UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

TESIS DOCTORAL

OPTIMIZACIÓN DEL PROBLEMA DE VALOR PROPIO INVERSO PARA MATRICES ESTRUCTURADAS

$$J_0 = \begin{bmatrix} O & I_k \\ -I_k & O \end{bmatrix}$$

$$\min_{A \in \mathcal{S}} \|B - A\|_F = \|B - \hat{A}\|_F$$

PRESENTADA POR
SILVIA VIVIANA GIGOLA

DIRECTORES
NÉSTOR THOME COPPO
LEILA LEBTAHI

VALENCIA, MAYO DE 2018

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Optimización del problema de valor propio inverso para matrices estructuradas

Mayo de 2018

Autor: Silvia Gigola

Directores: Dr. Néstor Thome Coppo

Dra. Leila Lebtahi

D. Néstor Thome Coppo, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València; y Dña. Leila Lebtahi, Profesora Ayudante Doctor del Departamento de Matemáticas de la Universitat de Valéncia

CERTIFICAN:

que la presente memoria *"Optimización del problema de valor propio inverso para matrices estructuradas"*, ha sido realizada bajo su dirección por Silvia Viviana Gigola, y constituye su tesis para optar al grado de Doctora por la Universitat Politècnica de València.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, se ratifican en la autorización de la presentación de la referida tesis doctoral ante la Comisión de Doctorado de la Universitat Politècnica de València, firmando el presente certificado.

Valencia, mayo de 2018.

Néstor Thome Coppo Leila Lebtahi

Dedicado a Franco, Lara y Lucca

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento a mis directores de tesis Leila Lebtahi y Néstor Thome Coppo. Gracias por la paciencia y comprensión sobre todo en los momentos difíciles que transité durante mi doctorado. Sin sus ánimos me hubiera sido imposible realizar esta tesis.

Gracias a mis amigas Ale, Cris, Lau, María Inés y Vero por estar siempre, apoyándome y dándome palabras de aliento para poder seguir.

Quiero darle las gracias a mis compañeros de trabajo sobre todo a Fer, Gra, Mir, Ro, Vero y Susi por el aguante diario.

También deseo expresar mi agradecimiento a la Universidad Politécnica de Valencia por permitirme realizar el doctorado a distancia.

Y por último agradezco a mi familia, especialmente a Patricio, mi gran amor.

Gracias, muchas gracias a todos!

Resumen

Un área importante de la Matemática Aplicada es el Análisis Matricial dado que muchos problemas pueden reformularse en términos de matrices y de esta manera facilitar su resolución. El problema de valor propio inverso consiste en la reconstrucción de una matriz a partir de datos espectrales dados. Este tipo de problemas se presenta en diferentes áreas de la ingeniería y surge en numerosas aplicaciones donde los parámetros de un sistema físico concreto son determinados a partir del conocimiento o del comportamiento dinámico esperado. En esta tesis se resuelve el problema de valor propio inverso para tres tipos específicos de matrices.

Los problemas de valores propios inversos han sido estudiados desde los puntos de vista teórico, numérico como también del de las aplicaciones. La lista de aplicaciones es muy variada. Entre las principales se pueden mencionar el diseño de control, la identificación de sistemas, el análisis y diseño de estructuras, los estudios geofísicos, la espectrospopía molecular, la teoría de circuitos, etc. Algunas de estas aplicaciones se describirán en el Capítulo 1 de esta tesis.

En varios casos, para que el problema de valor propio tenga sentido, es necesario imponer algunas condiciones adicionales sobre la matriz en cuestión, es decir,

la matriz deberá tener una estructura específica. En resumen, un problema de valor propio inverso adecuadamente planteado debe satisfacer dos restricciones: la referida a los datos espectrales y la restricción estructural deseable.

Dada una matriz X y una matriz diagonal D, se buscan soluciones de la ecuación $AX = XD$ siendo A una matriz con una determinada estructura y que posee un cierto espectro predefinido. A partir de estas restricciones sobre la matriz A surgen una variedad de problemas de valores propios inversos.

Por ejemplo, el problema de valor propio inverso para matrices centrosimétricas fue abordado por F. Zhou, X. Hu y L. Zhang en [49]. Usando la descomposición en valores singulares y la inversa de Moore-Penrose, hallaron condiciones para que el problema tuviese solución. Las matrices centrosimétricas tienen aplicaciones en teoría de la información y en teoría de sistemas lineales entre otras.

En el artículo [38] publicado en 2005, Z. Y. Peng estudió el problema de valor propio inverso para el caso en que A sea una matriz hermítica y antireflexiva con respecto a una matriz de reflexión generalizada. Cinco años más tarde, M. Liang y L. Dai hallaron en [32] condiciones para las cuales el problema de valores propios inversos a izquierda y a derecha para matrices reflexivas y antireflexivas generalizadas, tiene solución, dando también la expresión general de la solución. En el mismo año, L. Lebtahi y N. Thome resolvieron en [28] el problema para el caso de una matriz A que sea hermítica y reflexiva o antireflexiva con respecto a una matriz J que cumple las condiciones de ser tripotente y hermítica.

En el Capítulo 2 de esta memoria se extiende el último trabajo mencionado al caso de una matriz A que sea hermítica y reflexiva con respecto a una matriz J que es $\{k+1\}$-potente y normal. En el Teorema 2.2.1 se dan las condiciones bajo las cuales el problema tiene solución y se proporciona la forma explícita de la solución general. Además, en el caso de que el conjunto de soluciones del problema de valor propio inverso sea no vacío, se resuelve el problema de Procrustes asociado.

El problema de Procrustes, o de la mejor aproximación, asociado al problema de valor propio se puede describir sintéticamente de la siguiente manera: dada una matriz obtenida de forma experimental, el problema consiste en hallar una matriz del conjunto solución del problema (y, por tanto, con la estructura deseada), tal que sea la mejor aproximación a la matriz dato usando, generalmente, la norma de Frobenius.

Por otra parte, las matrices Hamiltonianas y antiHamiltonianas aparecen en la resolución de importantes problemas de la Teoría de Sistemas y Control. Surgen, por ejemplo, en control óptimo cuadrático lineal [34, 42], en el cálculo de la norma H_∞ de un sistema estable [50] y en la resolución de la ecuación algebraica de Riccati [27]. El problema de valor propio inverso para matrices hermíticas y Hamiltonianas generalizadas fue analizado por Z. Zhang, X. Hu y L. Zang en [48] y posteriormente fue considerado el caso de matrices hermíticas y antiHamiltonianas generalizadas por Z. Bai. En ambos casos no sólo se estudió el problema de valor propio inverso sino que también se resolvió el problema de hallar la mejor aproximación probando previamente que se obtiene solución única.

Una extensión de las matrices Hamiltonianas son las matrices J-Hamiltonianas definidas por primera vez en [14], y corresponde a una de las aportaciones originales que se realizan en esta memoria. En los Capítulos 3 y 4 de esta tesis se estudian el problema de valor propio inverso para matrices normales J-Hamiltonianas y para normales J-antiHamiltonianas, respectivamente. Para la resolución del caso de las matrices normales y J-Hamiltonianas se presentan cuatro métodos diferentes, analizando previamente la estructura de este tipo de matrices. Los dos primeros métodos son generales, dan condiciones para que el problema tenga solución y, entre las soluciones encontradas, se consideran las que son normales y J-Hamiltonianas. El tercer método queda formalizado en el Teorema 3.2.2 que proporciona las condiciones bajo las cuales el problema tiene solución y se presentan infinitas soluciones del mismo, pero con este método no es posible obtenerlas todas. Finalmente, el último método permite obtener la forma de todas las soluciones. El principal resultado se da en el Teorema 3.2.3. Una sección completa está dedicada a la resolución del problema de optimización de Procrustes asociado en el caso en que el problema admite solución. En este caso, el principal resultado se presenta en el Teorema 3.3.1.

A continuación se presenta, de forma sintetizada, la organización de esta tesis en sus cuatro capítulos.

El Capítulo 1 contiene una introducción al problema de valor propio inverso y al problema de Procrustes, y se describen algunos problemas estudiados en la literatura. También, se enumeran algunas definiciones, propiedades, lemas y teoremas utilizados a lo largo de la memoria.

En el Capítulo 2 se estudia el problema de valor propio inverso para una matriz hermítica y reflexiva con respecto a una matriz normal y $\{k+1\}$-potente, así como también el problema de optimización de Procrustes asociado. Además, se propone un algoritmo que resuelve el problema de Procrustes y se da un ejemplo que muestra el funcionamiento de dicho algoritmo.

El problema de valor propio inverso para una matriz normal y J-Hamiltoniana se resuelve en el Capítulo 3 usando distintos métodos y además se considera el problema de optimización de Procrustes asociado. Del mismo modo que en el Capítulo 2, se propone un algoritmo que sirve para calcular la solución del problema de optimización y se presentan algunos ejemplos que permiten mostrar el desempeño del mismo.

Finalmente, en el Capítulo 4, en base a los resultados obtenidos en el Capítulo 3, se aborda el problema de valor propio inverso para matrices J-antiHamiltonianas. Siguiendo la línea de los Capítulos 2 y 3, se presenta un algoritmo que resuelve el problema de Procrustes y se ilustra con ejemplos de aplicación de los resultados.

Las principales contribuciones obtenidas en esta tesis fueron publicadas en revistas científicas y presentadas en congresos. Se pueden ver en [13, 14, 15, 16, 17, 18].

Resum

Una àrea important de la Matemàtica és l'Anàlisi Matricial ja que molts problemes poden reformular-se en termes de matrius i d'aquesta manera facilitar la seua resolució.

El problema de valor propi invers consisteix en la reconstrucció d'una matriu a partir de dades espectrals donades. Aquest tipus de problemes es presenta a diferents àrees de l'enginyeria i sorgeix a nombroses aplicacions a on els paràmetres d'un sistema físic concret són determinats a partir del coneixement o del comportament dinàmic esperat.

A aquesta tesi es resol el problema de valor propi invers per a tres tipus específics de matrius.

Els problemes de valors propis inversos han estat estudiats des dels punts de vista teòric, numèric com també del de les aplicacions. La llista d'aplicacions és molt variada. Entre les principals s'hi poden esmentar el disseny de control, la identificació de sistemes, l'anàlisi i disseny d'estructures, els estudis geofísics, l'espectroscopia molecular, la teoria de circuits, etc. Algunes d'aquestes aplicacions es descriuran al Capítol 1 d'aquesta tesi.

En diversos casos, per tal de que el problema de valor propi tingui sentit, és necessari imposar algunes condicions addicionals sobre la matriu en qüestió, és a dir, la matriu haurà de tenir una estructura específica. En resum, un problema de valor propi invers adequadament plantejat ha de satisfer dues restriccions: la referida a les dades espectrals i la restricció estructural desitjada.

Donada una matriu X i una matriu diagonal D, es busquen solucions de l'equació $AX = XD$ sent A una matriu amb una determinada estructura i que posseeix un cert espectre predefinit. A partir d'aquestes restriccions sobre la matriu A sorgeixen una varietat de problemes de valors propis inversos.

Per exemple, el problema de valor propi invers per a matrius centresimètriques va ser abordat per F. Zhou, X. Hu i L. Zhang a [49]. Fent servir la descomposió en valors singulars i la inversa de Moore-Penrose, van trobar condicions per tal de que el problema tingués solució. Les matrius centresimètriques tenen aplicacions en teoria de la informació i en teoria de sistemes lineals entre d'altres.

A l'article [38] publicat en 2005, Z. Y. Peng va estudiar el problema de valor propi invers pel cas en que A fos una matriu hermítica i antireflexiva respecte d'una matriu de reflexió generalitzada. Cinc anys més tard, M. Liang i L. Dai van trobar a [32] condicions per les quals el problema de valors propis inversos a esquerra i a dreta per a matrius reflexives i antireflexives generalitzades té solució, donant també l'expresió general de la solució. El mateix any, L. Lebtahi i N. Thome van resoldre a [28] el problema pel cas d'una matriu A que fos hermítica i reflexiva o antireflexiva respecte d'una matriu J que complix les condicions de ser tripotent i hermítica.

Al Capítol 2 d'aquesta memòria s'estén l'últim treball esmentat pel cas d'una matriu A que sigui hermítica i reflexiva respecte d'una matriu J que és $\{k+1\}$-potent i normal. Al Teorema 2.2.1 es donen les condicions sota les quals el problema té solució i es proporciona la forma explícita de la solució general.

A més, en el cas de que el conjunt de solucions del problema de valor propi invers sigui no buit, es resol el problema de Procrustes associat.

El problema de Procrustes, o de la millor aproximació, associat al problema de valor propi es pot descriure sintèticament de la següent manera: donada una matriu obtenida de manera experimental, el problema consisteix en trobar una matriu del conjunt solució del problema (i, per tant, amb l'estructura desitjada), tal que siga la millor aproximació a la matriu donada fent servir, generalment, la norma de Frobenius.

D'altra banda, les matrius Hamiltonianes i antiHamiltonianes apareixen en la resolució d'importants problemes de la Teoria de Sistemes i Control. Sorgeixen, per exemple, a control òptim quadràtic lineal [34, 42], al càlcul de la norma H_∞ d'un sistema estable [50] i a la resolució de l'equació algebraica de Riccati [27]. El problema de valor propi invers per a matrius hermítiques i Hamiltonianes generalitzades va ser analitzat per Z. Zhang, X. Hu i L. Zang a [48] i posteriorment va ser considerat el cas de matrius hermítiques i antiHamiltonianes generalitzades per Z. Bai. En ambdós casos no només s'estudia el problema de valor propi invers sino que també es va resoldre el problema de trobar la millor aproximació provant prèviament que s'obté solució única.

Una extensió de les matrius Hamiltonianes són les matrius J-Hamiltonianes definides per primera vegada a [14], i correspon a una de les aportacions originals que es realitzen a aquesta memòria. Als Capítols 3 i 4 d'aquesta tesi s'estudien el problema de valor propi invers per a matrius normals J-Hamiltonianes i per a normals J-antiHamiltonianes, respectivament. Per a la resolució del cas de les matrius normals i J-Hamiltonianes es presenten quatre mètodes diferents, analitzant prèviament l'estructura d'aquest tipus de matrius. Els dos primers mètodes són generals, donen condicions per a que el problema tingui solució i, entre les solucions trobades, es consideren les que són normals i J-Hamiltonianes. El tercer mètode queda formalitzat al Teorema 3.2.2 que proporciona les condicions sota les quals el problema té solució i es presenten infinites solucions del mateix, però amb aquest mètode no és possible obtenir-les totes. Finalment, l'últim mètode permet obtenir la forma de totes les solucions. El principal resultat es dona al Teorema 3.2.3. Una secció completa està dedicada a la resolució del problema d'optimització de Procrustes associat en el cas en que el problema admet solució. En aquest cas, el principal resultat es presenta al Teorema 3.3.1.

A continuació es presenta, de forma sintetitzada, l'organització d'aquesta tesi en els seus quatre capítols.

El Capítol 1 conté una introducció al problema de valor propi invers i al problema de Procrustes, i es descriuen alguns problemes estudiats a la literatura. També, s'enumeren algunes definicions, propietats, lemes i teoremes utilitzats al llarg de la memòria.

Al Capítol 2 s'estudia el problema de valor propi invers per a una matriu hermítica i reflexiva respecte d'una matriu normal i $\{k+1\}$-potent, així com també el problema d'optimització de Procrustes associat. A més, es proposa un algoritme que resol el problema de Procrustes i es dona un exemple que mostra el funcionament del mateix.

