Javier Falcó Benavent.
Universitat Politècnica de València
frafalbe@upvnet.upv.es

PROBLEMAS MEZCLADOS (ANEXO III)

Actividades matemáticas que incitan a la modelización.

PROBLEMAS MEZCLADOS

EQUIPO 1

Dinámica del equipo

Contenidos

Este taller seta enfocado a alumnos con una alta capacidad para comprender y manejar los objetos geométricos. Los tres problemas presentados tienen soluciones geométricas que requieren de una alta capacidad para manejar los objetos presentados.

<u>Títulos de los talleres</u>

(1)Cuadrados y L.

(2)Cuatrillizos.

(3)Ángulos.

<u>Ayuda para el taller</u>

(A)
(B)
(C)
(D)
(E)
(F)
(G)
(H)
(I)
(J)
(K)

Dificultad

Problema 1: ★★☆☆☆

Problema 2: ★★★☆☆

Problema 3: ★★★★☆

Destinatarios

Alumnos de Bachillerato y alumnos de Ciclos Formativos de Grado Medio y Superior.

Requisitos

Se requieren conocimientos básicos de:

- Razonamiento matemático.
- Lógica deductiva.
- Demostraciones matemáticas.
- Destreza en el manejo de los objetos geométricos.

Objetivos

- Mejorar las destrezas matemáticas de los alumnos.
- Fomento del razonamiento lógico.
- Potenciación del uso de las matemáticas en la vida cotidiana.
- Mayor compresion de la geometría y los objetos geométricos.
- Realización de trabajo corporativo.

Información de la actividad

Planificación previa

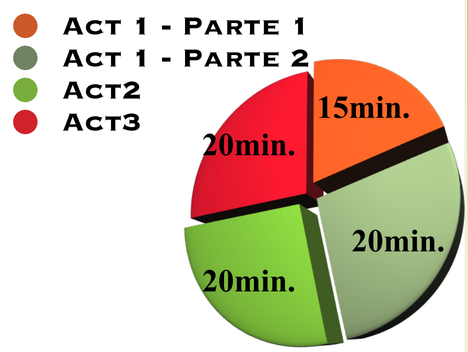
La primera actividad consta de dos partes:

- En la primera, parte el profesor entrega a los alumnos el tablero de ajedrez y las fichas y le propone recubrir completamente el tablero con las fichas, con la condición que las fichas no se solapen ni sobresalgan del tablero.
- En la segunda, los alumnos intentan generalizar matemáticamente la experiencia realizada con el tablero y las fichas.

Recursos

- 1 tablero de ajedrez.
- 22 fichas en forma de L. Cada ficha ha de ser menor o igual que tres cuadrados del tablero de ajedrez. Estas fichas pueden construirse con papel o utilizando piezas de Lego.

Tiempo 35 minutos



"Dime y lo olvido,
enséñame y lo recuerdo,
involúcrame y lo aprendo"

Benjamín Franklin (1796-1859)
Educador estadounidense.

Continua en la parte posterior

Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

Cuadrados y L

Recubrir

El objetivo de este juego es averiguar si se puede recubrir un tablero de ajedrez utilizando fichas con forma de L.

Entendemos por recubrir el tablero, que las fichas no se solapen y que ninguna parte de la ficha sobresalga del tablero.

Utilizando el tablero de ajedrez y las fichas intentad recubrir el tablero.

Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

Cuadrados y L

Supongamos que tenemos un tablero cuadrado de un juego de mesa, y el número de casillas de este es 2^n por 2^n, es decir, en cada lado del tablero se encuentran 2^n casillas.

Problema *¿Se puede recubrir este tablero con fichas en forma de L de modo que cada ficha sea exactamente 3 casillas del tablero?*

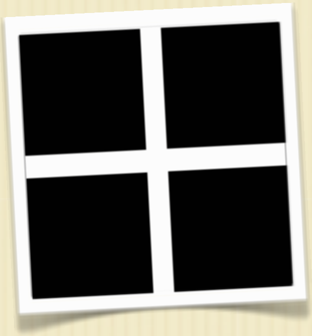
Entendemos por recubrir el tablero, que las fichas no se solapen y que ninguna parte de la ficha sobresalga del tablero. Por ejemplo, para el caso en que n=1 no se puede recubrir porque hay cuatro casillas en el tablero (2x2) y si usamos solo una ficha tenemos tres casillas cubiertas. Si en cambio usamos dos fichas, tenemos 6 casillas que son más de las que tiene el tablero.

Cuatrillizos

Estamos acostumbrados a partir objetos en partes iguales, a la hora de comer, al compartir cualquier cosa con un amigo/a o hermano/a, repartir el trabajo... todas las semanas necesitamos hacer docenas de particiones en partes iguales, y más o menos bien lo conseguimos. Ahora podemos intentar profundizar en estos hechos tan fundamentales para nuestra vida cotidiana pero desde su punto de vista matemático.

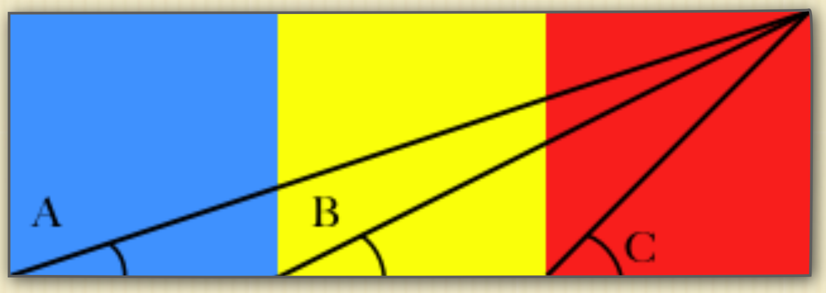
Problema - *De cuántos modos podemos dividir un cuadrado de modo que obtengamos cuatro figuras idénticas, donde entendemos por figuras idénticas aquellas que tienen misma forma, tamaño, color, área, perímetro...*

Aquí tenéis dos ejemplos:



Ángulos

Dados tres cuadrados como se muestran en la figura, tan solo hemos de demostrar que la suma de los ángulos A y B es igual a C[1].



1 Este problema ha pasado por una larga lista de gente hasta llegar a estos folios. Entre los personajes de esta lista aparece Martin Gardner que destacó que la sencillez del problema es fascinante.

PROBLEMAS MEZCLADOS

EQUIPO 2

EQUIPO 2

Dinámica del equipo

Contenidos

Este taller seta enfocado a alumnos con amplio dominio en la materia de matemáticas. Los problemas presentados pertenecen a diversas áreas de la matemática y requieren de técnicas muy distintas para obtener las soluciones.

Títulos de los talleres	Ayuda para el taller
(1) Ajedrez vs dominó.	(C), (D)
(2) Navidad.	(F)
(3) Euros.	(G)

Ayuda para el taller: (A) (B) (C) (D) (E) (F) (G) (H) (I) (J) (K)

Dificultad

Problema 1: ★★★☆☆

Problema 2: ★★☆☆☆

Problema 3: ★★★★☆

Destinatarios

Alumnos de Bachillerato y alumnos de Ciclos Formativos de Grado Medio y Superior.

