MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING
*Volume 5, No. 5*, 2012.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

# *Una aplicación didáctica de la modelización matemática: control de velocidad de vehículos en vías rurales*

**M.A. Juan, E.A. Sánchez-Pérez**
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA.
majuabl1@mat.upv.es, easancpe@mat.upv.es

**Abstract**

*En este artículo presentamos un modelo didáctico para el control de la velocidad de los vehículos en una carretera. Basado en supuestos empíricos, el modelo da una respuesta al problema de encontrar el mejor trazado de carretera desde el punto de vista del tiempo que se necesita para ir desde la cima de una colina a un cierto punto en el valle, respetando las limitaciones de velocidad necesarias. Así, construimos un modelo simple para representar la dependencia temporal del tráfico en una carretera como un ejercicio de modelización matemático para un nivel básico de una carrera de ingeniería civil.*

*In this paper a didactic model for the control of the speed of the vehicles in a road is presented. Based on empirical assumptions, the model provides an answer to the problem of finding the best road from the point of view of the time that is needed for going from the top of a hill to a certain point in the valley under the assumption that certain restrictions for the speed are imposed. Thus, we construct a simple model for representing the time dependence of the traffic in a road as an exercise of mathematical modelling adequate for a basic level of a civil engineering career.*

Keywords: Modelización, Optimización, MATHEMATICA©.

# 1 Introducción

El uso de modelos matemáticos como parte de la formación en ciencias formales de los ingenieros es uno de los recursos docentes cuya utilización se ha consolidado en algunas escuelas técnicas españolas, como consecuencia, entre otras cosas, de la generalización de la enseñanza con ordenadores en las asignaturas de matemáticas de los primeros cursos. Nuestro grupo de trabajo, que ha adoptado y desarrollado esta estrategia docente desde hace años (véase [3, 4, 5], consolidó en los planes de estudio ahora en extinción algunas asignaturas en las que este recurso juega un papel primordial, en diferentes niveles de los estudios de ingeniería civil en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Valencia. En concreto, la asignatura Matemáticas Asistidas por Ordenador, optativa cuatrimestral de segundo curso de 4.5 créditos, consiste en una primera parte en la exposición de un temario de cálculo numérico con el programa MATHEMATICA© [2], que incluye el ajuste de funciones, interpolación, splines, cálculo de raíces de ecuaciones, derivación e integración numérica y optimización, entre otros temas (2.5 créditos). En una segunda parte del curso, se distribuye a los alumnos en grupos de tres; cada grupo selecciona, según sus preferencias, un problema de modelización de nuestra colección que resuelve en el aula durante el resto del curso (2 créditos). Se trata de problemas abiertos, de contenido aplicado y que se pueden desarrollar utilizando técnicas a diferentes niveles de complejidad, dependiendo tanto de la capacidad de los alumnos como de su interés en el problema. Esta metodología, además de incentivar el estudio de los contenidos matemáticos en un contexto aplicado, permite a los estudiantes adiestrarse en técnicas cuya enseñanza no es habitual en las aulas universitarias, especialmente en los primeros cursos de las carreras técnicas, y que tendrán una proyección fundamental en el posterior desarrollo profesional de los futuros ingenieros: por ejemplo, la preparación de una propuesta personal para la resolución de un problema y su defensa frente a expertos -en este caso, los profesores-, que analizarán críticamente sus resultados comparándolos con los de otros grupos.

Una de las aplicaciones más inmediatas del cálculo diferencial y en particular, de algunos aspectos de la geometría diferencial, es la parametrización y análisis de curvas diferenciables [1] como modelos de carreteras. En este artículo presentamos un nuevo modelo matemático realizado especialmente para su aplicación en la asignatura citada, sobre el siguiente problema.