El problema de valor propi invers per a una matriu normal i J-Hamiltoniana es resol al Capítol 3 fent servir diferents mètodes i a més es considera el problema d'optimització de Procrustes associat. De la mateixa manera que al Capítol 2, es proposa un algoritme que serveix per a calcular la solució del problema d'optimització i es presenten alguns exemples que permeten mostrar el rendiment del mateix.

Finalment, al Capítol 4, en funció dels resultats obtinguts al Capítol 3, s'aborda el problema de valor propi invers per a matrius J-antiHamiltonianes. Seguint la línia dels Capítols 2 i 3, es presenta un algoritme que resol el problema de Procrustes i es proporcionen exemples d'aplicació dels resultats.

Les principals contribucions obtingudes en aquesta tesi van ser publicades a revistes científiques i presentades a congressos. Es poden veure a [13, 14, 15, 16, 17, 18].

Summary

An important area of Applied Mathematics is Matrix Analysis due to the fact that many problems can be reformulated in terms of matrices and, in this way, their resolution is facilitated. The inverse eigenvalue problem consists of the reconstruction of a matrix from given spectral data. This type of problems occurs in different engineering areas and arises in numerous applications where the parameters of a particular physical system are determined from previous knowledge or expected dynamic behavior. In this thesis the inverse eigenvalue problem for three specific sets of matrices is solved.

Inverse eigenvalue problems have been studied from theoretical and numerical points of view as well as from their applications. The list of applications is vast. For instance, we can mention control theory, identification of systems, analysis and design of structures, geophysical studies, molecular spectroscopy, and circuit theory, among others. Some of these applications will be described in Chapter 1 of this thesis.

In several cases, in order to make the inverse eigenvalue problem reasonable, it is necessary to impose some additional conditions on the solution matrices, that is, those matrices must have a specific structure. In summary, an inverse

eigenvalue problem properly posed must satisfy two constraints: one referring to the spectral data and the other to the desirable structure.

Given a matrix X and a diagonal matrix D, solutions of the equation $AX = XD$ are searched, where A is a matrix with a prescribed structure and a predefined spectrum. Based on these restrictions on matrix A, a variety of inverse eigenvalue problems arise.

For example, the inverse eigenvalue problem for centrosymmetric matrices was addressed by F. Zhou, X. Hu, and L. Zhang in [49]. Using the singular value decomposition and the Moore-Penrose inverse, they found conditions to guarantee the existence of solution. The centrosymmetric matrices have applications in information theory and in theory of linear systems, among others.

In the article [38] appeared in 2005, Z. Y. Peng considered the inverse eigenvalue problem for the case where A is a hermitian and antireflexive matrix with respect to a generalized reflexion matrix. Five years later, M. Liang and L. Dai stated in [32] the solvability conditions for the left and right inverse eigenvalue problem for generalized reflexive and antireflexive matrices. The general expression of the solution was also given. In the same year, L. Lebtahi and N. Thome solved in [28] the problem for the case of a matrix A that is hermitian and reflexive or antireflexive with respect to a matrix J that is tripotent and hermitian.

In Chapter 2 of this work the results of [28] are extended to the case of a matrix A that is hermitian and reflexive with respect to a matrix J which is $\{k+1\}$-potent and normal. Theorem 2.2.1 provides conditions under which the problem has a solution and the explicit form of the general solution is given. In addition, in case of the set of solutions of the inverse eigenvalue problem is not empty, the associated Procrustes problem is solved.

The Procrustes problem, or the best approximation problem, associated to the inverse eigenvalue one can be described synthetically as follows: given an experimentally obtained matrix, the problem consists on finding a matrix from the problem solution set (and, therefore, with the desired structure), such that it is the best approximation to the data matrix. For simplicity, the Frobenius norm is generally used.

On the other hand, Hamiltonian and skewHamiltonian matrices appear in the resolution of important problems of Systems and Control Theory. They arise, for example, in optimal linear quadratic control [34, 42], in the calculation of the norm H_∞ of a stable system [50], and in the resolution of the algebraic Riccati equations [27], among others. The inverse eigenvalue problem for hermitian and generalized Hamiltonian matrices was analyzed by Z. Zhang, X. Hu and L. Zang in [48] and, afterwards, the case of hermitian and skewHamiltonian generalized matrices by Z. Bai was considered. In both cases, not only the inverse eigenvalue problem was studied but also uniqueness of solution for the best approximation problem was proved and the solution was presented.

An extension of the Hamiltonian matrices are the J-Hamiltonian matrices defined for the first time in [14], and it is one of the original contributions of this work. In Chapters 3 and Chapter 4 of this thesis the inverse eigenvalue the respective problems for normal J-Hamiltonian matrices and for normal J-skewHamiltonian matrices are studied. For the resolution of the normal J-Hamiltonian matrices case, the structure of this type of matrices is firstly analyzed and, then, four methods are presented. The first two methods are general, they give conditions under which the problem is solvable and, among the solutions normal J-Hamiltonian matrices are found. The third method is formalized in the Theorem 3.2.2. It provides the conditions under which the problem has a solution and the infinite solutions are presented, but with this method we are not able to obtain all of them. Finally, the last method states the form of all the solutions. The main result is established in the Theorem 3.2.3. A complete section is dedicated to solve the associated optimization Procrustes problem in case of the problem admits solution. The main result is presented in Theorem 3.3.1.

Below, a summary of the organization of this thesis and a brief description of its four chapters are presented.

Chapter 1 contains an introduction to the inverse eigenvalue problem, the Procrustes problem, and some other ones studied in the literature. Also, definitions, properties, lemmas, and theorems used throughout this work are presented.

In Chapter 2, the inverse eigenvalue problem for a hermitian reflexive matrix with respect to a normal $\{k+1\}$-potent matrix is studied, as well as the associated optimization Procrustes problem. In addition, an algorithm that solves the Procrustes problem is designed and an example that shows the performance of the algorithm is given.

The inverse eigenvalue problem for a normal J-Hamiltonian matrix is investigated in Chapter 3 by using several methods. The associated optimization Procrustes problem is also considered. As in Chapter 2, an algorithm that allows us to calculate the solution of the optimization problem is proposed. Some examples where its performance is showed are provided.

Finally, in Chapter 4, based on the results obtained in Chapter 3, the inverse eigenvalue problem for normal J-skewHamiltonian matrices is addressed. Following the line of Chapters 2 and Chapter 3, an algorithm that solves the Procrustes problem is presented and some illustrative examples of application of the results are presented.

The main contributions obtained in this thesis were published in scientific journals and presented at congresses. They can be seen in [13, 14, 15, 16, 17, 18].

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1 Problemas inversos

Para poder resolver problemas que involucran procesos ingenieriles, físicos, químicos, etc., se requieren modelos matemáticos. Los *problemas directos* son aquellos en los que se tiene información sobre las causas que describen un proceso. Resolverlo, permite determinar el efecto producido por dichas causas. Los *problemas inversos*, en cambio, son aquellos en los que se tiene información, muchas veces parcial, sobre los resultados o efectos producidos, y se desea determinar las causas que provocaron dichos efectos. Resolver estos problemas consiste en elegir métodos adecuados para poder extraer la información (muchas veces obtenida a través de datos) que permita identificar esas causas.

Más formalmente, cuando las relaciones entre las entradas y la salidas son lineales, se consideran dos espacios de Banach $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ y un sistema representado por el operador lineal F. Si $X \in \mathcal{X}$ e $Y \in \mathcal{Y}$ representan la entrada y la salida del sistema, respectivamente, y $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ entonces

$$FX = Y$$

es la ecuación que describe el proceso.

En estos términos los problemas directo e inverso pueden describirse de la siguiente manera:

(a) Problema directo: consiste en hallar Y conociendo F y X.

(b) Problema inverso: en este caso hay dos opciones,

- hallar X, siendo F e Y conocidos. Si F es un operador invertible, se tiene un problema directo para el operador F^{-1},
- conociendo X e Y, se pretende determinar el operador F.

Los problemas inversos se presentan en diferentes áreas de la ingeniería y en muchas áreas de las ciencias naturales. Por ejemplo, en el campo de estudio de la vibración de estructuras (puentes, carreteras, edificios, etc.), los problemas inversos se definen como la determinación o estimación de los parámetros del sistema, tales como la densidad, el módulo de elasticidad y el área transversal, conociendo el comportamiento del sistema [20].

En geofísica, los datos observados son generados por fuentes naturales o artificiales y propagados a través de la Tierra. Lo que buscan los geofísicos es usar estos datos y establecer la estructura interna de la Tierra. El inconveniente que presentan estos datos es que están inevitablemente contaminados por ruido y se adquieren en un número finito de lugares. Para obtener los datos se utiliza la prospección geofísica que consiste en un conjunto de técnicas físicas y matemáticas, que se utilizan para la exploración de las distintas capas de la Tierra mediante observaciones efectuadas en la superficie de la misma. El objetivo es dar información del subsuelo que permita identificar zonas de interés económico de los recursos minerales y energéticos (exploración de petróleo, minerales, aguas subterráneas, etc.). El tipo de técnica utilizada dependerá, por ejemplo, de la información geológica y geoquímica, conocida de antemano. Una de esas técnicas es el método magnetotelúrico. El problema inverso magnetotelúrico ha sido estudiado por R. Parker [37, 36] desde principios de los años 80 y consiste en determinar la distribución de la conductividad debajo la superficie utilizando un número finito de mediciones inciertas del campo eléctrico y del campo magnético. El modelo utilizado para relacionar los campos eléctrico y magnético con la conductividad está basado en las ecuaciones de Maxwell.

Existen problemas inversos muy interesantes en medicina. Por ejemplo, el problema inverso en Electroencefalografía consiste en la determinación de la ubicación de una fuente dentro del cerebro (foco epileptógeno) que produce una cierta distribución de potencial en el cuero cabelludo que es registrada por electrodos colocados en la superficie del mismo. El modelo matemático que describe la actividad eléctrica del cerebro involucra una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptica. A menudo se supone que la fuente es un dipolo, y su ubicación se toma como un parámetro del modelo. X. Ibáñez-Català y M. I. Troparevsky propusieron en [22] una solución aproximada del problema inverso mediante la minimización de una función que mide la diferencia entre los valores del potencial eléctrico correspondiente a los parámetros a estimar y los valores del potencial eléctrico para los valores estimados de los parámetros.

Otro problema inverso importante, que se aplica principalmente como herramienta de diagnóstico, es la tomografía computada. Está basada en la adquisición de una imagen por rayos X de un corte transversal de un objeto tridimensional, para diferentes ángulos de rotación con respecto al mismo. Cada una de estas imágenes es una proyección. La base matemática se debe a J. Radon que en 1917 planteó el problema de reconstruir una función si se conocen sus integrales sobre rectas arbitrarias, y estas integrales son la Transformada de Radon. La inversión de la transformada constituye el problema inverso, es decir, la reconstrucción de la imagen. En la práctica los datos de las distintas proyecciones son finitos y se almacenan en matrices. Para hallar la imagen existen diferentes métodos basados en modelos determinísticos como la retroproyección filtrada y también modelos estocásticos como los bayesianos con los que se han logrado mejorar la calidad de la reconstrucción sobre todo en los casos en que cuentan con pocos datos o los datos están contaminados.

Debido a que cada problema de aplicación tiene dificultades intrínsecas, los problemas inversos constituyen una base inagotable de problemas de diversa índole.

1.1.1 Problema de valor propio inverso

Algunos modelos matemáticos involucran matrices cuyas propiedades espectrales son las que determinan la dinámica del proceso. El problema de encontrar una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $AX = XD$ se llama problema de valor propio inverso y se encuadra dentro de la Teoría del Análisis Matricial. Tanto la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y como la matriz diagonal $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$ son matrices conocidas.

Equivalentemente, el problema de valor propio inverso consiste en hallar una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \qquad i = 1, \dots, m$$

donde $x_1, \dots, x_m$ $(m \leq n)$ son vectores dados y $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son escalares dados. Es decir, se resuelve la ecuación matricial

$$AX = XD$$

en la incógnita A con

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix}$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_m$ son vectores columna y

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

es una matriz diagonal siendo los λ_i, $i = 1, \ldots, m$, valores dados. En otras palabras, resolver un problema de valor propio inverso consiste en la reconstrucción de una matriz a partir de sus valores y vectores propios.

Se han realizado numerosos trabajos sobre problemas de valor propio inverso, tanto desde el punto de vista teórico, como numérico y del de sus aplicaciones. Un resumen detallado se puede ver en el trabajo de M. Chu y G. Golub [9] donde se muestran varias aplicaciones y problemas de valores propios inversos para ciertos tipos de matrices. En esta sección se describirán brevemente algunos de esos problemas.

En [19], Gladwell estudia el problema de valor propio inverso aplicado al estudio de vigas que había sido planteado anteriormente en [3]. Una viga puede ser modelada usando un sistema de masa-resorte. El problema consiste en calcular los valores de las masas, longitudes y constantes de resorte de masa-resorte, conociendo sólo ciertos datos espectrales. El planteamiento específico para una viga discreta lleva al problema inverso de generar una matriz simétrica pentadiagonal tal que los elementos de las diagonales que no pertenencen a la diagonal principal sean negativos. Para poder generar este tipo de matrices D. Boley y G. Golub [6] usaron un método basado en el algoritmo de Lanczos que se utiliza para reducir una matriz simétrica a una matriz tridigonal.

En 1992, K. Joseph [23] aplicó el problema de valor propio inverso al diseño de estructuras. Un problema que ocurre con frecuencia en ingeniería civil es el diseño de una estructura con frecuencias naturales especificadas o con frecuencias que se encuentran fuera de ciertas bandas especificadas. Las frecuencias naturales de una estructura se calculan generalmente usando las matrices de masa y de rigidez. El problema consiste en determinar el conjunto de parámetros de modo que el problema de valor propio asociado tenga los valores propios especificados. El problema de la viga mencionado anteriormente, es una caso particular de problemas inversos en vibraciones.

La ecuación

$$A^T X + XA - XGX + F = 0$$

se conoce como la ecuación algebraica de Riccati, donde A, F, G y X son matrices cuadradas reales. Además, F y G son matrices simétricas. Esta ecuación tiene asociada la matriz Hamiltoniana

$$H = \begin{bmatrix} A & G \\ F & A^T \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación surge en el modelado de sistemas de tiempo continuo y discreto en una gran variedad de aplicaciones como, por ejemplo, en la Teoría de Control Óptimo. La búsqueda de un algoritmo efectivo para hallar la solución numérica es una tema de interés desde mediados de los años 70. Un método clásico utilizado para la resolución de este tipo de ecuaciones es el de Schur que fue introducido por Laub en 1978 y está basado en la factorización de la matriz Hamiltoniana H utilizando un conjunto apropiado de vectores de Schur [26]. En [27], se extiende este método mediante la utilización de problemas de valores propios generalizados y proporcionando algunas aplicaciones.

La importancia del uso de matrices Hamiltonianas radica en que juegan un rol importante en diversas áreas de la ingeniería. Además de su utilización en el problema de resolución de la ecuación algebraica de Riccati, surgen en control óptimo cuadrático lineal y en optimización H_∞ como puede verse en [34, 42, 50].

Otra aplicación interesante que está relacionada con el tema de esta tesis consiste en la configuración electrónica de un átomo. Para hallarla, se necesita la información espectral y diagonal de una matriz Hamiltoniana, pero el inconveniente que se presenta es que los elementos de la diagonal no pueden medirse con presición. Mediante el uso de los valores propios se trata de corregir los elementos de la diagonal. En [45], los autores presentan por primera vez un enfoque algebraico al problema de valor propio inverso para un sistema cuántico.