Requisitos

Se requieren conocimientos básicos de:

- Razonamiento matemático.
- Lógica deductiva.
- Demostraciones matemáticas.
- Destreza en el manejo de operaciones matemáticas.

Objetivos

- Mejorar las destrezas matemáticas de los alumnos.
- Fomento del razonamiento lógico.
- Potenciación del uso de las matemáticas en la vida cotidiana.
- Mayor compresión de la geometría y los objetos geométricos.
- Percepción de la importancia en el rigor de los cálculos matemáticos
- Realización de trabajo corporativo.

Información de la actividad

Planificación previa

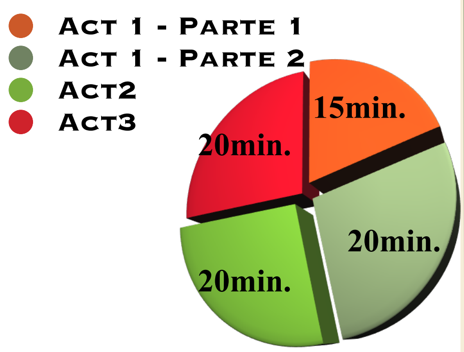
La primera actividad consta de dos partes:

- El profesor entrega a los alumnos el tablero de ajedrez y las fichas de dominó y les propone que intenten recubrir el tablero (exceptuando las dos esquinas blancas).
- Cuando los alumnos descubran que no es posible se les pedirá que lo demuestren matemáticamente. En esta la segunda parte del problema los alumnos también realizan el mismo ejercicio pero quintado en esta ocasión una casilla de cada color.

Recursos

- 1 tablero de ajedrez.
- 31 fichas de dominó. Cada ficha ha de ser menor o igual que dos cuadrados del tablero de ajedrez.

Tiempo 35 minutos



"Dime y lo olvido,
enséñame y lo recuerdo,
involúcrame y lo aprendo"

Benjamín Franklin (1796-1859)
Educador estadounidense.

Continua en la parte posterior

Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

Ajedrez vs dominó.

Recubrir

Como a los matemáticos nos suelen gustar los juegos de mesa (sobretodo el ajedrez); el siguiente problema mezcla dos de ellos completamente distintos. Pero no tendría gracia que jugáramos como hemos hecho toda la vida. Por eso, vamos a cortar parte del tablero de ajedrez.

Recortamos las dos casillas que forman los extremos de la diagonal blanca, es decir las dos esquinas blancas del tablero. Cogemos un dominó de modo que cada pieza de dominó ocupe solamente dos casillas del tablero de ajedrez, y nos quedamos con 31 fichas de este dominó.

Utilizando el tablero de ajedrez y las fichas de dominó intentad recubrir todo el tablero excepto las dos esquinas blancas.

Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

Ajedrez vs dominó.

Supongamos ahora que quitamos dos casillas del mismo color de un tablero de ajedrez.

Problema *¿Se puede recubrir con las 31 fichas de dominó un tablero de ajedrez al que le hemos quitado dos casillas del mismo color?*

Y si las dos casillas son de distinto color. . .

Problema *¿Se puede recubrir con las 31 fichas de dominó un tablero de ajedrez al que le hemos quitado dos casillas de distinto color?*

Navidad

Cuentan que hace más de 2000 años los tres reyes magos quedaron en vender algunas de sus posesiones para hacerle un regalo al recién nacido, pero hicieron el pacto de hacer regalos del mismo valor económico. Para ello decidieron vender cada uno 30 trajes nuevos y 30 usados. Acordaron vender los trajes más nuevos por lotes de dos trajes a 15 monedas el lote y los otros en lotes de tres trajes por 20 monedas el lote.

Llegada la hora de entregar los regalos, todos habían vendido los 60 trajes y con el dinero recaudado compraron los regalos. El rey Baltasar entregó el oro que había comprado con el dinero de los trajes, y rápidamente los otros dos se quejaron a unísono diciendo:

- ¿Cómo has podido comprar oro con el dinero que acordamos gastar?

Baltasar: Yo vendí los trajes tal y como acordamos, y obtuve 425 monedas. Lo justo para comprar el oro.

Melchor: ¡No! yo los vendí como acordamos, pero para ahorrar trabajo, junte los lotes, vendiéndolos a lotes de 5 trajes (dos nuevos y tres usados) por 35 monedas, ¡Recaudé lo que debíamos recaudar! 420 monedas. ¡¡¡Con las que no se puede comprar oro!!!

Gaspar: Yo hice lo mismo que Melchor y obtuve los mismos beneficios, por tanto Baltasar, ¡¡¡o te has equivocado en alguna venta o nos has traicionado!!!

Problema *¿Crees que Baltasar engañó a sus compañeros o se equivocó dando el cambio a alguno de sus compradores?*

Euros

Existe una antigua leyenda que narra la historia de un matemático, conocido por sus ansias de apostar. Este matemático se fue un día de cena con otros amigos. En mitad de la noche uno de sus amigos, conociendo su entusiasmo por las apuestas, le reto al juego de las monedas. Este juego consiste en colocar monedas encima de una mesa **cuadrada** de modo que estas no se superpongan, ni se muevan las que ya están colocadas. Pierde el jugador que en algún momento de la partida no puede colocar ninguna moneda sobre la mesa. Nuestro amigo perdió muchas partidas. Al día siguiente, obsesionado con el juego, llamó a su amigo para pedirle explicaciones de cómo podía ser que no ganase ninguna partida. Este le comentó que existe una estrategia en la que un jugador tiene la partida asegurada.

Problema *¿Puedes ayudar a nuestro amigo a encontrar la estrategia que asegura la victoria?*

PROBLEMAS MEZCLADOS

EQUIPO 3

EQUIPO 3

Dinámica del equipo

CONTENIDOS

Este taller contiene una primera actividad de carácter geométrico en la que se mezclan geometría y teoría de juegos. Las otras dos actividades se encuentran estrechamente relacionadas y plantean problemas en los que hay que dividir objetos de forma óptima.

<u>Títulos de los talleres</u>

(1) LA PARTIDA FINAL.

(2) EL PESO DEL DINERO.

(3) EL ASCENSO.

<u>Ayuda para el taller</u>

(A)
(B)
(C)
(D)
(E)
(F)
(G)
(H)
(I)
(J)
(K)

Dificultad

Problema 1: ★★★☆☆

Problema 2: ★★★☆☆

Problema 3: ★★★☆☆

Destinatarios

Alumnos de Bachillerato y alumnos de Ciclos Formativos de Grado Medio y Superior.

Requisitos

Se requieren conocimientos básicos de:

- Razonamiento matemático.
- Lógica deductiva.
- Demostraciones matemáticas.
- Capacidad de análisis de problemas matemáticos.

Objetivos

- Mejorar las destrezas matemáticas de los alumnos.
- Fomento del razonamiento lógico.
- Potenciación del uso de las matemáticas en la vida cotidiana.
- Mayor compresión de la geometría y la teoría de juegos.
- Facilidad para encontrar la mejor de las soluciones.
- Realización de trabajo corporativo.

