

Modelling in Science Education and Learning Volumen 6(1), No. 4, 2013. Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Primeros pasos con las tareas de modelización en secundaria

Cèsar Gallart Palau CEU CARDENAL HERRERA gallartcesar@uch.ceu.es

Lluís Miquel Garcia Raffi Universitat Politècnica de València lmgarcia@mat.upv.es

Abstract

La creciente importancia de las competencias en nuestro sistema educativo pone de manifiesto la necesidad, no solo de introducir cambios metodológicos en el proceso de enseñanza de las Matemáticas en la educación secundaria obligatoria, sino también de diseñar nuevos instrumentos que permitan desarrollar las competencias básicas en general, y la competencia matemática en particular, de nuestros alumnos. Los problemas de modelización, dentro del marco de la educación matemática realista, se convierten en una herramienta importante para este fin. En esta comunicación describimos el diseño y la implementación de una actividad piloto de modelización con alumnos de 4ºESO, como primer paso para la introducción de este tipo de tareas en la programación de la asignatura.

The growing importance of skills in our education system emphasizes the need not only of methodological changes in the teaching of mathematics in compulsory secondary education, but also to design new tools to develop the basic competences in general and mathematical competence in particular our students. The problems of modelling, in the context of realistic mathematics education, become an important tool for this purpose. In this paper we describe the design and implementation of a pilot activity modelling with students aged 15-16 as a first step in the introduction of this type tasks in the programming course.

Keywords: Educación secundaria, tareas de modelización.

Secondary education, modeling tasks

1 Introducción

En el Real Decreto 1631/2006 (anexo I, pp. 686-687) se establece que la competencia matemática consiste en "la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre sus aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y el mundo laboral". En el informe PISA se define la competencia matemática (mathematical literacy en el original en inglés) como "una capacidad del individuo para identificar y entender las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos", por tanto más relacionada con el "saber aplicar matemáticas", que con el "saber matemáticas" ([5]).

Recogemos a continuación los tres primeros objetivos de la enseñanza de las Matemáticas para la etapa de la ESO (Decreto 112/2007 del 20 de junio, recogido en el DOCV número 5562 del 24.07.2007) para señalar la importancia de presentar los problemas de matemáticas en situaciones reales, permitiendo poner el conocimiento de nuestros alumnos en contexto y por tanto favoreciendo el desarrollo de la competencia matemática, tal y como la hemos definido anteriormente, alejándonos de los problemas rutinarios de las clases tradicionales donde la situación que se plantea es un mero disfraz para un problema puramente matemático ([1]):

- 1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana, con el fin de comunicarse de manera clara, concisa y precisa.
- 2. Aplicar con soltura y adecuadamente las herramientas matemáticas adquiridas a situaciones de la vida diaria.
- 3. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

En las actas del ICMI XIV ([2]) se habla de la modelización matemática como "el proceso de resolución de un problema del mundo real", y se dan las claves y las nociones necesarias para entender este proceso, que queda resumido en estas sietes fases (sobre las fases que conforman el ciclo de modelización, se puede ver en detalle en [3] y [9]):

- 1. Se plantea una situación del mundo real.
- 2. Se simplifica, estructura y se hace más precisa la situación, desembocando en la formulación de un problema y el establecimiento de un modelo real.
- 3. Se matematiza el modelo real, es decir, se identifican los contenidos matemáticos presentes en el modelo real, para construir un modelo matemático de la situación original.
- 4. Se resuelve el modelo matemático.
- 5. Se traslada e interpreta la solución matemática obtenida a la situación real original.
- 6. Se valida la solución en relación con el contexto real al que pertenece el problema.

7. En el caso de que la solución matemática sea validada, se comunican los resultados finales. En caso contrario, se vuelve a comenzar el proceso, reformulando parcial o totalmente los modelos planteados.

Teniendo en cuenta lo expuesto, decidimos plantear una primera prueba piloto con el fin de observar las actuaciones de alumnos de 4º ESO, evaluar su competencia matemática, en términos de su capacidad para "matematizar", y recoger sus impresiones, al enfrentarse por primera vez a un problema de modelización. Esta información nos arrojará luz a la hora de dar los primeros pasos en la introducción, en cursos posteriores, de la modelización en la programación diaria de la asignatura. Tomando como referencia inicial la idea de los "Proyectos Matemáticos Realistas" ([17], [18] y [15]) y los "Proyectos de aula" ([20] y [21]), diseñamos una actividad consistente en la resolución de un problema de modelización, en el contexto escolar, que lleva por título, "Optimización del espacio y los recursos humanos en el comedor escolar".

