales, y se escribirá $u = v$, si y solo si

$$\mu_u(x) = \mu_v(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{X},$$

o de forma equivalente

$$[u]_\alpha = [v]_\alpha \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 1].$$

Nosotros estamos interesados en el caso $\mathbb{X} = \mathbb{R}$. ¿Cómo se puede generalizar un número real, pero con lógica difusa? Necesitamos algunas definiciones.

Definición. Sea $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, con $\text{supp}(u)$ un conjunto convexo. Diremos que la función de pertenencia μ_u es cuasi-cóncava si

$$\mu_u((1-t)x' + tx'') \geq \min\{\mu_u(x'), \mu_u(x'')\},$$

para cada $x', x'' \in \text{supp}(u)$ y $t \in [0, 1]$. De forma equivalente, μ_u es cuasi-cóncava si los α -cortes son conjuntos convexos para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definición. Sea $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Diremos que su función de pertenencia μ_u es semicontinua por arriba si para cada $\hat{x} \in \text{supp}(u)$, entonces

$$\limsup_{x \rightarrow \hat{x}} \mu_u(x) = \mu_u(\hat{x}).$$

De forma equivalente, μ_u es semicontinua por arriba si los α -cortes son conjuntos cerrados para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Con las definiciones anteriores ya estamos en condiciones de definir lo que es una cantidad difusa: que es una generalización de los intervalos y los números reales pero equipados de lógica difusa. Esta definición se puede encontrar en [8]:

Definición. Una **cantidad difusa** es un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ con las siguientes propiedades:

1. μ_u tiene soporte acotado no vacío, y además es normal.
2. μ_u es cuasi-cóncava.
3. μ_u es semicontinua por arriba.

o de forma equivalente:

- (a) $[u]_\alpha$ son conjuntos convexos no vacíos para todo $\alpha \in [0, 1]$.
- (b) $[u]_\alpha$ son conjuntos compactos para todo $\alpha \in [0, 1]$.
- (c) $[u]_\alpha$ satisface las condiciones (1.1) y (1.2).

Denotaremos por $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las cantidades difusas.

En este punto los α -cortes demuestran su relevancia, ya que la definición de una cantidad difusa en términos de sus alfa-cortes es mucho más manejable que a partir de su función de pertenencia.

Esto es muy importante, porque cuando se trabaje con cantidades difusas, si una función de pertenencia μ_u satisface las condiciones 1–3, entonces sus α -cortes satisfacen (a)–(c). Y de forma análoga, si se tiene una familia de conjuntos $\{A_\alpha \subset \mathbb{R} \mid \alpha \in [0, 1]\}$ que satisface las condiciones (a)–(c), entonces se puede definir la función de pertenencia

$$\mu(x) = \begin{cases} \sup\{ \alpha \mid \alpha \in [0, 1] \text{ para los cuáles } x \in A_\alpha \} & \text{si } x \in A_0 \\ 0 & \text{si } x \notin A_0 \end{cases},$$

que cumple las propiedades (1)–(3) y define una cantidad difusa $u \in \mathcal{F}$ tal que $[u]_\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

1.2. Números reales difusos.

Nuestro interés a partir de ahora va a ser el subconjunto de las cantidades difusas $\mathcal{F}$ tales que representen lo que es un número real o intervalo difuso.

Definición. Sea u una cantidad difusa en $\mathcal{F}$. Diremos que u es un **número difuso** si existe $\hat{u} \in \mathbb{R}$ tal que $\text{core}(u) = \hat{u}$. Es decir, si hay un único número real que pertenece totalmente a u .

Asimismo, diremos que u es un **intervalo difuso** si existen $\hat{u}^-, \hat{u}^+$ con $\hat{u}^- < \hat{u}^+$ tales que $\text{core}(u) = [\hat{u}^-, \hat{u}^+]$. Se denota por $\mathbb{F}$ el conjunto de números difusos, y por $\mathbb{F}_I$ el conjunto de intervalos difusos.

De esta forma, se obtienen el siguiente orden de inclusiones:

$$\mathbb{F} \subset \mathbb{F}_I \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}).$$

Ejemplo 3. Si $\hat{u} \in \mathbb{R}$ un número real. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos la función de pertenencia de un número difuso $u \in \mathbb{F}$ como:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \hat{u} \\ 0 & \text{si } x \neq \hat{u} \end{cases}$$

Entonces $u \in \mathbb{F}$ es la generalización de un número real, en el sentido usual, a la lógica difusa.

Ejemplo 4. Sea $\alpha \in [0, 1]$. Vamos a definir un número difuso $u \in \mathbb{F}$ que sea aproximadamente igual a 2. Se ha visto que se puede hacer tanto por funciones de pertenencia como por sus α -cortes, así que vamos a usar este último. Definimos a de la siguiente forma:

$$[u]_\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha] \text{ para cada } \alpha \in [0, 1].$$

Estos α -cortes son intervalos cerrados, y por tanto conjuntos convexos no vacíos, compactos y claramente satisfacen las condiciones (1.1) y (1.2), ya que son intervalos encajados. Por lo tanto, definimos u como el número difuso con estos α -cortes. Éste es un número que es aproximadamente 2, pero al que el número real 1,5 se podría decir que pertenece en un 50 %, ya que el α -corte correspondiente al valor $\alpha = 0,5$ es precisamente el intervalo $[1,5, 2,5]$.

También se puede obtener su función de pertenencia de forma fácil, la cual está representada en la Figura 1.1.

$$\mu(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 3 - x & \text{si } 2 < x \leq 3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

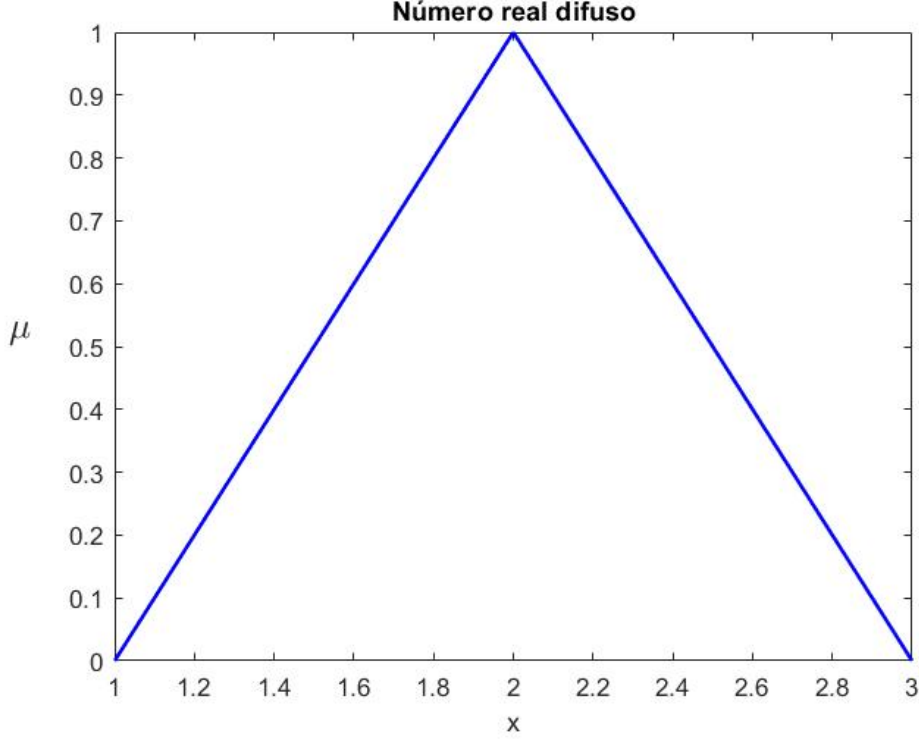


Figura 1.1: Representación de $\mu(x)$ para un número difuso que es aproximadamente 2.

Definición. Sea $u \in \mathbb{F}$. Diremos que u es positivo (negativo) si para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\mu_u(x) \neq 0 \implies x > 0 \ (x < 0).$$

En otras palabras, u es positivo (negativo) si los números reales que pertenecen en algún grado de pertenencia a u son positivos (o negativos).

Notemos que los α -cortes de un número o intervalo difuso son intervalos compactos no vacíos de la forma

$$[u]_\alpha = [\hat{u}_\alpha^-, \hat{u}_\alpha^+] \subset \mathbb{R}.$$

Una función de una variable μ sobre un intervalo I :

$$\mu : I \longrightarrow [0, 1],$$

es cuasi-cóncava si y solo si I puede ser particionado en dos subintervalos I_1 e I_2 tales que μ es no decreciente en I_1 y no creciente en I_2 . Este resultado se puede encontrar en [8]. De esta forma se sigue que la función de pertenencia de una cantidad difusa está formada por dos ramas monótonas. Además, si μ alcanza su valor máximo en más de un punto, entonces también existe un intervalo central en la que es constante. Esto motiva a definir los números difusos de la siguiente forma.

Definición. Un **LR-número** (o **LR-intervalo difuso**) u es un número (o intervalo) difuso que está definido según la función de pertenencia:

$$\mu_u(x) = \begin{cases} L\left(\frac{b-x}{b-a}\right) & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq c, \\ R\left(\frac{x-c}{d-c}\right) & \text{si } c \leq x \leq d, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $L, R : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ son dos funciones no crecientes que cumplen $L(0) = R(0) = 1$ y $L(1) = R(1) = 0$. En el caso en que $b = c$, es un LR-número difuso, mientras que si $b < c$, entonces es un LR-intervalo difuso.

Si L y R son dos funciones invertibles, los α -cortes se pueden obtener de la siguiente forma:

$$[u]_\alpha = [b - (b - a)L^{-1}(\alpha), c + (d - c)R^{-1}(\alpha)].$$

Ejemplo 5. Definamos $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 3$. Sean las funciones $L(x) := 1 - x^2$ y $R(x) := 1 - \sqrt{x}$. Entonces, usando la notación LR, el número u tiene por función de pertenencia:

$$\mu_u(x) = \begin{cases} 1 - (1 - x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - \sqrt{\frac{x-1}{2}} & \text{si } 1 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, las funciones L y R son funciones invertibles en su dominio, de forma que

$$L^{-1}(x) = \sqrt{1 - x}, \quad R^{-1}(x) = (1 - x)^2.$$

Sus correspondientes α -cortes son pues, para cada $\alpha \in [0, 1]$:

$$[u]_\alpha = [1 - \sqrt{1 - \alpha}, 1 + 2(1 - \alpha)^2].$$

Este número difuso está representado en la Figura 1.2. Como se puede observar, es aproximadamente igual a 1, y también 2 tiene por grado de pertenencia $\mu(2) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Además, los números menores o iguales que 0 y mayores o iguales a 3 no tienen grado de pertenencia al número difuso u .

Son interesantes los casos en los que las funciones L y R sean lineales, ya que entonces la función de pertenencia del número difuso describe un triángulo, que es por el nombre que se conocen a este tipo de números difusos:

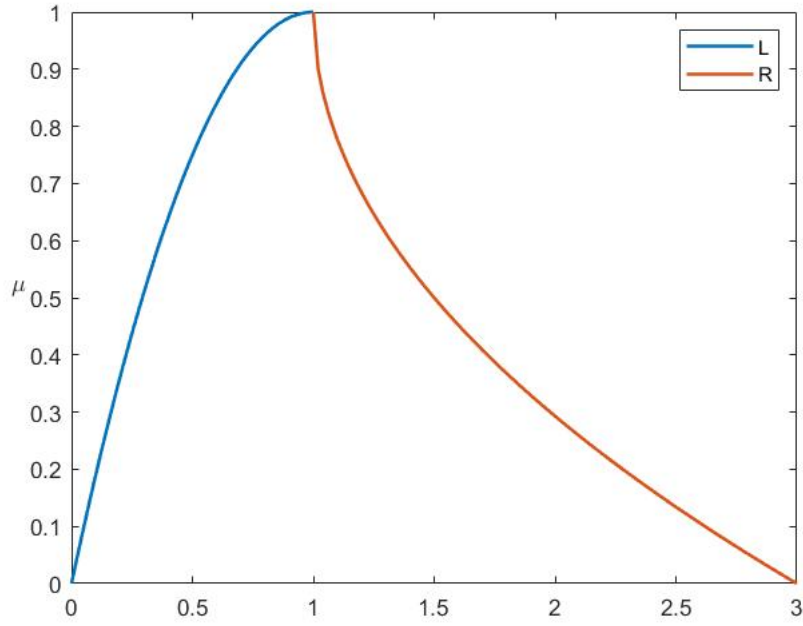


Figura 1.2: Representación de un número en formato LR.

Definición. Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$. Se define el **número triangular** $u = (a, b, c) \in \mathbb{F}$ como el conjunto difuso cuya función de pertenencia es

$$\mu_u(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b], \\ \frac{x-c}{b-c} & \text{si } x \in (b, c], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este número triangular está representado en la Figura 1.3. Los α -cortes de $u = (a, b, c)$ son dados por:

$$[u]_\alpha = [a + (b-a)\alpha, c + (b-c)\alpha].$$

A partir de ahora, todo el trabajo desarrollado en esta memoria girará alrededor de los números difusos triangulares.

1.3. Principio de extensión de Zadeh.

Ahora que ya disponemos de los elementos sobre los que vamos a trabajar, necesitamos definir operaciones entre ellos. El principio de extensión de Zadeh (ver [1]) es la

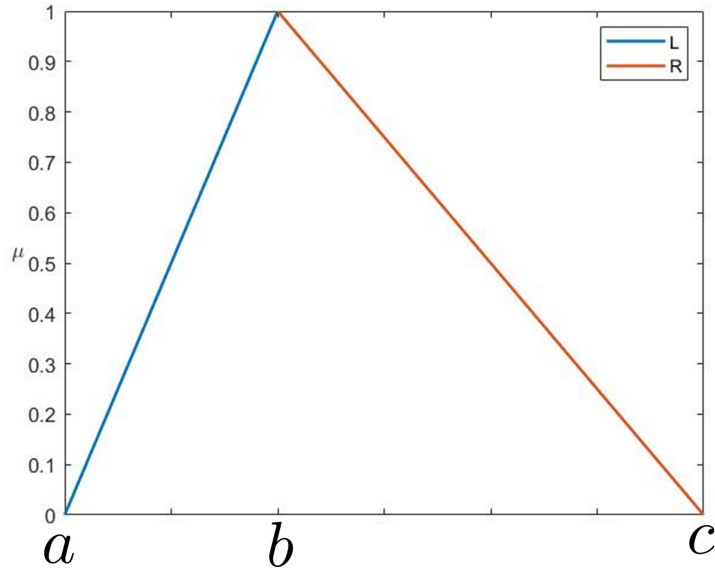


Figura 1.3: Representación de un número triangular.

herramienta básica para introducir las operaciones usuales en los conjuntos difusos, ya que permite extender funciones de números reales a funciones de números difusos.

Definición. (Extensión de Zadeh). Sean $U, V, W \subseteq \mathbb{R}$ y $f : U \times V \rightarrow W$ una función real. Esta función se puede extender a

$$F : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(W),$$

de la siguiente forma. Sean $u \in \mathcal{F}(U)$ y $v \in \mathcal{F}(V)$ cantidades difusas. Se define $w := F(u, v)$ como un subconjunto de W con función de pertenencia:

$$\mu_w(z) := \begin{cases} \sup_{f(x,y)=z} \{\min\{\mu_u(x), \mu_v(y)\}\} & \text{si } f^{-1}(z) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } f^{-1}(z) = \emptyset. \end{cases} \quad (1.3)$$

donde $f^{-1}(z) = \{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = z \in W\}$. Llamaremos a F la función difusa extendida.

¿Siempre está bien definida esta función? Es decir, ¿para todo $u, v \in \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V)$ se tiene que $f(u, v) \in \mathcal{F}(W)$? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, bajo la hipótesis de continuidad:

Teorema 1. Sean $U, V, W \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : U \times V \rightarrow W$ una función real continua. Entonces f se puede extender a una función difusa F bien definida

$$F : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(W),$$

con α -cortes:

$$[F(u, v)]_\alpha = f([u]_\alpha, [v]_\alpha) \quad \text{para cada } \alpha \in [0, 1]. \quad (1.4)$$

La demostración de este resultado se encuentra en el artículo [1].