Información de la actividad

Planificación previa

La primera actividad consta de dos partes:

- En la primera, los alumnos jugarán varias partidas para familiarizarse con el juego antes de buscar una estrategia ganadora.

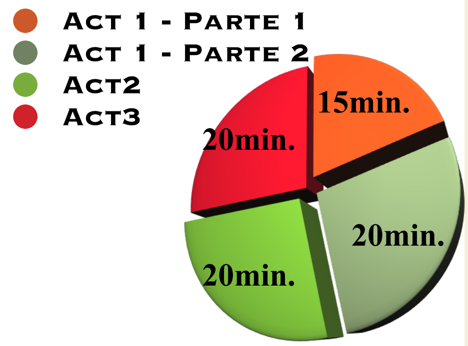
- En la segunda parte los alumnos intentarán encontrar una estrategia ganadora para el primer jugador utilizando su experiencia.

Recursos

- Un tablero de ajedrez.

- Dos montones de fichas que permitan recubrir el tablero.

Tiempo 35 minutos



"Dime y lo olvido,
enséñame y lo recuerdo,
involúcrame y lo aprendo"

Benjamín Franklin (1796-1859)
Educador estadounidense.

Continua en la parte posterior

Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

La partida final

Recubrir

El siguiente juego consiste en distribuir una cantidad finita pero arbitraria de cartas en diversos montones, ordenando los montones en una hilera de izquierda a derecha. El primer jugador, escoge uno de los montones, y quita entre una y tres cartas de este montón. Después distribuye tantas cartas como quiera entre los montones situados en la parte derecha del escogido (puede decidir no añadir ninguna carta). Tras esta jugada, es el turno del jugador dos y así sucesivamente.

Utilizando el reverso del tablero de ajedrez com mesa y las fichas jugad varias partidas a este juego.

Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

La partida final

Ahora que hemos aprendido como jugar a este juego, vamos a tratar de comprender las matemáticas que hay detrás.

Lo primero que queremos saber es, si existe la posibilidad de encontrar una partida que nunca termine, aunque uno de los dos jugadores quiera terminarla. Notar que la partida puede alargarse tanto como queramos, solo hemos de añadir tantas cartas en el último montón, como tiempo que queremos que dure la partida.

El problema que nos planteamos es el siguiente:

Problema *¿Puedes encontrar alguna estrategia para asegurarle la victoria a uno de los dos jugadores?*

El peso del dinero

En la casa de la moneda decidieron contratar a un empleado para intentar solucionar los posibles defectos de la máquina que se encarga de fabricar las monedas de un euro. La labor de nuestro compañero era tan simple como descartar las monedas defectuosas producidas por la máquina.

El trabajo de nuestro amigo es encontrar la única moneda defectuosa de cada montón de doce monedas. Como este veía que tardaba demasiado en pesar las monedas una a una y pensó en intentar encontrar alguń camino más corto.

Problema *¿Puedes decirle si hay algún camino más corto para encontrar la moneda defectuosa usando tan solo una báscula de balanza?*

El ascenso.

Tras resolver el anterior problema, el director de la casa de la moneda quedó tan sorprendido que decidió ascender a nuestro amigo a una sección superior. En este momento nuestro amigo se encuentra con la dificultad de encontrarse ante la máquina encargada de transformar un lingote de oro en doce piezas de colección aparentemente iguales. Lamentablemente para nuestro amigo esta vez es más complicado. Esta nueva máquina al igual que la anterior, comete un fallo cada doce lingotes, y la tanda con los doce objetos fallidos de la colección, se obtiene con un peso ligeramente más pequeño, pero que siempre es constante y conocido.

Llegados a este punto nuestro amigo pensó aplicar el método que en el pasado le consiguió un ascenso, pero le parecía demasiado lento para obtener la solución. Este se preguntó si podría conseguir un nuevo método para este caso que fuera más rápido.

Problema *¿Existe algún camino más corto para encontrar el lote con las piezas defectuosas?*

PROBLEMAS MEZCLADOS

EQUIPO 4

EQUIPO 4

Dinámica del equipo

Dificultad

Problema 1: ★★☆☆☆

Problema 2: ★☆☆☆☆

Problema 3: ★★★★☆

Destinatarios

Alumnos de Bachillerato y alumnos de Ciclos Formativos de Grado Medio y Superior.

Requisitos

Se requieren conocimientos básicos de:

- Razonamiento matemático.
- Lógica deductiva.
- Demostraciones matemáticas.
- Destreza en el manejo de los números naturales y las operaciones elementales.

Objetivos

- Mejorar las destrezas matemáticas de los alumnos.
- Fomento del razonamiento lógico.
- Potenciación del uso de las matemáticas en la vida cotidiana.
- Realización de trabajo corporativo.

CONTENIDOS

En este taller se presentan tres problemas distintos e ingeniosos pero de sencilla resolución. Para resolver estos problemas se han de emplear diversas técnicas matemáticas, cobrando especial importancia las propiedades que presentan los números naturales dentro de las matemáticas.

<u>Títulos de los talleres</u>

(1) EL PESO JUSTO.

(2) CUADRADOS MÁGICOS.

(3) CURIOSIDAD DE LOS CUADRADOS.

<u>Ayuda para el taller</u>

(A)
(B)
(C)
(D)
(E)
(F)
(G)
(H)
(I)
(J)
(K)

Información de la actividad

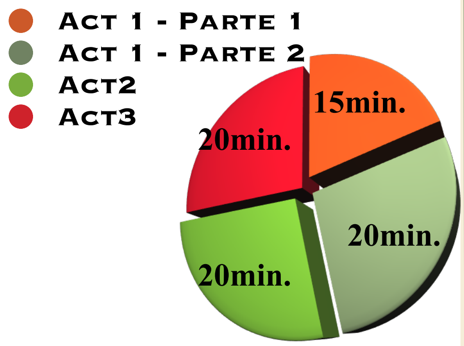
Recursos

- 2 platos.
- 20 bolsas pequeñas de plástico.
- 40 canicas iguales, preferiblemente de hierro.
- 40 fichas con números del 1 al 40.

Planificación previa

En esta actividad se emplearan objetos cotidianos para representar y modelar un problema matemático. Se mestra a los alumnos la facilidad de interpretar un enunciado matemático abstracto. En esta actividad las canicas representan un kilogramo y las bolsas son contenedores que los alumnos pueden emplear para crear las distintas pesas. Los alumnos utilizan las bolsas para dividir las canicas en grupos y crear los distintos pesos.

Tiempo 35 minutos



"Dime y lo olvido,
enséñame y lo recuerdo,
involúcrame y lo aprendo"

Benjamín Franklin (1796-1859)
Educador estadounidense.

Continua en la parte posterior

Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

El peso justo

Las pesas de Bachet.

Un comerciante que se dedica a vender su producto en kilogramos. viaja mucho y le interesa llevar el menor peso posible en su maleta. Este tiene que tener los recursos suficientes para realizar sus ventas y tan solo posee un báscula de balanza de dos platos.

Ficha para los alumnos - cortar por la linea de puntos.

