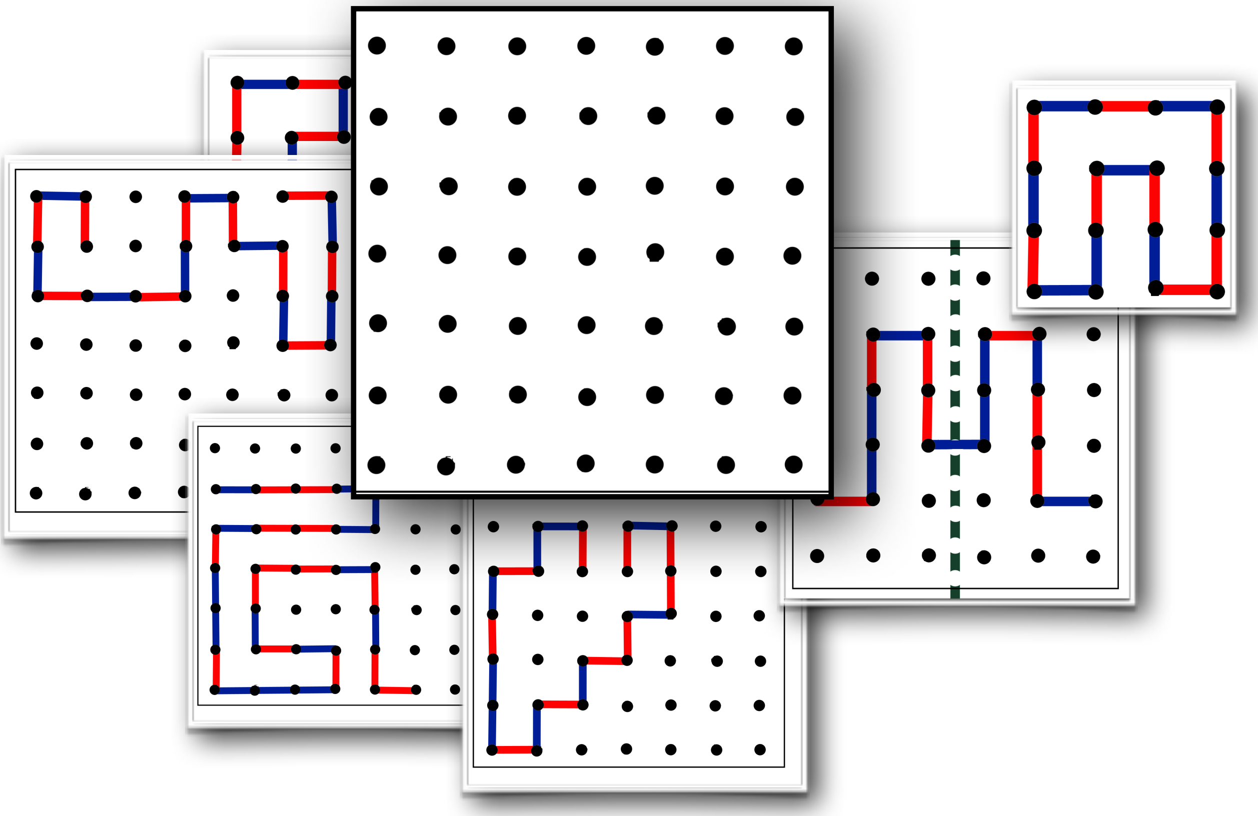
Javier Falcó Benavent.
Universitat Politècnica de València
frafalbe@upvnet.upv.es

EL JUEGO DEL SENDERO (ANEXO I)

Actividades matemáticas que incitan a la modelización.



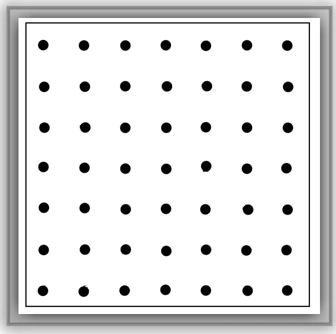
Javier Falcó Benavent

2012

EL SENDERO

JAVIER FALCÓ BENAVENT

El Sendero es un juego clásico que se juega sobre una retícula dibujada en el papel. La cantidad de puntos de la red o retícula depende de la duración que se quiera dar al juego.



