SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN N.° 54
FEBRERO DE 2000

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis - 28917 B° de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 - Fax: (91) 611 59 88

La portada de este número reproduce una fotografía del profesor D. Pedro Puig Adam (1900-1960), de quien toma el nombre nuestra Sociedad y en conmemoración del centenario de su nacimiento.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

Información a través de Internet:
http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

ÍNDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS	(Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ	(Castilla-León)
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES	(Castilla-La Mancha)

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO	(Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:

MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

Adjunta a la presidencia:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria del 2000

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2000 para el sábado día 29 de abril del 2000, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

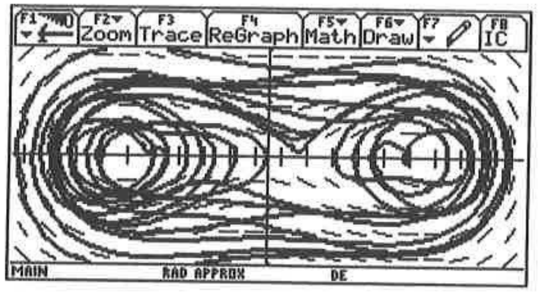

Figure 18: *Chaotic oscillation of a rotational pendulum*

Simulating the motion of the rotational pendulum the steady state of the oscillations encounters after a while. The transient periods are suppressed in the phase portraits of different oscillations which are diplayed in fig.15 to 18. When the current through the the damping magnet is varied then different oscillations appear. The first three figures 15 to 15 demonstrates the bifurcation scenario for varying the damping of the system. In fig.18 the phase portrait of a chaotic oscillation.

4 Conclusion

I tried to give an idea what can be done with the differential equation solvers, DeSolve() and the numeric solver of the TI calculators. The introduction of a CAS in schools gives the chance to add new topics to the classical curriculum in mathematics and physics because students spend less time on numerical work. It is now possible to observe real world processes by using modern technology and to simulate these processes by solving differential equations during mathematics and/or physics lessons. And it's higly rewarding!

References

[1] Karl-Heinz Keunecke: *Differentialgleichungen im Physikunterricht, Praxis der Naturwissenschaften 5/44 p. 5-9, 1995*

[2] *Das TI-92 Plus Modul, p. 54-57, Texas Instruments Incorporated, 1998*

[3] Roman Worg: *Deterministisches Chaos, Wege in die nichtlineare Dynamik, p. 48, BI-Wissenschaftverlag, 1993*

[4] John Gastineau, Kenneth Appel et al.: *Physics with CBL, Vernier Software, 1998*

[5] Karl-Heinz Keunecke: *Computerunterstützter Physikunterricht, Experimente zur Mechanik, Lehrerhandreichung published by Texas Instruments Germany, 1998*

Algunas representaciones radicales infinitas de los números naturales

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Bonifacio Sotos
Casas Ibáñez (ALBACETE)

Abstract

This article shows how infinite radical representations of all positive integers are obtained by means of recurrent sequences generated from algebraic identities.

1 Representación a través de raíces cuadradas

Recientemente en [1], y por un método distinto al usual (concretamente a través de métodos geométricos sobre polígonos regulares) hemos demostrado la conocida igualdad

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots}}}$$

la cual esencialmente llama nuestra atención por aportar una curiosa expresión de un número natural mediante infinitos radicales. El objetivo de este artículo es dar un sencillo modelo de trabajo para generar representaciones de todos los números enteros positivos mediante infinitos radicales de índice arbitrario. Para ello partiremos de la identidad algebraica

$$n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)} \qquad (1)$$

Llamando $\alpha_n = n(n+2)$, (1) puede reescribirse como

$$\alpha_n = n\sqrt{1 + \alpha_{n+1}}$$

y aplicando sucesivamente esta fórmula recurrente tenemos

$$\alpha_n = n\sqrt{1+\alpha_{n+1}} = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+\alpha_{n+2}}}$$

$$= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+\alpha_{n+3}}}} = \ldots$$

esto es

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_n &=& n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+\ldots}}}} \\ \alpha_n &=& n(n+2) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Haciendo $n = 1$ en esta última expresión obtenemos una curiosa representación radical infinita (R.R.I.) del número 3

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} \qquad (3)$$

Tomando $n = 2, 3, \ldots$ se obtienen R.R.I. de los números $8, 15, \ldots$

$$\begin{array}{rcl} 8 &=& 2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}} \\ 15 &=& 3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\ldots}}} \end{array} \qquad (4)$$

las cuales en realidad se deducen implícitamente de (3).