**Problema:** *supongamos que queremos trazar una carretera desde lo alto de una colina –modelizada mediante una superficie diferenciable– a un cierto punto situado debajo de la elevación. Para ello, utilizamos una curva parametrizada que debe cumplir una serie de requisitos mínimos relativos a la pendiente y a la curvatura, y que tienen que ver con que por la vía diseñada puedan transitar los vehículos. Se trata de obtener, a partir de una función que nos relaciona la velocidad de circulación aconsejada en función de la curvatura y la pendiente de la curva, un trazado –es decir, una curva– que cumpla los requisitos de seguridad impuestos y que además permita ir desde la cima de la colina al punto situado abajo en menos tiempo que el modelo propuesto en la memoria, y que describimos en este trabajo.*

Expondremos, en la segunda sección, los requisitos matemáticos necesarios para construir el modelo. La tercera sección la dedicaremos a su presentación, y la cuarta al desarrollo de la solución propuesta y que servirá como guía a los estudiantes para proponer su propia solución, indicando las relaciones con los contenidos conocidos de cálculo diferencial y de cálculo numérico. En el quinto apartado haremos algunos comentarios finales, presentando algunas conclusiones y comentarios generales sobre las características específicas de este ejercicio como instrumento didáctico.

## 2 Conocimientos matemáticos requeridos

Los alumnos deben conocer los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral, y los métodos numéricos elementales. Este requisito lo cumplen nuestros alumnos de la escuela de ingenieros civiles de la Universidad Politécnica de Valencia, que en el momento de cursar la asignatura ya han superado un curso de cálculo diferencial y otro de álgebra lineal. Los elementos necesarios de métodos numéricos los conocen porque han sido explicados en la primera parte del curso. Aunque no han cursado ninguna asignatura de geometría diferencial, sí que son capaces de seguir los argumentos simples de parametrización de curvas y superficies, así como el sentido geométrico de los conceptos necesarios de cálculo diferencial que se aplican. Para ello, explicamos en la memoria brevemente estos conceptos y argumentos.

Los contenidos concretos que se necesitan son: cálculo de derivadas de funciones vectoriales, elementos de geometría del plano y del espacio (producto escalar de vectores, ángulos), ajuste por mínimos cuadrados, y resolución numérica de ecuaciones no lineales.

## 3 El modelo

En primer lugar, diseñamos el modelo de la colina en la que vamos a desarrollar nuestro modelo. La elevación del terreno se puede representar como una superficie diferenciable de ecuación $z = f(x, y)$, siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Los puntos de $\mathbb{R}^3$ son por lo tanto de la forma

$$(x, y, f(x, y)), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por ejemplo, la función

$$f(x, y) := \exp^{-(x^2+2y^2)}$$

posee las características geométricas adecuadas.

La descripción matemática del trazado de la carretera viene dada por la ecuación de una curva parametrizada de la forma

$$\varphi(s) := \big(\varphi_x(s), \varphi_y(s), \varphi_z(s)\big), \qquad s \in [0, \infty);$$

en realidad, podemos definirla como una curva en $\mathbb{R}^2$ de expresión $\varphi_0(s) := \big(\varphi_x(s), \varphi_y(s)\big)$, calculando la coordenada $z$ como

$$\varphi_z(s) := f(\varphi_x(s), \varphi_y(s)), \qquad s \in [0, \infty).$$

Por lo tanto,

$$\varphi(s) := \big(\varphi_x(s), \varphi_y(s), f(\varphi_x(s), \varphi_y(s))\big) = \big(\varphi_x(s),\ \varphi_y(s),\ \exp^{-(\varphi_x^2(s)+2\varphi_y^2(s))}\big), \qquad s \in [0, \infty).$$

Por simplicidad, utilizaremos la descripción en coordenadas polares para la parametrización de la curva; el ángulo, primera coordenada de las coordenadas polares, servirá como parámetro, de manera que la curva vendrá descrita por ecuaciones de la forma

$$\varphi_x(s) := r(s) \cdot \cos(s + a), \quad \varphi_y(s) := r(s) \cdot \sin(s + a), \quad s \in [0, \infty),$$

siendo $a$ un cierto ángulo inicial que permite dirigir la carretera en la dirección deseada, y que podemos suponer igual a cero en un primer modelo. Dos magnitudes que podrían describir el efecto del giro y la pendiente de la carretera en la velocidad aconsejada de circulación y que pueden calcularse a partir de la curva parametrizada son las siguientes:

(1) *El ángulo que define la inclinación de la curva respecto del plano horizontal del suelo,* que denotamos $\alpha(s)$. Se puede calcular como el ángulo definido por la variación de la recta tangente en un determinado punto a la curva, de ecuación

$$v(s) = \varphi'(s) = \Big(\frac{d\,\varphi_x(s)}{d\,s}, \frac{d\,\varphi_y(s)}{d\,s}, \frac{d\,\varphi_z(s)}{d\,s}\Big).$$

