

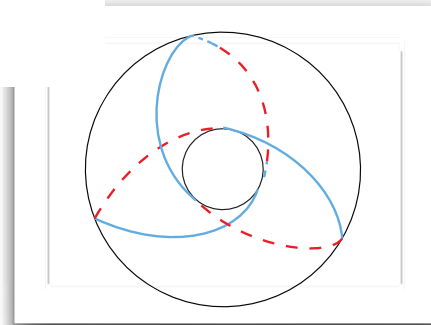
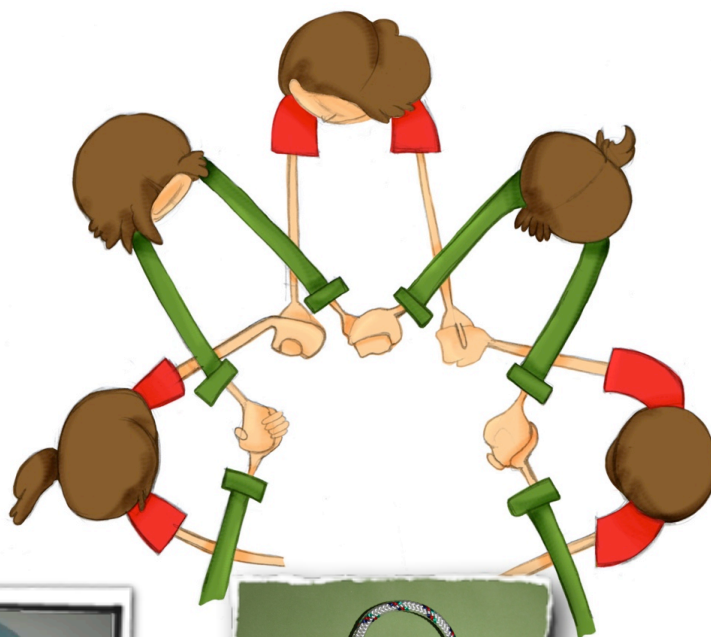
Javier Falcó Benavent.

Universitat Politècnica de València

fracfalbe@upvnet.upv.es

NUDOS MATEMÁTICOS (ANEXO II)

Actividades matemáticas que incitan a la modelización.



Javier Falcó Benavent

2012

Este documento ha sido creado por [Javier Falcó Benavent](#) y forma parte del quinto volumen de la revista científica **Modelling in Science Education and Learning**. Por favor visite la [dirección electrónica de la revista](#) para conocer las condiciones de uso de este material.

Nudos matemáticos

Fco Javier Falcó Benavent

Introducción

Al principio, el interés en la teoría de nudos vino motivado por la química. En 1880, al intentar explicar los distintos tipos de materia, se creyó que la sustancia que llenaba todo el espacio era el éter. Kelvin hizo la hipótesis de que los átomos eran nudos de este éter y distintos nudos correspondían a diferentes elementos. Este razonamiento convenció a un físico escocés llamado Tait (1831-1901), que pensó que si podía dar una lista de todos los nudos, tendría una tabla de todos los elementos.

Introducción

Al principio, el interés en la teoría de nudos vino motivado por la química. En 1880, al intentar explicar los distintos tipos de materia, se creyó que la sustancia que llenaba todo el espacio era el éter. Kelvin hizo la hipótesis de que los átomos eran nudos de este éter y distintos nudos correspondían a diferentes elementos. Este razonamiento convenció a un físico escocés llamado Tait (1831-1901), que pensó que si podía dar una lista de todos los nudos, tendría una tabla de todos los elementos.

Dedicó muchos años a confeccionar esta lista de nudos (dio una lista de nudos alternados menores de 11 cruces). El americano C.N. Little, en 1899, después de seis años de trabajo, dio una tabla de 43 nudos de 10 cruces no alternados. Su método de elaboración de la tabla fue prueba y error. De hecho, durante 75 años se aceptaron estas tablas como correctas y nadie se preocupó de demostrar rigurosamente que los nudos de la tabla eran realmente diferentes. En 1927 Alexander y Briggs demostraron que casi todos los nudos de la tabla menores de 10 cruces, eran distintos.

En 1974 Perco encontró dos nudos que en la tabla de Little aparecían como diferentes y realmente eran equivalentes. El método utilizado fue asociar a cada nudo un polinomio. El polinomio de Alexander fue el único polinomio conocido hasta 1984 que se introdujo el polinomio de Jones.

En 1974 Perco encontró dos nudos que en la tabla de Little aparecían como diferentes y realmente eran equivalentes. El método utilizado fue asociar a cada nudo un polinomio. El polinomio de Alexander fue el único polinomio conocido hasta 1984 que se introdujo el polinomio de Jones.

Desafortunadamente, Kelvin estaba equivocado y a finales del siglo XIX apareció un modelo que explicaba mejor la estructura atómica y los químicos perdieron el interés por los nudos. Pero ¡a los matemáticos les había cautivado esta materia y continuaron estudiando los nudos!

En 1974 Perco encontró dos nudos que en la tabla de Little aparecían como diferentes y realmente eran equivalentes. El método utilizado fue asociar a cada nudo un polinomio. El polinomio de Alexander fue el único polinomio conocido hasta 1984 que se introdujo el polinomio de Jones.

Desafortunadamente, Kelvin estaba equivocado y a finales del siglo XIX apareció un modelo que explicaba mejor la estructura atómica y los químicos perdieron el interés por los nudos. Pero ¡a los matemáticos les había cautivado esta materia y continuaron estudiando los nudos!

En 1980 los bioquímicos descubrieron nudos en moléculas de ADN. A la vez, químicos sintéticos descubrieron que era posible crear moléculas anudadas, donde el tipo de nudo determinaba las propiedades de la molécula. Por tanto se cierra el ciclo y los resultados de teoría de nudos vuelven a tener aplicaciones en la química.

¿Que es un nudo?

Todos conocemos nudos y sabemos realizarlos, pero ¿que es exactamente un nudo? A simple vista, un nudo es lo que usamos para evitar que los zapatos se caigan o para enredar una cuerda o simplemente para sujetar objetos. Pero ¿como lo definiríamos matemáticamente?

¿Que es un nudo?

Todos conocemos nudos y sabemos realizarlos, pero ¿que es exactamente un nudo? A simple vista, un nudo es lo que usamos para evitar que los zapatos se caigan o para enredar una cuerda o simplemente para sujetar objetos. Pero ¿como lo definiríamos matemáticamente?

Definición.-

Un nudo es una curva simple cerrada de \mathbb{R}^3 .

¿Que es un nudo?

Todos conocemos nudos y sabemos realizarlos, pero ¿que es exactamente un nudo? A simple vista, un nudo es lo que usamos para evitar que los zapatos se caigan o para enredar una cuerda o simplemente para sujetar objetos. Pero ¿como lo definiríamos matemáticamente?

Definición.-

Un nudo es una curva simple cerrada de \mathbb{R}^3 .

Lamentablemente esta definición es demasiado general para nuestra situación, puesto que existirían nudos en el sentido matemático que no podríamos construir con una cuerda (Figura 1). Estos son los nudos infinitos que suelen llamarse nudos salvajes. Por tanto necesitaremos realizar algunos matices.

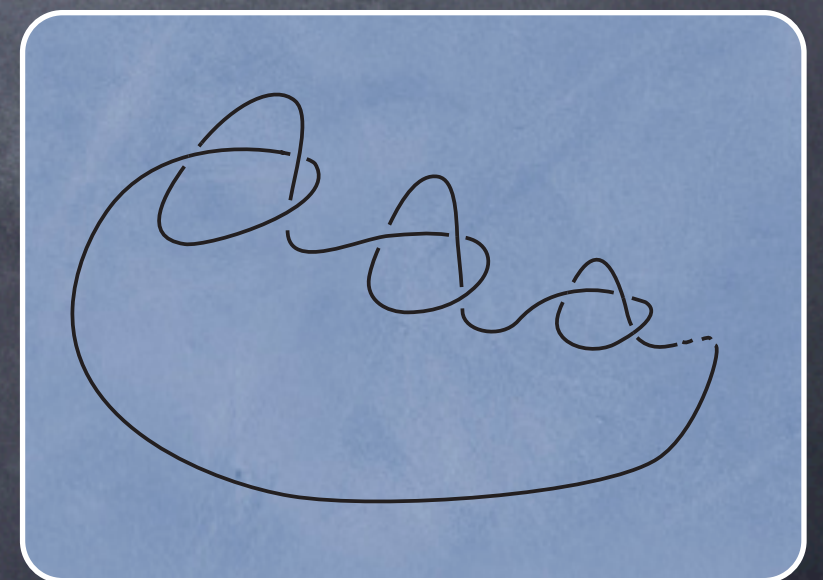


Figura 1. Nudo salvaje.

Definición.-

Dados p y q puntos de \mathbb{R}^3 , denotaremos por $[p, q]$, el segmento que los une.

Dado un conjunto ordenado y finito de puntos de \mathbb{R}^3 , distintos dos a dos, llamaremos curva cerrada poligonal a la unión de los segmentos $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n]$.

Si cada segmento corta exactamente a dos de los restantes y tan solo en los extremos, diremos que la curva es simple.

Definición.-

Dados p y q puntos de \mathbb{R}^3 , denotaremos por $[p, q]$, el segmento que los une.

Dado un conjunto ordenado y finito de puntos de \mathbb{R}^3 , distintos dos a dos, llamaremos curva cerrada poligonal a la unión de los segmentos $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n]$.

Si cada segmento corta exactamente a dos de los restantes y tan solo en los extremos, diremos que la curva es simple.

Ahora estamos en posición de definir formalmente lo que es un nudo matemático.

Definición.-

Dados p y q puntos de \mathbb{R}^3 , denotaremos por $[p, q]$, el segmento que los une.

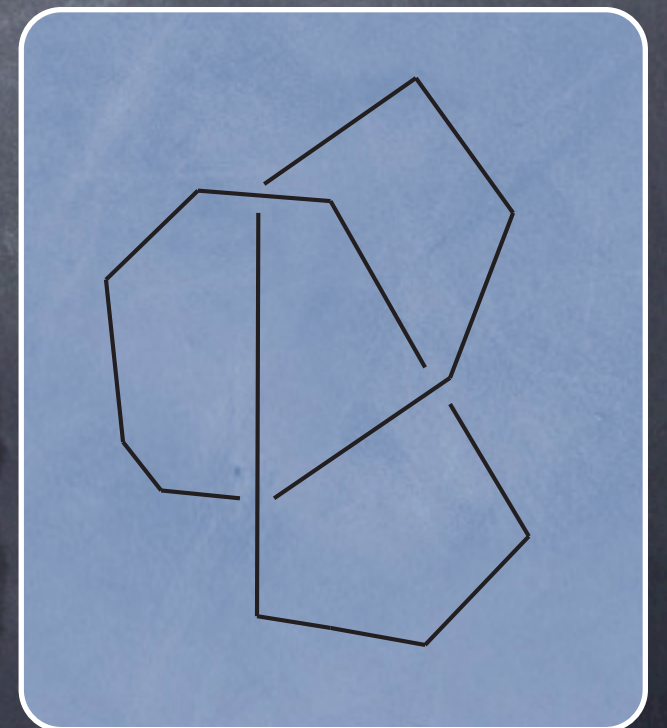
Dado un conjunto ordenado y finito de puntos de \mathbb{R}^3 , distintos dos a dos, llamaremos curva cerrada poligonal a la unión de los segmentos $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n]$.