El peso justo

Imagina que las canicas que tienes representan pesos de un kilogramo.
Utilizando las bolsas, junta las canicas para crear pesos de tantos kilogramos como necesites. Intenta distribuir las canicas para poder pesar todos los productos entre 1 kilogramo y 40 kilogramos utilizando el menor número de bolsas.
Utiliza las fichas numeradas para simular los artículos a pesar y los platos para representar la balanza y comprueba que con las pesas que has creado puedes pesar todas las fichas.

Problema *¿Cuál es la menor cantidad de pesas que necesita el comerciante para poder pesar cualquier número de Kilogramos entre 1 y 40 con una balanza de dos platos?*

Cuadrados mágicos

Estos cuadrados verifican que la suma de sus filas, columnas y diagonales es constante. Esta clase de cuadrados se conocían en la antigua China desde el III milenio adC, como atestigua Lo Shu, y han aparecido combinaciones de este tipo en culturas indias, egipcias, árabes y griegas, relacionándolas con astronomía, predicciones, talismanes... Pero dentro de todos los cuadrados mágicos, existe uno que sea posiblemente el más curioso de todos. Este cuadrado además de poseer las propiedades de los cuadrados mágicos, tiene la característica de estar formado solamente por números primos. Para completar el trabajo, la suma de las filas, diagonales y columnas es el famoso número de la bestia. El conocido 666.

Problema *Aquí está el famoso cuadrado pero... escribirlo sin más no tendría mucha gracia. Podeis considerar que es un Sudoku de números primos.*
Este problema no tiene ayuda.

$$\begin{pmatrix} 3 & & & & & 311 \\ & 331 & & & 83 & \\ & & 71 & 89 & & \\ & & 97 & 197 & & \\ & 13 & & & 17 & \\ 73 & & & & & 47 \end{pmatrix}$$

En este caso la demostración debemos agradecérsela a Clifford A. Pickover ya que este cuadrado mágico tan especial se ha obtenido de la dedicatoria de su libro "*El prodigio de los números*".

Curiosidad de los cuadrados

En los números naturales existen infinidad de propiedades curiosas, entre ellas vamos a hablar aquí de una relacionada con la suma de los cuadrados.

La terna pitagórica más conocida es también la más pequeña que podemos encontrar con números naturales:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Podemos ver que además de ser una terna pitagórica, tiene la curiosidad de usar números consecutivos. Pero no es la única con esta propiedad. Aquí podemos ver otras dos:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

Problema *¿Podrías encontrar alguna regla que nos diera la solución para este tipo de ternas?*

TALLER 3 PROBLEMAS MEZCLADOS (AYUDA)

JAVIER FALCÓ BENAVENT

Para la realización de este taller se adjunta la solución a los problemas planteados. No obstante hemos tenido un error durante la redacción de esta página y no sabemos que solución corresponde a cada problema. Esperamos que podáis encontrar cual o cuales son las ideas que hay que emplear para resolver los problemas.

(a) Considerar los casos más básicos y establecer una regla general.
(b) Sustituir y agrupar.
(c) Contar los colores.
(d) Divide en subgrupos y considera el adecuado para el siguiente caso.
(e) Girar.
(f) Han mezclado sin darse cuenta.
(g) Simetría.
(h) Divide en subgrupos adecuados.
(i) Divisibilidad.
(j) Conseguir siempre múltiplos.
(k) Girar respecto al centro y sumar ángulos.

Taller 3 · Problemas mezclados
Soluciones

Javier Falcó

Índice general

Equipo 1

Cuadrados y L.

Supongamos que tenemos un tablero cuadrado de un juego de mesa, y el número de casillas de este es 2^n por 2^n, es decir, en cada del tablero se encuentran 2^n casillas.

Problema.-. *¿ Se puede recubrir este tablero con fichas en forma de L de forma que cada ficha sean exactamente 3 casillas del tablero?*

Entendemos por recubrir el tablero, que las fichas no se solapen y que ninguna parte de la ficha sobresalga del tablero. Por ejemplo, para el caso en que n=1 no se puede recubrir porque hay cuatro casillas en el tablero (2x2) y si usamos solo una ficha tenemos tres casillas cubiertas. Si en cambio usamos dos fichas, tenemos 6 casillas que son más de las que tiene el tablero.

Demostración.-

Como nuestro tablero contiene 2^n casillas en cada lado y es cuadrado, tenemos un total de $2^n * 2^n = 2^{2n}$ casillas dentro del tablero. Si queremos recubrir el tablero con k fichas en forma de L, necesariamente $3k = 2^n$, por tanto $k = \frac{2^n}{3}$. Pero como 2^n no es divisible por 3, k no puede ser un número entero, por tanto nunca podremos recubrir el tablero con estas piezas[1].

⊠

Cuatrillizos.

Estamos acostumbrados a partir objetos en partes iguales, a la hora de comer, al compartir cualquier cosa con un amigo/a o hermano/a, repartir el trabajo... todas las semanas necesitamos hacer docenas de particiones en partes iguales, y más o menos bien lo conseguimos. Ahora podemos intentar profundizar en estos hechos tan fundamentales para nuestra vida cotidiana pero desde su punto de vista matemático.

Problema.-. *De cuántos modos podemos dividir un cuadrado de modo que obtengamos cuatro figuras idénticas, donde entendemos por figuras idénticas aquellas que tienen misma forma, tamaño, color, área, perímetro. . .*

Aquí tenéis dos ejemplos:

[1] Esta demostración también se puede hacer por inducción sobre n llegando a la misma conclusión, siendo más larga.

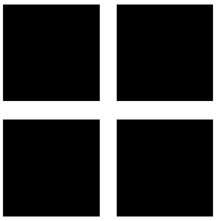


Figura 1. División uno.

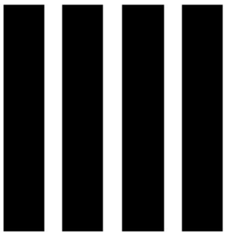


Figura 2. División dos.

Demostración.-

El número de subdivisiones es infinito. Estas las podemos encontrar de muchos modos. Aquí veremos cuatro de estos modos:

(1) Podemos construir unos ejes desde el centro del cuadrado, quedando algo parecido a la imagen de la primera partición. Después solo hemos de darle la vuelta a estos ejes girándolos sobre el punto donde se cruzan. Para cada ángulo de giro obtenemos una nueva partición (para 45 grados obtenemos la partición en cuatro triángulos,al unir las esquinas opuestas mediante rectas), y como entre 0° y 90° encontramos infinitos ángulos, obtenemos infinitas particiones distintas.

Se puede utilizar el material de la página 48 para realizar una demostración gráfica a los alumnos.

