



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

CAMPUS D'ALCOI

Modelización de activos cotizados mediante modelos de difusión estocásticos de tipo Itô

MEMORIA PRESENTADA POR:

Gema Miñana Sellés

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Convocatoria de defensa: Marzo de 2018

ÍNDICE

Índice de Figuras.....	1
Índice de Gráficos.....	2
Índice de Tablas.....	3
RESUMEN DEL TRABAJO FINAL DE GRADO.....	5
OBJETIVOS DEL TRABAJO FINAL DE GRADO.....	7
ANTECEDENTES Y SITUACIÓN ACTUAL DE LA BOLSA.....	9
1. EL IMPACTO DE LA BOLSA EN LA ECONOMÍA.....	12
1.1 La importancia de la Bolsa en la Economía.....	13
1.2 Los Mercados Financieros.....	14
1.2.1 El IBEX-35.....	16
1.3 Grifols.....	18
1.3.1 Historia de la empresa Grifols.....	18
1.3.2 El modelo de negocio.....	19
1.3.3 Acciones.....	20
2. FUNDAMENTOS ESTOCÁSTICOS.....	24
2.1 Movimiento Browniano o proceso de Wiener.....	24
2.2 Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano.....	27
2.3 Simulación del Movimiento Browniano.....	28
2.4 El Cálculo Estocástico de Itô.....	30
2.4.1 La Integral Estocástica de Itô.....	32
2.4.2 Propiedades de la Integral de Itô.....	36
3. EL MODELO ESTOCÁSTICO LOG-NORMAL.....	38
3.1 El modelo clásico determinista para inversiones en ambiente de certidumbre.....	39
3.2 Motivando la formulación del Movimiento Browniano Geométrico para un subyacente cotizado.....	41
3.3 Solución del Modelo Log-Normal.....	42
3.4 Principales funciones estadísticas del proceso estocástico solución del Modelo Log-Normal.....	44
3.5 Estimación de los parámetros de deriva y volatilidad del Modelo Log-Normal.....	46
3.5.1 Método de momentos estadísticos.....	46
3.5.2 Método de máxima verosimilitud.....	48
3.6 Validación Estadística del Modelo Log-Normal.....	55



CAMPUS D'ALCOI

3.6.1 Medidas estadísticas de bondad de ajuste	55
Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE)	55
3.6.2. Validación por intervalos de confianza	56
3.6.3. Gráficos comparativos.....	58
3.7 Predicción estadística	58
4. APLICACIÓN DEL MODELO LOG-NORMAL.....	61
4.1 Estimación de los parámetros del Modelo Log- Normal	63
4.1.1 Estimación de parámetros con el método de los momentos	63
4.1.2 Estimación de parámetros con el método de máxima verosimilitud	65
4.2 Validación del Modelo Log-Normal	66
4.2.1 Validación de los parámetros del método de los momentos	67
4.2.2 Validación de los parámetros del método de máxima verosimilitud	74
4.3 Predicciones del Modelo Log-Normal.....	78
4.3.1. Predicciones de la acción Grifols por el Método de los Momentos	79
4.3.2 Predicciones por el método de máxima verosimilitud	80
5. CONCLUSIONES FINALES	81
6. BIBLIOGRAFÍA.....	83

Agradecimientos

Quisiera agradecer a varias personas la ayuda que me han prestado tanto en la realización de este trabajo final de grado y en los años de enseñanza en la universidad.

En primer lugar, a mis directores, por todo lo que he aprendido en la realización de este trabajo y durante los años de mi enseñanza en la universidad. También no puedo dejar de agradecer a todos los profesores que han pasado por mi vida durante mi trayectoria en la universidad y que se quedan en mis recuerdos y que no los olvidare nunca.

Y por último, no pueden faltar las personas más importantes de mi vida, mis padres, mis abuelos y toda mi familia. Los cuales han sido unos pilares fundamentales en todos los aspectos y sin ellos no hubiera podido tener la educación que tengo hoy en día.

Muchas gracias

Índice de Figuras

Figura 1.2.1. Los valores con mayor ponderación en el Ibex-35 el 14 de enero d1992.....	17
Figura 1.3.1. Áreas de negocio de la empresa Grifols.....	21
Figura 3.1.1. Capitalización a interés compuesto continuo.....	41
Figura 4.1.1 Estimaciones de los parámetros del Modelo Log-Normal usando los métodos de Momentos y Máxima Verosimilitud para la acción Grifols (GRF) del Ibex-35	67

Índice de Gráficos

Gráfico 1.3.1. Evolución de la cotización de Grifols del 2006 al 2017.....	23
Gráfico 2.2.1. Simulación del Movimiento Browniano.....	30
Gráfico 4.1.1. Evolución de las cotizaciones de la acción Grifols.....	62
Gráfico 4.2.1. I.C. (95%) para la acción de Grifols vía la calibración de parámetros mediante el método de los momentos.....	74
Gráfico 4.2.2. I.C. (95%) para la acción Grifols vía la calibración de parámetros mediante el método de máxima verosimilitud.....	79

Índice de Tablas

Tabla 2.3.1. Justificación de la identidad (2.3.1) para la simulación del Movimiento Brownian	30
Tabla 4.1.1. Cotizaciones de las acciones de Grifols (GRF) en el IBEX-35.....	63
Tabla 4.1.2. Log-cotizaciones de las acciones de Grifols (GRF) en el IBEX-35.....	65
Tabla 4.1.3. Estimaciones de la media muestral y de la cuasi-varianza muestral de las Log-cotizaciones de las acciones de Grifols (GRF) en el IBEX-35.....	66
Tabla 4.2.1. Cálculo de la media y varianza/desviación típica teórica de la acción de Grifols utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos.....	69
Tabla 4.2.2. Cálculo medidas bondad de ajuste: RSME y MAPE utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos.....	71
Tabla 4.2.3. Medidas de bondad de ajuste: RSME y MAPE.....	72
Tabla 4.2.4. Cálculo los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos.....	73
Tabla 4.2.5. Cálculo de la media y varianza/desviación típica teórica de la acción de Grifols utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de máxima verosimilitud.....	76
Tabla 4.2.6. Cálculo de las medidas de bondad del ajuste: RSME y MAPE utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de máxima verosimilitud.....	77
Tabla 4.2.7. Cálculo los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de máxima verosimilitud.....	78
Tabla 4.3.1. Cálculo de predicciones puntuales y por I.C. de la acción Grifols vía la calibración de parámetros mediante el método de los momentos.....	80
Tabla 4.3.2. Cálculo de predicciones puntuales y por I.C. de la acción Grifols vía la calibración de parámetros mediante el método de máxima verosimilitud.....	81

RESUMEN DEL TRABAJO FINAL DE GRADO

Para explicar este trabajo que he realizado empiezo con la descripción básica del concepto de acción. Una acción o acciones son las partes iguales en las que se divide el capital social de una sociedad anónima en este caso se trata de la empresa Grifols. Estas partes son poseídas por una persona, que recibe el nombre de accionista y representa la propiedad que la persona tiene de la empresa, es decir, el porcentaje de la empresa que le pertenece al accionista.

En el trabajo final de grado (TFG) vamos a realizar un estudio del Modelo Estocástico Log-Normal, basado en un proceso estocástico denominado Movimiento Browniano Geométrico. Este estudio se aplicara a una acción de la empresa Grifols en un periodo de 40 días desde el 21 de noviembre de 2016 hasta el 16 de enero de 2017 (ambos inclusive). El objetivo final que se pretende con el estudio, es la realización de predicciones para el valor de la acción.

El Modelo Log-Normal corresponde a modelos estocásticos de un factor, los cuales son representados por una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô que contiene en su formulación la volatilidad y la tendencia de una acción. La aleatoriedad es introducida en la ecuación mediante la derivada del movimiento browniano, nombrado como el proceso de ruido blanco. El modelo estocástico log-normal retiene la propiedad fundamental de que el comportamiento medio o esperado del precio de la acción es el mismo que el valor que se obtendrá bajo un modelo de inversión determinista con tasa de retorno conocida o pactada de antemano, es decir una inversión sobre un bono.

Un parte importante del estudio de este trabajo es la elección del periodo temporal que utilizaremos para la aplicación del modelo. En el presente trabajo, el periodo de tiempo que hemos aplicado es de 40 días, ya que la aplicación del modelo Log-normal aconseja que para ponerla en marcha se debe realizar en un periodo de entre 30 y 60 días, perdiendo este eficacia en un horizonte temporal más amplio a causa del cálculo de las estimaciones probabilísticas (intervalos de confianza) que proporciona el modelo log-normal, los cuales por las propias hipótesis del modelo tienden a ser demasiado conservadores y son poco informativos.

Antes de empezar con la aplicación del modelo debemos estimar sus parámetros. Para ello utilizaremos el método de los momentos estadísticos y el método de máxima verosimilitud.

Una vez realizada la estimación de los parámetros procedemos a la validación del modelo. Para ello utilizamos diversas medidas de bondad de ajuste, las cuales son:

- Error cuadrático medio (ECM)
- Error porcentual absoluto medio (EPAM ó MAPE)

Finalmente mostraremos mediante gráficos y mediante valores numéricos los cálculos de las estimaciones puntuales y por intervalos de confianza al 95%, que constituirán las predicciones del modelo la acción de Grifols.

Las predicciones de las acciones de Grifols se realizaran después de los días seleccionados (del 21 de noviembre de 2016 hasta el 16 de enero de 2017).

OBJETIVOS DEL TRABAJO FINAL DE GRADO

El objetivo de mi trabajo es realizar un estudio sobre las predicciones del valor de un activo financiero (acción) de la empresa Grifols a través de un modelo matemático. El estudio se ha realizado mediante el modelo estocástico denominado Modelo Log-Normal, cuya resolución requiere del conocimiento y aplicación del cálculo estocástico de Itô.

Los objetivos que se proponen con el desarrollo de este trabajo son:

- El estudio y aplicación de las herramientas estocásticas correspondientes al cálculo de Itô las cuales son necesarias para aplicar el Modelo Log-Normal de subyacente financiero.
- Estudiar Modelo Log-Normal y su proceso estocástico de solución y también sus principales propiedades estadísticas.
- Realizar la calibración de los parámetros del modelo Log-normal a partir de una muestra de datos reales (40 días de cotización de la empresa Grifols)
- Utilizar la calibración anterior para modelizar en un periodo de tiempo adecuado.
- Validar la modelización sobre la acción de la empresa Grifols a través del modelo teórico log-normal utilizando medidas de bondad de ajuste.
- Realizar predicciones probabilísticas (puntuales y por intervalos de confianza) de la acción de Grifols.
- Revisar los resultados del modelo que hemos aplicado, comparando cada una de las predicciones con los datos reales de dicha acción.

La aplicación de este estudio se ha llevado a cabo a través del modelo estocástico de predicción de activos financieros denominado Modelo Log-Normal, cuya resolución requiere del conocimiento y aplicación del Cálculo Estocástico de Itô.

Los objetivos que se proponen alcanzar con el desarrollo de esta trabajo son:

- Estudiar y aplicar las herramientas estocásticas pertenecientes al Cálculo de Itô necesarias para poder aplicar el Modelo Log-Normal de subyacente financiero.
- Conocer el desarrollo del Modelo Log-Normal y su proceso estocástico solución, así como sus principales propiedades estadísticas.
- Calibrar los parámetros del modelo Log-Normal a partir de una muestra de datos reales.
- Utilizar la calibración anterior para modelizar en, un horizonte temporal adecuado, la acción de la empresa Grifols sobre la base de un histórico de dicho subyacente.
- Validar la modelización realizada sobre el activo financiero seleccionado a través del modelo teórico Log-Normal a través de medidas de bondad de ajuste.
- Obtener las predicciones probabilísticas (puntuales y por intervalos de confianza) de la acción de la empresa Grifols.
- Evaluar los resultados del modelo aplicado comparando cada una de predicciones resultantes con el correspondiente dato real de la acción.

ANTECEDENTES Y SITUACIÓN ACTUAL DE LA BOLSA

En estos momentos el principal motor que tiene la Bolsa son los beneficios futuros que puede tener una empresa la cual cotiza en bolsa. La variación del precio de una acción se puede deber a distintas circunstancias. Una de ellas es que a causa de un aumento de los tipos de interés provoca que desciendan las cotizaciones de las empresas que participan en la Bolsa. Para explicar este acontecimiento podemos decir que a causa del aumento del tipo de interés conlleva que aumenten los costes de financiación los cuales utilizan las empresas para financiarse. Este aumento de los costes de financiación hace que los beneficios de las empresas disminuyan. Esto provoca que frente a un descenso de los beneficios haya una caída de los dividendos provocando también un descenso de las cotizaciones.

Otra circunstancia que afecta al precio de la acción es un aumento en la rentabilidad de las inversiones de renta fija que suceden a causa de una subida de los tipos de interés. Una renta fija tiene un gran atractivo y se concentra el flujo inversor en contra de la renta variable. Por tanto, esto provoca que desciendan las cotizaciones y la bolsa disminuya. Todo esto lo podemos expresar la siguiente forma: Aumentos de los tipos de interés – Fase bajista de la Bolsa.

Seguimos con otra circunstancia que afecta al valor de las empresas participantes en la Bolsa. Se trata de la prima de riesgo de un país (variable macroeconómica). Podemos decir que cuanto mayor es la prima de riesgo en un país menos rentables son las empresas pertenecientes a ese país. Una empresa con poca rentabilidad quiere pedir financiación en otro país, deberá pagar mucho más dinero que empresas competidoras del otro país. Por tanto, esto provocara que sus beneficios y dividendos disminuyan, esto provocara un descenso de las cotizaciones. Todo esto lo podemos expresar de la siguiente forma: Aumentos de la prima de riesgo – Fase bajista de la Bolsa.

Otra variable macroeconómica es la inflación de un país que a través de los tipos de interés afecta al ciclo bursátil. La inflación mide el aumento de los niveles de precios existente en el mercado durante un periodo de tiempo. La mejor forma de

contrarrestarlo es disminuyendo la oferta monetaria del país y aumentando los tipos de interés. Esto provoca una disminución del consumo de los productos fabricados por las empresas y esto provoca también un descenso de los valores que cotizan en Bolsa. . Todo esto lo podemos expresar de la siguiente forma: Aumentos en la inflación – Fase bajista de la Bolsa.

A través de la “Teoría de los Ciclos”, explica cómo el ciclo bursátil anticipa lo que sucederá en la economía de un país.

El valor final de una acción que cotiza en Bolsa es importante para los inversores ya que esto depende de sus beneficios futuros. También es muy importante para la economía que las empresas coticen a unos valores máximos. Con todo esto podemos afirmar que es de vital importancia el estudio de técnicas cuantitativas para poder modelizar el comportamiento de las acciones en la Bolsa, con el objetivo de poder anticiparse o intentar predecir el valor futuro.

La técnica de modelizar el valor de las acciones en la Bolsa no es fácil a causa de la volatilidad asociada al comportamiento y también las distintas variables que influyen en el valor de la acción. No obstante, la investigación econométrica que se ha desarrollado desde hace mucho tiempo en esta área, intenta desarrollar modelos apropiados para valorar las acciones y siempre están intentando realizar una continua mejora y perfeccionamiento.

Las Finanzas Cuantitativas comenzaron en Estados Unidos en los años setenta como área de conocimiento, en el cual los inversores empezaron aplicar fórmulas matemáticas para asignar precios a las acciones y para los bonos. Los primeros modelos continuos para aplicar un valor de una acción eran calculados a través de ecuaciones diferenciales ordinarias deterministas. En dicha época no tenían en cuenta la aleatoriedad en dichos modelos.

En las últimas décadas la aplicación los modelos deterministas han sido muy cuestionada. A causa de esto los modelos han sido reemplazados por otros que contienen en su formulación la aleatoriedad. Los modelos continuos más populares están basados en ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Itô, que son los que

se aplicaran en este trabajo. Podemos destacar el Modelo Log-Normal que modeliza la incertidumbre a través de un proceso estocástico de tipo Gaussiano, denominado en la literatura Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener. La herramienta que se debe utilizar para la resolución de este tipo de ecuaciones, es el Cálculo Estocástico de Itô. Este Cálculo fue desarrollado por el matemático japonés Kiyoshi Itô¹ en 1951. No obstante, en 1969, Robert C. Merton fue quien introdujo y aplicó el cálculo estocástico en el campo de las finanzas². Otros trabajos pioneros que han marcado el desarrollo de la abundante literatura actual son los debidos a Roll (1970,1971)³, Merton (1973, 1974)⁴ y Long (1974)⁵.

Para finalizar este capítulo hemos observado un gran número de publicaciones especializadas sobre la modelización de activos subyacentes cotizados. Esto ha provocado un gran interés entre la población sobre el tema que se va a tratar en este trabajo final de grado y que con esto podemos justificar el análisis que se va a realizar en las siguientes páginas. Aplicando el estudio tanto desde una perspectiva de los fundamentos teóricos del modelo Log-Normal como desde el punto de vista práctico.

¹ Kiyoshi, Itô (1951): On stochastic differential equations. *Memoirs, American Mathematical Society*, vol. 4, pp. 1–51.

Kiyoshi, Itô (1944): Stochastic Integral. *Proc. Imperial Acad. Tokyo*, vol. 20, pp. 519-524.

Kiyoshi, Itô (1961): *Lectures on Stochastic Processes*. Tata Institute, Bombay.

²Merton, Robert C. (1973): Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, pp. 141–183.

³ Roll, R. (1970): The behavior of interest rates: The application of the efficient market model to U.S. treasury bills. Nueva York. Basic Books.

Roll, R. (1971): Investment diversification and bond maturity. *Journal of Finance*, vol. 26, pp. 51-66

⁴ Merton, R.C. (1973): An inter temporal capital asset pricing model. *Econometrica*, vol. 41, pp. 867-887.

Merton, R.C. (1974): On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, vol. 29, pp. 449-470.

⁵ Long, J.B. (1974): Stock prices, inflation, and the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, vol. 1, pp. 131-170.

1. EL IMPACTO DE LA BOLSA EN LA ECONOMÍA

La Bolsa actúa como un espejo, en el cual se ve reflejado todo aquello que está ocurriendo tanto en un país como en el resto del mundo. Esto nos mostrara lo que ocurrirá en la Economía. Para poder explicar el porqué de la bolsa nos anticipa lo que sucederá en la economía. Tenemos lo que se llama actualmente “Teoría de los Ciclos” se explica cómo la Bolsa se anticipa a lo que más tarde va a ocurrir en la economía. También están los mercados financieros y los índices de referencia, como es el IBEX-35, los cuales influyen en la economía de un país. Los valores de las acciones de la Bolsa son importantes en los siguientes aspectos.

