MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

Modelling in Science Education and Learning
Volumen 6(2), No. 11, 2013.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Grafos hamiltonianos en el diseño de viajes

Cristina Jordán Lluch, Esther Sanabria-Codesal
Universitat Politècnica de València
cjordan@mat.upv.es, esanabri@mat.upv.es

Abstract

La existencia y, en su caso, localización de caminos con diferentes propiedades es un tema recurrente en la teoría de grafos. Uno de estos problemas consiste en encontrar recorridos que pasen por varios puntos, una sola vez, empezando y terminando en un mismo lugar. La parte de la teoría de grafos que resuelve este problema es la teoría de ciclos hamiltonianos. Si no exigimos coincidencia de los extremos del recorrido obtenemos una variante de este problema, que podemos resolver con lo que se conoce como caminos hamiltonianos.
En el presente trabajo centramos nuestra atención en problemas con contextos reales, relacionados con el diseño de itinerarios turísticos en un viaje, cuya solución se obtenga, tras una modelización adecuada, localizando este tipo de caminos. Los abordaremos estudiando transformaciones adecuadas del grafo G elegido para representar la situación planteada, de manera que, del análisis de la existencia de ciclos hamiltonianos en el nuevo grafo auxiliar G', podamos determinar la existencia de caminos hamiltonianos en el grafo G y, caso de existir, encontrar al menos uno.

The existence and, if applicable, the location of paths with given properties is a topic in graph theory. One of these problems is to find routes through all points, only once, starting and ending at the same node. This problem is known in Graph Theory as the theory of Hamilton cycles. If the concurrence of the initial and final ends is not required then we have a version of this problem known as the Hamiltonian path problem.
In this article we focus on some real situation problems related to design tourist routes on a journey. Their solutions are obtained after a proper modelling. We study appropriate transformations of the graph G chosen to represent the situation so that we could determine the existence of Hamiltonian paths in the graph G and, if available, to find at least one of them from the analysis of the existence or not of Hamiltonian cycles in the new auxiliary graph G'.

Keywords: Grafos, ciclo hamiltoniano, camino hamiltoniano, grafo hamiltoniano, modelización.
Graphs, Hamiltonian cycle, Hamiltonian path, Hamiltonian graph, modelling

1 Introducción

En este trabajo presentamos problemas de contexto real resolubles aplicando la parte de la teoría de grafos conocida como grafos hamiltonianos, centrándonos en la parte relativa a caminos hamiltonianos. Existen algoritmos específicos para la obtención de dichos caminos, como por ejemplo los de F. Rubin [6], R.Bellman [1] M. Held y R.M. Karp [3]. Nuestro objetivo es poner de relieve la importancia de la modelización y de como utilizar la teoría de ciclos hamiltonianos en la obtención de caminos hamiltonianos. Por ello, proponemos problemas en los que, tras transformarlos en problemas de la teoría de grafos, encontramos una estructura similar que nos conduce a analizar la existencia de caminos hamiltonianos partiendo de diferentes condiciones en sus extremos. Estas condiciones determinan la definición de un grafo auxiliar en el que la existencia de ciclo hamiltoniano caracteriza la existencia de camino hamiltoniano. Utilizamos el programa de cálculo simbólico Mathematica para obtener la solución en cada caso.

Aunque la aplicación de la teoría de grafos se ha extendido rápidamente en los últimos años, siendo ampliamente utilizada en diferentes ramas de la ciencia, la introducción de su estudio como materia obligatoria en los planes de estudio de las diferentes ingenierías no ha ido pareja a esta expansión. Por ello, dedicamos la segunda sección a recordar la teoría básica necesaria para poder seguir el tema con facilidad, presentando en las secciones 3 y 4 diferentes enunciados y sus soluciones. El software que utilizamos para la resolución de los diferentes problemas es el programa de cálculo simbólico Mathematica 6.