De nuevo, aquí vemos la simplicidad de los α -cortes, ya que la expresión (1.4) es mucho más sencilla que (1.3), y por tanto siempre se intentará obtener la imagen de una función en términos de sus α -cortes.

1.3.1. Aritmética difusa de Zadeh.

Sea $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ una de las cuatro operaciones aritméticas. Sean $u, v \in \mathbb{F}$ dos números difusos con funciones de pertenencia μ_u y μ_v y funciones de los α -cortes (u^-, u^+) y (v^-, v^+) . Se define la operación $\circ$ de la siguiente forma

$$\mu_{u \circ v}(z) = \sup\{\min\{\mu_u(x), \mu_v(y)\} \mid z = x \circ y\}. \quad (1.5)$$

En términos de sus α -cortes, se tienen las operaciones usuales:

■ **Suma:**

$$[u + v]_\alpha = [u_\alpha^- + v_\alpha^-, u_\alpha^+ + v_\alpha^+] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1].$$

■ **Multipliación por un escalar:**

$$[ku]_\alpha = [\min\{ku_\alpha^-, ku_\alpha^+\}, \max\{ku_\alpha^-, ku_\alpha^+\}] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1].$$

■ **Resta:**

$$[u - v]_\alpha = [u_\alpha^- - v_\alpha^+, u_\alpha^+ - v_\alpha^-] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1].$$

■ **Multipliación:**

$$[u \cdot v]_\alpha = [\min\{X_\alpha\}, \max\{X_\alpha\}] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1],$$

donde $X_\alpha = \{u_\alpha^- v_\alpha^-, u_\alpha^- v_\alpha^+, u_\alpha^+ v_\alpha^-, u_\alpha^+ v_\alpha^+\}$.

■ **División:** siempre que $0 \notin [v_0^-, v_0^+]$.

$$\left[\frac{u}{v}\right]_\alpha = [\min\{X_\alpha\}, \max\{X_\alpha\}] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1],$$

donde $X_\alpha = \left\{\frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^+}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^+}\right\}$.

Ejemplo 6. Sean los números triangulares $u = (1, 2, 3)$ y $v = (2, 5, 6)$. Entonces los α -cortes de cada uno son

$$\begin{aligned} [u]_\alpha &= [1 + \alpha, 3 - \alpha], \\ [v]_\alpha &= [2 + 3\alpha, 6 - \alpha]. \end{aligned}$$

Por lo que

$$[u + v]_\alpha = [3 + 4\alpha, 9 - 2\alpha],$$

que corresponde al número triangular $u + v = (3, 7, 9)$. También sabemos que

$$[-v]_\alpha = [\min\{-2 - 3\alpha, -6 + \alpha\}, \max\{-2 - 3\alpha, -6 + \alpha\}] = [-6 + \alpha, -2 - 3\alpha],$$

que corresponde a $-v = (-6, -5, -2)$.

Su diferencia es pues

$$[u - v]_\alpha = [1 + \alpha - (6 - \alpha), 3 - \alpha - (2 + 3\alpha)] = [-5 + 2\alpha, 1 - 4\alpha],$$

que se corresponde con $u - v = (-5, -3, 1)$.

Veamos cuál es su multiplicación. Para cada $\alpha \in [0, 1]$ definimos

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \{u_\alpha^- v_\alpha^-, u_\alpha^- v_\alpha^+, u_\alpha^+ v_\alpha^-, u_\alpha^+ v_\alpha^+\} \\ &= \{(1 + \alpha)(2 + 3\alpha), (1 + \alpha)(6 - \alpha), (3 - \alpha)(3 + 3\alpha), (3 - \alpha)(6 - \alpha)\} \end{aligned}$$

En este caso es sencillo ver que como u y v son positivos, entonces

$$[u \cdot v]_\alpha = [(1 + \alpha)(2 + 3\alpha), (3 - \alpha)(6 - \alpha)],$$

para cada $\alpha \in [0, 1]$. Se hace notar que no corresponde a un número triangular.

Desde un punto de vista algebraico, la adición y multiplicación son conmutativas, asociativas y tienen un elemento neutro. Si se incluye el número real 0 como un conjunto difuso cuya función de pertenencia μ_0 es

$$\mu_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

entonces es claro que para todo $u \in \mathbb{F}_I$ se tiene que $u + 0 = 0 + u = 0$. De la misma forma, definiendo el número real 1 como

$$\mu_1(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \neq 1, \end{cases}$$

también se logra que $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u$.

Aún así, tanto la suma como la multiplicación de números fuzzy no admite un elemento inverso. Esto es:

$$u + v = w \not\iff u = w - v,$$

$$u \cdot v = w \not\iff u = w/v.$$

Además, en general no se tiene la igualdad $u - u = 0$, ni tampoco $u/u = 1$. Esto es un problema a la hora de encadenar operaciones, por ejemplo, para resolver una determinada ecuación.

Ejemplo 7. Si $u = (1, 2, 3)$, entonces sus α -cortes son

$$[u]_\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha],$$

y por tanto

$$[u - u]_\alpha = [1 + \alpha - (3 - \alpha), 3 - \alpha - (1 + \alpha)] = [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha] \neq [0, 0].$$

De la misma forma

$$\left[\frac{u}{u}\right]_\alpha = [\min\{X_\alpha\}, \max\{X_\alpha\}] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1],$$

donde $X_\alpha = \left\{1, \frac{1+\alpha}{3-\alpha}, \frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right\}$.

Ahora bien, como $1 \leq 1 + \alpha \leq 2$ y $2 \leq 3 - \alpha \leq 3$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\leq \frac{1 + \alpha}{3 - \alpha} \leq 1 \\ 1 &\leq \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha} \leq 3. \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\left[\frac{u}{u}\right]_\alpha = \left[\frac{1 + \alpha}{3 - \alpha}, \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha}\right] \neq [1, 1].$$

Esto muestra que hay que tener mucho cuidado cuando se trabaja en aritmética difusa. No se pueden aplicar los mismos algoritmos a la lógica difusa (basada en el principio de extensión de Zadeh) que en la lógica usual.

En este tipo de lógica, la ecuación $u = v + w$ no es equivalente a la ecuación $w = u - v$, lo cual motiva a definir la diferencia de Hukuhara o H-diferencia (ver [3],[9]).

Definición. Sean $u, v \in \mathbb{F}$, la **H-diferencia** de u y v se define como $u \ominus v = w \iff u = v + w$. Si $u \ominus v$ existe, entonces es única y sus α -cortes son

$$[u \ominus v]_\alpha = [u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1].$$

Esta definición de la diferencia de dos números difusos ha venido motivada por la idea de invertir la adición definida anteriormente. Ahora se tiene que para todo $u, v \in \mathbb{F}$ se tiene que $(u+v) \ominus v = u$, lo cuál no ocurría con la diferencia obtenida por el principio de extensión de Zadeh. Además, también se tiene que $u \ominus u = 0$.

Como se remarca en la definición anterior, no siempre existe la H-diferencia de dos números difusos. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8. Sean los números triangulares $u = (1, 2, 3)$ y $v = (2, 5, 6)$. Entonces los α -cortes de cada uno son

$$\begin{aligned} [u]_\alpha &= [1 + \alpha, 3 - \alpha], \\ [v]_\alpha &= [2 + 3\alpha, 6 - \alpha]. \end{aligned}$$

Supongamos que existe $w \in \mathbb{F}$ tal que $u = v + w$. Esto es, la H-diferencia existe y vale $u \ominus v = w$. Sean

$$[2]_\alpha = [w_\alpha^-, w_\alpha^+],$$

los α -cortes de w . Entonces se tiene

$$[1 + \alpha, 3 - \alpha] = [2 + 3\alpha + w_\alpha^-, 6 - \alpha + w_\alpha^+].$$

Por lo que

$$\begin{aligned} 1 + \alpha &= 2 + 3\alpha + w_\alpha^- \longrightarrow w_\alpha^- = -1 - 2\alpha, \\ 3 - \alpha &= 6 - \alpha + w_\alpha^+ \longrightarrow w_\alpha^+ = -3. \end{aligned}$$

Y por tanto $[w]_\alpha = [-1 - 2\alpha, -3]$. Lo cuál es una contradicción porque $-1 - 2\alpha \geq -3$.

Así pues, los siguientes resultados, que se pueden encontrar en [3], permiten saber cuándo existe la H-diferencia entre dos números difusos, y que además es única:

Proposición 1. Sean $u, v \in \mathbb{F}$. Si la H-diferencia $u \ominus v$ existe, entonces es única.

Proposición 2. Sean $u, v \in \mathbb{F}$. La H-diferencia $u \ominus v \in \mathbb{F}$ existe si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\text{long}([u]_\alpha) \geq \text{long}([v]_\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$
- $u_\alpha^- - v_\alpha^-$ es creciente con α .
- $u_\alpha^+ - v_\alpha^+$ es decreciente con α .

De la misma forma, y dado que $u/u \neq 1$ para $u \in \mathbb{F}$, se puede definir la H-división del siguiente modo:

Definición. Sean $u, v \in \mathbb{F}$, la **H-división** de u y v se define como $u \oslash v = w \iff u = v \cdot w$. Si $u \oslash v$ existe, entonces es única y sus α -cortes son

$$[u \oslash v]_\alpha = \left[\frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^+} \right] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1].$$

Esta operación es la inversa de la multiplicación dada por el principio de extensión de Zadeh, de su definición se deduce que si $u, v \in \mathbb{F}$ son dos números difusos, entonces:

$$u \cdot v \oslash v = u.$$

1.4. Funciones difusas.

Una vez establecidas las operaciones básicas entre números difusos, el paso natural es el estudio de la generalización de las funciones usuales como las potencias, el valor absoluto o las raíces cuadradas a la lógica difusa.

Potencias.

Sea $u \in \mathbb{F}$ un número real difuso. ¿Cómo se define u^2 , por ejemplo? Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Esta función es continua, por lo que por el Teorema 1 se puede extender a una función F :

$$F : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F},$$

tal que para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$[F(u)]_\alpha = [u^2]_\alpha = f([u]_\alpha).$$

Ejemplo 9. Sea el número triangular $u = (1, 2, 3)$, entonces el número difuso u^2 tiene por α -cortes

$$[u^2]_\alpha = f([1 + \alpha, 3 - \alpha]) = [(1 + \alpha)^2, (3 - \alpha)^2].$$

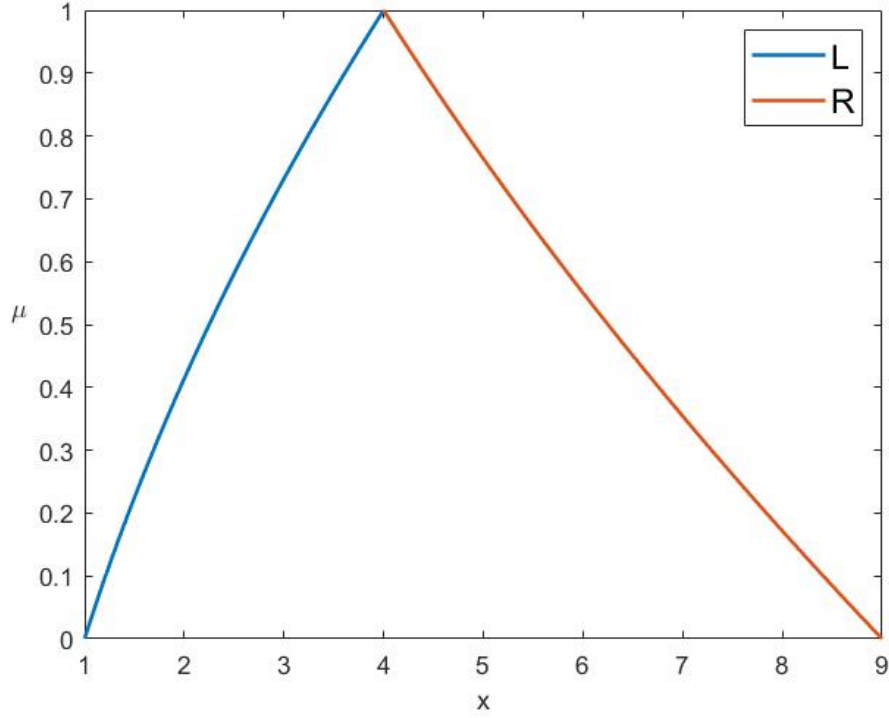


Figura 1.4: Representación de u^2 para $u = (1, 2, 3)$.

Como se puede observar en la Figura 1.4, el resultado ya no es un número triangular. Así como hemos visto que hay que tener mucho cuidado a la hora de definir las operaciones básicas en números difusos, también es el caso para el resto de funciones. El siguiente resultado es una generalización de un número difuso elevado al cuadrado, cuya deducción se sigue de [1]:

Proposición 3. Sea un número difuso $u \in \mathbb{F}$. Sea $\alpha \in [0, 1]$ y $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ sus α -cortes, entonces el número difuso u^2 está definido en término de sus α -cortes de la siguiente forma:

$$[u^2]_\alpha = \begin{cases} \left[(u_\alpha^-)^2, (u_\alpha^+)^2 \right] & \text{si } u_\alpha^- > 0, \\ \left[(u_\alpha^+)^2, (u_\alpha^-)^2 \right] & \text{si } u_\alpha^+ < 0, \\ \left[0, \max \left\{ (u_\alpha^-)^2, (u_\alpha^+)^2 \right\} \right] & \text{si } 0 \in [u_\alpha^-, u_\alpha^+]. \end{cases}$$

Demostración. Se va a realizar la prueba distinguiendo diferentes casos:

- Supongamos que $u_\alpha^- > 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, o lo que es lo mismo, u es positivo. Sea $f(x) = x^2$ y sea F su función extendida por el Teorema 1. Entonces, como

$$0 < u_{\alpha}^{-} < u_{\alpha}^{+} \quad \text{para } \alpha \in [0, 1],$$

y la función f es inyectiva en el intervalo $[0, +\infty)$, tenemos que

$$[F(u)]_{\alpha} = [u^2]_{\alpha} = f([u]_{\alpha}) = \left[(u_{\alpha}^{-})^2, (u_{\alpha}^{+})^2 \right].$$

- Si $u_{\alpha}^{+} < 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, o lo que es lo mismo, u es negativo, entonces como

$$u_{\alpha}^{-} < u_{\alpha}^{+} < 0 \quad \text{para } \alpha \in [0, 1].$$

Esto implica:

$$(u_{\alpha}^{+})^2 < (u_{\alpha}^{-})^2 \quad \text{para } \alpha \in [0, 1],$$

y como f es inyectiva en $(-\infty, 0]$ se tiene que

$$[F(u)]_{\alpha} = [u^2]_{\alpha} = f([u]_{\alpha}) = \left[(u_{\alpha}^{+})^2, (u_{\alpha}^{-})^2 \right].$$

- Si $0 \in [u_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+}]$ para un $\alpha \in [0, 1]$, entonces

$$u_{\alpha}^{-} < 0 < u_{\alpha}^{+} \quad \text{para } \alpha \in [0, 1].$$

Ahora elevar al cuadrado es más complicado, ya que f ya no es inyectiva en el dominio. Aún así, la función $f(x) = x^2$ es sencilla de utilizar:

$$[F(u)]_{\alpha} = [u^2]_{\alpha} = f([u]_{\alpha}) = \left[0, \max \left\{ (u_{\alpha}^{-})^2, (u_{\alpha}^{+})^2 \right\} \right].$$

□

La obtención de u^2 se complica cuando $0 \in [u_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+}]$ para algún $\alpha \in [0, 1]$. Esto es porque la función $f(x) = x^2$ no es una función inyectiva, y por lo tanto $f([u]_{\alpha})$ es más complicado de calcular. De hecho, vamos a ver que en general ni siquiera es lo mismo u^2 que $u \cdot u$.