El coseno de este ángulo es

$$\cos(\alpha(s)) = \frac{\langle \varphi'(s), \varphi_0'(s)\rangle}{\|\varphi'(s)\| \cdot \|\varphi_0'(s)\|},$$

es decir,

$$\cos(\alpha(s)) = \Big(\frac{\sqrt{(\varphi_x'(s))^2 + (\varphi_y'(s))^2}}{\sqrt{(\varphi_x'(s))^2 + (\varphi_y'(s))^2 + (\varphi_z'(s))^2}}\Big), \qquad s \in [0, \infty). \tag{5.1}$$

Podemos suponer, para este modelo, que el valor de este ángulo no va a ser muy grande ($\alpha \in [0, \pi/8]$) en ningún punto y que la velocidad aconsejada va a ser proporcional a $\cos(\alpha)$.

(2) *El grado de curvatura del trazado de la carretera*; podemos suponer, para simplificar el modelo, y asumiendo que la carretera describe una curva próxima a una espiral y que el parámetro $s$ representa el ángulo de las coordenadas polares de la situación del punto, que es inversamente proporcional a la variación del vector tangente normalizado de la proyección en el plano horizontal de la curva multiplicada por el radio –la distancia del origen de coordenadas al punto $\varphi_0(s)$–, es decir, de la curva $\varphi_0(s)$ en $\mathbb{R}^2$. Asumiremos además que nuestra curva se parece localmente a una circunferencia (al menos a partir de cierto valor $s_0$ del parámetro), y por lo tanto aproximaremos la curvatura, que denotamos por $C(s)$, como la curvatura de la circunferencia a la que se parece locamente, que tendría como radio $\|\varphi_0(s)\|$, es decir,

$$C(s) := \frac{1}{\|\varphi_0(s)\|} \qquad s \in [s_0, \infty). \tag{5.2}$$

Las magnitudes definidas por las ecuaciones (5.1) y (5.2) nos permiten ajustar, en función de los valores que toman éstas y los valores correspondientes de la velocidad aconsejada, y cuya relación viene dada por los datos de la siguiente tabla obtenida a partir de la legislación vigente, un polinomio de grado uno en ambas variables que describe la velocidad aconsejada $v_a$ para cualquier par de valores de $\alpha$ y $C$ en un rango razonable.

| Curvatura | $\cos(\alpha)$ | Velocidad |
|---|---|---|
| 0 | 0.9992 | 100 |
| 0 | 0.9987 | 80 |
| 0 | 0.9981 | 60 |
| 0 | 0.9975 | 40 |
| 1/50 | 1 | 40 |
| 1/130 | 1 | 60 |
| 1/265 | 1 | 80 |
| 1/485 | 1 | 100 |

Así, debemos ajustar estos datos a la ecuación de un plano del tipo

$$v_a(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

donde $x_1 := \cos(\alpha)$ y $x_2 := C$.

Por lo tanto, una vez conocidos los coeficientes del polinomio anterior, para una curva parametrizada $\varphi(s)$ de parámetro $s$, esta función tendría la expresión

$$v_a(s) = a_0 + a_1 \cos(\alpha(s)) + a_2\, C(s) + a_3 C(s) \cos(\alpha(s)), \qquad s \in [0, \infty),$$

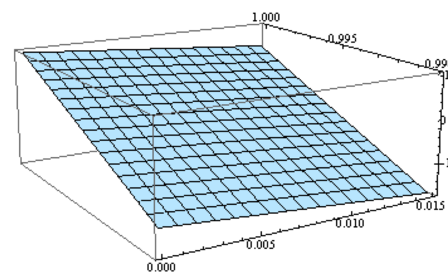
donde los valores razonables de los pares $(\alpha, C)$ deben estar en el cubo $[0, \pi/8] \times [0, 0.01]$.