En relación a su estudio como asignatura reglada, comentar que parte de los problemas que proponemos son similares a los planteados y resueltos en las clases de la asignatura Estructuras Matemáticas para la Informática 2, obligatoria de quinto cuatrimestre (tercer curso) de la ETSI Informática de la Universitat Politècnica de València, en el plan de estudios de 2001, con 4.5 créditos asignados, (3 de teoría y 1.5 de laboratorio). La parte teórica que analiza la existencia y obtención de ciclos hamiltonianos se estudia en las clases de aula, donde el problema de los caminos hamiltonianos sólo se introduce. Es en las clases de laboratorio donde planteamos problemas cuya resolución pasa por la obtención de un camino hamiltoniano. El programa Mathematica permite encontrar con facilidad la solución a diversos problemas de los diferentes tipos analizados. Al incluirlos en nuestra práctica docente damos un valor añadido a este método, ya que la modelización incentiva el interés del alumnado y le ayuda a vislumbrar la amplia aplicabilidad de las matemáticas a la realidad.

2 Conceptos de grafos

Se llama grafo $G = (V, E)$, (ver [2], [4], [5]) a toda estructura formada por un conjunto no vacío, V, cuyos elementos son llamados vértices o nodos, y un conjunto E de pares no ordenados de elementos de V, llamados aristas. Se suele representar un grafo mediante un diagrama de puntos y líneas en el que los primeros representan a los vértices y una línea entre los puntos v_i y v_j representa la arista (v_i, v_j). Se llama camino a toda sucesión finita alterna de vértices y aristas, $v_1e_1v_2e_2 \dots v_{n-1}e_{n-1}v_n$, donde $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, en la que no se repite ningún vértice. En caso de que en la sucesión anterior los extremos v_1 y v_n coincidan y el resto de vértices sean distintos entre ellos y con v_1 y v_n , se le llama ciclo. Decimos que un ciclo es hamiltoniano si contiene a todos los vértices del grafo y, análogamente, un camino es hamiltoniano si pasa por todos los vértices del grafo. Un grafo se llama hamiltoniano si posee un ciclo hamiltoniano.

El análisis de los grafos hamiltonianos es, en términos generales, difícil, y aunque se conocen muchas condiciones necesarias, y otras muchas suficientes, no se conoce ninguna condición necesaria y suficiente aplicable a un grafo no dirigido cualquiera. Como un camino hamiltoniano es parte de un ciclo hamiltoniano nos encontramos con las mismas dificultades en el estudio de éstos.

Dada la relación entre camino y grafo hamiltoniano (si en un ciclo hamiltoniano eliminamos una arista obtenemos un camino hamilltoniano), una forma de abordar el problema de los caminos hamiltonianos es reducirlo a uno de ciclos hamiltonianos. En este sentido un conocido teorema ([2]) dice,

Teorema 1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Existe camino hamiltoniano en G si y sólo si $G' = (V', E')$ es hamiltoniano, siendo $V' = V \bigcup \{a\}$ y $E' = E \bigcup \{(a, v) \;\; v \in V\}$.*

El estudio de la demostración de este teorema, inmediata por otra parte, nos permite extender el resultado. La representación gráfica resulta de gran ayuda. En la Figura 1 se esboza el grafo G en el que buscamos camino hamiltoniano y el grafo G' en el que buscaremos ciclo hamiltoniano.

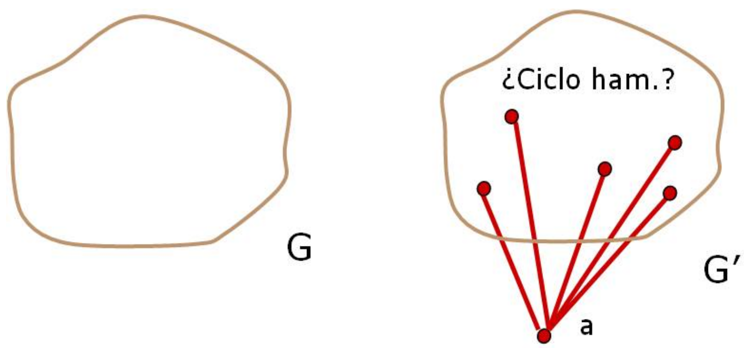


Figura 1: Esquema de los grafos G y G' respectivamente.

En la Figura 2 se muestra un esquema de la demostración del teorema. Supongamos que existe un camino hamiltoniano P en G de extremos u y w. Dicho camino se encuentra también en G', por lo que es suficiente añadir a P las aristas (u, a) y (a, w) para obtener un ciclo hamiltoniano en G'. Si existe ciclo hamiltoniano C en G', dada la definición del vértice a, en el ciclo C encontramos dos aristas (u, a) y (a, w) correlativas. Si las eliminamos obtendremos un camino hamiltoniano en G.