Justifiquemos formalmente el paso al límite que hemos dado en la expresión (3). De (3) conjeturamos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}} = 3$$

Para probar que la sucesión

$$\tilde{\alpha}_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$$

converge a 3 cuando $n \to \infty$ probaremos que existen dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{A_n\}$ tales que

$$a_n \leq \tilde{\alpha}_n \leq A_n \quad y \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n = 3$$

De la cadena de identidades

$$3 = \sqrt{1+2\cdot 4} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\cdot 6}}} = \ldots \qquad (5)$$

se conjetura que

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}}} \quad \forall n \geq 2$$

cuya demostración por inducción es sencilla pues se verifica

$$(n+2)^2 = 1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}$$

Eligiendo

$$A_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}}}$$

se tiene $\tilde{\alpha}_n \leq A_n$ pues $n+2 > 1$ para todo n natural, y $\{A_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$, al ser $\{A_n\}$ la sucesión constante e igual a 3. Para encontrar $\{a_n\}$ utilizaremos la siguiente desigualdad cuya demostración es inmediata

$$\sqrt{1+xm} < \sqrt{m}\sqrt{1+x} \quad \forall m > 1\,, \quad \forall x > 1 \qquad (6)$$

aplicada $n-1$ veces sobre la sucesión $\{A_n\}$, de dentro hacia fuera, tomando primero $m_1 = \sqrt{(n+2)^2} = n+2 > 1$ y $x_1 = n > 1$, así

$$A_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}} \leq$$

$$\leq \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+2}\sqrt{1+n}}}}} \leq$$

volvemos a aplicar (6) de dentro hacia fuera tomando ahora $m_2 = \sqrt{n+2} > 1$ y $x_2 = (n-1)\sqrt{1+n} > 1$

$$\leq \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-2)\sqrt[4]{n+2}\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}}$$

llegando finalmente

$$A_n \leq \sqrt[2^{n-1}]{n+2}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}} = \sqrt[2^{n-1}]{n+2}\,\tilde{\alpha}_n$$

Denotando por

$$a_n = \frac{A_n}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}}$$

se tiene $a_n \leq \tilde{\alpha}_n$ y obsérvese que $\{a_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$, pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}} = 1$$

para ver esto basta tomar logaritmos y usar la regla de L'Hôpital

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}} = \lim_{n\to\infty} (n+2)^{\frac{-1}{2^{n-1}}}$$

$$\ln L = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{2^{n-1}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)2^{n-1}\ln 2} = 0 \quad \Rightarrow L = 1$$

Mediante (2) sólo tenemos R.R.I. de "algunos" naturales (los pertenecientes a la sucesión n^2+2n). Con objeto de obtener dichas R.R.I. para cualquier natural observemos que si partimos de la identidad

$$n(n+3) = n\sqrt{(5+n)+(n+1)(n+4)}$$

razonando como antes tenemos

$$\left.\begin{array}{lcl} \beta_n & = & n\sqrt{(5+n)+(n+1)\sqrt{(6+n)+(n+2)\sqrt{(7+n)+\cdots}}} \\ \beta_n & = & n(n+3) \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Así, poniendo $n = 1$ en (7)

$$4 = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+\cdots}}} \qquad (8)$$

Nótese que de (4) y (8) tenemos dos R.R.I. distintas del número 4. En realidad, para cualquier natural existen infinitas R.R.I.
Usando un razonamiento análogo al anterior, justificaremos el paso al límite efectuado en (8). A partir de (8) conjeturamos $\{\tilde{\beta}_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$ siendo

$$\tilde{\beta}_n = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+\cdots+(n-1)\sqrt{(n+4)+n}}}}$$

Para demostrar esto encontraremos dos sucesiones $\{b_n\}$ y $\{B_n\}$ tales que

$$b_n \leq \tilde{\beta}_n \leq B_n \quad y \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} B_n = 4$$

