

Modelización con curvas y superficies de Bézier

Orlando Galdames Bravo

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

orlando.galdames@gmail.com

Abstract

Las curvas de Bézier, un instrumento matemático para la modelización de curvas y superficies, nacieron como una aplicación concreta en el seno de la industria automovilística. El presente artículo pretende recuperar este ejemplo para mostrar como ciertos desarrollos matemáticos que surgieron directamente en la industria, pueden utilizarse como contenidos en la enseñanza universitaria. Explicaremos cómo y por qué surgen, y también su formulación matemática junto con alguno de los problemas que plantea. Para finalizar describimos una experiencia en el aula y extraemos algunas conclusiones respecto a una hipotética incorporación de una asignatura enfocada a la resolución de un determinado diseño utilizando curvas y superficies de Bézier.

The Bézier curves, a mathematical tool used in construction of curves and surfaces, was born as concrete application within the car industry. The present paper expects to recover this example for show how some mathematical tools can be used in the university teaching. We explain how and why these arise and also its mathematical formulation with the troubles that set out. We finalize describing an experience in the classroom and we extract some conclusions respect to supposing the incorporation of a subject oriented to solve a design using Bézier curves and surfaces.

Keywords: Curvas de Bézier, Superficies de Bézier, Algoritmo de Casteljaou

1 Introducción

Las curvas de Bézier nacen en Francia a finales de los años '50, a raíz de un problema de diseño dentro de la industria automovilística. Por aquel entonces las compañías ya habían comenzado a vender sus productos al ciudadano de a pie, pronto se percataron de la importancia que éste le daba a que su producto no únicamente fuese práctico y de calidad, sino además debía resultar agradable a los sentidos, entre ellos, al de la vista. Vemos en la figura 1 un ejemplo de las herramientas que se utilizaban para realizar y reproducir estos diseños realizados sobre el papel.

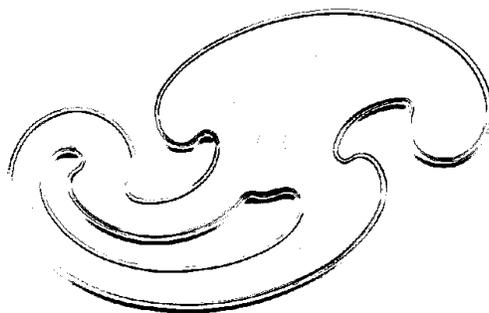


Figura 1: Plantilla de Burmester.

Por ejemplo, para realizar el diseño de una determinada curva utilizando una plantilla de Burmester, el diseñador debía ir señalando qué curva de la plantilla había utilizado para un determinado recorrido de la curva y así con cada uno de los distintos tramos hasta completar toda la curva (figura 2).

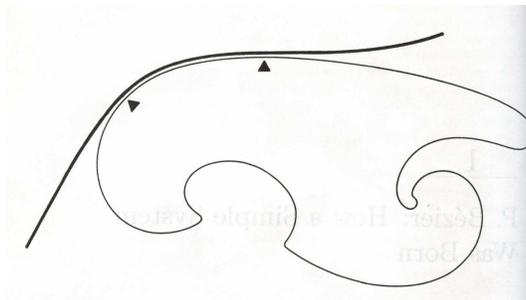


Figura 2: Marcas para reproducir una curva.

Un problema bastante común se presentaba cuando había que realizar alguna modificación sobre el diseño original, por pequeña que esta fuera había que reproducir el dibujo y esto resultaba ser muy costoso y requería tiempo. De cualquier modo la innovación era un imperativo y las técnicas clásicas se estaban quedando obsoletas. El cambio lo produce la aparición de los primeros ordenadores que inicialmente gestionaban una cantidad pequeña de datos personales pero en poco tiempo la capacidad de gestión iba a ir aumentando y los ingenieros ya se habían percatado del potencial que estas máquinas podían ofrecer.

Por entonces ya eran conocidas algunas técnicas matemáticas que podrían implementarse in-

formáticamente para la reproducción de curvas en el plano, como los splines cúbicos o los polinomios de aproximación de Lagrange. El problema de los splines es que, al igual que con la plantilla, hay que ir reproduciendo la curva a tramos pequeños, con la diferencia de que además hay que saber algo de matemáticas. El problema de los polinomios de Lagrange, que sí pueden reproducir un tramo largo de curva, es que en para obtener una buena aproximación hay que elevar el grado del polinomio, a veces demasiado, complicando así su representación gráfica, pero lo peor es que una pequeña modificación de los puntos de interpolación, es muy probable que ya no nos sirve el mismo polinomio y es necesario calcularlo de nuevo.