Si cada segmento corta exactamente a dos de los restantes y tan solo en los extremos, diremos que la curva es simple.

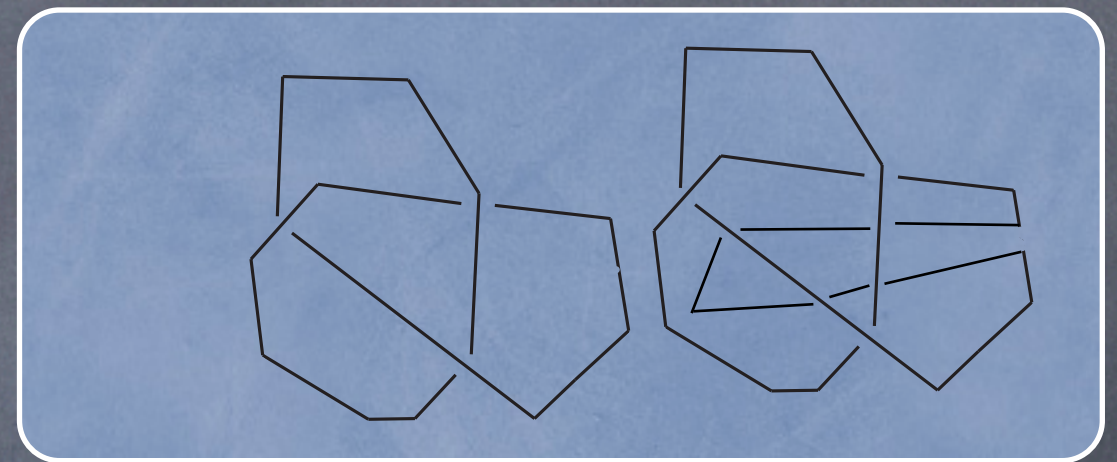
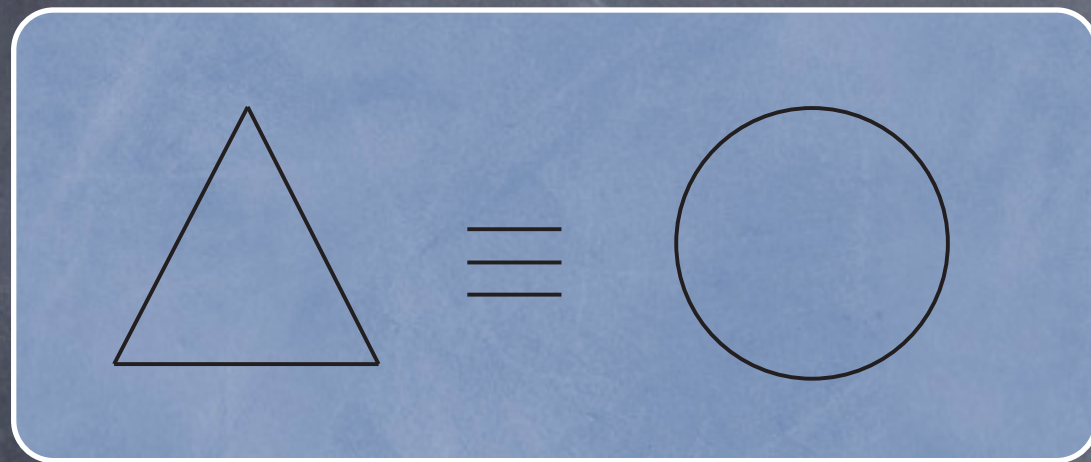
Ahora estamos en posición de definir formalmente lo que es un nudo matemático.

Definición.-

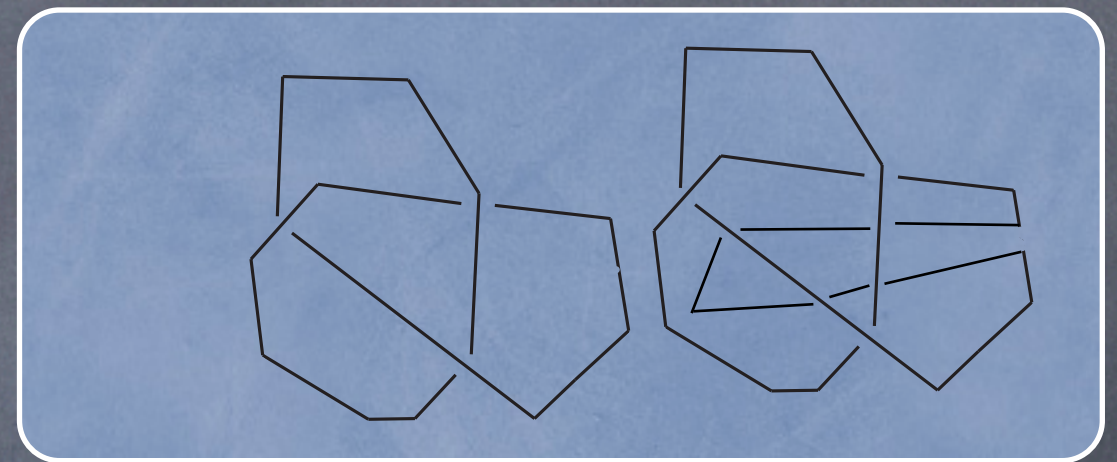
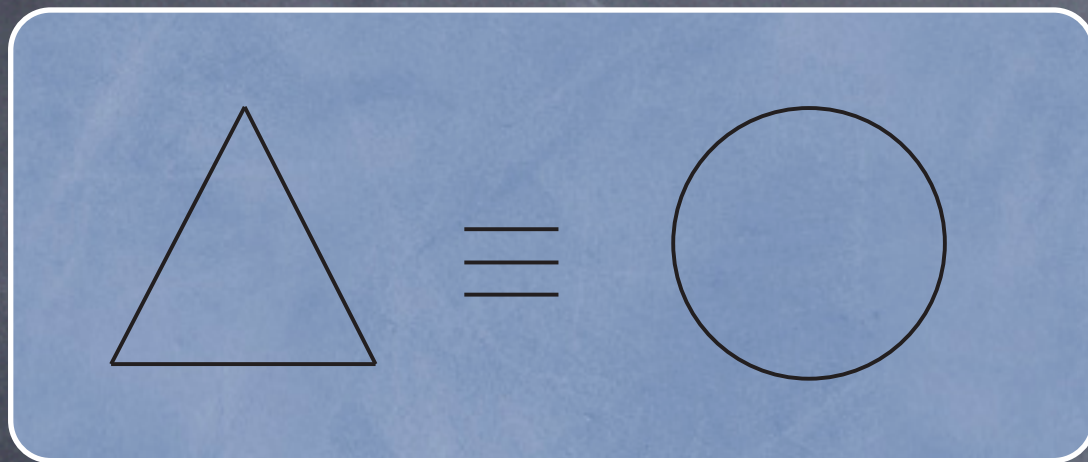
Un nudo es una curva poligonal cerrada y simple de \mathbb{R}^3 , definida por un conjunto ordenado de puntos $\{p_1, \dots, p_n\}$.



Existen nudos que deberíamos considerar iguales, pero que son distintos con esta definición. Por tanto, el siguiente paso es conocer cuando dos nudos son iguales.



Existen nudos que deberíamos considerar iguales, pero que son distintos con esta definición. Por tanto, el siguiente paso es conocer cuando dos nudos son iguales.



Desde el punto vista de las matemáticas se toman clases de equivalencia basadas en las propiedades de las curvas diferenciales. Nosotros realizaremos una definición mucho más intuitiva pero menos rigurosa. Diremos que dos nudos son equivalentes si podemos deformatos para pasar de un nudo a otro sin necesidad de cortar la cuerda.

Nuestro primer nudo (Actividad I)

Llegados a este punto podemos construir nuestro primer nudo. Para ello utilizaremos un globo y una cuerda. Este nudo lo podemos construir utilizando dos métodos distintos.

Nuestro primer nudo (Actividad I)

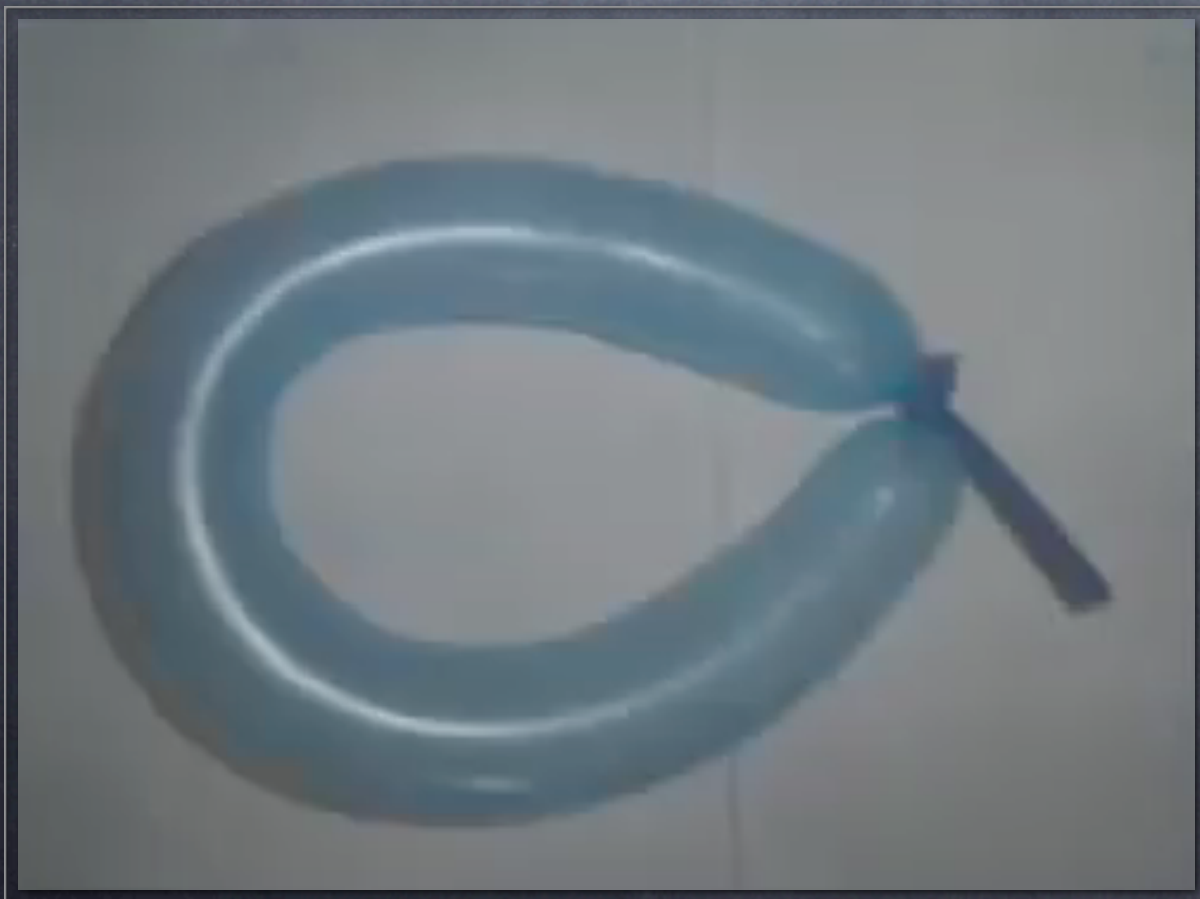
Llegados a este punto podemos construir nuestro primer nudo. Para ello utilizaremos un globo y una cuerda. Este nudo lo podemos construir utilizando dos métodos distintos.

