MSEL

Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volumen 6(1), No. 10, 2013.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Generación de fractales a partir del método de Newton

María José Marín
Universitat de València
marinfer@uv.es

Fernando Giménez, Juan A. Monsoriu
Universitat Politècnica de València
fgimenez@mat.upv.es, jmonsori@fis.upv.es

Abstract

Un gran número de fractales conocidos, como los fractales de Julia y Mandelbrot, pueden generarse a partir de un método iterativo en el plano. En este trabajo presentamos un laboratorio virtual desarrollado como una interfaz gráfica de usuario (GUI) de Matlab que permite estudiar y visualizar en tiempo real la relación que existe entre los métodos iterativos de Newton de dos variables y la generación de fractales. El objetivo principal es que los estudiantes de asignaturas de Cálculo Numérico en Escuelas Técnicas adquieran las competencias que le permitan generar fractales e interpretar sus gráficas en términos de la velocidad de convergencia o divergencia de la sucesión de iterados.

A large number of fractals known, as Julia fractals and Mandelbrot, can be generated from an iterative method. In this paper we present a virtual laboratory developed as a Graphical User Interface (GUI) of Matlab that allows us to study and visualize in real time the relationship between Newton iterative methods of two variables and the generation of fractals. The main objective is to allow Technical School students in Numerical Computation subjects to acquire the skills to generate fractals and interpret their plots in terms of the convergence or divergence speed of the sequence of iterated.

Keywords: Laboratorio Virtual, Matlab, Fractal, Método de Newton.
Virtual Laboratory. Matlab, Fractal, Newton Method

1 Introducción

El uso de entornos visuales tiene una importancia cada vez mayor en la enseñanza, sobre todo, en las asignaturas de carácter técnico y científico siendo una buena herramienta para la transmisión de conocimientos y en donde la propia experiencia del estudiante adquiere una gran relevancia dada su interactividad ([1] y [2]). En particular Los laboratorios virtuales permiten trabajar de manera sencilla con modelos que representan fenómenos matemáticos y físicos, de manera que el alumno puede llegar a comprenderlos más fácilmente. De este modo, el conocimiento científico que subyace bajo cada situación modelizada queda lo suficientemente recalcado, permitiendo una transición simple y directa entre el concepto y el modelo cognitivo. Además, el estudiante es parte activa de este proceso ya que puede modificar las variables de entrada del modelo cuando lo considere necesario, analizando su influencia en los resultados finales [3].

El laboratorio virtual que presentamos, NFRACTAL, ha sido desarrollado a partir de las posibilidades que ofrece la interfaz gráfica de usuario (GUI) del paquete matemático multifunción MATLAB [4, 5], el cual permite implementar cualquier tipo de formulación, convirtiéndolo en una herramienta idónea para múltiples y variadas disciplinas [6, 7]. El código generado, además, puede convertirse de forma casi automática en un laboratorio virtual interactivo en red. De cara al usuario, el entorno GUI posibilita una gran interactividad, sin que para ello se requiera de conocimientos de programación en MATLAB, lo que redunda en una mayor sencillez de uso y motivación para el estudiante.

El objetivo del laboratorio virtual objeto del presente trabajo, consiste en el estudio de los fractales generados a partir del método iterativo de Newton en el plano. La función del método iterativo, el jacobiano, el dominio, su rango, la resolución y la paleta de colores utilizada son definidos por el usuario que lleva a cabo el experimento virtual. Como resultado se obtiene una representación gráfica del fractal generado. Mediante el uso de esta herramienta se pretende conocer cómo se puede generar un fractal a partir del método iterativo de Newton para dos variables, interpretar la gráfica obtenida en términos de la velocidad de divergencia de la sucesión de iterado, apreciar las propiedades de autosimilitud, irregularidad y simetría a escala y la obtención de imágenes de gran belleza estética.