El objetivo era, y es al fin y al cabo, realizar una curva que pase por determinados puntos o lo más aproximadamente posible, de manera que la curva resultante tenga un aspecto parecido al de la figura que se forma si unimos los puntos mediante segmentos. Por ejemplo, si los puntos son colineales, que la curva obtenida sea una recta y a medida que los puntos se van alejando de esta recta la curva tenga un comportamiento similar en los alrededores de los puntos que se alejan. Esta propiedad es lo que algunos autores llaman control pseudo-local o pseudo-control local y que veremos luego junto con otras propiedades interesantes de las curvas de Bézier.

Un joven licenciado en matemáticas decide probar suerte dentro de una conocida compañía dedicada a la fabricación y venta de automóviles, se llamaba Paul de F. de Casteljaou. Realmente los ingenieros desconocían de qué manera podría encajar un matemático dentro de su empresa pero eran conocedores del problema del diseño y decidieron darle una oportunidad [1]. En la siguiente sección conoceremos algo más sobre su aportación.

Dos años después a de Casteljaou, el ingeniero Pierre E. Bézier, que llevaba casi 30 años trabajando en otra compañía francesa también dedicada a la automoción, comenzó a plantearse también el problema del diseño asistido por ordenador, por supuesto la visión no podía ser la misma. Bézier ideó un proyecto orientado a resolver este problema al cual él estaba al mando. Consiguió entonces una aproximación más elegante y llegar un poco más allá. Parece ser que por motivos de propiedad intelectual de Casteljaou no pudo publicar sus resultados hasta pasados varios años, sin embargo Bézier tuvo la oportunidad de divulgar sus investigaciones y promover el uso de las curvas y superficies que hoy en día llevan su nombre.

Las curvas de Bézier pronto trascendieron el ámbito del que surgieron y hoy en día se utilizan en todo tipo de programas de diseño (AUTOCAD[®], COREL[®], ADOBE ILLUSTRATOR[®]...), el lenguaje POSTSCRIPT[®] está basado en las curvas de Bézier, y en definitiva cualquier arquitecto o profesional del diseño conoce esta herramienta matemática y la aplica en su trabajo. Por tanto parece razonable y también motivador el aprendizaje de las matemáticas necesarias para el desarrollo de la teoría de curvas y superficies de Bézier. Veamos a continuación qué son y cómo se construyen estos objetos.

2 Curvas y superficies de Bézier

En esta sección haremos un repaso rápido de la definición de curva de Bézier, su construcción utilizando el algoritmo de Casteljaou y los principales problemas que plantea en cuanto a método de aproximación.

2.1 El algoritmo de Casteljau

Dados dos puntos en el plano real $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$, podemos calcular la combinación convexa entre ellos, y esta se representa mediante una curva en coordenadas paramétricas

$$\beta_0^0(t) := tP_1 + (1-t)P_0 = (tx_1 + (1-t)x_0, ty_1 + (1-t)y_0) \quad t \in [0, 1].$$

Supongamos ahora que tenemos un conjunto más grande de puntos en el plano, por ejemplo $\{P_0, P_1, P_2, P_3\} = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$, entonces puede surgir la idea de realizar combinaciones convexas entre todas las parejas de puntos, obteniendo un dibujo como la de la Figura 3. Pero, como hemos dicho, no es esto lo que buscamos, estamos buscando obtener una curva que se asemeje más a la Figura 4.

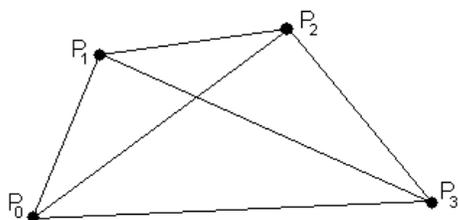


Figura 3: Combinaciones convexas.

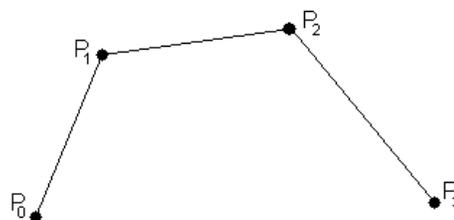


Figura 4: Combinaciones que nos interesan.

