MSEL

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

Modelling in Science Education and Learning
Volume 4, No. 19, 2011.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

La diagonalización de matrices en arquitectura

E. Jiménez Fernández
Universidad Politécnica de Valencia
edjimfer@mat.upv.es

Abstract

En este trabajo se presenta un ejemplo de como introducir la diagonalización de matrices simétricas a partir de un problema clásico de esfuerzo de vigas. Se pretende a partir de un contexto relacionado con la construcción establecer una conexión entre conceptos matemáticos como son los autovalores y autovectores de una matriz cuadrada y los conceptos propios de la física y mecánica como son los momentos y fuerzas, estableciendo un nexo de unión entre ellos.

In this work we use a beam problem as an application of diagonalization of symmetric matrices.

Keywords: Autovalores, autovectores, diagonalización, tensiones principales.

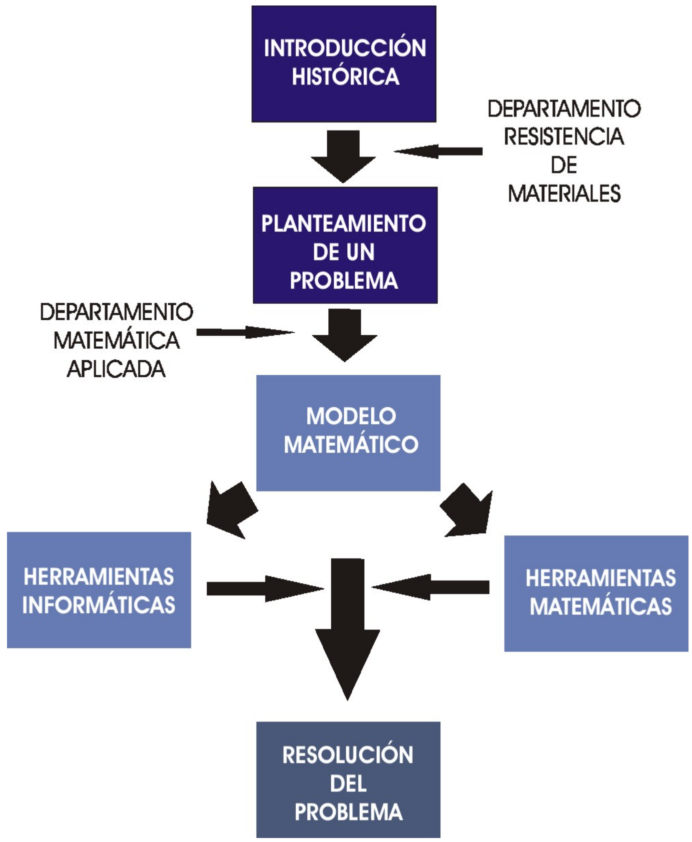
1 Introducción

En el curso de álgebra de primer curso de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de la Universidad Politécnica de Valencia se realizó una experiencia entre los departamentos de matemática aplicada y resistencia de materiales de esta universidad y que consistía en introducir el tema de autovalores y vectores propios para matrices reales simétricas reales a través de la contextualización previa de un problema de elasticidad de materiales. Cabe destacar que la experiencia se desarrolla dentro de una asignatura que tradicionalmente se ha impartido bajo la concepción clásica de la enseñanza de las ciencias y que reside en impartir clases magistrales, esencialmente teóricas y diáfanas de cualquier ejemplo que relacione esta materia con aplicaciones en el ámbito ingenieril. El departamento de resistencia de materiales nos ofrece la posibilidad de impartir una serie de sesiones donde se pretende introducir los principios básicos de los sólidos elásticos, en particular del que hace referencia a vigas. El objetivo de esta experiencia pretende captar la atención del alumno y hacer que se implique e involucre más en estas asignaturas de un contenido más teórico. De esta forma y tal como se detalla en la Guía del Profesor, ver [3] , se pretende *ofrecer una imagen de las matemáticas como instrumento de trabajo y análisis* y poder dar respuesta a una de las cuestiones que más se plantean los alumnos que estudian cualquier grado ingenieril, *¿esto para qué sirve?* y por otro lado *romper el aislamiento de las diferentes disciplinas* , ver [2].
A continuación describimos una breve guía para realizar una experiencia de estas características, pero ahora en el ámbito de la construcción. Este se fundamenta en el estudio realizado por Sánchez-Pérez J.V., Garcia Raffi L.M. y Sánchez Pérez E.A. [1]