El problema de asignación de polos en Teoría de Control es otra de las aplicaciones clásicas del problema de valor propio inverso. La dinámica de un sistema lineal en tiempo continuo puede ser descrita por la ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

donde, en el instante t, el vector $x(t) \in \mathbb{R}^n$ denota el estado del sistema y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la entrada. Las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ son matrices invariantes en el tiempo. Un problema que se presenta en Teoría de Control es elegir el vector $u(t)$ para poder controlar la dinámica de $x(t)$ y se puede hacer de diversas maneras. Por ejemplo, al realizar una realimentación de estados, se considera $u(t) = Fx(t)$ y así se tiene que

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t).$$

El objetivo es elegir la matriz F de modo tal que la matriz $A + BF$ tenga determinados valores propios. Los valores propios de esta matriz coinciden con los polos del sistema.

En 1997, N. Li estudió el problema de valor propio inverso relacionado con el problema de asignación de polos en [31]. Además, planteó la aplicación de este problema al diseño de redes neuronales de Hopfield.

En la literatura se ha abordado el estudio del problema de valor propio inverso para matrices con ciertas estructuras especificadas, como los que se muestran a continuación, algunos de los cuales motivaron esta tesis.

Una matriz se dice de Toeplitz si es una matriz cuadrada en la que los elementos de sus diagonales (de izquierda a derecha) son constantes, es decir, la matriz es de tamaño $n \times n$ y tiene la forma

$$T_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-n+2} & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

En 1991, H. Landau resolvió el problema de valor propio inverso para matrices Toeplitz reales y simétricas [25]. En su trabajo se enuncia un teorema de existencia de solución pero no se da la forma de la misma. En [43], W. Trench presenta un procedimiento que proporciona la solución numérica de este problema basado en un método de Newton que tiene en cuenta las propiedades espectrales especiales de las matrices Toeplitz reales y simétricas.

P. Benner, D. Kessner y V. Mehrmann estudian en [5] el problema de valor propio inverso para matrices Hamiltonianas y antiHamiltonianas. Presentaron un algortimo para hallar su solución y mostraron algunas aplicaciones como el cálculo del radio de estabilidad y de la norma H_∞ así como la resolución de Ecuaciones Algebraicas de Riccati, anteriormente mencionadas.

Una matriz A cuadrada compleja se dice que es hermítica y Hamiltoniana (antiHamiltoniana) generalizada si coincide con su traspuesta conjugada y AJ es hermítica (antihermítica), siendo J una matriz (real) ortogonal y antisimétrica. Z. Zhang, X. Hu y L. Zhang resuelven por primera vez en [48] el problema de valor propio inverso para matrices hermíticas y Hamiltonianas generalizadas dando condiciones necesarias y suficientes para que el problema tenga solución. También muestran la forma explícita de la solución y estudian el problema de aproximación, es decir, dada una matriz arbitraria, hallan la solución del problema inverso más cercana usando la norma de Frobenius. Este trabajo fue extendido por Z. Bai en [2] estudiando el problema de valor propio inverso para matrices hermíticas y antiHamiltonianas generalizadas usando la inversa de Moore-Penrose y también resolvió el problema de aproximación correspondiente.

En esta memoria se estudia el problema de valor propio inverso para matrices normales y J-Hamiltonianas. Este estudio proporciona una amplia extensión dado que se pasa de las matrices hermíticas a las normales y de las Hamiltonianas a todas sus unitariamente semejantes. En una primera etapa se presentan cuatro métodos diferentes para la resolución del problema y, en una segunda etapa, se estudia el problema de Procrustes asociado.

El caso del problema inverso para matrices hermíticas antireflexivas con respecto a una matriz de reflexión generalizada dada, fue analizado por Z. Peng en [38]. El autor analiza la estructura que poseen las matrices, presenta condiciones para que el problema tenga solución usando la inversa de Moore-Penrose, y muestra cuál es la solución del problema. Al igual que en los casos anteriores, estudia el problema de optimización asociado, si el conjunto de soluciones del problema de valor propio inverso es no vacío.

Gran parte los problemas de valores propios inversos que aparecen en la literatura surgieron debido al interés en el problema inverso de Sturm-Liouville [30]. Dada una función $q(x)$, el problema de Sturm-Liouville consiste en calcular los valores de λ (es decir, calcular el espectro dado por $\lambda_0, \lambda_1, ...$) para la ecuación

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \text{con} \;\; a \leq x \leq b,$$

sujeta a ciertas condiciones de contorno en $x = a$ y en $x = b$. El problema inverso consiste en reconstruir la función $q(x)$ conociendo los datos espectrales. Para buscar una aproximación numérica a la solución, se discretiza la ecuación diferencial, lo que conduce a la ecuación matricial (algebraica)

$$\left(-\frac{1}{h^2} J_a + X\right) u = \lambda u,$$

siendo J_a una matriz de Jacobi, X la matriz que corresponde a la discretización de $q(x)$ y h el tamaño del paso de la discretización.

Una clase particular dentro de las matrices de Jacobi son las matrices tridiagonales simétricas donde los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son no negativos, es decir, un matriz de tamaño $n \times n$ que tiene la forma

$$J_a = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{bmatrix}.$$

Además de surgir en el problema de Sturm-Liouville, este tipo de matrices se presentan en otras aplicaciones tales como el sistema de masa oscilante o el péndulo compuesto [46].

Por otra parte, H. Chen resolvió en [7] un problema de mínimos cuadrados usando diferentes propiedades de una nueva clase de matrices introducidas en el citado artículo, que son las matrices reflexivas con respecto a un par de matrices que sean ambas reflexiones generalizadas, es decir, A y B son dos matrices complejas rectangulares que satisfacen las relaciones $A = PAQ$ y $B = -PBQ$, siendo P y Q son dos matrices de reflexión generalizadas. Estas matrices son una generalización de matrices reflexivas (antirreflexivas) y matrices centrosimétricas y que el autor denomina matrices reflexivas (antirreflexivas) generalizadas.

El caso de matrices K-centrohermíticas generalizadas fue abordado por Z. Liu y H. Faßbender en [33]. Dada una matriz A se dice que es K-centrohermítica generalizada si $A = KA^*K$, siendo K una matriz de permutación. Usando la descomposición en valores singulares los autores hallaron condiciones para que el problema tenga solución y, también, resolvieron el problema de aproximación optimal.

En [28], L. Lebtahi y N. Thome hallaron soluciones del problema de valor propio inverso para el caso en que la matriz es una matriz reflexiva o antireflexiva con respecto a una matriz hermítica tripotente. Posteriormente, en [29], los autores comenzaron el análisis de la generalización al caso de una matriz hermítica reflexiva con respecto a una matriz $\{k+1\}$-potente y normal. En el Capítulo 2 de esta memoria se continúa con el estudio de este caso, resolviendo el problema completo, y también se aborda el problema de optimización asociado.

Otro problema que fue estudiado por A. Herrero y N. Thome en [21] es el de hallar las soluciones de la ecuación $AXB = C$, donde A, B y C son matrices fijas y tal que la matriz X satisfaga $PXP = X$ siendo P hermítica y $\{k+1\}$-potente. En este caso, para la resolución del problema se utilizó la descomposición en valores singulares generalizada y la técnica de vectorización de una matriz.

En la próxima sección se describirá el problema de Procrustes o problema de aproximación óptima mencionado anteriormente.

1.2 Problema de Procrustes

Se comenzará esta sección haciendo una breve reseña de la historia de Procrustes a quien se le debe el nombre de estos problemas. Según la mitología griega, Procustes o Procusto, también llamado Damastes, era un posadero que vivía en Eleusis, Ática, unos 18 km. al noroeste de Atenas. Vivía en las colinas e invitaba a pasar a su casa a las personas que pasaban por el lugar y les ofrecía una cama de hierro para que descansen. Según cuenta la leyenda, tenía dos camas, una grande y una pequeña. Si el huésped era alto, le ofrecía la cama pequeña y le cortaba las piernas para que el cuerpo se ajustara a la longitud de la cama. En cambio, si el huésped era bajo, le asignaba la cama grande y le estiraba las piernas para que tuviera la misma longitud de la cama. Fue capturado por el rey Teseo quien le aplicó el mismo método que él utilizaba con sus huéspedes, colocándolo en una cama pequeña y cortándole la cabeza y los pies.

El problema de Procrustes tiene diversas aplicaciones en biología, física y ciencias sociales, entre otras ramas. Fue aplicado por primera vez por P. Schönemann en su tesis doctoral en psicología. En particular, se utilizó en psicometría, que es la rama de la psicología experimental que se ocupa de medir y cuantificar los procesos y las capacidades mentales. La descripción de la solución del Problema de Procustes para matrices ortogonales fue publicada en 1966 [40]. Se refiere a problemas de optimización mínimo-cuadrática con restricciones sobre un subconjunto del espacio de matrices. Los diferentes problemas se obtienen variando la estructura de las matrices de acuerdo con la aplicación. El problema consiste en transformar a una matriz dada A en una matriz B que obtiene utilizando matriz de transformación ortogonal T, de manera tal que la norma de la matriz residual $E = AT - B$ sea mínima. En 1970, P. Schönemman junto a R. M. Carroll [41] realizaron una extensión del problema. Presentaron un método de mínimos cuadrados para ajustar una matriz dada A a otra dada B eligiendo una rotación, una traslación y una dilatación central. A partir de ese momento fueron surgiendo diferentes tipos de Problemas de Procrustes con variadas aplicaciones.

El análisis de datos geodésicos requiere, en general, la aplicación de procedimientos de reajuste, rotación y traslación de diferentes matrices de datos. Un problema que se presenta muy a menudo es el de transformar las coordenadas de un punto entre distintos sistemas de referencia. Fabio Crosilla fue el primero en aplicar el Problema de Procrustes en Geodesia. En su libro referenciado en [10] puede verse una revisión detallada del análisis de Procrustes y sus aplicaciones en Geodesia. Una de esas aplicaciones se realiza en fotogrametría como puede verse en [1]. La fotogrametría es una técnica que se utiliza para la determinación de las dimensiones y la posición de objetos ubicados sobre la superficie terrestre a partir de imágenes capturadas desde un avión o, en la actualidad, desde un dron. El objetivo es determinar la orientación de la cámara durante la fotogrametría aérea y transformar las coordenadas de las fotos en coordenadas del terreno, que se logra empleando operaciones de escalado, traslación y rotación.

Con técnicas similares, G. Eberle y M. C. Maciel consideraron en [12] el problema de optimización de mínimos cuadrados restringido a matrices Toeplitz, matrices Toeplitz triangulares y matrices Toeplitz simétricas. Este tema fue abordado nuevamente en [47] por J. Yang y Y. Deng transformando el problema original en una forma cuadrática, y obteniendo la solución mediante la resolución de un sistema lineal de ecuaciones.

Tras una introducción a los problemas que se abordan en esta tesis, a continuación se recuerdan los conceptos conocidos que se utilizarán en la memoria, con la intención de establecer las notaciones que se seguirán.

1.3 Definiciones y teoremas

En esta sección se mencionarán algunas definiciones, propiedades, lemas y teoremas que serán utilizados en los próximos capítulos de esta tesis. Si bien son conocidas, por completitud se incluirán algunas demostraciones.

Para comenzar, se indica la notación utilizada.

El espacio de las matrices complejas de tamaño $m \times n$ se denota por $\mathbb{C}^{m\times n}$ y el espacio de las matrices reales de tamaño $m \times n$ por $\mathbb{R}^{m\times n}$. La matriz identidad de tamaño $n\times n$ se indica con I_n. Las matrices traspuesta, traspuesta conjugada e inversa $(m = n)$ de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se denotan por A^T, A^* y A^{-1}, respectivamente. El determinante y la traza de A se indican con $\det(A)$ y $\operatorname{tr}(A)$. También se utilizan los símbolos $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{R}(A)$ para denotar los subespacios núcleo (o espacio nulo) e imagen de una matriz A.

1.3.1 Definiciones

Definición 1.3.1 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se llama normal si conmuta con su traspuesta conjugada A^*, es decir, si $AA^* = A^*A$.*

Definición 1.3.2 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se denomina unitaria si su inversa coincide con su traspuesta conjugada, es decir, $A^{-1} = A^*$, que es equivalente a $AA^* = A^*A = I_n$.*

Definición 1.3.3 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se llama:*

(a) *hermítica si es igual a su traspuesta conjugada, es decir, si $A = A^*$.*

(b) *antihermítica si coincide con la opuesta de su traspuesta conjugada, es decir si $A = -A^*$.*

Se notará con $\mathcal{H}^{n\times n}$ al conjunto de todas las matrices hermíticas.

Es conocido que los valores propios de toda matriz hermítica son números reales y que el conjunto de los valores propios de su traspuesta conjugada coincide con el conjugado del conjunto de los valores propios de la matriz.

Si una matriz A es cuadrada, se denotarán por

$$H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad \text{y} \qquad S(A) = \frac{1}{2}(A - A^*),$$

sus partes hermíticas y antihermíticas[1], respectivamente. En este caso, es claro que $A = H(A) + S(A)$.

Definición 1.3.4 *Sea $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz dada. Se dice que una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es:*

(a) *reflexiva con respecto a la matriz J si $A = JAJ$.*

[1]La notación $S(A)$ se mantiene de skew-hermitian en inglés.

(b) *antireflexiva con respecto a la matriz* J *si* $A = -JAJ$.

Definición 1.3.5 *Sea* $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Su inversa de Moore-Penrose, denotada por* $M^\dagger$, *es la única matriz que satisface las siguientes condiciones:*

(a) $MM^\dagger M = M$,

(b) $M^\dagger MM^\dagger = M^\dagger$,

(c) $(MM^\dagger)^* = MM^\dagger$,

(d) $(M^\dagger M)^* = M^\dagger M$.

Esta inversa generalizada siempre existe y está unívocamente determinada.

Para escribir en forma abreviada las matrices $I - M^\dagger M$ y $I - MM^\dagger$ se utilizarán en esta tesis las notaciones

$$W_M^{(l)} = I - M^\dagger M \qquad \text{y} \qquad W_M^{(r)} = I - MM^\dagger.$$

Notar que usando las propiedades de la inversa de Moore-Penrose se tiene que

$$M^\dagger W_M^{(r)} = M^\dagger(I - MM^\dagger) = M^\dagger - M^\dagger MM^\dagger = O$$

y

$$W_M^{(r)}(M^\dagger)^* = (W_M^{(r)})^*(M^\dagger)^* = (M^\dagger W_M^{(r)})^* = O.$$

En forma análoga se puede probar que $W_M^{(l)} M^\dagger = O$ y $(M^\dagger)^* W_M^{(l)} = O$.

Definición 1.3.6 *El espectro de una matriz* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es el conjunto de todos sus valores propios y se denota por* $\sigma(A)$, *es decir,*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\},$$

donde para cada escalar $\lambda_i \in \mathbb{C}$, *denominado valor propio, existe un vector no nulo* $x_i \in \mathbb{C}^n$, *denominado vector propio, que satisface* $Ax_i = \lambda_i x_i$ *para cada* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definición 1.3.7 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice que es $\{k+1\}$-potente si $A^{k+1} = A$, siendo $k \in \mathbb{N}$.*

Para los primeros valores de k se tienen las matrices idempotentes, tripotentes, cuatripotentes, etc.

Proposición 1.3.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz $\{k+1\}$-potente. Entonces*

$$\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_k,$$

siendo Ω_k el conjunto de todas las raíces de la unidad de orden k.