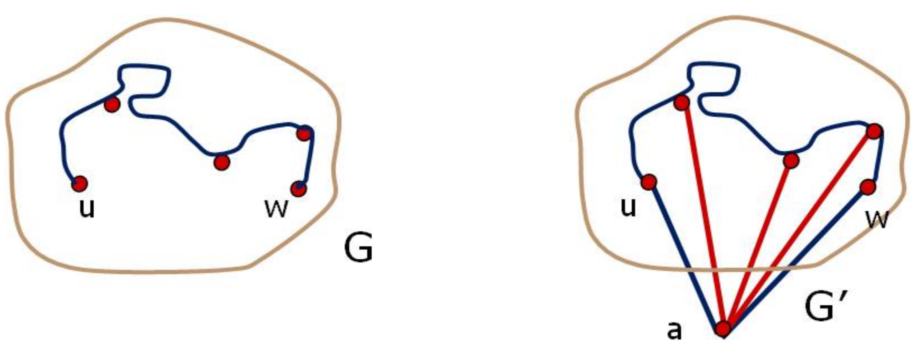
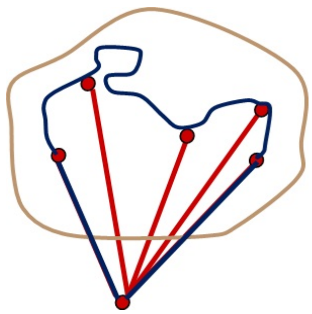


Figura 2: Esquema de un camino hamiltoniano en G y un ciclo hamiltoniano en G'.

El teorema anterior nos permite determinar la existencia o no de un camino hamiltoniano en un grafo G en función de la existencia de un ciclo hamiltoniano en un nuevo grafo G'. Pero, ¿y si fijamos los extremos del camino hamiltoniano? En ese caso el teorema no es, en general, aplicable, lo que nos lleva a retomar el problema y definir un nuevo grafo G' que se adapte a nuestra actual situación.

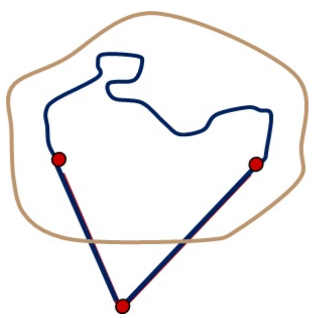
En las Figuras 3, 4, 5 y 6 se muestran grafos auxiliares que nos permiten resolver los diferentes problemas planteados.



Caso 1 (anterior):

¿Existe camino hamiltoniano en G cuyos extremos inicial y final sean dos vértices cualesquiera?

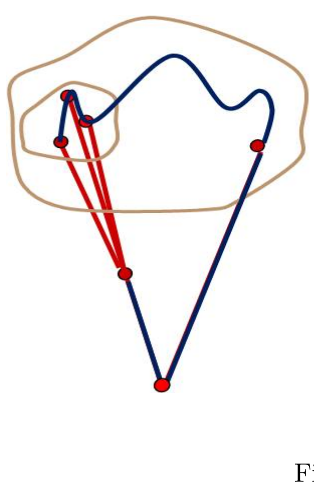
Figura 3: Grafo auxiliar útil para resolver el caso 1.



Caso 2:

¿Existe camino hamiltoniano en G cuyos extremos inicial y final sean dos vértices prefijados?

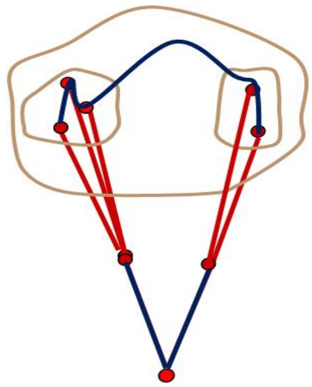
Figura 4: Grafo auxiliar útil para resolver el caso 2.



Caso 3:

¿Existe camino hamiltoniano en G cuyos extremo inicial pertenezca a un subconjunto de vértices, estando el extremo final prefijado?

Figura 5: Grafo auxiliar útil para resolver el caso 3.



Caso 4:

¿Existe camino hamiltoniano en G cuyos extremo inicial pertenezca a un subconjunto de vértices, y el extremo final a otro?