Nos agrupamos en parejas.

Nuestro primer nudo (Actividad I)

Llegados a este punto podemos construir nuestro primer nudo. Para ello utilizaremos un globo y una cuerda. Este nudo lo podemos construir utilizando dos métodos distintos.

Nos agrupamos en parejas.



Primero hinchamos el globo alargado y lo atamos por los extremos. Como se muestra en la foto.

Nuestro primer nudo (Actividad I)

Llegados a este punto podemos construir nuestro primer nudo. Para ello utilizaremos un globo y una cuerda. Este nudo lo podemos construir utilizando dos métodos distintos.

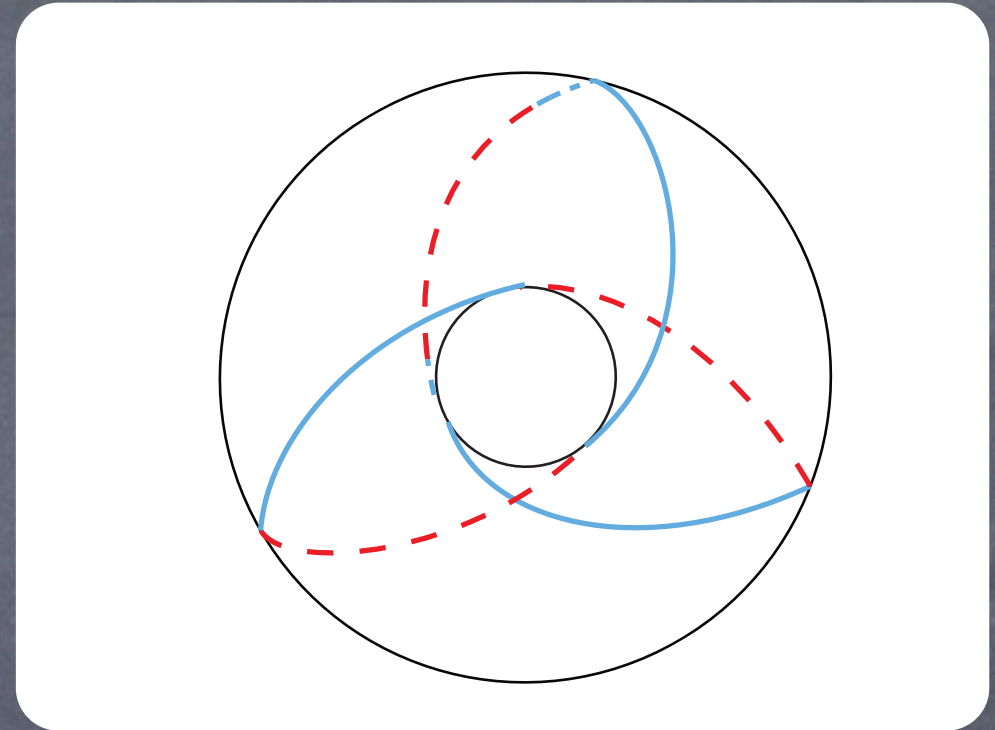
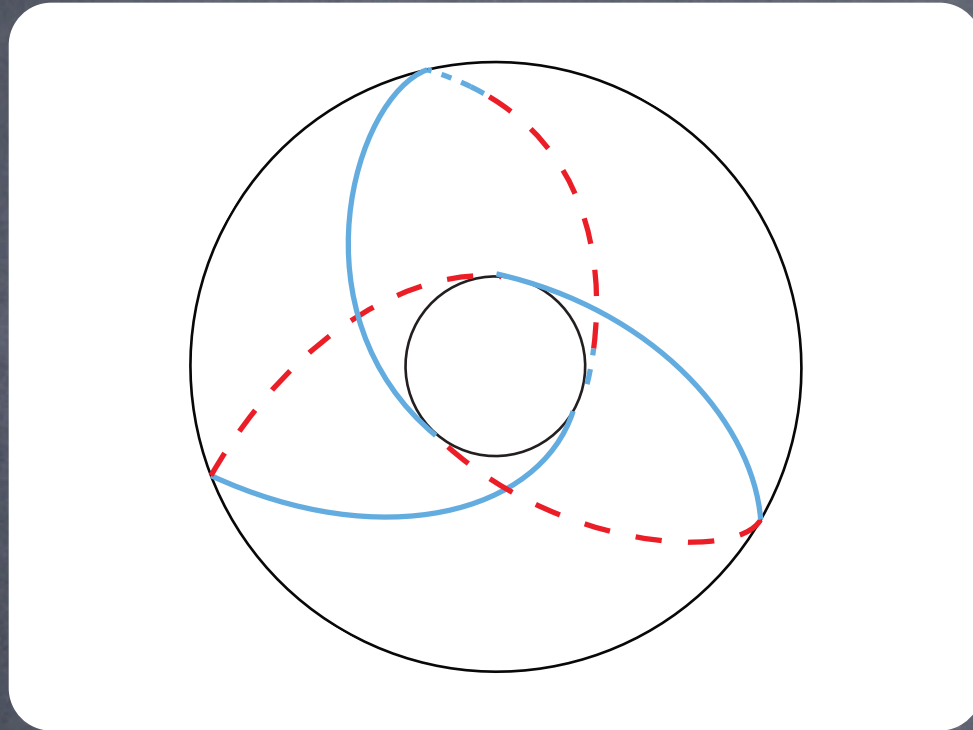
Nos agrupamos en parejas.



Primero hinchamos el globo alargado y lo atamos por los extremos. Como se muestra en la foto.

Luego se pasa la cuerda por el globo. Como se muestra en la siguiente figura.

Para facilitar el trabajo, este es el esquema que debe seguir la cuerda alrededor del globo.



... cada miembro de la pareja ha de escoger una de las dos alternativas, pero **no los dos la misma.**

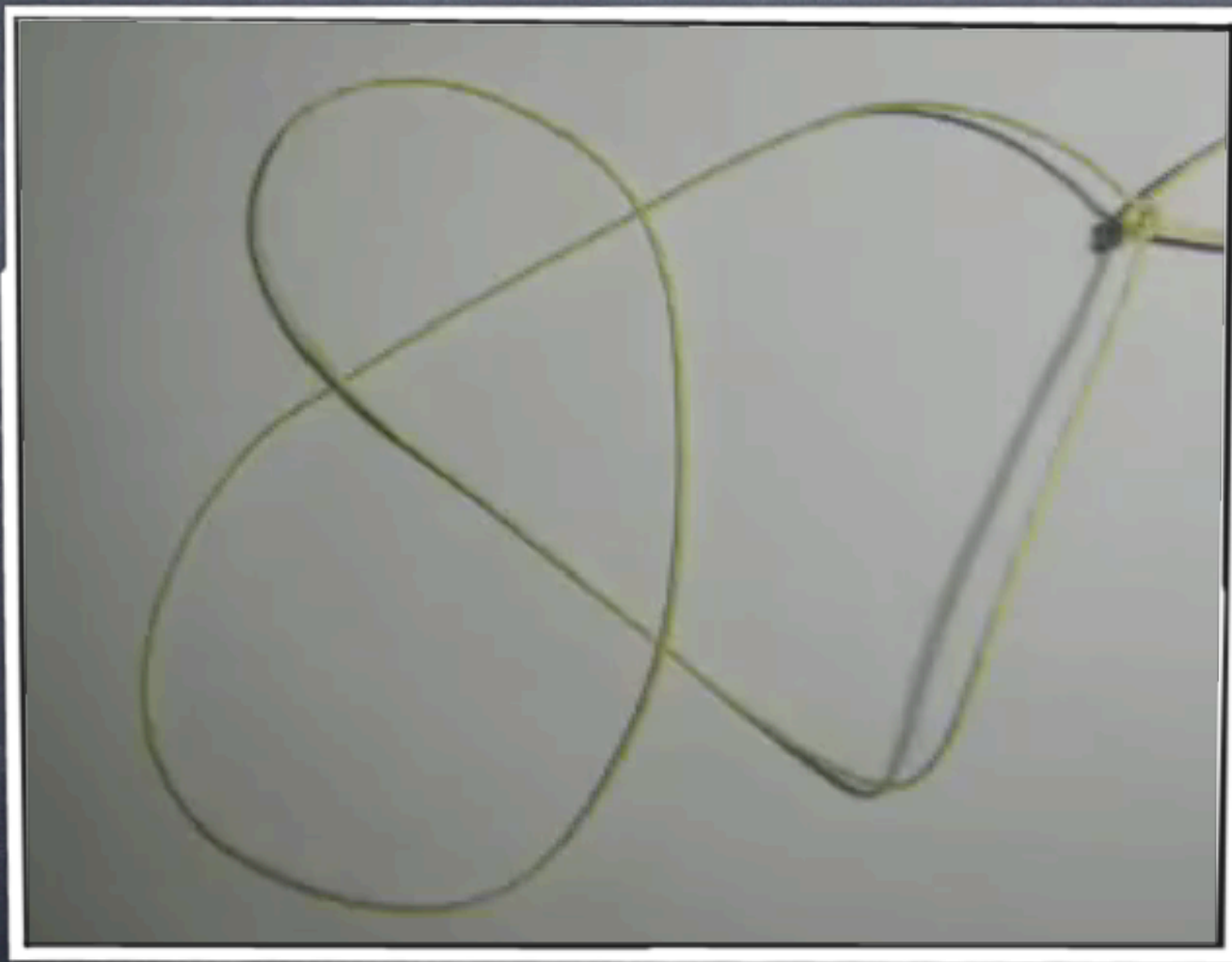
!!!El último paso es PICHAR el globo!!!

!!!El último paso es PICHAR el globo!!!

Sin todo ha salido bien, deberíamos tener dos nudos parecidos a la siguiente imagen:

!!!El último paso es PICHAR el globo!!!

Sin todo ha salido bien, deberíamos tener dos nudos parecidos a la siguiente imagen:



Que también es conocido como el Nudo del trébol.



Como curiosidad resaltar que los nudos que habéis creado no son equivalentes.



Primera alternativa



Segunda alternativa

Estudio de los nudos en papel

Si observamos bien, hasta el momento no hemos empleado nada de matemáticas, todo es sencillo y visible. Así que pasemos a complicar la situación.

Estudio de los nudos en papel

Si observamos bien, hasta el momento no hemos empleado nada de matemáticas, todo es sencillo y visible. Así que pasemos a complicar la situación.