Demostración. *Debido a que $A^{k+1} = A$, el polinomio $p(x) = x^{k+1} - x$ es un múltiplo del polinomio minimal $q(x)$ de A. Como cada raíz de $q(x)$ está en $\mathbb{C}$ y tiene multiplicidad 1 (pues lo mismo ocurre con las de $p(x)$), se tiene que $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_k$.* ■

Una matriz destacada que se utilizará con asiduidad a lo largo de toda la memoria es la matriz

$$J_0 := \begin{bmatrix} O & I_k \\ -I_k & O \end{bmatrix}.$$

Definición 1.3.8 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{2k\times 2k}$ se dice que es Hamiltoniana si verifica que $(AJ_0)^* = AJ_0$.*

Definición 1.3.9 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{2k\times 2k}$ se dice que es antiHamiltoniana si verifica que $(AJ_0)^* = -AJ_0$.*

Lema 1.3.1 *Las siguientes propiedades son válidas:*

(a) $J_0^* = -J_0$,

(b) $J_0^{-1} = -J_0$,

(c) *A es Hamiltoniana si y sólo si $(J_0A)^* = J_0A$,*

(d) *A es antiHamiltoniana si y sólo si $(J_0A)^* = -J_0A$.*

Las condiciones (c) y (d) del lema anterior dan definiciones equivalentes para matrices Hamiltonianas y antiHamiltonianas.

Definición 1.3.10 *([35]) Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La norma de Frobenius de A (también llamada norma de Hilbert-Schmidt) se define mediante*

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|A_{i*}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \|A_{*j}\|_2^2 = \operatorname{tr}(A^*A),$$

donde A_{i*} representa la fila i-ésima de la matriz A y A_{*j} su columna j-ésima.

La norma $\|.\|_F$ proviene del producto escalar $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^*A)$.

Proposición 1.3.2 *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{q\times p}$. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

(a) *si $m = q$ y $n = p$ entonces $\|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$ (propiedad subaditiva).*

(b) *si $n = q$ entonces $\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$ (propiedad submultiplicativa).*

(c) *$\|A^T\|_F = \|A^*\|_F = \|A\|_F$.*

La siguiente propiedad muestra que la norma de Frobenius es invariante mediante transformaciones unitarias.

Propiedad 1.3.1 *Sean $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices unitarias y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces $\|UAV\|_F = \|A\|_F$.*

Demostración. *Como las matrices U y V con unitarias entonces $U^*U = I_m$ y $VV^* = I_n$. Por la definición de norma de Frobenius y usando propiedades de* *la traza de una matriz se tiene que*

$$\begin{aligned}\|UAV\|_F^2 &= \operatorname{tr}((UAV)^*(UAV)) = \operatorname{tr}(V^*A^*U^*UAV) = \operatorname{tr}(V^*A^*AV)\\ &= \operatorname{tr}(A^*AVV^*) = \operatorname{tr}(A^*A) = \|A\|_F^2.\end{aligned}$$

■

Definición 1.3.11 *Sea S un subconjunto del espacio vectorial $\mathcal{V}$ con producto interno. El complemento ortogonal de S es el subespacio*

$$S^\perp = \{v \in \mathcal{V} : \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in S\}.$$

Definición 1.3.12 *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado $(E, \| \, \|)$ completo en la métrica definida por su norma.*

Definición 1.3.13 *Un espacio de Banach E es uniformemente convexo si para todo $0 < \epsilon \leq 2$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in E$ son tales que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| \geq \epsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.*

Geométricamente, esta condición indica que el punto medio de un segmento de recta que se encuentra dentro de un disco unitario se mantiene dentro del mismo a menos que el segmento sea corto.

1.3.2 Resultados conocidos

Los siguientes lemas y teoremas serán utilizados a lo largo de la tesis.

Teorema 1.3.1 ***(Teorema 2.1 [4])*** *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $D \in \mathbb{C}^{m\times q}$ y $X \in \mathbb{C}^{n\times p}$. Entonces, la ecuación matricial $AXB = D$ tiene solución si y sólo si $AA^\dagger DB^\dagger B = D$. La solución general está dada por*

$$X = A^\dagger DB^\dagger + Y - A^\dagger AYBB^\dagger$$

siendo $Y \in \mathbb{C}^{n\times p}$ una matriz arbitraria.

Lema 1.3.2 *[4] Sean $A \in \mathbb{C}^{p\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{C}^{n\times q}$, $E \in \mathbb{C}^{m\times q}$ y $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$. El sistema*

$$\begin{cases} AX &= B \\ XD &= E \end{cases}$$

tiene solución si y sólo si cada ecuación tiene una solución (por separado) y $AE = BD$. Si $X_0 \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es una solución del sistema de ecuaciones, entonces la solución general del sistema es

$$X = X_0 + (I - A^\dagger A)Y(I - DD^\dagger),$$

siendo $Y \in \mathbb{C}^{n\times p}$ una matriz arbitraria.

Lema 1.3.3 *$\mathbb{C}^{n\times n}$ es un espacio de Banach uniformemente convexo con la norma Frobenius.*

Demostración. Se sabe que $(\mathbb{C}^{n\times n}, \|\ \|_F)$ es un espacio vectorial normado completo, y por tanto, es un espacio de Banach. Más aún, es un espacio de Hilbert. Si bien en este tipo de espacios la propiedad es conocida, por completitud se añade la demostración.

Falta probar que es uniformente convexo. Para ello, sea $0 < \epsilon \leq 2$ y considérense dos matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $\|A\|_F = 1$, $\|B\|_F = 1$ y $\|A - B\|_F \geq \epsilon$. Entonces, por la definición de la norma de Frobenius y por propiedades de traza, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{A+B}{2}\right\|_F^2 &= \operatorname{tr}\left[\left(\frac{A+B}{2}\right)^* \left(\frac{A+B}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{tr}\left[(A^* + B^*)(A + B)\right] \\
&= \frac{1}{4}\ \left(\operatorname{tr}(A^*A) + \operatorname{tr}(A^*B) + \operatorname{tr}(B^*A) + \operatorname{tr}(B^*B)\right) \\
&= \frac{1}{4}\ \left(\|A\|_F^2 + \operatorname{tr}(A^*B) + \operatorname{tr}(B^*A) + \|B\|_F^2\right).
\end{aligned}$$

Como $\|A\|_F = \|B\|_F = 1$, entonces

$$\left\| \frac{A+B}{2} \right\|_F^2 = \frac{1}{4}\ \left(2 + \operatorname{tr}(A^*B) + \operatorname{tr}(B^*A)\right).$$

Por otro lado, usando nuevamente la definición de la norma de Frobenius y por propiedades de la traza, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|A-B\|_F^2 &= \operatorname{tr}\left[(A-B)^*\,(A-B)\right] \\
&= \operatorname{tr}\left(A^*A - A^*B - B^*A + B^*B\right) \\
&= \|A\|_F^2 - \operatorname{tr}(A^*B) - \operatorname{tr}(B^*A) + \|B\|_F^2 \\
&= 2 - \left(\operatorname{tr}(A^*B) + \operatorname{tr}(B^*A)\right).
\end{aligned}$$

Como $\|A-B\|_F^2 \geq \epsilon^2$, entonces $2-(\operatorname{tr}(A^*B) + \operatorname{tr}(B^*A)) \geq \epsilon^2$, o sea, $\operatorname{tr}(A^*B)+\operatorname{tr}(B^*A) \leq 2-\epsilon^2$.

Luego,

$$\left\| \frac{A+B}{2} \right\|_F^2 \leq \frac{1}{4}(2+2-\epsilon^2) = 1 - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Entonces, tomando $\delta = \dfrac{\epsilon^2}{4}$ se tiene que

$$\left\| \frac{A+B}{2} \right\|_F^2 \leq 1 - \delta.$$

$\blacksquare$

Lema 1.3.4 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$.

(b) *Existe $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tal que $B = CA$.*

Demostración. (b) $\Rightarrow$ (a) Sea $x \in \mathcal{N}(A)$. Entonces, $Ax = 0$. Como existe C tal que $B = CA$ se tiene que $Bx = CAx = C(Ax) = C0 = 0$. Por lo tanto, $x \in \mathcal{N}(B)$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Para probar esta implicación se recuerda que $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ es equivalente a $\mathcal{N}(B)^\perp \subseteq \mathcal{N}(A)^\perp$ y $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^*)$, O sea, $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ es equivalente a $\mathcal{R}(B^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$.

Sea $B^* = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_n]$, siendo b_i las columnas de B^*. Puesto que $\mathcal{R}(B^*)$ es el subespacio generado por las columnas de B^*, se tiene que $b_i \in \mathcal{R}(B^*)$. Como $\mathcal{R}(B^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$, entonces $b_i \in \mathcal{R}(A^*)$, es decir, $b_i = A^* x_i$ para algún x_i. Luego,

$$B^* = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_n] = A^* \left[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n\right].$$

Tomando $C^* = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]$ se tiene que $B^* = A^* C^*$, y por lo tanto $B = CA$. ∎

Teorema 1.3.2 ***(Teorema 2.2 [11])*** *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se considera la ecuación matricial*

$$A^*X + X^*A = B. \tag{1.1}$$

Entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:

(a) *Existe una solución $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de la ecuación (1.1).*

(b) *$B = B^*$ y $(I_n - A^\dagger A)B(I_n - A^\dagger A) = O$.*

Si se satisface (a) o (b), toda solución de la ecuación (1.1) tiene la forma

$$X = \frac{1}{2}(A^*)^\dagger BA^\dagger A + (A^*)^\dagger B(I_n - A^\dagger A) + (I_m - AA^\dagger)Y + AA^\dagger ZA,$$

donde $Z \in \mathbb{C}^{m\times m}$ satisface $A^*(Z + Z^*)A = O$ e $Y \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es una matriz arbitraria.

Capítulo 2

Matrices hermíticas reflexivas

2.1 Introducción

En este capítulo se estudiará el problema de valor propio inverso $AX = XD$ en el caso concreto en el que la matriz A es una matriz hermítica, reflexiva con respecto a una matriz J normal y $\{k+1\}$-potente. Además, se considerará el problema de optimización de Procrustes asociado.

Sea $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz normal y $\{k+1\}$-potente. Se recuerda que una matriz $A \in \mathcal{H}^{n\times n}$ es reflexiva con respecto a la matriz J si $A = JAJ$.

Se observa que la hipótesis $J^{k+1} = J$ y la hipótesis que J sea normal son independientes. Basta ver que

$$J = \begin{bmatrix} i & -4i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

cumple $J^5 = J$ y que J no es normal. Por otro lado, cualquier matriz diagonal es normal y no todas las matrices diagonales cumplen que $J^{k+1} = J$, para algún k. Por ejemplo,

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El conjunto de todas las matrices hermíticas que son reflexivas con respecto a una matriz J se denotará por $\mathcal{H}J^{n\times n}$, es decir,

$$\mathcal{H}J^{n\times n} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \ A^* = A = JAJ\}.$$

Las matrices que se tendrán en consideración para el problema de valor propio inverso serán las matrices $A \in \mathcal{H}J^{n\times n}$. Concretamente, se resolverán los siguientes problemas:

(I) **Problema de valor propio inverso**:

Dadas las matrices

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times m}$$

y

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

y una matriz J normal y $\{k+1\}-$potente se quieren hallar todas las matrices $A \in \mathcal{H}J^{n\times n}$ tales que $AX = XD$. Al conjunto de soluciones de este problema se lo notará $\mathcal{S}$, es decir,

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{H}J^{n\times n} : \ AX = XD\}.$$

(II) **Problema de optimización de Procrustes**:

Si $\mathcal{S} \neq \emptyset$, dada una matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, el objetivo es encontrar $\hat{A} \in \mathcal{S}$ tal que

$$\min_{A\in\mathcal{S}} \|A - B\|_F = \|\hat{A} - B\|_F.$$

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2.2 se estudia la existencia y la forma explícita de las soluciones del Problema (I). En primer lugar se determina la estructura del conjunto $\mathcal{HJ}^{n\times n}$ y se presentan las condiciones necesarias y suficientes para que el problema tenga solución. Luego, se da la forma explícita de la solución y también se muestra un ejemplo de aplicación.

En la Sección 2.3, se estudia el problema de optimización, es decir, se analiza la existencia y unicidad del Problema (II) y se presenta la solución del problema de optimización.

Finalmente, en la Sección 2.4, se exhibe un algoritmo, del cual se realizó su implementación usando el programa MATLAB R2016b, que sirve para resolver el problema de optimización de Procrustes estudiado en la Sección 2.3.

2.2 Problema de valor propio inverso

2.2.1 Existencia y forma explícita de las soluciones del problema

Dada una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y una matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ se buscan todas las soluciones de la ecuación $AX = XD$, siendo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermítica y reflexiva con respecto a una matriz J normal y $\{k+1\}$-potente.

Es importante notar que la matriz diagonal D tiene elementos reales debido a que la matriz A es hermítica.

Como la matriz $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz normal, es conocido que es diagonalizable mediante una matriz unitaria y como es $\{k+1\}$-potente, el espectro de J está incluido en $\{0\} \cup \Omega_k$, siendo

$$\Omega_k = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\},$$

el conjunto de todas las raíces de la unidad de orden k. Se recuerda que las raíces de la unidad de orden k, para $k \in \mathbb{N}$, son $\omega = e^{\frac{2\pi i n}{k}}$, con $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Por todo esto, es posible decir que existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz diagonal

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \omega_1 I_{r_1} & \ldots & O & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & \ldots & \omega_t I_{r_t} & O \\ O & \ldots & O & O_{r_{t+1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

tal que

$$J = U\tilde{D}U^* \tag{2.1}$$

siendo $r_1 + \cdots + r_t = \text{rango}(J)$ y $r_1 + \cdots + r_t + r_{t+1} = n$.

Notar que el bloque $O_{r_{t+1}}$ sólo está presente si 0 pertenece al espectro de J, es decir, si J es una matriz no invertible. Es evidente que si $\lambda \in \sigma(J)$ entonces $\bar{\lambda} \in \sigma(J)$.

Para poder hallar la estructura de la matriz A se realiza la siguiente partición de la matriz U^*AU en bloques de tamaños adecuados

$$U^*AU = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,t} & A_{1,t+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{t,1} & \ldots & A_{t,t} & A_{t,t+1} \\ A_{t+1,1} & \ldots & A_{t+1,t} & A_{t+1,t+1} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

de acuerdo con los bloques de la partición de J o, más claramente, de acuerdo con $\tilde{D}$.