# 4 Desarrollo del modelo

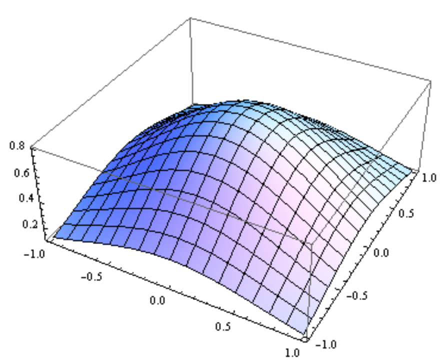
## 4.1 Colina de corte circular y parametrización proporcional al ángulo

a) En primer lugar, procedemos al ajuste de los datos de la tabla de curvaturas, cosenos de los ángulos de inclinación y velocidades permitidas mediante mínimos cuadrados, usando el comando `Fit` con una base de funciones $\{1, x, y\}$:

```
TablaVel = {{0, 0.9992, 100}, {0, 0.9987, 80},
   {0, 0.9981, 60}, {0, 0.9975, 40},
   {1/50, 1, 40}, {1/130, 1, 60},
   {1/265, 1, 80}, {1/485, 1, 100}}
   {{0, 0.9992, 100}, {0, 0.9987, 80},
   {0, 0.9981, 60}, {0, 0.9975, 40},
   {1/50, 1, 40}, {1/130, 1, 60},
   {1/265, 1, 80}, {1/485, 1, 100}}
Fit[TablaVel, {1, x, y, x y}, {x, y}]
   -21914.2 - 1745.66 x + 22016.7 y - 1745.66 x y
Plot3D[-21914.218520821472 - 1745.6612272952243 x
   + 22016.739143923685 y - 1745.6612273573783 x y,
   {x, 0, 0.015}, {y, 0.99, 1}]
```



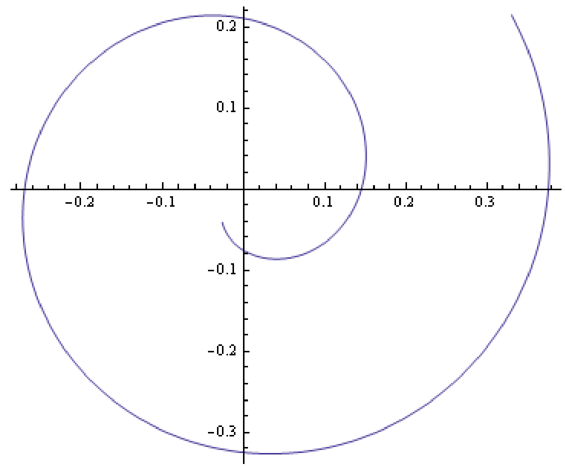

b) A continuación, realizamos la representación de la superficie sobre la que se diseña la carretera; en este caso, supondremos que es una gaussiana simétrica en dos variables.




```
f[x_, y_] := 0.8 Exp[-x^2 - y^2]
Evaluate[Plot3D[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]]
```

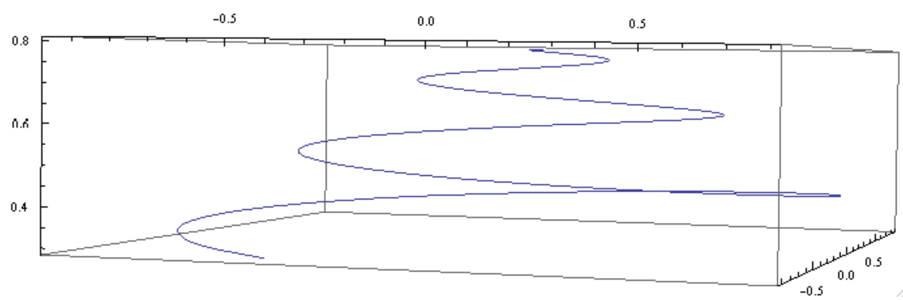
c) Introducimos ahora una curva que simule el trazado de la carretera. En un primer ejemplo, asumiremos que el radio crece proporcionalmente al ángulo que parametriza la curva, con un factor de proporcionalidad de 0.05.

```
c1[s_] := 0.05 s Cos[s + 2 Pi/2]
c2[s_] := 0.05 s Sin[s + 2 Pi/2]
c3[s_] := f[c1[s], c2[s]]
ParametricPlot[{c1[s], c2[s]}, {s, 1, 10}]
```