Sea la función $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = x \cdot y$. Esta función es continua, por lo que por el Teorema 1 se extiende a una función

$$G : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R},$$

de forma que para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$[G(u, v)]_{\alpha} = [u \cdot v]_{\alpha} = g([u]_{\alpha}, [v]_{\alpha}).$$

El siguiente ejemplo lo ilustra:

Ejemplo 10. Sea el número triangular $u = (-1, 0, 1)$. Veamos que no es lo mismo u^2 que $u \cdot u$. Esto es debido en parte a que los α -cortes de u son

$$[u]_\alpha = [-1 + \alpha, 1 - \alpha].$$

Es decir, el cero pertenece a cada uno de los α -cortes.

- u^2 : Sea la función F definida en el ejemplo anterior. El número difuso u^2 tiene por α -cortes

$$[u^2]_\alpha = f([-1 + \alpha, 1 - \alpha]) = [0, (1 - \alpha)^2].$$

- $u \cdot u$: Sean las funciones G y g definidas en el párrafo anterior. El número difuso $u \cdot u$ tiene por α -cortes

$$[u \cdot u]_\alpha = g([-1 + \alpha, 1 - \alpha], [-1 + \alpha, 1 - \alpha]) = [-(1 - \alpha)^2, (1 - \alpha)^2].$$

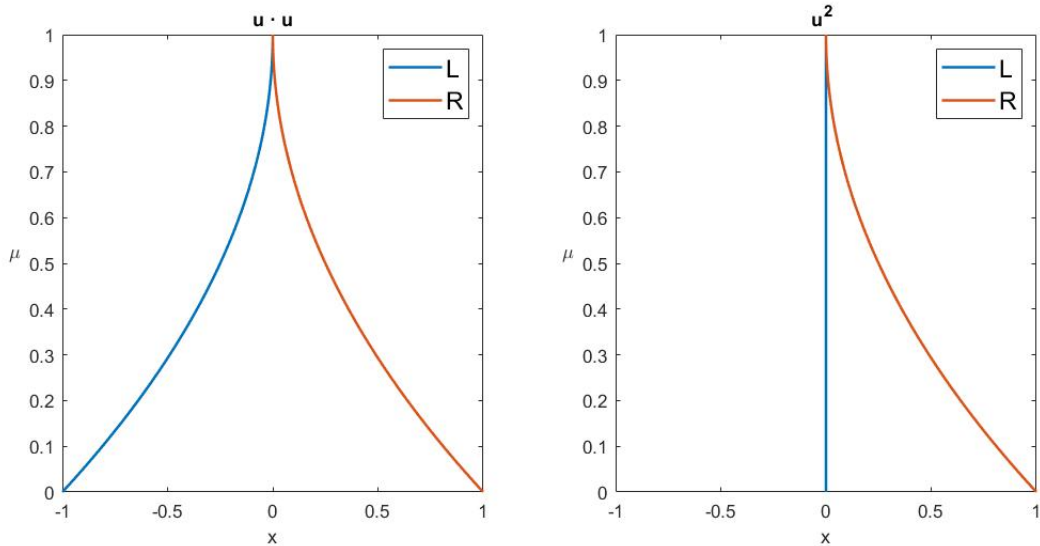


Figura 1.5: Representación de u^2 y $u \cdot u$ para $u = (-1, 0, 1)$.

Esta diferencia entre cómo están definidos $u \cdot u$ y u^2 se contempla en la Figura 1.5. Como se ha comentado anteriormente, el hecho de que la función que se quiera extender sea inyectiva simplifica mucho los cálculos:

Teorema 2. Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ un abierto y sea $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Sea también $F : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ su función extendida por el Teorema 1. Entonces, para todo $u \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$, con α -cortes $[u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ se tiene que, para todo $\alpha \in [0, 1]$:

- Si f es creciente:

$$[F(u)]_\alpha = [f(u_\alpha^-), f(u_\alpha^+)]. \quad (1.6)$$

- Si f es decreciente:

$$[F(u)]_\alpha = [f(u_\alpha^+), f(u_\alpha^-)]. \quad (1.7)$$

Demostración. La demostración se hará con f creciente, el caso decreciente es análogo. Por el Teorema 1, los α -cortes de la imagen de u son:

$$[F(u)]_\alpha = f([u]_\alpha) = f([u_\alpha^-, u_\alpha^+]) \text{ para cada } \alpha \in [0, 1].$$

Como f es inyectiva, y $u_\alpha^- \leq u_\alpha^+$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, entonces se deduce que $f(u_\alpha^-) \leq f(u_\alpha^+)$, y por tanto:

$$[F(u)]_\alpha = [f(u_\alpha^-), f(u_\alpha^+)].$$

□

Corolario 1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathbb{F}$. Sea $\alpha \in [0, 1]$ y $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ sus α -cortes, entonces el número difuso u^n está definido en término de sus α -cortes de la siguiente forma:

- Si n es impar:

$$[u^n]_\alpha = \left[(u_\alpha^-)^n, (u_\alpha^+)^n \right].$$

- Si n es par:

$$[u^n]_\alpha = \begin{cases} \left[(u_\alpha^-)^n, (u_\alpha^+)^n \right] & \text{si } u_\alpha^- > 0, \\ \left[(u_\alpha^+)^n, (u_\alpha^-)^n \right] & \text{si } u_\alpha^+ < 0, \\ \left[0, \text{máx} \left\{ (u_\alpha^-)^n, (u_\alpha^+)^n \right\} \right] & \text{si } 0 \in [u_\alpha^-, u_\alpha^+]. \end{cases}$$

Demostración. En los casos donde $u_\alpha^- > 0$ y $u_\alpha^+ < 0$, la función es inyectiva en el dominio, por lo que se aplica el Teorema 2. El caso que queda se resuelve de forma análoga a la demostración de la Proposición 3. □

Valor absoluto y raíz cuadrada.

Proposición 4. Raíz cuadrada

Sea $u \in \mathbb{F}$, $\alpha \in [0, 1]$ y $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ sus α -cortes. Supongamos también que u es positivo: $u_\alpha^- > 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Entonces, la extensión de la función raíz cuadrada $f(x) := \sqrt{x}$, tiene por α -cortes:

$$[\sqrt{u}]_\alpha = \left[\sqrt{u_\alpha^-}, \sqrt{u_\alpha^+} \right] \text{ para cada } \alpha \in [0, 1].$$

Demostración. Como f es inyectiva y además creciente, por el Teorema 2 se tiene que

$$[F(u)]_\alpha = [\sqrt{u}]_\alpha = [\sqrt{u_\alpha^-}, \sqrt{u_\alpha^+}].$$

□

Ejemplo 11. Sea $u = (0, 1, 2) \in \mathbb{F}$ un número triangular. Como $[u]_\alpha = [\alpha, 2 - \alpha]$, entonces

$$[\sqrt{u}]_\alpha = [\sqrt{\alpha}, \sqrt{2 - \alpha}] \text{ para cada } \alpha \in [0, 1].$$

Proposición 5. Valor absoluto

Sea $u \in \mathbb{F}$, $\alpha \in [0, 1]$ y $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ sus α -cortes. Entonces, la extensión de la función valor absoluto $f(x) := |x|$, tiene por α -cortes:

$$[u^2]_\alpha = \begin{cases} [|u_\alpha^-|, |u_\alpha^+|] & \text{si } u_\alpha^- > 0, \\ [|u_\alpha^+|, |u_\alpha^-|] & \text{si } u_\alpha^+ < 0, \\ [0, \max\{|u_\alpha^-|, |u_\alpha^+|\}] & \text{si } 0 \in [u_\alpha^-, u_\alpha^+]. \end{cases}$$

Demostración. Es aplicación directa de que $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$, por lo que primero se aplican los α -cortes de la función que eleva al cuadrado, como se ha visto en la Proposición 3, y luego la de la función raíz cuadrada de la Proposición 4.

□

Exponencial y logaritmo.

Como las funciones exponencial $f(x) = e^x$ y logaritmo $g(x) = \ln(x)$ son continuas, inyectivas y crecientes en su dominio, es muy fácil extenderlas a lógica difusa. Sea $u, v \in \mathbb{F}$, dos números difusos, tales que su soporte está incluido dentro del dominio de la función exponencial y logaritmo, respectivamente, y cuyos α -cortes son:

$$[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+],$$

$$[v]_\alpha = [v_\alpha^-, v_\alpha^+].$$

Entonces, por aplicación directa del Teorema 2:

$$[e^u]_\alpha = [e^{u_\alpha^-}, e^{u_\alpha^+}] \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]$$

$$[\ln v]_\alpha = [\ln(v_\alpha^-), \ln(v_\alpha^+)] \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

El estudio de la generalización de la lógica difusa es todavía mucho más extenso (se podría estudiar series de números difusos, integrales... etc.), pero todos los conceptos

definidos en este capítulo son suficientes para empezar con la resolución de ecuaciones difusas, tema de estudio de los próximos capítulos. Para profundizar más sobre el estudio de los números difusos, se puede consultar [8].

Capítulo 2

Ecuaciones difusas.

En muchos campos de la ciencia, los humanos dan descripciones verbales con algo de incertidumbre de un determinado proceso. Por ejemplo, se puede observar que la temperatura en una habitación es demasiado alta, que un vaso está medio lleno (o vacío), o que un determinado vehículo es muy oscuro. Es decir, para muchas acciones humanas, el "todo o nada" no funciona. Por ejemplo, en [12] se modeliza con lógica difusa el comportamiento territorial de una determinada especie de pez que protege su nido de los depredadores.

La lógica difusa es una de las herramientas más apropiadas para modelizar este tipo de situaciones, ya que corresponde a cómo los humanos podemos percibir éstas. Son una herramienta para transformar descripciones verbales en modelos matemáticos. Son aquellas en las que los parámetros pueden variar según la forma de un conjunto difuso [4].

En 1984, Dubois y Prade discutieron en [6] la forma de abordar estas ecuaciones difusas. Desde entonces, muchos investigadores han propuesto diferentes métodos para resolverlas, como por ejemplo en [4], [10], y [11].

Como hemos visto en el capítulo anterior, con las operaciones usuales extendidas a la lógica difusa no se puede trabajar de forma sencilla. Por ejemplo, no se tiene ni $u - u = 0$, por lo que hay que tener cuidado cuando se quiere trabajar de forma similar a las ecuaciones algebraicas booleanas.

Este capítulo trata de acercar el concepto de ecuación difusa con numerosos ejemplos. Como se verá a continuación, en general no existe ni hay unicidad de soluciones, ni siquiera de ecuaciones difusas lineales. A continuación definimos, de forma natural, el concepto de ecuación difusa.

Definición. Ecuación difusa.

Sea $F : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ una función difusa. Llamaremos **ecuación difusa** a la expresión

$$F(x) = 0, \tag{2.1}$$

donde 0 representa el elemento nulo de $\mathbb{F}$. Diremos que $x \in \mathbb{F}$ es una solución de (2.1) si

$$[F(x)]_\alpha = [0]_\alpha \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

Es decir, si los α -cortes de la imagen de x son los del elemento nulo de $\mathbb{F}$.

Ejemplo 12. Sea $a = (1, 2, 3)$. Imaginemos que tenemos la ecuación

$$x - a = 0, \quad (2.2)$$

con la resta usual de la extensión de Zadeh. ¿Se puede decir que $x = a$ es una solución? Los α -cortes del número difuso a son, para cada $\alpha \in [0, 1]$:

$$[a]_\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha].$$

De la ecuación (2.5) se obtiene:

$$[x - a]_\alpha = [0]_\alpha = [0, 0],$$

pero tenemos que

$$[x - a]_\alpha = [1 + \alpha - (3 - \alpha), 3 - \alpha - (1 + \alpha)] = [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha] \neq [0, 0].$$

Por lo tanto, aunque pueda resultar sorprendente, $x = a$ no es una solución de la ecuación (2.5). De hecho, si los α -cortes de una posible solución x son

$$[x]_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)].$$

Entonces debe cumplirse que

$$\begin{cases} x_1(\alpha) - (3 - \alpha) = 0 \longrightarrow x_1(\alpha) = 3 - \alpha \\ x_2(\alpha) - (1 + \alpha) = 0 \longrightarrow x_2(\alpha) = -1 - \alpha \end{cases}.$$

Esto no representa a un número difuso, ya que $x_1(\alpha) > x_2(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Es decir, la ecuación (2.1) no tiene soluciones.

Ejemplo 13. Sea el número triangular $a = (1, 2, 3)$, entonces la ecuación

$$x + a = 0,$$

no tiene soluciones. Sean los α -cortes de x :

$$[x]_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)] \quad \text{para cada } \alpha \in [0, 1].$$

Entonces se tiene que

$$\begin{cases} x_1(\alpha) + (1 + \alpha) = 0 \longrightarrow x_1(\alpha) = -1 - \alpha, \\ x_2(\alpha) + (3 - \alpha) = 0 \longrightarrow x_2(\alpha) = -3 + \alpha \end{cases}.$$

pero la familia de conjuntos $[-1 - \alpha, -3 + \alpha]_\alpha$ no define ningún número difuso, ya que $-1 - \alpha \geq -3 + \alpha$.

Ejemplo 14. Consideremos ahora $a = (1, 2, 3)$ y la ecuación

$$x \ominus a = 0. \quad (2.3)$$

Esta ecuación sí que tiene una única solución, y es $x = a$.

Esto demuestra que hay que tener mucho cuidado en elegir qué operaciones se emplean. En esta ecuación, la diferencia de Hukuhara nos asegura existencia y unicidad.

Ejemplo 15. Sea el número triangular $a = (1, 2, 3)$ y la ecuación

$$a \cdot x = a. \quad (2.4)$$

Es trivial que el número difuso $x = (1, 1, 1)$ es una solución de la ecuación anterior. ¿Hay más soluciones?

Sea $[x]_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$, entonces se tiene que

$$\begin{cases} \min\{(1 + \alpha)x_1(\alpha), (1 + \alpha)x_2(\alpha), (3 - \alpha)x_1(\alpha), (3 - \alpha)x_2(\alpha)\} = 1 + \alpha, \\ \max\{(1 + \alpha)x_1(\alpha), (1 + \alpha)x_2(\alpha), (3 - \alpha)x_1(\alpha), (3 - \alpha)x_2(\alpha)\} = 3 - \alpha. \end{cases}$$

Por ser $x_1(\alpha) \leq x_2(\alpha)$, $1 + \alpha \leq 3 - \alpha$ y además todos estos valores son no negativos, se tiene que el mínimo de estos conjuntos es $(1 + \alpha)x_1(\alpha)$ y el máximo $(3 - \alpha)x_2(\alpha)$. Por lo que

$$\begin{cases} (1 + \alpha)x_1(\alpha) = (1 + \alpha), \\ (3 - \alpha)x_2(\alpha) = (3 - \alpha). \end{cases}$$

Por lo que las únicas soluciones son $x_1(\alpha) = x_2(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Por tanto, no hay más soluciones que $x = (1, 1, 1)$.

Esta solución coincide con

$$x = a \oslash (a \cdot x) = a \oslash a = (1, 1, 1),$$

donde el término $\oslash$ representa a la H-división.

Ejemplo 16. Consideremos ahora $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 4, 5)$ y la ecuación

$$b \cdot x^2 + a \cdot x = a. \quad (2.5)$$

Sea $[x]_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$. Hay que distinguir entre diferentes casos.