2 Metodología

Durante las tres últimas semanas del curso se propuso a un pequeño grupo de seis alumnos de una clase de 4°ESO (cuatro chicas y dos chicos), escogidos de entre aquéllos que ya habían superado con éxito las evaluaciones preceptivas (según la Programación didáctica y el PCC del centro), que participaran, de forma voluntaria, en una actividad dentro de la asignatura de Matemáticas. Señalar que se trata de un centro privado, de los alrededores de la ciudad de Valencia, donde los alumnos provienen de familias con un nivel económico y cultural medioalto. Previamente se pidió permiso a la dirección del Colegio para poder llevar a cabo esta práctica y se contó en todo momento con el apoyo y la colaboración del Jefe del Departamento de Ciencias. En este caso, el profesor adoptó también el papel de investigador.

La actividad consistía en la resolución de un problema de modelización, diseñado siguiendo las orientaciones recogidas en el LEMA-Project ([8]) y en las Modelling Eliciting Activities ([9] y [10]), que cumplía con las siguientes características (ver también el esquema de clasificación de las tareas de modelización de [11]):

- Pertenecer a un contexto real, cercano a los alumnos, con datos auténticos.
- Donde el conocimiento matemático implicado en la resolución del problema no estuviera especificado.
- Donde los alumnos tuvieran que explorar previamente la situación, seleccionando y recogiendo la información relevante, buscando distintas estrategias de resolución y planteándose nuevas preguntas, sin tener que seguir un procedimiento proporcionado previamente.
- Con solución abierta, no única ni estipulada de antemano, que tiene que ser interpretada y validada en relación con la situación real original.

Se trataba pues de un problema complejo, donde se pretendía que los alumnos, trabajando de manera cooperativa, dieran respuesta a la pregunta que se les planteaba: cuál es la mejor distribución de los monitores en los distintos espacios del Colegio a lo largo del tiempo que dura el comedor escolar. Para ello debían centrarse en los aspectos matemáticos del problema, seleccionar aquellas herramientas, de entre las que han aprendido a lo largo de la ESO, necesarias para su resolución matemática, interpretar y validar la solución obtenida en el marco de la

situación real en que se sitúa el problema, y finalmente exponerla, de forma argumentada, al profesor y al resto de compañeros.

Tras la presentación de la práctica, los alumnos se dividieron en dos grupos (formados a su elección por dos chicas y un chico cada uno) que llamaremos a partir de ahora grupo A y grupo B. A cada grupo se le entregó un pequeño dossier, donde se recogía el enunciado y el objetivo del problema, junto con una serie de cuestiones, a modo de guión de prácticas, acompañadas de fotografías y descripciones que facilitaran su comprensión y las hicieran más amenas. Se les daba total libertad para dar respuesta al problema. Para ello podían seguir las cuestiones planteadas, de carácter orientativo, o bien, tomar ellos mismos la iniciativa y abordar el problema según les pareciera.

Se les pidió asimismo que llevaran un diario o porfolio en el que fueran detallando los avances y dificultades que pudieran encontrarse. Podrían trabajar durante las horas correspondientes a la asignatura de Matemáticas, pero también en horario extra-escolar, fijándose los viernes, al terminar las clases, como momento en el que realizar una pequeña reunión con el profesor-investigador (de entre diez y quince minutos de duración) para plantear las dudas que hubieran surgido durante la semana (también se llevaron a cabo otras consultas con el profesor, aparte de las entrevistas formales de los viernes). En este caso el papel del profesor es el de orientador, sin dar más pistas que las meramente necesarias, y solo ante un auténtico bloqueo de los alumnos.

3 Descripción del problema

Durante el tiempo que dura el comedor escolar (desde que van terminando las clases de la mañana en los diferentes niveles hasta que empiezan las clases de la tarde) los quince monitores con los que cuenta el colegio deben encargarse, no solo del control de los comedores sino también de la vigilancia de los patios de recreo. Con cuatro comedores y tres patios de recreo distintos, donde se van repartiendo los alumnos a lo largo de dos horas y media, el problema de buscar la distribución óptima de los monitores se convierte en una tarea nada trivial.

La primera cuestión que se plantea en el dossier sugiere a los alumnos que seleccionen y organicen todas aquellas variables que puedan ser relevantes para la resolución del problema (número de alumnos en cada comedor, edades, número de monitores disponibles actualmente, horarios, espacios utilizados, etc.).