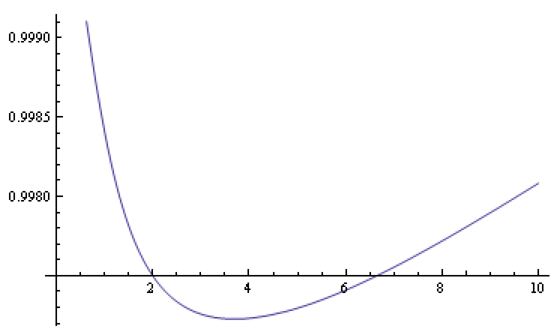



d) Para este caso, cuando situamos la curva sobre la colina, la representación nos queda

```
ParametricPlot3D[{c1[s], c2[s], c3[s]}, {s, 0, 20}]
```



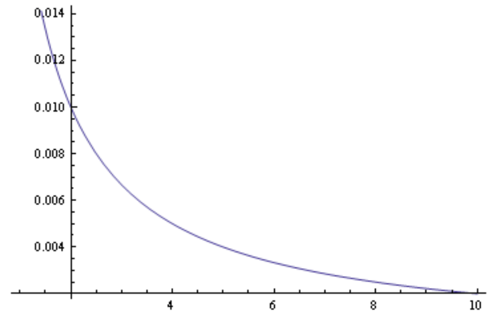

e) Calculamos ahora las derivadas de la curva, para obtener el coseno del ángulo de inclinación



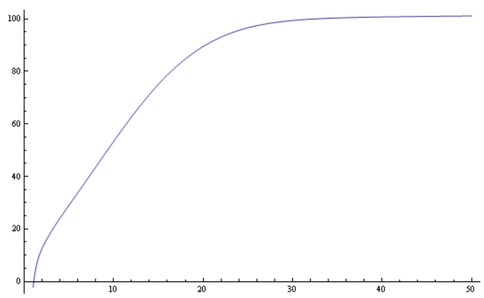

```
D[c1[s], s]
   -0.05 Cos[s] + 0.05 s Sin[s]
D[c2[s], s]
   -0.05 s Cos[s] - 0.05 Sin[s]
D[c3[s], s]
   0.8 e^(-0.0025 s^2 Cos[s]^2 -
   0.0025 s^2 Sin[s]^2)
  (-0.005 s Cos[s]^2 + 0. s^2 Cos[s] Sin[s]
  - 0.005 s Sin[s]^2)
DD1[s_] := Evaluate[D[c1[s], s]]
DD2[s_] := Evaluate[D[c2[s], s]]
DD3[s_] := Evaluate[D[c3[s], s]]
cospen[s_] := Sqrt[DD1[s]^2 + DD2[s]^2]/
   Sqrt[DD1[s]^2 + DD2[s]^2 + DD3[s]^2]
Plot[cospen[s], {s, 0, 10}]
```

f) La curvatura queda

```
Cur[s_] := 0.001/(Sqrt[c1[s]^2 + c2[s]^2])
Plot[Cur[s], {s, 1, 10}]
```



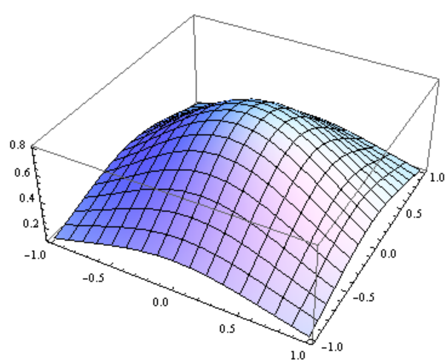

g) Por último, calculamos la velocidad permitida en cada punto de la carretera (correspondiente a un valor del parámetro $s$), componiendo el ajuste previo de la tabla con los valores de $C(s)$ y $\cos(\alpha(s))$ que hemos calculado a partir de las ecuaciones de la curva.




```
InterTabla[x_, y_] := -21914.218520821472
   - 3491.3224546520373 x +
   22016.739143923685 y
Velocidad1[s_] :=
   InterTabla[Cur[s], cospen[s]]
Plot[Velocidad1[s], {s, 1, 50}]
```