Entonces realizamos las combinaciones convexas entre los puntos que más se vayan a aproximar a la curva resultante que queremos obtener, por este motivo el orden de los puntos es importante, tomad por ejemplo la figura 5, en el que se han intercambiado los puntos P_1 y P_2 lo que da a entender que la curva que deseamos obtener tendrá una zona que se estrecha.

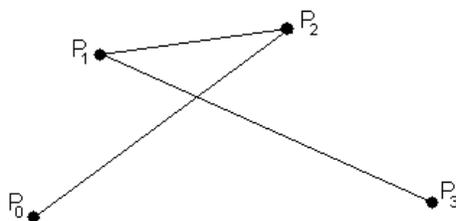


Figura 5: Otra combinación posible.

En nuestro caso las combinaciones convexas que deseamos obtener son las tres líneas dibujadas en la figura 4

$$\beta_0^0(t) := tP_1 + (1-t)P_0 = (tx_1 + (1-t)x_0, ty_1 + (1-t)y_0) \quad t \in [0, 1],$$

$$\beta_1^0(t) := tP_2 + (1-t)P_1 = (tx_2 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)y_1) \quad t \in [0, 1],$$

$$\beta_2^0(t) := tP_3 + (1-t)P_2 = (tx_3 + (1-t)x_2, ty_3 + (1-t)y_2) \quad t \in [0, 1].$$

El siguiente paso es volver a realizar una combinación convexa, pero ahora entre las curvas obtenidas, observaremos entonces que lo que conseguimos con esto es elevar el grado de los

polinomios que parametrizan la curva, a este grado se le conoce como *grado de la curva*, veamos:

$$\begin{aligned} \beta_0^1(t) &:= t\beta_0^0 + (1-t)\beta_1^0 \\ &= (t(tx_2 + (1-t)x_1) + (1-t)(tx_1 + (1-t)x_0), \\ &\quad t(ty_2 + (1-t)y_1) + (1-t)(ty_1 + (1-t)y_0)) \\ &= (t^2x_2 + 2t(1-t)x_1 + (1-t)^2x_0, t^2y_2 + 2(1-t)ty_1 + (1-t)^2y_0) \\ &= t^2P_2 + 2t(1-t)P_1 + (1-t)^2P_0 \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

análogamente obtenemos la siguiente curva

$$\beta_1^1(t) := t^2P_3 + 2t(1-t)P_2 + (1-t)^2P_1 \quad t \in [0, 1].$$

Nótese que los subíndices se refieren a los puntos o curvas que intervienen en la combinación, concretamente al primer elemento de dicha combinación, mientras que el superíndice se refiere al paso en el que nos encontramos, por lo que está relacionado con el grado de las curvas, en otras palabras, el grado de la curva es el superíndice más 1. Hemos obtenido pues las curvas de la figura 6. Intuitivamente lo que ocurre cuando realizamos la combinación convexa entre dos curvas, estamos realizando una combinación convexa de todos y cada uno de los puntos de las dos curvas tomados a pares según el parámetro $t \in [0, 1]$. Por ejemplo para obtener la curva β_1^1 tomamos un punto de la curva β_1^0 que se corresponde con un $t_0 \in [0, 1]$, es decir $\beta_1^0(t_0)$ (estamos tomando un punto del segmento que une los puntos P_1 y P_2), entonces tomamos el punto correspondiente al t_0 pero en la otra curva/segmento β_2^0 , es decir $\beta_2^0(t_0)$ y hacemos su combinación convexa escogiendo el parámetro correspondiente t_0 , así

$$\begin{aligned} \beta_1^1(t_0) &= t_0\beta_2^0(t_0) + (1-t_0)\beta_1^0(t_0) = t_0(t_0P_3 + (1-t_0)P_2) + (1-t_0)(t_0P_2 + (1-t_0)P_1) \\ &= t_0^2P_3 + 2t_0(1-t_0)P_2 + (1-t_0)^2P_1, \end{aligned}$$

ver figura 7.