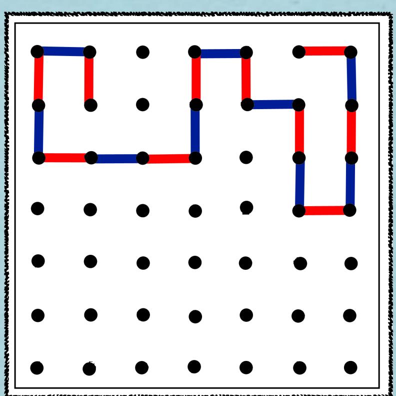
La dinámica del juego consiste en añadir segmentos horizontales o verticales que unan dos puntos consecutivos del tablero, de modo que estos segmentos sean la continuación del sendero creado en las jugadas anteriores. Pierde el jugador que al añadir un segmento cierre el sendero.

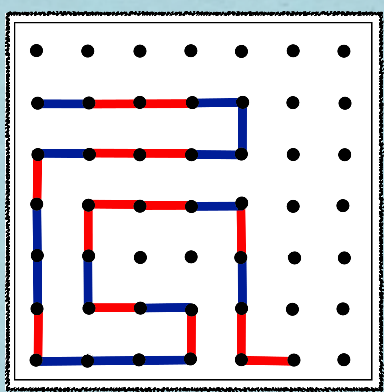
Objetivo del juego:

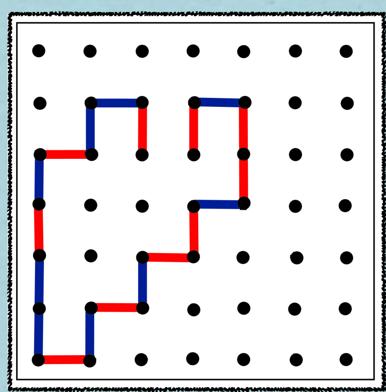
El objetivo del juego es conseguir que el otro jugador cierre el sendero.

Reglas del juego:

- Supondremos siempre que el tablero tiene unas dimensiones mínimas de 2x2.
- Primero se sortea el orden de los jugadores para escoger quien inicia la partida.
- El primer jugador traza un segmento en vertical u horizontal, pero no en diagonal. Este debe unir dos puntos consecutivos del tablero.
- A partir de este momento y de modo alternado, cada jugada ampliará el sendero trazando un segmento en vertical u horizontal, que una dos puntos consecutivos del tablero. Necesariamente este segmento ha de compartir uno de sus extremos con uno de los extremos del sendero.
- El jugador que cierre el sendero juntando los dos extremos o juntando un extremo con una parte intermedia del sendero pierde.







Antes de comenzar con el estudio del juego, realizaremos una actividad de patio con los alumnos con la finalidad de incentivar su participación. En esta actividad los alumnos se familiarizan con el juego considerándolo como un juego divertido y participativo.

La utilización de una escalera permite al alumno encargado de elegir la jugada ser el protagonista de la acción y realizar una visión global del desarrollo de la partida.

Material: 36 conos para crear el tablero.

36 palos para representar los segmentos.

Una escalera.

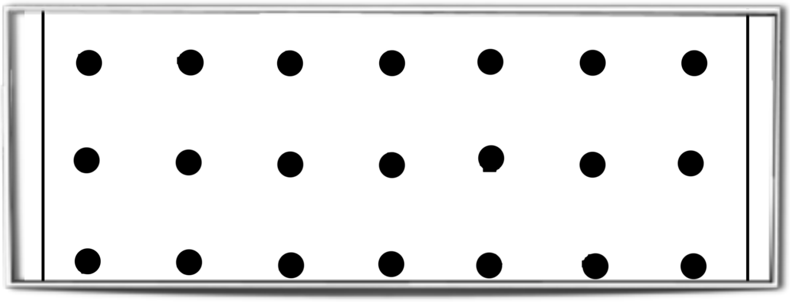
El número de partidas que se realizarán será decidido por el profesor dependiendo de la comprensión de la dinámica del juego por parte de los alumnos.

Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

Actividad 0

...

Ahora que conocemos las regla del juego, podemos divertirnos jugando, pero con un pequeño cambio...



Vamos a crear un tablero real en el patio del colegio. Para ellos vas a poner 36 conos formando una retícula y utilizaremos

Nos dividimos en dos equipos.
En cada equipo se crea una fila ordenada que determinará el orden de participación.

Desarrollo de la partida:

* Se lanza una moneda al aire para decidir cual de los dos grupos forma el equipo uno que tiene el primer turno de juego. El primer jugador de la fila coloca el segmento inicial del sendero y se desplaza al final de la fila. Termina el turno de este equipo.
* El primer jugador de la fila del segundo equipo sube a la escalera para visualizar la partida y añade un segmento al sendero. Este jugador se desplaza al final de la fila del equipo dos.
* El segundo jugador de la fila del segundo equipo sube a la escalera para visualizar la partida y añade un segmento al sendero. Este jugador se desplaza al final de la fila de la fila del equipo uno.
* Repetir los pasos 2 y 3 hasta terminar la partida.