### 4.2 Colina de corte deformado y parametrización proporcional al ángulo

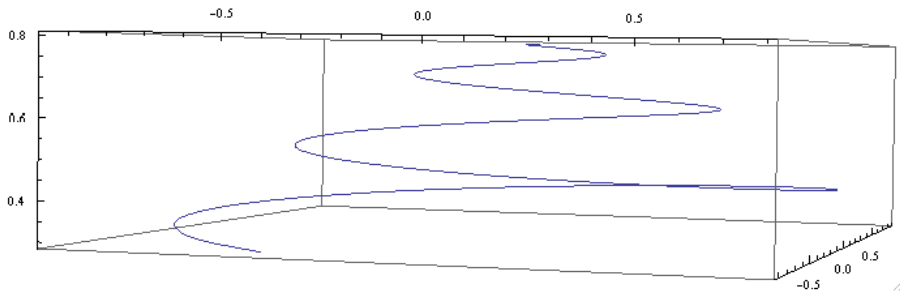
El apartado a) coincide con el caso anterior. Para el apartado b), consideraremos ahora una gaussiana deformada, de modo que la colina deje de tener un corte circular:




```
f[x_, y_] := 0.8 Exp[-x^2 - 1.01 y^2]
Evaluate[Plot3D[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]]
```

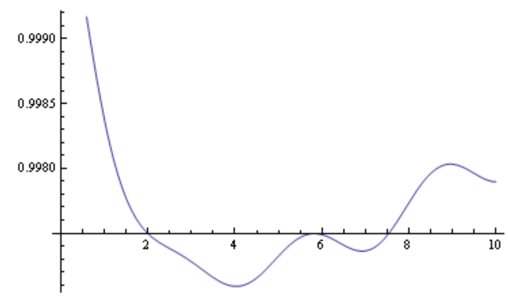
Mantenemos la parametrización del apartado anterior para la curva (apartado c)), con lo que el trazado de la misma sobre la nueva superficie es ahora

```
ParametricPlot3D[{c1[s], c2[s], c3[s]}, {s, 0, 20}]
```

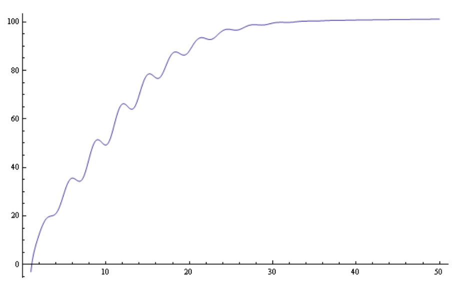



Claramente, al no cambiar la parametrización, las derivadas primera y segunda de la curva coinciden con las del caso anterior (mirar apartado e) ), así como la curvatura (apartado f) ); no es éste el caso de la tercera derivada ni del coseno del ángulo de inclinación para la curva sobre la gaussiana deformada, cuyo cálculo y representación vienen dados por:

```
D[c3[s], s]
0.8 (e^(-(1 - e^(-0.05 s))^2 Cos[s]^2 -
  1.01 (1 - e^(-0.05 s))^2 Sin[s]^2))
  (-0.1 e^(-0.05 s) (1 - e^(-0.05 s)) Cos[s]^2 -
  0.02 (1 - e^(-0.05 s))^2 Cos[s] Sin[s] -
  0.101 e^(-0.05 s) (1 - e^(-0.05 s)) Sin[s]^2)
DD3[s_] := Evaluate[D[c3[s], s]]
cospen[s_] :=  Sqrt[DD1[s]^2 + DD2[s]^2]/
  Sqrt[DD1[s]^2 + DD2[s]^2 + DD3[s]^2]
  Plot[cospen[s], {s, 0, 10}]
```




La velocidad ahora, en función del parámetro que describe la curva, queda

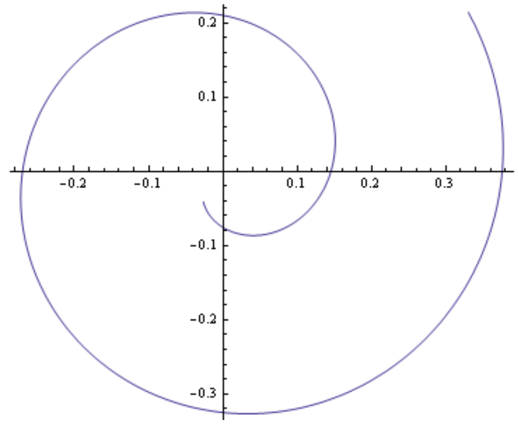



```
InterTabla[x_, y_] := -21914.218520821472 -
  3491.3224546520373 x +
  22016.739143923685 y
Velocidad1[s_] := InterTabla[Cur[s], cospen[s]]
Plot[Velocidad1[s], {s, 3, 20}]
```

