Integración triple
Cambio de variables

Apellidos, nombre	Thome Coppo, Néstor
	njthome@mat.upv.es
Departamento	Matemática Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior de
	Ingenieros de Telecomunicación

1. Resumen de las ideas clave

En este artículo se va a presentar la resolución completa de un problema tipo del tema de **integración triple**. Se introducen comentarios, cuestiones, observaciones, el análisis previo a la resolución, gráficas, etc. para que la resolución del problema sea interactiva como si se estuviese oyendo la explicación de clase y trabajando en ese momento las propuestas que allí se realizan. Este artículo está estructurado como sigue:

Contenido de este artículo
2. Introducción.
3. Objetivos.
4. Desarrollo.
5. Cierre.

Cuadro 1: Contenido de este artículo

2. Introducción

Es conocido que hay tres procedimientos que generalmente se utilizan para resolver una **integral triple**. Uno de ellos es:

- Resolver la integral directamente en coordenadas cartesianas.

Se utilizará siempre que la integral planteada tenga un integrando sencillo para el cual poder hallar una primitiva y, además, que la región de integración no provoque dificultades para calcular las integrales iteradas.

Otro procedimiento es:

- Resolver la integral en coordenadas cilíndricas.

Se utilizará cuando el integrando posea una función que contiene la expresión $x^2 + y^2$ y/o si la geometría de la región de integración proyectada sobre el plano XY permite ser interpretada como un sector circular (truncado).

Un tercer procedimiento es:

- Resolver la integral en coordenadas esféricas.

Se utilizará cuando el integrando posea una función que contenga expresiones del tipo $x^2 + y^2$ ó $x^2 + y^2 + z^2$ y/o si la geometría de la región de integración contiene gráficas de superficies que en coordenadas esféricas presetan una ecuación sencilla comparada con su ecuación en coordenadas cartesianas, como por ejemplo esferas, cilindros, conos, etc.

El objetivo de este artículo es profundizar en estos últimos dos casos. Si bien, presentar sólo estas técnicas corresponde a una simplificación del tema (pues hay otros muchos cambios posibles), son las que más ayudarán a resolver la mayoría de las integrales que posteriormente se necesitarán en la Ingeniería.

En el cuadro de la Figura 1 se puede observar un esquema básico de lo expuesto anteriormente, que puede ayudar a la hora de abordar la resolución de una integral triple.

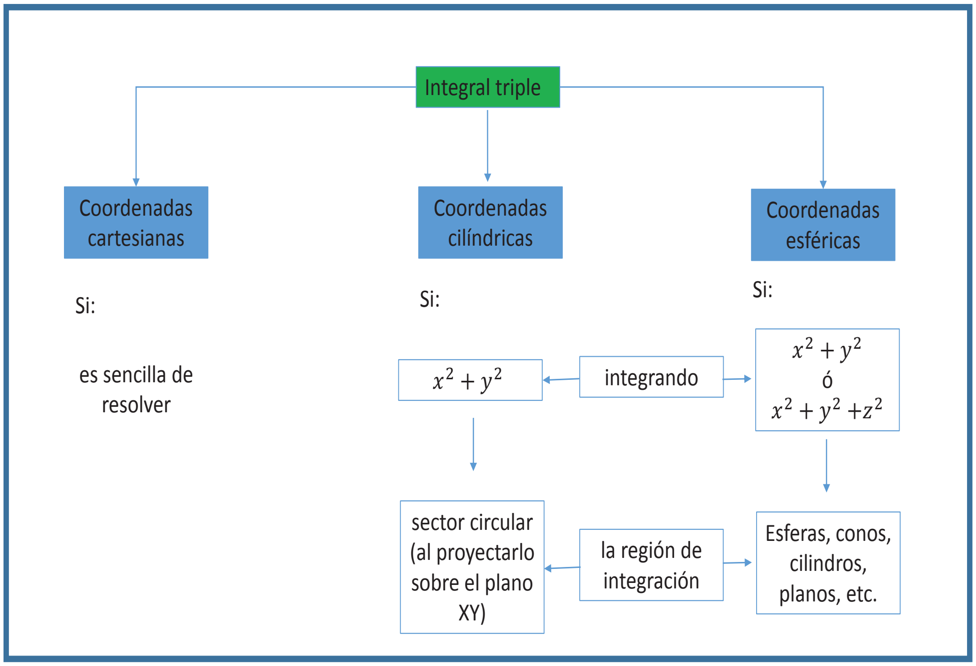

Figura 1: Esquema general para la resolución de una integral triple

3. Objetivos

Una vez que el alumno lea con detenimiento este documento, será capaz de:

- Realizar el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas de las ecuaciones que definen tanto las superficies que delimitan la región espacial de integración como las funciones utilizadas en los integrandos.
- Realizar el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas de las ecuaciones que definen tanto las superficies que delimitan la región espacial de integración como las funciones utilizadas en los integrandos.
- Resolver adecuadamente diferentes integrales triples en las cuales deba realizar el cambio a coordenadas cilíndricas o esféricas para obtener una integral más sencilla de tratar.
- Utilizar integrales triples en coordenadas cilíndricas o esféricas para su aplicación al cálculo de volúmenes de sólidos tridimensionales, centros de gravedad, etc.