Entonces la matriz A se puede expresar como

$$A = U \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,t} & A_{1,t+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{t,1} & \dots & A_{t,t} & A_{t,t+1} \\ A_{t+1,1} & \dots & A_{t+1,t} & A_{t+1,t+1} \end{bmatrix} U^*. \tag{2.3}$$

Teniendo en cuenta la factorización (2.1) de la matriz J y la partición de la matriz A dada en (2.3), la matriz JAJ se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} JAJ &= U\tilde{D}U^*\, U \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,t} & A_{1,t+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{t,1} & \dots & A_{t,t} & A_{t,t+1} \\ A_{t+1,1} & \dots & A_{t+1,t} & A_{t+1,t+1} \end{bmatrix} U^*\, U\tilde{D}U^* \\ &= U\tilde{D} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,t} & A_{1,t+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{t,1} & \dots & A_{t,t} & A_{t,t+1} \\ A_{t+1,1} & \dots & A_{t+1,t} & A_{t+1,t+1} \end{bmatrix} \tilde{D}U^*. \end{aligned}$$

Como la matriz A es reflexiva con respecto a la matriz J, de $A = JAJ$ se tiene que

$$U \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,t} & A_{1,t+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{t,1} & \dots & A_{t,t} & A_{t,t+1} \\ A_{t+1,1} & \dots & A_{t+1,t} & A_{t+1,t+1} \end{bmatrix} U^* \quad =$$

$$= \quad U\tilde{D} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,t} & A_{1,t+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{t,1} & \dots & A_{t,t} & A_{t,t+1} \\ A_{t+1,1} & \dots & A_{t+1,t} & A_{t+1,t+1} \end{bmatrix} \tilde{D}U^*.$$

que es equivalente a

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,t} & A_{1,t+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{t,1} & \dots & A_{t,t} & A_{t,t+1} \\ A_{t+1,1} & \dots & A_{t+1,t} & A_{t+1,t+1} \end{bmatrix} = \tilde{D} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,t} & A_{1,t+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{t,1} & \dots & A_{t,t} & A_{t,t+1} \\ A_{t+1,1} & \dots & A_{t+1,t} & A_{t+1,t+1} \end{bmatrix} \tilde{D}.$$

Realizando el producto de las matrices por bloques se obtiene que

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,t} & A_{1,t+1} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,t} & A_{2,t+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{t,1} & A_{t,2} & \dots & A_{t,t} & A_{t,t+1} \\ A_{t+1,1} & A_{t+1,2} & \dots & A_{t+1,t} & A_{t+1,t+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_1^2 A_{1,1} & \omega_1\omega_2 A_{1,2} & \dots & \omega_1\omega_t A_{1,t} & O \\ \omega_2\omega_1 A_{2,1} & \omega_2^2 A_{2,2} & \dots & \omega_2\omega_t A_{2,t} & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_t\omega_1 A_{t,1} & \omega_t\omega_2 A_{t,2} & \dots & \omega_t^2 A_{t,t} & O \\ O & O & \dots & O & O_{r_{t+1}} \end{bmatrix}.$$

De la igualdad anterior se deduce que

$$\begin{cases} A_{t+1,j} = O & \text{para} \quad j \in \{1, \dots, t+1\} \\ A_{j,t+1} = O & \text{para} \quad j \in \{1, \dots, t\} \\ A_{i,j} = \omega_i\omega_j A_{i,j} & \text{para} \quad i, j \in \{1, \dots, t\} \end{cases}$$

Luego, de $A_{i,j} = \omega_i\omega_j A_{i,j}$ se tiene que $(1 - \omega_i\omega_j)\, A_{i,j} = O$. Entonces $\omega_i\omega_j = 1$ ó $A_{i,j} = O$, $i, j \in \{1, \dots, t\}$.

En cada caso se tiene:

- Si $\omega_i\omega_j \neq 1$ entonces también $\omega_j\omega_i \neq 1$. Por lo tanto, $A_{i,j} = O$ y $A_{j,i} = O$, simultáneamente.
- Si $\omega_i\omega_j = 1$ entonces hay dos situaciones posibles:
  - Si $i = j$ entonces $\omega_i\omega_j = \omega_i^2 = 1$. De aquí resultan dos posibles valores para ω_i que son las raíces cuadradas de la unidad: $\omega_i = 1$ u $\omega_i = -1$.
  - Si $i \neq j$ entonces $\omega_i = \omega_j^{-1}$, pero de
    $$\omega_j^{-1} = \frac{1}{\omega_j} = \frac{1}{\omega_j}\,\frac{\overline{\omega_j}}{\overline{\omega_j}} = \frac{\overline{\omega_j}}{|\omega_j|^2} = \frac{\overline{\omega_j}}{1} = \overline{\omega_j}$$
    se llega a $\omega_i = \overline{\omega_j}$.

Lo anterior se puede resumir diciendo que, para cada $i, j \in \{1, \dots, t\}$ o bien $\omega_i = \overline{\omega}_j$ o bien los bloques $A_{i,j}$ y $A_{j,i}$ son simultáneamente nulos.

Entonces, es posible concluir que la forma de la matriz U^*AU, o equivalentemente la forma de la matriz A, depende de las raíces de la unidad que aparecen en la factorización (2.1) de J. Además, si se considera que en la factorización de J el orden de los valores propios en la matriz U^*JU es

$$1, -1, \omega_3, \overline{\omega}_3, \ldots, \omega_{p-1}, \overline{\omega}_{p-1}, 0,$$

en caso que aparezcan 1, -1 y 0, entonces la matriz A tiene la forma

$$A = U \begin{bmatrix} A_{1,1} & O & O & \ldots & O & O \\ O & A_{2,2} & O & \ldots & O & O \\ O & O & \tilde{A}_{3,4} & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & \tilde{A}_{p-1,p} & O \\ O & O & O & \ldots & O & O \end{bmatrix} U^* \tag{2.4}$$

donde,

$$\tilde{A}_{s,s+1} = \begin{bmatrix} O & A_{s,s+1} \\ A_{s+1,s} & O \end{bmatrix} \qquad \text{con } s \in \{3, 5, \ldots, p-1\} \tag{2.5}$$

siendo p un número natural mayor o igual que 4.

Por lo tanto, la matriz A presenta bloques de la forma

$$A = U \begin{bmatrix} \boxed{A_{1,1}} & O & O & \dots & O & O \\ O & \boxed{A_{2,2}} & O & \dots & O & O \\ O & O & \boxed{\begin{matrix} O & A_{3,4} \\ A_{4,3} & O \end{matrix}} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & \boxed{\begin{matrix} O & A_{p-1,p} \\ A_{p,p-1} & O \end{matrix}} & O \\ O & O & O & \dots & O & O \end{bmatrix} U^*. \tag{2.6}$$

Es claro que, el bloque $A_{1,1}$ está asociado al valor propio 1 y el bloque $A_{2,2}$ al valor propio -1, si éstos aparecen en la descomposición de J. Cada bloque $\tilde{A}_{s,s+1}$ con $s \in \{3, 5, \dots, p-1\}$, está asociado a los valores propios ω_s y $\overline{\omega}_s$.

Por último, como A es hermítica, se debe cumplir que $A^*_{i,i} = A_{i,i}$ para $i = 1, 2$ y, además, $A^*_{s,s+1} = A_{s+1,s}$ para $s \in \{3, 5, \dots, p-1\}$.

El teorema que se enuncia a continuación da condiciones para que el Problema (I) de la página 24 tenga solución y además muestra cómo es la forma explícita de la solución del problema.

Teorema 2.2.1 *Sean $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ una matriz diagonal y $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz normal y $\{k+1\}$-potente factorizada como en (2.1). Sea la partición (de tamaños apropiados)*

$$X = U \begin{bmatrix} X_1^* & X_2^* & \tilde{X}_3^* & \tilde{X}_5^* & \dots & \tilde{X}_{p-1}^* & X_{p+1}^* \end{bmatrix}^* \tag{2.7}$$

con

$$\tilde{X}_s^* = \begin{bmatrix} X_s^* & X_{s+1}^* \end{bmatrix}, \quad s \in \{3, 5, \dots, p-1\}.$$

Entonces existe una matriz $A \in \mathcal{H}J^{n\times n}$ tal que $AX = XD$ si y sólo

$$X_i D W_{X_i}^{(l)} = O$$

y

$$X_iD = X_iX_i^\dagger(X_i^\dagger)^*DX_i^*X_i \tag{2.8}$$

para $i = 1, 2$*, además, se deben satisfacer las ecuaciones*

$$X_sDW_{X_{s+1}}^{(l)} = O, \quad W_{X_s^*}^{(r)}DX_{s+1}^* = O, \quad X_s^*X_sD = DX_{s+1}^*X_{s+1} \tag{2.9}$$

para $s \in \{3, 5, \dots, p-1\}$ *y* $X_{p+1}D = O$*. En este caso, la solución general viene dada por*

$$A = U \operatorname{diag}\left(X_1DX_1^\dagger + Y_1W_{X_1}^{(r)}, X_2DX_2^\dagger + Y_2W_{X_2}^{(r)}, \tilde{A}_{3,4}, \dots, \tilde{A}_{p-1,p}, O\right) U^*, \tag{2.10}$$

con

$$\tilde{A}_{s,s+1} = \begin{bmatrix} O & (X_s^*)^\dagger DX_{s+1}^* + W_{X_s}^{(r)}Y_sW_{X_{s+1}}^{(r)} \\ X_{s+1}DX_s^\dagger + W_{X_{s+1}}^{(r)}Y_s^*W_{X_s}^{(r)} & O \end{bmatrix}$$

siendo Y_1*,* Y_2 *e* Y_s*, con* $s \in \{3, 5, \dots, p-1\}$*, matrices arbitrarias de tamaños adecuados.*

Demostración. En primer lugar se supone que existe una matriz hermítica A reflexiva con respecto a J tal que $AX = XD$. Por el razonamiento presentado anteriormente, la forma de la matriz A está dada en (2.4). Sustituyendo en $AX = XD$ la partición establecida en (2.7) se obtiene

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & O & O & \dots & O & O \\ O & A_{2,2} & O & \dots & O & O \\ O & O & \tilde{A}_{3,4} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & \tilde{A}_{p-1,p} & O \\ O & O & O & \dots & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \tilde{X}_3 \\ \vdots \\ \tilde{X}_{p-1} \\ X_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \tilde{X}_3 \\ \vdots \\ \tilde{X}_{p-1} \\ X_{p+1} \end{bmatrix} D.$$

Luego, realizando las operaciones entre matrices por bloques, se tiene que

$$A_{i,i}X_i = X_iD, i = 1, 2, \quad \tilde{A}_{s,s+1}\tilde{X}_s = \tilde{X}_sD, s \in \{3, 5, \dots, p-1\}, \quad X_{p+1}D = O.$$

Para resolver las dos primeras ecuaciones es necesario utilizar matrices inversas generalizadas. Teniendo en cuenta el Teorema 1.3.1, se sabe que cada una de las ecuaciones

$$A_{i,i}X_i = X_iD, \text{ para } i = 1, 2,$$

tiene solución $A_{i,i}$ si y sólo si, se cumple que

$$X_iDX_i^{\dagger}X_i = X_iD,$$

o equivalentemente, si se cumple que $X_iD(I - X_i^{\dagger}X_i) = O$. Además, la solución general está dada por:

$$A_{i,i} = X_iDX_i^{\dagger} + Y_i(I - X_iX_i^{\dagger}), \qquad \text{para } i = 1, 2 \tag{2.11}$$

siendo tanto Y_1 como Y_2 matrices arbitrarias de tamaños adecuados.

Como A es hermítica, se debe cumplir $A_{i,i} = A_{i,i}^*$ entonces

$$X_iDX_i^{\dagger} + Y_i(I - X_iX_i^{\dagger}) = (X_iDX_i^{\dagger})^* + (Y_i(I - X_iX_i^{\dagger}))^*. \tag{2.12}$$

Reescribiendo la expresión de lado derecho, y teniendo en cuenta que D es una matriz diagonal con coeficientes reales, se tiene que

$$\begin{aligned}
(X_iDX_i^{\dagger})^* + (Y_i(I - X_iX_i^{\dagger}))^* &= (X_i^{\dagger})^*DX_i^* + (I - X_iX_i^{\dagger})^* \; Y_i^* \\
&= (X_i^{\dagger})^*DX_i^* + (I - (X_iX_i^{\dagger})^*) \; Y_i^* \\
&= (X_i^{\dagger})^*DX_i^* + (I - X_iX_i^{\dagger}) \; Y_i^* \\
&= (X_i^{\dagger})^*DX_i^* + W_{X_i}^{(r)} \; Y_i^* \\
&= (X_i^{\dagger})^*DX_i^* + (Y_iW_{X_i}^{(r)})^*.
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación (2.12) se puede escribir de la forma

$$X_iDX_i^{\dagger} + Y_iW_{X_i}^{(r)} = (X_i^{\dagger})^*DX_i^* + (Y_iW_{X_i}^{(r)})^*$$

y reagrupando los términos se tiene que

$$X_iDX_i^{\dagger} - (X_i^{\dagger})^*DX_i^* = (Y_iW_{X_i}^{(r)})^* - Y_iW_{X_i}^{(r)}.$$

Ahora, multiplicando el miembro de la izquierda de la ecuación anterior tanto a izquierda como a derecha por $X_iX_i^\dagger$ y usando propiedades de la inversa de Moore-Penrose se obtiene

$$\begin{aligned}(X_iX_i^\dagger)(X_iDX_i^\dagger - (X_i^\dagger)^*DX_i^*)(X_iX_i^\dagger) = X_iX_i^\dagger X_iDX_i^\dagger X_iX_i^\dagger \\ - X_iX_i^\dagger(X_i^\dagger)^*DX_i^*X_iX_i^\dagger,\end{aligned}$$

es decir

$$(X_iX_i^\dagger)(X_iDX_i^\dagger - (X_i^\dagger)^*DX_i^*)(X_iX_i^\dagger) = X_iDX_i^\dagger - X_iX_i^\dagger(X_i^\dagger)^*DX_i^*X_iX_i^\dagger. \tag{2.13}$$

Luego, si se procede de la misma forma con cada uno de los términos de la derecha, se obtiene en ambos casos la matriz nula. En efecto, para el primer término se tiene que

$$\begin{aligned}(X_iX_i^\dagger)(Y_iW_{X_i}^{(r)})^*(X_iX_i^\dagger) &= (X_iX_i^\dagger)(W_{X_i}^{(r)})^*Y_i^*(X_iX_i^\dagger) \\ &= (X_iX_i^\dagger)(I - X_iX_i^\dagger)^*Y_i^*(X_iX_i^\dagger) \\ &= (X_iX_i^\dagger)(I - X_iX_i^\dagger)Y_i^*(X_iX_i^\dagger) \\ &= (X_iX_i^\dagger - X_iX_i^\dagger X_iX_i^\dagger)Y_i^*(X_iX_i^\dagger) \\ &= (X_iX_i^\dagger - X_iX_i^\dagger)Y_i^*(X_iX_i^\dagger) \\ &= O\end{aligned} \tag{2.14}$$

y para el segundo término

$$\begin{aligned}(X_iX_i^\dagger)Y_iW_{X_i}^{(r)}(X_iX_i^\dagger) &= (X_iX_i^\dagger)Y_i(I - X_iX_i^\dagger)(X_iX_i^\dagger) \\ &= (X_iX_i^\dagger)Y_i(X_iX_i^\dagger - X_iX_i^\dagger X_iX_i^\dagger) \\ &= (X_iX_i^\dagger)Y_i(X_iX_i^\dagger - X_iX_i^\dagger) \\ &= O.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Se observa que (2.14) puede obtenerse también tomando traspuesta conjugada en (2.15).

Luego por lo obtenido en (2.13), (2.14) y (2.15) se llega a que

$X_i D X_i^\dagger - X_i X_i^\dagger (X_i^\dagger)^* D X_i^* X_i X_i^\dagger = O$, o sea, $X_i D X_i^\dagger = X_i X_i^\dagger (X_i^\dagger)^* D X_i^* X_i X_i^\dagger$.

Ahora, si se multiplica a derecha la última expresión por X_i se tiene que

$$\begin{aligned} X_i D X_i^\dagger X_i &= X_i X_i^\dagger (X_i^\dagger)^* D X_i^* X_i X_i^\dagger X_i \\ &= X_i X_i^\dagger (X_i^\dagger)^* D X_i^* X_i. \end{aligned}$$

Por último, usando la condición $X_i D X_i^\dagger X_i = X_i D$ se obtiene

$$X_i D = X_i X_i^\dagger (X_i^\dagger)^* D X_i^* X_i, \text{ para } i = 1, 2,$$

que es la ecuación (2.8).

Utilizando la notación de las expresiones (2.5) y (2.7), si se reescriben las ecuaciones dadas por $\tilde{A}_{s,s+1} \tilde{X}_s = \tilde{X}_s D$ se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} O & A_{s,s+1} \\ A_{s+1,s} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_s \\ X_{s+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{s,s+1} & X_{s+1} \\ A_{s+1,s} & X_s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_s \\ X_{s+1} \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} X_s & D \\ X_{s+1} & D \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que lleva al sistema matricial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_{s,s+1} X_{s+1} &=& X_s D \\ A_{s+1,s} X_s &=& X_{s+1} D \end{array} \right. \tag{2.16}$$

para cada $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$.

