MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 4, No. 8, 2011.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Un modelo de transmisión de plagas para la enseñanza del álgebra lineal en el contexto de estudios en ciencias ambientales

Francisco J. Boigues,Vicente D. Estruch, Bernardino Roig, Anna Vidal
Universidad Politécnica de Valencia. Escuela Politécnica Superior de Gandía
fraboipl@mat.upv.es, vdestruc@mat.upv.es, broig@mat.upv.es, avidal@mat.upv.es

Abstract

La Matemática Aplicada aparece como materia básica en los planes de estudio de los títulos de Grado en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior. Aunque el hecho no esté directa y estrictamente ligado a la nueva estructura de las enseñanzas, por diversas razones se impone la dinámica de potenciar aspectos tales como la enseñanza en contexto o recurrir a la modelización matemática desde perspectivas de mejora del rendimiento docente. En este trabajo presentamos un modelo de transmisión de plagas, dirigido a estudiantes de primer curso del Grado en Ciencias Ambientales, como elemento motivador que, además, integra numerosas nociones y tópicos que se estudian en el Algebra Lineal dentro de un entorno significativo de las matemáticas. Para la génesis instrumental del modelo se recurre al programa MATLAB©*). Los resultados concretos obtenidos en el aula indican que la introducción de la modelización en la enseñanza de la Matemática Aplicada refuerza el que los estudiantes perciban que las matemáticas son útiles para afrontar otras disciplinas.*

Applied Mathematics appears as a basic subject in the curricula of degree titles within the European Higher Education Area. This fact is not directly or strictly linked to the new structure, but the need to enhance aspects like the teaching in context or to use mathematical modelling to improve educational performance is generally accepted. We present a model of transmission of pests, for students of the first year degree in Environmental Sciences, as a motivating element that also integrates many concepts and topics that are discussed in Linear Algebra in a meaningful environment of mathematics. For the instrumental genesis of the model, the program MATLAB© *is used. The actual results obtained in the classroom indicate that the introduction of modelling in the teaching of Applied Mathematics reinforces the perception of students in the sense that mathematics is useful in addressing other disciplines.*

Keywords: Mathematical modelling, Linear Algebra, Discrete-time linear systems of difference equations, MATLAB©.

1 Introducción

Uno de los objetivos del Espacio Europeo de Educación Superior es la mejora de la competitividad estableciendo un modelo educativo caracterizado por la "incorporación de metodologías que favorezcan el aprendizaje activo y significativo del estudiante" (ICE, 2006).

La Matemática Aplicada constituye una materia básica en los planes de estudio de los nuevos títulos de Grado de Ciencias Ambientales, que aporta elementos conceptuales imprescindibles para la aproximación a múltiples y diversas realidades objeto de estudio (Artigue et al., 2007). La Matemática Aplicada en general, y el Álgebra Lineal Aplicada en particular, con sus características especificas, siguiendo la dinámica de cambio imperante, debe potenciar aspectos tales como la enseñanza en contexto (Camacho, et al., 2008), la modelización matemática como uno de los elementos básicos presentes en la resolución de problemas y la utilización de sistemas de cálculo formal. Los resultados concretos obtenidos en el aula indican que la introducción de la modelización en la enseñanza de la Matemática Aplicada refuerza el que los estudiantes perciban que las matemáticas son útiles para afrontar otras materias, y por tanto manifiesten un mayor interés por su estudio.

En este trabajo se presenta un modelo de transmisión de plagas, como elemento motivador que, además, integra numerosas nociones y tópicos que se estudian en el Álgebra Lineal dentro de un entorno significativo de las matemáticas, dirigido a estudiantes de primer curso del Grado en Ciencias Ambientales.

El modelo parte de un problema básico de aplicación de sistemas de ecuaciones diferenciales (Amelkin, 1987) que es adaptado para obtener un sistema de ecuaciones lineales en diferencias, con el cual se trabaja desde la forma matricial. Finalmente, a partir de resultados teóricos, y mediante la génesis instrumental del modelo (Drijvers et al. 2010) utilizando el programa MATLAB©, se podrán responder muchas de las cuestiones que se plantean sobre el problema. Al modelo inicial se le pueden incorporar fácilmente nuevos estados que incrementan su complejidad, aspecto éste que se discute en clase, quedando como tarea final propuesta para los alumnos el diseño y simulación de los nuevos modelos.