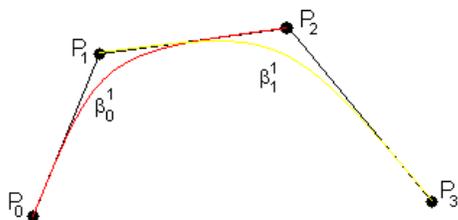


Figura 6: Combinación de dos segmentos.

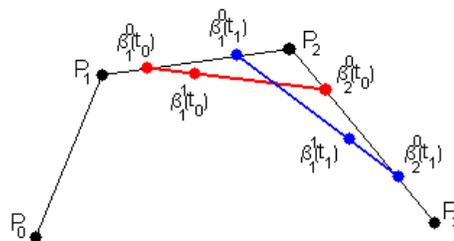


Figura 7: Explicación de la combinación.

Finalmente obtenemos la curva deseada como combinación de las dos últimas curvas obtenidas

$$\begin{aligned} \beta_0^2(t) &:= t\beta_1^1 + (1-t)\beta_0^1 = t(t^2P_3 + 2t(1-t)P_2 + (1-t)^2P_1) \\ &\quad + (1-t)(t^2P_2 + 2t(1-t)P_1 + (1-t)^2P_0) \\ &= (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Nótese que en esta curva final aparecen todos los puntos de la lista inicial, ver figura 8.

El algoritmo de de Casteljau es sencillo en todos los sentidos y resultó de gran ayuda para reproducir los diseños deseados. El problema es que, dada una curva, el algoritmo no determina qué puntos (de control) necesitamos para aproximar lo mejor posible esta curva. Nótese que la curva obtenida únicamente pasa por el punto inicial y el final.

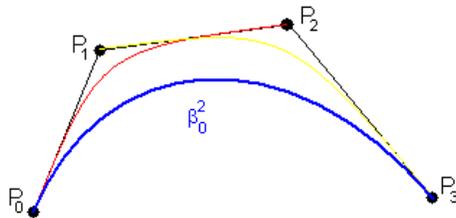


Figura 8: Combinación de dos curvas.

2.2 Propiedades y superficies de Bézier

La forma de las curvas de Bézier pueden expresarse sin necesidad de utilizar el algoritmo de recurrencia, haciendo uso del i -ésimo polinomio de Bernstein de grado n , $B_i^n(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$. Así podemos definir la curva de Bézier como

$$\alpha(t) := \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0, 1].$$

Esta es la forma actualizada que tienen hoy en día las curvas de Bézier, el algoritmo de Casteljau es muy didáctico y ayuda a comprender el funcionamiento de las mismas. Pasemos a ver algunas de sus múltiples propiedades.

Invarianza afín. La forma de una curva de Bézier no varía mediante una transformación afín, homotecias, traslaciones y rotaciones. Es decir, dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ afín y $\alpha(t)$ la curva de Bézier de los puntos $\{P_i\}_{i=0}^n$, entonces $f(\alpha(t))$ es la curva de Bézier de los puntos $\{f(P_i)\}_{i=0}^n$.

Envoltura convexa. La curva de Bézier siempre está contenida dentro de la envoltura convexa de los puntos de control.

Simetría. Si invertimos el orden de los puntos de control, la curva de Bézier resultante tras el cambio es la misma pero recorrida en sentido inverso.

Disminución de la variación. El número de intersecciones entre la curva de Bézier y una recta es menor o igual al número de intersecciones de la misma recta con su polígono de control. Intuitivamente, esto nos dice que el polígono de control ya nos da una idea aproximada de por donde irá la curva.

Pseudo-control local. Esta es tal vez la propiedad más destacada. Si movemos un punto de control P_i a P'_i , entonces todos los puntos de la curva se moverán respecto a la curva original en la dirección del vector $\vec{P_i P'_i}$. Aunque el cambio no afecta a todos los puntos por igual, acentuándose en la zona más cercana al punto P_i en imperceptible en los puntos alejados del mismo.

Toda esta teoría podemos encontrarla desarrollada en algunos libros, como [2],[5] y también en internet [8]. Veamos fugazmente cómo aumentar en uno la dimensión para conseguir superficies de Bézier y que técnicas se necesitan para la construcción de superficies. Antes de nada comentar que las propiedades que hemos destacado antes junto con otras que pueden encontrarse en

las referencias son perfectamente aplicables a superficies, pasemos pues a ver su definición.