Por otra parte a partir de la cadena de igualdades

$$4 = \sqrt{6+2\cdot 5} = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\cdot 6}} = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\cdot 7}}} = \cdots \qquad (9)$$

conjeturamos

$$4 = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+\cdots\sqrt{(n+4)+n\sqrt{(n+3)^2}}}}} \quad \forall n \geq 2$$

que se prueba fácilmente por inducción pues

$$(n+3)^2 = (n+5)+(n+1)\sqrt{(n+4)^2}$$

Tomaremos

$$B_n = \sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + \cdots \sqrt{(n+4) + n\sqrt{(n+3)^2}}}}}$$

que cumple $\tilde{\beta}_n \leq B_n$ pues $n + 3 > 1$ para todo n natural y $\{B_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$, al ser $\{B_n\}$ la sucesión constantemente 4.
Para encontrar $\{b_n\}$ usaremos la siguiente desigualdad, cuya prueba es sencilla

$$\sqrt{x + my} < \sqrt{m}\sqrt{x + y} \quad \forall m > 1, \ \forall x, y > 1 \tag{10}$$

aplicada $n - 1$ veces sobre la sucesión $\{B_n\}$ de dentro hacia fuera, tomando primero $m_1 = \sqrt{(n+3)^2} = n + 3 > 1$, $x_1 = n + 4 > 1$ e $y_1 = n > 1$, resultando

$$B_n = \sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + \cdots \sqrt{(n+4) + n\sqrt{(n+3)^2}}}}} \leq$$

$$\leq \sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + \cdots \sqrt{(n+3) + (n-1)\sqrt{n+3}\sqrt{(n+4) + n}}}}} \leq$$

aplicamos de nuevo (10) de dentro hacia fuera tomando $m_2 = \sqrt{n+3} > 1$, $x_1 = n + 3 > 1$ e $y_2 = (n-1)\sqrt{(n+4) + n} > 1$, y continuamos con la cadena de desigualdades

$$\leq \sqrt{6 + 2\sqrt{7 + \cdots \sqrt{(n+2) + (n-2)\sqrt[4]{n+3}\sqrt{(n+3) + (n-1)\sqrt{(n+4) + n}}}}}$$

obteniendo al final

$$B_n \leq \sqrt[2^{n-1}]{n+3}\sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + \cdots (n-1)\sqrt{(n+4) + n}}}} = \sqrt[2^{n-1}]{n+3}\ \tilde{\beta}_n$$

Tomamos

$$b_n = \frac{B_n}{\sqrt[2^{n-1}]{n+3}}$$

y así se tiene $b_n \leq \tilde{\beta}_n$. Es fácil probar como en el caso anterior $\{b_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$.
En general, para $k \in N$ arbitrario, pero fijo se tiene

$$\left.\begin{array}{lcl} \gamma_n & = & n\sqrt{p_2(n) + (n+1)\sqrt{p_2(n+1) + (n+2)\sqrt{p_2(n+2) + \ldots}}} \\ \gamma_n & = & n(n+k) \\ p_2(m) & = & (k^2 - k - 1) + (k-2)m \ , \quad m \geq 1 \end{array}\right\} \tag{11}$$

Haciendo $n = 1$ en (11) se deduce una R.R.I. de cualquier natural mayor que 2

$$k + 1 = \sqrt{p_2(1) + 2\sqrt{p_2(2) + 3\sqrt{p_2(3) + \ldots}}}$$

$$p_2(m) = (k^2 - k - 1) + (k-2)m \ , \quad m \geq 1$$

2 Representación a través de raíces cúbicas

En este apartado aportaremos R.R.I. a través de raíces cúbicas, usando un razonamiento análogo al anteriror.
En esta ocasión partiremos de la identidad

$$n^2(n+2) = n^2\sqrt[3]{(5 + 5n + n^2) + (n+1)^2(n+3)}$$

Llamando $\delta_n = n^2(n+2)$, la igualdad anterior se puede expresar como

$$\delta_n = n^2\sqrt[3]{(5 + 5n + n^2) + \delta_{n+1}}$$

y razonando como antes

$$\delta_n = n^2\sqrt[3]{(5 + 5n + n^2) + (n+1)^2\sqrt[3]{[5 + 5(n+1) + (n+1)^2] + \ldots}}$$