Al finalizar la partida se deshacen los equipos y se juega una nueva partida

Introducción

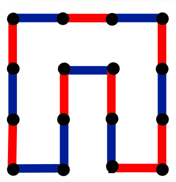
Los objetivos a tratar durante el transcurso de la tarea se encuentran distribuidos en las siguientes en fichas. Cada una de ellas corresponde con el desarrollo de una de las secciones del taller propuesto en el archivo principal del artículo.

ACTIVIDAD I

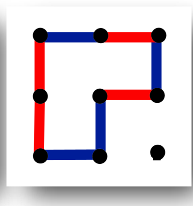
Actividades introductoras para comprender la dinámica del juego.

ACTIVIDAD II Y III

Calcular la longitud máxima que puede tener el sendero en un tablero de n x n puntos.



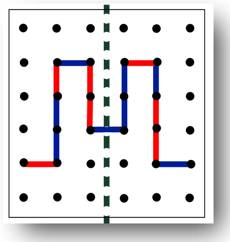
Caso par.



Caso impar.

ACTIVIDAD IV

Encontrar una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores cuando el tablero es cuadrado y con dimensión par.



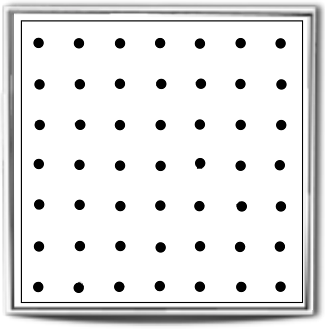
Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

Actividad I

...

Ahora que hemos jugado a “El Sendero” y conocemos la reglas del juego, podemos intentar conocer mejor las matemáticas que hay detrás de el.

Para ello vamos a plantearnos primero unas cuestiones básicas...



Si consideramos este tablero

A. ¿Cuántos movimientos han de realizarse como mínimo para terminar una partida?

B. ¿Es posible que no haya ganador en una partida, es decir, que sea posible empatar?

C. ¿Es posible que al terminar la partida el sendero tenga longitud par en un tablero de dimensiones 3x2? ¿Y longitud impar? (Demostradlo.)

¿Y si en lugar de considerar este tablero consideramos tableros más grandes?

D. Discutir si es posible que al terminar la partida el sendero tenga longitud par en un tablero de dimensiones mxn.

Actividad II

(Solución)

La finalidad de esta actividad es que los alumnos se familiaricen con las partidas más complejas que pueden jugarse.

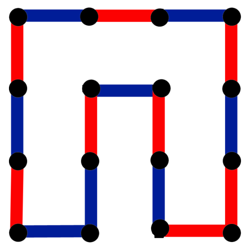
I. Después de estudiar los casos básicos, los alumnos deben reflexionar sobre las similitudes y las diferencias entre los resultados obtenidos y los casos anteriores.

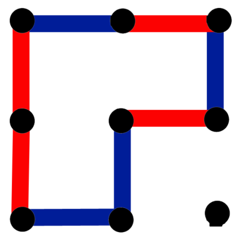
II. Se plantean hipótesis sobre la longitud del sendero más largo:

A. Si la cantidad de puntos de un lado de la red está formada por un número par (2k)x(2k), la longitud máxima del sendero es 2k*2k.

B. Si la cantidad de puntos de un lado de la red está formada por un número impar (2k+1) x(2k+1), la longitud máxima del sendero es (2k+1)*(2k+1)-1.

C. Se construye un sendero con esta longitud siguiendo los siguientes patrones:





Las actividades II y III se entregan en la misma ficha

Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

Actividad II

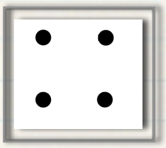
...

En la actividad anterior hemos encontrado senderos muy cortos y hemos visto que la longitud de los senderos depende de las dimensiones del tablero. Pero **¿Como de largo pueden llegar a ser los senderos?**

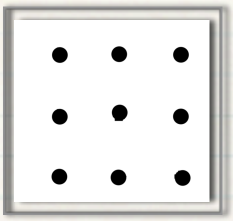
Esta pregunta vamos a intentar responder durante la actividad.

Calcular la longitud máxima que puede tener el sendero en un tablero de n x n puntos.