■ **Soluciones no negativas:**

Entonces $x_1(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. De esta forma, elevar al cuadrado el número difuso x es más sencillo, ya que al ser positivo:

$$[x^2]_\alpha = [x_1^2(\alpha), x_2^2(\alpha)].$$

Como además el número difuso b es también positivo, se tiene que:

$$[b \cdot x^2]_\alpha = [(3 + \alpha)x_1^2(\alpha), (5 - \alpha)x_2^2(\alpha)].$$

De la misma forma, por ser también a positivo, se tiene que

$$[a \cdot x]_\alpha = [(1 + \alpha)x_1(\alpha), (3 - \alpha)x_2(\alpha)].$$

Por lo que hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} (3 + \alpha)x_1^2(\alpha) + (1 + \alpha)x_1(\alpha) = (1 + \alpha), \\ (5 - \alpha)x_2^2(\alpha) + (3 - \alpha)x_2(\alpha) = (3 - \alpha). \end{cases} \quad (2.6)$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} x_1(\alpha) = \frac{-\alpha-1 \pm \sqrt{5\alpha^2+18\alpha+13}}{2\alpha+6}, \\ x_2(\alpha) = \frac{3-\alpha \pm \sqrt{5\alpha^2-38\alpha+69}}{2(\alpha-5)}. \end{cases}$$

De estas soluciones, únicamente son válidas las de signo positivo, ya que de lo contrario tanto $x_1(\alpha)$ como $x_2(\alpha)$ serían negativas. Por tanto, la única solución no negativa es el número difuso x con α -cortes:

$$[x]_\alpha = \left[\frac{-\alpha - 1 + \sqrt{5\alpha^2 + 18\alpha + 13}}{2\alpha + 6}, \frac{3 - \alpha + \sqrt{5\alpha^2 - 38\alpha + 69}}{2(\alpha - 5)} \right]. \quad (2.7)$$

Esta solución x está representada en la Figura 2.1.

■ Soluciones negativas:

Sea ahora $x_2(\alpha) < 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, por lo que x es un número difuso negativo. De esta forma, elevar al cuadrado el número difuso x es

$$[x^2]_\alpha = [x_2^2(\alpha), x_1^2(\alpha)].$$

Como además el número difuso b es positivo, se tiene que:

$$[b \cdot x^2]_\alpha = [(3 + \alpha)x_2^2(\alpha), (5 - \alpha)x_1^2(\alpha)].$$

De la misma forma, por ser también a positivo, se tiene que

$$[a \cdot x]_\alpha = [(3 - \alpha)x_1(\alpha), (1 + \alpha)x_2(\alpha)].$$

Por lo que hay que resolver el sistema

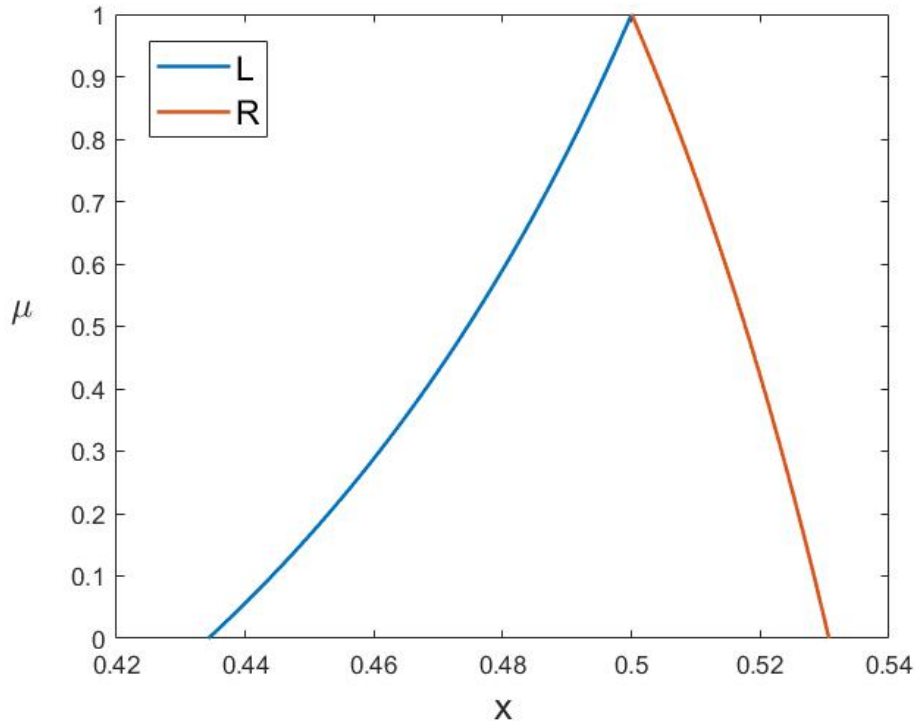


Figura 2.1: Número difuso x solución de la ecuación (2.5).

$$\begin{cases} (3 + \alpha)x_2^2(\alpha) + (3 - \alpha)x_1(\alpha) = (1 + \alpha), \\ (5 - \alpha)x_1^2(\alpha) + (1 + \alpha)x_2(\alpha) = (3 - \alpha). \end{cases}$$

Aún así, no hace falta resolver el sistema, ya que la solución no es un número difuso. Sin ir más lejos, haciendo $\alpha = 0$, se tiene el sistema

$$\begin{cases} 3x_2^2(0) + 3x_1(0) = 1, \\ 5x_1^2(0) + x_2(0) = 3, \end{cases}$$

cuyas únicas soluciones $x_1(0)$ y $x_2(0)$ negativas son las siguientes

$$x_1(0) = -0,907053\dots \quad \text{y} \quad x_2(0) = -1,11373\dots$$

pero en este caso $x_1(0) > x_2(0)$ luego no es una solución válida, y por tanto no existen soluciones negativas.

■ Soluciones mixtas:

Vamos a suponer ahora que $x_1(0) < 0$ y que $x_2(0) > 0$. Esto es, la solución difusa no es ni negativa ni positiva. No hay soluciones de este tipo, lo vamos a ver simplemente por reducción al absurdo para $\alpha = 0$. Supongamos que haya una

solución cuyos α -cortes cumplan $x_1(0) < 0$ y que $x_2(0) > 0$. Entonces el primer sumando de la ecuación (2.5) se transforma en:

$$[b \cdot x^2]_{\alpha=0} = [0, 5 \cdot \text{máx}\{x_1^2(0), x_2^2(0)\}] .$$

Y el segundo:

$$[(1, 2, 3) \cdot x]_{\alpha=0} = [3x_1(0), 3x_2(0)] .$$

Por otra parte, el término de la derecha de la igualdad queda:

$$[(1, 2, 3)]_{\alpha=0} = [1, 3] .$$

Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{cases} 0 + 3x_1(0) = 1, \\ 5 \cdot \text{máx}\{x_1^2(0), x_2^2(0)\} + 3x_2(0) = 3. \end{cases}$$

De la primera de ellas se deduce que:

$$0 + 3x_1(0) = 1 \longrightarrow x_1(0) = \frac{1}{3},$$

pero suponemos que $x_1(0) < 0$, por lo que esto es una contradicción y no hay soluciones mixtas.

Después de este capítulo, queda claro que hay que tener cuidado en cómo se definen las operaciones difusas, sobre todo a la hora de aplicar operaciones inversas como la diferencia de Hukuhara. También se ha visto que no siempre existen soluciones de una ecuación, ni siquiera en las ecuaciones lineales.

Capítulo 3

Métodos numéricos para ecuaciones difusas.

Como se ha remarcado en el capítulo anterior, la resolución de ecuaciones difusas juega un papel importante en áreas como las matemáticas, estadística, ingeniería, ciencias sociales y biología [14]. Aún así, como también pasa en las ecuaciones algebraicas booleanas, no siempre es posible obtener una expresión cerrada de estas ecuaciones, por lo que es necesario disponer de métodos numéricos que permitan aproximarlas.

Existe una extensa literatura sobre métodos numéricos para la resolución de ecuaciones difusas. Por ejemplo, en [2] y en [13] se presenta en el método de Newton generalizado para este tipo de ecuaciones. También hay estudios sobre la resolución de sistemas de ecuaciones difusas, ver [10], pero este trabajo se centrará exclusivamente en el estudio de ecuaciones difusas unidimensionales.

En la mayoría de artículos citados se asume que la solución a una determinada función difusa es positiva, lo cuál simplifica mucho los cálculos. Aunque en algunas partes de este capítulo asumiremos también que las soluciones buscadas van a ser positivas, el método desarrollado permite obtener también las negativas y mixtas (ni positivas ni negativas).

La estrategia a seguir va a ser la misma que en el capítulo anterior. Supongamos que tenemos una función difusa $F : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ y queremos resolver la ecuación

$$F(x) = 0.$$

Entonces se debe cumplir que los α -cortes de los dos lados de la igualdad sean los mismos. Sean $[x]_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$ los α -cortes de una posible solución. Llamemos

$$[F(x)]_\alpha = [F_1(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \alpha), F_2(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \alpha)],$$

a los α -cortes de la expresión de la izquierda de la igualdad, donde F_1 y F_2 dos funciones reales. Entonces la ecuación difusa se transforma en un sistema de dos ecuaciones con un parámetro α :

$$\begin{cases} F_1(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \alpha) = 0, \\ F_2(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \alpha) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Para cada $\alpha \in [0, 1]$, $x_1(\alpha)$ y $x_2(\alpha)$ son números reales, por lo que se tiene una familia de sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas, que son precisamente $x_1(\alpha)$ y $x_2(\alpha)$. Lo ideal sería resolver el sistema de ecuaciones para todo $\alpha \in [0, 1]$, pero en muchas ocasiones no es tarea sencilla al tener un parámetro extra. Es por eso que se trabajará con un α discretizado, de forma que se elegirá un $N \in \mathbb{N}$, y se definirá:

$$\alpha_k = \frac{k}{N} \quad \text{para cada } k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

De esta forma, hay que resolver N sistemas de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} F_1(x_{1k}(\alpha_k), x_{2k}(\alpha_k), \alpha_k) = 0, \\ F_2(x_{1k}(\alpha_k), x_{2k}(\alpha_k), \alpha_k) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

para cada $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ e incógnitas x_{1k} y x_{2k} .

Normalmente, las ecuaciones (3.2) serán no lineales, por lo que se necesita de un procedimiento para resolverlas, y es aquí donde entran los esquemas iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones.

3.1. Estado del arte.

Los metodos iterativos son muy eficaces a la hora de resolver problemas no lineales. F. Gauss ya los utilizaba para la determinación preliminar de la órbita del planeta menor Ceres, y hoy en día se utilizan en multitud de campos como meteorología [21], astronomía o reacciones nucleares [20].

A lo largo de este trabajo, trataremos de encontrar una raíz simple $\bar{x}$ del sistema de ecuaciones no lineal $F(x) = 0$, donde $F : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ e I un conjunto abierto. El propósito de los métodos numéricos es: si se conoce un entorno suficientemente pequeño donde se encuentra la raíz $\bar{x}$ de la ecuación $F(x) = 0$, entonces si seleccionamos un $x_0 \in I$ en este entorno, se puede generar una función de punto fijo $G(x)$ y una sucesión de iterados $x_1, x_2, \dots, x_k \dots$ que converge a la raíz $\bar{x}$. Si se considera una función $G : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el esquema iterativo

$$x_{k+1} = G(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

donde se parte de una estimación inicial x_0 dada, constituye una gran cantidad de esquemas iterativos. Por ejemplo, el caso en el que $G(x) = x - (F'(x))^{-1} F(x)$ se tiene el conocido método de Newton-Raphson multidimensional, que se presenta en la siguiente sección.

Para el estudio de la convergencia, se utilizan las funciones contractivas.

Definición. Función Lipschitziana:

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sea también $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que F es **Lipschitziana** en x si existe un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde $x \in \Omega$, y una constante γ tal que para todo $v \in \Omega$ se cumple:

$$\|F(v) - F(x)\| \leq \gamma \|v - x\|. \quad (3.4)$$

Definición. Llamaremos **punto fijo** de una función $G : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a un elemento $\xi \in I$ tal que $G(\xi) = \xi$.

Todos los métodos numéricos que vamos a estudiar en este capítulo son de punto fijo, o lo que es lo mismo, van a tener la forma del esquema general (3.3). Se llaman así porque si aseguramos la convergencia de la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, esta lo hace al único punto fijo ξ tal que $\xi = G(\xi)$, por el Teorema del punto fijo. En el caso del método de Newton, esto implicaría encontrar un cero de la función F , que es justo lo que buscamos. En la siguiente sección se presentará una prueba detallada de su convergencia.

Muchas veces, no solo es necesario resolver un determinado sistema de ecuaciones, sino que es necesario resolverlo lo más rápido posible, con menos iteraciones. En este sentido, se puede estudiar su velocidad con lo que se conoce como el orden del método:

Definición. Sea $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos el límite como

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k.$$

Diremos que $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ converge a $\bar{x}$ con orden $p \geq 1$ si se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^p} < M,$$

para alguna constante positiva M (que tiene que ser $M < 1$ si $p = 1$). Si $p = 2$, se dice que la convergencia es cuadrática, mientras que si $p = 3$, se llama convergencia cúbica.

3.2. Newton-Raphson multidimensional.

Como ya se ha comentado, en general las ecuaciones (3.2) serán no lineales, por lo que muchas veces no será posible obtener una expresión analítica de la solución. Aquí es donde entra el método de Newton-Raphson multidimensional, un esquema iterativo para resolver sistemas de ecuaciones que es una generalización del método de Newton-Raphson unidimensional.

Este método numérico utiliza la matriz Jacobiana, por lo que a continuación se indica la notación usada:

Definición. Matriz Jacobiana:

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua. Diremos que F es continuamente diferenciable en $x \in \mathbb{R}^n$ si cada componente de la función F_i , para $i = 1, 2, \dots, m$ es continuamente diferenciable en x . La derivada de F en x también es llamada la **matriz Jacobiana** de F en x . La notación empleada será

$$F'(x) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad F'(x)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x).$$

3.2.1. Descripción del método.

El problema básico que vamos a estudiar es el siguiente sistema de ecuaciones no lineales $F(X) = 0$ donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $X \in \mathbb{R}^n$. De momento la función F se asume diferenciable con matriz Jacobiana continua y que tiene un cero $\bar{x}$, $F(\bar{x}) = 0$.

Por el Teorema fundamental del cálculo se tiene la siguiente igualdad:

$$F(x_0 + s) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+s} F'(z) dz,$$

para cada $x_0, s \in \mathbb{R}^n$. Si aproximamos la integral por el término lineal $F'(x_0) \cdot s$ tenemos:

$$F(x_0 + s) \approx F(x_0) + F'(x_0) \cdot s,$$

por lo que si queremos que $F(x_0 + s) = 0$, hay que resolver el sistema

$$F'(x_0) \cdot s = -F(x_0),$$

para luego obtener la siguiente iteración $x_1 = x_0 + s$.

Definición. Esquema iterativo de Newton multidimensional.

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, siendo x_0 una aproximación inicial de un cero de la función F . Se define para cada $k \geq 0$ la iteración x_{k+1} como:

$$\begin{cases} F'(x_k)s_k = -F(x_k), \\ x_{k+1} = x_k + s_k. \end{cases} \quad (3.5)$$

En este esquema pueden existir diversos problemas. El primero es que F podría no estar definida analíticamente. Además, en cada iteración se tiene que resolver un sistema lineal de ecuaciones, donde la matriz Jacobiana en cada iteración $F'(x_k)$ podría ser singular o estar mal condicionada, por lo que el sistema no podría ser resuelto en esta iteración. Y por último, en general, el método iterativo no es globalmente convergente para numerosos problemas.

Aún así, como veremos, el Método de Newton tiene numerosas ventajas. Entre ellas, para una buena aproximación inicial de la solución, se tiene convergencia cuadrática si la matriz $F'(\bar{x})$ es no singular, donde $\bar{x}$ es el cero de F .

3.2.2. Convergencia.

Veamos la convergencia del método de Newton multivariable para sistemas de ecuaciones no lineales. Para ello, supondremos F conocida de forma analítica para simplificar. Esto es, tendremos acceso a la expresión de su matriz Jacobiana F' . Necesitamos dedicar algunas definiciones para hablar de convergencia.

Definición. Bola abierta:

Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Definimos $N(x_0, r)$ como la bola abierta de radio r alrededor de x_0 . Esto es

$$N(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}.$$

Definición. Norma matricial inducida

Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Si $m \in \mathbb{N}$, llamaremos de la misma forma a la norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{n \times m}$ a la dada por

$$\|A\| = \max_{j \in \{1, 2, \dots, m\}} \|A_{\cdot j}\|,$$

donde el sufijo j sirve para indicar que se escoge la columna j -ésima de la matriz A . Es decir, la máxima norma de sus columnas. El resultado de convergencia es independiente de la norma utilizada, así que podemos elegir esta.