2 Condicionantes contextuales del proceso de enseñanza-aprendizaje

El alumnado que accede a un primer curso del Grado en Ciencias Ambientales presenta características muy diversas tanto en lo que respecta a su preparación previa en materias básicas como en el grado de motivación personal a la hora de elegir sus estudios. Sin embargo, en los últimos años, viene siendo bastante común que entre los alumnos que acceden a un primer curso de un grado científico, el porcentaje de aquéllos que han estudiado la asignatura Matemáticas II en segundo curso de bachillerato es muy bajo. A éstos hay que añadir el alumnado proveniente de Ciclos Formativos, que todavía presenta más carencias en cuanto a la formación previa en materias básicas de carácter científico. En lo que respecta a las matemáticas, podríamos concluir la existencia de serios condicionantes que involucrarían tanto aspectos cognitivos (lo que saben) como procedimentales (lo que saben hacer) en el momento de iniciar los estudios universitarios.

Sin embargo no son menos importantes los condicionantes que provienen del ámbito de la afectividad. Éstos son el resultado de la experiencia previa del alumno con las matemáticas y se pueden abordar a partir de tres descriptores básicos: creencias, actitudes y emociones

(Gil et al. 2005). Las creencias son componentes de conocimiento subjetivo, y pueden ser conscientes o inconscientes. Describirían aquello que los alumnos creen sobre las matemáticas: que son importantes, difíciles, que se basan en reglas inamovibles, etc. Las actitudes son predisposiciones (positivas o negativas) que determinan las intenciones personales e influyen en el comportamiento. Las actitudes hacia la matemática se refieren a su valoración, al aprecio por esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje. Se manifiestan en términos de interés, satisfacción, curiosidad, valoración, etc. Por último, las emociones son respuestas afectivas fuertes, el resultado complejo del aprendizaje, de la influencia social y de la interpretación (Gómez Chacon, 2000). Pensamos que no es excesivo afirmar que, desde el ámbito afectivo, el contexto no es demasiado favorable para las ciencias experimentales básicas en general y para las matemáticas en particular. A los condicionantes contextuales que afectan al alumnado habría que añadir otros que provienen de la propia estructura del sistema educativo y de la concreción de los planes de estudios. La materia Matemáticas del Grado en Ciencias Ambientales en la Escuela Politécnica Superior de Gandia-Universidad Politécnica de Valencia, tiene asignados como contenidos Cálculo, Álgebra Lineal y Estadística Descriptiva, con un total de 9 ECTS, de los cuales 3.5 ECTS corresponderían al bloque de Álgebra Lineal. Los contenidos de dicho bloque se resumen en la Tabla I:

Unidad Temática	**Contenido**
1.-Matrices:	Matrices y operaciones. Matrices elementales. Inversa de una matriz. Determinantes.
2.-Sistemas de ecuaciones lineales:	Sistemas de ecuaciones lineales. Discusión de sistemas. Aplicaciones de los sistemas.
3.-Vectores:	La noción de espacio vectorial. Sistemas de vectores. Bases y dimensión.
4.-Diagonalización de matrices:	Valores y vectores propios de una matriz. Diagonalización de matrices. Sistemas dinámicos discretos.

Tabla I: Descriptores del bloque de Álgebra Lineal

3 Bases metodológicas

La propuesta docente desarrollada en el presente trabajo asume, en la línea de Artigue (2007), Drijvers (2010) y Camacho (2008) que la construcción del conocimiento matemático, en un entorno eminentemente práctico, debe apoyarse en:

- Una enseñanza en contexto.
- El uso de la modelización-simulación como recurso para la comprensión de conceptos y la resolución de problemas.
- El uso generalizado de Sistemas de Cálculo Simbólico (CAS).

En base al marco competencial establecido en el diseño de la titulación, cabe plantearse las siguientes cuestiones: ¿qué matemáticas hay que enseñar y cómo hay que implementar el proceso de enseñanza/aprendizaje?