2 Fractales y métodos de Newton

El término "fractal" proviene del latín fractus, que puede traducirse como roto, fragmentado o fracturado y fue acuñado por el matemático francés Mandelbrot. Los fractales pueden considerarse como ciertas formas geométricas que presentan "simetría de escala" [8, 9], es decir, su estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diversas escalas. Son objetos que presentan autosimilitud, recursividad, infinitud, una estructura compleja a cualquier escala y suelen tener forma demasiado irregular para ser descritos geométricamente de forma tradicional. Además su dimensión geométrica no es entera. La autosimilitud implica que el aspecto que tiene el fractal no va a depender del observador sino que si se van haciendo sucesivas ampliaciones las gráficas obtenidas son exactamente iguales a la inicial. Podemos decir que las partes se parecen al todo. Los fractales más conocidos están definidos en el plano real a partir de un método iterativo. Por ejemplo los llamados conjuntos de Julia se generan a partir de la sucesión de iterados definida por:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n = 0, 1, \ldots$$

donde c es un número complejo dado. Dado z_0 un número complejo cualquiera se le asigna un color que dependa de la velocidad con que la sucesión de iterados converja o diverja a infinito (z_n). De esta manera podemos generar para cada rectángulo del plano complejo una figura que, en muchas ocasiones, resulta ser un fractal. Mandelbrot generó otros fractales fijando z_0 y trabajando en función de los valores complejos de c.

En un trabajo previo varios de estos autores presentaron un laboratorio virtual que permite generar y visualizar fractales de tipo Julia y Mandelbrot generales en el plano [10]. En este trabajo consideraremos la generación de fractales construidos a partir del método iterativo de Newton:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - J_F\left(\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right)^{-1} - F \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

donde F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$.

A cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se le asigna un color que dependa de la velocidad con que la sucesión de iterados $\big((x_n, y_n)\big)$ converja o diverja a infinito. De la misma manera que ocurría con los conjuntos de Julia o Mandelbrot podemos generar para cada dominio rectangular del plano una figura que, en muchas ocasiones, resulta ser un fractal.

El laboratorio virtual está pensado para usarse como una actividad más en las sesiones prácticas en aulas informáticas de asignaturas de métodos numéricos en donde se estudien métodos iterativos aplicados a la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. El alumno puede plantear el método iterativo de newton correspondiente a una función de dos variables y obtener el fractal que genera, si es el caso.

3 El laboratorio virtual

El aspecto gráfico del laboratorio virtual NFRACTAL puede verse en la Figura 1. La interfaz de usuario consta de dos partes principales. En la parte lateral izquierda se encuentran los campos donde el usuario introduce los parámetros de entrada que permiten definir el fractal y la forma de visualizarlo. En la parte lateral derecha se encuentra una ventana gráfica en donde se genera la imagen correspondiente. Los parámetros de entrada de la estructura son:

- Función: Tiene dos entradas correspondiendo a f_1 y f_2, las componentes del campo escalar F. Las operaciones matemáticas de cada una de ellas se introducirán de la manera habitual pero con un punto delante, es decir $.*$, $.\backslash$ y $.\hat{}$ en vez de las habituales $*$, $\backslash$ y $\hat{}$. Las variables serán necesariamente x e y.

- Jacobiano: Las entradas $D_1 f_1$, $D_2 f_1$, $D_1 f_2$ y $D_2 f_2$ corresponden a las derivadas parciales de las componentes del campo escalar F. El primer subíndice hace referencia a la variable y el segundo a la componente del campo escalar.

- Parámetros: Nmax es el número de iteraciones que se realizan. X_{min}, X_{max}, Y_{min} e Y_{max} indican el rango de las dos variables que se van a visualizar en la gráfica, $ResX$ y $ResY$ indica el número filas y columnas que usaremos para generar la gráfica, es decir la resolución. Colores despliega un menú que permite elegir entre los mapas de colores. Los disponibles son: *jet*, *gray*, *winter*, *hot*, *cool*, *autumn*, *bone* y *hsv*.

Por último, el botón PLOT ejecuta el laboratorio virtual.