Vamos a proyectar la cuerda que forma el nudo. Para realizar la proyección sin perder información de este, hemos de definir algún procedimiento distinto del habitual porque como hemos observado, no tenemos el mismo nudo con las dos construcciones anteriores.

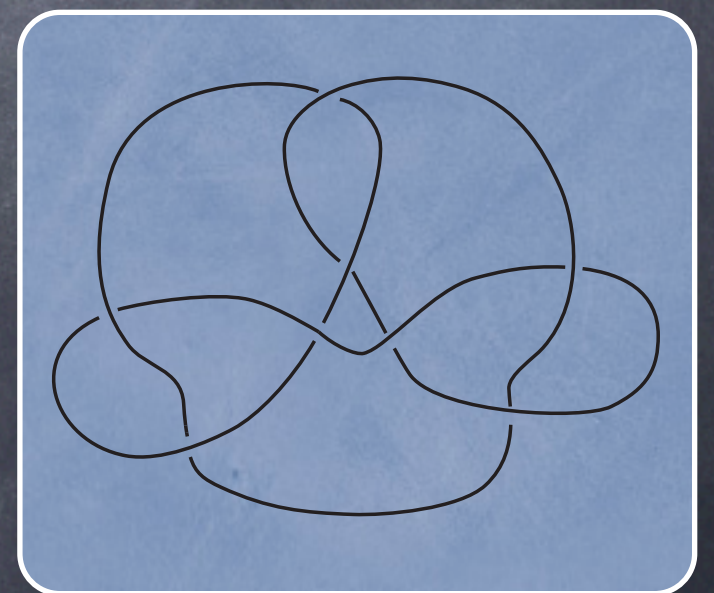
Estudio de los nudos en papel

Si observamos bien, hasta el momento no hemos empleado nada de matemáticas, todo es sencillo y visible. Así que pasemos a complicar la situación.

Vamos a proyectar la cuerda que forma el nudo. Para realizar la proyección sin perder información de este, hemos de definir algún procedimiento distinto del habitual porque como hemos observado, no tenemos el mismo nudo con las dos construcciones anteriores.

Definición.-

Un diagrama de un nudo es una proyección en la que indicamos si los cruces son superiores o inferiores mediante un espacio en blanco.



A partir de ahora dejaremos de estudiar nudos y pasaremos a estudiar diagramas. Diremos que dos nudos son equivalentes si tienen el mismo diagrama o diagramas equivalentes, pero...

A partir de ahora dejaremos de estudiar nudos y pasaremos a estudiar diagramas. Diremos que dos nudos son equivalentes si tienen el mismo diagrama o diagramas equivalentes, pero...

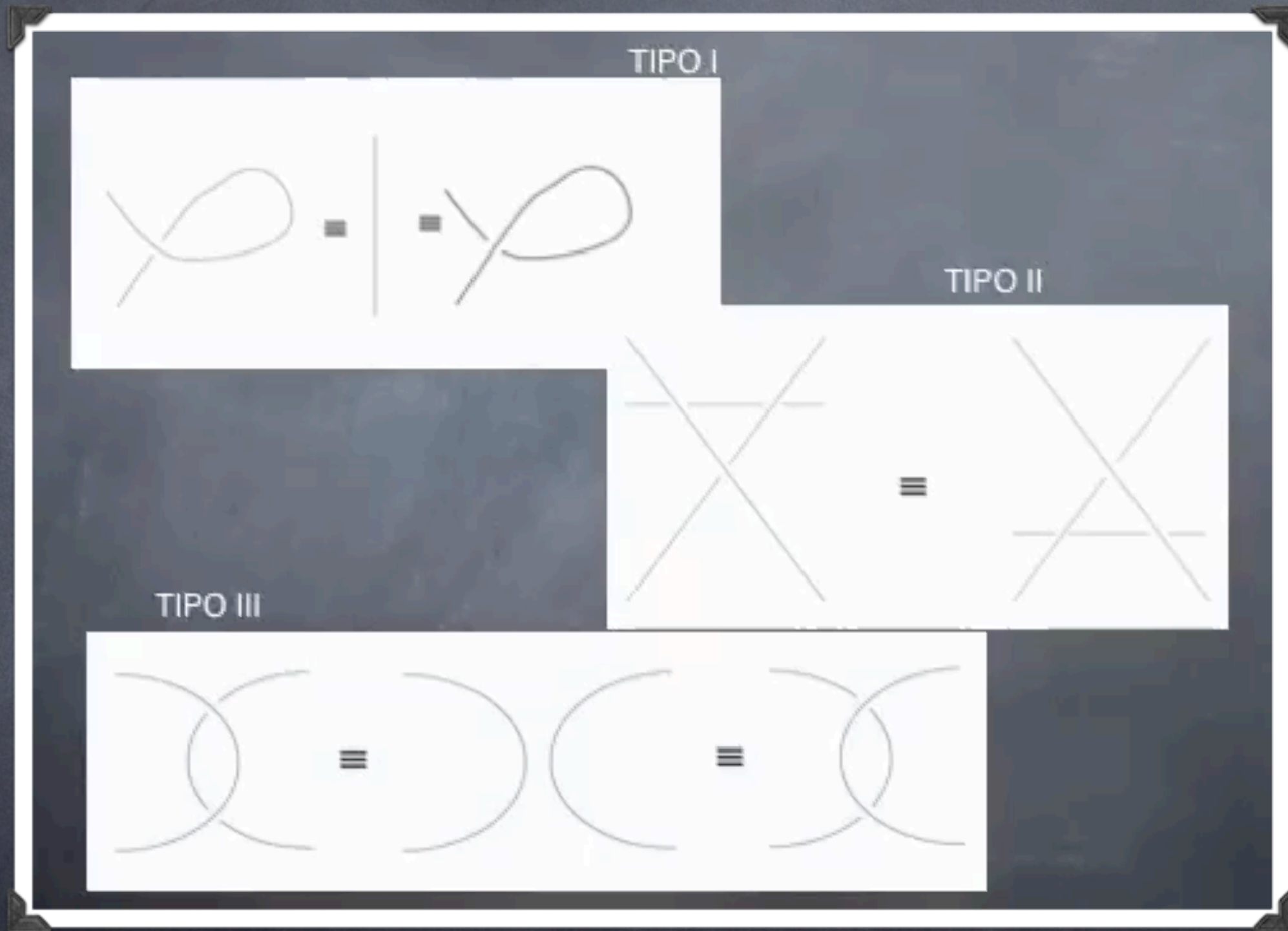
¿Cuándo dos diagramas son equivalentes?

A partir de ahora dejaremos de estudiar nudos y pasaremos a estudiar diagramas. Diremos que dos nudos son equivalentes si tienen el mismo diagrama o diagramas equivalentes, pero...

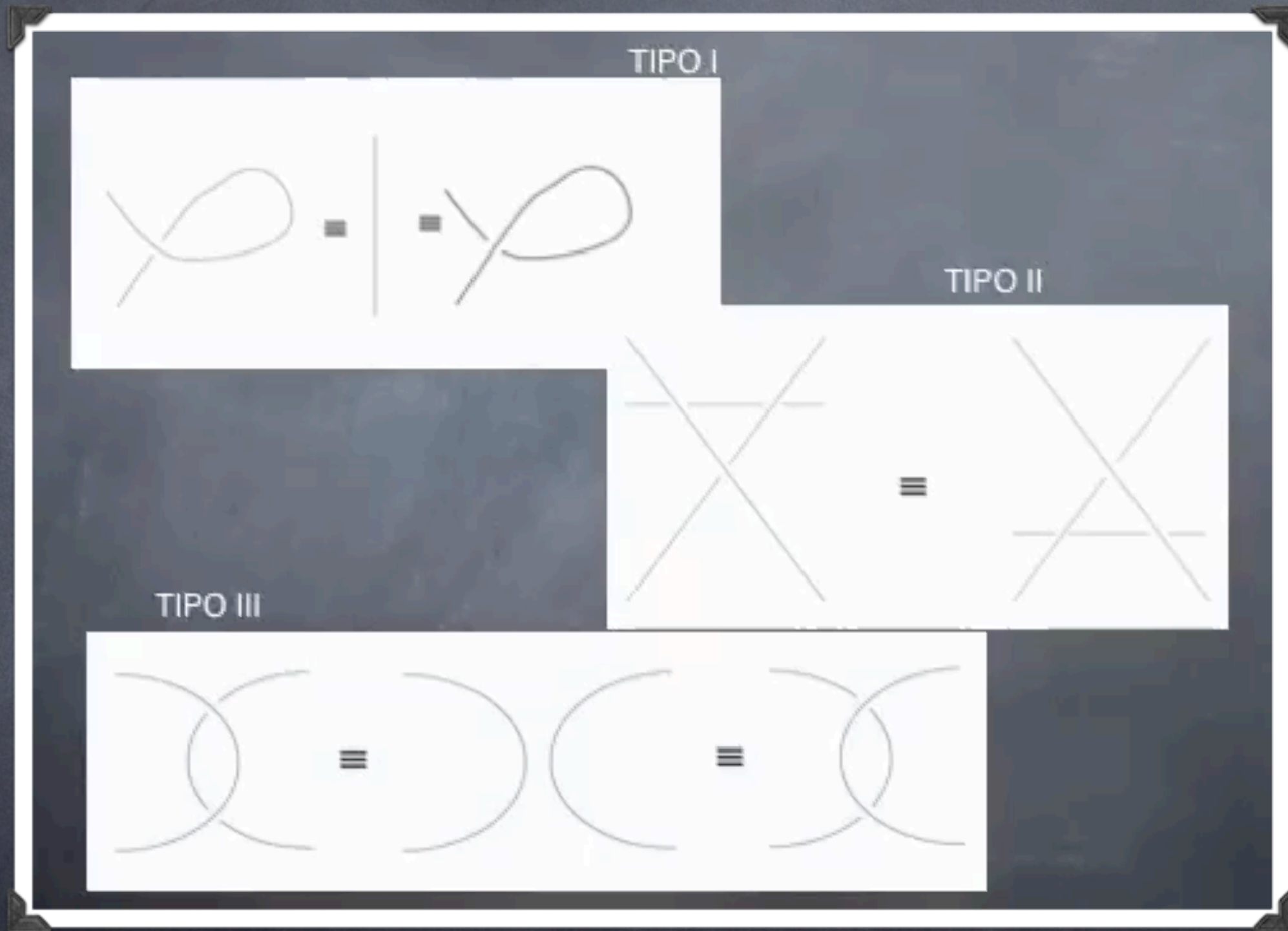
¿Cuándo dos diagramas son equivalentes?

La respuesta nos la dio Reidemeister en 1920 cuando demostró, que solamente combinando tres movimientos, podemos llegar a saber si dos nudos son equivalentes.