- Los accionistas buscan obtener una alta rentabilidad de las acciones y participar de los beneficios empresariales.
- Todas las empresas que cotizan en Bolsa buscan obtener liquidez en mercados de capitales para que sus negocios sean financiados por terceros.
- Como todos los mercados, en este caso nos referimos al bursátil se rigen por la ley de la oferta y la demanda. Por tanto, si hay más venta de acciones que compran, podemos observar que los precios bajaran y al contrario, si se compran más acciones que se venden el precio de las acciones subirán.
- El IBEX-35 es un reflejo bastante fiel de la evolución de las empresas de nuestro país. El IBEX-35 nos da una información bastante aproximada de cómo ha sido la evolución de la situación financiera privada del país durante un periodo de tiempo.

En la continuación de este capítulo se van a numerar las consecuencias que tiene el mercados bursátil en los mercados financieros y en la economía. También se va a realizar la explicación más extensamente sobre la Teoría de Ciclos, que como ya se ha explicado brevemente antes explica como el mercado se anticipa a lo que ocurrirá en la economía de un país.

Para finalizar este capítulo, vamos a detallar aspectos de las acciones sobre la empresa Grifols que es en la cual se va a basar este trabajo.

1.1 La importancia de la Bolsa en la Economía

Vamos a mostrar a través de la Teoría de los Ciclos, la explicación que hay entre el Ciclo Económico y el Ciclo Bursátil. Esta teoría fue desarrollada por unos economistas en la escuela de Viena⁶.

Actualmente el valor de las acciones empieza a subir lentamente (dicha fase alcista es a causa del aumento de las cotizaciones de las empresas). Los precios empiezan a aumentar y las manos fuertes de la economía empiezan comprar títulos que se encuentran en valores mínimos. También comenzamos con la fase de recuperación en el ciclo económico a causa de que el gobierno está tomando medidas (la disminución del paro, bajan los tipos de interés, los bancos abren líneas de crédito, las personas empiezan a consumir más, la prima de riesgo está bajando).

Delante de una descenso continua de los tipos de interés, provoca que el valor de la renta variable gane importancia frente a valores de renta fija (bonos, deuda pública y obligaciones). Mejoran las cargas financieras de las empresas, y endeudarse provoca un menor coste a las familias, esto provoca una subida de las cotizaciones de las empresas y por tanto, de la Bolsa.

La subida de la bolsa provoca una fase de expansión en la economía estos significa que hay pleno empleo y el dinero es más barato y también es una fase en que las familias y empresas empiezan a endeudarse. A causa de este periodo de crecimiento en la economía, las manos fuertes sale de la Bolsa y empiezan a vender los títulos que tenían acumulados en la fase de recesión a los minoristas y que ahora tienen capacidad económica y por lo tanto pueden empezar a comprar títulos de renta variable.

Por otra parte, cuando los tipos de interés empiezan a subir esto provoca que el valor de las empresas en la bolsa empiezan a descender poco a poco. Lo que provoca que

⁶ La teoría del ciclo fue elaborada en particular por L.V. Mises y F.A. Hayek.

empiece la fase de recesión en el ciclo bursátil. Y más adelante empezara la fase de recesión en la economía, con lo que esto provoca unas consecuencias como son que no hay financiación y que los tipos de interés son muy elevados, que las familias y empresas están endeudas con créditos que pidieron en la fase de expansión y ahora están obligados a devolver.

Con todo esto se explica la gran relación que hay entre Bolsa y la economía y también como las acciones que se han negociado en la Bolsa influyen en la economía de un país.

Las políticas que lleva a cabo el gobierno a nivel macroeconómico (el tema monetario, fiscal y cambiario) pueden corregir los desequilibrio que pueda tener la economía de un país. Las políticas influirán dependiendo en qué fase este la economía en el comportamiento de las cotizaciones. Podemos saber que si el gobierno baja los tipos de interés esto provocara que aumente el valor de las empresas, y por tanto si aumento los tipos de interés se producirá una baja del valor de las empresas.

1.2 Los Mercados Financieros

Los mercados financieros son un espacio físico y virtual en el cual se realizan intercambios de instrumentos financieros y también se definen los precios.

Estos son usados para reunir a aquellos que necesitan recursos financieros con aquellos que los tienen.

En el sistema financiero los mercados facilitan:

- El aumento del capital
- La transferencia de riesgo
- El comercio internacional

Y por último decir que las principales funciones de los mercados son:

- Administrar los flujos de liquidez de productos o mercados.
- Fijar los precios de los productos financieros
- Reducir los costes de intermediación.
- Establecer los mecanismos para poner en contacto a los participantes de la negociación.

Como podremos observar, hay diferentes tipos de mercados. Los mercados financieros se dividen en:

a) Según los activos transmitidos

En este subtipo de mercado financiero podemos observar dos tipos de activos financieros:

- Mercado de capitales: es la negociación de activos financieros con vencimientos a medio y largo plazo. Estas negociaciones son básicas para ciertos procesos de inversión.
- Mercado monetario: la negociación se realiza con dinero o con activos financieros con los vencimientos a corto plazo (c/p) y con una elevada liquidez. Son activos con un plazo temporal inferior al año.

b) En función de su estructura podemos encontrar de dos tipos:

- Mercados organizados, es aquel en el cual se realiza la compraventa de instrumentos financieros y está autorizado por el gobierno. Dicho mercado cuenta con una cámara de compensación, liquidación y depósitos de garantía. Un ejemplo de mercado es la bolsa de valores.
- Mercados no organizados: no se somete a una reglamentación entre los agentes o intermediarios, las operaciones que se realizan no están estandarizadas, sino que las condiciones de las mismas son fijadas de forma libre y directa por las partes. Tampoco tiene un lugar físico ya que la mayoría de las negociaciones se realizan por teléfono u ordenador.

c) Según la fase de negociación de los activos financieros

En la fase de negociación podemos encontrar dos tipos:

- Mercados primarios: en estos mercados es donde se realiza la transmisión directa de activos por su emisor.
- Mercados secundarios: es donde se realiza el intercambio de activos financieros ya existentes en el mercado (fueron emitidos en un momento del pasado). En este mercado permite a los tenedores (poseedores de los activos financieros) a vender dichos instrumentos que ya se emitieron en el mercado primario.

d) Según el tipo de activo negociado

Podemos encontrar dos tipos de mercados dependiendo del tipo de activo negociado.

- El mercado tradicional: en este tipo de mercado se realizan las negociaciones de activos financieros de renta variable como son las acciones, los bonos o los depósitos a la vista.
- El mercado alternativo: en los mercados alternativos se negocian activos financieros alternativos como son los pagarés, inversiones en cartera o proyectos de inversión. Estos son algunos de ellos.

Un apunte importante sobre la diferencia de un mercado tradicional a un mercado alternativo es, en el mercado alternativo (renta fija) hay que desembolsar unos importes específicos con un determinado tipo de interés y en una fecha concreta, mientras que en los mercados tradicionales (renta variable) no tienen que ser reembolsados por el emisor.

e) Según la perspectiva geográfica

Según la procedencia de los activos y la residencia de los intervencionistas podemos encontrar dos tipos de mercados.

- Mercados nacionales: se trata de la moneda en la cual están definidos los activos financieros y también la residencia de los que intervienen se trata de nacional.
- Mercados internacionales: es lo mismo que el mercado nacional pero en este caso la procedencia es internacional.

Y para concluir con este apartado comentar que el presente trabajo está centrado en el mercado tradicional (renta variable) estudiando las acciones de la empresa Grifols la cual pertenece a un mercado financiero que es la Bolsa.

1.2.1 El IBEX-35

El Ibex-35 se creó el 14 de enero de 1992. Desde entonces más de 100 compañías han sido parte de un índice que se ha consolidado como referente general del mercado bursátil español y uno de los más relevantes de Europa.

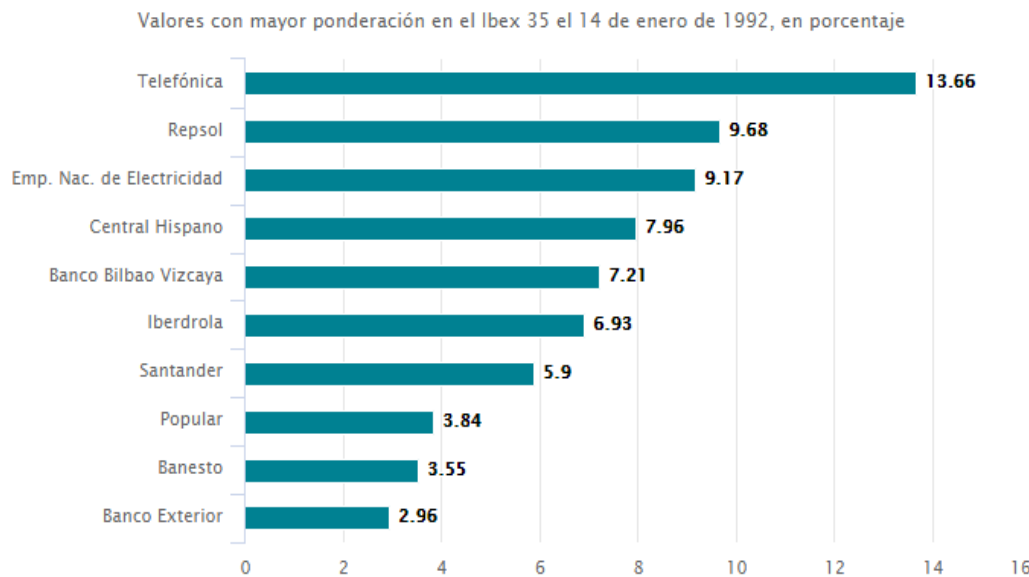


Figura 1.2.1. Valores con mayor ponderación en el Ibex 35 el 14 de enero de 1992.

Fuente: BME bolsas y mercados Españoles

El Ibex-35 es de un índice bursátil de referencia en la bolsa española, el cual está elaborado por Bolsas y mercados españoles. Dicho índice muestra el comportamiento de las 35 empresas con más liquidez que cotizan España.

España tiene cuatro bolsas las cuales son:

- Madrid
- Barcelona
- Bilbao
- Valencia

Para la realización de la entrada y salida de valores en el Ibex-35 se utiliza el grupo de Comité Asesor Técnico (CAT). El CAT se reúne dos veces al año (normalmente en junio y diciembre) haciéndose las modificaciones oportunas el primer día hábil de julio y enero de cada año.

Para que un valor forme parte del Ibex tienen que tener en cuenta lo siguiente:

- Que haya sido contratado por lo menos en la tercera parte de las sesiones de ese periodo.
- Su capitalización media sea superior al 0,30% del Ibex-35 en el periodo analizado.

Si dicha empresa no cumple dichas condiciones tiene la posibilidad de ser elegida para entrar en el índice si está entre los 20 valores con mayor capitalización.

1.3 Grifols

Grifols se fundó en el año 1940 en Barcelona y se trata de una multinacional española especializada en el sector hospitalario y farmacéutico. En la actualidad es la tercera mayor empresa del mundo en el sector de hemoderivados y la primera de Europa. Además, es la empresa líder en suministrar a hospitales. Tiene su sede central en Barcelona y también está presente en más de 100 países. La diversificación geográfica es una de las principales estratégicas de crecimiento del grupo, que cuenta con una importante presencia en Estados Unidos, Canadá y Europa.

1.3.1 Historia de la empresa Grifols

La historia de dicha empresa empieza en el año 1940 después de la guerra civil. La cual provocó elevadas infecciones entre la población y también a causa del aislamiento del régimen franquista que impedía la llegada de vacunas y otros preparados inmunológicos. Todo esto provocó que el espíritu innovador del doctor José Antonio Grifols Roig (especialista y pionero en transfusiones y análisis clínicos) fundara los laboratorios Grifols (centro de investigaciones clínicas y biológicas para productos y reactivos terapéuticos) con sus dos hijos José Antonio y Víctor.

En el año 1952 comenzó la diversificación de la actividad industrial de Grifols y cuando comenzaron a construir instalaciones para la fabricación industrial.

Luego, en los años sesenta la empresa toma contacto con la empresa Dade-Regantes lo cual provocó la creación de Dade Grifols para el comercio de los reactivos. A causa del gran crecimiento y la demanda de los productos se construyó la gran fábrica en Parets del Valles (Barcelona). Ha día de hoy es uno de los puntos neurálgicos del Holding Grifols.

Hubo unos años de grandes cambios para la compañía Grifols. En 1987 hubo un importante cambio con la reestructuración empresarial que la convierte en un holding de empresas. En 1988 se abre una de las primeras filiales fuera de España, concretamente en Portugal.

En la década de los 90 se convirtió en un referente en el campo de los productos plasmáticos. Se creó la primera filial americana, concretamente en Miami en 1990 y posteriormente se creó en Chile, Argentina y México. Dando una expansión en diversos países de Europa.

En el año 1995 la empresa obtiene las primeras licencias de Food and Drug Administration (FDA), obteniendo así las primeras licencias comerciales de la inmunoglobulina intravenosa para Estados Unidos.

Posteriormente, en el año 1997 la empresa comenzó con la expansión con la compra de las filiales de Alpha Therapeutic Corporation de Reino Unido, Alemania e Italia permitiendo una rápida incorporación en estos mercados y esto provoca una confianza para dar el salto a Estados Unidos, referente mundial del sector de los hemoderivados.

En los años 2002 y 2003 dos adquisiciones asentaron las bases de Grifols en los Estados Unidos con la compra de SeraCare (aseguraba el suministro de materia prima mediante la aplicación del número de centros para la obtención de plasma en propiedad y la de gran parte de los activos de Alpha Therapeutic Corporation, incluyendo sus instalaciones productivas para el fraccionamiento de plasma y purificación de proteínas en los Ángeles.

A día de hoy, la presencia de la presencia de Grifols en el mercado norteamericano esta consolidada y la internacionalización del grupo se ha traducido en una presencia comercial global con más de 90 países y con 24 filiales propias.

1.3.2 El modelo de negocio

El modelo de negocio de Grifols se centra en el sector farmacéutico hospitalario. Actualmente cuenta con 3 áreas de negocio organizadas según la naturaleza de sus productos.

- División Bioscience: es la principal área de actividad por volumen de negocio. Esta división concentra todas las actividades relacionadas con los productos derivados del plasma para uso terapéutico, incluyendo la investigación, desarrollo, producción y comercialización.

- División Diagnostic: en esta división la empresa concentra el desarrollo de instrumentación y reactivos dirigidos al diagnóstico in vitro. También cuentan con una línea de productos para Banco de sangre y para la seguridad transfusional.
- División Hospital: ponen un servicio a los hospitales de España, Portugal y de algunos países de Latinoamérica una amplia gama de productos farmacéuticos y dispositivos médicos destinados a la farmacia hospitalaria, cirugía, nutrición clínica y fluidoterapia.

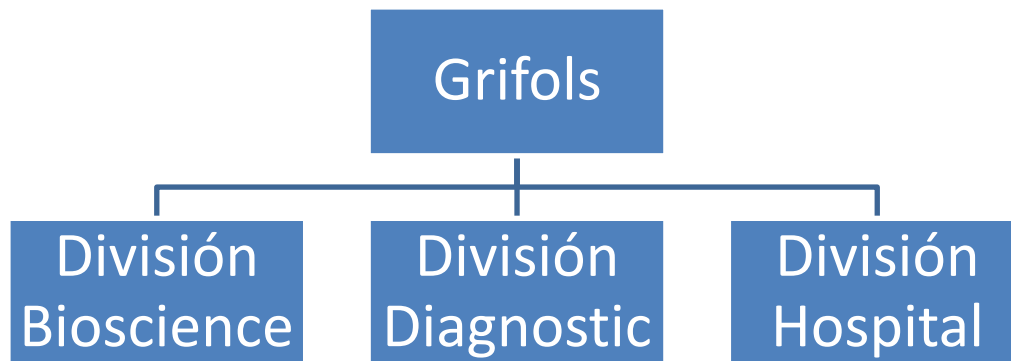


Figura 1.3.1. Áreas de negocio de la empresa Grifols.

Fuente: Elaboración propia.

1.3.3 Acciones

La primera vez que la empresa Grifols cotizo en las bolsas de Madrid, Barcelona, Bilbao, Valencia y en el mercado continuo fue el 17 de Mayo de 2006 y a partir del 2 de enero de 2008 lo hace en el Ibex-35. Por otra parte, la organización desde el 1 de junio de 2011 también cotiza en la mayor bolsa de valores de los EE.UU como es la NASDAQ.

El 4 de diciembre de 2012 se realiza la propuesta y aprobación de la ampliación de capital social por un importe nominal de 1.632.821,20€ mediante la emisión y puesta en circulación de 16.328.212 acciones sin voto de Clase B, de 0,10€ de valor nominal cada una, sin prima de emisión.

Retribución al accionista

Según una noticia del periódico de la expansión Grifols acuerda a destinar 218 millones de euros a dividendos con cargo a los resultados de 2016, con un crecimiento anual acumulado del 16% en los últimos cuatro ejercicios.

Grifols ha aprobado este reparto que representa 0,316€ por acción (uno a cuenta ya pagado en diciembre de 2016 de 0,18€ brutos por acción y un segundo pago, de 0,1356€ brutos por acción que se hará efectivo a partir del próximo 1 de junio).

La empresa mantiene su pay-out en el 40% del beneficio neto consolidado del grupo y cumple con su compromiso de mantener la retribución para sus accionistas.

Evolución del valor de las acciones

La acción de Grifols (GRF.MC) cotiza en el IBEX-35 desde el año 2006, durante todo su recorrido hasta el día de hoy, la caída más fuerte fue en Noviembre de 2010 con un cierre de 4,45€. Y también podemos observar una subida y una bajada muy brusca en el año 2007 que como bien sabemos coincide con la crisis económica que sufrimos en España.

Y por último, podemos observar que a partir de Noviembre de 2010 que es la caída más fuerte la empresa Grifols sufre una fase alcista hasta el día de hoy.



Gráfico 1.3.1. Evolución de la cotización de Grifols del 2006 al 2017.

Fuente: Yahoo Finanzas

2. FUNDAMENTOS ESTOCÁSTICOS

En el Capítulo 3 se estudiará un modelo estocástico para modelizar la dinámica de un subyacente cotizado, es decir de una acción que cotiza en un mercado financiero. Como se verá en dicho capítulo el modelo que se utilizará en este Trabajo Final de Grado está basado en una ecuación diferencial estocástica, de tipo Itô, en la cual la incertidumbre se introduce a través de un proceso estocástico denominado Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener. La ecuación diferencial estocástica se resuelve utilizando un Cálculo Diferencial especial para procesos estocásticos donde aparece involucrado el proceso de Wiener. La herramienta fundamental de este Cálculo Estocástico se denomina Lema de Itô. Este capítulo está dedicado a presentar todas las definiciones y resultados estocásticos que se requerirán en el siguiente capítulo para determinar el proceso estocástico solución de la ecuación diferencial estocástica que modeliza el subyacente cotizado. Dicho proceso estocástico se denomina Movimiento Browniano Geométrico o Modelo Log-Normal.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera: en el Apartado 2.1 se introduce el Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener. En el Apartado 2.2 se presentan las principales propiedades estadísticas del Movimiento Browniano y, en el Apartado 2.3, se explica cómo simular este proceso estocástico. El capítulo se cierra presentando el Cálculo Estocástico de Itô, concretamente se da la definición de la integral de Itô y sus principales propiedades estadísticas.