A lo largo del documento el alumno verá que se van planteando algunas cuestiones. Sería interesante que se detuviese a reflexionar sobre las mismas antes de leer la respuesta.

4. Desarrollo

Es conocido que si se tiene que resolver una integral triple definida sobre un paralelepípedo (con lados paralelos a los planos coordenados), sus extremos serán constantes, es decir, será una integral del tipo

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$$

Por lo tanto, será muy sencilla de resolver siempre que sea posible hallar una primitiva del integrando mediante métodos conocidos.

Sin embargo,
¿qué ocurre si la región de integración es, por ejemplo, un cilindro truncado de ecuación $x^2+y^2 \leq 1$ junto a $0 \leq z \leq 1$? En este caso, se debería resolver la integral

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x},$$

que, en coordenadas cartesianas, es bastante problable que sea más complicada o imposible de resolver. Para ello, nos ayudaremos de los cambios de variable.

En este punto sería recomendable repasar el Apartado 2.2.4 titulado Cambio de variable y los subapartados titulados Coordenadas cilíndricas y Coordenadas esféricas, del libro de teoría [1] citado en la Bibliografía.

Puedes practicar a realizar **cambios de coordenadas cartesianas a cilíndricas y viceversa** entrando al objeto de aprendizaje[1] indicado en la Página Web [3] citada en la Bibliografía. Si entras al objeto de aprendizaje indicado en la Página Web [4] citado en la Bibliografía podrás realizar **cambios de coordenadas cartesianas a esféricas y viceversa**.
Algunos ejemplos de **cálculos de volumen** los puedes consultar entrando al objeto de aprendizaje indicado en la Página Web [2].

Ahora se va proceder al desarrollo de un ejemplo con su resolución completa y una serie de comentarios que permitirán comprender los entresijos que suelen encontrarse a la hora de resolver una integral con esta problemática. Se resolverá aplicando todos los métodos desarrollados en clase de modo que se puedan comparar y apreciar las semejanzas y diferencias entre cada uno de los métodos.

[1] Para visualizar los objetos de aprendizaje debes copiar el enlace correspondiente y pegarlo en un buscador.

4.1. Ejemplo motivador resuelto

Ejemplo 1 *Se considera la siguiente integral:*

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Se pide responder:

(a) ¿Es posible resolver la integral en coordenadas cartesianas mediante métodos sencillos?

(b) ¿Es posible resolver la integral mediante un cambio a coordenadas cilíndricas?

(c) ¿Es posible resolver la integral mediante un cambio a coordenadas esféricas?

Análisis previo a la solución: Para comenzar, nos planteamos y resolveremos las siguientes cuestiones.

Cuestiones:

(1) ¿Es sencillo encontrar una primitiva de la función para resolver la integral interior con respecto a la variable z?

(2) ¿Es posible, a partir de la integral dada, realizar la gráfica de la región de integración en $\mathbb{R}^3$?

(3) ¿Es importante el orden en que se presentan los extremos de integración?

(4) ¿Es posible aplicar el Teorema de Fubini para resolver la integral en coordenadas cartesianas?

(5) ¿Se está calculando el volumen de algún sólido mediante esta integral?

Respondamos a cada una de estas cuestiones.

(1) **SI**. Al observar el integrando

$$f(x, y, z) = 1,$$

rápidamente se ve que el cálculo de una primitiva de la función para resolver la integral interior con respecto a la variable z es sencillo, de hecho es z. Hasta este punto parece razonable intentar resolver la integral en coordenadas cartesianas.

(2) **SI**. Siempre es posible realizar la gráfica de la región de integración a partir de una integral planteada.

(3) **SI**. Es claramente decisivo el orden en que se presentan los extremos de integración. De hecho, en este caso la integral que se encuentra más afuera debe ser integrada con respecto a y, la intermedia con respecto a x y la interna, y primera en ser resuelta, debe ser integrada con respecto a z.

(4) **SI**. Es posible aplicar el Teorema de Fubini por ser, tanto $f(x, y, z)$ como los extremos de integración, funciones continuas.

(5) **SI**. Puesto que el integrando es $f(x, y, z) = 1$, el resultado obtenido corresponde al volumen delimitado por la región de integración. En este punto puede resultar interesante repasar las **aplicaciones de integración triple** del libro de teoría [1] citado en la Bibliografía, sobre todo, en este caso, los correspondientes a las páginas 86 y 87.