Dado un conjunto finito de puntos de \mathbb{R}^3 que llamaremos red de control $\{P_{i,j}\}_{(i,j)=0}^{(m,n)}$, definimos la superficie de Bézier $x: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$x(u, v) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{i,j}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

En la figura 9 vemos representada la red de control junto con la superficie Bézier resultante.

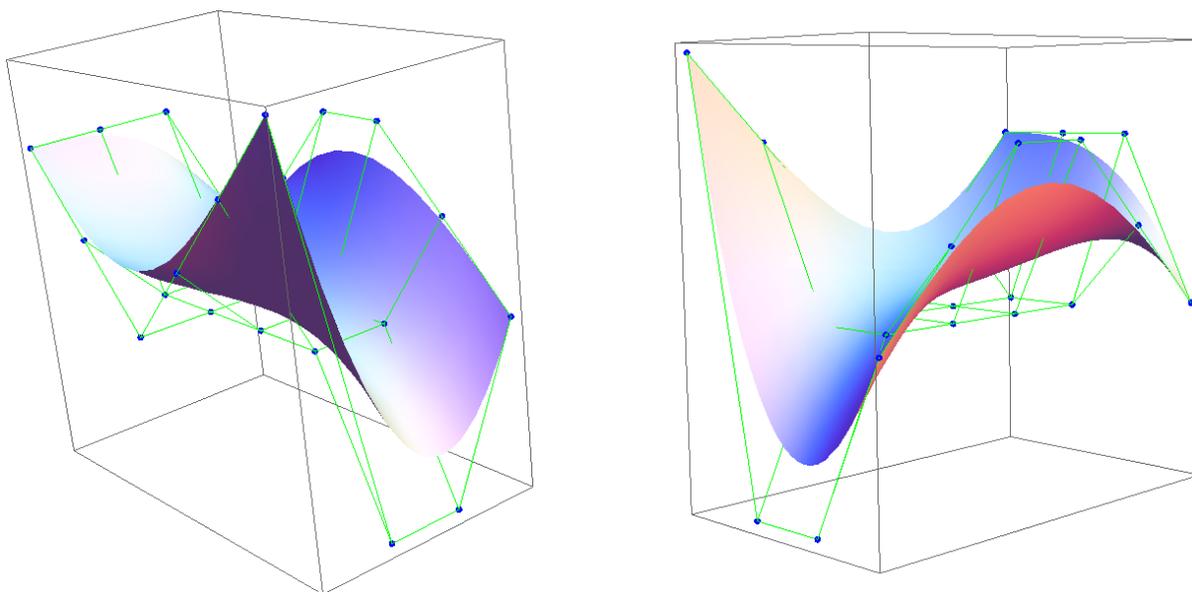


Figura 9: Superficie de Bézier.

2.3 El problema de aproximación

El problema natural que se plantea una vez definida una curva o una superficie de Bézier, es el siguiente: dada una curva o superficies arbitrarias, ¿cómo podemos obtener una curva o superficie de Bézier lo más cercana posible a la original? Es decir, nos planteamos un problema de aproximación. Ya son conocidas otras técnicas de aproximación como los splines cúbicos, los polinomios de Lagrange o mínimos cuadrados, y éstas tienen sus ventajas y desventajas. El denominador común en todas ellas es que se toma una muestra no aleatoria y finita de puntos del objeto a aproximar y se intenta conseguir un objeto similar aproximándose a estos puntos. El método de aproximación que vamos a ver no se distingue en este punto de los anteriores, pero, como se ha visto la ventaja de las curvas y superficies de Bézier es que son intuitivamente muy fáciles de comprender.

Veamos cómo proceder para aproximar una lista de $k + 1$ puntos $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_k\}$ del plano real. Buscamos una curva polinomial $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de grado n tal que $\|Q_i - \alpha(t_i)\|$ sea

pequeño, donde $t_i \in [0, 1]$ para $i = 1, \dots, k$. Lo ideal es que $\alpha(t_i) = Q_i$, para $i = 1, \dots, k$, luego si tomamos α una curva de Bézier, tenemos que $\alpha(t) = B_0^n(t)P_0 + \dots + B_n^n(t)P_n$ y por tanto queremos que

$$\begin{cases} B_0^n(t_0)P_0 + \dots + B_n^n(t_0)P_n = Q_0, \\ B_0^n(t_1)P_0 + \dots + B_n^n(t_1)P_n = Q_1, \\ \vdots \\ B_0^n(t_k)P_0 + \dots + B_n^n(t_k)P_n = Q_k. \end{cases}$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} B_0^n(t_0) & \dots & B_n^n(t_0) \\ B_0^n(t_1) & \dots & B_n^n(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ B_0^n(t_k) & \dots & B_n^n(t_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_k \end{pmatrix}.$$

Y abreviando tendríamos

$$\boxed{MP = Q}.$$

La solución, obviamente son los puntos de control \mathbf{P} que estábamos buscando.