2.1 Movimiento Browniano o proceso de Wiener

Un proceso estocástico o función aleatoria es una colección de variables aleatorias indexadas por un índice. En nuestro contexto el índice representa el tiempo, ya que estamos interesados en utilizar los procesos estocásticos para estudiar la evolución de un subyacente cotizado a lo largo del tiempo. Como se ha indicado en la introducción de este capítulo, el proceso estocástico que introducirá la aleatoriedad en el modelo dinámico para el subyacente cotizado será un proceso, denominado Movimiento Browniano o proceso de Wiener, que es uno de los más importantes de la teoría de procesos estocásticos. Este proceso toma valores continuos en la recta real y

está indexado a la variable independiente que representa el tiempo, la cual también se asume continua.

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico normal o *gaussiano*⁷. El botánico escocés Robert Brown fue quien lo utilizó por primera vez en 1827 para describir el movimiento aleatorio de las partículas de polen suspendidas en una disolución acuosa. Este movimiento aparentemente errático (aleatorio) se debe a la interacción intramolecular. A este fenómeno se le denominó “Movimiento Browniano” en honor de R. Brown.

Posteriormente, el economista francés Louis Bachelier (1900) aplicó ideas muy relacionadas con el fenómeno descrito de manera informal, desde el punto de vista matemático, por R. Brown para describir el valor de una acción en su tesis doctoral titulada: “La Teoría de la Especulación”⁸. Desafortunadamente, el trabajo de Bachelier no fue comprendido en su época y durante mucho tiempo permaneció ignorado hasta que el matemático y físico Norbert Wiener formalizó el concepto de Movimiento Browniano. En su honor, a este proceso estocástico también se le denomina proceso de Wiener⁹. A lo largo de estas páginas, el Movimiento Browniano o proceso de Wiener se denotará por: $\{B(t; \omega): t \geq 0, \omega \in \Omega\}$, o brevemente por $\{B(t): t \geq 0\}$, aunque en muchos textos se utiliza indistintamente también la notación: $\{W(t): t \geq 0\}$.

Como ya se ha explicado, el objeto de este trabajo es el estudio y aplicación de un modelo estocástico para describir la dinámica temporal de activos subyacentes cotizados, denominado Modelo Log-Normal o Movimiento Browniano Geométrico. El ingrediente que dota de aleatoriedad al Movimiento Browniano Geométrico es el Movimiento Browniano. Este último proceso estocástico tiene trayectorias muestrales continuas muy irregulares (de hecho son continuas, pero no son derivables en ningún

⁷ Un proceso estocástico $\{X(t; \omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ se dice que es normal o gaussiano si las distribuciones finito dimensionales de dicho proceso estocástico son normales o gaussianas. En particular, para cada instante de tiempo $t \in T$ fijo, $X(t; \cdot)$ es una variable aleatoria normal o gaussiana.

⁸ Bachelier, L. (1900): *Théorie de la Spéculation*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, pp. 21–86.

⁹ Klebaner, C. (2011): *Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance*. Imperial College Press.

punto de su dominio). A continuación, damos la definición de este proceso estocástico. Como se verá, esta definición no se da a través de una fórmula matemática, sino enumerando una serie de propiedades estadísticas que lo caracterizan.

El Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener, $\{B(t): t \geq 0\}$ ó $\{W(t): t \geq 0\}$ es un proceso estocástico que cumple las siguientes condiciones:

- **MB.1.** Comienza en el origen con probabilidad 1: $P[B(0) = 0] = 1$.
- **MB.2.** Los incrementos del Browniano dados por, $B(t) - B(s)$, son variables aleatorias independientes:

$$B(t_1) - B(t_0); B(t_2) - B(t_1); \dots; B(t_{n+1}) - B(t_n),$$

$$\text{con } t_0 = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+1} \leq +\infty.$$

- **MB.3.** Tiene incrementos estacionarios:

$$B(t + \Delta t) - B(t) \stackrel{d}{=} B(s + \Delta t) - B(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty,$$

donde el símbolo $\stackrel{d}{=}$ denota que la igualdad anterior es en sentido estadístico de que ambas partes del símbolo igual son variables aleatorias con la misma distribución.

- **MB.4.** Los incrementos del proceso son normales o gaussianos de media 0 y varianza $t - s$:

$$B(t) - B(s) \sim N[0; t - s], \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

En el caso en que $s = 0$, y aplicando las propiedades MB.1 y MB.4., se deduce que

$$B(t) \sim N[0; t],$$

por tanto, que fijado un valor del tiempo, digamos t , la variable aleatoria resultante, $B(t)$, sigue una distribución normal o gaussiana de media 0 y desviación típica \sqrt{t} .

2.2 Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano

A continuación, se indican únicamente las propiedades estadísticas del proceso estocástico Movimiento Browniano $\{B(t), t \geq 0\}$ que se requerirán a lo largo de este documento. Para algunas de estas propiedades no daremos la demostración, la cual puede verse por ejemplo en el libro de Øksendal, B.K.¹⁰

P.1. Función Media: Aplicando la condición MB.4, se obtiene que la función media del Movimiento Browniano es idénticamente nula en todo instante temporal:

$$\mu_{B(t)} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

En la Gráfica 2.2.1. se ilustra esta propiedad.

P.2. Función Covarianza: proporciona una medición el grado de relación estadístico de tipo lineal entre las variables aleatorias, $B(s)$ y $B(t)$, que se obtienen al fijar dos instantes s y t , respectivamente. Concretamente, se verifica que

$$\text{Cov} [B(t), B(s)] = \min(s, t), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

Para justificar esta expresión, tomemos $0 \leq s \leq t \leq +\infty$, entonces aplicando la propiedad P.1 y las propiedades básicas del operador esperanza o media, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Cov} [B(t), B(s)] &= E [B(t)B(s)] - E[B(t)]E[B(s)] \\ &= E[B(t)B(s) - (B(s))^2 + (B(s))^2] \\ &= E [(B(t) - B(s))B(s) + (B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))B(s)] + E[(B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))(B(s) - B(0))] + E[(B(s))^2] \\ &= E[B(t) - B(s)] E[B(s) - B(0)] + E[(B(s))^2] \\ &= (E[B(t)] - E[B(s)])(E[B(s)] - E[B(0)]) + E[(B(s))^2] \\ &= E[(B(s))^2] \\ &= \text{Var}[B(s)] \\ &= s. \end{aligned}$$

Si en la expresión anterior tomamos $s = t$, se obtiene la propiedad MB.4 del Movimiento Browniano, es decir, que la varianza del Movimiento Browniano es t .

¹⁰ Øksendal, B.K. (2003): Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin, Springer.

P.3. $B(t)$ es $\frac{1}{2}$ -*autosemejante*: Esta propiedad tiene una interpretación geométrica sencilla y es muy útil para simular el Movimiento Browniano. Concretamente se cumple:

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall T \geq 0,$$

la igualdad anterior debe entender en el sentido de “distribución”, es decir, los procesos estocásticos de ambas partes de la igualdad tienen la misma distribución estadística.

P.4. Las trayectorias muestrales o realizaciones del Movimiento Browniano $B(t)$ son funciones continuas en todo su dominio, pero no son diferenciables en ningún punto, es decir, tienen puntos “angulosos”, esto es con pico para todo instante t del dominio. Este comportamiento muestral se observa en la Gráfica 2.2.1.

2.3 Simulación del Movimiento Browniano

Para poder realizar predicciones de subyacentes cotizados será necesario poder realizar simulaciones del Movimiento Browniano, ya que, como se verá en el Capítulo 3, la solución del modelo depende del proceso estocástico Movimiento Browniano. A continuación, se indica un método para obtener simulaciones de dicho proceso. No obstante, cabe señalar que hay numerosos programas estadísticos y matemáticos donde pueden obtener las simulaciones directamente.

Una de las formas más sencillas de simular el Movimiento Browniano es a través de la siguiente identidad en distribución, que permite simular el Movimiento Browniano a partir de variables aleatorias normales o gaussianas tipificadas:

$$B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z, \quad Z \sim N[0; 1]. \quad (2.3.1)$$

En la Tabla 2.3.1. se justifica la identidad (2.3.1), y para ello basta probar que ambos miembros de la identidad tienen la misma distribución (normal o gaussiana), misma media y misma varianza.

	$B(t)$	$\sqrt{t}Z$
Distribución	gaussiana	Transformación lineal de una variable aleatoria gaussiana
Media	0 [MB 4]	$E[\sqrt{t}Z] = \sqrt{t}E[Z] = 0$
Varianza	t [MB 4]	$Var[\sqrt{t}Z] = (\sqrt{t})^2 Var[Z] = t \cdot 1 = t$

Tabla 2.3.1. Justificación de la identidad (2.3.1) para la simulación del Movimiento Browniano.

Fuente: Elaboración propia

En el Gráfico 2.3.1. se muestra una simulación o trayectoria discreta de Movimiento Browniano sobre el intervalo $[0,1]$. La propiedad MB.1 y la propiedad estadística P.4 introducidas anteriormente quedan ilustradas en esta gráfico. Llegado este punto es importante subrayar que en realidad el ingrediente principal mediante el cual se introduce la incertidumbre en el modelo de subyacentes que vamos a considerar en este trabajo, no es directamente el Movimiento Browniano, sino otro proceso, llamado Ruido Blanco o “White Noise” que se deriva del Movimiento Browniano. Concretamente, y siguiendo la Teoría de las Distribuciones, el proceso estocástico Ruido Blanco, denotado por $\{dB(t), \forall t \geq 0\}$, es la diferencial del Movimiento Browniano, de ahí su notación. Este proceso estocástico también es de tipo gaussiano.

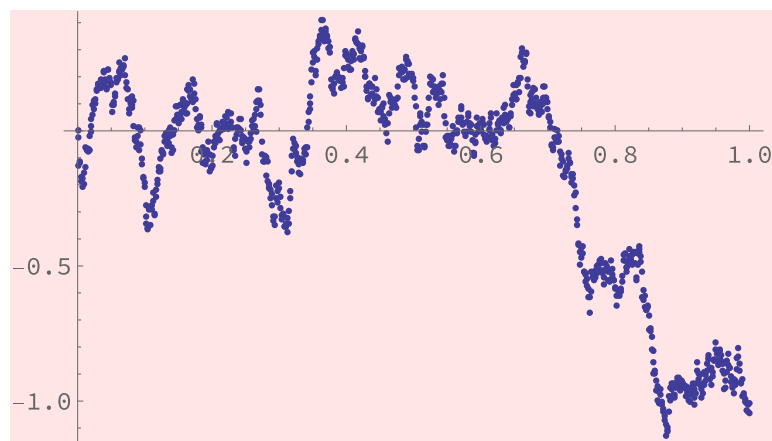


Gráfico 2.2.1. Simulación del Movimiento Browniano.

Fuente: Elaboración propia

Es conveniente justificar, al menos desde un punto de vista intuitivo, la consideración del Movimiento Browniano y del Ruido Blanco (recuérdese, ambos de tipo gaussiano) para modelizar la incertidumbre del valor de un subyacente cotizado. La base de la elección de estos procesos estocásticos en nuestro contexto es el archifamoso “Teorema Central del Límite”, ya que los factores que determinan el valor de una acción son numerosos y distintos entre sí, y en muchas ocasiones independientes. Si estos factores se identifican con variables aleatorias, el resultado (la suma de todos los factores) es, según el Teorema Central del Límite una variable aleatoria gaussiana o normal, lo que proporciona consistencia a la decisión de modelizar la aleatoriedad asociada al valor de una acción mediante un proceso de tipo gaussiano, como lo son el Movimiento Browniano y su diferencial, el Ruido Blanco.

2.4 El Cálculo Estocástico de Itô

Kiyoshi Itô fue un matemático japonés que desarrolló el Cálculo de Itô, una teoría para la diferenciación e integración de procesos estocásticos denominados de difusión. El concepto central de este cálculo es la Integral de Itô, y el resultado más importante de este Cálculo Estocástico es el Lema de Itô.

En este apartado se explican los conceptos básicos del Cálculo de Itô que se requerirán en este trabajo, sin entrar en una generalización que pudiera pretender ser más ambiciosa. Concretamente, se expondrán los conocimientos que se requieren de este Cálculo para poder obtener, de forma exacta el proceso estocástico solución del modelo de subyacentes que se aplicará posteriormente para describir la dinámica de la acción de CaixaBank. Para ello es necesario primero introducir el patrón general de dicho modelo, el cual se basa en la siguiente ecuación diferencial:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t). \quad (2.4.1)$$

La solución de este tipo de ecuaciones no puede obtener, en general, de forma exacta, pero sí aproximada. Ello dependerá de la forma específica de los coeficientes $f(t, X(t))$ y $g(t, X(t))$. La herramienta más útil para obtener la solución es el Lema de Itô.

El Lema de Itô es una versión estocástica de la denominada “regla de la cadena” para obtener la diferencial de un proceso estocástico $X(t)$. Recuérdese que la regla de la

cadena, en el contexto determinista, se utiliza para calcular la derivada (o diferencial) de una función compuesta. Para el Modelo Log-Normal, que es el caso que ocupa el presente trabajo (véase el desarrollo del Capítulo 3), se verá que sí es posible obtener una expresión explícita del proceso estocástico solución.

A continuación, se enunciará el Lema de Itô en la versión, denominada versión integral, que nos será de utilidad en nuestro posterior desarrollo. Es importante señalar que existen muchas otras versiones del Lema del Itô, algunas de ellas muy generales, pero la versión que enunciaremos es particularmente adecuada para nuestros intereses y está basada en ver qué ecuación diferencial estocástica de tipo Itô satisface un proceso estocástico de difusión cuando se transforma a través de una función determinista, $F(t, x)$, de dos variables que es suficientemente suave (derivable) en ambas variables.

Lema de Itô (versión integral)

Hipótesis: Sea $X(t)$ un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica tipo Itô con condición inicial determinista x_0 :

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \\ X(0) &= x_0, \end{aligned}$$

y sea $F(t, x)$ una función $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas.

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = F_1(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = F_2(t, x), \quad \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = F_{22}(t, x).$$

Tesis: Entonces para $t > 0$, se cumple

$$\begin{aligned} F(t, x(t)) - F(0, x_0) &= \int_0^t \{F_1(r, x(r)) + f(r, x(r))F_2(r, x(r))\}dr \\ &+ \int_0^t \frac{1}{2} (g(r, x(r)))^2 F_{22}(r, x(r))dr \\ &+ \int_0^t g(r, x(r))F_2(r, x(r))dB(r). \end{aligned}$$

2.4.1 La Integral Estocástica de Itô

El objetivo de este apartado, en la que introducimos el concepto de Integral de Itô de un proceso estocástico, es dar una interpretación a la siguiente expresión integral:

$$\int_0^t X(s)dB(s), \quad (2.4.2)$$

donde $X(s)$ es un proceso estocástico que cumple determinadas condiciones que a continuación se detallarán. Se dice que la expresión (2.4.2) es la Integral de Itô con respecto al Movimiento Browniano. La exposición seguirá las ideas dadas en el libro de E. Allen¹¹. Para comenzar la explicación, interpretaremos la integral mostrada en (2.4.2) como si $X(s)$ y $B(s)$ no fueran procesos estocásticos, sino funciones deterministas.

Supongamos que $f(s)$ y $g(s)$ son dos funciones deterministas respecto de la variable tiempo s y consideremos la siguiente integral de tipo Riemann-Stieltjes:

$$\int_0^t g(s)df(s). \quad (2.4.3)$$

Cuando $f(s)$ tiende a una función diferenciable, se escribe $\frac{df(s)}{ds} = f'(s)$, o equivalentemente, $df(s) = f'(s)ds$. Sustituyendo esta expresión en la integral (2.4.3), se llega a:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s) ds,$$

quedando ésta definida como una integral estándar (de tipo Riemann). Si $f(s)$ no fuese diferenciable, todavía se puede utilizar la teoría determinista para definir la integral anterior. En efecto, cuando $f(s)$ no es demasiado irregular como función del argumento s , es decir, cuando $f(s)$ es lo que se denomina una función de variación acotada, se puede probar que la integral está bien definida como el siguiente límite:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)).$$

¹¹ Allen, E. (2007): *Modelling with Itô Stochastic Differential Equations*. Springer (Series Mathematical Modelling: Theory and Applications), New York.

Puesto que $f(s)$ es de variación acotada, $f(s_{i+1})$ está próximo a $f(s_i)$. A partir de esto es posible probar que el límite anterior existe siempre que $g(s)$ no varíe “demasiado”. Por supuesto, si la función $g(s)$ es extremadamente fluctuante en diferentes puntos del tiempo, el límite puede ser divergente, y en consecuencia la integral no existir.

Se define la integral (2.4.2) de forma análoga mediante el siguiente límite:

$$\int_0^t X(s, \omega) dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega) (B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad \omega \in \Omega. \quad (2.4.4)$$

Nótese que se toma el límite para cada ω fijo en el espacio muestral Ω de la variable aleatoria $B(s)$. El problema aquí es que el límite para cada ω en general no existe (empieza en $\pm\infty$) para muchos procesos estocásticos $X(s)$, es decir, para cada ω , la función $s \rightarrow B(s, \omega)$ es muy volátil. Como se indicaba con anterioridad (véase la propiedad estadística P.4), el Movimiento Browniano es un ejemplo de proceso estocástico con trayectorias muestrales continuas, pero no diferenciables en ningún punto. Más aún, el Movimiento Browniano como función del tiempo, no es de variación acotada para cada ω , tal y como se requiere para $f(s)$. Para compensar la irregularidad de las trayectorias del Movimiento Browniano, se tienen que exigir dos condiciones, que detallaremos después, en el proceso integrador $X(s)$. Bajo estas condiciones, el límite existirá a pesar de la irregularidad de las trayectorias del Movimiento Browniano. La primera condición consiste en asumir que $X(s)$ es probabilísticamente independiente de los incrementos del Movimiento Browniano. La segunda condición, como veremos a continuación, guarda relación con la variación del integrando (de hecho es similar a la condición de que $g(s)$ en (2.4.3) no debe variar demasiado).