La respuesta obviamente no es única. La propuesta que presentamos se materializa en utilizar el apoyo de la modelación/simulación como recurso fundamental en el diseño del proceso enseñanza/aprendizaje que detallamos en el siguiente apartado. No obstante, en primer lugar y dada la diversidad de definiciones existentes en la literatura, tenemos que clarificar aquello que entendemos por simulación. En sintonía con Shannon et al. (1976), entenderemos como simulación el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias —dentro de los límites impuestos por cierto criterio o un conjunto de ellos—para el funcionamiento del sistema.

4 Un modelo de transmisión de plagas

El modelo que se presenta inicialmente busca establecer un escenario motivador abierto para el aprendizaje de diversas nociones y tópicos del Álgebra Lineal, en un entorno significativo de las matemáticas. Dicho modelo es la versión discreta de un modelo diferencial para epidemias propuesto en Amelkin (1987).

La construcción de modelos matemáticos para simular el desarrollo y extensión de epidemias o plagas constituye un tema de gran interés, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. El poder determinar con cierto nivel de aproximación la mortalidad de una plaga con el paso del tiempo o si existe una situación estacionaria hacia la que deriva el desarrollo de la plaga, por ejemplo, son algunos aspectos sobre los cuales pretende incidir la teoría de epidemias. Podemos afrontar la construcción de un modelo desde distintas aproximaciones a la simplificación del problema real. Por otra parte, podemos optar por el objetivo de obtener resultados que describan la evolución en tiempo continuo (modelos diferenciales) o en tiempo discreto (modelos en diferencias). La discretización de la variable temporal nos permitirá estudiar la situación mediante sistemas de ecuaciones en diferencias, con su correspondiente formalización matricial, lo cual permite una aproximación al problema a partir de cálculos bastante sencillos.

La construcción de un modelo matemático para situaciones reales exige, siempre, establecer hipótesis previas que, al tiempo que pretenden plasmar la realidad, persiguen la simplificación de la misma hasta un nivel asequible para el estudio. Supongamos cierta población, árboles de un bosque por ejemplo, formada por N individuos, valor que suponemos que no varía en el periodo de tiempo considerado (sistema cerrado). Aparece una plaga o enfermedad que, en principio, no produce mortalidad y que inmuniza contra la misma al ejemplar que ha sufrido la enfermedad. Se consideran las siguientes fases en el proceso de modelización-simulación:

Fase I: Definición de las variables de estado del modelo:

Se consideran los siguientes estados:

- **Individuos sanos susceptibles de poder contagiarse de la enfermedad**. Supondremos que en el instante t hay un total de $S(t)$ de estos individuos.
- **Individuos enfermos que, por lo tanto, son fuente de propagación de la enfermedad**. Suponemos que, en el instante t, hay un total de $I(t)$ de estos individuos.
- **Individuos inmunes (resistentes) a la enfermedad**. Aquí consideramos tanto los individuos inmunes de entrada como los que pasan a ser inmunes por haber pasado la enfermedad. Suponemos que, en el instante t, hay un total de $R(t)$ de estos individuos.

Se consideran los valores $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, para los instantes sucesivos Mediante t se representan valores temporales discretos.

Fase II: Hipótesis del modelo:

Consideraremos la evolución de los valores de cada función en instantes, discretos, sucesivos. Asumimos también las siguientes hipótesis:

- En cada instante t, $t = 0, 1, 2, 3, 4, ...$, la suma de los valores de las tres variables de estado coincide con la población total (el sistema es cerrado).

$$S(t) + I(t) + R(t) = N. \tag{8.1}$$

- Sólo cuando el número de individuos enfermos, $I(t)$, excede cierto valor constante, K, se supone que los enfermos son capaces de contagiar a un porcentaje $m \times 100\%$ de los sanos susceptibles de padecer la enfermedad, de forma que, en dos instantes sucesivos

$$S(t+1) = \begin{cases} S(t) - mS(t), & I(t) > K, \\ S(t), & I(t) \leq K. \end{cases} \tag{8.2}$$

  Esto significa que hay una morbilidad del $m \times 100\%$. El valor K no deja de ser un **elemento de control** ya que, para modificar el comportamiento del sistema podemos plantear acciones como tratamientos o cuarentenas para conseguir que efectivamente se llegue a un instante en que $I(t) \leq K$.