Otra técnica que puede plantearse es la que deriva del siguiente problema: dados unos puntos $\{Q_0, \dots, Q_k\}$ del plano, eliminamos uno y queremos aproximar la figura mediante una curva de Bézier, resulta que las curvas de Bézier son sensibles a la posición de los puntos a aproximar y el resultado obtenido mediante la técnica anterior no es el esperado. Lo que hay que hacer es construir una nueva lista de puntos que sean aproximadamente equidistantes y aproximar estos usando la fórmula de arriba. Es por esto que si queremos aproximar una curva o superficie, la mejor elección es tomar una muestra lo más equidistribuida posible.

3 Experiencia en el aula

A continuación presentamos una experiencia realizada durante el curso 2009-2010 en el Máster de Investigación Matemática que imparte la Universidad de Valencia y la Universidad Politécnica de Valencia. La asignatura es: *Fundamentos geométricos del diseño con ordenador*.

Uno de los objetivos propuestos era conseguir dibujar el mortero valenciano (figura 10) usando superficies de Bézier. Para ello se utilizó la herramienta MATHEMATICA[©].

El profesor propuso dividir la figura en cuatro cuadrantes, de manera que una vez construido uno, el resto puede representarse realizando rotaciones, todos los alumnos los alumnos siguieron este consejo, pero de diferentes maneras. La figura no puede representarse mediante una única superficie de Bézier, hay que dividirla de la manera más eficiente posible. Lo más complejo de todo y que ningún alumno pudo resolver fue la eliminación todas las zonas “afiladas”: resulta que al unir dos superficies, una de las ventajas que ofrece esta técnica es el control de la derivada, de manera que esta coincide (salvo el producto por una constante) con el segmento formado por los puntos de control extremos. Para el caso de superficies la derivada es obviamente direccional, pero la idea es la misma. De cualquier modo, parece que el motivo por el que no se pudieron eliminar estas pequeñas imperfecciones fue el tiempo. Veamos cuáles fueron



Figura 10: Mortero valenciano.

los diseños presentados por los alumnos.

En el siguiente, el alumno ha dividido la parte exterior (sin las hendiduras) en cuatro partes, que ha rotado para conseguir una superficie exterior como aproximación a una superficie de revolución. El alumno ha usado la función `Manipulate[]` para ir aproximando visualmente la superficie representada a la deseada. Del mismo modo ha representado la parte exterior de la hendidura y ha calculado la curva de corte con la superficie exterior calculada antes. Ha representado la base del mortero y el interior cada una con una única superficie de Bézier y finalmente ha calculado unas superficies intermedias para unir el interior con la parte exterior con la interior y otra para unirla a las hendiduras.