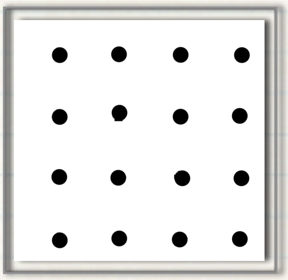
A. Primero estudia los casos más simples como son los tableros:



2x2



3x3



4x4

2x2 ______

3x3 ______

4x4 ______

7x7 ______

Continua detrás

Actividad III

(Solución)

1. Se calcula la longitud de estos senderos.
2. Se introduce la noción de grafo, sus componentes y los grafos bipartitos.
3. Como curiosidad el profesor explica la noción de recubrimiento de un grafo.
4. Se demuestra que no puede existir un sendero más largo:
   4.1. En el caso par se usa que recorremos todos los vértices del tablero.
   4.2. En el caso impar se usa que si recorremos todos los vértices del tablero el sendero tendría longitud (2k+1)*(2k+1) que es un número impar. Si vemos el juego desde el punto de vista de la teoría de grafos, tenemos un sendero cerrado en un grafo bipartito, por tanto este ha de tener un número par de vértices, puesto que acabamos en la misma partición del grafo que la inicial.
5. Se plantea la cuestión ¿Qué jugador ganará la partida en cada caso?
6. En función del desarrollo de la paridad y de la longitud del sendero, los alumnos razonan que en ambos casos ganará la partida el jugador que ha iniciado el juego.

Actividad III

...

¡Vamos a profundizar en los resultados obtenidos en la actividad anterior!

B. Intenta encontrar una regla para este resultado en tableros más grandes (de dimensión m x n).

- [ ] Has de encontrar primero una forma de construir estos senderos.
  - [ ] Divide el tablero en varias piezas para que la construcción sea más sencilla.

    Recuerda que en la actividad anterior ya has podido comprobar que la longitud depende de si m y/o n son pares o impares.
- [ ] Calcula la longitud de estos senderos.
- [ ] Para terminar comprueba que no puede haber senderos más largos dentro de este tablero

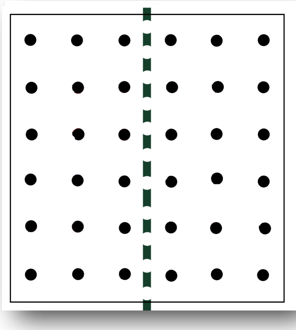
¿Qué jugador ganará la partida en cada caso?

(Solución)

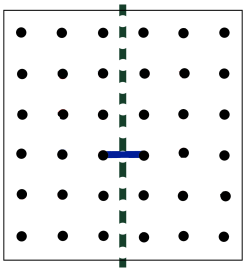
Actividad IV

Al termina la actividad anterior el profesor explica la estrategia ganadora a los alumnos.

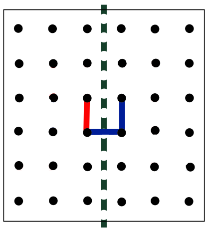
Usando la simetría entre la parte izquierda y derecha del tablero.

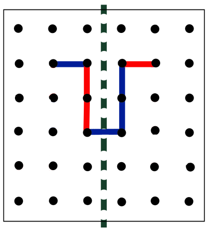


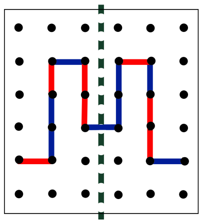
A. El primer jugador inicia el sendero usando un segmento que contenga cada uno de los extremos de una de las partes del tablero.



B. El primero en jugar realiza en cada movimiento la jugada simétrica a la de su adversario.







Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

Actividad IV

...

Cuando jugamos a un juego, normalmente queremos ganar la partida. Lamentablemente no es posible que siempre podamos ser el ganador si estamos en igualdad de condiciones respecto a nuestro adversario.

¡Pero hay algunos juegos en los que el hecho de empezar la partida puede ser suficiente ventaja como para asegurarnos la victoria!

Vamos a tratar de averiguar si en este juego podemos encontrar una

estrategia ganadora.

Para simplificar suponemos que el tablero es cuadrado y de dimensión par (2n x 2n).

1.- Cada uno pensamos si hay una estrategia ganadora.

2.- Nos dividimos en dos grupos

- Alumnos que creen que hay una estrategia ganadora para el primer jugador
- Alumnos que creen que hay una estrategia ganadora para el segundo jugador

Los alumnos que crean que no hay estrategia ganadora se añaden al grupo de menos alumnos.

3.- Discutimos sobre las posibles estrategias ganadoras y las ponemos a prueba en una partida.

4.- Para finalizar la actividad se discutimos el resultado de la partida.