La segunda cuestión aborda la problemática de la vigilancia de los patios de recreo, especialmente en el conocido como "patio Grande" (es el único de los tres patios que no tiene forma rectangular). Esta cuestión se basa en el denominado "Problema de las Galerías de Arte", en el que se pretende determinar el mínimo número de puntos de un polígono que son suficientes para ver (vigilar) a todos los restantes. Para ello es necesario que se proceda a su parcelación, debiendo escoger previamente la forma geométrica más conveniente que deben tener estas parcelas, que tendrán que ser vigiladas por el menor número posible de monitores.

La tercera cuestión plantea a los alumnos la necesidad de distribuir de una manera óptima los monitores a lo largo del tiempo, en particular en el intervalo en el que están ocupados los cuatro comedores de manera simultánea. La distribución óptima se puede obtener mediante un reparto proporcional entre el número de monitores y el número de alumnos, o minimizando el ratio, número de alumnos por monitor, en cada comedor.

Por último, y a partir del planteamiento y resolución de las anteriores cuestiones, los alumnos podrán llegar a dar respuesta a la pregunta principal del problema: ¿cómo distribuiríais a los



Figura 1: Vista del patio "Grande".

monitores en los distintos comedores y patios a lo largo de todo el período de uso del comedor escolar?

No se trata por tanto de un problema donde el alumno deba aplicar unas "matemáticas complejas", más bien al contrario, las herramientas matemáticas que deben utilizar en su resolución podríamos considerarlas básicas, unas "matemáticas sencillas" ([6]): recogida y tratamiento de la información en la primera cuestión; parcelar mediante el uso de figuras geométricas, en la segunda; reparto proporcional, variación funcional, distribuciones estadísticas,..., en la tercera; estimaciones, tablas y gráficos para la respuesta final. La dificultad de este problema estriba, como veremos a continuación, en detectar estas matemáticas y en proporcionar los argumentos necesarios que respalden las estrategias y decisiones tomadas.

4 El proceso de resolución

PRIMERAS DIFICULTADES

La primera impresión de ambos grupos, transmitida durante la presentación del trabajo, es que se trataba de algo "fácil", pero tras la primera semana de trabajo, esta impresión cambió. Durante la primera entrevista con el profesor comentaron que el problema no era tan sencillo como les había parecido en un primer momento. No tenían una estrategia clara con la que afrontar un problema tan alejado de aquellos en los que habían sido entrenados durante el curso. Se evidenció una falta de transferencia entre las matemáticas escolares y la matematización de problemas reales.

Ambos grupos comentaron también que les costaba ver las matemáticas en el problema, debido a que las herramientas matemáticas que debían utilizar no se estipulaban explícitamente. Esto resultó especialmente llamativo dado que este tipo de dificultades son difíciles de detectar con los problemas tradicionales, donde suele estar bastante claro a priori que tipo de matemáticas

hay que utilizar para su resolución, debido a su organización en tipologías.

El grupo B decidió intentar dar respuesta directamente a la cuestión principal del problema, sin detenerse en las cuestiones previas sugeridas en el dossier. Cuando se lanzaron a esta tarea se dieron cuenta que era muy difícil de abordar. Fue interesante su reacción, pues comprendieron que un problema debe ser muchas veces simplificado y resuelto por partes antes que en su totalidad. Vieron entonces que era más aconsejable tratar por separado el tema del patio y de los comedores y posteriormente unirlo todo.

Fue necesario, pues así lo demandaron los dos grupos, proporcionar unas mínimas aclaraciones que les permitieran ponerse en marcha y salir del bloqueo inicial en el que se encontraban. De este modo se pusieron a trabajar en las tres cuestiones previas recogidas en el dossier.

Respecto a la recogida de información (primera cuestión del dossier), ambos grupos se limitaron a pedir en la Secretaria del centro el número de comensales por grupo y los horarios aproximados de comida. No vieron necesario la organizaron de los datos en tablas o gráficas. Solo el grupo B pidió permiso para acompañar a los monitores durante un día de trabajo y poder contrastar in situ la información.