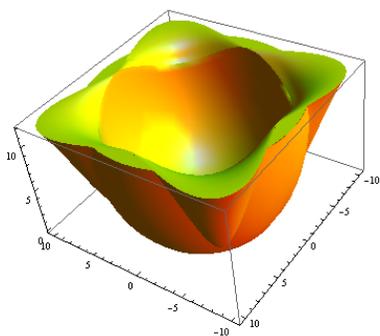


Figura 11: Mortero A

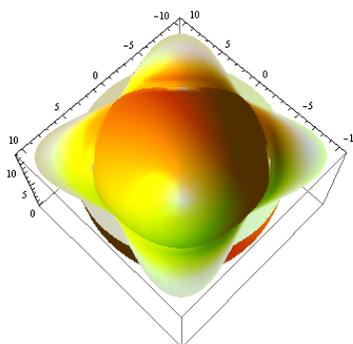


Figura 12: Desde arriba

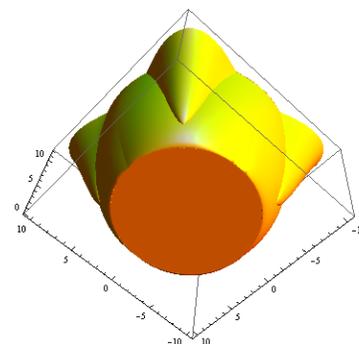


Figura 13: Desde abajo

En el trabajo siguiente, el alumno optó por dividir el mortero entero en cuatro cuadrantes, pero tanto la parte exterior como la interior. Se hizo del siguiente modo: una superficie para la parte interior del cuadrante, otra para la exterior, una para la parte interior de la hendidura y otra para la parte exterior de la hendidura. Finalmente la parte de arriba de la hendidura, la de arriba del recipiente y una tapa redonda para abajo. En esta construcción el alumno tuvo cuidado de que la superficie de la hendidura, tanto en el interior como en el exterior pegara correctamente, esta parte fue tal vez la más complicada, y como en el caso anterior se utilizó

la función `Manipulate[]` para aproximar las superficies.

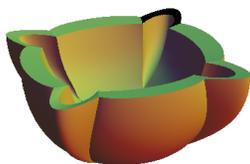


Figura 14: Mortero B

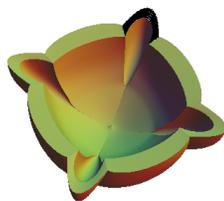


Figura 15: Desde arriba

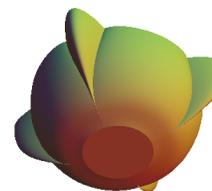


Figura 16: Desde abajo

Finalmente vemos un caso en el que el alumno ha decidido aproximar directamente parametrizaciones superficies clásicas pero que no tienen representación polinómica, como esferas, paraboloides y conos elípticos. Las subdivisiones que ha hecho son las siguientes: como los otros dos alumnos ha dividido la figura en cuatro cuadrantes. Ha aproximado la parte exterior y la interior mediante esferas, la parte exterior de la hendidura con un cono elíptico y la parte interior con un paraboloides. Finalmente para la parte de abajo ha usado un disco y para la parte de arriba superficies regladas, que son las únicas que ya son de por sí polinómicas. Haciendo una malla de puntos sobre estas superficies y aproximando una superficie de Bézier a esta, se obtiene un resultado bastante satisfactorio. Únicamente ha habido problemas al tener que recortar algunos trozos de superficie, para esto se ha usado la opción `RegionFunction`. Aquí el alumno no se ha preocupado de que las superficies cuadraran perfectamente, sólo de que no se viera si las superficies se cortaban.

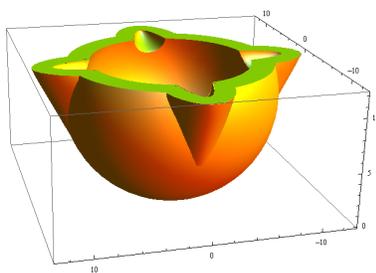


Figura 17: Mortero C

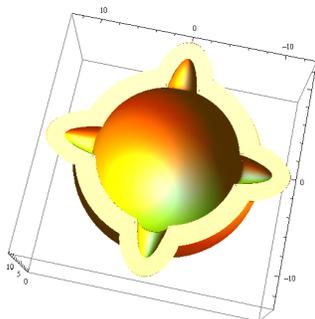


Figura 18: Desde arriba

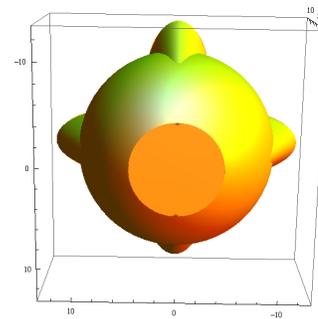


Figura 19: Desde abajo

La realización de la práctica necesitó muchísimas horas de trabajo extra por parte de los alumnos, puede que debido a que la práctica no se había realizado nunca y aunque el diseño era en apariencia sencillo después se encontraron con algunas complejidades inesperadas.

4 Conclusiones

En esta sección intentaremos dar algunas pautas sobre cómo creemos que debería enfocarse una hipotética asignatura que utilizara las curvas y superficies de Bézier como elemento didáctico como, por ejemplo, se ha explicado en la sección anterior.