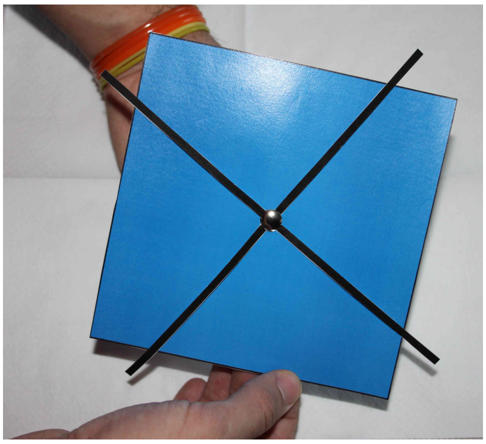


Figura 3. Demostración gráfica

(2) La segunda opción es darle un mordisco a los cuatro segmentos, pero este mordisco lo debemos dar siempre del mismo modo. Dependiendo de como sea el mordisco y la altura a la que lo pongamos, obtendremos otra vez, infinitas divisiones. Después también podremos volver a aplicar el truco de girar los ejes.

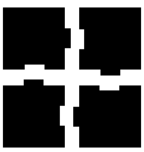


Figura 4. División tres.

(3) La tercera es generalizar la anterior, deformando los ejes como queramos, como en el caso anterior, pero ahora los deformamos desde el centro del cuadrado hasta los lados, no solo una parte de ellos. Se puede pensar en funciones continuas definidas entre -1 y 1 con ciertas restricciones.

(4) La última que vamos a ver, consiste en cortar el cuadrado con dos segmentos que formen una cruz y aplicarle a uno de los segmentos una deformación simétrica respecto el punto central, pero que verifique ciertas propiedades.

NOTA.- Las propiedades que no se han especificado, no son difíciles de encontrar y es un ejercicio interesante para los alumnos.

⊠

Ángulos.

Dados tres cuadrados como se muestran en la figura, tan solo hemos de demostrar que la suma de los ángulos A y B es igual a C[1].[2].

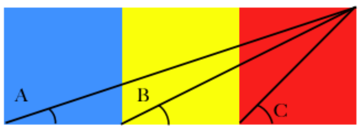


FIGURA 5. Cuadrados

$$A + B = C$$

DEMOSTRACIÓN.-

En este caso la solución se puede obtener a través de la siguiente imagen.

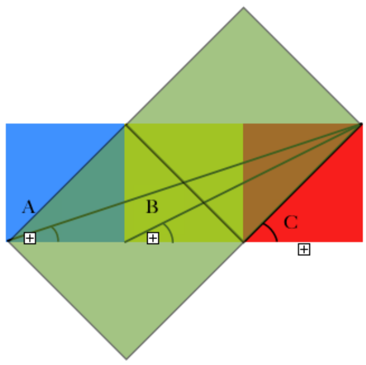


FIGURA 6. Solución del problema.

Se recomineda al profesor utilizar el material de la página 50 y realizar la construcción físicamente a los alumnos.

⊠

[2]Este problema ha pasado por una larga lista de gente hasta llegar a estos folios. Entre los personajes de esta lista aparece Martin Gardner que destacó que la sencillez del problema es fascinante.

Equipo 2

Ajedrez vs dominó.

Supongamos ahora que quitamos dos casillas del mismo color de un tablero de ajedrez.

Problema.-.

¿Se puede recubrir con las 31 fichas de dominó un tablero de ajedrez al que le hemos quitado dos casillas del mismo color?

Demostración.-

En el tablero de ajedrez las casillas aparecen coloreadas de blanco y negro con la única restricción de que no puede haber dos casillas del mismo color compartiendo un lado. Por tanto, una ficha de dominó sobre el tablero ha de cubrir necesariamente una casilla negra y otra blanca. Ahora solo hemos de darnos cuenta de que hemos quitado dos casillas del mismo color, y obtenemos 32 casillas de un color y 30 casillas del otro color y por tanto, después de colocar 30 fichas de dominó, nos quedarán dos casillas del mismo color por cubrir. Pero hemos dicho que una ficha ha de cubrir a una casillas blanca y otra negra.

Como consecuencia nunca podremos recubrir el tablero modificado.

⊠

Y si las dos casillas son de distinto color…

Problema.-.

¿Se puede recubrir con las 31 fichas de dominó un tablero de ajedrez al que le hemos quitado dos casillas de distinto color?

Demostración.-
Si las quitamos, podemos dividir el tablero en cinco partes como se muestra en la figura.

Como la primera y la quinta parte son varias filas de ocho casillas y cada fila se puede recubrir por cuatro fichas de dominó, estas dos piezas se pueden recubrir. La pieza cuatro se recubre análogamente pero esta vez con tres fichas de dominó en cada fila. Y por último las piezas dos y tres son dos caminos que tienen como extremos una pieza blanca y otra negra y por tanto un número par de casillas que también podremos recubrir[3]. En definitiva, si rejuntamos las piezas obtenemos todo el tablero recubierto excepto las dos casillas, tal y como queríamos.[4]

[3]Si la fila es la última podemos dar la vuelta al tablero de ajedrez para asegurarnos de poder realizar la construcción.
[4]Notar que puede haber piezas que no contengan a ninguna casilla.

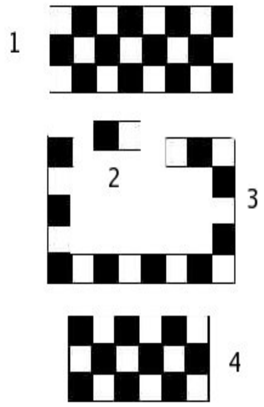


FIGURA 7. Ajedrez al que le quitamos dos casillas de distinto color y de la misma fila.

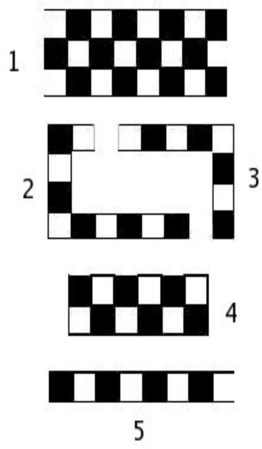


FIGURA 8. Ajedrez al que le quitamos dos casillas de distinto color y de distintas filas.

⊠

Navidad.

Cuentan que hace más de 2000 años los tres reyes magos quedaron en vender algunas de sus posesiones para hacerle un regalo al recién nacido, pero hicieron el pacto de hacer regalos del mismo valor económico y para ello decidieron vender cada uno 30 trajes nuevos y 30 usados. Acordaron vender los trajes más nuevos por lotes de dos trajes a 15 monedas el lote y los otros en lotes de tres trajes por 20 monedas el lote.

Llegada la hora de entregar los regalos, todos habían vendido los 60 trajes y con el dinero recaudado compraron los regalos. El rey Baltasar entregó el oro que había comprado con el dinero de los trajes, y rápidamente los otros dos se quejaron a unísono diciendo:

- ¿Cómo has podido comprar oro con el dinero que acordamos gastar?

Baltasar: yo vendí los trajes tal y como acordamos, y obtuve 425 monedas. Lo justo para comprar el oro.

Melchor: No, yo los vendí como acordamos, pero para ahorrar trabajo, junte los lotes, vendiéndolos a lotes de 5 trajes (dos nuevos y tres usados) por 35 monedas y recaudé lo que debíamos recaudar, 420 monedas. ¡¡¡Con las que no se puede comprar oro!!!