Los tres movimientos de Reidemeister son:



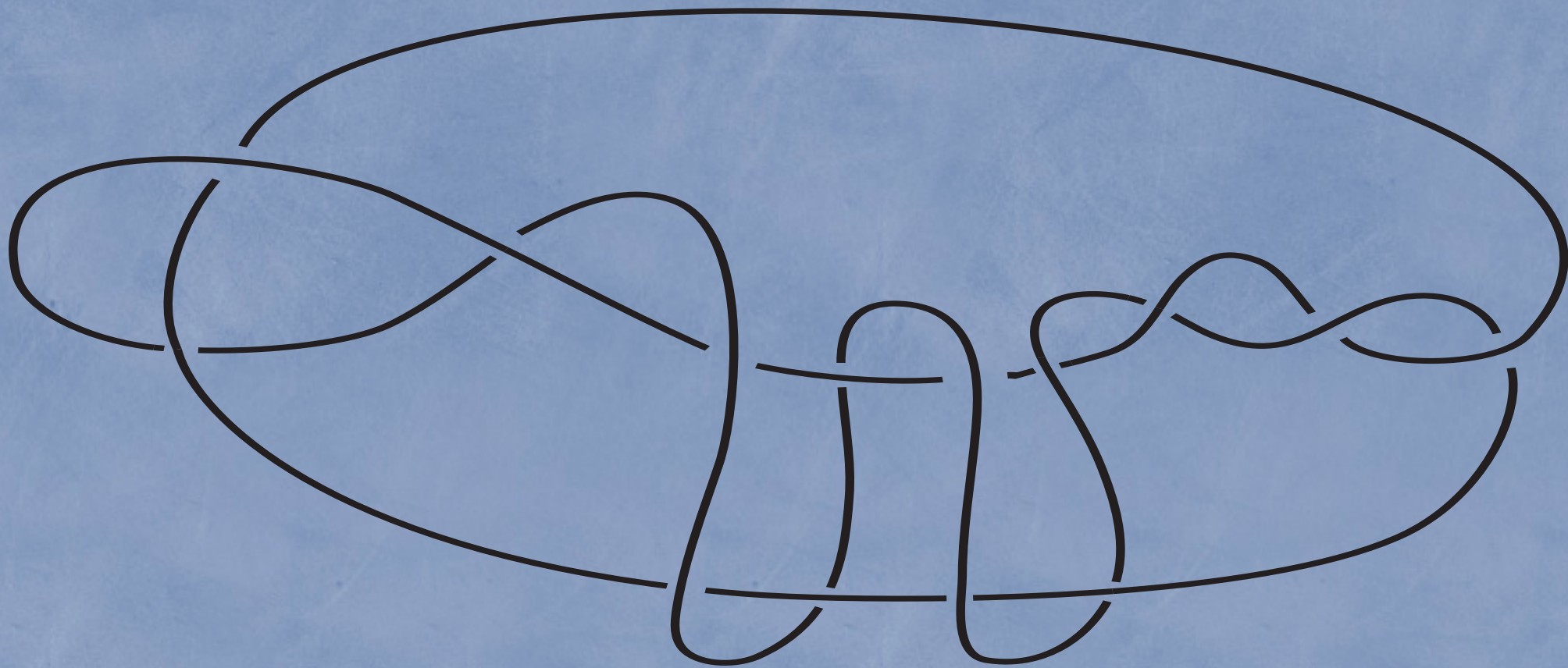
Los tres movimientos de Reidemeister son:



Vamos a aplicar estos movimientos al siguiente nudo..

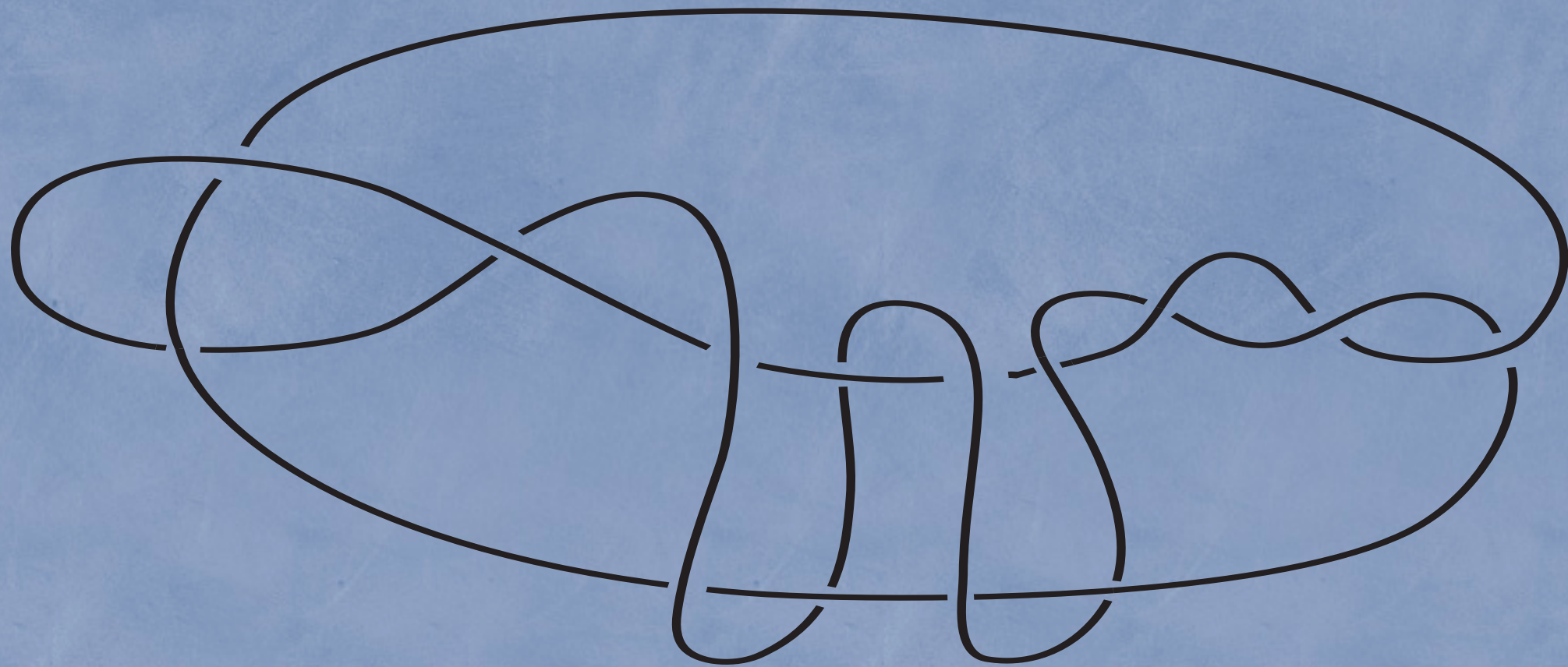
Actividad II

El siguiente nudo no es equivalente al nudo trivial, es decir a una circunferencia. ¿Qué dos cruces hemos de intercambiar para lograr convertir este nudo en el trivial?



Actividad II

Para comprobar que efectivamente los cruces elegidos son correctos, vamos a representar este nudo con plastilina. Formamos primero una cuerda estirada y seguimos después los pasos que indica el dibujo. Tras crear el nudo intercambiamos los cruces propuestos y tratamos de recuperar la circunferencia aplicando los movimientos de Reidemeister, pero SIN llegar a ROMPER la plastilina.



Ver que dos diagramas son equivalentes puede resultar excesivamente difícil o incluso imposible; por tanto, intentaremos averiguar cuando dos diagramas NO son equivalentes utilizando invariantes.

Ver que dos diagramas son equivalentes puede resultar excesivamente difícil o incluso imposible; por tanto, intentaremos averiguar cuando dos diagramas NO son equivalentes utilizando invariantes.

El primer invariante lo hemos visto en el anterior ejemplo, dado que para deshacer el nudo y convertirlo en el trivial hemos tenido que romper la cuerda dos veces.

Ver que dos diagramas son equivalentes puede resultar excesivamente difícil o incluso imposible; por tanto, intentaremos averiguar cuando dos diagramas NO son equivalentes utilizando invariantes.

El primer invariante lo hemos visto en el anterior ejemplo, dado que para deshacer el nudo y convertirlo en el trivial hemos tenido que romper la cuerda dos veces.

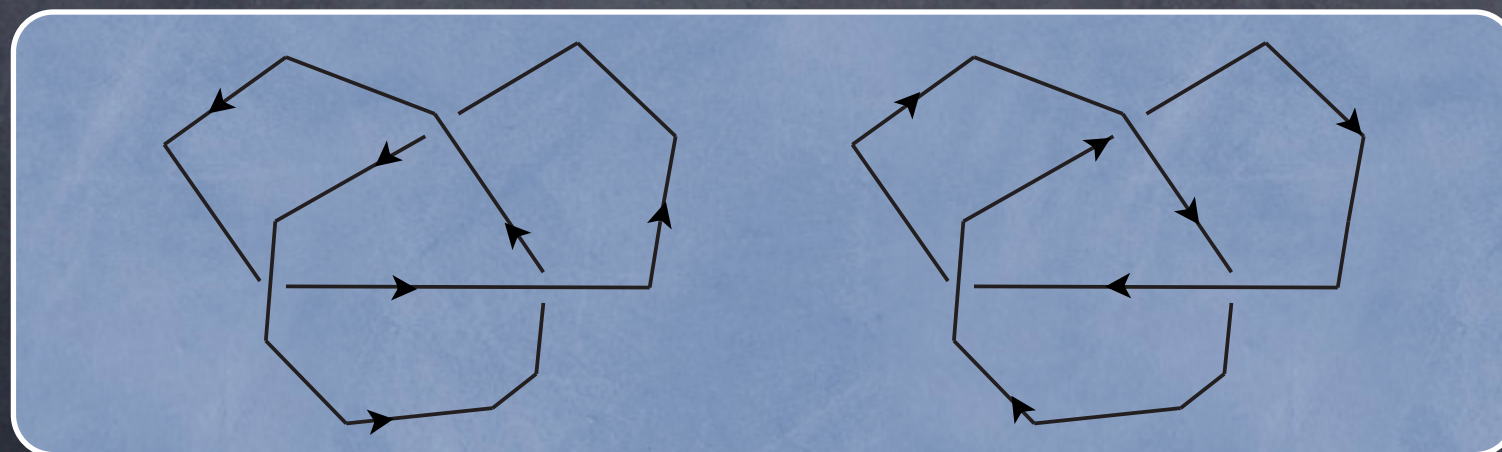
Orientación de los nudos

Ver que dos diagramas son equivalentes puede resultar excesivamente difícil o incluso imposible; por tanto, intentaremos averiguar cuando dos diagramas NO son equivalentes utilizando invariantes.

El primer invariante lo hemos visto en el anterior ejemplo, dado que para deshacer el nudo y convertirlo en el trivial hemos tenido que romper la cuerda dos veces.