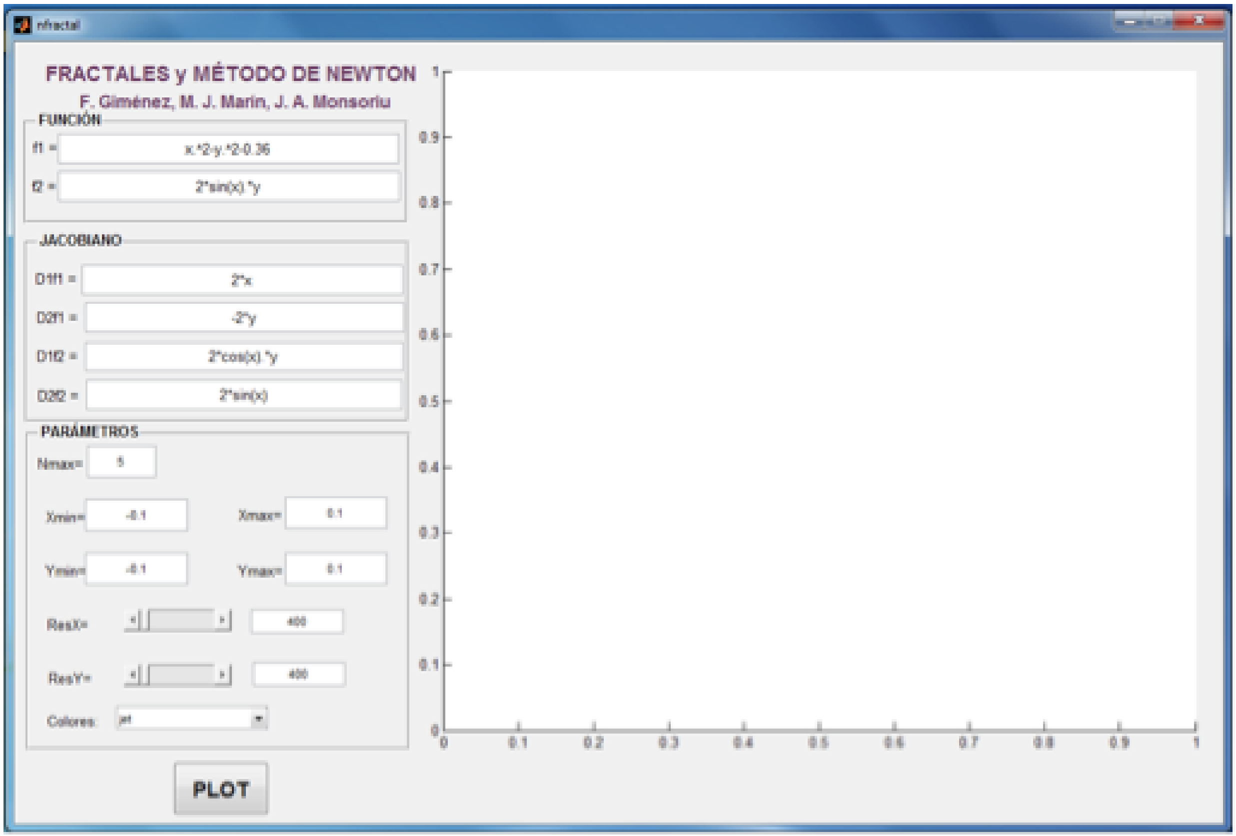

Figura 1: Aspecto gráfico del laboratorio virtual NFRACTAL.

El procedimiento que utilizamos para la generación del fractal es el siguiente: para cada punto (x_0, y_0) del rectángulo $[X_{min}, X_{max}] \times [Y_{min}, Y_{max}]$ del plano se obtiene el valor de

$$\exp(-\|(x_{N\max}, y_{N\min})\|),$$

siendo $\|\cdot\|$ la norma euclídea. Usando la sentencia *pcolor* de Matlab se obtiene la gráfica de pseudocolores que relaciona ambos valores:

$$(x_0, y_0) \to \exp(-\|(x_{N\max}, y_{N\min})\|).$$

Junto con la imagen obtenida también se muestra una barra mostrando la escala de colores con valores numéricos, entre 0 y 1, lo que nos permitirá interpretar los fractales en términos del orden de divergencia de la sucesión de iterados. Obsérvese que el valor $\exp(-\|(x_{N\max}, y_{N\min})\|)$ se encuentra en el intervalo $]0, 1]$ y que cuando el vector $(x_{N\max}, y_{N\min})$ está más alejado del origen (la sucesión diverge más rápidamente a infinito) su valor se aproxima cada vez más a cero.