Tomando traspuesta conjugada en la segunda ecuación y utilizando el hecho de que $A_{s+1,s}^* = A_{s,s+1}$, debido a que A es hermítica, resulta el sistema matricial equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_{s,s+1} X_{s+1} &=& X_s D \\ X_s^* A_{s,s+1} &=& D X_{s+1}^* \end{array} \right.$$

para cada $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$, cuya única incógnita es $A_{s,s+1}$.

A partir del Teorema 1.3.1 y del Lema 1.3.2 se tiene que las condiciones dadas en (2.9) garantizan la existencia de solución del sistema matricial anterior. Además, su solución general está dada por

$$A_{s,s+1} = (X_s^*)^\dagger D X_{s+1}^* + W_{X_s^*}^{(l)} X_s D X_{s+1}^\dagger + W_{X_s^*}^{(l)} Y_s W_{X_{s+1}}^{(r)}.$$

Como

$$\begin{aligned} W_{X_s^*}^{(l)} X_s D X_{s+1}^\dagger &= (I - (X_s^*)^\dagger X_s^*) X_s D X_{s+1}^\dagger \\ &= (I - ({X_s}^\dagger)^* {X_s}^*) X_s D X_{s+1}^\dagger \\ &= (I - (X_s X_s^\dagger)^*) X_s D X_{s+1}^\dagger \\ &= (I - X_s X_s^\dagger) X_s D X_{s+1}^\dagger \\ &= O, \end{aligned}$$

la solución del sistema matricial (2.16) puede expresarse de la forma

$$\begin{array}{rcl} A_{s,s+1} & = & (X_s^*)^\dagger D X_{s+1}^* + W_{X_s^*}^{(l)} Y_s W_{X_{s+1}}^{(r)} \\ A_{s+1,s} & = & A_{s,s+1}^* = X_{s+1} D (X_s)^\dagger + W_{X_{s+1}^*}^{(l)} Y_s^* W_{X_s}^{(r)}. \end{array} \tag{2.17}$$

Finalmente, de (2.11) y (2.17), la solución general del problema viene dada por

$$A = U \operatorname{diag}\left(X_1 D X_1^\dagger + Y_1 W_{X_1}^{(r)}, X_2 D X_2^\dagger + Y_2 W_{X_2}^{(r)}, \tilde{A}_{3,4}, \ldots, \tilde{A}_{p-1,p}, O \right) U^*.$$

La implicación recíproca es evidente. ■

El siguiente Lema da condiciones necesarias para que la ecuación $X_s^* X_s D = D X_{s+1}^* X_{s+1}$, que se presenta en (2.9) se cumpla.

Lema 2.2.1 *Utilizando las mismas notaciones que en el Teorema 2.2.1, se denotará por*

$$x_{i,\cdot}^{(s)} = \left[\begin{array}{ccc} x_{i1}^{(s)} & \ldots & x_{im}^{(s)} \end{array} \right] \qquad \textit{para cada } i = 1, 2, \ldots, r_s,$$

a cada una de las filas de la matriz $X_s \in \mathbb{C}^{r_s \times m}$ *y*

$$|x_{i,.}^{(s)}| = \left[\begin{array}{ccc} |x_{i1}^{(s)}| & \ldots & |x_{im}^{(s)}| \end{array} \right].$$

Si

$$X_s^* X_s D = D X_{s+1}^* X_{s+1} \tag{2.18}$$

entonces se cumplen las siguientes condiciones:

(a) $\det(D) = 0$ *ó* $\prod_{i=1}^{m} \sigma_i(X_s) = \pm \prod_{i=1}^{m} \sigma_i(X_{s+1})$, *para* $s \in \{3, 4, \ldots, p-1\}$

(b) $\left\langle \sum_{i=1}^{r_s} |x_{i,.}^{(s)}|^2 - \sum_{j=1}^{r_{s+1}} |x_{j,.}^{(s+1)}|^2, \mathrm{diag}(D) \right\rangle = 0$, *para* $s \in \{3, 4, \ldots, p-1\}$, *donde* $\langle , \rangle$ *representa el producto escalar canónico de* $\mathbb{C}^m$.

Demostración. De la partición (2.7), es claro que $X_s^* X_s \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Luego, si se toma determinante en la ecuación (2.18) se tiene que

$$\det(X_s^* X_s D) = \det(D X_{s+1}^* X_{s+1}). \tag{2.19}$$

Usando propiedades de determinantes

$$\det(X_s^* X_s D) = \det(D)\det(X_s^* X_s)$$

y

$$\det(D X_{s+1}^* X_{s+1}) = \det(D)\det(X_{s+1}^* X_{s+1}),$$

de (2.19) se tiene que

$$\det(D) = 0 \quad \text{ó} \;\; \det(X_s^* X_s) = \det(X_{s+1}^* X_{s+1}).$$

Dado que el determinante de una matriz cuadrada coincide con el producto de sus valores propios, si $\sigma_i(.)$ denota el valor singular de (.), se tiene

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\sigma_i(X_s)\right)^2 = \prod_{i=1}^{m} \left(\sigma_i(X_{s+1})\right)^2,$$

y por lo tanto se cumple (a).

Por otro parte, si se toma la traza a ambos lados de la ecuación (2.18)

$$\mathrm{tr}(X_s^* X_s D) = \mathrm{tr}(D X_{s+1}^* X_{s+1})$$

y se utilizan propiedades de la traza de una matriz se tiene que

$$0 = \mathrm{tr}(X_s^* X_s D) - \mathrm{tr}(X_{s+1}^* X_{s+1} D) = \mathrm{tr}(X_s^* X_s D - X_{s+1}^* X_{s+1} D)$$

$$= \mathrm{tr}((X_s^* X_s - X_{s+1}^* X_{s+1}) D).$$

Sabiendo que la traza del producto de una matriz por otra matriz que es diagonal se puede escribir como el producto escalar entre las diagonales de cada una de las matrices, se llega a la condición (b). ∎

2.2.2 Ejemplo

En este ejemplo se analiza un modelo muy utilizado tanto en Ingeniería de Caminos como en Ingeniería Mecánica.

EJEMPLO 2.2.1 *La representación matricial de un sistema lineal vibratorio con n grados de libertad está dada por*

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = F,$$

donde M es la matriz de inercia, C es la matriz de amortiguamiento, K es la matriz de rigidez y F es la matriz de fuerzas. El símbolo $\dot{Y}$ denota la derivada del vector del vector de posiciones Y. En el caso particular de oscilaciones libres en un sistema no amortiguado, la ecuación es más simple y se reduce a

$$M\ddot{Y} + KY = O. \tag{2.20}$$

Las matrices K y M son matrices reales de tamaño $n \times n$. Ambas matrices son simétricas y, además, la matriz M debe ser definida positiva.

El vector solución $Y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]^T$ *debe satisfacer*

$$\ddot{Y} = -\omega^2 Y,$$

ya que se pretende encontrar un vector con componentes $y_i(t) = a_i \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i)$, *para* $i = 1, \ldots, n$.

Sustituyendo en la ecuación (2.20) se tiene que

$$-\omega^2 MY + KY = O.$$

Dado que la matriz M *es definida positiva, es invertible y multiplicando a izquierda la última ecuación por* M^{-1} *se obtiene* $-\omega^2 M^{-1}MY + M^{-1}KY = 0$, *es decir,*

$$M^{-1}KY = \omega^2 Y.$$

Este es un problema de valores y vectores propios donde las incógnitas a determinar son las matrices M *y* K.

Sea X *la matriz cuyas columnas son los vectores propios y* D *la matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios, entonces la ecuación anterior puede reescribirse de la forma* $AX = XD$ *siendo* $A = M^{-1}K$. *Si se conocen* ω *y las matrices* X *y* M, *el problema de encontrar una matriz* K *puede verse como un problema inverso de valores propios.*

Considérense las matrices

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Es claro que -1 *es una valor propio doble de* J *y* $U = I_2$. *Luego,* $r_1 = 2$. *En este caso* $U^*X = X_1$. *Además, se tiene que* $X^\dagger = X$ *y*

$$K = M^{-1}K = A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matriz $A \in \mathcal{H}J^{2\times 2}$ *ya que claramente es hermítica y además*

$$\begin{aligned} JAJ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

Es fácil ver que tanto la matriz M *como la matriz* K *son simétricas y definidas positivas.*

2.3 Problema de optimización

Para dos matrices dadas $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$, se considera nuevamente el conjunto $\mathcal{S}$ de todas las matrices $A \in \mathcal{H}J^{n\times n}$ que son soluciones de la ecuación $AX = XD$, es decir,

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{H}J^{n\times n} : AX = XD\}.$$

En esta sección se resolverá el problema de optimización asociado. Es decir, dada una matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y considerando que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, el problema consiste en hallar $\hat{A} \in \mathcal{S}$ tal que

$$\min_{A\in\mathcal{S}} \|A - B\|_F = \|\hat{A} - B\|_F. \tag{2.21}$$

Observación 2.3.1 *Notar que* $\mathcal{S}$ *puede ser vacío. Esto puede ser comprobado en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 2.3.1 *Se consideran las matrices*

$$X = \begin{bmatrix} 1+i & -1-i \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La solución de $AX = XD$ está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz A es hermítica pero $JAJ - A = \begin{bmatrix} 0 & -2-2i \\ -2+2i & 0 \end{bmatrix} \neq O.$

En el siguiente lema se probará que $\mathcal{S}$ es un conjunto cerrado convexo y se utilizará para asegurar la unicidad de la solución del problema.

Lema 2.3.1 *El conjunto $\mathcal{S}$ es un conjunto cerrado y convexo de $\mathcal{H}J^{n\times n}$.*

Demostración. Para probar que el conjunto $\mathcal{S}$ es cerrado se considera una sucesión de matrices $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}$ que converge a una matriz A. En primer lugar se demostrará que $A \in \mathcal{H}J^{n\times n}$ y luego que A satisface la ecuación $AX = XD$. En efecto,

- $\|A_n - JAJ\|_F = \|JA_nJ - JAJ\|_F = \|J(A_n - A)J\|_F$, por tanto

  $$\|A_n - JAJ\|_F \leq \|J\|_F \, \|A_n - A\|_F \, \|J\|_F = \|J\|_F^2 \, \|A_n - A\|_F.$$

  Como $A_n \to A$, $\|A_n - A\|_F \to 0$ para $n \to +\infty$, por lo tanto $JAJ = A$.

- $\|A_n - A^*\|_F = \|A_n^* - A^*\|_F = \|(A_n - A)^*\|_F = \|A_n - A\|_F$. Dado que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, se tiene que $A = A^*$.

- Como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S se tiene que $\|AX - XD\|_F = \|AX - A_nX\|_F$. Luego, $\|AX - A_nX\|_F = \|(A - A_n)X\|_F \leq \|A_n - A\|_F \, \|X\|_F$ y como la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, se tiene que $AX = XD$.

De este modo se tiene que $A \in \mathcal{S}$.

Falta probar que $\mathcal{S}$ es convexo. Sean E y F dos matrices en $\mathcal{S}$ y sea

$$Z = (1-\alpha)E + \alpha F, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

- En primer lugar se prueba que $Z \in \mathcal{H}J^{n\times n}$, es decir, $Z = Z^* = JZJ$. En efecto, $Z^* = ((1-\alpha)E+\alpha F)^* = (1-\alpha)E^*+\alpha F^* = (1-\alpha)E+\alpha F = Z$. Además, $Z = (1-\alpha)E+\alpha F = (1-\alpha)JEJ+\alpha JFJ = J((1-\alpha)E+\alpha F)J = JZJ$.

- Ahora se prueba que Z satisface la ecuación $ZX = XD$. En efecto, teniendo en cuenta que $EX = XD$ y $FX = XD$ se tiene que $ZX = ((1-\alpha)E+\alpha F)X = (1-\alpha)EX+\alpha FX = (1-\alpha)XD+\alpha XD = XD-\alpha XD+\alpha XD = XD$.

Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{S}$ es convexo. ■

Como el espacio $\mathbb{C}^{n\times n}$ es un espacio de Banach uniformemente convexo con respecto a la norma de Frobenius (véase el Lema 1.3.3 de la página 19), la unicidad de la solución del problema (2.21) está garantizada, (ver, por ejemplo, [8], p. 22).

Para hallar la solución $\hat{A}$, se comenzará transformando el problema en uno más sencillo, como se establece a continuación.

2.3.1 El problema de optimización simplificado

Sea U la matriz unitaria que aparece en la diagonalización (2.1) de J y sea $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz arbitraria dada, particionada de la siguiente manera:

$$B = U \begin{bmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,p} & B_{1,p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{p,1} & \dots & B_{p,p} & B_{p,p+1} \\ B_{p+1,1} & \dots & B_{p+1,p} & B_{p+1,p+1} \end{bmatrix} U^*,$$

donde $B_{i,j} \in \mathbb{C}^{m_i\times t_j}$ y $m_1+\cdots+m_p+m_{p+1} = t_1+\cdots+t_p+t_{p+1} = n$.

Dado que la norma de Frobenius es invariante mediante transformaciones unitarias, (véase la propiedad 1.3.1 de la página 17), usando la solución (2.10), se puede hallar una nueva expresión para $\|A-B\|_F^2$

$$\begin{aligned}
\|A-B\|_F^2 &= \|U^*AU-U^*BU\|_F^2 \\
&= \|A_{1,1}-B_{1,1}\|_F^2+\|A_{2,2}-B_{2,2}\|_F^2+\|A_{3,4}-B_{3,4}\|_F^2 \\
&\quad +\|A_{4,3}-B_{4,3}\|_F^2+\cdots+\|A_{p-1,p}-B_{p-1,p}\|_F^2 \\
&\quad +\|A_{p,p-1}-B_{p,p-1}\|_F^2+\sum_{i=3}^{p+1}\|B_{i,i}\|_F^2+\sum_{i=2}^{p+1}\|B_{i,1}\|_F^2+\sum_{j=2}^{p+1}\|B_{1,j}\|_F^2 \\
&\quad +\sum_{i=3}^{p+1}\|B_{i,2}\|_F^2+\sum_{j=3}^{p+1}\|B_{2,j}\|_F^2+\sum_{i\in J_1}\sum_{j=i+2}^{p+1}(\|B_{i,j}\|_F^2+\|B_{i+1,j}\|_F^2) \\
&\quad +\sum_{j\in J_1}\sum_{i=j+2}^{p+1}(\|B_{i,j}\|_F^2+\|B_{i,j+1}\|_F^2) \\
&\quad +\|B_{p-1,p+1}\|_F^2+\|B_{p,p+1}\|_F^2+\|B_{p+1,p-1}\|_F^2+\|B_{p+1,p}\|_F^2,
\end{aligned}$$

donde $J_1=\{3,5,7,\dots,p-3\}$.

Entonces, resolver el problema (2.21) es equivalente a encontrar

$$\begin{aligned}
\min_{A\in\mathcal{S}} \;& (\|A_{1,1}-B_{1,1}\|_F^2+\|A_{2,2}-B_{2,2}\|_F^2+\|A_{3,4}-B_{3,4}\|_F^2+\|A_{4,3}-B_{4,3}\|_F^2 \\
& +\cdots+\|A_{p-1,p}-B_{p-1,p}\|_F^2+\|A_{p,p-1}-B_{p,p-1}\|_F^2) \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

debido a que los restantes elementos están fijos. Por lo tanto, se resolverá el problema (2.22) en vez del problema (2.21) por tratarse de un problema más sencillo.