2 El Modelo Didáctico

Históricamente el desarrollo de muchas técnicas matemáticas se fundamenta en el concepto constructivista, en la parte que a nosotros nos implica, se basa en que los alumnos vayan adquiriendo y construyendo sus propios conocimientos a través de un patrón o ruta que nosotros vamos a facilitar, y dando lugar a que estos se impliquen en una actividad investigadora. Es evidente que los modelos que se presentan o tienen que ser construidas varían en función del nivel o curso que se esta impartiendo. En el caso que presentamos partimos de un modelo que tiene cierta complejidad y que se plantea a los alumnos de primer curso de la licenciatura de Arquitectura. La falta de conocimientos más elevados tanto en física como matemáticas, no permite que estos realicen una tarea constructivista como hemos mencionado anteriormente, no obstante, se les presenta un guión para que a través de un ejemplo sencillo y contextualizado en el ámbito arquitectónico suponga un aliciente añadido para la compresión del tema.

En una primera sesión, los profesores del departamento de estructuras introducen el problema desde un punto de vista histórico y posteriormente realizan una presentación del modelo explicando e introduciendo todos los ingredientes conceptuales desde el prisma físico y arquitectónico. En la sesión posterior, los profesores del departamento de matemática aplicada facilitan a los alumnos una serie de material que esta formado por contenidos teóricos y prácticos que ayudarán resolver en cada caso el modelo presentado. Las clases se desarrollaran en aulas de informática donde los alumnos podrán trabajar con el programa mathematica. Al final de cada tema, se realizará una prueba tipo test donde se retratan los conceptos más importantes y de este modo podremos evaluar el trabajo realizado por el alumno.



3 Un Ejemplo con Vigas

3.1 Introducción Histórica

A continuación presentamos un ejemplo donde se desarrolla la idea didáctica que se expone en este trabajo, y que sirve como patrón para desarrollar diferentes secciones de la linea curricular que presente la asignatura.
En arquitectura se denomina viga a un elemento constructivo lineal que trabaja principalmente a flexión. Denominamos flexión al tipo de deformación que presenta un elemento estructural alargado en una dirección perpendicular a su eje longitudinal. Las vigas están diseñas para trabajar, principalmente, por flexión. El esfuerzo de flexión provoca tensiones de tracción y compresión. Igualmente, el concepto de flexión se extiende a elementos estructurales superficiales como placas o láminas. También pueden producirse tensiones por torsión, sobre todo en las vigas que forman el perímetro exterior de un forjado. Torsión es la solicitación que se presenta cuando se aplica un momento sobre el eje longitudinal de un elemento constructivo o prisma mecánico, como pueden ser ejes o, en general, elementos donde una dimensión predomina sobre las otras dos, aunque es posible encontrarla en situaciones diversas.Estructuralmente el comportamiento de una viga se estudia mediante un modelo de prisma mecánico. El tensor de tensiones es una representación matemática en forma de matriz de las tensiones en un punto asociadas a un sistema de referencia ortogonal definido en dicho punto.