Resolución:
Ahora que hemos aclarado estos puntos, vamos a resolver cada uno de los apartados del ejemplo.

(a) Teniendo en cuenta el Teorema de Fubini procederemos resolviendo desde dentro hacia afuera como sigue:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} [z]_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \left[\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

En este punto vemos que la raíz cuadrada no facilitará los cálculos posteriores y el método no es el más conveniente para continuar. Esto nos hace plantear el hecho de que un cambio de coordenadas adecuado puede ayudar. Antes de realizar el dibujo, ¿se te ocurre algún cambio posible? ¿Podríamos pensar en realizar el cambio a coordenadas polares?

(b) En este apartado se resolverá la integral en coordenadas cilíndricas.

Paso 1 Nos puede ayudar la realización de una **gráfica de la región de integración** para ver el aspecto que presenta.

Se recuerda que la relación entre las coordenadas cartesianas (x, y, z) y las **coordenadas cilíndricas** (r, θ, z) viene dada por:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\cos(\theta) \\ y &=& r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z &=& z \end{array}\right.$$

Claramente, para la integral externa se tiene que la variable y varía entre las rectas $y = -1$ e $y = 1$. Posteriormente, en la integral intermedia, la variable x cumple que $x \geq 0$ y $x \leq \sqrt{1-y^2}$. Reordenando esta última fórmula se llega a $x^2 + y^2 \leq 1$, que corresponde, en el plano XY, al interior del círculo de centro en el origen y radio 1. Teniendo en cuenta la limitación de x, se observa que se trata sólo del semicírculo con centro en el origen y de radio 1 que se halla en el cuarto y en el primer cuadrantes. Finalmente, para la integral interna, la variable z varía entre el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Coloquialmente diríamos que se trata de la región espacial que se halla por debajo de "medio" cono y por arriba de "medio" paraboloide. Si miramos esta región proyectada sobre el plano XY, se tratará del semicírculo con centro en el origen y de radio 1, indicado anteriormente. Puedes puedes observar estos razonamientos en la gráfica de la Figura 2.

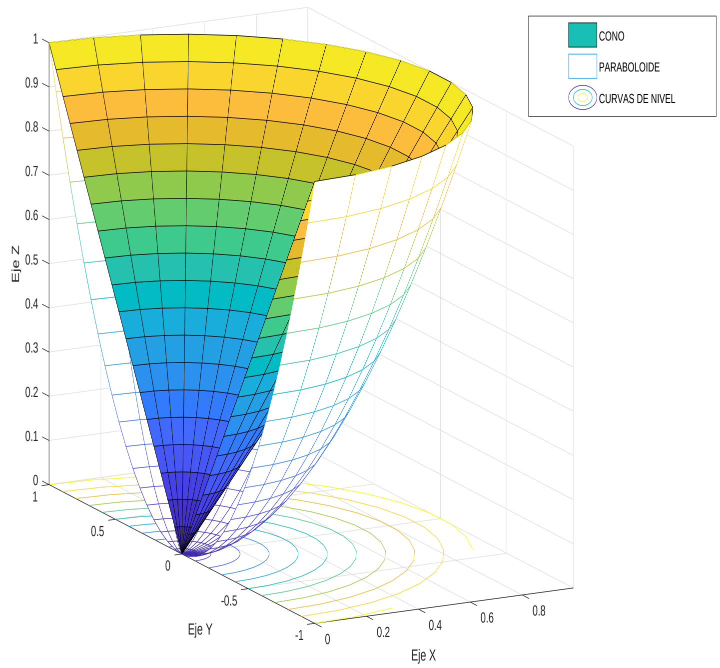

Figura 2: Región de integración

Paso 2 Para plantear la integral en coordenadas cilíndricas se debe **proyectar el sólido sobre el plano** XY y observar la variación del ángulo y del radio como si se tratase de las coordenadas polares, ahora en 2 dimensiones. Claramente se observa que el ángulo cumple $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (¿Por qué el ángulo comienza con un valor negativo? ¿Podría realizarse con valores de ángulos positivos?) y el radio $0 \leq r \leq 1$. Para cada uno de los puntos pertenecientes a esta región plana (es decir, a este semicírculo), la variación de z (evidentemente, en la gráfica debemos observar esta variación moviéndonos en la dirección del eje Z) se realiza desde el paraboloide hasta el cono. Es decir, expresadas en coordenadas cilíndircas desde $z = x^2 + y^2 = r^2$ hasta $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$.