La búsqueda del mínimo número necesario de monitores para vigilar el patio Grande (segunda cuestión) tampoco resultó ser un problema trivial. Fue necesario realizar un relectura conjunta con ambos grupos de esta problemática y orientarles en la forma más conveniente de parcelar el patio. El grupo A hizo un primer intento utilizando sectores circulares:

"Nuestra primera idea fue dividir el patio grande en sectores circulares. Nos dimos cuenta de que esta idea no sería efectiva, ya que quedaban zonas sin cubrir, ángulos muertos sin vigilancia" (extracto del diario del alumno del grupo A)

También hubo dificultades en la selección de los criterios a tener en cuenta a la hora de decidir la distribución óptima de los monitores en los distintos comedores (tercera cuestión). Sus primeras ideas eran difíciles de manejar (por ejemplo, edad de los niños, tamaño del comedor, número de mesas, alumnos por mesa y por comedor,..., muchos criterios a la vez):

"Otra vez, al igual que cuando tratamos el tema de los patios, empezamos teniendo en cuenta factores subjetivos (como la edad) que nos dificultaron la división de monitores ya que en unos comedores habían más monitores que en otros sin que pudiéramos establecer una regla objetiva y general, además necesitábamos muchos monitores" (extracto del diario del alumno del grupo A)

Primeros resultados

Ya finalizada la segunda semana, las ideas estaban mucho más claras y el trabajo muy adelantado. Ambos grupos habían llegado finalmente, y tras varios intentos, a la conclusión de que la manera más sencilla de parcelar el patio era mediante su triangulación, es decir, dividiéndolo en triángulos, colocando los monitores en sus vértices, de tal manera que no coincidieran dos o más monitores en los vértices del mismo triángulo:

"Finalmente decidimos dividir el patio en triángulos y colocamos a los monitores en los vértices de manera que cada monitor controlara los triángulos que compartieran ese vértice. Intentamos que los monitores no compartieran ningún triángulo para obtener así el mínimo número de monitores, pero aun así se solaparon dos de ellos, ya que no pudimos triangular de otra manera" (extracto del diario del alumno del grupo A)

Además incluyeron la posibilidad de introducir un monitor de apoyo, que en el caso de que los monitores de vigilancia tuvieran que abandonar su puesto por cualquier circunstancia, pudiera

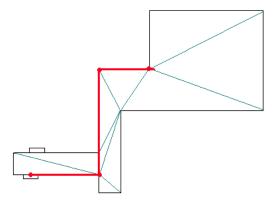


Figura 2: Mapa del Patio Grande donde se situan los monitores de vigilancia y la ruta del monitor de apoyo, recogido en el diario del alumno del grupo A.

relevarlos, y una ruta óptima de vigilancia para este monitor:

"En todo el desarrollo anterior los monitores permanecen en una posición estática, sin moverse pero pensamos que para ser más eficientes el monitor de apoyo del patio grande podría estar moviéndose. Diseñamos una ruta óptima para que el monitor pasara por los tres puntos donde habíamos establecido el resto y por la puerta del patio anexo, en el menor recorrido posible, para estar cerca de los monitores el mayor tiempo posible. Así el monitor de apoyo relevaría al que tuviera que irse y quedaría otra vez todo el espacio vigilado" (extracto del diario del alumno del grupo A)

Sin embargo, a ninguno de los grupos se les ocurrió ir al patio y comprobar si su solución sobre el papel era válida en la realidad. Una de las alumnas del grupo A comentó que ciertamente había observado como los monitores se situaban aproximadamente en los puntos que ellos habían establecido en su estudio, y otra alumna añadió que no se había tenido en cuenta otros factores como son los árboles o palmeras que pueden entorpecer la visión de los monitores. Llegaron a la conclusión de que tener en cuenta estos factores puede dificultar mucho el problema y que a veces es necesario un proceso de simplificación (fase de simplificación) para poder abordarlo, aunque una vez resuelto, se hace necesario volver al contexto real para comprobar la solución obtenida (fase de validación).

Respecto a la tercera cuestión, se propusieron estrategias distintas a la hora de distribuir a los monitores en los comedores. El grupo A sumó los comensales de los cuatro comedores y los dividió entre los quince monitores. Tocaban aproximadamente a 36 alumnos por monitor. Después, en cada comedor, agruparon los alumnos de 36 en 36 para ver cuántos monitores necesitaban:

"Se nos ocurrió sumar todos los alumnos que utilizan el comedor de 13.00 a 13.30 y dividirlo entre 15, que era el número de monitores que teníamos. La suma nos dio 540 alumnos que al dividirlo entre 15 obtuvimos 36. En un comedor teníamos 155 alumnos, en otro 138, en otro 63 y en el grande 206. En cada uno de los comedores, de manera independiente hicimos grupos de 36 alumnos, y a cada grupo, le correspondía un monitor. Así que obtuvimos 4, 3, 2 y 6 monitores respectivamente que suman 15 en total" (extracto del diario del alumno del grupo A)