## 4.3 Colina de corte deformado y parametrización exponencial

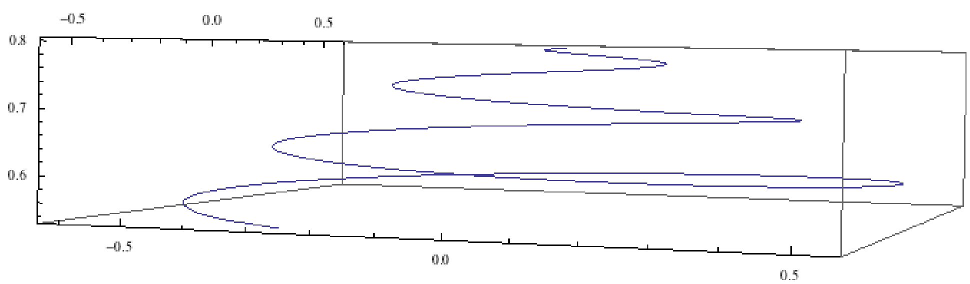
Como último caso, vamos a considerar la superficie del caso anterior (la gaussiana de corte deformado) y una curva cuya parametrización vendrá dada a través de una función exponencial. Así las cosas, seguimos utilizando el ajuste por mínimos cuadrados del apartado a) del primer caso, consideramos la supeficie descrita en el apartado b) del caso anterior y consideramos que la curva que simula el trazado de la carretera viene parametrizada de modo que el radio viene referenciado por un comportamiento exponencial (apartado c)).

```
c1[s_] := (1 - Exp[-0.05 s]) Cos[s + 2 Pi/2]
c2[s_] := (1 - Exp[-0.05 s]) Sin[s + 2 Pi/2]
c3[s_] := f[c1[s], c2[s]]
ParametricPlot[{c1[s], c2[s]}, {s, 1, 10}]
```

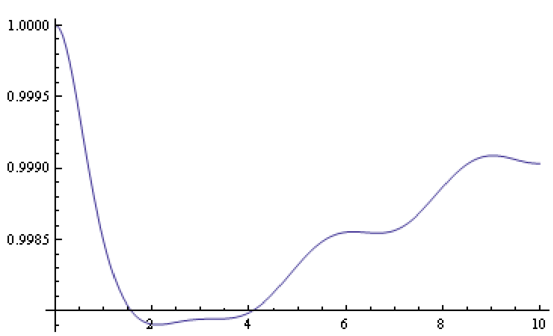



d) La apariencia de la curva sobre la superficie es ahora

```
ParametricPlot3D[{c1[s], c2[s], c3[s]}, {s, 0, 20}]
```



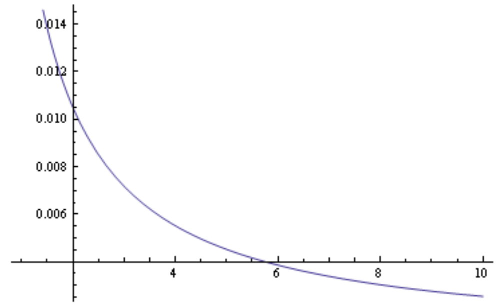

e) En cuanto a las derivadas y coseno del ángulo de inclinación, necesitamos rehacer los cálculos, obteniendo