A partir de la propiedad MB.2 del Movimiento Browniano se sabe que la variación de un incremento del mismo, está dada por:

$$E[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2] = s_{i+1} - s_i.$$

Si $X(s_i)$ es independiente del incremento $B(s_{i+1}) - B(s_i)$, se obtiene

$$\begin{aligned} E \left[\left(X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] &= E \left[(X(s_i))^2 \right] E \left[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 \right] \\ &= E \left[(X(s_i))^2 \right] (s_{i+1} - s_i). \end{aligned}$$

Considerando el segundo momento estadístico de la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)), \quad (2.4.5)$$

y asumiendo que $X(s_i)$ es independiente de $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ para cada $i = 1, \dots, n - 1$, puede verse debido a la independencia de los incrementos del Movimiento Browniano que:

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{n-1} E \left[(X(s_i))^2 \right] (s_{i+1} - s_i).$$

La suma del miembro derecho es una aproximación de la integral $\int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds$. Por tanto, si esta integral existe, se deduce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds,$$

lo cual conduce a la conclusión de que la varianza de la suma en (2.4.5) converge a $\int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds$. Asumiendo que esta integral existe, se puede probar que:

$$E \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds. \quad (2.4.6).$$

Cabe subrayar que la integral que aparece en el lado derecho de la relación (2.4.6), en algunos casos, puede no existir. Existirá siempre que sea finita, es decir, siempre que el proceso estocástico $X(s)$ sea tal que su segundo momento puede ser integrado de 0 hasta t .

Por ejemplo, para el proceso $X(s) = s^{-1}B(s)$, por la condición MB.2 de la definición del Movimiento Browniano, se tiene

$$\int_0^t E[(X(s))^2] ds = \int_0^t s^{-1} ds = \ln(t) - \ln(0) = +\infty.$$

Por otro lado, si tomamos $X(s) = B(s)$, fácilmente se puede reconocer que $X(s)$ satisface la condición de integrabilidad. Afortunadamente, esto también se cumple para una larga clase de procesos estocásticos.

Retomando la relación (2.4.6), y considerando que la variable aleatoria $X(s_i)$, que aparece en el miembro izquierdo, debe ser independiente de incrementos $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ para todos los valores de $i = 1, \dots, n - 1$, se obtiene de forma motivada la introducción del concepto de proceso estocástico *adaptado*:

Definición 1. Una variable aleatoria X se dice que es \mathcal{F}_s -adaptada si X puede ser escrita como (límite de una sucesión de) funciones de $B(\tau)$ para uno o más $\tau \leq s$, pero no como función de cualquier $B(u)$ con $u > s$. Un proceso estocástico $X(s)$ se dice que es adaptado si para cada tiempo $s \in [0, t]$, la variable aleatoria $X(s)$ es \mathcal{F}_s -adaptada. Aquí \mathcal{F}_s representa la filtración que genera la σ -álgebra del Movimiento Browniano.

Puntualizamos algunos aspectos de la Definición 1. En primer lugar, cabe señalar algunos procesos que se derivan de composiciones simples del Movimiento Browniano tales como $X(s) = f(s, B(s))$, son adaptados, mientras que procesos tales como $X(s) = B(s + 1)$, no lo son, por depender de instantes temporales posteriores, en este caso a s .

La integral $X(s) = \int_0^s B(\tau) d\tau$, también define un proceso estocástico adaptado, puesto que la integral es el límite de sumas del Movimiento Browniano en diferentes tiempos menores que s . En definitiva, por la definición de la integral de Itô, se tiene

$$X(s) = \int_0^s B(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} B(\tau_i) (\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Por tanto, focalizando sobre la Integral de Itô, obsérvese que siempre que el proceso integrando $X(s)$ sea adaptado, la integral $\int_0^t X(s) dB(s)$ tiene sentido como el límite puntual en (2.4.4). Además, este límite (2.4.4) puede probarse que converge en media cuadrática y por lo tanto, también para cada $\omega \in \Omega$.

Se concluye la exposición con la definición rigurosa de la Integral de Itô.

Definición 2. Si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $X(s)$ es adaptado para $s \in [0, t]$, y
2. $\int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds < \infty$,

se dice que el proceso estocástico, $X(s)$, es integrable en el intervalo $[0, t]$ en el sentido de Itô. La Integral de Itô se define como la variable aleatoria

$$\int_0^t X(s, \omega) dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega) (B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad (2.4.7)$$

donde el límite es considerado por cada $\omega \in \Omega$.

2.4.2 Propiedades de la Integral de Itô

Una vez el concepto de Integral de Itô ha sido Introducido, a continuación enunciaremos las principales propiedades estadísticas de dicha integral de Itô. Algunas de estas propiedades serán utilizadas en el próximo capítulo. Estas propiedades se citan distinguiendo si el integrando es una función determinista $h(t)$ o un proceso estocástico $X(t)$.

Sea $h(t)$ una función determinista tal que $\int_0^t (h(s))^2 ds$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

I.1. Media (si el integrando determinista):

$$E \left[\int_0^t h(s) dB(s) \right] = 0.$$

I.2. Varianza (si el integrando determinista):

$$Var \left[\int_0^t h(s) dB(s) \right] = \int_0^t (h(s))^2 ds.$$

I.3. Covarianza (si el integrando determinista):

$$Cov \left[\int_0^t h_1(\tau) dB(\tau), \int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau,$$

siendo $t \wedge s = \min(t, s)$.

En particular,

$$E \left[\left(\int_0^t h_1(\tau) dB(\tau) \right) \left(\int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau.$$

I.4. Normalidad (si el integrando determinista):

$$\int_0^t h(s) dB(s) \sim N \left[0; \int_0^t (h(s))^2 ds \right].$$

Por otra parte, si el integrando es un proceso estocástico $X(t)$ que satisface las condiciones de la Definición 2 anterior, entonces se verifican las siguientes propiedades:

I.5. Media (si el integrando es un proceso estocástico):

$$E \left[\int_0^t X(s) dB(s) \right] = 0.$$

I.6. Varianza (si el integrando es un proceso estocástico):

$$V \left[\int_0^t X(s) dB(s) \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds.$$

Obsérvese que a partir de las propiedades I.5 e I.6 se deduce

$$E \left[\left(\int_0^t X(s) dB(s) \right)^2 \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds,$$

llamada isometría de Itô.

3. EL MODELO ESTOCÁSTICO LOG-NORMAL

El valor de un activo de una determinada compañía que cotiza en los mercados financieros es el resultado de una gran cantidad de complejos factores socioeconómicos, los cuales pueden incluso depender de la climatología o la estabilidad política de los países donde la compañía tenga sus inversiones. Dado que dichos factores no pueden conocerse de forma determinista, es natural considerar modelos matemáticos estocásticos para describir la dinámica de subyacentes cotizados. En este capítulo se presenta el Modelo Log-Normal, el cual está formulado a través de una ecuación diferencial estocástica de tipo de Itô, en el cual la aleatoriedad se introduce a través de la derivada del proceso ruido blanco, $dB(t)$, que es la derivada, en el sentido de las distribuciones, del Movimiento Browniano, $B(t)$, el cual fue introducido en el Capítulo 2 de esta memoria para. El Modelo Log-Normal se formula a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica con condición inicial:

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.0.1)$$

donde:

- $S(t)$ denota el valor del subyacente cotizado en el instante temporal t .
- s_0 representa el valor del subyacente en el instante inicial ($t = 0$). Asumiremos que es un dato conocido, por ello lo denotaremos en minúsculas.
- $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro del modelo denominado *drift* o tendencia. Un valor positivo (negativo) de este parámetro indica que en el período donde el modelo se aplica el subyacente ha tenido un comportamiento global creciente (decreciente).
- $\sigma > 0$ es un parámetro del modelo denominado parámetro de escala o de difusión o volatilidad local.
- $B(t)$ es el proceso estocástico de *Wiener* o Movimiento Browniano.

La organización de este capítulo es la siguiente. Comenzaremos dando una motivación del modelo Log-Normal formulado a través del Problema de Valor Inicial (3.0.1). Esta

motivación se realizará a partir de un modelo clásico (también denominado modelo determinista porque se plantea en un contexto donde se conoce el rendimiento de la inversión) o, como suele denominarse en la literatura, en “ambiente de certidumbre”. En un segundo paso, se determinará el proceso estocástico solución del Modelo Log-Normal (3.0.1), denominado Movimiento Browniano Geométrico. Esta solución se calculará aplicando el principal resultado del Cálculo Estocástico de Itô, a saber, el Lema de Itô (el cual fue introducido en el Capítulo 2). Cuando se resuelve una ecuación diferencial estocástica, es decir, cuando se calcula su proceso estocástico solución, también es conveniente calcular las principales propiedades estadísticas de dicha solución, por ello, también se determinarán las funciones media y varianza. En el Capítulo 4 se aplicarán todos los resultados teóricos de este Capítulo al activo Grifols S.A., y para ello será necesario calibrar los dos parámetros del Modelo Log-Normal, es decir, en la tendencia, μ , y la volatilidad local, σ , a partir de una serie histórica de cotizaciones. Para ello presentaremos dos métodos de estimación de parámetros en el contexto de las ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Itô. Con todo ello en el Capítulo 4 realizaremos predicciones puntuales (a partir de la media) y por intervalos de confianza (a partir de la desviación típica) del activo subyacente Grifols S.A.

3.1 El modelo clásico determinista para inversiones en ambiente de certidumbre

En este apartado se revisará establecerá un modelo clásico o determinista de capitalización de una inversión en ambiente de certidumbre, es decir, donde se conoce desde el principio el cupón o rendimiento de la inversión. Ejemplos de inversión en ambiente de certidumbre son los bonos y las letras del tesoro. Este modelo clásico determinista será el punto de partida del siguiente apartado donde, de un modo razonado, se formulará el Modelo Log-Normal enunciado en la ecuación (3.0.1).

Denotemos por S_0 capital inicial (también llamado principal). Supongamos que S_0 se invierte mediante un sistema de capitalización a interés compuesto continuo con un tipo de interés μ sobre el horizonte temporal $[0, T]$. Por conveniencia, dividiremos primero el intervalo $[0, T]$ en K subintervalos de la misma longitud $\Delta t > 0$. En la Figura 3.1.1 se ha representado gráficamente el proceso de inversión en el intervalo $[0, T]$.



Figura 3.1.1. Esquema del régimen de capitalización a interés compuesto continuo.

Fuente: Elaboración propia

Llamemos $\hat{S}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, K$, al capital que se obtiene mediante la inversión al cabo de j períodos. Entonces, sabemos por Matemáticas Financieras que se cumple

$$\hat{S}^{(1)} = S_0 e^{\mu \Delta t}, \quad \hat{S}^{(2)} = \hat{S}^{(1)} e^{\mu \Delta t}. \quad (3.1.1)$$

En forma general, se tiene

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} e^{\mu \Delta t}, \quad j = 0, 1, \dots, K. \quad (3.1.2)$$

Razonando de forma recurrente se deduce

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} e^{\mu \Delta t} = \hat{S}^{(j-2)} e^{2\mu \Delta t} = \dots = S_0 e^{\mu j \Delta t}, \quad j = 0, 1, \dots, K. \quad (3.1.3)$$

Cuando $j = K$, se cumple

$$\hat{S}(T) = \hat{S}^{(K)} = S_0 e^{\mu K \Delta t} = S_0 e^{\mu T},$$

ya que $K \Delta t = T$. La notación $\hat{S}(T)$ denota el capital al cabo de K períodos. Por tanto, la capitalización en los K subperíodos, cada uno de longitud Δt es equivalente a un paso de tamaño $T = K \Delta t$. Este modelo de capitalización continua resulta de resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria junto la condición inicial que indica el principal o inversión inicial:

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \mu \hat{S}(t), \quad \hat{S}(0) = S_0. \quad (3.1.4)$$

Utilizando técnicas básicas de ecuaciones diferenciales, es sencillo probar que la solución del problema de valor inicial (3.1.4)

$$\hat{S}(t) = S_0 e^{\mu t}. \quad (3.1.5)$$

Si ponemos $t = T$ en la expresión (3.1.5), se obtiene la solución del problema (3.14), es decir, $\tilde{S}(T) = S_0 e^{\mu T}$.

El modelo estocástico de partida (3.0.1) es una generalización del modelo clásico determinista de capitalización continua (3.1.4), ya que este último se obtiene poniendo $\sigma = 0$ en (3.0.1).

3.2 Motivando la formulación del Movimiento Browniano Geométrico para un subyacente cotizado

El modelo presentado en el Apartado 3.1 es para un subyacente que se invierte en un ambiente de certidumbre (como por ejemplo, los bonos), y por tanto en el cual no se considera aleatoriedad. Sin embargo, el valor de un activo subyacente que cotiza en la bolsa depende de un buen número de factores económicos, políticos, sociales, etc. que de hecho influyen en los mercados financieros donde el activo financiero cotiza. Estos factores pueden contener una elevada incertidumbre (volatilidad). Por ello, es más adecuado introducir aleatoriedad en el modelo determinista (3.1.4) para un subyacente de modo que represente adecuadamente la dinámica de la acción. En ese caso, el parámetro μ de rendimiento de la acción debe interpretarse como una cantidad aleatoria en lugar de determinística. Aplicando los conceptos y resultados estocásticos presentados en el Capítulo 2, la aleatoriedad en el modelo (3.1.4) se introducirá a través el proceso estocástico Movimiento Browniano $B(t)$; más concretamente, mediante su diferencial, es decir, a través del proceso de Ruido Blanco $dB(t)$. Este planteamiento motiva la siguiente expresión (perturbación) estocástica del parámetro μ del modelo (3.1.4):

$$\mu \rightarrow \mu + \sigma B'(t), \quad \sigma > 0. \quad (3.2.1)$$

En esta expresión el parámetro μ denota el rendimiento medio del subyacente, pero en este caso, se le ha añadido fluctuaciones o perturbaciones aleatorias, siendo $B'(t)$ el proceso estocástico Ruido Blanco (también denominado *White Noise*) y $\sigma > 0$ la intensidad de dicho ruido.

Introduciendo en el modelo la notación diferencial de la derivada

$$S'(t) = \frac{dS(t)}{dt},$$

y considerando la aleatoriedad en el parámetro μ del modo en que se ha indicado, el modelo se reescribe de la siguiente forma:

$$\frac{dS(t)}{dt} = (\mu + \sigma B'(t))S(t) \Rightarrow dS(t) = (\mu + \sigma B'(t))S(t) dt.$$

Esta expresión puede escribirse también de la siguiente forma:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)B'(t)dt. \quad (3.2.2)$$

En esta expresión aparece un término determinista, $\mu S(t)dt$, y otro estocástico, $\sigma S(t)B'(t)dt$, donde aparece el proceso Ruido Blanco. Formalmente, dado que

$$dB(t) = B'(t)dt,$$

el modelo (3.2.2) se puede reescribir como en expresión (3.0.1), conocido en literatura financiera, como el modelo Log-Normal de activos subyacentes.

3.3 Solución del Modelo Log-Normal

El objetivo de este apartado es resolver la ecuación diferencial estocástica de tipo Itô (3.0.1) que describe la dinámica del subyacente cotizado en un ambiente de incertidumbre. Para ello aplicaremos el Lema de Itô introducido en el Apartado 2.4 del Capítulo 2. Para ello, expresamos la ecuación diferencial (3.0.1) a una forma integral para poder aplicar el Lema de Itô, que ha sido enunciado en su versión integral. Obsérvese que (3.0.1) equivale a

$$\int_0^t dS(r) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dB(r),$$

o equivalentemente:

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dB(r). \quad (3.3.1)$$

A continuación, aplicamos el Lema de Itô con la siguiente identificación:

$$X(t) = S(t); \quad f(t, x(t)) = f(t, S(t)) = \mu S(t); \quad g(t, x(t)) = g(t, S(t)) = \sigma S(t),$$

eligiendo la función determinista que transforma el proceso de Itô $X(t) = S(t)$ de la siguiente forma

$$F(t, x) = \ln(x).$$

Para la aplicación del Lema de Itô se necesitan calcular las siguientes derivadas parciales:

$$F_1(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 0, \quad F_2(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{x},$$

$$F_{22}(t, x) = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \ln(S(t)) - \ln(s_0) &= \int_0^t \left(\mu S(r) \frac{1}{S(r)} + \frac{1}{2} (\sigma S(r))^2 \left(\frac{-1}{(S(r))^2} \right) \right) dr \\ &+ \int_0^t \sigma S(r) \frac{1}{S(r)} dB(r). \end{aligned}$$

Simplificando se obtiene

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dr + \int_0^t \sigma dB(r).$$

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (B(t) - B(0)).$$

Por otra parte, observemos que por la definición del Movimiento Browniano se cumple: $B(0) = 0$ con probabilidad 1, (condición MB.1), por tanto la última expresión se puede reescribir del siguiente modo equivalente:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t),$$

$$\frac{S(t)}{s_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma B(t)},$$

$$S(t) = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma B(t)}, \quad (3.3.2)$$

que representa el proceso estocástico solución, llamado Movimiento Browniano Geométrico ó modelo Log-Normal.

3.4 Principales funciones estadísticas del proceso estocástico solución del Modelo Log-Normal

El proceso estocástico solución dado en (3.3.2) determinada en el Apartado 3.3 se utiliza para calcular predicciones en un tiempo, digamos $t = T$. Si las predicciones se construyen de forma puntual, éstas se realizan a través de la función media de la expresión (3.0.1), mientras que si las predicciones son de tipo probabilístico, éstas se construyen a través de intervalos de confianza, una vez se ha determinado la función varianza. Por ello, este apartado está dedicado al cálculo de las funciones media y varianza que se utilizarán posteriormente para construir predicciones puntuales y probabilísticas de subyacentes cotizados en $t = T$.

Función media

Para el cálculo de la función media de (3.3.2), se aplicará la propiedad $\frac{1}{2}$ - auto semejante del Movimiento Browniano, introducida en el Capítulo 2:

$$B(T \cdot t) = \sqrt{T} \cdot B(t), \quad t \geq 0, \quad T \geq 0,$$

(recuérdese que la igualdad anterior es en distribución). Esta relación se aplicará al caso particular $t = 1$, es decir,

$$B(T) = \sqrt{T} \cdot B(1), \quad (3.4.1)$$

donde recordemos, que por definición el Movimiento Browniano, se cumple

$$B(1) \sim N[0; 1].$$

Por otra parte, también se requiere de la siguiente propiedad de la esperanza de la exponencial de una variable aleatoria gaussiana tipificada:

$$E[e^{\lambda Z}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \quad Z \sim N[0; 1]. \quad (3.4.2)$$

Tomando el operador esperanza en la expresión (3.3.2), y aplicando (3.4.1) con $\lambda = \sigma\sqrt{T}y$ (3.4.2) con $B(1) = Z \sim N[0; 1]$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
E[S(T)] &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma B(T)}] \\
&= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma\sqrt{T}B(1)}] \quad (3.4.3) \\
&= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\frac{(\sigma\sqrt{T})^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Simplificando esta última expresión se llega a

$$E[S(T)] = S_0 e^{\mu T}. \quad (3.4.4)$$

La expresión (3.4.4) nos indica que el modelo Log-Normal tiene la siguiente propiedad: en media el precio del subyacente cotizado coincide con el valor que se obtendría en un ambiente sin incertidumbre (véase (3.1.5) con $t = T$).