- Se supone que un $c \times 100\%$ de los enfermos $I(t)$ sanan y pasan a engrosar las filas de los convalecientes o resistentes, $R(t+1)$. La constante c se denomina, también, *coeficiente de convalecencia*

$$I(t+1) = \begin{cases} I(t) + mS(t) - cI(t), & I(t) > K, \\ I(t) - cI(t), & I(t) \leq K. \end{cases} \tag{8.3}$$

- Por último, como consecuencia, al pasar de una etapa a otra, el número de resistentes se incrementa en la medida en que sanan los infectados.

$$R(t+1) = R(t) + cI(t). \tag{8.4}$$

Fase III: Representación gráfica del flujo de transición entre estados en una etapa:

La transición en una etapa del sistema queda representada en el esquema gráfico descrito en la figura 1

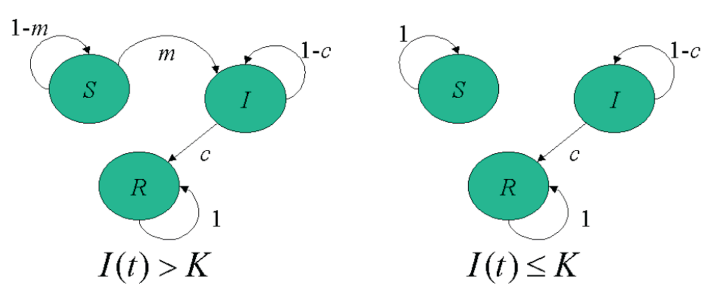

Figura 1: Transición en una etapa

Fase IV: Representación matricial y análisis formal del modelo:

Podemos representar el sistema en forma matricial quedando de la siguiente forma

- Si $I(t) \leq K$:
$$\begin{pmatrix} S(t+1) \\ I(t+1) \\ R(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-c & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix}.$$
En este caso, los valores propios de la matriz del sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-c & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix},$$
son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 - c$. Lógicamente, si $0 \leq c < 1$, entonces $1 - c \leq 1$ con lo que el sistema será asintóticamente estable y convergerá a una situación estacionaria.

- Si $I(t) > K$:
$$\begin{pmatrix} S(t+1) \\ I(t+1) \\ R(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m & 0 & 0 \\ m & 1-c & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix},$$
en este caso, los valores propios de la matriz del sistema
$$\begin{pmatrix} 1-m & 0 & 0 \\ m & 1-c & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix},$$
son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - m$ y $\lambda_3 = 1 - c$. Si $0 \leq 1 - c \leq 1$ y $0 \leq 1 - m \leq 1$, como hay un valor propio que vale 1, el sistema también es asintóticamente estable a un estado no trivial.

Fase V: Simulación del modelo (Génesis instrumental con MATLAB©)

Para facilitar el análisis numérico y gráfico del sistema, previamente, se ejercitará a los alumnos en el manejo básico del programa MATLAB©. A continuación se les proporcionará una rutina, script o m-file, de MATLAB©. Dicha rutina (ver anexo 1) nos pide como entrada los parámetros m, c, K y los valores iniciales de los estados, $S(0)$, $I(0)$ y $R(0)$. Como salida obtendremos vectores propios y valores propios de las matrices del sistema, ungráfico que muestra la evolución de los estados durante un periodo de tiempo y una tabla de valores. En la figura 2 se presenta la solución numérica (gráfica) obtenida para $m = 0.01$, $c = 0.02$, $K = 900$, $S(0) = 9000$, $I(0) = 1000$, $R(0) = 0$. Se ha incluido una línea vertical de puntos que indica el instante en que $I(t)$ pasa a ser menor que K.

5 Elementos del Álgebra Lineal involucrados

El análisis del sistema simple que hemos planteado involucra un número importante de elementos del Álgebra Lineal que se resumen a continuación:

- **Formulación matricial del sistema:** Operaciones con matrices.
- **Cálculo de puntos fijos:** Sistemas de ecuaciones lineales.