Se propone enfocar la asignatura desde el punto de vista del diseño asistido por ordenador, la diferencia con una clase de diseño al uso es que para resolver problemas de diseño hemos de hacer uso de ciertos conocimientos matemáticos, como por ejemplo:

I. Álgebra lineal.

- 1) Espacio vectorial de dimensión finita.
 - a) Operaciones con vectores.
 - b) Subespacios vectoriales.
- 2) Sistemas de ecuaciones lineales.
 - a) Matrices.
 - b) Determinantes.
 - c) Resolución y estudio de sistemas de ecuaciones lineales.
 - d) Cálculo de la inversa de una matriz.

II. Análisis.

- 1) Funciones polinómicas como elementos sencillos que tienen una representación gráfica.
- 2) Funciones no polinómicas como elementos complejos que tienen una representación gráfica.
- 3) Estudio de las gráficas de estas funciones.
 - a) Derivadas.
 - b) Cálculo de extremos.
 - c) Monotonía.
 - d) Curvatura.

III. Matemática aplicada.

- 1) Aproximación numérica.
- 2) Métodos de aproximación.
 - a) Lagrange.
 - b) Mínimos cuadrados.
 - c) Splines.

IV. Geometría.

- 1) Geometría afín y euclídea.
 - a) El espacio euclídeo \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .
 - b) Componentes y relaciones del espacio euclídeo.
 - c) El espacio afín

- d) Funciones afines.
- 2) Geometría analítica.
 - a) Representación de curvas y superficies.
 - b) Intersección de curvas y superficies.

Uno de los problemas principales, como siempre, es el tiempo. Para ahorrar algo de tiempo, a la hora de realizar las clases prácticas en las que los alumnos utilizarán alguna herramienta matemática con la que puedan representar sus figuras, se aboga por crear un fichero en el que ellos únicamente tengan que ir modificando los datos (los puntos de control) y poco más para obtener resultados visuales lo antes posible. Por ejemplo, si decidimos utilizar MATHEMATICA[®], no es necesario que tengan un conocimiento de esta herramienta, pero sí del uso de un ordenador y ser conscientes de la sensibilidad de la sintaxis.

La evaluación puede enfocarse de distintos modos, pero si lo que pretendemos es que aprendan matemáticas de manera motivante hay que tener en cuenta que un diseño final debe tener cierta entidad dentro de la misma, ya que si damos demasiado peso al modelo matemático que utilizan y cómo lo utilizan, el alumno probablemente se desmotive al ver que no se valora suficientemente, precisamente la parte más visual y llamativa.

Como conclusión final y en defensa de las técnicas de Bézier más allá de los aspectos didácticos cabe decir que se trata de una vertiente de investigación sobre la cual se estudian tanto aplicaciones a la ingeniería del diseño ([3], [9]) como otros aspectos más avanzados dentro de la ciencia matemática ([7], [6]).

Agradecimientos. A los profesores Juan Monterde y Enrique Sánchez por su ayuda y consejos, y a mis compañeros de curso Javier Aroza y Javier Falcó por prestar desinteresadamente sus trabajos.

Referencias

- [1] P. F. Casteljau, “De Casteljau’s autobiography: My time at Citroën”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 16, pp. 583-586, (1999).
- [2] G. Farin, “Curves and surfaces for computer aided geometric design. A practical guide”, Morgan Kaufmann, 5th. ed., (2001).
- [3] G. Farin, “Shape”, *Mathematics Unlimited-2000 and Beyond*, B. Engquist and W. Schmid eds, Springer-Verlag, pp. 463-467 (2001).
- [4] G. Farin, J. Hoschek y M. S. Kim, eds. “Handbook of Computer Aided Geometric Design”, Ed. North-Holland Elsevier (2002).
- [5] J. Gallier, “Curves and surfaces in geometric modeling. Theory and algorithms”, Morgan Kaufmann Publ., (2000).
- [6] R. Mabry, “Problem 10990”, *American Mathematical Monthly*, vol. 110, n. 59 (2008).
- [7] J. Monterde, “Problem 11359 on the envelope of Bernstein polynomials”, *American Mathematical Monthly*, vol. 115, n. 4, April (2008).
- [8] J. Monterde, <http://www.uv.es/~monterde/>, web con apuntes, imágenes y programas relacionados con el diseño asistido por ordenador.
- [9] G. Westgaard y H. Nowacki, “A process for surface fairing in irregular meshes”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 18, pp. 619-638, (2001).