Función varianza

La volatilidad del precio del subyacente cotizado, según el modelo Log-Normal, se puede determinar razonando de forma análoga a como se ha hecho para calcular la función media. En este caso, se tiene

$$\begin{aligned}
Var [S(T)] &= E[(S(T))^2] - (E[S(T)])^2 \\
&= E\left[(S_0)^2 e^{2\sigma B(T) + 2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}\right] - (S_0)^2 e^{2\mu T} \\
&= (S_0)^2 e^{2\mu T} (E[e^{2\sigma B(T)}] e^{-\sigma^2 T}) - 1,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
Var [S(T)] &= (S_0)^2 e^{2\mu T} \left(E[e^{2\sigma\sqrt{T}B(1)}] e^{-\sigma^2 T} \right) - 1 \\
&= (S_0)^2 e^{2\mu T} \left(e^{\frac{4\sigma^2 T}{2}} e^{-\sigma^2 T} \right) - 1 \quad (3.4.5) \\
&= (S_0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1) > 0.
\end{aligned}$$

Obsérvese que tal y como sugiere la experiencia bursátil, la varianza crece a medida que lo hace el horizonte temporal T :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} Var [S(T)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} (S_0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1) = +\infty.$$

3.5 Estimación de los parámetros de deriva y volatilidad del Modelo Log-Normal

Se ha visto que el modelo Log-Normal depende los parámetros μ y σ , que representan la tendencia y la volatilidad, respectivamente. Como en la práctica se va a aplicar el modelo a datos reales, es necesario describir métodos estadísticos apropiados que permitan estimar o calibrar estos dos parámetros a partir de los valores de cotización de la muestra. En este apartado explicaremos dos técnicas estadísticas diferentes para alcanzar este objetivo:

- Método de los momentos.
- Método de máxima verosimilitud.

Cabe señalar que se aplican dos técnicas para llevar a cabo la estimación de los parámetros porque en cualquier modelo estadístico se necesita asegurar que las estimaciones son robustas, es decir, que no dependen, porque son similares, de las técnicas utilizadas para realizarlas.

3.5.1 Método de momentos estadísticos

Anteriormente se ha visto que la solución del Modelo Log-Normal está dada por el siguiente proceso estocástico, denominado Movimiento Browniano Geométrico (véase (3.3.2))

$$S(t) = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)},$$

donde en el exponente $B(t)$ es el proceso Movimiento Browniano, que es Gaussiano. Para aprovechar las buenas propiedades de que gozan las variables aleatorias normales o Gaussianas, es conveniente tomar logaritmos en la expresión anterior que modeliza la dinámica del subyacente. De este modo se obtiene:

$$\ln(S(t)) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t) \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma^2 t \right], \quad (3.5.1)$$

donde hemos indicado que la distribución estadística es *gaussiana*, ya que se trata de una transformación lineal del proceso gaussiano $B(t) \sim N [0; t]$.

En la práctica cuando se aplique el Modelo Log-Normal (lo cual se hará en el Capítulo 4), se partirá de una colección o muestra de cotizaciones, digamos $K + 1$, del activo subyacente

$$S(0) = S_0, S^{(1)} = S(\Delta t), S^{(2)} = S(2\Delta t), \dots, S^{(K)} = S(K\Delta t),$$

correspondientes a los instantes

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, K\Delta t,$$

respectivamente, los cuales supondremos que están equiespaciados (horas, días, semanas, meses, etc.) del intervalo $[0, t]$. En cada subperiodo

$$[(j-1)\Delta t, j\Delta t], \quad j = 1, 2, \dots, K,$$

consideremos los K incrementos:

$$U_j = \ln(S(j\Delta t)) - \ln(S((j-1)\Delta t)), \quad 1 \leq j \leq K. \quad (3.5.2)$$

Observemos que por (3.5.1) se tiene:

$$\ln(S(j\Delta t)) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)j\Delta t + \sigma B(j\Delta t),$$

$$\ln(S((j-1)\Delta t)) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(j-1)\Delta t + \sigma B((j-1)\Delta t),$$

de donde restando la segunda expresión de la primera podemos expresar (3.5.2) de la siguiente manera:

$$U_j = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \left(B(j\Delta t) - B((j-1)\Delta t)\right). \quad (3.5.3)$$

Por otra parte, por definición el Movimiento Browniano, $B(t)$, cumple que tiene incrementos gaussianos e independientes de media cero y varianza la longitud del incremento sobre la variable temporal t , por lo que se deduce:

$$U_j \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t; \sigma^2\Delta t\right].$$

Por tanto, hemos deducido que las variables aleatorias U_j son gaussianas e independientes con media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t$ y varianza $\sigma^2 \Delta t$.

A partir de una muestra de $K + 1$ cotizaciones reales del activo subyacente, se pueden construir las K diferencias definidas en (3.5.2) y realizar una estimación de los dos parámetros μ y σ del Modelo Log-Normal, mediante el método de los momentos estadísticos. Este método consiste en igualar la media y la varianza poblacional de las K variables aleatorias U_j a la media muestral \bar{U} y a la que quasi-varianza muestral S^2 dadas por:

$$\bar{U} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K U_j, \quad S^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K (U_j - \bar{U})^2. \quad (3.5.4)$$

De este modo se construye el siguiente sistema de ecuaciones algebraico

$$\bar{U} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t, \quad S^2 = \sigma^2 \Delta t, \quad (3.5.5)$$

cuya solución proporciona una estimación de los parámetros μ y σ :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left(\bar{U} + \frac{S^2}{2}\right), \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (3.5.6)$$

3.5.2 Método de máxima verosimilitud

En este apartado los parámetros μ y σ del modelo Log-Normal se calibrarán utilizando una segunda técnica estadística, denominada Máxima Verosimilitud. El método de máxima verosimilitud se fundamenta en el concepto de función de verosimilitud. Para revisar este concepto, supongamos que disponemos de una muestra $\{x_k: 1 \leq k \leq N\}$ de una población (en nuestro casos los valores de un subyacente cotizado) que asumimos sigue una cierta distribución de probabilidad continua con una función de densidad $p(x; \vec{\theta})$, siendo $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$ el vector de parámetros. Los conceptos que se expondrán a continuación siguen un desarrollo similar si la población es discreta. Si consideramos muestras aleatorias simples, la probabilidad de que ocurra la muestra (x_1, x_2, \dots, x_N) para un valor dado del vector de parámetros $\vec{\theta}$ viene descrita por la función de densidad de probabilidad conjunta (f.d.p) de la muestra y que denotaremos por L .

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^N p(x_k; \vec{\theta}). \quad (3.5.7)$$

El problema que nos planteamos ahora es, dada una muestra fija estimar el valor del vector de parámetros $\vec{\theta}$, que es desconocido. En nuestro caso, se tratará de, dada una muestra de valores de cotizaciones del subyacente, determinar estimaciones para la tendencia μ y la volatilidad σ del Modelo Log-Normal.

Para una muestra dada (x_1, x_2, \dots, x_N) , la *función de verosimilitud* está definida por:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^N p(x_k; \vec{\theta}),$$

y matemáticamente depende del vector de parámetros $\vec{\theta}$ y no de los valores de la muestra, la cual está dada al construirse esta función después de haber obtenido la muestra. Por este motivo, en ocasiones se utiliza la notación $L(\vec{\theta})$ ó L .

El método de máxima verosimilitud consiste en tomar como mejor estimación del vector de parámetros $\vec{\theta}$ el valor que hace máxima la función L para la muestra dada. Es decir, dada la muestra (x_1, x_2, \dots, x_N) se considera mejor la estimación $\vec{\theta}_1$ que la estimación $\vec{\theta}_2$ si se cumple

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}_1) > L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}_2),$$

lo que quiere decir que el valor $\vec{\theta}_1$ es más probable que el valor $\vec{\theta}_2$ para la muestra dada (x_1, x_2, \dots, x_N) . Por tanto, el método de máxima estimación consiste en tomar la *moda* de la distribución a posteriori del parámetro $\vec{\theta}$.

Dado que función de verosimilitud es no negativa para todo valor del parámetro $\vec{\theta}$ y, dado que la función logaritmo neperiano es monótona creciente, se cumple:

$$\max[L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta})] = \max[\ln(L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}))].$$

En la práctica se suele utilizar el $\ln L$ en lugar de L porque la expresión resultante es más sencilla de tratar con herramientas de optimización (como las derivadas), ya que el objetivo es determinar el máximo de la función de verosimilitud (o equivalentemente de la función de log-verosimilitud), pues la derivación de una función definida mediante

suma es más sencilla que la definida vía un producto. Además, piénsese que en el caso de una función de tipo exponencial (como sucede con el caso Gaussiano o normal), al tomar logaritmos neperianos, la función resultante es más sencilla (solo consiste en el exponente).

Si la muestra depende únicamente de un parámetro, θ entonces $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ es un estimador de máxima verosimilitud de θ para la distribución poblacional definida por $p(x; \theta)$ si $\hat{\theta}$ hace máximo el valor de la función de verosimilitud, o lo que es lo mismo, hace máximo la siguiente función:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta) = \sum_{k=1}^N \ln p(x_k, \theta).$$

En consecuencia, el cálculo de $\hat{\theta}$ se reduce al resolver una única ecuación:

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = 0,$$

de forma que si $\hat{\theta}$ es solución de esta ecuación $\hat{\theta}$ sera máximo si la segunda derivada es negativa sobre un dominio convexo.

En el caso de que la distribución poblacional depende de n parámetros, digamos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, se debe resolver el siguiente sistema de n ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_1} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_n} &= 0, \end{aligned}$$

comprobando luego que si $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n)$ verifica este sistema, además hace el *hessiano* correspondiente definido negativo sobre el dominio que debe ser un conjunto convexo.

Vamos a adaptar la definición anterior a nuestro contexto, donde dada una muestra $\{x_k : 0 \leq k \leq N\}$ de un proceso estocástico $x(t)$ en los instantes temporales

$\{t_k : 0 \leq k \leq N\}$ y suponiendo que el proceso $x(t)$ depende de un vector de parámetros $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$, queremos determinar el vector $\vec{\theta}$ de modo que

$$\max L(\theta) = f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}),$$

siendo $f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta})$ la función de densidad conjunta de la muestra. En general, como no se cumple que la muestra sea simple, es decir, que existe independencia, no será siempre posible legitimar la factorización dada en (3.5.1). NO obstante, para poder aplicar el método de máxima verosimilitud, necesitamos tener una expresión de la función de densidad conjunta que sea preferiblemente algebraica. Para ello, vamos en primer lugar a recordar que el modelo de subyacente que tenemos es de la forma (véase 3.0.1))

$$\left. \begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t); \vec{\theta}) dt + g(t, x(t); \vec{\theta}) dB(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \right\} (3.5.8)$$

con

$$x(t) = S(t); \quad x_0 = s_0; \quad \vec{\theta} = (\mu, \sigma);$$

$$f(t, x(t); \vec{\theta}) = \mu S(t); \quad g(t, x(t); \vec{\theta}) = \sigma S(t).$$

Se puede demostrar¹² que la solución de una ecuación de Itô de la forma (3.5.8) es un proceso de Markov de primer orden. Esto permite, utilizando el Teorema de la Probabilidad Total, reescribir la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra en términos de la función de verosimilitud del siguiente modo:

$$\begin{aligned} p(t_0, x_0, t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}) &= p(t_0, x_0, \vec{\theta}) p(t_1, x_1 | t_0, x_0; \vec{\theta}) \\ &\times p(t_2, x_2 | t_1, x_1, t_0, x_0; \vec{\theta}) \dots \\ &\vdots \\ &\times p(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}, \dots, t_2, x_2, t_1, x_1, t_0, x_0; \vec{\theta}) \\ &= p(t_0, x_0; \vec{\theta}) p(t_1, x_1 | t_0, x_0; \vec{\theta}) p(t_2, x_2 | t_1, x_1; \vec{\theta}) \\ &\times p(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}; \vec{\theta}), \end{aligned}$$

¹² Teorema 5.2.5., Soong, T.T. (1973): Random Differential Equations in Science and Engineering. Academic Press, New York.

donde $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})$ es la función de densidad de transición del proceso estocástico $x(t)$ que empieza en (t_{k-1}, x_{k-1}) y pasa a (t_k, x_k) . Como se ha explicado anteriormente, para mayor comodidad en el manejo computacional trabajaremos con la función del log-verosimilitud, es decir,

$$\ln(p(t_0 x_0, t_1 x_1, \dots, t_N x_N; \vec{\theta})) = \ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) + \sum_{k=1}^N \ln p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}).$$

Como los valores $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})$, $1 \leq k \leq N$, suelen estar entre 0 y 1, el logaritmo neperiano de dichos valores es negativo y el problema de maximización de la función de log-verosimilitud es equivalente a obtener el mínimo de su función opuesta, por ello consideraremos el siguiente programa de optimización:

$$\text{Min } D(\vec{\theta}) = \ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) - \sum_{k=1}^N \ln(p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})). \quad (3.5.9)$$

Ahora vamos a explicitar el valor de $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})$. Para ello, partimos de la ecuación diferencial estocástica de Itô dada en (3.5.8) y le aplicaremos el esquema de integración discreto de Euler-Maruyama para aproximar dicha ecuación en los instantes de la muestra que supondremos equiespaciados en el tiempo, siendo Δt el paso temporal. Para ello, consideremos un subintervalo de tiempo general, $[t_{k-1}, t_k]$, y vía la discretización del esquema de Euler-Maruyama obtenemos

$$\begin{aligned} x(t_k) - x(t_{k-1}) &= f(t_{k-1}, x(t_{k-1}); \vec{\theta}) \Delta t \\ &+ g(t_{k-1}, x(t_{k-1}); \vec{\theta}) \{B(t_k) - B(t_{k-1})\}. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Por tanto, si x_k denota la aproximación de la solución obtenida por (3.5.10) en el instante t_k , es decir,

$$x_k \approx x(t_k),$$

el esquema (3.5.10) se puede expresar como

$$\begin{aligned} x(t_k) \approx x_{k-1} &+ f(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \Delta t \\ &+ g(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \{B(t_k) - B(t_{k-1})\}, \end{aligned} \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.5.11)$$

Recordemos que por las propiedades del Movimiento Browniano se tiene que

$$B(t_k) - B(t_{k-1}) \sim N[0; \Delta t], \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Por lo tanto de (3.5.11) se deduce que la aproximación, vía el esquema de Euler-Maruyama de $x(t_k)$ dado $x(t_{k-1})$, sigue la siguiente distribución normal

$$x_k | x_{k-1} \sim N[\mu_k; \sigma_k], \quad \begin{cases} \mu_k &= x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})\Delta t, \\ \sigma_k &= g(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})\Delta t. \end{cases} \quad (3.5.12)$$

Por lo tanto,

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3.5.13)$$

siendo μ_k y σ_k las expresiones dadas en (3.5.12). Esto nos permite escribir explícitamente la función de log-verosimilitud dada en (3.5.9) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D(\vec{\theta}) &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) \\ &- \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2}\right) \\ &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) \\ &- N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\right) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2 \\ &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) + \frac{N}{2} \ln(2\pi) \\ &+ \sum_{k=1}^N \ln(\sigma_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Observemos que en nuestro modelo de subyacente $x_0 = s_0$ es determinista, por tanto:

$$p(t_0, x_0; \vec{\theta}) = p(0, s_0; \mu, \sigma) = 1. \quad (3.5.15)$$

Además las funciones μ_k y σ_k dadas en (3.5.6) toman la forma:

$$\mu_k = S_{k-1} + \mu S_{k-1} \Delta t; \quad \sigma_k = \sigma S_{k-1} \sqrt{\Delta t}. \quad (3.5.16)$$

Entonces sustituyendo (3.5.15) y (3.5.16) en (3.5.14) se obtiene

$$\begin{aligned}
D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \sum_{k=1}^N \ln(\sigma S_{k-1} \sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k - S_{k-1} - \mu S_{k-1} \Delta t}{\sigma S_{k-1} \sqrt{\Delta t}} \right)^2 \\
&= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) \\
&+ \sum_{k=1}^N \ln(S_{k-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el programa de minimización de la función de log-verosimilitud es:

$$\begin{aligned}
\text{Min}_{(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[} D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) \\
&+ \sum_{k=1}^N \ln(S_{k-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2.
\end{aligned}$$

Para calcular el mínimo de $D(\mu, \sigma)$ en primer lugar calculamos los puntos críticos, que son aquellos en los que el gradiente es nulo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right) = 0, \\
\frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{N}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 \Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.5.17}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.5.17) obtenemos como puntos estacionarios:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2. \tag{3.5.18}$$

Se puede comprobar que la matriz *hessiana* formada por las cuatro derivadas parciales segundas de la función $D(\mu, \sigma)$, es decir,

$$H(D(\mu, \sigma)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma \partial \mu} & \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix},$$

evaluada en el punto crítico $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ dado en (3.5.18) tiene valores propios positivos, lo que prueba que el punto $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ es un mínimo de la función opuesta de log-verosimilitud, y por tanto, $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ son los estimadores máximos verosímiles del modelo Log-Normal.

la identificación $x_i = s_i$.

3.6 Validación Estadística del Modelo Log-Normal

Una vez los parámetros del modelo han sido calibrados por dos técnicas estadísticas que otorguen robustez a las estimaciones, el siguiente es validar estadísticamente el modelo Log-Normal cuando se aplica al activo cotizado Grifols (GRF.MC). Las medidas que en este trabajo se emplearán en Capítulo 4, donde se aplican los resultados teóricos a la modelización son:

- Error Porcentual Absoluto Medio (*Mean Absolute Percentage Error*, MAPE).
- Error Cuadrático Medio (*Root Mean Squared Error*, RMSE).
- Construcción de Intervalos de Confianza del 95%.
- Gráfico de observaciones y predicciones (puntuales y por intervalos).

En base a los resultados para estas medidas de bondad del ajuste que se obtenga en la aplicación del modelo a datos reales, se evaluará la adecuación y ajuste del modelo, para proceder así a realizar las predicciones del subyacente.