Figura 6: Grafo auxiliar útil para resolver el caso 4.

En la siguiente sección planteamos un problema en contexto real para cuya resolución utilizamos alguna de estas técnicas.

3 Primeros itinerarios para visitar Vietnam y Camboya

Nuestra agencia de viajes Hamiltonianos & Cia está especializada en organizar viajes por Asia. Nuestros últimos clientes disponen de tres semanas libres en las que desean visitar los siguientes lugares emblemáticos de Vietnam y Camboya: Hanoi, Ho Chi Min, Vinh, Da Nang, Nha Trang y Siem Reap. ¿Sería posible diseñar un recorrido que pase por todos ellos sin repetir ninguno?

Figura 7: Mapa de Europa y Asia.

El primer paso consiste en transformar el problema planteado en uno de grafos. Para ello consideramos $G = (V, E)$, donde los vértices de V representan las ciudades que nos interesa visitar y las aristas de E el conjunto de vuelos disponibles entre dos ciudades. Dado que si hay vuelo de la ciudad x a la y, también existe el vuelo en sentido contrario, el grafo será no dirigido. En la Figura 8 vemos sobreimpreso en el mapa la representación gráfica de G.

 ISSN 1988-3145

Figura 8: Grafo que modeliza los lugares a visitar y los posibles vuelos.

Nuestro objetivo es visitar todas las ciudades (vértices) sin repetirlas, empezando y terminando en lugares distintos, lo que, traducido a terminología de grafos, consiste en determinar si existe o no un camino hamiltoniano, y encontrar un ejemplo de éste en caso de existir. Observamos que no tenemos ninguna condición acerca de cuáles tienen que ser los extremos inicial y final del camino.

Se trata de un ejemplo de aplicación directa del Teorema 1, por tanto definimos un grafo auxiliar G' añadiendo un vértice a G y un nuevo conjunto de aristas incidentes en él y en el resto de vértices de G, es decir, añadimos las aristas (Ficticio, Hanoi), (Ficticio, Vinh), (Ficticio, Nha Trang), (Ficticio, Da Nang), (Ficticio, Ho Chi Min), (Ficticio, Siem Reap).

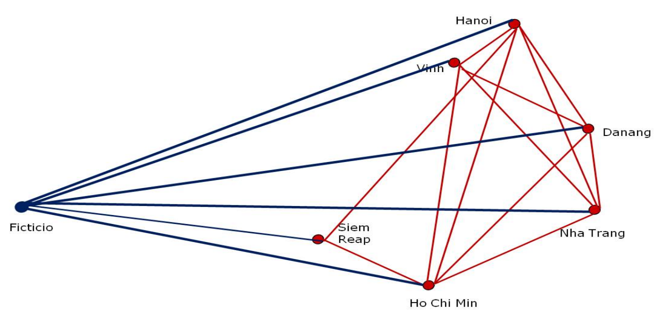


Figura 9: Grafo auxiliar G'.

La aplicación del programa Mathematica nos proporciona el siguiente ciclo hamiltoniano en G': Ficticio, Hanoi, Vinh, Nha Trang, Da Nang, Ho Chi Min, Siem Reap, Ficticio, de donde obtenemos el camino hamiltoniano (ver Figura 10): Hanoi, Vinh, Nha Trang, Da Nang, Ho Chi Min, Siem Reap.

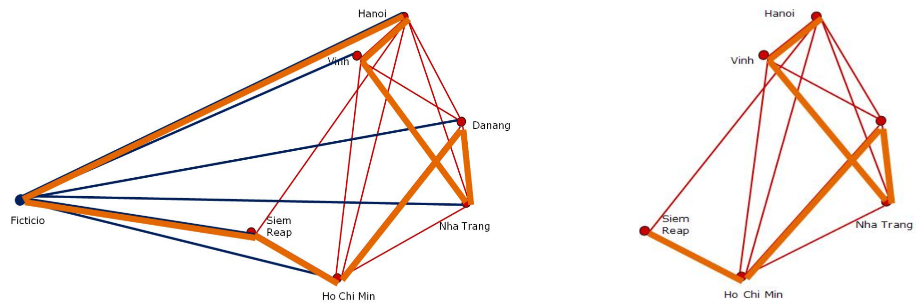


Figura 10: Ciclo hamiltoniano en G' y camino hamiltoniano en G.