2.3.2 Forma explícita de la solución

Antes de hallar la forma explícita de la solución se mostrarán algunos resultados previos que son necesarios para encontrarla.

Lema 2.3.2 *Sean $M_1 \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $M_2 \in \mathbb{C}^{n\times t}$, $R_1 \in \mathbb{C}^{r\times n}$ y $R_2 \in \mathbb{C}^{r\times n}$. Entonces el problema de minimización*

$$\min_{Y\in\mathbb{C}^{r\times n}} \|W_{M_1}^{(l)}\ Y\ W_{M_2}^{(r)} - R_1\|_F^2 + \min_{Y\in\mathbb{C}^{r\times n}} \|W_{M_1}^{(l)}\ Y\ W_{M_2}^{(r)} - R_2\|_F^2 \tag{2.23}$$

tiene como soluciones las matrices $\hat{Y} \in \mathbb{C}^{r\times n}$ dadas por

$$\hat{Y} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) + GM_2M_2^\dagger + M_1^\dagger M_1 G - M_1^\dagger M_1 G M_2 M_2^\dagger,$$

donde $G \in \mathbb{C}^{r\times n}$ es una matriz arbitraria.

Demostración. Sea $T = W_{M_1}^{(l)}\ Y\ W_{M_2}^{(r)}$. Usando la definición de la norma de Frobenius y propiedades de la traza de una matriz, se tiene que

$$\|T - R_1\|_F^2 + \|T - R_2\|_F^2 = \mathrm{tr}\left[(T^* - R_1^*)(T - R_1)\right] + \mathrm{tr}\left[(T^* - R_2^*)(T - R_2)\right] =$$

$$= 2\ \mathrm{tr}\left[T^*T\right] - \mathrm{tr}\left[T^*R_1\right] - \mathrm{tr}\left[R_1^*T\right] - \mathrm{tr}\left[T^*R_2\right] - \mathrm{tr}\left[R_2^*T\right] + \mathrm{tr}\left[R_1^*R_1\right] + \mathrm{tr}\left[R_2^*R_2\right]$$

Sean $R = R_1 + R_2$ y $S = R_1 - R_2$. Por propiedades de la traza de una matriz se cumple que

$$\mathrm{tr}\left[T^*R_1\right] + \mathrm{tr}\left[T^*R_2\right] + \mathrm{tr}\left[R_1^*T\right] + \mathrm{tr}\left[R_2^*T\right] = \mathrm{tr}\left[T^*R\right] + \mathrm{tr}\left[R^*T\right] \tag{2.24}$$

y

$$\mathrm{tr}\left[R_1^*R_1\right] + \mathrm{tr}\left[R_2^*R_2\right] = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[R^*R\right] + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[S^*S\right]. \tag{2.25}$$

Además,

$$2\mathrm{tr}\,[T^*T] - \mathrm{tr}\,[T^*R] - \mathrm{tr}\,[R^*T] + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[R^*R] = 2\ \mathrm{tr}\left[\left(T^* - \frac{1}{2}R^*\right)\left(T - \frac{1}{2}R\right)\right]$$
$$= 2\ \|T - \frac{1}{2}R\|_F^2. \tag{2.26}$$

De (2.24), (2.25) y (2.26) se tiene que

$$\|T - R_1\|_F^2 + \|T - R_2\|_F^2 = 2\ \|T - \frac{1}{2}R\|_F^2 + \frac{1}{2}\|S\|_F^2. \tag{2.27}$$

Sumando y restando $\frac{1}{2}M_1^\dagger M_1 R$ a la matriz $T - \frac{1}{2}R$ y recordando que $T = W_{M_1}^{(l)}\ Y\ W_{M_2}^{(r)}$ se tiene

$$\begin{aligned}\|T - \frac{1}{2}R\|_F^2 &= \|T - \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}M_1^\dagger M_1 R - \frac{1}{2}M_1^\dagger M_1 R\|_F^2\\ &= \|T - \frac{1}{2}W_{M_1}^{(l)}R - \frac{1}{2}M_1^\dagger M_1 R\|_F^2\\ &= \|W_{M_1}^{(l)}(YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}R) - \frac{1}{2}M_1^\dagger M_1 R\|_F^2.\end{aligned} \tag{2.28}$$

y

$$\begin{aligned}&\|W_{M_1}^{(l)}(YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}M_1^\dagger M_1 R\|_F^2 =\\ =\ &\mathrm{tr}\left[\left((YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}R)^*(W_{M_1}^{(l)})^* - \frac{1}{2}R^*(M_1^\dagger M_1)^*\right)\right.\\ &\qquad\left.\left(W_{M_1}^{(l)}(YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}R) - \frac{1}{2}M_1^\dagger M_1 R\right)\right]\\ =\ &\mathrm{tr}\left[(YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}R)^*(W_{M_1}^{(l)})^*W_{M_1}^{(l)}(YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}R) + \right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{4}R^*(M_1^\dagger M_1)^*M_1^\dagger M_1 R\right]\\ =\ &\|W_{M_1}^{(l)}(YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}R)\|_F^2 + \frac{1}{4}\|M_1^\dagger M_1 R\|_F^2.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Ahora sumando y restando $\frac{1}{2}RM_2M_2^\dagger$ a la matriz $W_{M_1}^{(l)}\left(YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}R\right)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\|W_{M_1}^{(l)}(YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}R)\|_F^2 &= \|W_{M_1}^{(l)}(YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}RW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}RM_2M_2^\dagger)\|_F^2 \\ &= \|W_{M_1}^{(l)}(YW_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}RW_{M_2}^{(r)}) - \frac{1}{2}W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\|_F^2 \\ &= \|W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}R)W_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\|_F^2.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Nuevamente, usando propiedades de la inversa de Moore-Penrose

$$\begin{aligned}&\|W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}R)W_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\|_F^2 = \\ = \;& \mathrm{tr}\left[\left(W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}R)W_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\right)^*\right. \\ &\qquad\left.\left(W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}R)W_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\right)\right] \\ = \;& \mathrm{tr}\left[(W_{M_2}^{(r)})^*(Y - \frac{1}{2}R)^*(W_{M_1}^{(l)})^*W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}R)W_{M_2}^{(r)}\right] \\ &- \mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}(W_{M_2}^{(r)})^*(Y - \frac{1}{2}R)^*(W_{M_1}^{(l)})^*W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\right] \\ &- \mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}(M_2M_2^\dagger)^*R^*(W_{M_1}^{(l)})^*W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}R)W_{M_2}^{(r)}\right] \\ &+ \mathrm{tr}\left[\frac{1}{4}(W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger)^*W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\right].\end{aligned} \tag{2.31}$$

Debido a que

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left[(W_{M_2}^{(r)})^*(Y - \frac{1}{2}R)^*W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\right] = \\ &= \;\mathrm{tr}\left[M_2M_2^\dagger(W_{M_2}^{(r)})^*(Y - \frac{1}{2}R)^*W_{M_1}^{(l)}R\right] \\ &= \;O\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left[(M_2M_2^\dagger)^* R^* W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}R)W_{M_2}^{(r)}\right] &= \\
= \ \operatorname{tr}\left[W_{M_2}^{(r)}(M_2M_2^\dagger)^* R^* W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}R)\right] \\
= \ O,
\end{aligned}$$

de (2.31) se tiene que

$$\|W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}R)W_{M_2}^{(r)} - \frac{1}{2}W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\|_F^2 =$$
$$= \|W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}R)(W_{M_2}^{(r)}\|_F^2 + \frac{1}{4}\|W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\|_F^2. \quad (2.32)$$

Finalmente, de (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) y (2.32) se tiene que

$$\|W_{M_1}^{(l)}YW_{M_2}^{(r)} - R_1\|_F^2 + \|W_{M_1}^{(l)}YW_{M_2}^{(r)} - R_2\|_F^2 = 2\|W_{M_1}^{(l)}(Y - \frac{1}{2}(R_1+R_2))W_{M_2}^{(r)}\|_F^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\|W_{M_1}^{(l)}RM_2M_2^\dagger\|_F^2 + \frac{1}{2}\|M_1^\dagger M_1(R_1 + R_2)\|_F^2 + \frac{1}{2}\|R_1 - R_2\|_F^2.$$

Entonces, el problema

$$\min_{Y\in\mathbb{C}^{r\times n}} \|W_{M_1}^{(l)}YW_{M_2}^{(r)} - R_1\|_F^2 + \min_{Y\in\mathbb{C}^{r\times n}} \|W_{M_1}^{(l)}YW_{M_2}^{(r)} - R_2\|_F^2$$

es equivalente al problema

$$\min_{Y\in\mathbb{C}^{r\times n}} \|(I_r - M_1^\dagger M_1)[Y - \frac{1}{2}(R_1 + R_2)](I_n - M_2M_2^\dagger)\|_F^2 \qquad (2.33)$$

porque en los otros términos no aparece la matriz Y.

Utilizando el Teorema 1.3.1, se tiene que la solución del problema es

$$\hat{Y} - \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = G - (I_r - M_1^\dagger M_1)^\dagger (I_r - M_1^\dagger M_1) G (I_n - M_2M_2^\dagger)(I_n - M_2M_2^\dagger)^\dagger,$$

donde $G \in \mathbb{C}^{r\times n}$ es una matriz arbitraria.

Como $I_r - M_1^\dagger M_1$ y $I_n - M_2M_2^\dagger$ son proyectores y se tiene que

$$(I_r - M_1^\dagger M_1)^\dagger = I_r - M_1^\dagger M_1, \qquad (I_n - M_2M_2^\dagger)^\dagger = I_n - M_2M_2^\dagger,$$

resulta que

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= \frac{1}{2}(R_1 + R_2) + G - (I_r - M_1^\dagger M_1)G(I_n - M_2 M_2^\dagger)\\ &= \frac{1}{2}(R_1 + R_2) + G - (G - M_1^\dagger M_1 G)(I_n - M_2 M_2^\dagger)\\ &= \frac{1}{2}(R_1 + R_2) + G - (G - GM_2M_2^\dagger - M_1^\dagger M_1 G + M_1^\dagger M_1 G M_2 M_2^\dagger)\\ &= \frac{1}{2}(R_1 + R_2) + GM_2M_2^\dagger + M_1^\dagger M_1 G - M_1^\dagger M_1 G M_2 M_2^\dagger.\end{aligned}$$

Luego, la solución de (2.23) puede expresarse como

$$\hat{Y} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) + GM_2M_2^\dagger + M_1^\dagger M_1 G - M_1^\dagger M_1 G M_2 M_2^\dagger,$$

siendo $G \in \mathbb{C}^{r\times n}$ una matriz arbitraria. ■

Observación 2.3.2 *De la demostración del Lema 2.3.2 se tiene que*

$$\begin{aligned}&\|W_{M_1}^{(l)}\hat{Y}W_{M_2}^{(r)} - R_1\|_F^2 + \|W_{M_1}^{(l)}\hat{Y}W_{M_2}^{(r)} - R_2\|_F^2 =\\ =\ & 2\|W_{M_1}^{(l)}\ [\hat{Y} - \frac{1}{2}(R_1 + R_2)]W_{M_2}^{(r)}\|_F^2 + \frac{1}{2}\|M_1^\dagger M_1(R_1 + R_2)\|_F^2 +\\ &+\frac{1}{2}\|W_{M_1}^{(l)}(R_1 + R_2)M_2M_2^\dagger\|_F^2 + \frac{1}{2}\|R_1 - R_2\|_F^2.\end{aligned}$$

Como $\hat{Y}$ *es la solución del problema (2.33) entonces*

$$W_{M_1}^{(l)}[\hat{Y} - \frac{1}{2}(R_1 + R_2)]W_{M_2}^{(r)} = O.$$

Luego,

$$\begin{aligned}&\|W_{M_1}^{(l)}\hat{Y}W_{M_2}^{(r)} - R_1\|_F^2 + \|W_{M_1}^{(l)}\hat{Y}W_{M_2}^{(r)} - R_2\|_F^2 =\\ =\ & \frac{1}{2}\|M_1^\dagger M_1(R_1 + R_2)\|_F^2 + \frac{1}{2}\|W_{M_1}^{(l)}(R_1 + R_2)M_2M_2^\dagger\|_F^2 + \frac{1}{2}\|R_1 - R_2\|_F^2\\ =\ & \frac{1}{2}\left(\|R_1 - R_2\|_F^2 + \|M_1^\dagger M_1(R_1 + R_2)\|_F^2 + \|W_{M_1}^{(l)}(R_1 + R_2)M_2M_2^\dagger\|_F^2\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|W_{M_1}^{(l)}\hat{Y}W_{M_2}^{(r)} - R_1\|_F^2 + \|W_{M_1}^{(l)}\hat{Y}W_{M_2}^{(r)} - R_2\|_F^2$$

es invariante para cualquier elección de G.

Para obtener la solución general del problema (2.22), se necesita el siguiente caso particular del Lema 2.3.2.

Corolario 2.3.1 *Sean $M \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $R \in \mathbb{C}^{r\times n}$. Entonces existe una matriz $\hat{Y} \in \mathbb{C}^{r\times n}$ tal que*

$$\min_{Y\in\mathbb{C}^{r\times n}} \|Y\left(I_n - MM^\dagger\right) - R\|_F = \|\hat{Y}(I_n - MM^\dagger) - R\|_F, \tag{2.34}$$

donde $\hat{Y} = R + GMM^\dagger$ y $G \in \mathbb{C}^{r\times n}$ es una matriz arbitraria.

Demostración. Es una consecuencia directa del Lema 2.3.2 tomando $M_1 = O$, $M_2 = M$ y $R_1 = R_2 = R$. ∎

Observación 2.3.3 *En el Corolario 2.3.1, la matriz $\hat{Y}$ se puede simplificar de la siguiente manera:*

Si se considera $M_1 = O$, $M_2 = M$ y $R_1 = R_2 = R$ entonces (2.33) se reduce a

$$\min_{Y\in\mathbb{C}^{r\times n}} \|\left(Y - R\right)\left(I_n - MM^\dagger\right)\|_F. \tag{2.35}$$

Ahora, se sabe que la ecuación $(Y - R)\left(I_n - MM^\dagger\right) = O$ es válida si y sólo si $\mathcal{R}(I_n - MM^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(Y - R)$. Como $I_n - MM^\dagger$ es un proyector, resulta que $\mathcal{R}(I_n - MM^\dagger) = \mathcal{N}(MM^\dagger) = \mathcal{N}(M^\dagger)$ pues $M^\dagger MM^\dagger = M^\dagger$. Se puede ver sin mucha dificultad que $\mathcal{N}(M^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(Y - R)$ es equivalente a la existencia de una matriz $G \in \mathbb{C}^{r\times m}$ tal que $Y - R = GM^\dagger$.

Entonces, una nueva expresión para $\hat{Y}$ es $\hat{Y} = R + G_0M^\dagger$.

Observación 2.3.4 *Del Corolario 2.3.1 se puede ver que*

$$\begin{aligned}\|\hat{Y}\left(I_n - MM^\dagger\right) - R\|_F &= \|(R + GMM^\dagger)\left(I_n - MM^\dagger\right) - R\|_F \\ &= \|R + GMM^\dagger - (R + GMM^\dagger)MM^\dagger - R\|_F \\ &= \|R + GMM^\dagger - RMM^\dagger - GMM^\dagger MM^\dagger - R\|_F \\ &= \|R + GMM^\dagger - RMM^\dagger - GMM^\dagger - R\|_F \\ &= \|RMM^\dagger\|_F.\end{aligned}$$

Esto es, el valor de $\|\hat{Y}\left(I_n - MM^\dagger\right) - R\|_F$ es invariante para cualquier elección de la matriz G.