3.6.1 Medidas estadísticas de bondad de ajuste

Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE)

El MAPE es una error relativo global del ajuste a los datos. Su valor se calcula como el promedio de las diferencias absolutas entre los valores pronosticados por el modelo (en nuestro caso el Modelo Log-Normal), \hat{S}_i , y los observados o datos reales de las cotizaciones (en nuestro caso del activo Grifols (GRF.MC)), S_i , dividido por el número de observaciones o datos reales correspondientes. Se expresa mediante un porcentaje de los valores reales. Por ejemplo, si se dispone de K datos, el MAPE se calcula como:

$$\text{MAPE} = \frac{100}{K} \sum_{i=1}^K \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i}.$$

El MAPE se debe calcular para cada una de las calibraciones que se haya hecho del modelo (en nuestro caso, vía el Método de Momentos Estadísticos y el Método de Máxima Verosimilitud), ya que dependiendo de las estimaciones de los parámetros (aunque serán parecidas, no serán idénticas), se obtendrá diferentes valores \hat{S}_i .

Se considerará un error global de diagnóstico tolerable, cuando el MAPE obtenido sea inferior al 5%, constituyendo este nivel de aproximación una referencia más exigente al estándar en estadística.

Error Cuadrático Medio (RMSE)

El error cuadrático medio (RMSE), es una medida de bondad del ajuste que mide la distancia euclídea por término medio entre los valores observados, S_i , y los estimados, \hat{S}_i . Cuanto menor sea el resultado del RMSE, entonces se podrá decir que el error en el modelo presentado será menor. Su valor está definido de la siguiente manera:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K (S_i - \hat{S}_i)^2}{K}}.$$

De la misma forma que con el MAPE, el RMSE se calculará considerando las predicciones puntuales (función media) que se obtengan de aplicar el Modelo teórico Log-Normal con los dos métodos de estimación de los parámetros explicados el Apartado 3.5. Calculados y contrastados los resultados del RMSE que arroje cada método de estimación de los parámetros, será posible tener una primera idea de cuál de ellos muestra un mejor ajuste.

3.6.2. Validación por intervalos de confianza

Otra de las herramientas de validación que vamos a emplear en la presente trabajo para la aplicación del Modelo Log-Normal al activo subyacente Grifols (GRF), es la construcción y estudio de intervalos de confianza (IC) del 95%. En este cálculo, hay dos elementos fundamentales a considerar. Por un lado, la amplitud o diámetro del intervalo, el cual da la precisión de la estimación y por tanto, deberá ser la menor posible y, por otro lado, la probabilidad de que el intervalo contenga el verdadero valor del parámetro a estimar, que se llama nivel de confianza e interesará que sea la mayor posible. En el presente trabajo, los intervalos de confianza construidos atienden a un nivel de probabilidad del 95%, en base a esto, es cierto que podemos ganar en precisión a costa de perder confianza en la estimación.

Para centrar ideas, supongamos que se selecciona una muestra aleatoria simple de una población descrita por la función $f(x; \theta)$ dependiente del parámetro θ que se pretende

estimar. El problema se plantea como sigue: Se fija un nivel de confianza, que se denota por $1 - \alpha$, en donde $0 < \alpha < 1$, y se trata de determinar dos funciones $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de forma que:

$$P[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \theta \leq \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 1 - \alpha .$$

Al intervalo $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ se le denomina *intervalo de confianza* del parámetro θ al nivel de confianza del $(1 - \alpha)100\%$. Es importante observar que sería un error afirmar que la probabilidad indicada anteriormente, es la probabilidad de que θ esté entre los números reales $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, puesto que θ no es una variable aleatoria sino un parámetro que tendrá un valor concreto. Las variables aleatorias son $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ al variar la muestra, luego la probabilidad anterior debe considerarse como la probabilidad de que el intervalo aleatorio $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ contenga el verdadero valor de θ .

Dicho en términos de frecuencias esto significa que de cada 100 muestras aleatorias que se tomen, cabe esperar que el $(1 - \alpha)100\%$ de ellas contenga el verdadero valor de θ entre $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Suponiendo que (x_1, x_2, \dots, x_n) es una muestra aleatoria simple y que \bar{x} es la media muestral. La variable aleatoria \bar{x} media muestral se distribuye según una normal $N\left[\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right]$, suponiendo que la población es $N[\mu; \sigma^2]$ con σ conocida. Esta propiedad permite asegurar que la variable tipificada $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ sigue una $N[0; 1]$, y por lo tanto, fijando un nivel de confianza $1 - \alpha$, obtener el valor $\lambda_{\alpha/2}$ tal que

$$P\left[\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \lambda_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha.$$

Operando, resulta:

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= P \left[-\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \lambda_{\alpha/2} \right] \\
&= P \left[-\lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \\
&= P \left[-\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \\
&= P \left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].
\end{aligned}$$

Con lo que las funciones buscadas son:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\
\theta_2 &= \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional al nivel de confianza del $(1 - \alpha)$ 100% es:

$$\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Nótese que se puede ganar en precisión de dos formas, bien perdiendo confianza lo que, en general, no interesa, o bien aumentando el tamaño n de la muestra seleccionada.

3.6.3. Gráficos comparativos

Una vez calculadas la función media (predicción puntual) y los intervalos de confianza (predicción por intervalos), bajo las dos técnicas de estimación descritas para la validación del modelo, y para los instantes de tiempo que comprenden el período temporal seleccionado, se realizarán sus representaciones gráficas. A partir de las mismas, se puede realizar un estudio comparativo que permita comprobar visualmente el grado de ajuste que existe entre las predicciones puntuales y el valor real de la acción del activo Grifols (GRF).

3.7 Predicción estadística

El objetivo final de este trabajo es poder realizar predicciones para el activo subyacente seleccionado. Para ello, es necesario emplear modelos que nos permitan poder realizar predicciones de la variable en cuestión. El modelo ajustado debe permitir

predecir el valor medio (estimación puntual), y encontrar un intervalo que contenga el valor real con una determinada probabilidad (estimación por intervalos).

Obtener una estimación puntual será posible mediante el valor esperado de la variable estudiada Y , asociado a determinados valores de las variables explicativas del modelo ajustado. Para ello, se calcula la estimación de Y correspondiente a su valor medio condicionado $E(Y|x_1, \dots, x_k)$, que en el caso del Movimiento Browniano Geométrico está dado por

$$\hat{Y} = s_0 e^{(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)t + \hat{\sigma}\sqrt{t}Z}, \quad Z \sim N[0; 1].$$

Para completar la predicción puntual utilizamos la variabilidad de la estimación, conociéndose así el error de la predicción puntual y obteniendo con ambos valores, el intervalo de confianza. El intervalo de confianza a nivel α para la estimación de Y se muestra a continuación:

$$\hat{Y} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot S,$$

siendo S un estimador de la desviación típica de Y . Mediante la construcción del intervalo de confianza usando la aproximación normal y un nivel de confianza que arroje un intervalo de confianza del 95%, se toma: $\lambda_{\alpha/2} = 1.96$ y $\alpha = 0.05$.

4. APLICACIÓN DEL MODELO LOG-NORMAL

En este capítulo se aplicarán los conceptos y resultados teóricos desarrollados en el Capítulo 3 para el Modelo Log-Normal a la modelización de la dinámica del subyacente cotizado en el IBEX-35 de la acción Grifols (GRF). Se ha tomado una serie histórica de 40 valores al cierre de cotización de esta acción que corresponden al período que va desde el 21 de Noviembre de 2016 hasta el 16 de Enero de 2017. En el Gráfico 4.1.1. se muestra la evolución de este subyacente.

La herramienta utilizada para la implementación del modelo ha sido la hoja de cálculo Excel®, mediante la cual se validará el modelo. Posteriormente, se realizarán predicciones para la semana posterior al intervalo temporal antes señalado. Se concluirá con un estudio comparativo de los resultados obtenidos y los valores reales que tomó la acción en el intervalo de predicción.

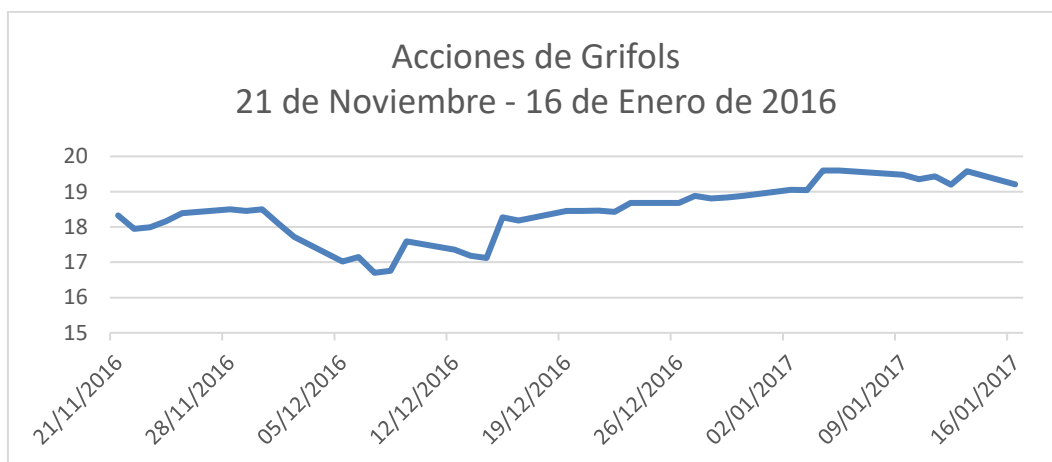


Gráfico 4.1.1. Evolución de las cotizaciones de la acción Grifols.

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 4.1.1. se muestran los valores de cierre diarios de la cotización de la acción Grifols (GRF) durante el período seleccionado. Se ha añadido una última celda para indicar el primer día para el cual se realizará la predicción a partir de la serie temporal.

FECHA	CIERRE		
		19/12/2016	18,45
21/11/2016	18,33	20/12/2016	18,45
22/11/2016	17,95	21/12/2016	18,46
23/11/2016	17,99	22/12/2016	18,43
24/11/2016	18,16	23/12/2016	18,68
25/11/2016	18,39	26/12/2016	18,68
28/11/2016	18,5	27/12/2016	18,88
29/11/2016	18,45	28/12/2016	18,81
30/11/2016	18,5	29/12/2016	18,84
01/12/2016	18,1	30/12/2016	18,88
02/12/2016	17,72	02/01/2017	19,05
05/12/2016	17,02	03/01/2017	19,04
06/12/2016	17,15	04/01/2017	19,6
07/12/2016	16,7	05/01/2017	19,6
08/12/2016	16,76	06/01/2017	19,57
09/12/2016	17,59	09/01/2017	19,48
12/12/2016	17,36	10/01/2017	19,35
13/12/2016	17,18	11/01/2017	19,43
14/12/2016	17,12	12/01/2017	19,2
15/12/2016	18,27	13/01/2017	19,58
16/12/2016	18,18	16/01/2017	19,21

Tabla 4.1.1. Cotizaciones de las acciones de Grifols (GRF) en el IBEX-35.

Fuente: Elaboración propia.

4.1 Estimación de los parámetros del Modelo Log- Normal

Para aplicar el Modelo Log-Normal se requiere estimar los parámetros de tendencia, μ , y el parámetro de la volatilidad local σ . Las técnicas de estimación de parámetros que se utilizarán se introdujeron en el Apartado 3.5 del Capítulo 3 y éstas son:

- El método de los momentos.
- El método de máxima verosimilitud.

Si aplicando estos dos métodos se obtienen estimaciones parecidas, se podrá afirmar que son robustas al no depender de la técnica estadística utilizada, y por tanto, las aceptaremos para aplicar el modelo.

4.1.1 Estimación de parámetros con el método de los momentos

La primera estimación de parámetros obtenida se realizará con el método de los momentos estadísticos, a partir de la aplicación de la solución del Modelo Log-Normal (véase Apartado 3.5.1). Este análisis se ha realizado con Excel[®]. El método de los momentos consiste en igualar los momentos teóricos poblacionales a los momentos muestrales.

El horizonte temporal en el que vamos a realizar los cálculos es de 40 días, ya que, la literatura disponible sobre la aplicación del modelo Log-Normal indica que la aplicación del mismo debe realizarse en un período temporal que oscile entre 30 y 60 días, perdiendo eficacia para un horizonte temporal más amplio respecto del cálculo de las estimaciones probabilísticas (intervalos de confianza) que proporciona el Modelo Log-Normal. Esto está justificado por la propiedad que posee el Movimiento Browniano (que forma parte de la solución del Movimiento Browniano Geométrico (véase (3.3.2)) que describe la trayectoria del subyacente) de aumentar su volatilidad cuando el horizonte temporal aumenta (véase propiedad MB.4 de la definición Movimiento Browniano).

Para aplicar el modelo es conveniente trabajar con los logaritmos de las cotizaciones diarias, también denominadas log-cotizaciones (véase Tabla 4.1.2.).

Δt	FECHA	CIERRE	Log-cotizaciones
0	21/11/2016	18,33	-0,02094895
1	22/11/2016	17,95	0,002225933
2	23/11/2016	17,99	0,009405325
3	24/11/2016	18,16	0,012585665
4	25/11/2016	18,39	0,005963693
5	28/11/2016	18,5	-0,00270636
6	29/11/2016	18,45	0,002706362
7	30/11/2016	18,5	-0,02185879
8	01/12/2016	18,1	-0,02121799
9	02/12/2016	17,72	-0,04030482
10	05/12/2016	17,02	0,00760905
11	06/12/2016	17,15	-0,02658945
12	07/12/2016	16,7	0,003586376
13	08/12/2016	16,76	0,048335464
14	09/12/2016	17,59	-0,01316185
15	12/12/2016	17,36	-0,01042279
16	13/12/2016	17,18	-0,00349855
17	14/12/2016	17,12	0,065013
18	15/12/2016	18,27	-0,00493828
19	16/12/2016	18,18	0,014742282
20	19/12/2016	18,45	0
21	20/12/2016	18,45	0,000541859
22	21/12/2016	18,46	-0,00162646
23	22/12/2016	18,43	0,013473661
24	23/12/2016	18,68	0
25	26/12/2016	18,68	0,010649728
26	27/12/2016	18,88	-0,00371452
27	28/12/2016	18,81	0,001593626
28	29/12/2016	18,84	0,002120892
29	30/12/2016	18,88	0,008963941
30	02/01/2017	19,05	-0,00052507
31	03/01/2017	19,04	0,028987537
32	04/01/2017	19,6	0
33	05/01/2017	19,6	-0,00153178
34	06/01/2017	19,57	-0,00460948
35	09/01/2017	19,48	-0,00669588
36	10/01/2017	19,35	0,004125844
37	11/01/2017	19,43	-0,01190798
38	12/01/2017	19,2	0,019598358
39	13/01/2017	19,58	-0,01907766
40	16/01/2017	19,21	

Tabla 4.1.2. Log-cotizaciones de las acciones de Grifols (GRF) en el IBEX-35.

Fuente: Elaboración propia.

Las estimaciones de los parámetros μ y σ se han calculado aplicando las siguientes fórmulas obtenidas en (3.5.6) (véase Capítulo 3):

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left(\bar{U} + \frac{S^2}{2} \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}},$$

donde \bar{U} y S^2 son la media y la quasi-varianza muestral de las log-cotizaciones, respectivamente. El paso temporal que se ha tomado para aplicar el modelo es: $\Delta t = 1/252$, que corresponde al tamaño de paso diario respecto de los días hábiles (252) de cotización del IBEX-35 en un año. Los resultados de los parámetros \bar{U} y S^2 se detallan en la Tabla 4.1.3.

\bar{U}	S^2
0,0011723	0,00034179

Tabla 4.1.3. Estimaciones de la media muestral y de la quasi-varianza muestral de las Log-cotizaciones de las acciones de Grifols (GRF) en el IBEX-35.

Fuente: Elaboración propia.

Sustituyendo estos valores en las expresiones anteriores de las estimaciones de los parámetros, se obtiene que la estimación de los parámetros de μ y σ son las siguientes:

$$\hat{\mu}_M = 0,33845, \quad \hat{\sigma}_M = 0,2934824.$$

4.1.2 Estimación de parámetros con el método de máxima verosimilitud

La segunda estimación de los parámetros μ y σ se realizará mediante el método de máxima verosimilitud. En el Capítulo 3 se justificó que estas estimaciones son (véase expresión (3.5.18)):

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu\Delta t \right)^2.$$

La aplicación de estas fórmulas a los datos de cotización en nuestro caso conduce a los siguientes resultados:

$$\hat{\mu}_{EMV} = 0,3379153, \quad \hat{\sigma}_{EMV} = 0,293082.$$

Obsérvese en la Figura 4.1.1 que son muy similares a los obtenidos por el método de momentos, lo que, como se ha señalado anteriormente, otorga robustez a las estimaciones.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1																		
2																		
3			Δt	FECHA	CIERRE	RENDIMIENTO	LN(SK-1)	$1/(2*\Delta t*\sigma^2)$	$(SK/S_{t-1})-1$	$((S_t/S_{t-1})-1-\mu)\Delta t$								
4			0	21/11/2016	18.33													
5			1	22/11/2016	17.95	-0,020948947	2,90853906	1466,872536	-0,020731042	0,00048717			$\Delta=1/252$					
6			2	23/11/2016	17.99	0,002225933	2,88759011	1466,872536	0,002228412	0,00000079			0,0039683					
7			3	24/11/2016	18.16	0,009405325	2,88981605	1466,872536	0,009449694	0,00006575								
8			4	25/11/2016	18.39	0,012585865	2,89922137	1466,872536	0,012865198	0,00012824								
9			5	28/11/2016	18.51	0,005963893	2,91180704	1466,872536	0,005981512	0,00002153								
10			6	29/11/2016	18.45	-0,002706362	2,91777073	1466,872536	-0,002702709	0,00001695			0,3379153	0,293082				
11			7	30/11/2016	18.5	0,002706362	2,91508437	1466,872536	0,002710027	0,00000187			0,3379153	0,293082				
12			8	01/12/2016	18.1	-0,021858794	2,91777073	1466,872536	-0,021821622	0,00052728								
13			9	02/12/2016	17.72	-0,021217993	2,89591194	1466,872536	-0,020994475	0,00049887								
14			10	05/12/2016	17.02	-0,040304822	2,87469395	1466,872536	-0,039503386	0,00166826								
15			11	06/12/2016	17.15	0,00760905	2,83438912	1466,872536	0,007638073	0,00003965								
16			12	07/12/2016	16.7	-0,026589454	2,84199817	1466,872536	-0,026239067	0,00076066								
17			13	08/12/2016	16.76	0,003586376	2,81540872	1466,872536	0,003592814	0,00000507								
18			14	09/12/2016	17.59	0,048335464	2,81899510	1466,872536	0,049522873	0,00232148								
19			15	12/12/2016	17.36	-0,01316185	2,86713056	1466,872536	-0,013075611	0,000020784								
20			16	13/12/2016	17.18	-0,010422793	2,85418871	1466,872536	-0,010368664	0,00013711								
21			17	14/12/2016	17.12	-0,003498546	2,84374592	1466,872536	-0,003492433	0,00002336								
22			18	15/12/2016	18.27	0,065013	2,84024737	1466,872536	0,067172897	0,00433385								
23			19	16/12/2016	18.18	-0,004983282	2,90526037	1466,872536	-0,004921608	0,00003928								
24			20	19/12/2016	18.45	0,014742282	2,90032209	1466,872536	0,014851485	0,00018254								
25			21	20/12/2016	18.45	0	2,91506437	1466,872536	0	0,00000180								
26			22	21/12/2016	18.46	0,000541859	2,91506437	1466,872536	0,000542005	0,00000064								
27			23	22/12/2016	18.43	-0,001626457	2,91506023	1466,872536	-0,001625135	0,00000880								
28			24	23/12/2016	18.66	0,013473661	2,91397977	1466,872536	0,01356484	0,00014942								
29			25	26/12/2016	19.69	0,06190944	2,91397977	1466,872536	0,06190944	0,00433385								

Figura 4.1.1. Estimaciones de los parámetros del Modelo Log-Normal usando los métodos de Momentos y Máxima Verosimilitud para la acción Grifols (GRF) del IBEX-35.