Haciendo $n = 1$ en esta última expresión, obtenemos la siguiente R.R.I. del número 3

$$3 = \sqrt[3]{11 + 4\sqrt[3]{19 + 9\sqrt[3]{29 + 16\sqrt[3]{41 + \ldots}}}}$$

Para justificar el paso al límite efectuado implícitamente en la representación anterior, razonamos como en el primer apartado del trabajo.
A partir de las igualdades

$$3 = \sqrt[3]{11+4\cdot 4} = \sqrt[3]{11+4\sqrt[3]{19+9\cdot 5}} = \sqrt[3]{11+4\sqrt[3]{19+9\sqrt[3]{29+16\cdot 6}}} = \cdots \quad (12)$$

establecemos la identidad

$$3 = \sqrt[3]{11 + 4\sqrt[3]{19 + \cdots \sqrt[3]{(5+5(n-1)+(n-1)^2) + n^2\sqrt[3]{(n+2)^3}}}} \quad \forall n \geq 2$$

que puede probarse por inducción fácilmemte, ya que

$$(n+2)^3 = 5 + 5n + n^2 + (n+1)^2(n+3)$$

Ahora probaremos que la sucesión

$$\tilde{\gamma}_n = \sqrt[3]{11 + 4\sqrt[3]{19 + 9\sqrt[3]{29 + \cdots + (n-1)^2\sqrt[3]{(5+5(n-1)+(n-1)^2) + n^2}}}}$$

converge a 3 cuando $n \to \infty$ y para ello encontraremos dos sucesiones $\{c_n\}$ y $\{C_n\}$ tales que

$$c_n \leq \tilde{\gamma}_n \leq C_n \quad y \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} C_n = 3$$

Tomamos

$$C_n = \sqrt[3]{11 + 4\sqrt[3]{19 + 9\sqrt[3]{29 + \cdots \sqrt[3]{(5+5(n-1)+(n-1)^2) + n^2\sqrt[3]{(n+2)^3}}}}}$$

la cual cumple $\tilde{\gamma}_n \leq C_n$ y $\{C_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$.
Para determinar $\{c_n\}$ aplicaremos la siguiente desigualdad

$$\sqrt[3]{x+my} < \sqrt[3]{m}\sqrt[3]{x+y} \quad \forall m > 1, \forall x, y > 1 \quad (13)$$

sobre la sucesión $\{C_n\}$ de dentro hacia fuera. Razonando como en la sección anterior, pero tomando ahora en la primera aplicación de (13) $m_1 = n+2 > 1$,

$x_1 = 5 + 5(n-1) + (n-1)^2 > 1$, $y_1 = n^2 > 1$. En la segunda aplicación de (13) tomamos $m_2 = \sqrt[3]{n+2} > 1$, $x_2 = 5 + 5(n-2) + 5(n-2)^2 > 1$, $y_2 = (n-1)^2\sqrt[3]{(5+5(n-1)+(n-1)^2) + n^2} > 1$. Al cabo de $n-1$ aplicaciones de (13) sobre $\{C_n\}$ obtendremos

$$C_n \leq \sqrt[3^{n-1}]{n+2}\,\tilde{\gamma}_n$$

por lo que bastará tomar

$$c_n = \frac{C_n}{\sqrt[3^{n-1}]{n+2}}$$

que satisface las condiciones deseadas $c_n \leq \tilde{\gamma}_n$ y $\{c_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3^{n-1}]{n+2}}$$

En general, para $k \in N$ arbitrario, pero fijo se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_n & = n^2\sqrt[3]{p_3(n) + (n+1)^2\sqrt[3]{p_3(n+1) + (n+2)^2\sqrt[3]{p_3(n+2) + \ldots}}} \\ \xi_n & = n^2(n+k) \\ p_3(m) & = (k^3 - k - 1) + (3k^2 - 2k - 3)m + (2k-3)m^2\ , \quad m \geq 1 \end{array}\right\}$$