Lema 1. ([15]):

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función $\mathcal{C}^1$ en un abierto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea su matriz Jacobiana F' Lipschitziana en Ω con norma $\|\cdot\|$ y constante de Lipschitz γ . Se tiene para cada $x + s \in \Omega$ que

$$\|F(x + s) - F(x) - F'(x) \cdot s\| \leq \frac{\gamma}{2} \|s\|^2. \quad (3.6)$$

Demostración. Se tiene la igualdad

$$F(x + s) - F(x) = \left[\int_0^1 F'(x + t \cdot s) dt \right] s = \int_x^{x+s} F'(z) dz.$$

Si restamos $F'(x)s$ a ambos lados de la igualdad queda

$$\begin{aligned} F(x + s) - F(x) - F'(x) \cdot s &= \left[\int_0^1 F'(x + t \cdot s) dt \right] s - F'(x) \cdot s \\ &= \int_0^1 [F'(x + t \cdot s) - F'(x)] \cdot s dt. \end{aligned}$$

Tomando normas y usando la desigualdad triangular para integrales y la definición de función de Lipschitz, obtenemos:

$$\begin{aligned} \|F(x + s) - F(x) - F'(x) \cdot s\| &= \left\| \int_0^1 [F'(x + t \cdot s) - F'(x)] \cdot s dt \right\|, \\ &\leq \int_0^1 \|F'(x + t \cdot s) - F'(x)\| \|s\| dt \leq \int_0^1 \gamma \|ts\| \|s\| dt = \gamma \|s\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\gamma}{2} \|s\|^2, \end{aligned}$$

donde la norma matricial es la generada por $\|\cdot\|$. □

Veamos ahora el resultado de convergencia para el método de Newton multivariable, el cuál se puede encontrar en [15].

Teorema 3. Convergencia de Newton Multivariable:

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función $\mathcal{C}^1$ en un abierto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r, \beta > 0$, tales que $N(\bar{x}, r) \subset \Omega$ y $F(\bar{x}) = 0$. Si $F'(\bar{x})$ es no singular con $\|F'(\bar{x})^{-1}\| \leq \beta$ y F' es Lipschitziana, entonces existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in N(\bar{x}, \delta)$, la secuencia $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ generada por

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k) \text{ para cada } k \geq 0, \quad (3.7)$$

está bien definida, converge a $\bar{x}$, y además

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \beta\gamma\|x_k - \bar{x}\|^2 \text{ para cada } k \geq 0. \quad (3.8)$$

Es decir, su convergencia es **cuadrática**.

Demostración. Elijamos δ tal que la matriz Jacobiana $F'(x)$ es no singular para todo $x \in N(\bar{x}, \delta)$. Para ello, sea

$$\delta := \min \left\{ r, \frac{1}{2\beta\gamma} \right\}.$$

Vamos a demostrar la desigualdad (3.8), también que

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \frac{1}{2}\|x_k - \bar{x}\|,$$

y que $x_{k+1} \in N(\bar{x}, \delta)$. Se probará por inducción sobre k . Veamos el caso $k = 0$, para los otros casos se procede de forma idéntica.

Veamos primero que $F'(x_0)$ es no singular. Sabemos que $F'(\bar{x})$ es no singular. Como $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$ y F' es Lipschitziana en $\bar{x}$, se sigue que

$$\|F'(\bar{x})^{-1}[F'(x_0) - F'(\bar{x})]\| \leq \|F'(\bar{x})^{-1}\|\|F'(x_0) - F'(\bar{x})\| \leq \gamma\beta\|\bar{x} - x_0\| \leq \gamma\beta\delta \leq \frac{1}{2}.$$

Y ahora, según el Lema de Banach, el cuál se puede encontrar en el libro *Computational solution of nonlinear operator equations* [17] o en *Functional analysis* [18], $F'(x_0)$ es no singular y además:

$$\|F'(x_0)^{-1}\| \leq \frac{\|F'(\bar{x})^{-1}\|}{1 - \|F'(\bar{x})^{-1}[F'(x_0) - F'(\bar{x})]\|} \leq \frac{\|F'(\bar{x})^{-1}\|}{1 - \frac{1}{2}} = 2\|F'(\bar{x})^{-1}\| \leq 2\beta.$$

Es por eso que x_1 está bien definido según (3.7) y además

$$\begin{aligned} x_1 - \bar{x} &= x_0 - \bar{x} - F'(x_0)^{-1}F(x_0) = x_0 - \bar{x} - F'(x_0)[F(x_0) - F(\bar{x})] = \\ &= F'(x_0)^{-1}[F(\bar{x}) - F(x_0) - F'(x_0)(\bar{x} - x_0)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

por lo que tomando normas y usando el Lema 1:

$$\begin{aligned}\|x_1 - \bar{x}\| &\leq \|F'(x_0)^{-1}\| \|F(\bar{x}) - F(x_0) - F'(x_0)(\bar{x} - x_0)\| \leq \\ &\leq 2\beta \frac{\gamma}{2} \|\bar{x} - x_0\|^2 = \beta\gamma \|\bar{x} - x_0\|^2.\end{aligned}$$

Esto prueba (3.8). Además, como $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \frac{\beta\gamma}{2}$,

$$\|x_1 - \bar{x}\| \leq \frac{1}{2} \|x_0 - \bar{x}\|.$$

De esta forma, se procede de forma inductiva. □

3.2.3. Esquema iterativo de Newton para ecuaciones difusas.

Como ya se había adelantado en la introducción de este capítulo, la estrategia a seguir es discretizar el parámetro α . Sea $N \in \mathbb{N}$, definiremos la sucesión $\{\alpha_k\}_k$ de forma que para cada $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ se tiene $\alpha_k = \frac{k}{N}$. Así pues, tenemos que resolver una familia de N sistemas de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} F_1(x_1(\alpha_k), x_2(\alpha_k), \alpha_k) = 0, \\ F_2(x_1(\alpha_k), x_2(\alpha_k), \alpha_k) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, donde $x_1(\alpha_k)$ y $x_2(\alpha_k)$ son las incógnitas. Por abuso de notación, a partir de ahora llamaremos x_{1k} y x_{2k} a las incógnitas del k -ésimo sistemas de dos ecuaciones discretizado.

Supongamos que la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $F = (F_1, F_2)$, cumple las condiciones del Teorema 3. Se puede escribir su Matriz Jacobiana como:

$$J(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k)}{\partial x_{1k}} & \frac{\partial F_1(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k)}{\partial x_{2k}} \\ \frac{\partial F_2(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k)}{\partial x_{1k}} & \frac{\partial F_2(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k)}{\partial x_{2k}} \end{pmatrix}.$$

Entonces el esquema iterativo del método de Newton es:

$$\begin{pmatrix} x_{1k}^{n+1} \\ x_{2k}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1k}^n \\ x_{2k}^n \end{pmatrix} - [J(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k)]^{-1} \begin{pmatrix} F_1(x_{1k}^n, x_{2k}^n, \alpha_k) \\ F_2(x_{1k}^n, x_{2k}^n, \alpha_k) \end{pmatrix},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Como este proceso puede seguir indefinidamente, vamos a definir cuándo consideramos que ha convergido el método. Nuestro criterio será el siguiente: habrá convergencia para un $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ cuando

$$\left\| \begin{pmatrix} x_{1k}^{n+1} \\ x_{2k}^{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{1k}^n \\ x_{2k}^n \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} F_1(x_{1k}^{n+1}, x_{2k}^{n+1}, \alpha_k) \\ F_2(x_{1k}^{n+1}, x_{2k}^{n+1}, \alpha_k) \end{pmatrix} \right\| < \text{tol},$$

donde el valor de tolerancia, si no se indica lo contrario, será $\text{tol} = 10^{-8}$. Es decir, consideraremos convergencia cuando la distancia entre iteraciones más el valor de la función F evaluada en esta iteración sean menores que una tolerancia dada.

Ahora que ya disponemos de una herramienta para poder aproximar las soluciones de una ecuación difusa, veamos cómo funciona:

Ejemplo 17. Consideremos $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 4, 5)$ y la ecuación

$$b \cdot x^2 + a \cdot x = a. \quad (3.11)$$

Habíamos visto en el ejemplo 16 que solo había una solución positiva $x \in \mathbb{F}$, con α -cortes:

$$[x]_\alpha = \left[\frac{-\alpha - 1 + \sqrt{5\alpha^2 + 18\alpha + 13}}{2\alpha + 6}, \frac{3 - \alpha + \sqrt{5\alpha^2 - 38\alpha + 69}}{2(\alpha - 5)} \right].$$

Veamos si el método numérico converge a esta solución. La ecuación difusa (3.11) se puede transformar en una familia de sistemas de dos ecuaciones, pero dado que hay multiplicaciones y potencias de números difusos, quizás sea más ilustrativo considerar solo las soluciones positivas (como habíamos hecho en el Ejemplo 16), lo cuál reduce mucho más la dificultad. Entonces, si $x_1(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, se tiene que resolver el sistema (3.12):

$$\begin{cases} (3 + \alpha)x_1^2(\alpha) + (1 + \alpha)x_1(\alpha) = (1 + \alpha), \\ (5 - \alpha)x_2^2(\alpha) + (3 - \alpha)x_2(\alpha) = (3 - \alpha). \end{cases} \quad (3.12)$$

Sea $N \in \mathbb{N}$, si discretizamos el parámetro α entonces hay que resolver la siguiente familia de sistemas de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} (3 + \alpha_k)x_{1k}^2 + (1 + \alpha_k)x_{1k} - (1 + \alpha_k) = 0, \\ (5 - \alpha_k)x_{2k}^2 + (3 - \alpha_k)x_{2k} - (3 - \alpha_k) = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

para cada $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ y donde $\alpha_k = \frac{k}{N}$. Se pueden definir ahora las funciones:

$$F_1(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k) := (3 + \alpha_k)x_{1k}^2 + (1 + \alpha_k)x_{1k} - (1 + \alpha_k),$$

$$F_2(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k) := (5 - \alpha_k)x_{2k}^2 + (3 - \alpha_k)x_{2k} - (3 - \alpha_k).$$

Se puede comprobar que estas funciones cumplen las hipótesis del Teorema 3, ya que son polinomios de grado dos. Esto nos asegura la convergencia del método numérico si la aproximación inicial es suficientemente buena. La matriz Jacobiana asociada a estas dos funciones es:

$$\begin{aligned}
J(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k)}{\partial x_{1k}} & \frac{\partial F_1(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k)}{\partial x_{2k}} \\ \frac{\partial F_2(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k)}{\partial x_{1k}} & \frac{\partial F_2(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k)}{\partial x_{2k}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(3 + \alpha_k)x_{1k} + (1 + \alpha_k) & 0 \\ 0 & 2(5 - \alpha_k)x_{2k} + (3 - \alpha_k) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Se hace notar que esta matriz diagonal es invertible para todo $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ ya que como nos hemos quedado con las soluciones positivas, todos los elementos de la diagonal son positivos y por tanto es invertible. Además, su inversa es muy fácil de calcular:

$$[J(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(3+\alpha_k)x_{1k}+(1+\alpha_k)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(5-\alpha_k)x_{2k}+(3-\alpha_k)} \end{pmatrix}.$$

Por lo que dado un número difuso inicial x_0 con α -cortes $[x_0]_\alpha = [x_{10}(\alpha), x_{20}(\alpha)]$, el método iterativo queda

$$\begin{pmatrix} x_{1k}^{n+1} \\ x_{2k}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1k}^n \\ x_{2k}^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2(3+\alpha_k)x_{1k}+(1+\alpha_k)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(5-\alpha_k)x_{2k}+(3-\alpha_k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(x_{1k}^n, x_{2k}^n, \alpha_k) \\ F_2(x_{1k}^n, x_{2k}^n, \alpha_k) \end{pmatrix},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, ¿qué número inicial tomamos? Se puede ver en el sistema (3.12) cuáles son las soluciones para $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ y considerar un número triangular inicial. En el caso en que $\alpha = 0$, el sistema queda:

$$\begin{cases} 3x_1^2(0) + x_1(0) = 1, \\ 5x_2^2(0) + 3x_2(0) = 3, \end{cases}$$

con soluciones positivas

$$x_1(0) = \frac{\sqrt{13}-1}{6} \approx 0,434 \quad \text{y} \quad x_2(0) = \frac{\sqrt{69}-3}{10} \approx 0,531.$$

Por otro lado, para $\alpha = 1$, se obtiene la misma ecuación:

$$\begin{cases} 4x_1^2(0) + 2x_1(0) = 2, \\ 4x_2^2(0) + 2x_2(0) = 2, \end{cases}$$

cuya solución es $x_1(1) = x_2(1) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, es natural considerar como aproximación inicial a la ecuación difusa (3.11) el número triangular $x_0 = (0,434, 0,5, 0,531)$.

Con esta aproximación inicial, el método numérico converge a la solución exacta calculada en la expresión (2.7), y que se puede observar en la Figura 3.1;

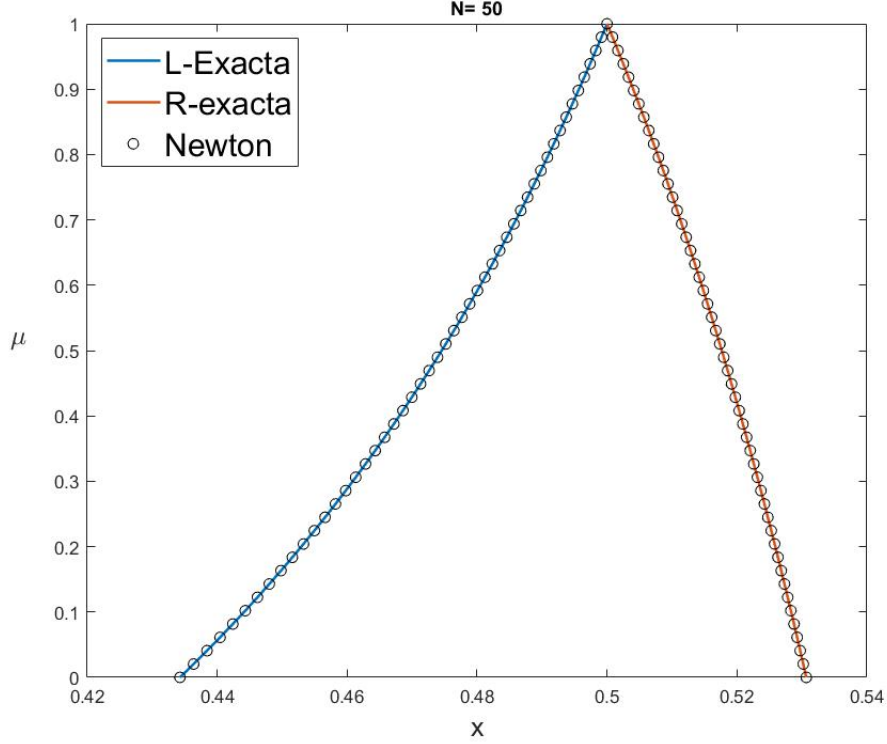


Figura 3.1: Soluciones exacta y aproximada por Newton para $N = 50$.