Fuente: Elaboración propia.

La estimación de los parámetros del modelo también puede hacerse resolviendo el programa de optimización indicado en el Capítulo 3. En la celda K8 de la Figura 4.1.1. se muestra la función objetivo, Función Log-Verosimilitud, para la que obtenemos los valores de los parámetros μ y σ que la minimizan. Para el resultado de la Celda K8 se tiene en cuenta que, el incremento del tiempo es $\Delta t = \frac{1}{252}$, que corresponde al paso unitario (diario) referenciado a los 252 días que, en media, opera el Ibx-35.

4.2 Validación del Modelo Log-Normal

La validación del modelo se lleva a cabo a través de criterios estadísticos, teniendo estimados previamente los parámetros necesarios para la aplicación del Modelo Log-Normal. Esta validación nos permitirá aceptar la solución del modelo para el caso concreto de una acción de la empresa Grifols. Los criterios estadísticos empleados atienden, por un lado, a medidas de bondad de ajuste y, por otro lado, a la representación gráfica de los resultados donde se incluyen las cotizaciones, la media y los intervalos de confianza. El principal objeto de este estudio es, en base a los resultados obtenidos, poder validar las predicciones para una acción de la empresa Grifols en el periodo estudiado.

En este apartado, se procederá a calcular la función media (estimación puntual de la acción de Grifols) y a construir los correspondientes intervalos de confianza (estimación por intervalos de la acción de Grifols durante el periodo seleccionado). Estas funciones estadísticas se determinarán en base al Modelo Log-Normal utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas con el método de momentos y el método de máxima verosimilitud.

4.2.1 Validación de los parámetros del método de los momentos

Estimaciones puntuales por el método teórico Log-Normal: Cálculo de la media y la varianza teórica

Siguiendo el Modelo teórico Log-Normal, se procederá a la estimación de la función media y la función varianza teórica de la acción de Grifols durante el período seleccionado por cada instante fijo t .

Fecha	Δt	Acción	Predicción	Desviación
21/11/2016	0	18,33	18,33	0
22/11/2016	1	17,95	18,35150082	0,339363176
23/11/2016	2	17,99	18,37302686	0,480618151
24/11/2016	3	18,16	18,39457815	0,589476172
25/11/2016	4	18,39	18,41615472	0,681641592
28/11/2016	5	18,5	18,4377566	0,763188029
29/11/2016	6	18,45	18,45938382	0,837225864
30/11/2016	7	18,50	18,4810364	0,905600172
01/12/2016	8	18,10	18,50271439	0,969511439
02/12/2016	9	17,72	18,5244178	1,029792367
05/12/2016	10	17,02	18,54614667	1,087048411
06/12/2016	11	17,15	18,56790102	1,141736018
07/12/2016	12	16,70	18,5896809	1,194209326
08/12/2016	13	16,76	18,61148632	1,244749584
09/12/2016	14	17,59	18,63331732	1,293584525
12/12/2016	15	17,36	18,65517393	1,34090159
13/12/2016	16	17,18	18,67705617	1,386857221
14/12/2016	17	17,12	18,69896408	1,431583578
15/12/2016	18	18,27	18,72089769	1,475193494
16/12/2016	19	18,18	18,74285703	1,517784199
19/12/2016	20	18,45	18,76484213	1,559440172
20/12/2016	21	18,45	18,78685301	1,600235358
21/12/2016	22	18,46	18,80888971	1,640234915
22/12/2016	23	18,43	18,83095226	1,679496601
23/12/2016	24	18,68	18,85304069	1,718071895
26/12/2016	25	18,68	18,87515503	1,75600691
27/12/2016	26	18,88	18,89729531	1,79334314
28/12/2016	27	18,81	18,91946156	1,83011808
29/12/2016	28	18,84	18,94165381	1,866365746
30/12/2016	29	18,88	18,96387209	1,902117102
02/01/2017	30	19,05	18,98611643	1,937400434
03/01/2017	31	19,04	19,00838687	1,972241661
04/01/2017	32	19,60	19,03068343	2,006664599
05/01/2017	33	19,6	19,05300614	2,040691193
06/01/2017	34	19,57	19,07535503	2,074341716
09/01/2017	35	19,48	19,09773014	2,10763494
10/01/2017	36	19,35	19,1201315	2,140588287
11/01/2017	37	19,43	19,14255913	2,173217958
12/01/2017	38	19,20	19,16501307	2,205539055
13/01/2017	39	19,58	19,18749335	2,237565673
16/01/2017	40	19,21	19,21	2,269310999

Tabla 4.2.1. Cálculo de la media y varianza/desviación típica teórica de la acción de Grifols utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

Aplicando las ecuaciones (3.4.4) y (3.4.5) y una vez estimados los parámetros, el resultado obtenido proporciona la media y desviación típica teóricas del subyacente $S(t)$ para cada t del período considerado utilizando el paso temporal $1/252$. Los resultados se muestran en la Tabla 4.2.1.

Una vez calculadas la media y la varianza teóricas de la acción de Grifols durante el periodo seleccionado, el modelo se validará calculando medidas de bondad de ajuste y determinando los intervalos de confianza.

Medidas de bondad del ajuste: Cálculo del error cuadrático medio (RSME) y del error porcentual absoluto medio (MAPE)

Según el valor del MAPE (véase Apartado 3.6.1), un valor se considerará tolerable siempre que no sea superior al 5%.

El RSME se determina como la raíz del error cuadrático medio y mide la distancia euclídea al cuadrado por término medio entre los valores observados y los estimados. Cuanto menor sea el valor del RSME, entonces se podrá afirmar que el error en el modelo será menor.

Para calcular el valor del MAPE, primero se calcula el error absoluto como la diferencia en términos absolutos entre el dato observado y la estimación obtenida del mismo, para cada uno de los instantes de tiempo t (véase Tabla 4.2.2.). Segundo, este error absoluto obtenido para cada uno de los instantes de tiempo t se divide entre el correspondiente valor observado del instante de tiempo en cuestión, $|X_i - X_{ESTi}| / X_i$, (véase Tabla 4.2.2.). Por último, se aplica la función promedio a cada uno de los datos calculado para cada instante temporal t .

Para la estimación del RSME, utilizamos los datos anteriormente mostrados en el cálculo del MAPE. Una vez calculado el error absoluto, diferencia entre el valor estimado menos el valor observado, elevamos al cuadrado este valor para hallar el $ERROR^2$ (véase Tabla 4.2.2.). Y por último, aplicamos la función promedio para el cálculo del RSME del período estudiado.

VALOR ESTIMADO	VALOR OBSERVADO	ERROR ABSOLUTO	$ X_i - XEST_i / X_i$	ERROR \wedge^2
18,33	18,330	0,000	0,000000	0,000000
18,33902763	17,950	0,389	0,021673	0,151342496
18,35717745	17,990	0,367	0,020410	0,134819278
18,37684753	18,160	0,217	0,011941	0,04702285
18,39731732	18,390	0,007	0,000398	5,35432E-05
18,41830814	18,500	0,082	0,004416	0,00667356
18,43967728	18,450	0,010	0,000559	0,000106559
18,46134009	18,500	0,039	0,002090	0,001494589
18,48324148	18,100	0,383	0,021174	0,146874035
18,50534329	17,720	0,785	0,044320	0,616764083
18,52761774	17,020	1,508	0,088579	2,272911256
18,55004392	17,150	1,400	0,081635	1,960122988
18,57260561	16,700	1,873	0,112132	3,506651779
18,59528993	16,760	1,835	0,109504	3,368289139
18,61808647	17,590	1,028	0,058447	1,056961787
18,64098665	17,360	1,281	0,073790	1,640926799
18,66398334	17,180	1,484	0,086379	2,202206539
18,68707049	17,120	1,567	0,091534	2,455709932
18,71024298	18,270	0,440	0,024096	0,193813885
18,73349638	18,180	0,553	0,030445	0,306358247
18,75682685	18,450	0,307	0,016630	0,094142718
18,78023104	18,450	0,330	0,017899	0,109052539
18,80370599	18,460	0,344	0,018619	0,118133806
18,82724909	18,430	0,397	0,021554	0,15780684
18,85085803	18,680	0,171	0,009147	0,029192465
18,87453072	18,680	0,195	0,010414	0,0378422
18,8982653	18,880	0,018	0,000967	0,000333621
18,9220601	18,810	0,112	0,005957	0,012557466
18,94591359	18,840	0,106	0,005622	0,01121769
18,9698244	18,880	0,090	0,004758	0,008068424
18,99379127	19,050	0,056	0,002951	0,003159421
19,01781306	19,040	0,022	0,001165	0,00049226
19,0418887	19,600	0,558	0,028475	0,31148822
19,06601725	19,600	0,534	0,027244	0,28513758
19,09019781	19,570	0,480	0,024517	0,230210146
19,11442956	19,480	0,366	0,018766	0,133641749
19,13871175	19,350	0,211	0,010919	0,044642726
19,16304368	19,430	0,267	0,013739	0,071265679
19,1874247	19,200	0,013	0,000655	0,000158138
19,2118542	19,580	0,368	0,018802	0,135531329
19,23633163	19,210	0,026	0,001371	0,000693355

Tabla 4.2.2. Cálculo medidas bondad de ajuste: RSME y MAPE utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

MEDIDAS BONDAD DEL AJUSTE	
MAPE	2,7895%
RSME	0,7303

Tabla 4.2.3. Medidas de bondad de ajuste: RSME y MAPE

Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

Los valores obtenidos del RSME y del MAPE son 2,7895% y 0,7303, respectivamente. El valor del MAPE es inferior al 5% y el RSME calculado es bajo, lo que indica que nuestro modelo tiene un alto grado de aceptación.

Validación por intervalos de confianza teóricos

Para completar la validación de la acción de Grifols en el periodo seleccionado se realizará una última estimación mediante intervalos de confianza (I.C.) al 95% (véase Apartado 3.6.2).

El intervalo de confianza a un nivel $\alpha = 5\%$ para la estimación de $S(t)$ es:

$$E[S(t)] \pm 1,96 \times \sigma[S(t)],$$

donde según, (3.4.4) y (3.4.5).

$$E[S(t)] = S_0 e^{\mu t},$$

$$Var [S(t)] = (S_0)^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

En la Tabla 4.2.4. se muestra el cálculo de los intervalos de confianza teóricos, que han sido contruidos a partir del cálculo de la media y la varianza teóricas, ya mostradas anteriormente en la Tabla 4.2.1. Para obtener el extremo superior del I.C. se suma a la estimación puntual calculada con el modelo teórico Log-Normal (media teórica), 1,96 veces el valor de la desviación típica obtenida, mientras que para hallar el I.C. inferior, la operación a seguir es exactamente la misma pero, sustituyendo la suma por una resta.

$E[S(t)]$	$\sigma[S(t)]$	I.C. Superior	I.C. Inferior
18,33	0,00	18,33	18,33
18,3390276	0,34	18,9983776	17,6796776
18,3571774	0,48	19,2907708	17,4235841
18,3768475	0,58	19,5217025	17,2319926
18,3973173	0,68	19,7209804	17,0736542
18,4183081	0,76	19,9001328	16,9364834
18,4396773	0,83	20,0650636	16,814291
18,4613401	0,90	20,2192749	16,7034052
18,4832415	0,96	20,3650456	16,6014374
18,5053433	1,02	20,5039562	16,5067304
18,5276177	1,08	20,6371561	16,4180794
18,5500439	1,13	20,7655117	16,3345762
18,5726056	1,18	20,8896953	16,2555159
18,5952899	1,23	21,0102409	16,180339
18,6180865	1,28	21,1275808	16,1085922
18,6409867	1,33	21,2420708	16,0399025
18,6639833	1,37	21,354008	15,9739587
18,6870705	1,42	21,4636433	15,9104977
18,710243	1,46	21,5711908	15,8492951
18,7334964	1,50	21,6768354	15,7901574
18,7568269	1,54	21,7807373	15,7329164
18,780231	1,58	21,883037	15,6774251
18,803706	1,62	21,9838582	15,6235538
18,8272491	1,66	22,0833106	15,5711875
18,850858	1,70	22,1814921	15,520224
18,8745307	1,74	22,2784901	15,4705714
18,8982653	1,77	22,3743835	15,4221471
18,9220601	1,81	22,4692435	15,3748767
18,9459136	1,85	22,5631348	15,3286924
18,9698244	1,88	22,6561161	15,2835327
18,9937913	1,92	22,7482413	15,2393413
19,0178131	1,95	22,8395595	15,1960666
19,0418887	1,98	22,9301161	15,1536613
19,0660172	2,02	23,0199527	15,1120818
19,0901978	2,05	23,1091079	15,0712877
19,1144296	2,08	23,1976174	15,0312417
19,1387117	2,12	23,2855142	14,9919092
19,1630437	2,15	23,3728293	14,9532581
19,1874247	2,18	23,4595912	14,9152582
19,2118542	2,21	23,5458269	14,8778815
19,2363316	2,24	23,6315613	14,8411102

Tabla 4.2.4. Cálculo los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

Mediante este cálculo establecemos entre qué valores fluctuará el precio de la acción en el futuro con una probabilidad del 95% y así poder establecer el rango de datos entre los que se espera fluctúen las cotizaciones para comprobar si las estimaciones proporcionadas por el modelo son correctas.

En el Gráfico 4.2.1. se muestra la evolución de los datos reales durante el período seleccionado frente a la predicción realizada vía el Modelo Log-Normal y el Intervalo de Confianza del 95%.

Se puede comprobar que las fluctuaciones producidas en la muestra observada están dentro de los intervalos de confianza calculados, por lo que podemos decir que el Modelo Log-Normal, cuyos parámetros ha sido calibrados mediante el método de los momentos, recoge satisfactoriamente la dinámica de la acción de Grifols durante el periodo seleccionado.

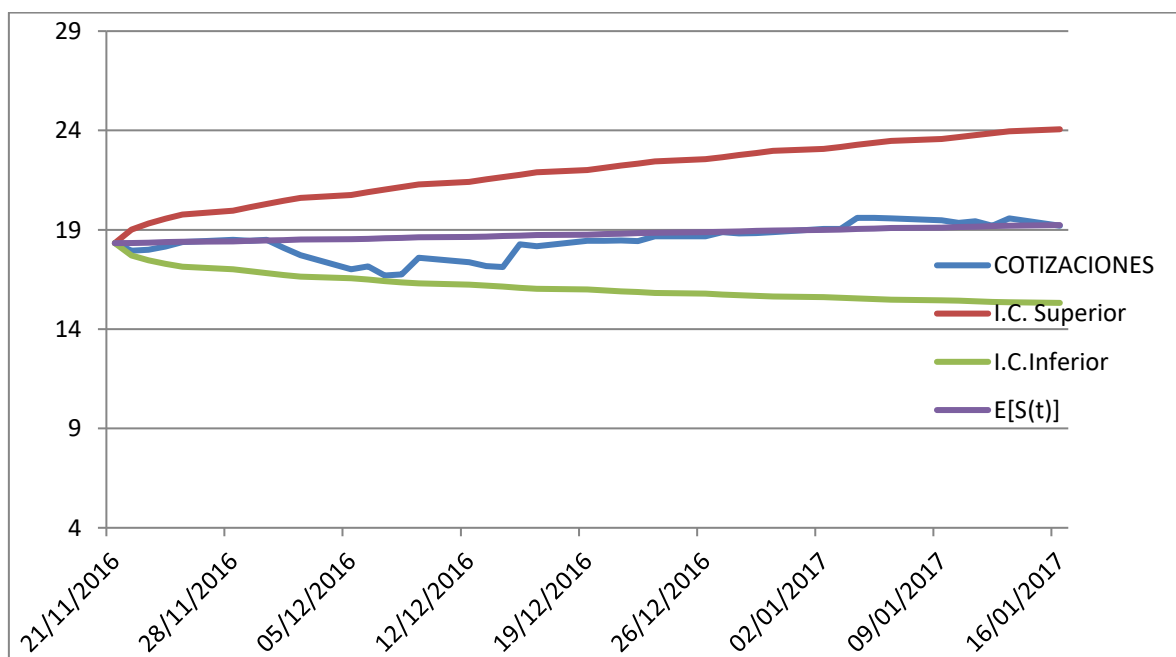


Gráfico 4.2.1. I.C (95%) para la acción de Grifols vía la calibración de parámetros mediante el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia.

4.2.2 Validación de los parámetros del método de máxima verosimilitud

Estimaciones puntuales por el método teórico Log-Normal: Cálculo de la media y la varianza teórica

En este apartado, se seguirá un desarrollo similar al expuesto en el apartado anterior, pero procediendo a validar el Modelo Log-Normal, a partir de la calibración de los parámetros calculados con el método de máxima verosimilitud. Para lo que se han aplicado las expresiones (3.4.4) y (3.4.5) teóricas para la media y la varianza, según el Modelo Log-Normal.