La siguiente figura, Figura 2, muestra un ejemplo. Se trata del fractal generado a partir del método iterativo de Newton aplicado a $F = (f_1, f_2)$ donde

$$f_1 = x^2 - y^2 + .36,$$
$$f_2 = 2\text{sen}(x)y,$$

obtenido con $x, y \in [-0.1, 0.1]$ y usando una resolución de 400×400.

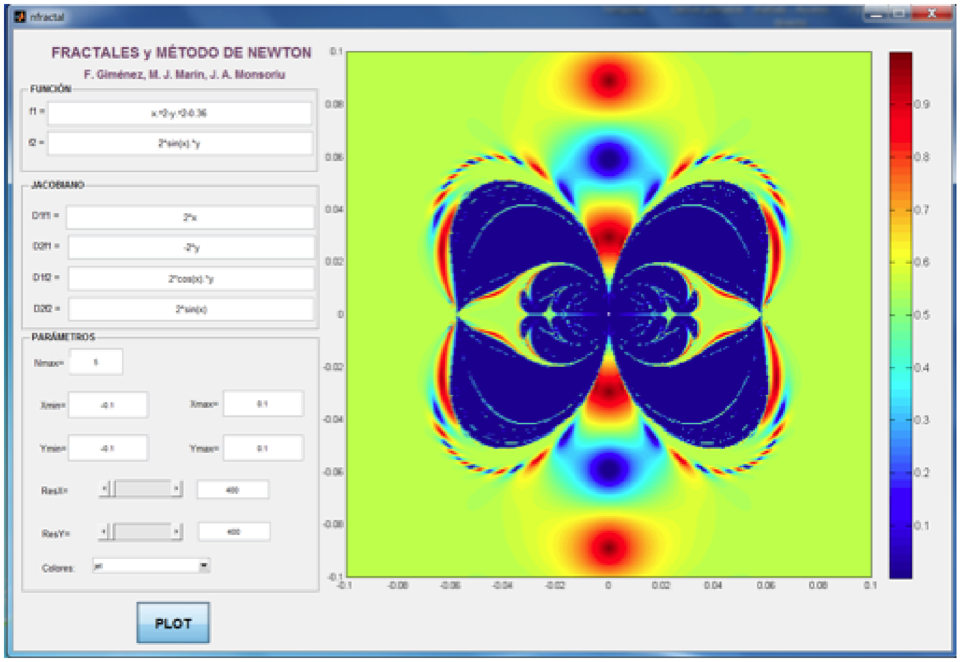

Figura 2: Fractal correspondiente a $F(x, y) = \big(x^2 - y^2 + 0.36, 2\mathrm{sen}(x)y\big)$ para $x, y \in [-0.1, 0.1]$.

En la representación gráfica se puede apreciar que conforme nos vamos acercando al azul más oscuro los puntos correspondientes representan los valores de los (x_0, y_0) para los cuales la sucesión de iterados diverge más rápidamente y los que se acercan al rojo donde divergen más lentamente o convergen. En la Figura 3 se muestra una ampliación para observar esto y la autosimilitud del fractal.