Volviendo a la agencia, nos informan de que se acaba de recibir una llamada de nuestros clientes. Han oído que los primeros días de su viaje coinciden con un mercado popular que se celebra en Hanoi y los últimos con otro en Ho Chi Min, y quieren saber si podríamos arreglar el recorrido para que esas dos ciudades sean respectivamente comienzo y fin del viaje.

La solución que habíamos obtenido complace a nuestros viajeros solo en parte puesto que los extremos del camino encontrados eran Hanoi y Siem Reap. A fin de averiguar si existe otro que se ajuste mas a sus requerimientos, definimos un nuevo grafo auxiliar G'. En este caso utilizaremos el modelo considerado en la Figura 4 (Caso 2).

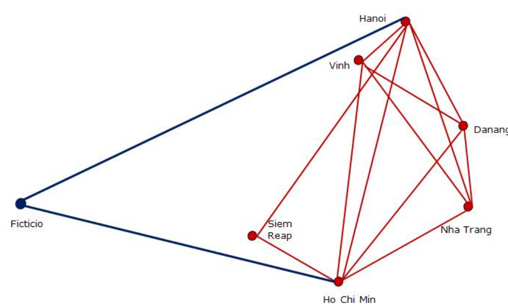


Figura 11: Grafo auxiliar G'.

El nuevo grafo G' no posee ciclo hamiltoniano (como podemos comprobar con Mathematica) y por tanto, según lo anteriormente comentado tampoco camino hamiltoniano. Así pues, no será posible dar una respuesta favorable a nuestros amigos.

4 Cambios en las ciudades a visitar

Los clientes han vuelto a la agencia y nos comentan que, dado que van a estar por el continente asiático bastantes días, han pensado que quizás fuera factible añadir algunas ciudades a las que se pueda acceder fácilmente con tren o autobús desde las elegidas en primer lugar. Nos sugieren Hoi An, Halong y Ninh Binh. Además como, dada la duración de los vuelos de ida y vuelta, lo habitual es no realizar todo el trayecto de una vez, proponen hacer escalas en Moscú y Kuala Lumpur. Señalan también que, después de investigar en internet, el mercado de Hanoi ya no les parece tan interesante.

Debemos de nuevo definir un grafo auxiliar que recoja las nuevas condiciones, observando que ninguno de los casos antes comentados resulta útil para resolver la nueva situación. Además, a fin de evitar hacer vuelos norte-sur innecesariamente, y teniendo en cuenta las ciudades que tienen aeopuerto con vuelo a Moscú y Kuala Lumpur, consideramos como posibles extremos del camino hamiltoniano a determinar, Vinh o Hanoi por un lado y Nha Trang, Ho Chi Min y Siem Reap por otro.

Sea $G' = (V', E')$ donde $V' = \{$Moscú, Kuala Lumpur, Ficticio1, Ficticio2, Ficticio3$\}$ y $E' = \{$(Ficticio1, Moscú), (Ficticio1, Kuala Lumpur), (Moscú, Ficticio2), (Moscú, Ficticio3), (Kuala Lumpur, Ficticio2), (Kuala Lumpur, Ficticio3), (Ficticio2, u), (Ficticio3, v) / u$\in \{$ Vinh, Hanoi $\}$, v $\in \{$ Nha Trang, Ho Chi Min , Siem Reap$\}\}$. En la Figura 12 vemos un esquema de la estructura del grafo que estamos considerando, G'.

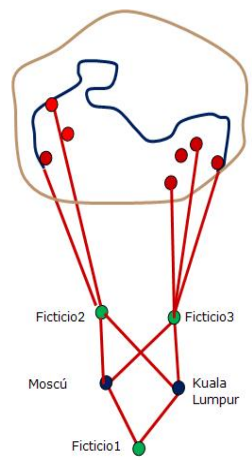


Figura 12: Grafo auxiliar G'.

Apoyándonos en el hecho de que en un ciclo hamiltoniano todos los vértices pertenecen al ciclo y, por tanto, dado un vértice cualquiera del grafo hay exactamente dos aristas que son incidentes en v, se demuestra fácilmente que existe camino hamiltoniano en G si y sólo si existe ciclo hamiltoniano en G'.