Aunque se puede ver a simple vista que el método numérico ha convergido a la solución esperada, es interesante saber en cuántas iteraciones lo ha hecho. También se puede ver la evolución del error cometido en cada una de las iteraciones. Esto lo haremos de la siguiente forma, para cada $k \in \{1, 2, \dots, N\}$:

$$e_n = \max_k \|(x_{1k}^n, x_{2k}^n) - (x_1(\alpha_k), x_2(\alpha_k))\|$$

Es decir, es el error máximo respecto a la solución exacta de entre todos los α discretizados en cada una de las iteraciones. También definiremos

$$F_n = \max_k \|F(x_{1k}^n, x_{2k}^n)\|,$$

que representa el valor máximo de la función F en cada uno de los α discretizados. Así pues, para el ejemplo anterior se puede estudiar la evolución de estos parámetros en la Figura 3.2:

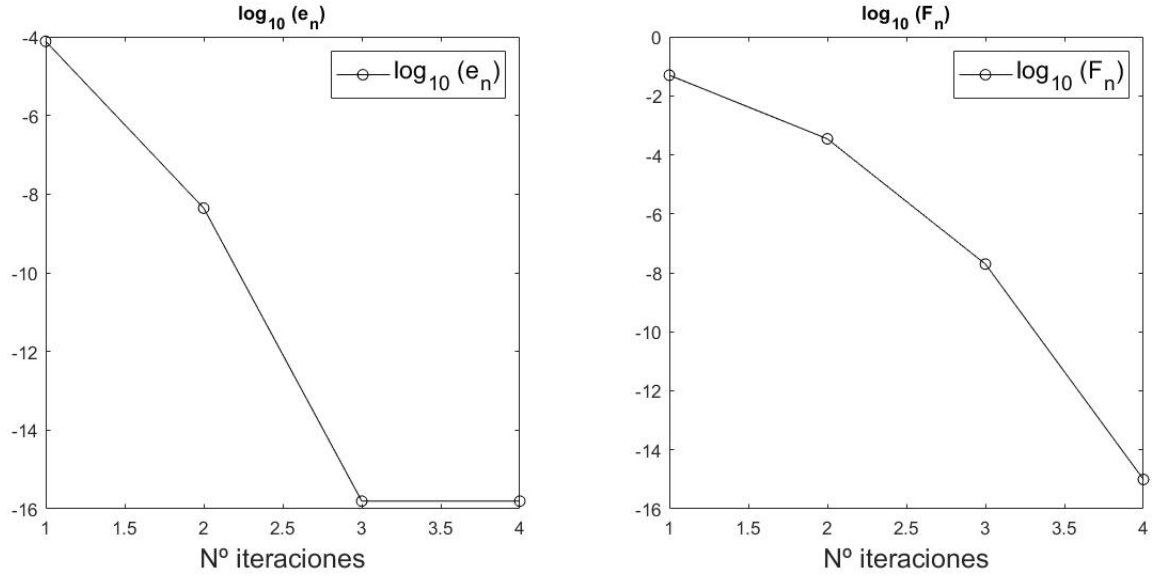


Figura 3.2: Soluciones exacta y aproximada por Newton para $N = 50$.

Como se puede observar, el método se considera que ha convergido en la cuarta iteración, ya que para todos los α discretizados se tiene que $e_4 + F_4 < 10^{-8} = \text{tol}$.

3.3. Método de Steffensen.

Muchas veces, usar el método de Newton no es lo más óptimo, ya que las funciones de una ecuación difusa de este tipo dependen de si las soluciones buscadas son positivas o negativas, como hemos visto anteriormente.

Hemos podido aplicar el método de Newton en el ejemplo anterior porque sabíamos previamente que había una única solución positiva, por lo que los α -cortes tomaban una forma en particular. De la ecuación (3.11):

$$b \cdot x^2 + a \cdot x = a,$$

con $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 4, 5)$, no se pueden obtener directamente las funciones F_1 y F_2 (definidas en la anterior sección) si no se sabe que la solución es positiva. Sin ir más lejos, si suponemos que $x \in \mathbb{F}$ es una solución de la ecuación, y $[x]_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$ son sus α -cortes, entonces hay varias posibilidades:

- Si x es positiva, es decir $x_1(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, entonces la función F_1 toma la forma:

$$F_1(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k) = (3 + \alpha_k)x_{1k}^2 + (1 + \alpha_k)x_{1k} - (1 + \alpha_k).$$

- Si x es negativa, es decir $x_2(\alpha) < 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, entonces la función F_1 toma la forma:

$$F_1(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k) = (3 + \alpha_k)x_{2k}^2 + (1 + \alpha_k)x_{1k} - (1 + \alpha_k).$$

- Si $x_1(0) \leq 0 \leq x_2(0)$, entonces la función F_1 es la siguiente:

$$F_1(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k) = (3 + \alpha_k)x_{1k} - (1 + \alpha_k),$$

mientras que la función F_2 sería:

$$F_2(x_{1k}, x_{2k}, \alpha_k) = (5 - \alpha_k)\max\{x_{1k}^2, x_{2k}^2\} + (3 - \alpha_k)x_{2k} - (3 - \alpha_k).$$

En resumen, el hecho de que estas funciones cambien según el tipo de solución, hace muy complicada la implementación de un método numérico como el de Newton, donde se necesita conocer una expresión algebraica cerrada de la función de la cuál se quiere encontrar el cero. Es por eso que, en este caso, es mejor utilizar algún otro método numérico que no necesite de la evaluación directa de la matriz Jacobiana de la función, sino que la aproxime. Por ejemplo, se puede usar la siguiente definición, la cuál se puede consultar en [22]:

Definición. Diferencias divididas.

Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. El **operador diferencias divididas de primer orden** de F en $\mathbb{R}^n$ está definido como $[\cdot, \cdot; F] : \Omega \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$[X + H, X; F] := \int_0^1 F'(X + tH)dt = F'(X) + \frac{1}{2}F''(X)H + \frac{1}{6}F'''(X)H^2 + \mathcal{O}(H^3),$$

para cada $X, h \in \Omega$ tal que $h \neq 0$.

El operador diferencias divididas es una aproximación de la matriz Jacobiana de una función. Se puede aproximar la columna j -ésima de $F'(x)$ de la siguiente forma:

$$[X + he_j, X; F]_{\cdot j} = \frac{F(X + he_j) - F(x)}{h}.$$

donde $h \in \mathbb{R}$ es pequeño.

Vamos a ver el siguiente resultado que muestra que, efectivamente, este cálculo tiene un error $\mathcal{O}(h)$.

Lema 2. Error en las diferencias divididas:

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función $\mathcal{C}^1$ en un abierto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea su matriz Jacobiana F' Lipschitziana en Ω con norma $\|\cdot\|$ y constante de Lipschitz γ . Entonces

$$\|[X + he_j, X; F]_{\cdot j} - F'(X)_{\cdot j}\| \leq \frac{\gamma}{2}|h|. \quad (3.14)$$

Por tanto si se considera la norma matricial $\|A\| = \max_{j=1,2,\dots,n} \|A_{\cdot j}\|$, se tiene que

$$\|[X + he_j, X; F] - F'(X)\| \leq \frac{\gamma}{2}|h|. \quad (3.15)$$

Demostración. Consultar *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Non-linear Equations*

□

3.3.1. Convergencia.

Ahora que ya tenemos un modo de aproximar la matriz Jacobiana de nuestra función, ¿el método de Newton cambiando ésta por las diferencias divididas funciona bien? La respuesta es afirmativa, si el incremento h es elegido correctamente, la convergencia cuadrática del método se conserva, pero hay que ir con cuidado.

Teorema 4. Método de Steffensen (ver [15]):

Sean F y s con las mismas propiedades que en Teorema 3. Sea $\|\cdot\|_1$ la norma vectorial y su correspondiente norma matricial asociada. Entonces existen δ y h reales positivos tales que si la sucesión $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ cumple que $0 < |h_k| \leq h$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y se elige $x_0 \in N(\bar{x}, \delta)$, entonces la sucesión generada por

$$A_k(x) = [x + h_k, x; F], \quad (3.16)$$

$$x_{k+1} := x_k - A_k^{-1}(x_k) \cdot F(x_k) \text{ para cada } k = 0, 1, \dots \quad (3.17)$$

está bien definido y converge linealmente a $\bar{x}$. Si además

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0,$$

y existe alguna constante c_1 tal que

$$|h_k| \leq c_1 \|x_k - \bar{x}\|, \quad (3.18)$$

o, equivalentemente, existe c_2 tal que

$$|h_k| \leq c_2 \|F(x_k)\|, \quad (3.19)$$

entonces la convergencia es cuadrática.

Demostración. La prueba es muy similar a la del Teorema 3, solo que ahora se eligen δ y h de forma que la matriz A_k sea no singular para todo $x_k \in N(\bar{x}, \delta)$, $|h_k| < h$ para todo $k \geq 0$ y además,

$$\delta + h \leq \frac{1}{2\beta\gamma}.$$

De la misma forma se comprueba que A_0 es no singular. Ahora, la ecuación (3.9) pasa a ser:

$$\begin{aligned} x_1 - \bar{x} &= x_0 - \bar{x} - A_0^{-1}F(x_0) \\ &= x_0 - \bar{x} - A_0^{-1}F(x_0) + A_0^{-1}F(\bar{x}) + \{(A_0^{-1}F'(x_0)(\bar{x} - x_0) - A_0^{-1}F'(x_0)(\bar{x} - x_0))\} \\ &= A_0^{-1} \{[F(\bar{x}) - F(x_0) - F'(x_0)(\bar{x} - x_0)] + [(F'(x_0) - A_0)(\bar{x} - x_0)]\}. \end{aligned}$$

Esto cambia con el Teorema 3 en que ahora $F'(x_0)^{-1}$ ha sido reemplazado por A_0^{-1} y se ha añadido el término $(F'(x_0) - A_0)(\bar{x} - x_0)$.

Pero esto no es problema, ya que por la desigualdad triangular y el Lema 2:

$$\begin{aligned}\|x_1 - \bar{x}\| &\leq \|A_0^{-1}\| \left\{ \|F(\bar{x}) - F(x_0) - F'(x_0)(\bar{x} - x_0)\| + \|(F'(x_0) - A_0)(\bar{x} - x_0)\| \right\} \leq \\ &\leq 2\beta \left\{ \frac{\gamma}{2} \|\bar{x} - x_0\|^2 + \frac{\gamma h}{2} \|\bar{x} - x_0\| \right\},\end{aligned}$$

que prueba que la desigualdad (3.18) sea suficiente para la convergencia cuadrática. Además:

$$\|x_1 - \bar{x}\| \leq \gamma(\delta + h) \|\bar{x} - x_0\| \leq \frac{1}{2} \|\bar{x} - x_0\|.$$

Y se procede de forma inductiva. □

En la práctica se tomará $h_k = h \in \mathbb{R}^+$ para todo $k \geq 0$.

Ejemplo 18. Vamos a seguir con el Ejemplo 16, ya que ya conocemos todas sus soluciones. Vamos a demostrar cómo no hace falta ningún cálculo previo para encontrar la única solución de forma numérica. Trabajaremos en el programa Matlab. La idea es generar la función de la cuál queremos calcular el cero con composición de funciones, de forma que dependan de si son positivas o son negativas. Por ejemplo, podemos definir la función "multiplicación" de dos números difusos u y v de la siguiente forma:

```
1 function pa = product(ua, va)
2     X=[ua(1)*va(1), ua(2)*va(1), ua(1)*va(2), ua(2)*va(2)];
3     pa=[min(X), max(X)];
4 end
```

Por lo que sean cuales sean u y v , positivos o negativos, el producto se realiza correctamente. Algo similar podemos realizar con la función "al cuadrado":

```
1 function fua = funct2(u)
2     f=@(x) x.^2;
3     if u(1)*u(2)<0
4         fua=[0, max(f(u))];
5     else
6         fua=f(u);
7     end
8 end
```

que coincide exactamente con la definición de la Proposición 3. De nuevo esta definición de función no excluye a las soluciones negativas, por lo que es mucho más general.

De forma similar, se pueden ir definiendo todas las demás operaciones de la misma forma, y al final se puede construir la función querida sin tener en cuenta las propiedades de los parámetros de entrada. Para el Ejemplo 16:

$$b \cdot x^2 + a \cdot x = a, \quad (3.20)$$

con $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 4, 5)$, construimos la siguiente función:

```

1 function fu = F(u,i,n)
2     %a Aqui representa en que posicion de los alpha %cortes
    esta. Esto lo necesitamos para obtener. n es el %
    numero que hemos usado en el metodo numerico.
3     b=alphac_triangular(3,4,5,n);
4     a=alphac_triangular(1,2,3,n);
5     bi=b(i,:);
6     ai=a(i,:);
7     fu=hukuhara(suma(product(funct2(u),bi),product(ai,u),bi));
8 end

```

Así pues, el comando que se utiliza para encontrar la solución es:

```

1 N=50; %numero de discretizacion de los alpha cortes.
2 h=0.001; %paso para las diferencias divididas. Hay que tener
    cuidado con
3 %paso porque si no es lo suficientemente pequeno falla.
4 alpha=0:1/(N-1):1;
5 fun='F'; %funcion a resolver F=0
6 uini=alphac_triangular(0.43,0.5,0.53,N); %aproximacion inicial
7
8 %Steffensen:
9 usol = Steffensen(fun,N,uini,h,1);
10
11 plot(usol,alpha,'ko');
12 str=sprintf('Con %d divisiones',N);
13 title(str)
14 legend('Exacta','Steffensen')

```

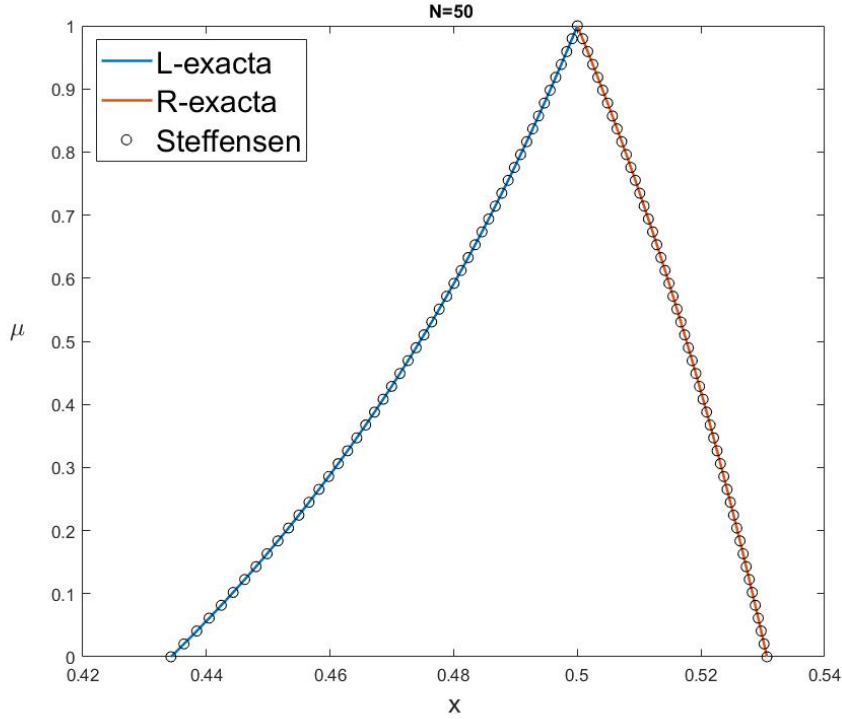


Figura 3.3: Soluciones exacta y aproximada por Steffensen para $N = 50$.

que es la misma que habíamos encontrado con el método de Newton y está representada en la Figura 3.3, pero ahora no nos ha hecho falta suponer que las soluciones eran positivas, el método directamente se encarga de ello.

El error cometido en cada iteración está representado en la Figura 3.4:

Como se puede ver, también se han necesitado solamente 4 iteraciones para la convergencia, al igual que en Newton.