Orientación de los nudos

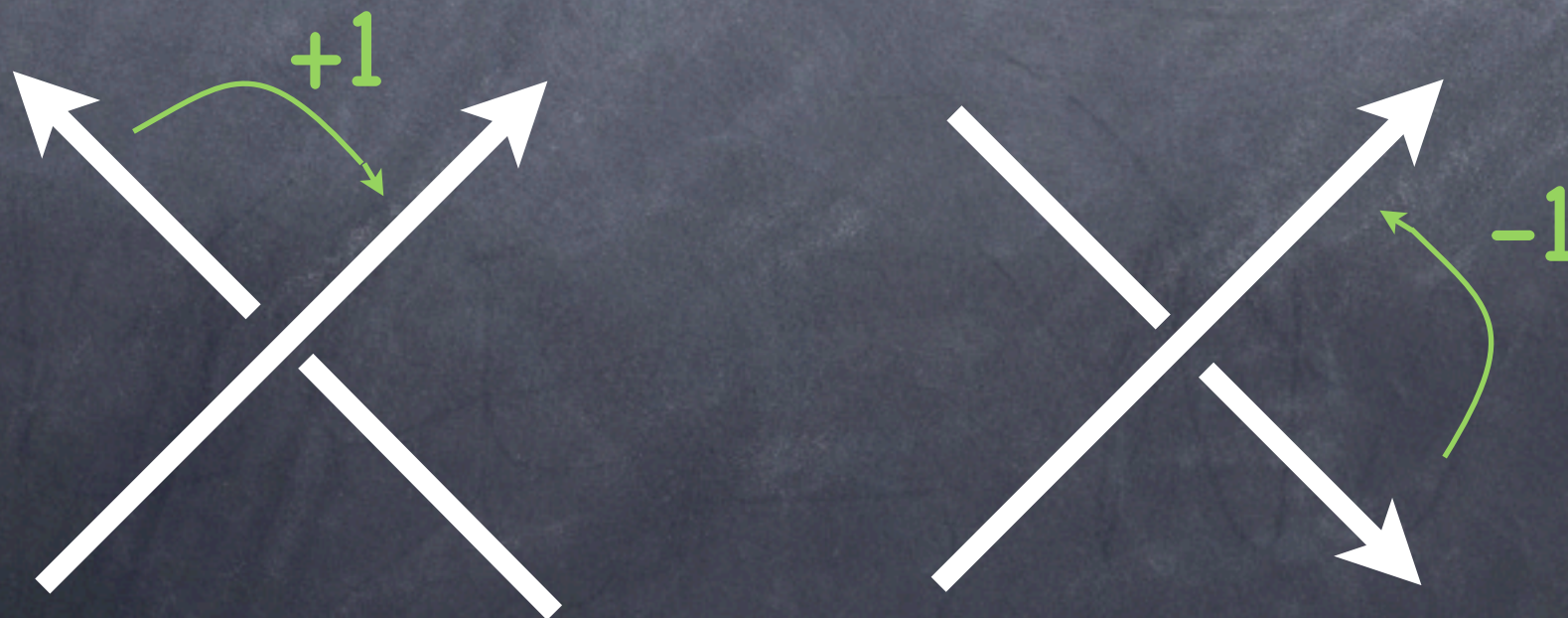
Los nudos al igual que las carreteras, se pueden recorrer en dos sentidos, y esta orientación la podemos representar en el diagrama. Para ello elegimos un sentido de orientación y dibujaremos flechas junto a los cruces en el sentido que hemos orientado el nudo. Recorriendo el nudo de principio a fin como se muestra en la siguiente imagen.



Para definir el invariante necesitamos asignarle un número a cada cruce, siguiendo la siguiente regla:

- ★ Le asignaremos $+1$ si al llevar la rama de debajo sobre la de arriba lo hacemos en la dirección de las agujas del reloj.
- ★ Si lo hacemos en dirección contraria, le asignaremos -1 . En los cruces siguientes, el primero tiene signo $+1$ y el segundo -1 .

El invariante asociado es la suma de los números de todos los cruces. De este modo, obtendremos que dos diagramas con distinto invariante han de ser distintos, mientras que dos nudos con el mismo invariante pueden ser el mismo.



Actividad III

¿Puedes calcular ahora la orientación del trébol y demostrar que el trébol no puede deshacerse?



Engarces

Los matemáticos no tenemos suficiente con no conocer los nudos y no saber trabajar con ellos. Hemos de complicar más las cosas ¡¡¡incluso sin saber clasificarlos y reconocerlos!!! Por este motivo definimos los engarces.

Definición.-

Un engarce es una unión finita de nudos disjuntos, en particular, un nudo es un engarce de una única componente conexa.

Engarces

Los matemáticos no tenemos suficiente con no conocer los nudos y no saber trabajar con ellos. Hemos de complicar más las cosas ¡¡¡incluso sin saber clasificarlos y reconocerlos!!! Por este motivo definimos los engarces.

Definición.-

Un engarce es una unión finita de nudos disjuntos, en particular, un nudo es un engarce de una única componente conexa.

Actividad IV

¿Cuál es el engarce trivial?

Engarces

Los matemáticos no tenemos suficiente con no conocer los nudos y no saber trabajar con ellos. Hemos de complicar más las cosas ¡¡¡incluso sin saber clasificarlos y reconocerlos!!! Por este motivo definimos los engarces.

Definición.-

Un engarce es una unión finita de nudos disjuntos, en particular, un nudo es un engarce de una única componente conexa.

Actividad IV

¿Cuál es el engarce trivial?

¿Podrías decir cual es el engarce no trivial más simple?

Todo lo estudiado hasta el momento de nudos lo podemos adaptar a los engarces, y de este modo, obtener invariantes para clasificarlos. También podemos definir nuevos invariantes, como por ejemplo el número de componentes conexas, o relaciones entre las orientaciones de cada una de las componentes conexas.

Todo lo estudiado hasta el momento de nudos lo podemos adaptar a los engarces, y de este modo, obtener invariantes para clasificarlos. También podemos definir nuevos invariantes, como por ejemplo el número de componentes conexas, o relaciones entre las orientaciones de cada una de las componentes conexas.

Actividad V

En parejas, realizar la siguiente actividad.

- ▶ Dibuja un engarce no trivial de dos o más anillas.

Todo lo estudiado hasta el momento de nudos lo podemos adaptar a los engarces, y de este modo, obtener invariantes para clasificarlos. También podemos definir nuevos invariantes, como por ejemplo el número de componentes conexas, o relaciones entre las orientaciones de cada una de las componentes conexas.

Actividad V

En parejas, realizar la siguiente actividad.

- ▶ Dibuja un engarce no trivial de dos o más anillas.
- ▶ Intercambia tu engarce con el de tu compañero.

Todo lo estudiado hasta el momento de nudos lo podemos adaptar a los engarces, y de este modo, obtener invariantes para clasificarlos. También podemos definir nuevos invariantes, como por ejemplo el número de componentes conexas, o relaciones entre las orientaciones de cada una de las componentes conexas.

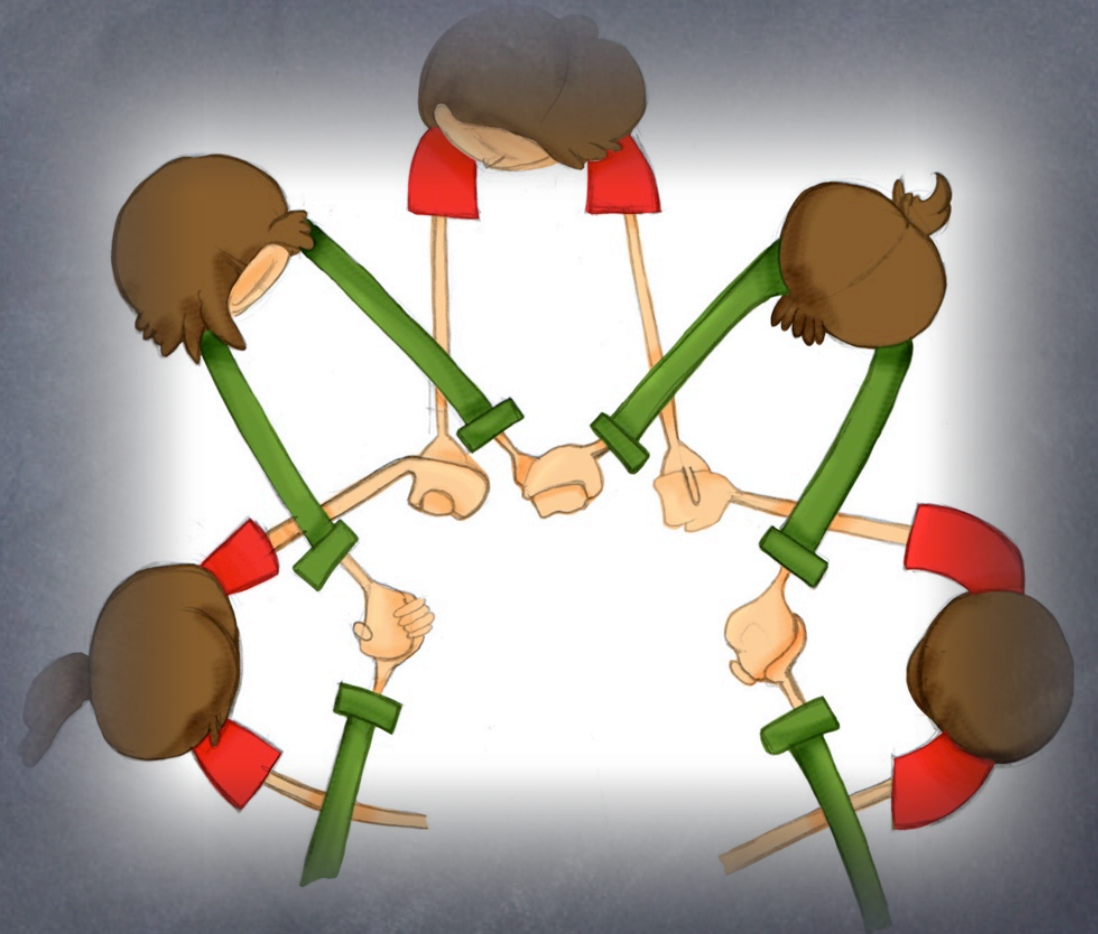
Actividad V

En parejas, realizar la siguiente actividad.