Tomando $n = 1$ se deduce una R.R.I. de cualquier natural mayor que 2

$$k + 1 = \sqrt[3]{p_3(1) + 2^2\sqrt[3]{p_3(2) + 3^2\sqrt[3]{p_3(3) + \ldots}}}$$

$$p_3(m) = (k^3 - k - 1) + (3k^2 - 2k - 3)m + (2k-3)m^2\ , \quad m \geq 1$$

3 Representación a través de raíces i-ésimas

Como se señaló al principio terminaremos el trabajo generalizando los resultados presentados en los apartados anteriores. Para ello consideraremos la identidad algebraica

$$n^{i-1}(n+2) = n^{i-1}\sqrt[i]{[(n+2)^i - (n+1)^{i-1}(n+3)] + (n+1)^{i-1}(n+3)}$$

siendo $i \in N$ arbitrario, pero fijo. Llamando $\varphi_n = n^{i-1}(n+2)$, la última igualdad se puede escribir

$$\varphi_n = n^{i-1}\sqrt[i]{f(n) + (n+1)^{i-1}\sqrt[i]{f(n+1) + (n+2)^{i-1}\sqrt[i]{f(n+2) + \ldots}}}$$

donde $f(n) = (n+2)^i - (n+1)^{i-1}(n+3)$. Haciendo $n = 1$, tenemos la siguiente R.R.I. general del número 3

$$3 = \sqrt[i]{(3^i - 2^{i-1} \cdot 4) + 2^{i-1}\sqrt[i]{(4^i - 3^{i-1} \cdot 5) + 3^{i-1}\sqrt[i]{(5^i - 4^{i-1} \cdot 6) + \ldots}}}$$

La justificación rigurosa del paso al límite efectuado en la representación anterior puede realizarse del mismo modo que se ha hecho en las secciones anteriores.

En general, fijando los índices $i, k \in N$ se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_n & = n^{i-1}\sqrt[i]{p_i(n) + (n+1)^{i-1}\sqrt[i]{p_i(n+1) + (n+2)^{i-1}\sqrt[i]{p_i(n+2) + \ldots}}} \\ \varphi_n & = n^{i-1}(n+k) \\ p_i(m) & = (m+k)^i - (m+1)^{i-1}(m+k+1)\ , \quad m \geq 1 \end{array}\right\}$$

Observemos para finalizar que los resultados aquí expuestos pueden extenderse sin pérdida de generalidad para los números reales.

Bibliografía

[1] CORTÉS LÓPEZ, J.C. Y ALEDO SÁNCHEZ J.A., **Cálculo geométrico del límite de ciertas sucesiones recurrentes**. Aparecerá en las IX J.A.E.M. (Lugo, septiembre 1999).

Iterando $4x(1-x)$ de forma exacta

Nicolás Rosillo Fernández

C.P.R. Valdepeñas
nrosillo@olmo.pntic.mec.es

Abstract

In this article it is shown what happens when a chaotic system (the logistic equation) is iterated in an exact form by a computer algebra system like DERIVE.

1. Introducción

El sistema dinámico discreto $f(x) = 4x(1-x)$ fue propuesto (May, 1976) como modelo de comportamiento de una población en un ecosistema. Dicho sistema está normalizado a la unidad, por lo que $0 \leq x \leq 1$.

Este sistema es caótico en el intervalo [0,1] (Devaney, 1989) y, por ser caótico, el sistema dinámico a estudio es sensible a las condiciones iniciales.

Esta propiedad indica que, partiendo de dos valores iniciales tan cercanos como se desee, las órbitas (el conjunto de resultados obtenidos a través de la iteración repetida de la función) de ambos difieren significativamente. Este hecho tiene una importancia capital en la dinámica caótica, ya que, en una situación real, cualquier error cometido al determinar los datos iniciales generará tal discrepancia entre los valores teóricos calculados para seguir la evolución del sistema y su comportamiento real que hará inútil toda predicción a largo plazo. Desde otro punto de vista, en los casos en que se conoce exactamente el valor inicial, pero se precisa un ordenador para el cálculo de las sucesivas imágenes, la situación es la misma, al introducirse en los cálculos los errores de redondeo (Romero, 1994).

2. Trabajando de forma exacta

Los comentarios anteriores surgen del mismo motivo: la introducción en los cálculos de los errores de redondeo. Dicha introducción puede producirse en dos momentos