Ejemplo 19. Sean los números triangulares $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 3, 4)$, $c = (3, 4, 5)$ y $d = (5, 8, 13)$ y sea la ecuación difusa:

$$ax^3 + bx^2 + c = d. \quad (3.21)$$

Esta ecuación tiene una solución difusa positiva x . Si los α -cortes de x son $[x]_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$, entonces las ecuaciones paramétricas resultantes son:

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)x_1^3(\alpha) + (\alpha + 2)x_1^2(\alpha) + \alpha + 3 &= 3\alpha + 5, \\ (3 - \alpha)x_2^3(\alpha) + (4 - \alpha)x_2^2(\alpha) + (5 - \alpha) &= 13 - 5\alpha. \end{aligned}$$

Es interesante encontrar una buena aproximación inicial a la solución. Si $\alpha = 0$, entonces si se resuelven este sistema de ecuaciones queda:

$$x_1(0) \approx 0,839 \quad \text{y} \quad x_2(0) \approx 1,056.$$

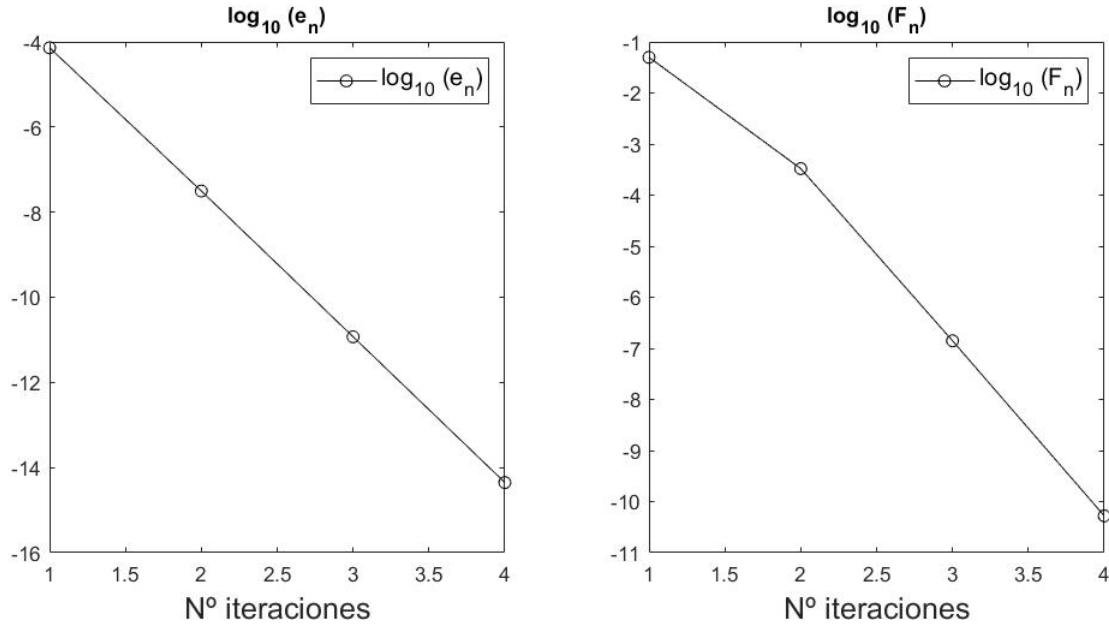


Figura 3.4: Soluciones exacta y aproximada por Newton para $N = 50$.

Si, además, estudiamos $\alpha = 1$, las soluciones son:

$$x_1(1) = x_2(1) \approx 0,911.$$

Es decir, los α -cortes de x en $\alpha = 0$ son aproximadamente el intervalo $[0,839, 1,056]$, mientras que el real con más grado de pertenencia es aproximadamente 0,911. Así pues, es natural considerar como primera aproximación el número triangular $(0,839, 0,911, 1,056)$.

En este caso, el método de Steffensen también converge a la solución exacta, lo cuál se puede comprobar en la Figura 3.5.

El error cometido en cada iteración está representado en la Figura 3.6.

Ahora se han necesitado 4 iteraciones para la convergencia, al igual que en Newton.

Por último vamos a ver una ecuación difusa cuya solución es un número difuso que no es ni positivo ni negativo.

Ejemplo 20. Sean los números difusos $a = (-0,5, 0, 0,5)$, $b = (-1,5, -1, -0,5)$ y sea la ecuación difusa:

$$b \cdot x^3 \ominus a = 0. \quad (3.22)$$

Una solución a esta ecuación es el número difuso que tiene por α -cortes:

$$[x]_\alpha = \left[\sqrt[3]{\frac{0,5 - 0,5\alpha}{-1,5 + 0,5\alpha}}, \sqrt[3]{\frac{-0,5 + 0,5\alpha}{-1,5 + 0,5\alpha}} \right],$$

la cual es una solución que es mixta (ni positiva ni negativa). Aún así, y sin tener que desarrollar ninguna de las funciones F_1 y F_2 en función de si las soluciones eran

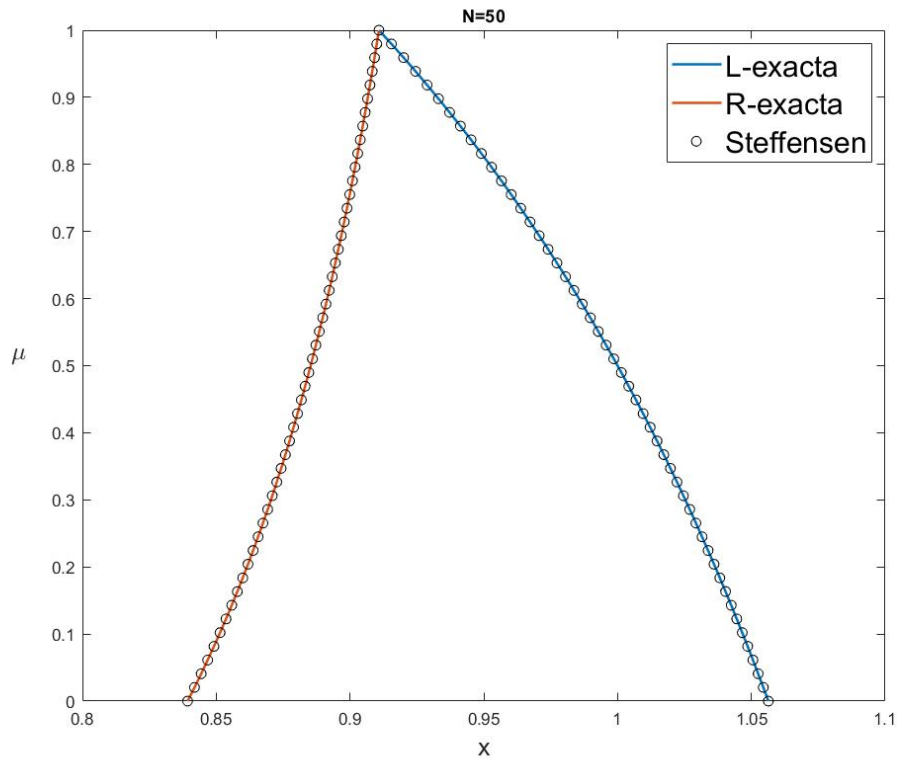


Figura 3.5: Soluciones exacta y aproximada de la ecuación (3.21) por Steffensen para $N = 50$.

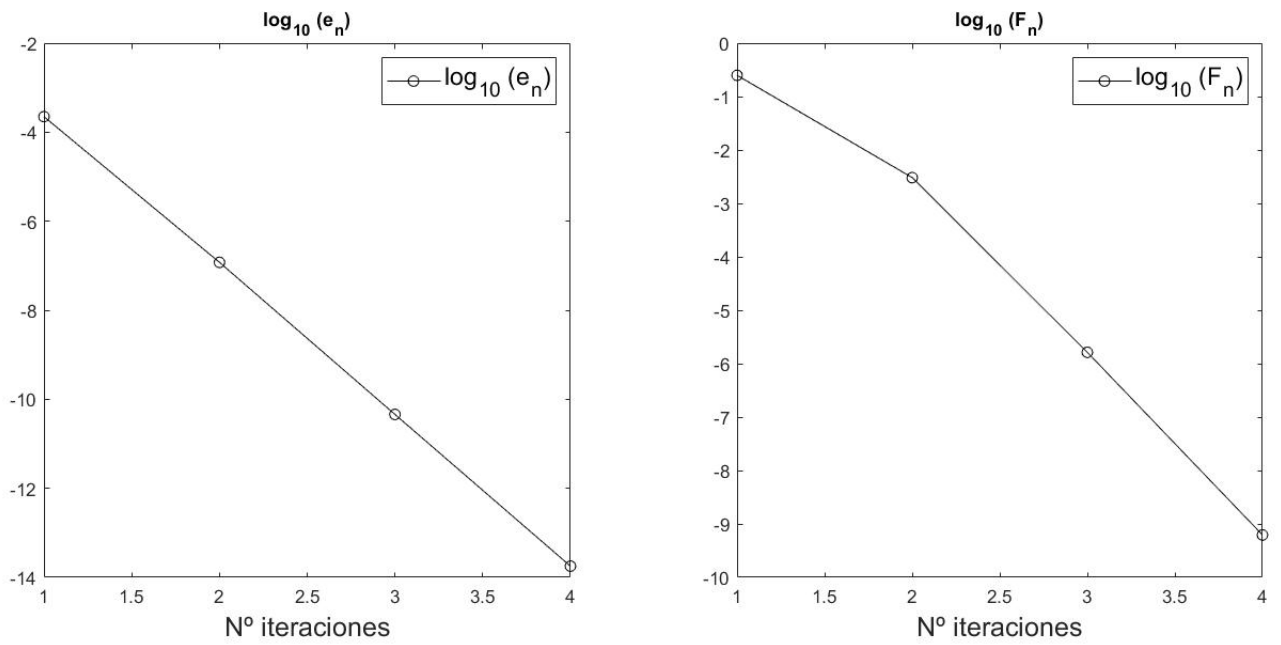


Figura 3.6: Soluciones exacta y aproximada por Newton para $N = 50$.

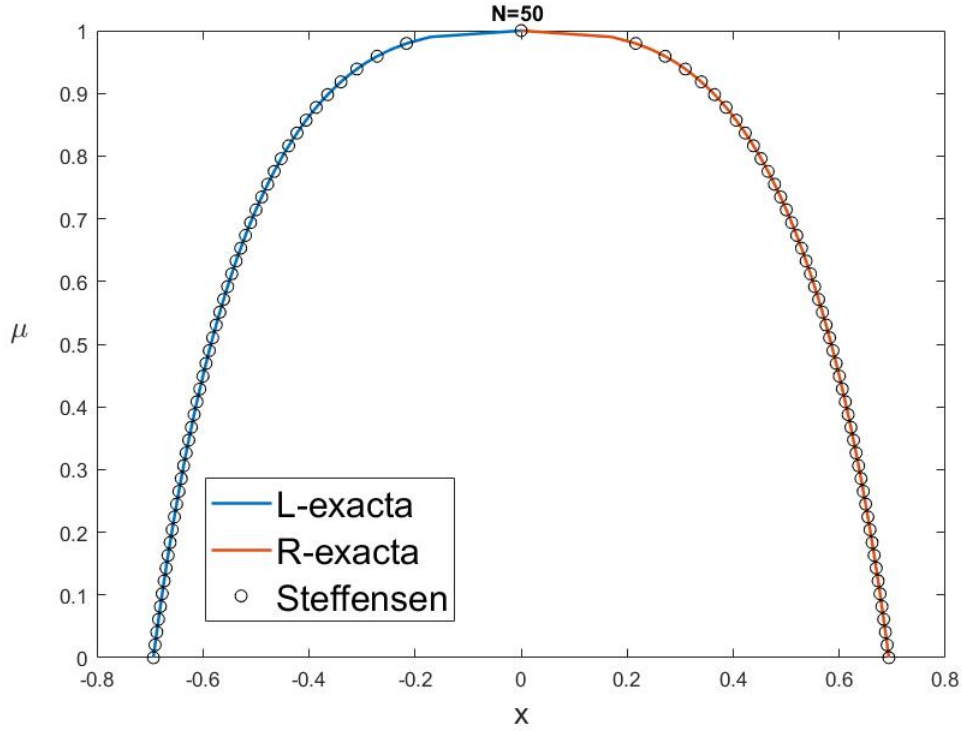


Figura 3.7: Soluciones exacta y aproximada de la ecuación (3.21) por Steffensen para $N = 50$.

positivas, negativas o mixtas; con el método de Steffensen se obtiene la solución deseada, representada en la Figura 3.7.

El error cometido en cada iteración está representado en la Figura 3.8.

Con el último ejemplo queda demostrado que el método de Steffensen es mucho mejor que el método de Newton, ya que nos permite no prestar atención a qué forma van a adoptar las funciones F_1 y F_2 en función de si las soluciones son positivas o negativas. Esto es muy beneficioso, ya que las ecuaciones podrían complicarse mucho y podríamos no disponer de una expresión analítica de estas funciones, lo cual impediría directamente la aplicación del método de Newton.

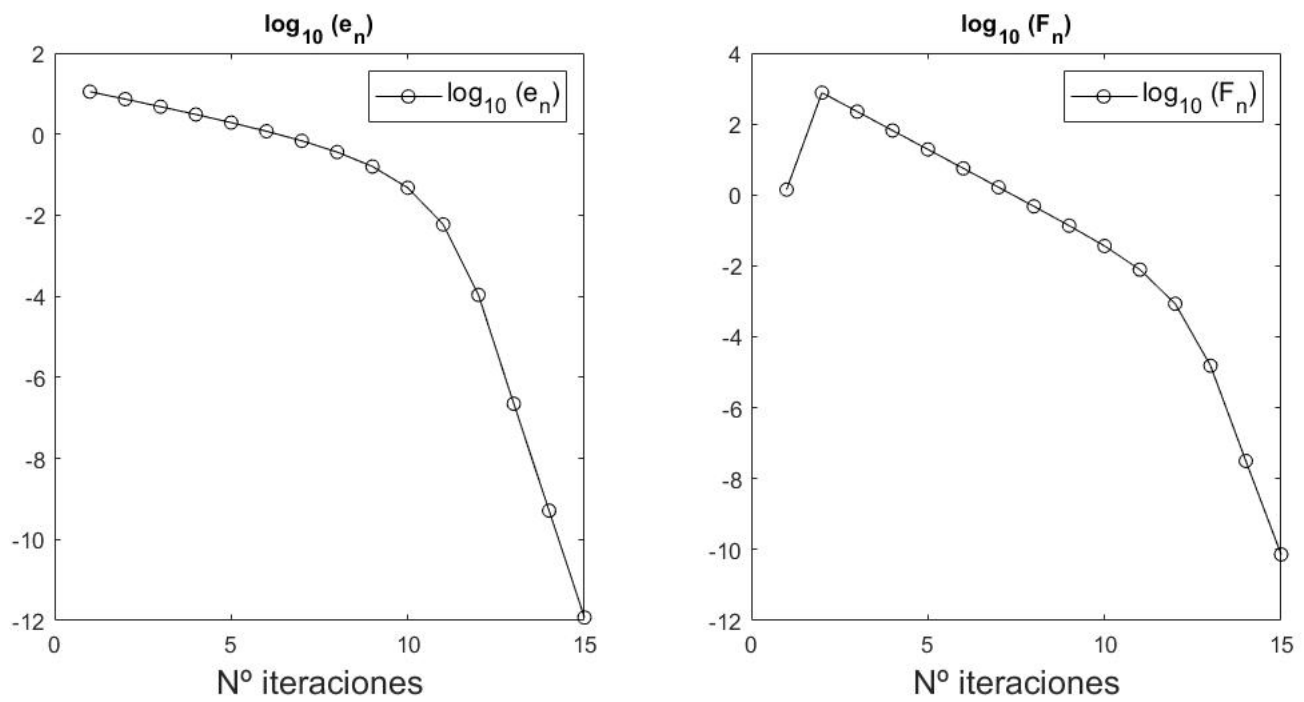


Figura 3.8: Soluciones exacta y aproximada por Newton para $N = 50$.

Capítulo 4

Ecuación logística difusa.

Las ecuaciones en diferencias aparecen en muchas disciplinas donde se toman medidas discretas y son consideradas una gran herramienta en los modelos matemáticos [16]. De hecho, son utilizadas en campos como el análisis numérico, en la teoría de control, en estudios económicos, en ciencia de la computación y en biología. En particular, en esta última, es interesante el estudio de la evolución del número de individuos de una población a lo largo del tiempo.

Una de las ecuaciones en diferencias más utilizadas para modelizar este fenómeno es la ecuación logística:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

donde x_n representa la densidad de población en un instante de tiempo con respecto a una capacidad máxima, y a es el máximo crecimiento posible.