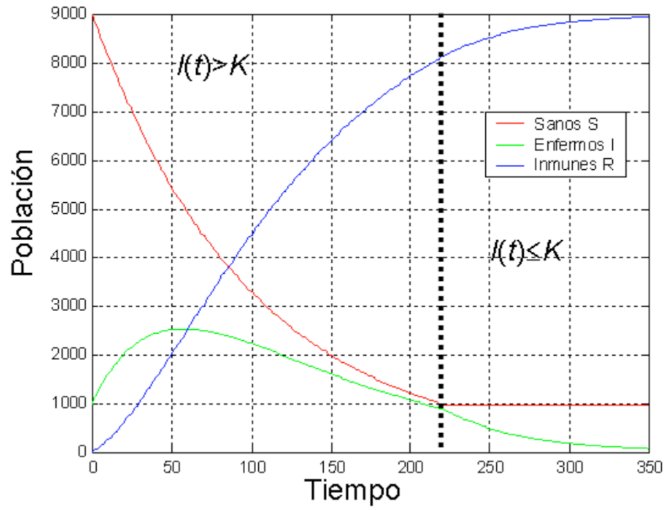

Figura 2: Solución numérica.

- **Solución analítica del sistema de ecuaciones en diferencias:** Potencias de matrices.
- **Solución general del sistema en función de los valores y vectores propios:** Base de un espacio vectorial, valores y vectores propios. Diagonalización de matrices.
- **Análisis elemental de la Estabilidad:** Operaciones con matrices, Sistemas de ecuaciones lineales.

Por otra parte, mediante MATLAB© utilizado como asistente, se afrontan los siguientes tópicos:

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Diagonalización de la matriz del sistema.
- Obtención de las coordenadas del estado inicial respecto a la base de vectores propios.
- Representación gráfica.

6 Feedback cognitivo e instrumental

El modelo simple que hemos descrito sólo constituye un punto de partida para el proceso por el cual se adquieren los diversos tópicos del Álgebra Lineal involucrados. El siguiente objetivo es conseguir un feedback cognitivo e instrumental, y en el mejor de los casos también afectivo, plateando un desafío asumible por los alumnos que se basaría en la sofisticación del problema inicial, por ejemplo asumiendo en una primera etapa la posibilidad de mortalidad, a continuación la posibilidad de mortalidad y recaída, siguiendo con otras propuestas que pueden quedar abiertas a la participación de los alumnos. El diseño de nuevos modelos nos llevará otra vez a plantear todos los pasos seguidos en el análisis del modelo simple inicial. El análisis numérico y gráfico de los nuevos modelos exigirá la adecuación de la `m-file` inicial proporcionada a los nuevos contextos, lo cual a la vista de la estructura de la misma (anexo I) no resulta demasiado complicado.

Como ejemplo, se plantea la primera sofisticación consistente en asumir mortalidad.

Consideremos $M(t)$ que representaría el número de enfermos que mueren en el instante t. Lógicamente $M(t) = \mu I(t)$, es decir al pasar del instante t al $t+1$, mueren un $\mu \times 100\%$ de la población enferma en el instante t. Llamamos *coeficiente de mortalidad* a μ. En este caso tendríamos que:

$$S(t) + I(t) + R(t) + M(t) = N. \tag{8.5}$$

$$S(t+1) = \begin{cases} S(t) - mS(t), & I(t) > K, \\ S(t), & I(t) \leq K. \end{cases} \tag{8.6}$$

$$I(t+1) = \begin{cases} I(t) + mS(t) - cI(t) - \mu I(t), & I(t) > K, \\ I(t) - cI(t) - \mu I(t), & I(t) \leq K. \end{cases} \tag{8.7}$$

$$R(t+1) = R(t) + cI(t). \tag{8.8}$$

$$M(t+1) = M(t) + \mu I(t). \tag{8.9}$$

No se considera la posibilidad de recaída, es decir, un individuo infectado tiene dos posibilidades: se cura y queda inmunizado o muere como consecuencia de la enfermedad.