Gaspar: Yo hice lo mismo que Melchor y obtuve los mismos beneficios, por tanto Baltasar, ¡¡¡o te has equivocado en alguna venta o nos has traicionado!!!

0.1. ¿ Era Baltasar un mentiroso?

Problema.-. *¿Crees que Baltasar engañó a sus compañeros o se equivocó dando el cambio a alguno de sus compradores?*

DEMOSTRACIÓN.-

Podemos intentar ayudar a nuestro amigo Baltasar contando los trajes vendidos. Está claro que los cálculos de Baltasar no fallan porque $15 * \frac{30}{2} + 20 * \frac{30}{3} = 425$ como ha dicho Baltasar. Pero también es cierto, como han dicho los otros dos reyes magos que, $35 * \frac{60}{5} = 420$, por tanto, ninguno de ellos se equivocó al dar la vuelta en las compras. Entonces, ¿dónde está el fallo?

Está claro que Baltasar ha hecho lo correcto, porque los ha vendido tal y como acordaron, pero lo único que han hecho los otros es agrupar los packs de trajes, que a simple vista parece lógico. Pero que pasa si contamos el número de packs vendidos.

Baltasar vendió 15 packs de trajes nuevos y diez usados, mientras que los otros dos por querer ahorrar trabajo, vendieron 12 packs de trajes nuevos y 12 packs de trajes usados, y como solo tenían 10 paks de trajes usados, acabaron vendiendo trajes nuevos por un precio inferior. De este modo perdieron las cinco monedas que han hecho que en la actualidad el rey más popular sea Baltasar, por ser considerado el que hizo el regalo más caro.

Es aconsejable que los alumnos repitan las cuentas utilizando cartas como monedas y fichas como trajes.

⊠

Euros.

Existe una antigua leyenda que narra la historia de un matemático, conocido por sus ansias de apostar. Este matemático se fue un día de cena con otros amigos. En mitad de la noche uno de sus amigos, conociendo su entusiasmo por las apuestas, le reto al juego de las monedas. Este juego consiste en colocar monedas encima de una mesa **cuadrada** de modo que estas no se superpongan, ni se muevan las que ya están colocadas. Pierde el jugador que en algún momento de la partida no puede colocar ninguna moneda sobre la mesa. Nuestro amigo perdió muchas partidas. Al día siguiente, obsesionado con el juego, llamó a su amigo para pedirle explicaciones de cómo podía ser que no ganase ninguna partida. Este le comentó que existe una estrategia en la que un jugador tiene la partida asegurada.

Problema.-.

¿Puedes ayudar a nuestro amigo a encontrar la estrategia que asegura la victoria?

Demostración.-

Este problema es un poco difícil, pero podemos intentar pensar en el caso más extremo. Este sería el caso en que solo cabe una moneda en la mesa y ganaría el primer jugador. Como podemos generalizar este resultado?

La mesa es simétrica respecto al centro de ella misma. Es decir, si cogemos un punto de la mesa podemos trazar la linea que pasa por este punto y el centro. Existe solo otro punto de esta linea, que se distancia del centro de la mesa lo mismo que del punto de partida.

Podemos considerar la siguiente estrategia. El jugador uno pone la primera moneda en el centro de la mesa y después se dedica a hacer la jugada simétrica a la realizada por el jugador dos. Con esta estrategia el jugador uno siempre tiene la posibilidad de poner una moneda sobre la mesa, ya que si el jugador dos obtiene un hueco para poner la moneda, el simétrico de este hueco también estará vacío y podrá ser ocupado por el jugador uno.

⊠

Equipo 3

La partida final.

Ahora que hemos aprendido como jugar a este juego, vamos a tratar de comprender las matemáticas que hay detrás.

0.2. Estrategia. Lo primero que queremos saber es, si existe la posibilidad de encontrar una partida que nunca termine, aunque uno de los dos jugadores quiera terminarla. Notar que la partida puede alargarse tanto como queramos, solo hemos de añadir tantas cartas en el último montón, como tiempo que queremos que dure la partida.

El problema que nos planteamos es el siguiente:

Problema.-.
¿Puedes encontrar alguna estrategia para asegurarle la victoria a uno de los dos jugadores?

Demostración.-

Lo primero que nos interesa ver es que el juego está bien diseñado y tiene fin. Si al empezar la partida se distribuyen las cartas en un número finito de montones, el jugador que desea que la partida llege a su fin tan solo tiene que quitar siempre las cartas del montoncito situado más a la izquierda de todos, hasta terminar con el. En este montón no se pueden situar más cartas de las que había al principio de la partida, por tanto en algún momento se terminán las cartas de este. Cuando no queden cartas en este montón se repite el proceso con el siguiente montón hasta llegar al final[5].

Como hemos visto que la partida siempre tiene fin, queremos saber si existe una estrategia que asegure la victoria a alguno de los dos contrincantes. Podemos intentar ver que sucede en el caso más extremo, es decir cundo solo hay un montón. Si el montón contiene menos de cuatro cartas, ganaría el primer jugador. Si en cambio el montón tiene cuatro cartas ganaría el segundo jugador ya que el primero ha de coger alguna carta, pero no puede cogerlas todas, ni puede añadir cartas porque no hay ningún montón situado más a la derecha de este.

Veamos ahora que pasa si hay más de cuatro cartas. Hemos de diferenciar dos casos.

Si el número de cartas del montón no es múltiplo de cuatro, el primer jugador ha de quitar el número necesario para hacer que haya un múltiplo de cuatro. Depués el segundo jugador, quitará tantas cartas como quiera, pero no podrá quitar el número de cartas necesario para conseguir que haya otra vez un múltiplo de cuatro. Pero el primer jugador quitará ahora tantas cartas como haga falta para conseguir otra vez un múltiplo de cuatro. De hecho el múltiplo de cuatro que conseguirá, será exactamente el anterior al que había conseguido antes. De este modo llegará al final al último múltiplo de cuatro posible, el cero, y habrá ganado la partida.

[5] Notar que aunque los dos jugadores quiera prolongar la partida durante un tiempo indefinido, no se puede. Pueden alargarla tanto tiempo como quieran pero siempre en un tiempo finito.

Si en cambio el número de cartas que hay en el primer montón al principio es múltiplo de cuatro, la victoria la tiene asegurada el segundo jugador. Solo tiene que realizar la misma estrategia que hemos explicado antes.

Para generalizar la estrategia, también hemos de diferenciar dos casos.

Realizará la jugada necesaria para conseguir que todos los montones tengan un múltiplo de cuatro cartas. Después, en cada jugada quitará y añadirá tantas cartas como necesite para corregir la jugada del segundo jugador y conseguirá que al finalizar su turno, el número de cartas de todos los montones sea múltiplo de cuatro. De este modo al final de la partida el número de cartas de todos lo montoncitos será cero y habrá ganado.

Si en cambio al principio de la partida todos los montones tienen un múltiplo de cuatro de cartas, la victoria la tendrá asegurada el segundo jugador.

⊠

El peso del dinero.

En la casa de la moneda decidieron contratar a un empleado para intentar solucionar los posibles defectos de la máquina que se encarga de fabricar las monedas de un euro. La labor de nuestro compañero era tan simple como descartar las monedas defectuosas producidas por la máquina.