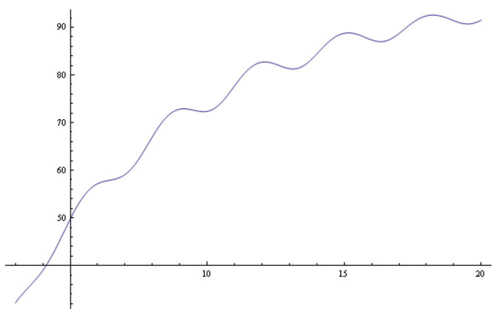

```
D[c1[s], s]
   -0.05 e^(-0.05 s) Cos[s] +
   (1 - e^(-0.05 s)) Sin[s]
D[c2[s], s]
   -(1 - e^(-0.05 s)) Cos[s] -
   0.05 e^(-0.05 s) Sin[s]
D[c3[s], s]
   0.8 e^(-(1 - e^(-0.05 s))^2 Cos[s]^2 -
   1.01 (1 - e^(-0.05 s))^2 Sin[s]^2)
   (-0.1 e^(-0.05 s)
   (1 - e^(-0.05 s)) Cos[s]^2 -
   0.02 (1 - e^(-0.05 s))^2 Cos[s] Sin[s]-
   0.101 e^(-0.05 s)
   (1 - e^(-0.05 s)) Sin[s]^2)
DD1[s_] := Evaluate[D[c1[s], s]]
DD2[s_] := Evaluate[D[c2[s], s]]
DD3[s_] := Evaluate[D[c3[s], s]]
cospen[s_] := Sqrt[DD1[s]^2 + DD2[s]^2]/
   Sqrt[DD1[s]^2 + DD2[s]^2 + DD3[s]^2]
Plot[cospen[s], {s, 0, 10}]
```

f) y una curvatura dada por

```
Cur[s_] := 0.001/(Sqrt[c1[s]^2 + c2[s]^2])
Plot[Cur[s], {s, 1, 10}]
```




g) Finalmente, la representación de la velocidad permitida sería, para estas condiciones




```
InterTabla[x_, y_] := -21914.218520821472
   - 3491.3224546520373 x +
   22016.739143923685 y
Velocidad1[s_] :=
   InterTabla[Cur[s], cospen[s]]
Plot[Velocidad1[s], {s, 3, 20}]
```

## 5 Comentarios finales

Los resultados obtenidos en la aplicación de este modelo en el aula han sido muy diferentes, dependiendo sobre todo de los conocimientos del grupo de estudiantes y de su implicación en el desarrollo del problema. Este tipo de actividad, por su propia naturaleza, depende de la motivación de los estudiantes por su resolución. Nos hemos encontrado con grupos que apenas han sido capaces de plantear y entender el modelo básico presentado, y con otros que sin embargo han planteado sus propios problemas relacionados y han diseñado sus propias técnicas para resolverlos. La búsqueda de información auténtica sobre las limitaciones reales de velocidad en las carreteras de nuestro país, así como de los métodos aplicados en ingeniería civil para el diseño de carreteras, también resulta un recurso didáctico interesante, que se puede explotar dependiendo del punto de vista del profesor.

La aplicación en el aula de este ejercicio debe hacerse desde un punto de vista abierto, es decir, resolviendo con el grupo de estudiantes los apartados anteriormente explicados, y planteando otros nuevos para que los resuelvan ellos a continuación. La interacción con el grupo puede servir al profesor para tomar nota del nivel real de conocimientos y de la capacidad de trabajo del grupo, y también para detectar si existe algún objetivo dentro del proyecto que, por algún motivo, resulte de especial interés para los estudiantes (por ejemplo, por haberse trabajado en temas similares en otras asignaturas).

# Referencias


[1] M. P. Do Carmo, “Geometría diferencial de curvas y superficies”. Alianza Universidad Textos, Madrid, 1990.

[2] L. M. García Raffi, M. Figueres Moreno, M. J. Pérez Peñalver y E. A. Sánchez Pérez, “Métodos numéricos con MATHEMATICA”. Alfaomega Grupo Editor Argentino, México, 2003.

[3] L. M. García Raffi, E. A. Sánchez Pérez y M. Sopena Novales, “Realidad y educación: un modelo didáctico para la catástrofe del Prestige”. Modelling in Science Education and Learning (MSEL), 1 (2008) 29-38

[4] E. A. Sánchez Pérez, J. V. Sánchez Pérez y L. M. García Raffi, ”Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la Física y de las Matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas”. Enseñanza de las Ciencias, 17 (1999), 119-130

[5] E. A. Sánchez Pérez, J. V. Sánchez Pérez, F. De Campo y L. M. García Raffi, “Las prácticas de modelización físico-matemática: innovación universitaria desde un punto de vista internacional”. UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 31 (2002), 24-33