La transición en una etapa del sistema queda representada en el esquema gráfico descrito en la figura 3

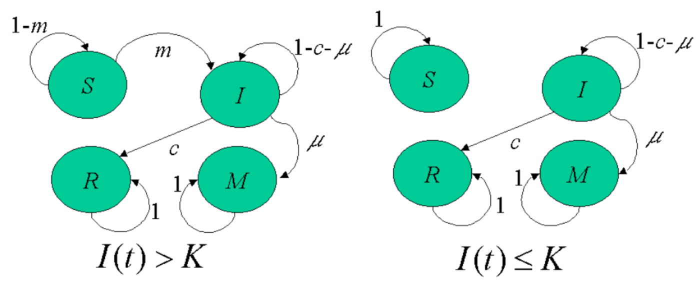

Figura 3: Transición en una etapa

El sistema se representará, en forma matricial, de la siguiente forma:

- Si $I(t) \leq K$

$$\begin{pmatrix} S(t+1) \\ I(t+1) \\ R(t+1) \\ M(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-c-\mu & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \\ M(t) \end{pmatrix}.$$

- Si $I(t) > K$

$$\begin{pmatrix} S(t+1) \\ I(t+1) \\ R(t+1) \\ M(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m & 0 & 0 & 0 \\ m & 1-c-\mu & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \\ M(t) \end{pmatrix}.$$

Si $I(t) \leq K$, los valores propios de la matriz del sistema son $\lambda_1 = 1$ (triple) y $\lambda_2 = 1 - c - \mu$. El sistema será asintóticamente estable a un vector no nulo si $0 \leq 1 - c - \mu \leq 1$. Si $I(t) > K$, los valores propios de la matriz del sistema son $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 1 - c - \mu$ y $\lambda_3 = 1 - m$, de donde el sistema será asintóticamente estable a un vector no nulo si $0 \leq 1 - c - \mu \leq 1$ y $0 \leq 1 - m \leq 1$.

En la figura 4 se presenta la solución numérica (gráfica) obtenida para $m = 0.01$, $c = 0.02$, $K = 900$, $S(0) = 9000$, $I(0) = 1000$, $R(0) = 0$, $M(0) = 0$. Se ha incluido también una línea vertical de puntos que indica el instante en que $I(t)$ pasa a ser menor que K.

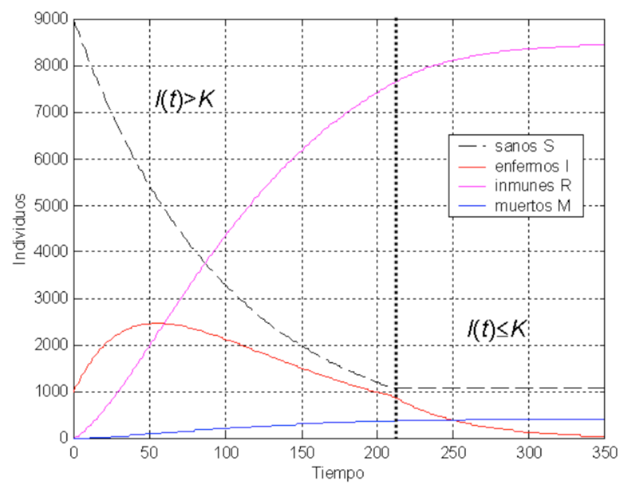

Figura 4: Solución numérica.

7 Implementación del bloque de Álgebra Lineal (3.5 ECTS)

El problema de modelización presentado se incluiría en el bloque de Álgebra Lineal, tal y como de escribe a continuación:

- Teoría y problemas sobre matrices (6 horas).
- Practica de MATLAB© (1 hora).

- Teoría y problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales. (6 horas).
- Practica de MATLAB© (1 hora).

- Teoría y problemas sobre vectores (8 horas).
- Practicas de MATLAB© (1 hora).

- Teoría y problemas sobre valores y vectores propios (8 horas).
- Prácticas de MATLAB© (1 hora).

- Presentación del modelo en una sesión práctica de MATLAB©:
  Análisis y simulación del modelo básico (2 horas).
- Sofisticación del modelo como tarea o proyecto.