El trabajo de nuestro amigo es encontrar la única moneda defectuosa de cada montón de doce monedas, pero este veía que tardaba demasiado en pesar las monedas una a una y pensó en intentar encontrar alguń camino más corto.

Problema.-. *¿Puedes decirle si hay algún camino más corto para encontrar la moneda defectuosa usando tan solo una báscula de balanza?*

Demostración.-

En la primera pesada puede pesar cuatro monedas en cada lado y deja otras cuatro sin pesar. Si la balanza se equilibra es porque la moneda defectuosa está en el montón que no ha pesado, por lo que ha eliminado ocho monedas, si no se equilibra está en uno de los montones que hemos pesado y ha eliminado cuatro.

Si se encuentra en el primer caso, ha de escoger una de las cuatro monedas. Si pesa dos de estas, situando cada una en uno de los platos, tiene otra vez dos opciones, es decir, o las dos se equilibran o no. En ambos casos ha conseguido descartar otras dos monedas, y entre las dos que quedan, compara una de ellas con una de las que no son defectuosas situando una en cada uno de los platos de la báscula. De este modo consigue encontrar la moneda defectuosa.

Si nos encontramos en el segundo caso, tenemos ocho monedas. Si comparamos un montón de cuatro con las cuatro que sabemos que no son defectuosas, podremos eliminar otras cuatro. Con las restantes, repetimos los pasos de arriba, y llegamos a encontrar la moneda en un máximo de cuatro pesadas[6].

⊠

El ascenso.

Tras resolver el anterior problema, el director de la casa de la moneda quedó tan sorprendido que decidió ascender a nuestro amigo a una sección superior. En este momento nuestro amigo se encuentra con la dificultad de encontrarse ante la máquina encargada de transformar un lingote de oro en doce piezas

[6]En este ejercicio la solución mínima no es única, pero si lo sería si tuviéramos 16 en lugar de 12, las cuales podríamos diferenciar también con solo cuatro pesadas.

de colección aparentemente iguales. Lamentablemente para nuestro amigo esta vez es más complicado. Esta nueva máquina al igual que la anterior, comete un fallo cada doce lingotes, y los doce objetos de colección, se obtienen con un peso ligeramente más pequeño, pero que siempre es constante y conocido.

Llegados a este punto nuestro amigo pensó aplicar el método que en el pasado le consiguió un ascenso, pero le parecía demasiado lento para obtener la solución y se preguntó si podría conseguir un nuevo método para este caso, que fuera más rápido.

Problema.-. *¿Existe algún camino más corto para encontrar el lote con las piezas defectuosas?*

DEMOSTRACIÓN.-

Se pueden encontrar las doce piezas erróneas en tan solo una pesada. El truco consiste en juntar un objeto de los obtenidos a partir del primer lingote, dos de los obtenidos a partir del segundo lingote y así hasta los doce obtenidos del último lingote y pesar todas estas pesas juntas. De este modo obtendremos un peso menor que el de 78 objetos que estamos pesando. La diferencia entre el peso que obtenemos y el que debíamos obtener y dividida entre el error que comete la máquina, nos dice cuantas piezas erróneas hemos pesado y como consecuencia cual es el lote defectuoso.

⊠

Equipo 4

El peso justo.

Las pesas de Bachet.

Un comerciante que se dedica a vender su producto en kilogramos. viaja mucho y le interesa llevar el menor peso posible en su maleta. Pero tiene que tener los recursos suficientes para realizar sus ventas y tan solo posee un báscula de balanza de dos platos.

Problema.-. *¿Cuál es la menor cantidad de pesas que necesita el comerciante para poder pesar cualquier número de Kilogramos entre 1 y 40 con una balanza de dos platos?*

Demostración.-

Veamos primero el ejemplo más sencillo. Si solo pudiera pesar un kilo, necesitaría solo una pesa de un kilo. Si tiene que pesar cuatro kilogramos, solo necesita dos pesas (una que pese un kilo y otra que pese tres kilogramos).

Un kilo y tres esta claro que los puede pesar y para pesar cuatro kilogramos solo tiene que juntar las dos pesas. Por último para pesar los dos kilogramos ha de colocar a un lado de la balanza el producto que desea pesar y la pesa de un kilogramo y en el otro lado de la balanza ha de colocar la pesa de tres kilogramos.

Del mismo modo deberá usar cuatro pesas, para los cuarenta kilogramos. Las pesas que necesita son las siguientes:

$$\begin{aligned} pesa_1 &= 1 \\ pesa_2 &= 3 \\ pesa_3 &= 9 \\ pesa_4 &= 27 \end{aligned}$$

Aquí se puede ver cómo consigue pesar todos los kilogramos que hay entre 1 y 40, dónde se considera que el peso negativo es situar la pesa en el lado donde hemos puesto el producto que queremos pesar.

1	=	1	15	=	$27-9-3$			
2	=	$3-1$	16	=	$27-9-3+1$	29	=	$27+3-1$
3	=	3	17	=	$27-9-1$	30	=	$27+3$
4	=	$3+1$	18	=	$27-9$	31	=	$27+3+1$
5	=	$9-3-1$	19	=	$27-9+1$	32	=	$27+9-3-1$
6	=	$9-3$	20	=	$27-9+3-1$	33	=	$27+9-3$
7	=	$9-3+1$	21	=	$27-9+3$	34	=	$27+9-3+1$
8	=	$9-1$	22	=	$27-9+3+1$	35	=	$27+9-1$
9	=	9	23	=	$27-3-1$	36	=	$27+9$
10	=	$9+1$	24	=	$27-3$	37	=	$27+9+1$
11	=	$9+3-1$	25	=	$27-3+1$	38	=	$27+9+3-1$
12	=	$9+3$	26	=	$27-1$	39	=	$27+9+3$
13	=	$9+3+1$	27	=	27	40	=	$27+9+3+1$
14	=	$27-9-3-1$	28	=	$27+1$			

Llegados a este punto, no nos será muy difícil encontrar la relación que nos define la succesión de las pesas necesarias para cantidades mayores a 40 kilogramos.

1,3,9,27,...

⊠

Cuadrados mágicos.

Estos cuadrados verifican que la suma de sus filas, columnas y diagonales es constante. Esta clase de cuadrados se conocían en la antigua China desde el III milenio adC, como atestigua Lo Shu, y han aparecido combinaciones de este tipo en culturas indias, egipcias, árabes y griegas, relacionándolas con astronomía, predicciones, talismanes... Pero dentro de todos los cuadrados mágicos, existe uno que sea posiblemente el más curioso de todos. Este cuadrado además de poseer las propiedades de los cuadrados mágicos, tiene la característica de estar formado solamente por números primos. Para completar el trabajo, la suma de las filas, diagonales y columnas es el famoso número de la bestia. El conocido 666.

Problema.-.