El grupo B tomó como punto de partida que 15 monitores entre los cuatro comedores tocan a 3,75 monitores por comedor. A partir de aquí, fueron variando el número de monitores en

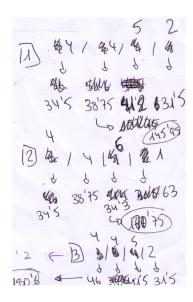


Figura 3: Borrador de los cálculos realizados por el grupo B para resolver la tercera cuestión.

cada comedor, y mediante tablas de valores, comparaban los distintos ratios alumnos/monitor, escogiendo aquella distribución que les daba una suma de los ratios de los cuatro comedores menor:

VALORACIONES FINALES

Finalmente quedaba entregar el diario del alumno, exponer las conclusiones finales y la valoración del trabajo realizado, alguno de cuyos aspectos pasamos a comentar a continuación:

- Reconocen que la actividad, en un principio, les ha desconcertado. Acostumbrados a una enseñanza tradicional, la actividad propuesta no se correspondía a su idea inicial de lo que es un problema de Matemáticas.
- Sin embargo, conforme han ido entrando de lleno en la tarea, se han ido enganchando más. Algunos alumnos han manifestado que por primera vez habían aplicado las matemáticas a cuestiones reales, descubriendo su utilidad, lo que permite un aprendizaje significativo y más duradero de los conceptos y procedimientos utilizados.
- Este tipo de actividades ha despertado sentimientos y actitudes positivas hacia las matemáticas que las actividades tradicionales difícilmente pueden conseguir: "Ha sido divertido pues resulta diferente a lo que hacemos habitualmente en clase y hemos comprobado que las Matemáticas sirven para cosas reales".
- Las mayores dificultades con las que se han encontrado en el proceso de resolución han sido, por un lado, la selección de las variables relevantes para la simplificación y construcción del modelo, y por otro, la relación de las herramientas necesarias para su resolución con los conceptos matemáticos trabajados a lo largo de la ESO.
- Por otra parte, es interesante observar como los alumnos han dado poca importancia al hecho de tener que validar las soluciones a las que han llegado en el contexto de la situación real original, quizás debido a que a esta última fase no es necesaria en los problemas tradicionales (la solución es correcta siempre que sea un número entero).

5 Conclusiones

El objetivo de este trabajo era realizar una prueba piloto para determinar si la modelización podía constituir una herramienta adecuada para evaluar la competencia matemática de alumnos de 4°ESO que han superado la asignatura y que por tanto, en términos de evaluación tradicional, si deberían de poseer dicha competencia.

Estas son algunas de las conclusiones a las que hemos llegado tras este primer trabajo:

- El trabajo en resolución de problemas que se viene realizando en la enseñanza más tradicional induce al alumno a la utilización de determinadas técnicas matemáticas que sabe le llevarán al éxito, sin que por ello se deduzca que las entiende ni que entienda porque las aplica. Nuestra experiencia parece mostrar que cuando el contexto matemático desaparece ya no está tan claro para el alumno que tipo de matemáticas debe utilizar y por tanto, pese a haber superado los criterios fijados por la enseñanza tradicional, esto no asegura que haya aprendido a "matematizar".
- Del mismo modo, la enseñanza tradicional deja de lado algunas de las fases del ciclo de modelización que son muy importantes a la hora de resolver problemas del mundo real, como son el proceso de simplificación y elección de la información relevante y la validación de las soluciones en la situación real original, precisamente donde los alumnos se han encontrado con mayores dificultades.
- Pensamos que la idea del trabajo basado en proyectos de modelización no es incompatible con la idea de un trabajo más tradicional en el aula, sino más bien complementario. El curriculum actual y el carácter propedéutico de la ESO en muchos centros nos obligan a tener en cuenta la preparación de nuestros alumnos de cara al Bachillerato, en detrimento de la finalidad de esta etapa como preparación para la vida real de nuestros alumnos.
- Por otra parte, el trabajo en este tipo de actividades no puede depender de la habilidad del profesor para orientar y dirigir el trabajo de los alumnos. La falta de experiencia y material adecuado para implementar este tipo de actividades en el aula puede resultar una dificultad añadida. Pensamos que la presentación de la actividad en un formato similar al utilizado en esta experiencia, el dossier, con el diseño de un problema cercano e interesante para los alumnos, cumpliendo con las características indicadas, y acompañado de un cuidado guión de prácticas, se hace necesario para su éxito.
- Aunque en nuestra experiencia hemos seleccionado a un pequeño grupo, este tipo de actividades debe estar abierta al mayor número posible de alumnos, incluyéndolas paulatinamente en el día a día de la asignatura, como parte de sus contenidos y objetivos, en este caso, aprender a matematizar (no solo la motivación interna del alumno por poder participar en una actividad nueva y estimulante, sino también la motivación externa que supone que sea también calificada y cuente para la nota).
- Por último, señalar como este tipo de tareas permite no solo que los alumnos trabajen y desarrollen la competencia matemática, sino también el resto de competencias básicas señaladas en el Real Decreto 1631/2006: la competencia en comunicación lingüística, que se trabaja mediante la elaboración del diario del alumno y la exposición final de los resultados; el tratamiento de la información y competencia digital, que se trabaja mediante la selección y organización de los datos necesarios para la resolución del problema que se les plantea y el uso de herramientas informáticas para facilitar esta tarea; la competencia