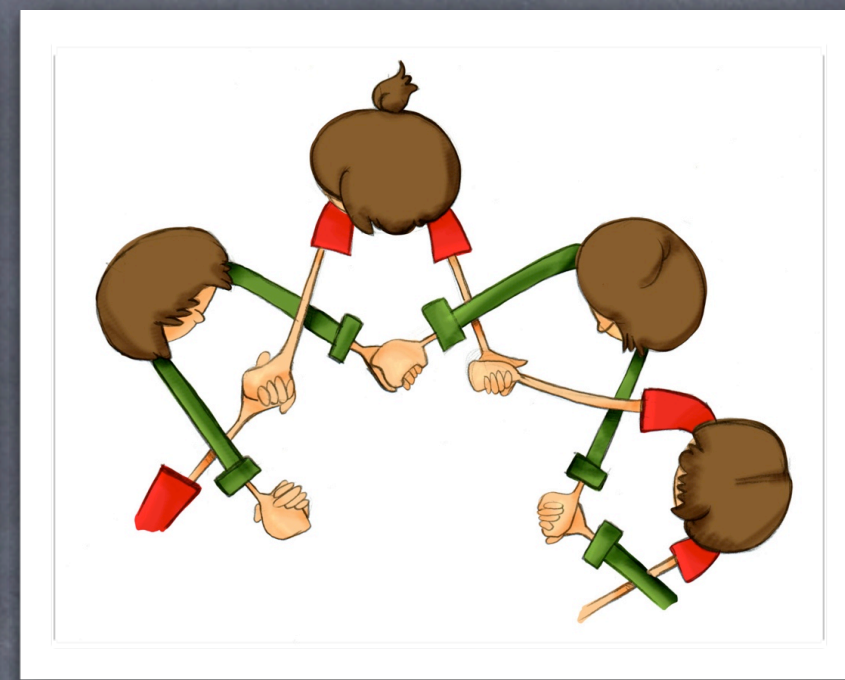
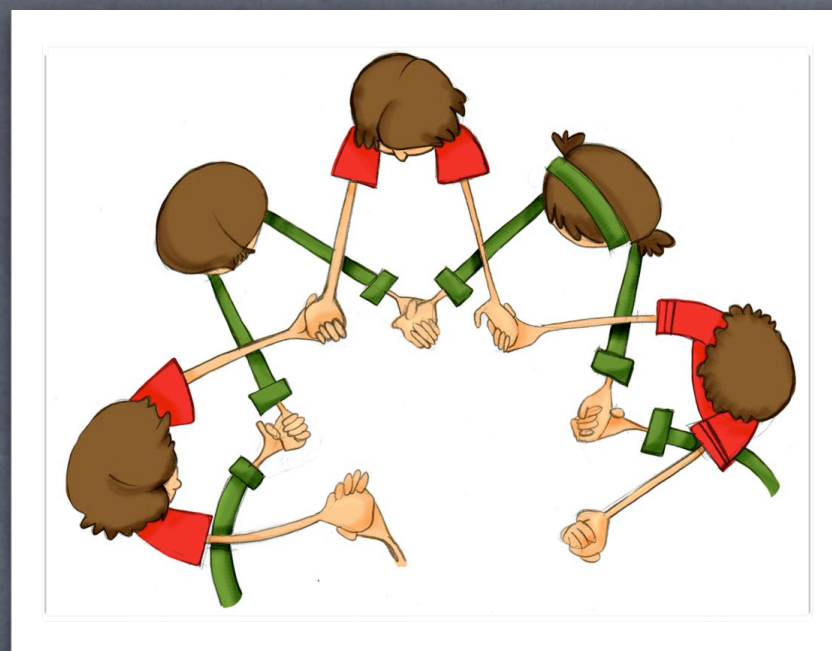
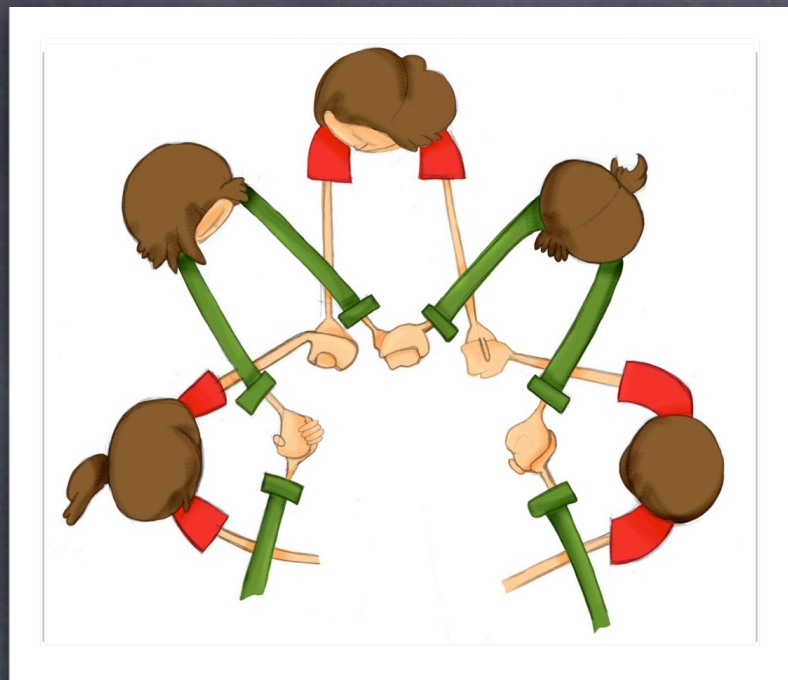
- ▶ Dibuja un engarce no trivial de dos o más anillas.
- ▶ Intercambia tu engarce con el de tu compañero.
- ▶ Encuentra el menor número de cruces que hace falta intercambiar para convertir el engarce en un engarce trivial.

Actividad VI · Brazos revueltos

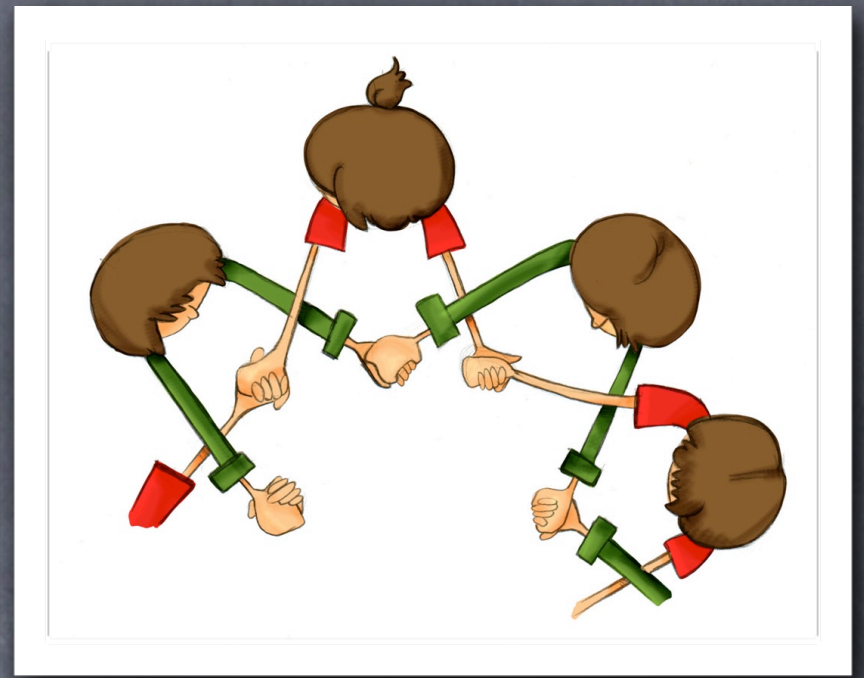
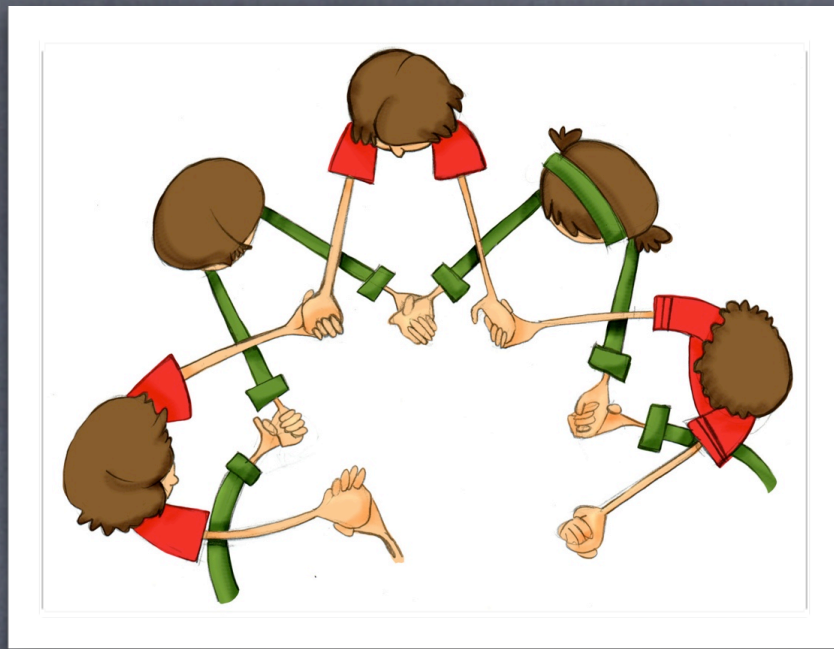
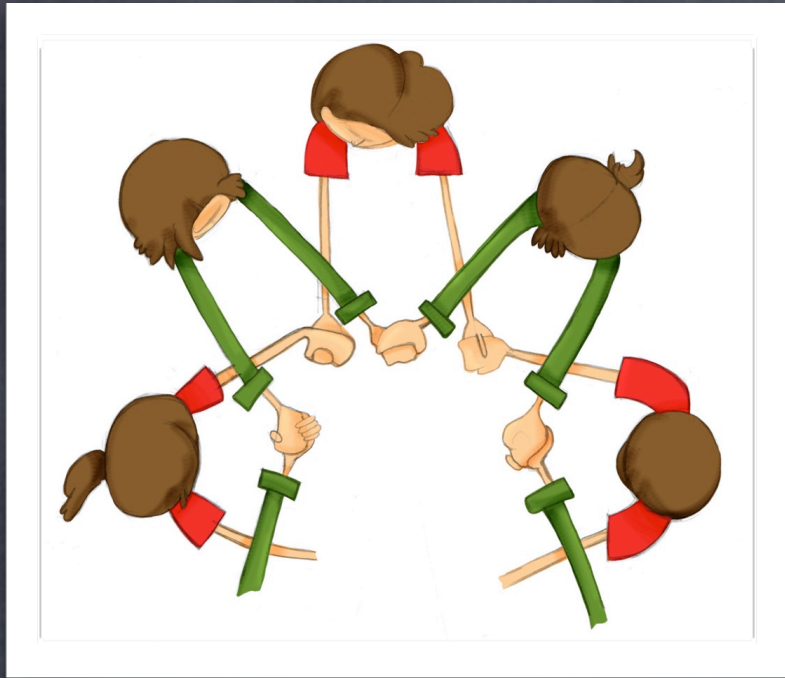
Para concluir el taller vamos a realizar una actividad en grupo. Nos dividimos en varios grupos sin importar el número de gente que compone cada grupo. Ahora cada componente se situará en el círculo, y se cruzarán los brazos de modo aleatorio, usando las tres posibilidades que se muestran en la figura. Seguidamente, entre todos los miembros del grupo han de averiguar si lo que han conseguido construir es un nudo o un engarce y descubrir cual es el menor número de gente que ha de intercambiar el cruce superior a inferior o viceversa, para conseguir obtener el nudo o engarce trivial.