Aquí está el famoso cuadrado pero... escribirlo sin más no tendría mucha gracia, por lo tanto podeis considerar que es un Sudoku de números primos (este problema no tiene ayuda extra).

$$\begin{pmatrix} 3 & & & & & 311 \\ & 331 & & & 83 & \\ & & 71 & 89 & & \\ & & 97 & 197 & & \\ & 13 & & & 17 & \\ 73 & & & & & 47 \end{pmatrix}$$

En este caso la demostración debemos agradecérsela a Clifford A. Pickover ya que este cuadrado mágico tan especial se ha obtenido de la dedicatoria de su libro “El prodigio de los números”.

Demostración.-

$$\begin{pmatrix} 3 & 107 & 5 & 131 & 109 & 311 \\ 7 & 331 & 193 & 11 & 83 & 41 \\ 103 & 53 & 71 & 89 & 151 & 199 \\ 113 & 61 & 97 & 197 & 167 & 31 \\ 367 & 13 & 173 & 59 & 17 & 37 \\ 73 & 101 & 127 & 179 & 139 & 47 \end{pmatrix}$$

$\boxtimes$

Curiosidad de los cuadrados.

En los números naturales existen infinidad de propiedades curiosas, entre ellas vamos a hablar aquí de una relacionada con la suma de los cuadrados.

La terna pitagórica más conocida es también la más pequeña que podemos encontrar con números naturales:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Podemos ver que además de ser una terna pitagórica, tiene la curiosidad de usar números consecutivos. Pero no es la única con esta propiedad. Aquí podemos ver otras dos:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

Problema.-.
¿Podrías encontrar alguna regla que nos diera la solución para este tipo de ternas?

Demostración.-

Sea p un número natural, queremos encontrar n tal que:

$(n-p)^2 + (n-p+1)^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + ... + (n+p)^2$

Si desarrollamos los cuadrados obtenemos:

$(n-p)^2 = n^2 - 2pn + p^2$

...

$(n+p)^2 = n^2 + 2pn + p^2$

y si sustituimos en la fórmula de arriba, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= (n-p)^2 + (n-p+1)^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 - ... - (n+p)^2 \\ &= n^2 - 2pn + p^2 + ... + n^2 - n^2 - 2n - 1^2 - n^2 - 2n2 - 2^2 - ... - n^2 - 2np - p^2 \\ &= n^2 - 2(2np + 2n(p-1) + ... + 2n2 + 2n \\ &= n^2 - 4n(p + (p-1) + ... + 1 \\ &= n^2 - 4np\frac{p+1}{2} \\ n^2 &= 4np\frac{p+1}{2} \\ n &= 4p\frac{p+1}{2} \end{aligned}$$

La terna que buscábamos era:

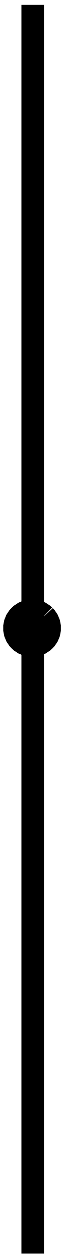
$$\{4p\frac{p+1}{2} + s\}_{s=-p}^{s=p}.$$

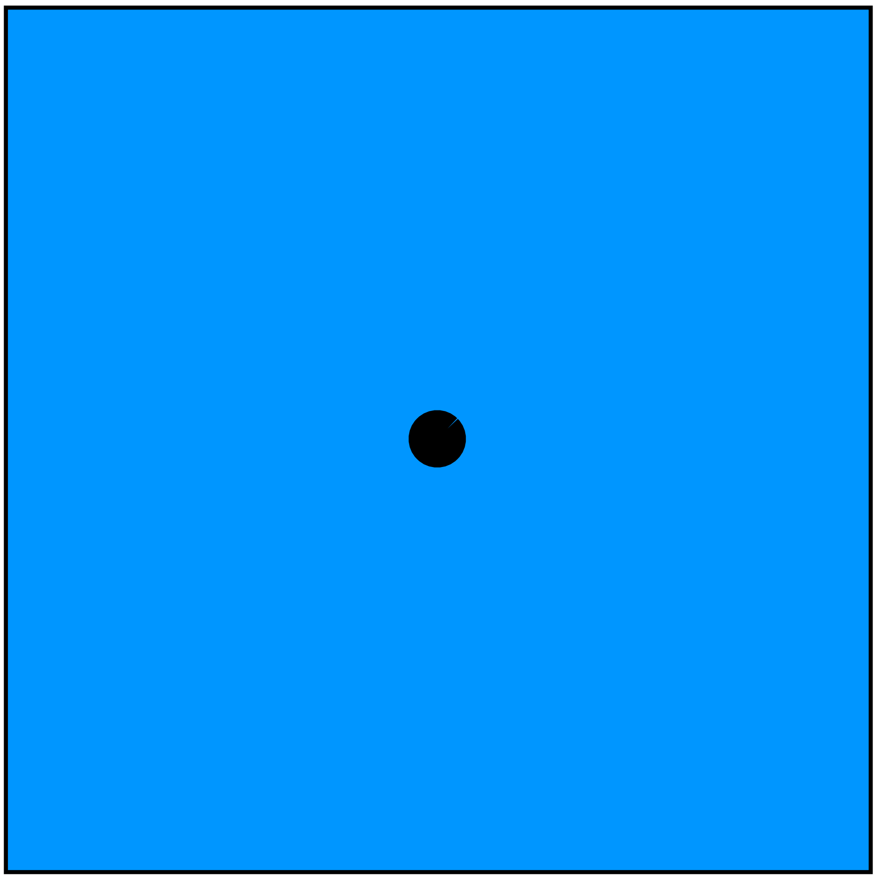
Notar que hemos encontrado una solución para todo p natural, y además hemos demostrado que es única, ya que la otra solución posible es $n = 0$, pero en este caso $n - p$ no sería natual por ser menor que cero y, por tanto, no nos serviría.

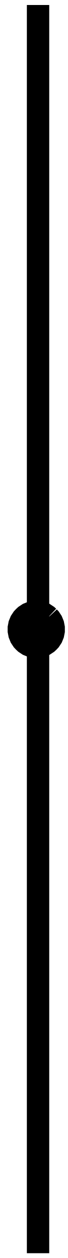
$\boxtimes$

Demostraciones Visuales

Cuatrillizos.

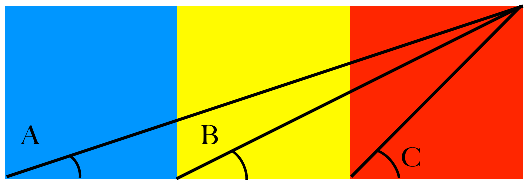






Para realizar una demostración gráfica del problema “Cuatrillizons” pueden emplearse las figuras geométricas de esta página. Primero se recortan las figuras de esta página y se pegar las dos lineas en forma de cruz. A continuación se unen las dos lineas con el cuadrado usando una chincheta y tomando como referencia los círculos negros. Ahora al girar las agujas como si se tratara de un reloj se obtienen infinitas particiones del cuadrado en cuatro partes iguales.

Ángulos.



Se pueden emplear las siguientes figuras geométricas para demostrar la equivalencia entre los triángulos. Además se pueden superponer las figuras para representar gráficamente la suma de los ángulos.