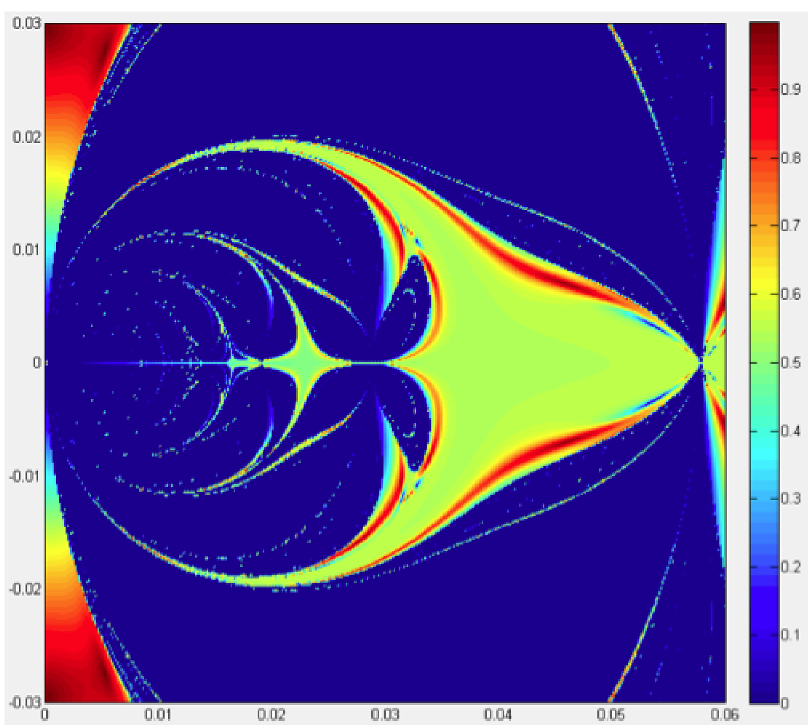

Figura 3: Ampliación del fractal del ejemplo de la Figura 2.

4 Conclusiones

El laboratorio virtual NFRACTAL permite generar en tiempo real fractales a partir a partir del método de Newton en el plano, estudiar sus propiedades, establecer cuál es el comportamiento de la sucesión de iterados para valores dados de (x_0, y_0) según el caso, interpretar la gráfica obtenida en términos de la velocidad de divergencia de la sucesión de iterados y apreciar las propiedades de autosimilitud, irregularidad y simetría a escala.

Los alumnos disponen asimismo de la posibilidad de estudiar aquellas regiones en donde interese observar estos fenómenos. Además permite discernir de forma rápida, a partir de la imagen obtenida, el comportamiento de la sucesión de iterados para valores dados del término inicial de la sucesión de iterados. Como objetivo secundario, es posible lograr imágenes de gran belleza estética.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (FIS2011-23175), la Generalitat Valenciana (PROMETEO2009-077) y la Universidad Politécnica de Valencia (PAID-05-11). Los autores agradecen al Instituto de Ciencias de la Educación de la Universitat Politècnica de València, programa de Equipos de Innovación y Calidad Educativa, por el apoyo dado al Equipo de Modelización Matemática y Aprendizaje Colaborativo (MoMa).

Referencias

[1] T. Duffy y K. Jonassen. Constructivism and the technology of instruction. Lawrence Erlbaum Associates. Hilsdale, New Jersey, USA, (1992).

[2] A. Vidaurre, J. Riera, M.H. Jiménez y J.A. Monsoriu. Contribution of simulation in visualizing physics processes, Comput. Appl. Eng. Educ., Vol. 10, 45-49, (2002).

[3] C. Depcik y D.N. Assanis. Graphical user interfaces in an engineer in educational environment, Comput. Appl. Eng. Educ., Vol. 13, 48-59, (2005).

[4] The Mathworks, INC. Matlab R2008a User's Guide. The Mathworks, INC. Natik, MA. USA, (2008).

[5] Página web con recursos sobre GUI de MatLab http://www.matpic.com/

[6] A. Cordero Barbero, E. Martínez Molada, J. L. Hueso Pagoaga y J. R. Torregrosa Sánchez. Métodos Numéricos con MATLAB. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, España, (2005).

[7] J. L. García-Santander, F. Giménez y G. Rubio. Prácticas de Métodos Matemáticos. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, España, (2009).

[8] H. Peitgen, H. Jürgens y D. Saupe. Chaos and fractals. News frontiers of the science, Ed. Springer Verlag, Hardcover, (2004).

[9] J. Barrallo. Geometría fractal. Algorítmica y representación, Ed. Anaya, Madrid, España (1992).

[10] F. Giménez, J.A. Monsoriu, J.Q. Cuador y M.J. Marín. Métodos iterativos y fractales con Matlab, Actas del XIX CUIEET, pp. 245-255, Barcelona, (2011).