8 Reflexión final y conclusiones

La utilización aislada de modelos y el ensayo de simulaciones para introducir conceptos en Análisis Matemático y Álgebra Lineal ha sido experimentada en el aula por los autores con bastante éxito en lo que se refiere, sobre todo, a la aceptación del alumnado. No se ha cuantificado la mejora en cuanto a resultados del aprendizaje puesto que en las experiencias previas no se podría decir que haya habido un cambio metodológico substancial. La propuesta planteada en este trabajo es más ambiciosa ya que el modelo propuesto y la experiencia de simulación permite abarcar la mayoría de los tópicos del Álgebra Lineal que forman parte del curso de matemáticas de primero del Grado en Ciencias Ambientales de la Universidad Politécnica de Valencia-Campus de Gandia y supone un cambio metodológico apreciable que será, en su momento, susceptible del correspondiente análisis comparativo con experiencias o situaciones previas. Pensamos que la propuesta es realista y realizable, a pesar de los medios disponibles, siendo el principal problema la disponibilidad de equipos y aulas informáticas.

9 Anexo 1: Script Matlab©

```
%Proceso en diferencias para el
%modelo de extensión plagas

%INTRODUCCIÓN DE PARÁMETROS

m=input('Valor de m ')
c=input('Valor de c ')
K=input('Valor de K ')

%MATRICES DEL SISTEMA

A=[1-m 0 0;m 1-c 0; 0 c 1];
AP=[1 0 0;0 1-c 0;0 c 1];

'Vectores y valores propios de A para I(t)>K'
[V,D]=eig(A);

'Vectores propios'
V1=V(:,1),V2=V(:,2),V3=V(:,3)

'Valores propios'
Lambda1=D(1,1),Lambda2=D(2,2),Lambda3=V(3,3)

'Vectores y valores propios de A para I(t)<=K'
[V,D]=eig(AP);

'Vectores propios'
V1=V(:,1),V2=V(:,2),V3=V(:,3)

'Valores propios'
Lambda1=D(1,1),Lambda2=D(2,2),Lambda3=V(3,3)

%INTRODUCCIÓN DE VALORES PARA LOS ESTADOS INICIALES

sanos=input('Nº inicial de indivíduos sanos ')
enfermos=input('Nº inicial de indivíduos enfermos ')
inmunes=input('Nº inicial de indivíduos resistentes ')
```

```
X0=[sanos;enfermos;inmunes];
X=X0;
V1=X0(1);
V2=X0(2);
V3=X0(3);
cont=[0];
%INTRODUCCIÓN DEL NÚMERO DE PASOS O ETAPAS
itera=input('Número de pasos ')
for i=1:itera
        cont=[cont i];
      if X(2)<=K
        B=AP;
      else
        B=A;
      end
      X=B*X;
      V1=[V1 X(1)];
      V2=[V2 X(2)];
      V3=[V3 X(3)];
      end
plot(cont,V1,'r')
pause(1)
hold on
plot(cont,V2,'g')
pause(1)
hold on
plot(cont,V3,'b')
xlabel('Paso (t)')
ylabel('Individuos')
legend('Sanos S','Enfermos I','Inmunes R',0)
grid
```

Referencias

[1] Amelkin, V. 1987. Ecuaciones Diferenciales Aplicadas a la Práctica. Editorial Mir Moscú.

[2] Artigue, M., Batanero C. y Kent, P.(2007), Mathematics thinking and learning at post secondary level. In Fr. Lester (ed.), Second Handbook of research on Mathematics Teaching and learning. NCTM-IAP; Charlotte, NC. pp. 1011-1045.

[3] Camacho, M., Depool, R. y Garbin, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. Educación Matemática,. 20(3), pp. 33-57.

[4] Drijvers, P., Kieran C. y Mariotti, M. (2010) Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In C. Hoyles y L.B. Lagrange (eds.), Mathematics Education, pp. 89-132. New York: Springer.

[5] Gil, N., Blanco, L. J., Guerrero, E. (2005) El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, N. 2 pp. 15-32.

[6] Gómez-Chacón, I.M, 2000. Matemática Emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático. Ed. Narcea, Madrid.

[7] ICE, 2006. Plan de acciones para la convergencia europea (PACE).Guía docente de la UPV: criterios de elaboración. Edita UPV. D.L. V-2201-2006.

[8] Shannon, Robert; Johannes, James D. (1976) Systems Simulation: The Art and Science. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 6(10). pp. 723-724.