Los orígenes del estudio de la elasticidad y resistencia de materiales y se remontan a la época de Galileo Galilei, donde ya hace referencia en sus **Discorsi e dimostrazione matematiche** (1638).Posteriormente Hook y Mariotte hacen algunas aportaciones técnicas en estos estudios, no obstante, en un esfuerzo de estudiar la distribución de esfuerzos en una viga, Jacob Bernoulli obtiene la ecuación de la elástica, resultado que publica en 1744 basándose en consideraciones de equilibrio y simultáneamente, Leonard Euler llega también a la deducción de dicha ecuación, pero esta vez utilizando consideraciones energéticas. Posteriormente Coulomb investiga en profundidad el estado de esfuerzos de vigas sometidas a flexión y torsión (1776 y 1787 respectivamente). Fue definitivamente en 1821 cuando Navier establece las primeras ecuaciones de equilibrio generales para cuerpos elásticos que posteriormente fueron mejoradas por cauchy en 1822.

3.2 Conceptos Básicos

El concepto de sólido responde a dos tipos de cuerpos.

- **Sólido rígido** Las distancias de dos puntos cualquiera permanecen invariantes.
- **Sólido elástico** Para cada punto **P** y cada sección π existe un vector $\overrightarrow{\sigma}$ denominado tensión que se define como la fuerza **F** por unidad de superficie **S**

$$\overrightarrow{\sigma} = \lim_{\triangle S} \frac{\triangle F}{\triangle S}$$

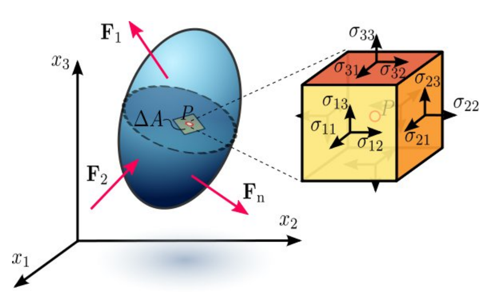
de la cual se obtiene

$$\sum \overrightarrow{F} = \int_S \overrightarrow{\sigma} dS$$

$$\sum \overrightarrow{M_P} = \int_S \overrightarrow{PQ} \times \sigma dS$$

Es evidente que por un solo punto pasan infinitos planos y por tanto infinitos estados de tensión, por al cual cosa debemos caracterizarlo de una forma canónica que permita describir el problema razonablemente. Para ello consideramos los ejes coordenados donde $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ son las componentes normales en las direcciones del eje de la sección, σ_{13}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{23}, σ_{31}, σ_{32} las componentes tangenciales, siendo el primero de los subíndices el plano de corte y el segundo la dirección que lleva la tensión. Si consideramos un entorno cúbico infinitesimal del punto **P** constituido por las seis caras y en cada una de las caras realizamos las consideraciones anteriores se puede obtener la siguiente matriz de tensiones:

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{19.1}$$



El teorema de reciprocidad de tensiones tangenciales que no vamos a detallar en este artículo permite comprobar que solo existen seis variables independientes, de hecho se demuestra que la matriz anteriormente citada es simétrica y real , así

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{19.2}$$

En resumen, dada una viga y un punto de esta podemos generar una sección determinada para la cual podemos construir una matriz simétrica real de tensiones.
Desde el punto de vista matemático sabemos que toda matriz de estas características admite un cambio de base ortogonal para el cual la matriz resultante es diagonal y real. Los elementos que aparecen en la diagonal son las **tensiones principales** y definen las tensiones que corresponden a los planos normales a las direcciones principales determinadas por los vectores columna de la matriz cambio de base.

4 Diagonalización de matrices

Un breve resumen algebraico nos permite facilitar a los alumnos un material para la comprensión de los diferentes ejemplos que se pueden presentar.

Dad una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se dice que A es **diagonalizable** si existe una matriz P no singular y existe una matriz D diagonal de forma que $A = PDP^{-1}$.

Para ver si una matriz cuadrada con entradas reales A es diagonalizable calculamos en primer lugar los **valores propios** o **autovalores** de la matriz A, resolviendo el **polinomio característico** resultante de realizar la operación

$$d_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0.$$

Las raíces de dicho polinomio es lo que denominamos valores propios o autovalores. Cabe destacar que las raíces de un polinomio en general no se pueden calcular de una forma exacta, si bien para no dificultar las cálculos trabajaremos con matrices de orden tres que si permiten calcular sus valores propios exactamente. El conjunto formado por los valores propios de A se llama **espectro** de A y se denota por $\sigma(A)$.