Así pues, analizamos la existencia de ciclo hamiltoniano en G' y mediante Mathematica obtenemos Ficticio1, Moscú, Ficticio2, Vinh, Nihn Binh, Halong, Hanoi, Da Nang, Nha Trang, Hoi An, Ho Chi Min, Siem Reap, Ficticio3, Kuala Lumpur, Ficticio1, (ver Figura 13).

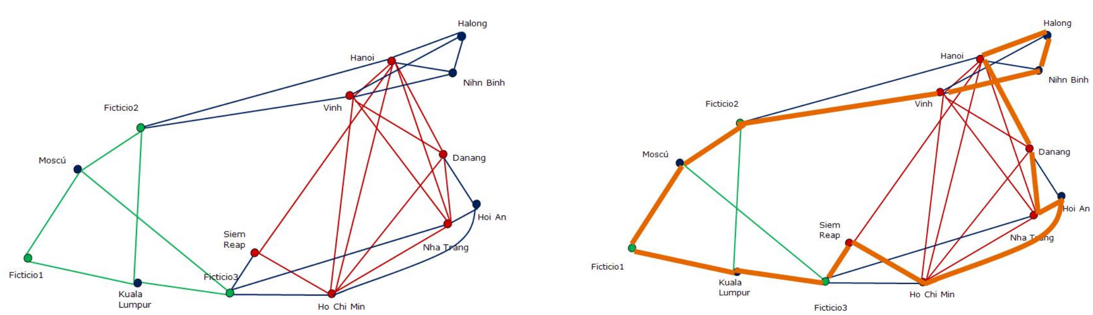


Figura 13: G' y ciclo hamiltoniano en G'.

Del anterior ciclo hamiltoniano en G' obtenemos el siguiente camino hamiltoniano en G eliminando los vértices ficticios. Moscú, Vinh, Nihn Binh, Halong, Hanoi, Da Nang, Nha Trang, Hoi An, Ho Chi Min, Siem Reap, Kuala Lumpur, (ver Figura 14).

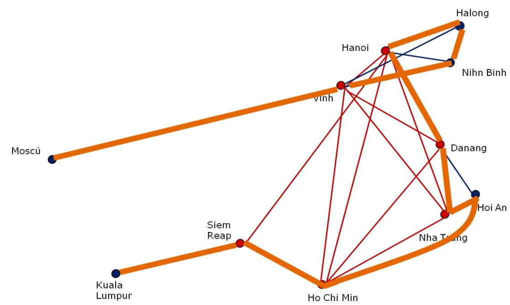


Figura 14: Camino hamiltoniano en G'.

5 Conclusiones

Los anteriores ejemplos muestran como la idea que se recoge en la demostración del Teorema 1 puede generalizarse, adaptándola a las diferentes situaciones que nos puedan surgir. Señalar que, en nuestros anteriores ejemplos, se podrían haber considerado muy diversas peticiones. En el caso de que no existiera un camino hamiltoniano, se podría discutir si es o no aceptable algún pequeño cambio en las condiciones, puesto que ligeras modificaciones en la situación de partida puede permitir la existencia de dichos caminos.

En relación a su valor como herramienta docente, destacar que, además de iniciar al alumno en el proceso de construir modelos abstractos de situaciones reales, incide en la importancia de analizar demostraciones como método para mejorar el aprendizaje, ya que muestra como el conocer el por qué de ciertos resultados permite generar soluciones para problemas cuyas condiciones no verifican las hipótesis de dichos resultados. Es además un tema que puede adaptarse al alumnado, eligiendo situaciones más sencillas o complejas, en función de su nivel.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por el proyecto PID-DMA 2012.

Referencias

[1] R. Bellman. *Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem* Journal of the ACM **9**, 61–63 (1962).

[2] J. L. Gross, J. Yellen. *Graph theory and its applications* CRC Press cop. (1999).

[3] M. Held, R. M. Karp. *A dynamic programming approach to sequencing problems* J. SIAM **10**(1) 196–210 (1962).

[4] C. Jordán.*Materiales docentes de la asignatura Estructuras Matemáticas para la Informática II*, Click aquí

[5] C. Jordán, J.R. Torregrosa. *Introducción a la teoría de grafos y sus algoritmos* Reverté-UPV, Spain (1996).

[6] F. Rubin. *A Search Procedure for Hamilton Paths and Circuits* Journal of the ACM, **21** 576–80 (1974).