Fecha	Δt	Acción	Predicción	Desviación
21/11/2016	0	18,33	18,33	0
22/11/2016	1	17,95	18,35146788	0,338899281
23/11/2016	2	17,99	18,37296091	0,47995997
24/11/2016	3	18,16	18,3944791	0,588667448
25/11/2016	4	18,39	18,4160225	0,680704725
28/11/2016	5	18,50	18,43759114	0,762137182
29/11/2016	6	18,45	18,45918503	0,836070987
30/11/2016	7	18,50	18,48080421	0,904348724
01/12/2016	8	18,10	18,50244871	0,968169257
02/12/2016	9	17,72	18,52411856	1,028364168
05/12/2016	10	17,02	18,5458138	1,085538097
06/12/2016	11	17,15	18,56753444	1,14014688
07/12/2016	12	16,70	18,58928052	1,192544177
08/12/2016	13	16,76	18,61105206	1,243010864
09/12/2016	14	17,59	18,63284911	1,291774369
12/12/2016	15	17,36	18,65467169	1,339021881
13/12/2016	16	17,18	18,67651982	1,384909635
14/12/2016	17	17,12	18,69839354	1,429569617
15/12/2016	18	18,27	18,72029288	1,473114508
16/12/2016	19	18,18	18,74221787	1,515641409
19/12/2016	20	18,45	18,76416854	1,557234688
20/12/2016	21	18,45	18,78614491	1,597968193
21/12/2016	22	18,46	18,80814703	1,637906994
22/12/2016	23	18,43	18,83017491	1,677108774
23/12/2016	24	18,68	18,85222859	1,715624943
26/12/2016	25	18,68	18,8743081	1,753501555
27/12/2016	26	18,88	18,89641347	1,790780049
28/12/2016	27	18,81	18,91854473	1,827497871
29/12/2016	28	18,84	18,94070191	1,863688991
30/12/2016	29	18,88	18,96288504	1,899384334
02/01/2017	30	19,05	18,98509415	1,934612149
03/01/2017	31	19,04	19,00732927	1,969398319
04/01/2017	32	19,60	19,02959043	2,003766631
05/01/2017	33	19,60	19,05187767	2,037739002
06/01/2017	34	19,57	19,074191	2,071335676
09/01/2017	35	19,48	19,09653047	2,104575403
10/01/2017	36	19,35	19,11889611	2,13747558
11/01/2017	37	19,43	19,14128794	2,170052389
12/01/2017	38	19,20	19,16370599	2,202320911
13/01/2017	39	19,58	19,1861503	2,234295224
16/01/2017	40	19,21	19,20862089	2,265988498

Tabla 4.2.5. Cálculo de la media y varianza/desviación típica teórica de la acción de Grifols utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

El resultado obtenido atiende a la media teórica y varianza teórica, como muestra la Tabla 4.2.5. para cada $S(t)$ del período fijo estudiado. El incremento que se ha utilizado es $1/252$.

Medidas de bondad del ajuste: Cálculo del error cuadrático medio (RSME) y del error porcentual absoluto medio (MAPE)

Los valores obtenidos del MAPE y del RSME mediante la aplicación de los parámetros obtenidos vía el método de máxima verosimilitud, son los que se muestran en la Tabla 4.2.6.

MAPE	2,7890%
RSME	0,7301

Tabla 4.2.6. Cálculo de las medidas de bondad del ajuste: RSME y MAPE utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

Según el MAPE, un valor se considerará aceptable siempre que sea inferior al 5% (por tanto el MAPE obtenido es aceptable); en cuanto al RSME, cuanto menor será su valor más aceptable será el modelo.

Validación por intervalos de confianza teóricos

Por último, para completar la estimación del valor de la acción del activo Grifols mediante el método de máxima verosimilitud, se realizará una validación del modelo mediante intervalos de confianza teóricos. Los intervalos de confianza teóricos, han sido calculados a través de la media y la varianza teórica. En la Tabla 4.2.7. se muestra el cálculo de la media y la varianza teórica, y los intervalos de confianza del 95% del modelo mediante la estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal para el subyacente utilizando el método de máxima verosimilitud. Par la determinación de los intervalos se utiliza la expresión:

$$E[S(t)] \pm 1,96 \times \sigma[S(t)]$$

La predicción por intervalos de confianza se debe completar con el valor de la desviación típica, la cual ha sido estimada anteriormente (véase Tabla 4.2.3.), conociéndose de este modo el error en la predicción.

E[S(t)]	$\sigma[S(t)]$	I.C. Superior	I.C. Inferior
18,33	0	18,33	18,33
18,3390075	0,33594344	18,99745668	17,6805584
18,3571248	0,47567133	19,28944056	17,4248089
18,3767601	0,58330906	19,52004587	17,2334744
18,3971941	0,67441112	19,71903985	17,0753483
18,4181483	0,75499328	19,89793509	16,9383614
18,4394802	0,82813636	20,06262748	16,8163329
18,4611054	0,89566792	20,21661449	16,7055962
18,4829687	0,95877707	20,3621718	16,6037657
18,5050322	1,01828864	20,50087791	16,5091864
18,527268	1,07480236	20,63388061	16,4206553
18,5496552	1,12877038	20,76204519	16,3372653
18,5721778	1,18054351	20,88604303	16,2583125
18,5948227	1,23040034	21,00640734	16,183238
18,6175796	1,27856647	21,12356989	16,1115893
18,64044	1,32522759	21,23788606	16,0429939
18,6633967	1,37053867	21,34965247	15,9771409
18,6864436	1,41463065	21,45911971	15,9137676
18,7095758	1,45761529	21,56650173	15,8526498
18,7327886	1,49958892	21,67198292	15,7935943
18,7560784	1,54063524	21,77572348	15,7364333
18,7794417	1,58082751	21,87786363	15,6810198
18,8028756	1,62023027	21,97852696	15,6272243
18,8263776	1,65890074	22,07782301	15,5749321
18,8499452	1,69688994	22,17584944	15,5240409
18,8735764	1,73424354	22,2726937	15,474459
18,8972693	1,77100266	22,36843452	15,4261041
18,9210223	1,80720444	22,46314302	15,3789016
18,9448339	1,84288259	22,55688376	15,332784
18,9687026	1,87806778	22,64971547	15,2876898
18,9926273	1,91278804	22,74169184	15,2435627
19,0166067	1,94706905	22,83286206	15,2003514
19,0406399	1,98093441	22,92327131	15,1580084
19,0647258	2,01440586	23,01296127	15,1164903
19,0888636	2,04750348	23,1019704	15,0757568
19,1130524	2,08024588	23,19033435	15,0357705
19,1372916	2,11265032	23,2780862	14,996497
19,1615803	2,14473284	23,36525671	14,957904
19,1859181	2,17650842	23,45187456	14,9199615
19,2103041	2,20799102	23,53796652	14,8826417
19,234738	2,23919371	23,62355765	14,8459183

Tabla 4.2.7. Cálculo los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

Finalmente, para acabar de validar el modelo por el método de máxima verosimilitud, se ha realizado un gráfico en el que se muestran los valores reales que tuvo la acción en el período seleccionado, junto con los intervalos de confianza y la media calculados anteriormente. En el Gráfico 4.2.2. se puede comprobar cómo el valor de la media se ajusta al valor real de los datos, lo que quiere decir que nuestro modelo tiene un buen poder predictivo y las oscilaciones del subyacente permanecen dentro de los intervalos de confianza en todo el período, a pesar de las grandes oscilaciones al inicio del período.

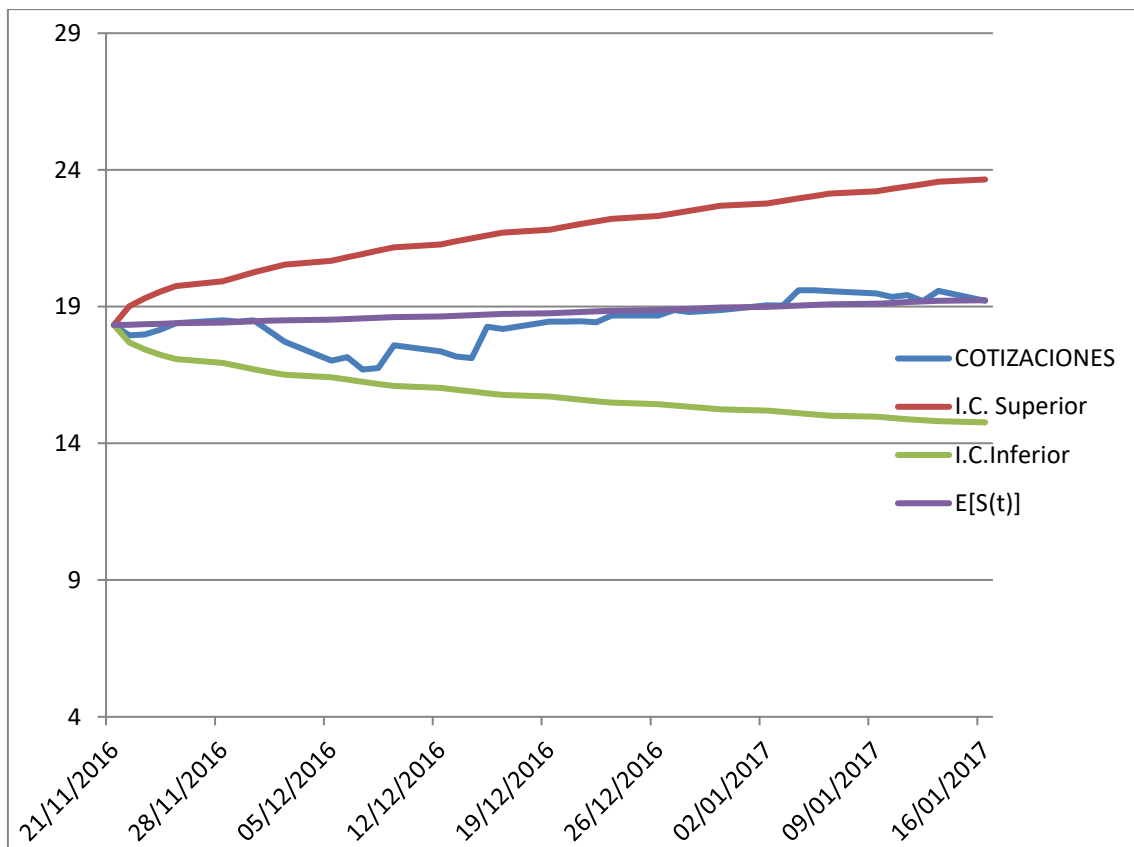


Gráfico 4.2.2. I.C (95%) para la acción Grifols vía la calibración de parámetros mediante el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia.

4.3 Predicciones del Modelo Log-Normal

Los modelos económicos se usan comúnmente no solo para explicar cómo opera la economía o parte de ella, sino también para realizar predicciones sobre el comportamiento de los hechos y determinar los efectos o tomar decisiones sobre los mismos. Uno de los objetivos perseguidos, con la utilización de un modelo económico,

es el poder hacer predicciones de los valores de una variable objetivo. En este trabajo dicha variable es el valor de una acción de Grifols en el período 21 de diciembre de 2016 hasta el 16 de enero de 2017 cotizada en la Bolsa de Madrid. El modelo ajustado debe permitir predecir el valor medio (estimación puntual) de dicha variable, y encontrar un intervalo que, con una probabilidad determinada, contenga el valor real de la misma (estimación por intervalos de confianza).

En este apartado se realiza, para el modelo teórico Log-Normal, las predicciones puntuales y por intervalos de confianza del 95%. Estas predicciones atenderán al valor de la acción de Grifols los cinco días posteriores al periodo estudiado, es decir, desde el día 17 de enero de 2017 hasta el 23 de enero de 2017.

4.3.1. Predicciones de la acción Grifols por el Método de los Momentos

Estas predicciones se llevan a cabo mediante la aplicación del modelo teórico Log-Normal y los resultados obtenidos se recogen en la Tabla 4.3.1.

	17/01/2017	18/01/2017	19/01/2017	20/01/2017	23/01/2017
Valor real	19.075	18.966	19.962	19.309	19.194
Predicción	19,260	19,285	19,310	19,334	19,359
Desv.tip.	2,27	2,30	2,33	2,36	2,39
I.C Superior	23,716	23,801	23,885	23,969	24,053
I.C Inferior	14,804	14,769	14,734	14,699	14,665

Tabla 4.3.1. Cálculo de predicciones puntuales y por I.C. de la acción Grifols vía la calibración de parámetros mediante el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

El S_0 empleado para el cálculo de las predicciones se corresponde con el valor de la acción en $t = 0$, el dato inicial de la muestra observada. Para el cálculo de las predicciones también se han vuelto a emplear los parámetros que ya se estimaron anteriormente mediante el método de los momentos:

$$\mu = 0,33845, \quad \sigma = 0,2934824.$$

El resultado obtenido en la predicción puntual es el que se muestra en la segunda fila de la Tabla 4.3.1., las predicciones por intervalos son las que figuran en las dos últimas filas

de dicha tabla. En el apartado 4.2.1. ya se hizo una descripción detallada de los pasos a seguir para el cálculo de las predicciones, por lo que evitamos repetir la explicación de nuevo.

4.3.2 Predicciones por el método de máxima verosimilitud

Al haber quedado también validado el modelo por la calibración de los parámetros mediante el método de máxima verosimilitud, se realizarán las predicciones teniendo en cuenta dichos resultados. Estas predicciones se llevan a cabo mediante la aplicación del modelo teórico Log- Normal (véase Tabla 4.3.2.) utilizando los parámetros estimados mediante el método de máxima verosimilitud.

El S_0 empleado para el cálculo de las predicciones se corresponde con el valor de la acción en $t = 0$, el dato inicial de la muestra observada. Los parámetros utilizados han sido:

$$\mu = 0,3379153, \quad \sigma = 0,293082.$$

	17/01/2017	18/01/2017	19/01/2017	20/01/2017	23/01/2017
Valor real	19.075	18.966	19.962	19.309	19.194
Predicción	19,259	19,283	19,308	19,332	19,357
Desv.tip.	2,27	2,30	2,33	2,36	2,39
I.C Superior	23,708	23,793	23,877	23,961	24,044
I.C Inferior	14,809	14,774	14,739	14,704	14,670

Tabla 4.3.2. Cálculo de predicciones puntuales y por I.C. de la acción Grifols vía la calibración de parámetros mediante el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia. (Excel®)

Recuérdese que en el Apartado 4.2.1 ya se hizo una descripción detallada de los pasos a seguir para el cálculo de las predicciones y por ello ahora no incidimos de nuevo.

La Tabla 4.3.2. muestra la comparación entre las predicciones obtenidas por el modelo Log-Normal con calibración de sus parámetros usando el método de máxima verosimilitud y los valores reales que tomó la acción en el período desde el martes 17 de enero al lunes 23 de enero del 2017.

5. CONCLUSIONES FINALES

He realizado este trabajo final de grado para ampliar los conocimientos, el desarrollo y aplicación del Modelo Log-Normal, para la realización de una modelización de activos cotizados mediante modelos de difusión estocásticos de tipo Itô. Después de realizar un breve estudio sobre las empresas las cuales cotizan en el IBEX-35 me decanté por la empresa Grifols cotizada en la bolsa española. El motivo principal por el que escogí dicha empresa es por su gran labor, la misión y visión que tienen y aparte de todo esto, también quiero remarcar que a pesar de ser una empresa que no es tan conocida como el resto de empresas que cotizan en el IBEX-35, tiene un gran peso.

El modelo estocástico ha sido aplicado a una acción de Grifols cotizada en el IBEX -35 en el periodo desde el 21 de noviembre de 2016 hasta el 16 de enero de 2017.

Para la realización del trabajo, se han tenido que ampliar los conocimientos adquiridos en el Grado de Administración y Dirección de Empresas. El presente trabajo tiene una especial relación con las siguientes asignaturas del grado: Introducción a las Finanzas, Introducción a la Estadística, Métodos Estadísticos en Economía, Economía Financiera, Matemáticas Financieras y Econometría.

En el Capítulo 1 se ha realizado una explicación sobre la bolsa y las consecuencias que puede tener en la economía de un país. Se ha basado un mercado financiero, concretamente en el IBEX-35. Y también se ha hecho un resumen de la historia y de los datos más relevantes de la empresa en estudio (Grifols).

En el Capítulo 2 se han explicado las herramientas estocásticas que vamos a utilizar para la realización del cálculo del Modelo Log-Normal y sus principales propiedades estadísticas. El Capítulo 3 nos hemos basado en el estudio, desarrollo y proceso de validación del modelo estocástico Log-Normal desde un punto de vista teórico. Este estudio incluye una introducción del Cálculo Estocástico de Itô que es imprescindible para la resolución teórica del modelo y el cálculo de sus principales funciones estadísticas, las cuales son requeridas para la puesta en práctica del modelo en el análisis del activo financiero seleccionado.

En el Capítulo 4 se ha puesto en práctica el Modelo Log-Normal con objeto de modelizar la acción de Grifols en el período seleccionado. Para la construcción del modelo se ha requerido estimar los parámetros del Modelo Log- Normal. Para dicha estimación se han empleado dos métodos diferentes, para mostrar la robustez de las estimaciones: el método de los momentos y el método de máxima verosimilitud. Una vez estimado el modelo por los dos métodos se ha validado el modelo, para lo que se han calculado las estimaciones tanto puntuales como por intervalos de confianza al 95% para los datos del período seleccionado, que comprende del 21 de noviembre de 2016 al 16 de enero de 2017, y se han empleado medidas estadísticas de bondad de ajuste, como el MAPE y el RSME, mediante las cuales ha quedado demostrada la buena calidad del modelo. En base a la validación del modelo, se han realizado predicciones puntuales y por intervalos de confianza de la acción durante un período posterior al seleccionado, concretamente desde el 17 de enero al 23 de enero del 2017.

De lo que podemos concluir que los resultados obtenidos mediante la validación del modelo son consistentes y, en nuestro caso de estudio, notablemente precisos.

6. BIBLIOGRAFÍA

Libros:

ALLEN, E. (2007) *Modelling With Itô Stochastic Differential Equations*. Springer, Series Mathematical Modelling: Theory and Applications.

BAXTER, M.; REMIE, A. (2012) *Financial Calculus: An Introduction to Derivate Pricing*. Cambridge Univ. Press, 20th Edition.

BENTH, F.E.; KHOLODNYI, V.; LAURENCE, P. (Ed. 2014) *Quantitative Energy Finance: Modeling, Pricing and Hedging in Energy and Commodity Markets*. Springer, Science+Business. Media B.V.

HULL, J.C. (2002) *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*. Pearson Education, 4^º Edición.

KIYOSHI, I. (1944) *Stochastic Integral*. Tokyo. Proc. Imperial Acad.

KIYOSHI, I. (1961) *Lectures on Stochastic Processes*. Bombay. Tata Institute.

KLEBANER, F. C. (2011) *Introduction to Stochastic Calculus With Applications to Finance*. Imperial College Press.

LAMBERTON, D.; LAPEYRE, B. (1996) *Introduction to Stochastic Calculus to Finance*. Chapman & Hall/CRC.

ØKSEND AHL, B. (1980) *Stochastic Differential Equations*. Nueva York. Springer.

ØKSEND AHL, B. (1998) *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer.

ROLL, R. (1970) *The Behavior of Interest Rates: The Application of the Efficient Market Model to U.S. Treasury Bills*. New York. Basic Books.

Páginas web:

Empresa Grifols www.grifols.com (fecha del último acceso: 26/11/2017).

Memoria Anual de Grifols 2016 www.grifols.com (fecha del último acceso: 26/11/2017).

Bolsa de Madrid www.bolsademadrid.es (fecha del último acceso: 26/11/2017).

Página web de Yahoo www.yahoo.com (*fecha del último acceso: 26/11/2017*).

Periódico expansión www.expansion.com (*fecha del último acceso: 26/11/2017*).