El número de veces que aparece repetido el valor propio λ como raíz de la ecuación característica se llama **multiplicidad algebraica** de λ y se denota por $\mathrm{MA}(\lambda)$.

Si denotamos por $r = \mathrm{rango}(A - \lambda E)$ entonces

$$A \text{ es diagonalizable si y sólo si } r + \mathrm{MA}(\lambda) = n \text{ para todo valor propio } \lambda.$$

En este caso D es la matriz diagonal formada por los valores propios de A repetidos tantas veces como su multiplicidad.

Para la obtención de la matriz P procedemos de la siguiente forma. Se llama **autoespacio** asociado al valor propio λ al espacio vectorial

$$E(\lambda) = \mathrm{N}(A - \lambda E) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (A - \lambda E)x = 0_n\}.$$

Los vectores de $E(\lambda)$ se llaman **vectores propios** o **multiplicidad geométrica** autovectores asociados al valor propio λ. Se llama del valor propio λ a la dimensión de $E(\lambda)$. La denotaremos por MG(λ).

Notar que

$$A \text{ es diagonalizable si y sólo si } \mathrm{MA}(\lambda) = \mathrm{MG}(\lambda) \text{ para todo valor propio } \lambda.$$

Se verifica también que MG(λ) $\leq$MA(λ) de donde se tiene que

$$\text{si } \mathrm{MA}(\lambda) = 1 \text{ entonces } \mathrm{MG}(\lambda) = \mathrm{MA}(\lambda) = 1.$$

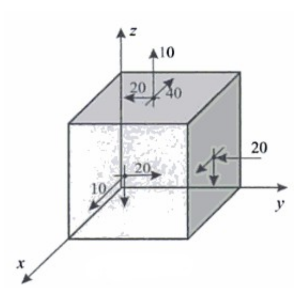
La matriz P es la formada por una base de autovectores asociada a cada autovalor ordenada según el orden de D y escribiendo los vectores en columna.

Se llama **polinomio mínimo** de A al polinomio mónico de menor grado que anula a A, lo denotaremos por $m_A(\lambda)$. El teorema de Cayley-Hamilton afirma que el polinomio característico de A anula a A con lo que el polinomio mínimo contiene al menos una vez a cada factor simple del polinomio característico. En términos del polinomio mínimo

$$A \text{ es diagonalizable si y sólo si todos los factores de } m_A(\lambda) \text{ son simples.}$$

4.1 Ejemplo

Sobre las caras de un paralepípedo que envuelve a un sólido elástico en el interior de una viga existen las tensiones indicadas en la figura en Mpa. Calcular las tensiones y direcciones principales.



$$[T] = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -40 \\ 20 & -20 & -20 \\ -40 & -20 & 10 \end{pmatrix}$$

Calculamos los ceros de la expresión algebraica $\det(T - \lambda Id) = 0$ Este determinante da lugar a un polinomio de grado tres que recibe el nombre de **polinomio característico**. Dicho polinomio tiene tres raíces reales $\lambda_1 = 60MPa$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -30MPa$. Esto nos proporciona las **tensiones principales**. Nos preguntamos a continuación, ¿qué direcciones tienen las tensiones principales? Estás corresponden a los **autovalores** de la matriz del tensor de tensiones. Un autovalor λ de autovector v_λ satisface la siguiente propiedad:

$$[T]v_\lambda = \lambda v_\lambda \tag{19.3}$$

Es decir las direcciones principales dan lugar a los subespacios invariantes de la aplicación lineal asociada al tensor de tensiones. La expresión anterior es equivalente a la siguiente:

$$[T - \lambda Id]v_\lambda = 0 \tag{19.4}$$

Utilizando esta fórmula nos permite calcular dichas direcciones, por lo tanto aplicándolo a nuestro caso concreto:

$$[T - 60Id]v_{60} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -50 & 20 & -40 \\ 20 & -40 & -20 \\ -40 & -20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si resolvemos el sistema compatible indeterminado resultante se obtiene un subespacio vectorial E_{60} de dimensión 1 generado por el vector $v^1 = [-1, -1/2, 1]^t$ y que nos proporciona la primera de las direcciones principales. Aplicando a los autovalores restantes la misma fórmula se tiene:

$$[T - 60Id]v_{60} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -20 & 20 & -40 \\ 20 & 10 & -20 \\ -40 & -20 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso se obtiene un base del subespacio vectorial invariante E_{-30} de dimensión dos $v^2 = [1, -2, 0]^t$, $v^1 = [0, 2, 1]^t$ y ortogonal al subespacio E_{60}. Esta propiedad es intrínseca de las matrices reales simétricas, es decir los subespacios invariantes generados por autovalores diferentes son siempre ortogonales y así las direcciones principales del tensor de tensiones siempre serán ortogonales.

En general el programa MATHEMATICA© puede ayudarnos a encontrar los valores y vectores propios de una matriz fácilmente. Desde un aula de informática se pone le proporcionan al alumno las herramientas matemáticas en forma de apuntes, y se les facilita las ordenes precisas para diagonalizar una matriz a través del programa . Obviamente, siempre podemos hacer las mismas cuentas que hacemos a mano (encontrar el polinomio característico, hallar sus raíces, resolver los sistemas lineales necesarios...), pero MATHEMATICA© tiene dos órdenes útiles para esto una vez que hemos introducido la matriz inicial de tensiones: **Eigenvalues y Eigenvectors**.

5 Evaluación

La docencia universitaria está iniciando un proceso de cambio como consecuencia de la convergencia europea, los nuevos planes de estudio y la influencia de un nuevo paradigma educativo cuya unidad de análisis no son las acciones del profesor sino las acciones del estudiante. Planteamos por tanto una forma de evaluación que trata de llevar a cabo una comprobación de los objetivos o de los resultados que han realizado los alumnos a lo largo de un periodo de tiempo determinado. Proponemos un sistema de evaluación combinado formado por diferentes notas que consiste evaluar al alumno utilizando pruebas objetivas, pruebas orales y evaluación de trabajos. En lo que respecta al ejemplo mencionado anteriormente, se procede a la realización de un pequeño examen tipo test que aglutina los conceptos más representativos que se han expuesto. Cabe indicar además, como estrategia de motivación, la preparación de un trabajo que se realiza a lo largo del curso que consiste en la construcción y exposición de un minitema de forma autónoma por parte del alumno sin que el profesor haya explicado nada, únicamente proporcionando al alumno el material y referencias necesarios para su elavoración. Uno de esos temas podría ser precisamente el que se expone en este trabajo. La suma de todas estas notas junto con la de un examen global ponderados adecuadamente daría lugar a la nota final, ver [5].

Referencias

[1] Sánchez-Pérez J.V., Garcia Raffi L.M. y Sánchez Pérez E.A., *Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los cursos de las carreras técnicas*, Enseñanza de las Ciencias, 1999, 17(1), 119-129.

[2] Saenz de Castro, C. *La enseñanza de las matemáticas. Un problema pendiente.* Tarbiya,10 pp.41-53.

[3] Núñez Espallargas, J.M. y Font Moll, V.,*Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas. Una aproximación histórica.* Revista de educación, 306, pp.293-314.

[4] M. Romero Garcia, P. Museros Romero, M.D.Martinez Rodrigo, A.Poy Gil, *Resistencia de Materiales*,Universidad Jaume I, Trabajos de Informática y tecnología, núm. 12.

[5] B. Álvarez Álvarez, C. González Mieres, N. García Rodríguez, *La motivación y los métodos de evaluación como variables fundamentales para estimular el aprendizaje autónomo*, Red U. Revista de Docencia Universitaria. Núm. 2.