Estas son las tres posibilidades:



Estas son las tres posibilidades:

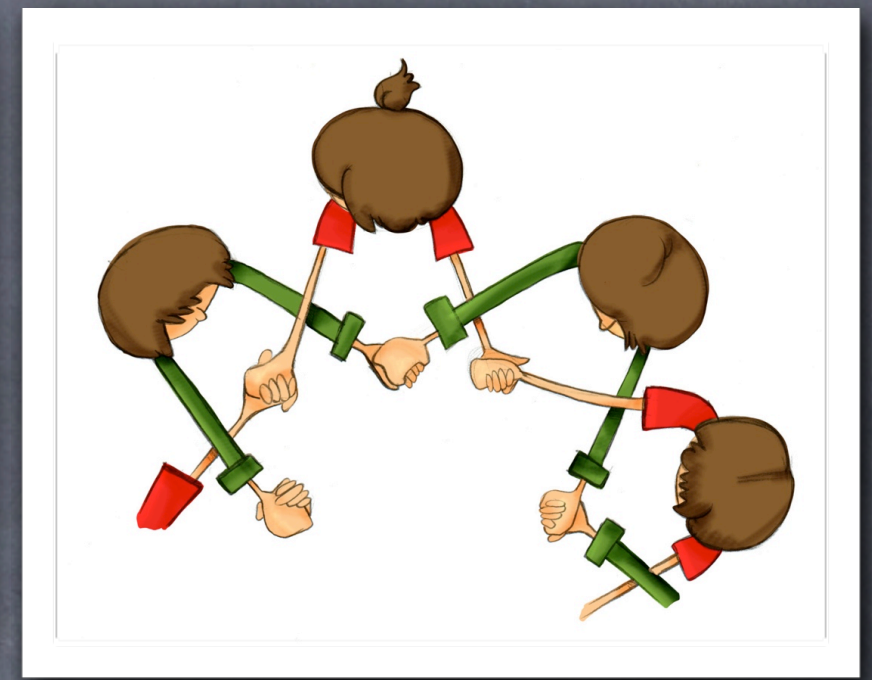
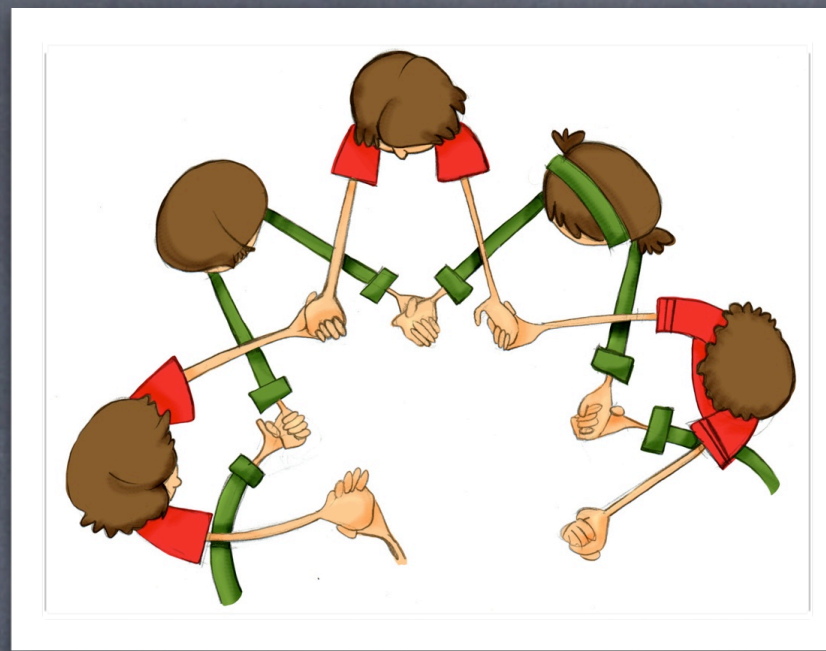
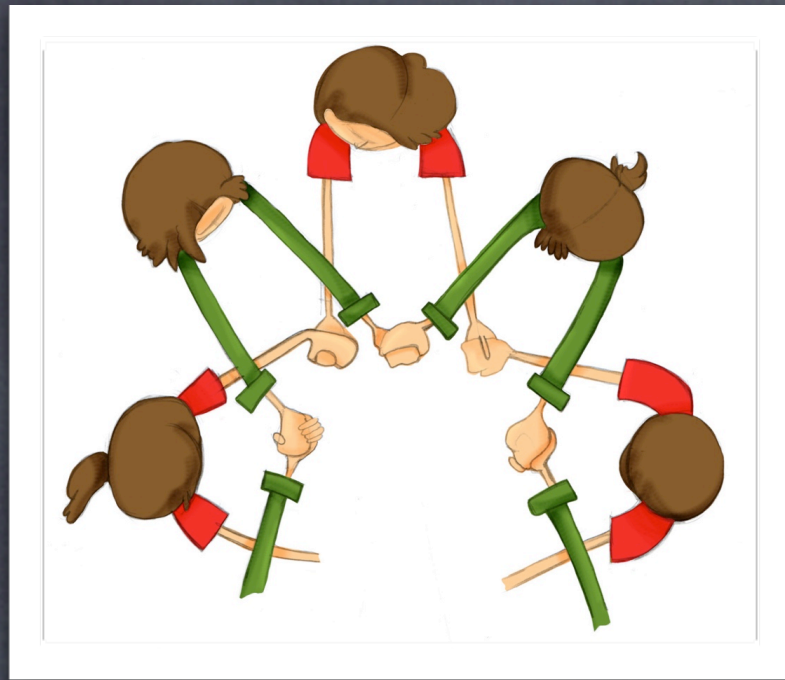


Comprobar si sois capaces de responder a las siguientes cuestiones:



¿Sois un engarce o un nudo?

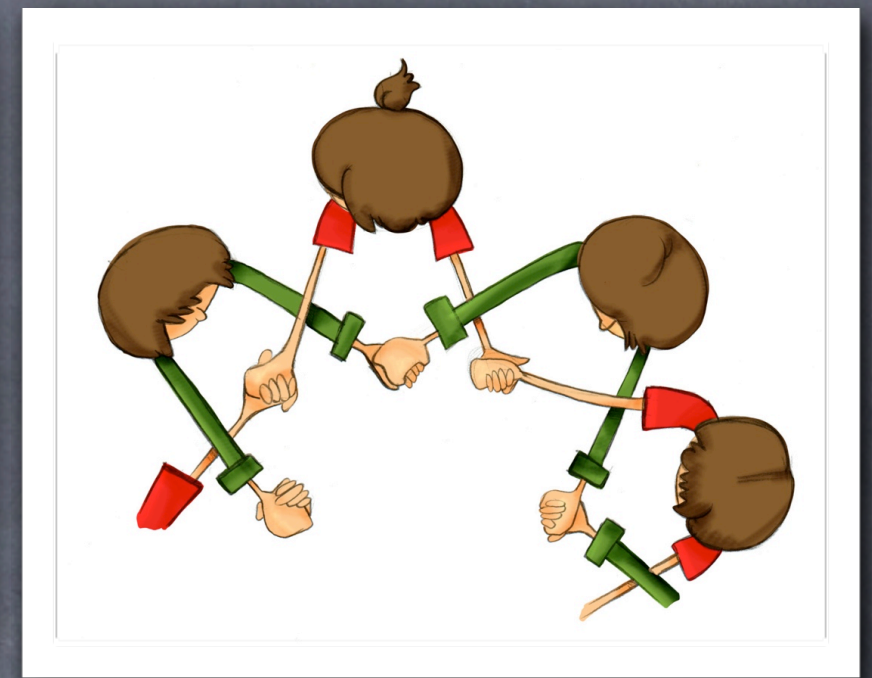
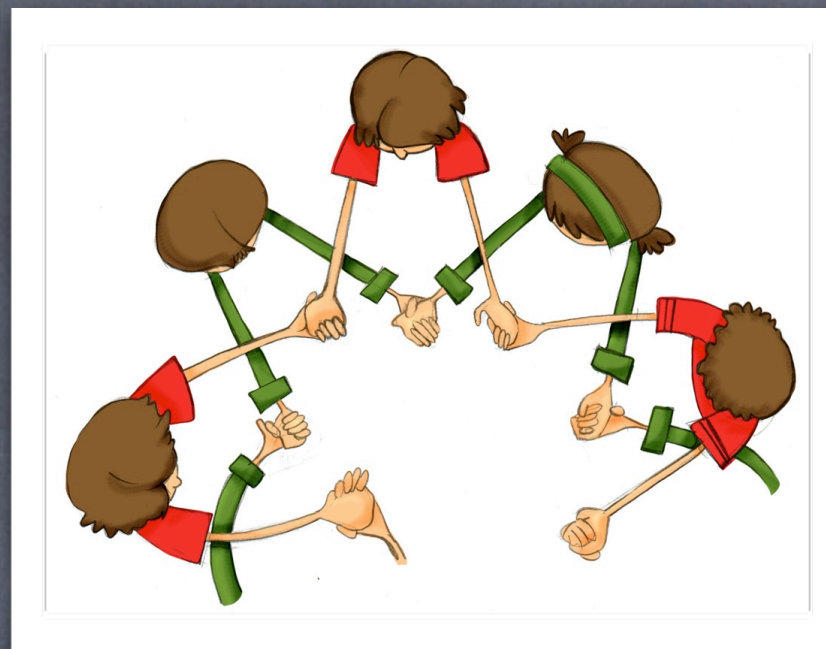
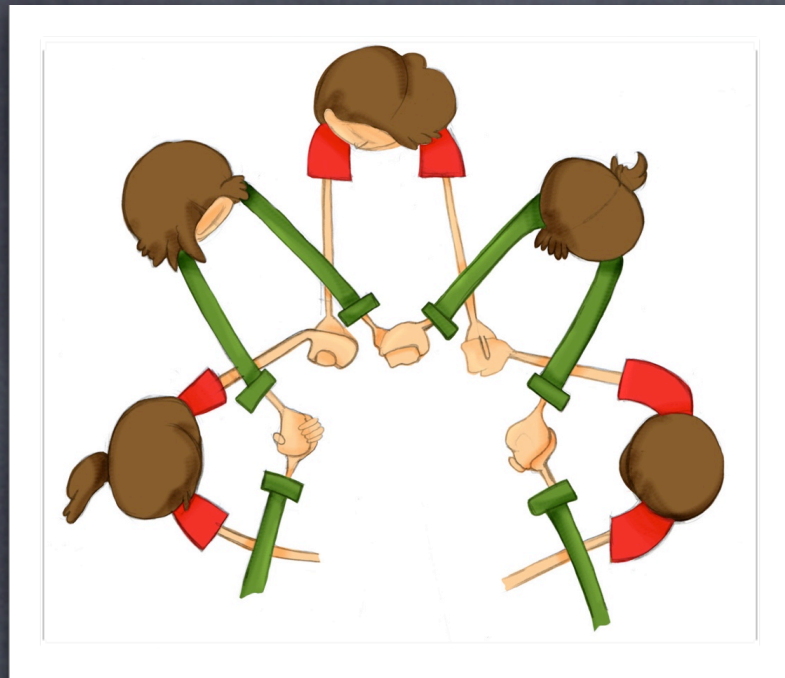
Estas son las tres posibilidades:



Comprobar si sois capaces de responder a las siguientes cuestiones:

- ▶ ¿Sois un engarce o un nudo?
- ▶ ¿Qué regla dice si sois un engarce o un nudo?

Estas son las tres posibilidades:



Comprobar si sois capaces de responder a las siguientes cuestiones:

- ▶ ¿Sois un engarce o un nudo?
- ▶ ¿Qué regla dice si sois un engarce o un nudo?
- ▶ ¿Quién o quiénes consiguen deshacer el nudo cambiando el brazo de arriba abajo o viceversa?

Nudos matemáticos

Javier Falcó Benavent