El objetivo de este capítulo es extender la ecuación logística a una ecuación difusa en diferencias (ver [16]). Esto es, una ecuación en diferencias con parámetros y condiciones iniciales difusas, cuya solución es una secuencia de números difusos. Estudiaremos la ecuación

$$x_{n+1} = \beta x_n \ominus \beta x_n^2 \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.2)$$

donde $x_n, \beta \in \mathbb{F}^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Llamaremos también $x_0 \in \mathbb{F}^+$ a la condición inicial, y los α -cortes serán

$$\begin{aligned} [x_n]_\alpha &= [x_{n,1}(\alpha), x_{n,2}(\alpha)], \\ [\beta]_\alpha &= [\beta_1(\alpha), \beta_2(\alpha)], \end{aligned}$$

para todo $n \geq 0$.

4.1. Resultados previos.

Para lograr este objetivo, necesitamos introducir algunos conceptos tales como la acotación de una sucesión de números difusos.

Definición. Una secuencia de números difusos positivos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada si existen números reales $M, N > 0$ tales que

$$\text{supp}(x_n) \subset [M, N] \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definición. Sean $u, v \in \mathbb{F}$ con α -cortes:

$$[u]_{\alpha} = [u_1(\alpha), u_2(\alpha)] \quad [v]_{\alpha} = [v_1(\alpha), v_2(\alpha)] \quad \text{para cada } \alpha \in [0, 1].$$

Entonces la métrica definida en el espacio de los números difusos está definida como sigue:

$$d(u, v) = \sup \max \left\{ |u_1(\alpha) - v_1(\alpha)|, |u_2(\alpha) - v_2(\alpha)| \right\},$$

donde el supremo se toma respecto a $\alpha \in [0, 1]$.

De esta forma ya podemos hablar de convergencia de sucesiones de números difusos.

La ecuación (4.2) utiliza la diferencia de Hukuhara debido a que tiene mejores propiedades a la hora de trabajar con ecuaciones, como se ha visto en el Capítulo 1. Aún así, no siempre existe esta diferencia entre dos números difusos, por lo que tenemos que ver bajo qué condiciones esta ecuación de recurrencia puede estar bien definida.

Lema 3. Sea $\beta, x_0 \in \mathbb{F}^+$ tales que $\beta_1(\alpha) < 1$ y $x_{0,2}(\alpha) \leq \frac{1}{2}$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. Entonces la diferencia de Hukuhara existe en la ecuación (4.2) para todo $n \in \mathbb{N}$.

La demostración de este resultado se encuentra en el artículo "Fuzzy Logistic difference equation" [16], así como de la existencia y unicidad de soluciones con unas hipótesis determinadas sobre β y x :

Proposición 6. Sea $\beta, x_0 \in \mathbb{F}^+$ tales que $\beta_{\alpha}^+ < 1$ y $x_{0\alpha}^+ \leq \frac{1}{2}$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. Entonces, para cualquier x_0 cumpliendo estas condiciones, existe una única solución $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a la ecuación logística difusa en recurrencias (4.2).

Definición. Diremos que el número difuso $x \in \mathbb{F}$ es un punto fijo de la ecuación (4.2) si

$$x = \beta x \ominus \beta x^2,$$

y la diferencia de Hukuhara existe.

Teorema 5. Sea la ecuación en diferencias difusa:

$$x_{n+1} = \beta x_n \ominus \beta x_n^2 \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

con condición inicial $x_0 \in \mathbb{F}^+$ y parámetro $\beta \in \mathbb{F}^+$ que satisfacen las condiciones del Lema 3. Entonces se tiene que

1. La ecuación tiene un único punto de equilibrio.

2. Cualquier solución positiva $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la ecuación converge al único punto de equilibrio x con respecto a la métrica del espacio de números difusos d cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración.

1. Los puntos de equilibrio $x \in \mathbb{F}$ de la ecuación difusa (4.3) cumplen:

$$x = \beta x \ominus \beta x^2.$$

O lo que es lo mismo, en términos de α -cortes:

$$[x]_{\alpha} = [\beta x \ominus \beta x^2]_{\alpha}.$$

Si escribimos $[x]_{\alpha} = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$ y $[\beta]_{\alpha} = [\beta_1(\alpha), \beta_2(\alpha)]$, como x es positivo, la ecuación difusa se transforma en un sistema de dos ecuaciones escalares:

$$\begin{cases} x_1(\alpha) = \beta_1(\alpha)x_1(\alpha) - \beta_1(\alpha)x_1^2(\alpha) \\ x_2(\alpha) = \beta_2(\alpha)x_2(\alpha) - \beta_2(\alpha)x_2^2(\alpha) \end{cases}.$$

Este sistema tiene dos soluciones, que son:

$$\begin{cases} x_1(\alpha) = \frac{\beta_1(\alpha) - 1}{\beta_1(\alpha)}, \\ x_2(\alpha) = \frac{\beta_2(\alpha) - 1}{\beta_2(\alpha)}. \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1(\alpha) = 0, \\ x_2(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Es muy sencillo comprobar que la primera solución no corresponde a la estructura de un número difuso, por lo que el único punto fijo de la ecuación (4.3) es el cero difuso: $x = 0$.

2. Vamos a probar que cualquier solución positiva $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la ecuación (4.3) converge a 0, que es el único punto de equilibrio. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una solución de (4.3), entonces se tiene que

$$x_{n+1} = \beta x_n \ominus \beta x_n^2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si definimos los α -cortes de la recurrencia como $[x_{n+1}]_{\alpha} = [x_{n+1,1}(\alpha), x_{n+1,2}(\alpha)]$, entonces

$$\begin{cases} x_{n+1,1}(\alpha) = \beta_1(\alpha)x_{n,1}(\alpha) - \beta_1(\alpha)x_{n,1}^2(\alpha) < \beta_1(\alpha)x_{n,1}(\alpha), \\ x_{n+1,2}(\alpha) = \beta_2(\alpha)x_{n,2}(\alpha) - \beta_2(\alpha)x_{n,2}^2(\alpha) < \beta_2(\alpha)x_{n,2}(\alpha) \end{cases}$$

Como $\beta_1(\alpha) \leq \beta_2(\alpha) < 1$, entonces se tiene que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,1}x_1(\alpha) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,2}(\alpha) = x_2(\alpha) = 0, \end{cases}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, por lo que

$$d(x_n, x) = \sup \max\{|x_{n,1}(\alpha) - x_1(\alpha)|, |x_{n,2}(\alpha) - x_2(\alpha)|\} = 0.$$

Y la solución de la ecuación (4.3) converge a su único punto fijo $x = 0$.

□

4.2. Ejemplos.

La siguiente sección ilustra el comportamiento de la ecuación logística difusa con varios ejemplos. En ellos, se observa que las soluciones convergen al único punto fijo de la ecuación, $x = 0$.

Ejemplo 21. Sea $\beta \in \mathbb{F}^+$, definido en términos de sus α -cortes según $[\beta]_\alpha = [0, 3, 0, 5, 0, 7]$, y Sea la ecuación difusa en diferencias logística dada por

$$x_{n+1} = \beta x_n \ominus \beta x_n^2. \quad (4.4)$$

Por el Teorema 5, si la condición inicial $x_0 \in \mathbb{F}^+$, con α -cortes $[x_0]_\alpha = [x_{0,1}(\alpha), x_{0,2}(\alpha)]$, satisface $x_{0,2}(\alpha) < \frac{1}{2}$ para todo $\alpha \in (0, 1]$, entonces cualquier solución converge a $x = 0$, el único punto de equilibrio. Por ejemplo, si

$$[x_0]_\alpha = [0, 3 + 0, 2\alpha, 0, 5 - 0, 1\alpha].$$

Y definimos los α -cortes de la recurrencia como

$$[x_n]_\alpha = [x_{n,1}(\alpha), x_{n,2}(\alpha)],$$

entonces en la Figura 4.1 se puede ver cómo evolucionan los α -cortes de la secuencia solución x_n :

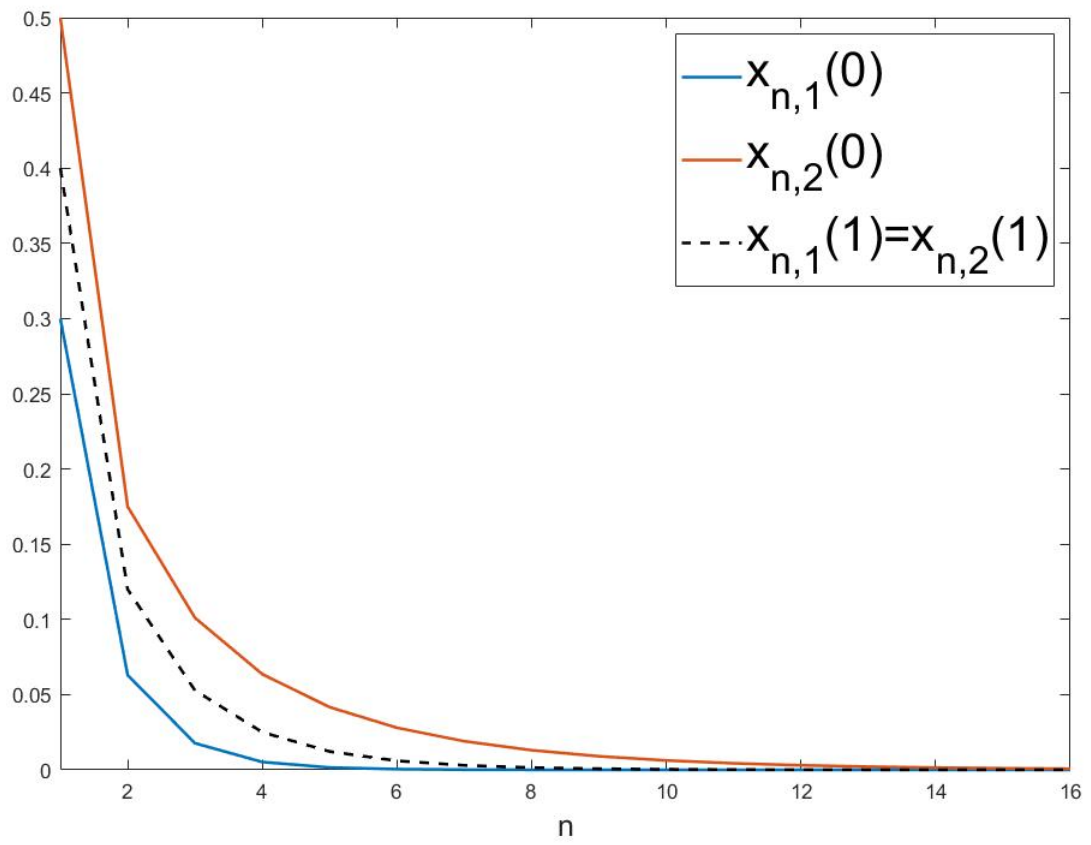


Figura 4.1: Solución de la ecuación difusa en recurrencia (4.4).

Capítulo 5

Conclusiones y líneas futuras.

En un principio, se han definido los conjuntos difusos y se han presentado numerosas propiedades de los mismos. Seguidamente se ha pasado a un subconjunto de éstos, que son los números difusos. Se ha visto que sus aplicaciones son muy diversas, dado que permiten expresar de mejor forma algunos hechos de nuestro entorno que no podríamos describir de forma fácil con la lógica booleana.

A continuación se ha presentado el principio de Extensión de Zadeh, que permite, como su nombre indica, extender funciones reales a funciones difusas. Es importante detenerse un momento en este punto, pues la generalización de funciones difusas a través de las reales no es tarea sencilla, y un gran ejemplo puede ser la función cuadrática o porque $u^2 \neq u \cdot u$, siendo este u un número difuso en particular.

En el Capítulo 2 se presentan numerosos ejemplos de lo que es una ecuación difusa y en el Capítulo 3 se estudian métodos numéricos para resolverlas. El más usado es el método de Newton, pero se necesitaba la expresión analítica de la función para poder usarlo, cosa que en los números difusos en general no es posible debido a que su expresión analítica depende de dónde lo estás evaluando. Es por eso que se presenta el método de Steffensen, el cuál no necesita de la evaluación de la matriz Jacobiana, y por tanto tampoco necesita de la expresión analítica de la función a resolver.

Por último, en el Capítulo 4 se estudia la ecuación logística difusa en recurrencia, que describe, entre otras muchas cosas, la evolución del número de individuos de una población a lo largo del tiempo.

De cara al futuro, sería interesante estudiar más ecuaciones en diferencias difusas, ya que se dispone de una herramienta numérica (método de Steffensen) para resolver los puntos fijos de este tipo de ecuaciones. Además, también se podría ampliar el estudio a otros métodos iterativos libres de matrices Jacobianas que sean más eficientes. Esto permitiría obtener un mayor orden de convergencia, reduciendo significativamente el número de iteraciones para resolver una ecuación difusa. Por ejemplo, se podría estudiar la implementación del método de Traub, de orden de convergencia igual a 3, o incluso el método de Ostrowski, de orden 4.

Bibliografía

- [1] Abu Aarqob, O. Shawagfeh, Nabil Abughneim, Omar, Functions defined on fuzzy real numbers according to Zadeh's extension. *International Mathematical Forum*. 3 (2008) 763-776.
- [2] Javad Shokri, Numerical Method for Solving Fuzzy Nonlinear Equations, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 2 (2008) no. 2, 1191-1203.
- [3] Sefanini, L.A , A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, *Fuzzy Sets and Systems* 161 (2010) 1564-1584.
- [4] Raheleh Jafari, Wen Yu, Sina Razvarz, Alexander Gegov; Numerical methods for solving fuzzy equations: A survey, *Fuzzy Sets and Systems*.
- [5] L. A. Zadeh; *Fuzzy Sets, Information and Control* 8 (1965)338-353 .
- [6] D. Dubois, H. Prade; Fuzzy-set-theoretic differences and inclusions and their use in the analysis of fuzzy equations, *Control and Cybernetics* Vol. 13 (1984) 129-146 .
- [7] R. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* 261 (1976) 459-467.
- [8] Stefanini, Luciano Sorini, Laerte Professor, Maria, Fuzzy Numbers and Fuzzy Arithmetic (2008).
- [9] Melliani, Said Elomari, Mhamed Chadli, Lalla Ettoussi, Razika, Extension of Hukuhara difference in intuitionistic fuzzy set theory, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 21 (2015) 34-47.
- [10] Annelies Vroman, Glad Deschrijver, Etienne E. Kerre, Solving systems of linear fuzzy equations by parametric functions—An improved algorithm, *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007) 1515 – 1534.
- [11] E. Sanchez, Solution of Fuzzy Equations with Extend Operations, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 12 (1984) 273-248.
- [12] Margaliot Michael, Mathematical Modeling of Natural Phenomena: A Fuzzy Logic Approach, *Studies in Fuzziness and Soft Computing* (2007) 215.

- [13] Majid Amirfakhrian, Numerical solution of algebraic fuzzy equations with crisp variable by Gauss–Newton method, *Applied Mathematical Modelling* 32 (2008) 1859–1868.
- [14] Šostak, Alexander, Mathematics in the Context of Fuzzy Sets: Basic Ideas, Concepts, and Some Remarks on the History and Recent Trends of Development. *Mathematical Modelling and Analysis*, 16 (2011) 173-198.
- [15] J. E. Dennis Jr. , Robert B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Rice University, (1983).
- [16] A. Khastan, Fuzzy logistic difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems* Vol. 15, No. 7 (2018) 55-66.
- [17] L.B. Rall, *Computational solution of nonlinear operator equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, Michigan (1979).
- [18] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford (1982).
- [19] Gottwald, Siegfried. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, The Foundations of Application—from a Mathematical Point of View*, (1993).
- [20] D.F. Gill, Y.Y. Azmy, Newton’s method for solving k-eigenvalue problems in neutron diffusion theory, *Nuclear Science and Engineering*, 167(2) (2011) 141-153.
- [21] I.R. Ivis, D.S. Zrnic, T. Yu, Threshold Calculation for Coherent Detection in Dual - Polarization Weather Radars, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 48(3) (2012) 2198-2215.
- [22] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press New York, 1970.