Paso 3 **Resolver** la nueva integral. Recordando que el jacobiando al realizar el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas es r se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1}\int_{r^2}^{r} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1} r[z]_{r^2}^{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1} r[r-r^2]\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right] \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

(c) Se recuerda que la relación entre las coordenadas cartesianas (x, y, z) y las **coordenadas esféricas** (ρ, θ, φ) viene dada por:

$$\begin{cases} x &= \rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z &= \rho\cos(\varphi) \end{cases}$$

Para plantear la integral en coordenadas esféricas, lo primero que se debe hacer es analizar la variación del ángulo θ, que tiene la misma representación en los 3 tipos de coordenadas (polares, cilíndricas y esféricas). Es claro, en este caso, como antes, se tiene que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Ahora se debe observar la variación del ángulo φ. Se recuerda que este ángulo toma el valor $\varphi = 0$ cuando el punto se halla sobre el eje Z positivo y aumenta de valor al ir bajando, hasta alcanzar su máximo valor posible que corresponde a $\varphi = \pi$ cuando el punto se encuentra en el eje Z negativo. Claramente, en este ejemplo, se tiene que $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ puesto que φ comienza su variación en el cono y llega hasta el plano XY para abarcar todo el paraboloide. Se podría tomar el punto $(0, 1, 1)$ que satisface la ecuación del cono (¿Por qué?) y, utilizando trigonometría en un triángulo rectángulo con dos lados que miden 1, se deduce a que la variación comienza en $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Falta encontrar la variación de ρ. Se recuerda que gráficamente ρ representa la distancia de un punto del sólido al origen. Del dibujo se observa que debe comenzar en $\rho = 0$ y llegar hasta el paraboliode, con lo cual de su ecuación expresada en coordenadas esféricas se debe extraer la variación de ρ. En efecto,

$$\rho\cos(\varphi) = z = x^2 + y^2 = [\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta)]^2 + [\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta)]^2 = \rho^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi).$$

Despejando se llega a $\rho = \frac{\cos(\varphi)}{\mathrm{sen}^2(\varphi)}$.

Recordando que el jacobiando al realizar el cambio de ccoordenadas cartesianas a coordenadas esféricas es $\rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\cos(\varphi)}{\operatorname{sen}^2(\varphi)}} \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\frac{\cos(\varphi)}{\operatorname{sen}^2(\varphi)}} \operatorname{sen}(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(\varphi)}{\operatorname{sen}^5(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\right]\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(\varphi)}{\operatorname{sen}^5(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\right] \\
&= \frac{\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(\varphi)}{\operatorname{sen}^5(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}$$

Hemos llegado a una integral trigonométrica, racional en seno y en coseno y ambas funciones trigonométricas figuran con exponente impar. Se puede realizar el cambio de variable $u = \operatorname{sen}(\varphi)$, con lo que $\mathrm{d}u = \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ y
$\cos(\varphi) = (1-\operatorname{sen}^2(\varphi))^{1/2} = (1-u^2)^{1/2}$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(\varphi)}{\operatorname{sen}^5(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\pi}{3}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{(1-u^2)^{3/2}}{u^5(1-u^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{3}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} [u^{-5}-u^{-3}]\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

¿El valor de esta integral podría haber dado un resultado negativo? **NO**. Intenta justificar la respuesta teniendo en cuenta las propiedades de la integral.

4.2. Actividades

Ejercicio 2 *Realizar el cambio en el orden de integración en la siguiente integral*

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ordenando los diferenciales $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *y también* $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Respuesta:

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Ejercicio 3 *Evaluar la siguiente integral*

$$\iiint_Q \sqrt{3x^2+3z^2}dV$$

siendo Q *el sólido acotado por* $y = 2x^2 + 2z^2$ *y el plano* $y = 8$.

Respuesta: $256\pi\sqrt{3}/15$.

Ejercicio 4 *Calcular el volumen del sólido limitado por:*

$$x^2+y^2+z^2 \le 4, \qquad z^2 \ge x^2+y^2, \qquad z \ge 1.$$

Respuesta: $\frac{\pi}{3}[15 - 8\sqrt{2}]$.

Ahora: ¡Manos a la obra! Ya puedes resolver los Ejercicios planteados en el libro de teoría indicado en la Bibliografía.

5. Cierre

En este artículo el alumno dispone de la resolución completa de un ejemplo motivador que es un ejemplos clásico que se presenta como aplicación en la teoría de integración triple, resuelto mediante todos los métodos. Ahora, valiéndose de estos ejemplos completamente desarrollados, podrá realizar los ejercicios propuestos en el libro de teoría.

6. Bibliografía

7. Libros

[1] N. Thome: Teoría y Problemas de Análisis Vectorial, Ed. Universidad Politécnica de Valencia, Ref. 2008.299, ISBN: 978-84-8363-229-1.

8. Referencias de fuentes electrónicas

[2] https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/volumen_aprox/

[3] https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/carte_cilindricas/

[4] https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/carte_esfericas/