ciudadana, que se desarrolla con el trabajo cooperativo en grupo y el respeto a las ideas de los demás; la competencia para aprender a aprender y la autonomía e iniciativa personal; que se adquieren mediante la planificación y organización de estrategias de resolución de problemas no específicamente matemáticos.

Agradecimientos

Lluís Miquel Garcia Raffi es el coordinador del EICE MoMa de la UPV y quiere agradecer el apoyo de las ayudas PIME 2011/A09 y PID-DMA 2012.

Referencias

- [1] C. Alsina, Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿Cuántas tuvo enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. Revista Iberoamericana en investigación, 43, 85–101 (2007).
- [2] W. Blum y otros, ICMI STUDY 14: Applications and modelling in mathematics education- Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics*, **51** 149–171. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher (2002).
- [3] R. Borromero, Theorical and empirical differentiations of phases in the modeling process. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2) (2006).
- [4] Decreto 112/2007 del 20 de junio. Diari Oficial de la Comunitat Valencia (24 de julio 2007), núm 5562.
- [5] J.M. Goñi y otros, Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas. *Editorial Graó*. Barcelona (2010).
- [6] S. M. Iversen y C. J. Larson, Simple Thinking using Complex Math vs. Complex Thinking using Simple Math. A study using Model Eliciting Activities to compare students abilities in standardized tests to their modelling abilities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **38**(3) (2006).
- [7] Leiss y otros, The role of the situation model in Mathematical Modelling: Task analyses, student compentencies and teacher interventions. *Journal für Didaktik Didaktik*, **31**, 119–141. Springer Ed. (2010).
- [8] LEMA-Project http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php
- [9] R. Lesh y otros, Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In Kelly, A.E. & Lesh, R. (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, 591–645. New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates (2009).
- [10] R. Lesh y H. M. Doerr, Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. *Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates* (2003).
- [11] K. Maaß, Classification scheme for modeling task. *Journal für Didaktik Didaktik*, **31**, 285–311. Springer Ed. (2010).
- [12] Modeling-Eliciting Activities http://serc.carleton.edu/sp/library/mea/index.html
- [13] OCDE (2006). PISA 2006, Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. Santillana Educación. Madrid.

60 Referencias

[14] Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. Boletín Oficial del Estado (6 de noviembre 2007), **266**, 45381–45477.

- [15] Sierra y otros, Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria. Comunicación. JAEM (2011).
- [16] M. Sol, Proyectos Matemáticos en la ESO: cómo los evaluamos. UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 17, 105–111 (1998).
- [17] M. Sol, Projectes matemàtics a l'Educació Secundària Obligatioria. Tesis Doctoral (1998).
- [18] M. Sol, y J. Giménez, Proyectos matemáticos realistas y resolución de problemas (2004).
- [19] A. J. Giménez, L. Santos, J. P. da Ponte (coords) La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes, 35–57. Barcelona: *Graó Editorial*. Biblioteca de UNO, 2004
- [20] Grup Vilatzara, Proyectos matemáticos en la ESO: una actividad rica. UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 27, 21–36 (2001).
- [21] Grup Vilatzara Experiencias sobre proyectos e investigaciones matemáticas en secundaria. Revista Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas 46, 29–46 (2001).