Ahora, se está en condiciones de dar una solución explícita del problema.

Teorema 2.3.1 *Sea $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Considérese la partición de la matriz*

$$U^*BU = \begin{bmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,p} & B_{1,p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{p,1} & \dots & B_{p,p} & B_{p,p+1} \\ B_{p+1,1} & \dots & B_{p+1,p} & B_{p+1,p+1} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

donde $B_{i,j} \in \mathbb{C}^{m_i\times t_j}$, $m_1 + m_2 + \cdots + m_{p+1} = t_1 + t_2 + \cdots + t_{p+1} = n$ y U es la matriz unitaria que aparece en (2.1). Bajo las condiciones y notaciones del Teorema 2.2.1, si el conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones del Problema (I) de la página 24 no es vacío, entonces el problema de minimización (2.21) tiene una única solución dada por

$$\hat{A} = U\,\mathrm{diag}(A_{1,1}, A_{2,2}, \tilde{A}_{3,4}, \dots, \tilde{A}_{p-1,p}, O)\,U^*, \tag{2.37}$$

donde $A_{i,i} = X_iDX_i^\dagger + B_{i,i}W_{X_i}^{(r)}$ para $i = 1, 2$, y

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{s,s+1} = &\begin{bmatrix} O & (X_s^*)^\dagger DX_{s+1}^* \\ X_{s+1}DX_s^\dagger & O \end{bmatrix} + \\ + \quad &\frac{1}{2}\begin{bmatrix} O & W_{X_s}^{(r)}(B_{s,s+1} + B_{s+1,s}^*)W_{X_{s+1}}^{(r)} \\ W_{X_{s+1}}^{(r)}(B_{s,s+1}^* + B_{s+1,s})W_{X_s}^{(r)} & O \end{bmatrix},\end{aligned}$$

para $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$.

Demostración. Usando las expresiones de $A_{1,1}$ y $A_{2,2}$ dadas por (2.11) se tiene

$$\begin{aligned} \|A_{i,i} - B_{i,i}\|_F^2 &= \|X_i D X_i^\dagger + Y_i(I_{t_i} - X_i X_i^\dagger) - B_{i,i}\|_F^2 \\ &= \|Y_i W_{X_i}^{(r)} - (B_{i,i} - X_i D X_i^\dagger)\|_F^2. \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$.

Teniendo en cuenta las expresiones dadas en (2.17) y la relación $A_{s,s+1} = A_{s+1,s}^*$ para $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$ se tiene que

$$\|A_{s,s+1} - B_{s,s+1}\|_F^2 + \|A_{s+1,s} - B_{s+1,s}\|_F^2 =$$

$$= \|A_{s,s+1} - B_{s,s+1}\|_F^2 + \|A_{s,s+1} - B_{s+1,s}^*\|_F^2$$

$$= \|W_{X_s^*}^{(l)} Y_s W_{X_{s+1}}^{(r)} - R_s\|_F^2 + \|W_{X_s^*}^{(l)} Y_s W_{X_{s+1}}^{(r)} - R_{s+1}\|_F^2$$

donde R_s y R_{s+1} están dadas por

$$\begin{aligned} R_s &= B_{s,s+1} - (X_s^*)^\dagger D X_{s+1}^*, \\ R_{s+1} &= B_{s+1,s}^* - (X_s^*)^\dagger D X_{s+1}^*, \end{aligned}$$

para $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$, dado que $W_{X_s^*}^{(l)} X_s D X_{s+1}^\dagger = O$.

Como los problemas (2.21) y (2.22) son equivalentes, se debe hallar

$$\min_{Y_i} \|Y_i W_{X_i}^{(r)} - (B_{i,i} - X_i D X_i^\dagger)\|_F^2$$

para $i = 1, 2$ y

$$\min_{Y_s} \|W_{X_s^*}^{(l)} Y_s W_{X_{s+1}}^{(r)} - R_s\|_F^2 \ + \ \min_{Y_s} \|W_{X_s^*}^{(l)} Y_s W_{X_{s+1}}^{(r)} - R_{s+1}\|_F^2$$

para $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$.

Del Corolario 2.3.1 y la Observación 2.3.3 se deduce que existen matrices $Y_i \in \mathbb{C}^{m_i \times t_i}$, tales que

$$Y_i = B_{i,i} - X_i D X_i^{\dagger} + G_i X_i^{\dagger},$$

donde $G_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ son matrices arbitrarias para $i = 1, 2$. Usando el Lema 2.3.2, se tiene que existen matrices $Y_s \in \mathbb{C}^{m_s \times t_{s+1}}$ tales que

$$Y_s = \frac{1}{2}\left(R_s + R_{s+1}\right) - (X_s^*)^{\dagger} X_s^* G_s X_{s+1} X_{s+1}^{\dagger} + G_s X_{s+1} X_{s+1}^{\dagger} + (X_s^*)^{\dagger} X_s^* G_s,$$

donde $G_s \in \mathbb{C}^{m_s \times t_{s+1}}$ son matrices arbitrarias para $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$. Finalmente, sustituyendo las expresiones de Y_1, Y_2 e Y_s, $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$, en (2.10), se obtiene que la única solución del problema (2.21) está dada por (2.37). ■

Un razonamiento similar al realizado en las secciones anteriores permite dar un resultado análogo para matrices A que son antireflexivas con respecto a una matriz J que es $\{k+1\}$-potente y normal.

2.4 Algoritmo y ejemplo numérico

En esta sección se propone un algoritmo para resolver el problema de optimización de Procustes estudiado en este capítulo teniendo en cuenta lo desarrollado en las secciones anteriores.

ALGORITMO

Entradas: Las matrices $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diagonal, $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal y $\{k+1\}$-potente.

Salida: La matriz $\hat{A}$.

Paso 1 Calcular $r_1, \cdots, r_{t+1}$ y U como en (2.1).

Paso 2 Realizar la partición de U^*X para obtener $X_1, X_2, \ldots, X_p, X_{p+1}$ como en (2.7).

Paso 3 Calcular $X_1^\dagger, X_2^\dagger, \ldots, X_p^\dagger$.

Paso 4 Si $X_i D W_{X_i}^{(l)} = O$, $X_i D = X_i X_i^\dagger (X_i^\dagger)^* D X_i^* X_i$ para $i = 1, 2$, $X_s D W_{X_{s+1}}^{(l)} = O$, $W_{X_s^*}^{(r)} D X_{s+1}^* = O$, $X_s^* X_s D = D X_{s+1}^* X_{s+1}$, para $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$ y $X_{p+1} D = O$, entonces ir al Paso 5. Si no, parar.

Paso 5 Realizar la partición de $B_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, p+1\}$ como en (2.36).

Paso 6 Calcular $A_{i,i} = X_i D X_i^\dagger + B_{i,i} W_{X_i}^{(r)}$ para $i = 1, 2$.

Paso 7 Calcular $A_{s,s+1} = (X_s^*)^\dagger D X_{s+1}^* + \frac{1}{2} W_{X_s}^{(r)} (B_{s,s+1} + B_{s+1,s}^*) W_{X_{s+1}}^{(r)}$ para $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$.

Paso 8 Calcular $A_{s+1,s} = A_{s,s+1}^*$ para $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$.

Paso 9 Calcular $\tilde{A}_{s,s+1}$ para $s \in \{3, 5, \ldots, p-1\}$, como en (2.5).

Paso 10 Calcular $\hat{A} = U \operatorname{diag}(A_{1,1}, A_{2,2}, \tilde{A}_{3,4}, \ldots, \tilde{A}_{p-1,p}, O)\, U^*$.

Fin

Este algoritmo puede ser fácilmente implementado en un ordenador usando el programa MATLAB R2016b.

Ejemplo 2.4.1 *Considérense las matrices*

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} & -\frac{1+i}{2} & 0 & 0 \\ i & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i & 0 & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8} - \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8} + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}i & 0 & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede observar que $J = UD_JU^*$ *donde*

$$D_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0.5+0.5i & 0 & -0.5-0.5i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y, además, $JJ^* = J^*J$ *y* $J^7 = J$. *En este caso,* J *es una matriz singular (en [32] se resolvió el caso no singular). Entonces,* $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 1$ *y este es el Paso 1. Después de calcular* U^*X *se obtiene*

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$X_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las inversas de Moore-Penrose que se calculan en el Paso 3 son

$$X_1^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^*, \qquad X_2^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^*,$$

$$X_3^\dagger = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^*, \ X_4^\dagger = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^*,$$

y

$$X_5^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^*.$$

Entonces, se satisfacen todas las igualdades del Paso 4. Ahora, se calcula

$$U^*BU =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8536 + 0.8536i & -0.7071i & 0.1464 - 0.8536i & 0.5 - 0.2071i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8536 - 0.1464i & -0.7071i & 0.1464 + 0.1464i & -0.5 - 1.2071i & 0 \\ -0.5000 + 1.2071i & 0 & 0.5000 + 0.2071i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $W_{X_i}^{(r)} = O$ *para* $i = 1, 2$, *se tiene que* $A_{1,1} = 2$ *y* $A_{2,2} = 1$ *que es el Paso 6 . En el Paso 7 se otiene* $A_{3,4} = -1$, *resultando en el Paso 8,* $A_{4,3} = -1$. *Finalmente, la matriz del Paso 10 es*

$$\begin{aligned} \hat{A} &= U \operatorname{diag}(A_{1,1}, A_{2,2}, \tilde{A}_{3,4}, O)\, U^* \\ &= \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0.7071 - 0.7071i & -0.7071i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7071 + 0.7071i & 0 & 1 & -0.5000 + 0.5000i & 0 \\ 0.7071i & 0 & -0.5000 - 0.5000i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Matrices J-Hamiltonianas

3.1 Introducción

En este capítulo se estudiará el problema de valor propio inverso para matrices normales J-Hamiltonianas. Es decir, el problema consiste en encontrar una matriz normal J-Hamiltoniana $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que cumpla con la ecuación $AX = XD$ siendo X y D matrices conocidas. También se resolverá el problema de optimización de Procrustes asociado.

Definición 3.1.1 *Sea $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz normal y tal que $J^2 = -I_n$. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se llama J-Hamiltoniana si AJ es hermítica, es decir, si $(AJ)^* = AJ$.*

Se observa que la hipótesis $J^2 = -I_n$ y la hipótesis que J sea normal son independientes. Basta ver que

$$J = \begin{bmatrix} i & -4i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

cumple $J^2 = -I_2$ y que J no es normal. Por otro lado, cualquier matriz diagonal es normal y no todas las matrices diagonales cumplen que $J^2 = -I_2$, por ejemplo,

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La definición de matrices J-Hamiltonianas fue introducida por primera vez en [14]. Estas matrices son una extensión de las matrices Hamiltonianas en donde se consideran todas las matrices que son ortogonalmente semejantes a J_0 siendo $n = 2k$ y

$$J_0 = \begin{bmatrix} O & I_k \\ -I_k & O \end{bmatrix}.$$

Es sabido que las matrices Hamiltonianas son de gran importancia en diversas áreas de la ingeniería. Por ejemplo, se utilizan las matrices Hamiltonianas para resolver la ecuación matricial algebraica de Riccati y en Teoría de Control Óptimo.

En [48, 2] se ha resuelto el problema de valor propio inverso considerando que A es una matriz hermítica antiHamiltoniana generalizada. Precisamente, en el primer trabajo los autores han estudiado el problema de valor propio inverso para matrices A hermíticas J-antiHamiltonianas, es decir, $(AJ)^* = -AJ$ donde $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal y antihermítica. Por otra parte, en el otro artículo, el autor ha estudiado el problema de valor propio inverso para matrices hermíticas J-Hamiltonianas usando la matriz J_0 citada anteriormente, que corresponde, por tanto, sólo a un caso particular de las matrices J-Hamiltonianas que se consideran en esta memoria.

Al igual que en el Capítulo 2, se considerarán los siguientes problemas:

(I) **Problema de valor propio inverso**:

Dadas las matrices

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times m},$$

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

y una matriz $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal tal que $J^2 = -I_n$, se pretende hallar todas las matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normales J-Hamiltonianas tales que

$$AX = XD.$$

Se denotará por $\mathcal{S}$ al conjunto de todas las soluciones del problema, es decir,

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \ AA^* = A^*A, \ AJ = (AJ)^*, \ AX = XD\}.$$

(II) **Problema de optimización de Procrustes**:

Si $\mathcal{S} \neq \emptyset$, dada una matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, el objetivo es encontrar $\hat{A} \in \mathcal{S}$ tal que

$$\min_{A\in\mathcal{S}} \|B - A\|_F = \|B - \hat{A}\|_F.$$

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 3.2 se estudia en primer lugar la estructura de una matriz A normal J-Hamiltoniana y la forma explícita de las soluciones del Problema (I). Se proporcionan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones y la forma explícita de las soluciones.

En la Sección 3.3, se investiga la existencia y unicidad de la solución del Problema (II) y, en el caso de que exista, se presenta la forma explícita de la misma.

Por último, en la Sección 3.4, se exhibe un algoritmo, que puede ser implementado en MATLAB R2016b, para el cálculo de la solución del problema de optimización de Procrustes y algunos ejemplos que permiten mostrar el funcionamiento del Algoritmo.

En todo el capítulo, la matriz $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ considerada es una matriz normal tal que $J^2 = -I_n$.

3.2 Problema de valor propio inverso

En primer lugar se considera la estructura de la matriz A en la Subsección 3.2.1. Posteriormente, en la Subsección 3.2.2 se tratará el problema de valor propio inverso para matrices J-Hamiltonianas.

3.2.1 Estructura de la matriz A y forma explícita de las soluciones

Como la matriz $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es normal y satisface $J^2 = -I_n$ se cumple que:

- su espectro está incluido en $\{-i, i\}$ pues $J^2 + I_n = O$ con lo que su polinomio característico es $p(x) = x^2 + 1$ siempre que no se consideren los casos triviales $J = \pm iI$. Ambos valores propios tienen la misma multiplicidad que es $k = n/2$.
- es una matriz antihermítica: $J = -J^*$.
- su inversa se calcula mediante: $J^{-1} = -J$.

Entonces se puede afirmar que existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que la matriz J se puede escribir de la forma

$$J = U \begin{bmatrix} iI_k & O \\ O & -iI_k \end{bmatrix} U^*. \tag{3.1}$$

Mediante el uso de matrices por bloques, se analiza la estructura de las matrices A que deben ser normales J-Hamiltonianas.

De acuerdo con la partición (3.1) de J, se considera la partición de la matriz U^*AU en bloques de la forma

$$U^*AU = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2) se tiene

$$\begin{aligned} AJ &= U \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} U^* \, U \begin{bmatrix} iI_k & O \\ O & -iI_k \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iI_k & O \\ O & -iI_k \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} iA_{11} & -iA_{12} \\ iA_{21} & -iA_{22} \end{bmatrix} U^*. \end{aligned}$$

Como la matriz A es J-Hamiltoniana,

$$(AJ)^* = \left(U \begin{bmatrix} iA_{11} & -iA_{12} \\ iA_{21} & -iA_{22} \end{bmatrix} U^* \right)^* = U \begin{bmatrix} -iA_{11}^* & -iA_{21}^* \\ iA_{12}^* & iA_{22}^* \end{bmatrix} U^*,$$

de donde se deduce que

$$A_{11}^* = -A_{11}, \qquad A_{22}^* = -A_{22}, \qquad A_{21}^* = A_{12}, \qquad A_{12}^* = A_{21}. \tag{3.3}$$

Es claro que las dos últimas igualdades son equivalentes, con lo que una de ellas es superflua.

Usando las expresiones (3.3) se tiene que

$$\begin{aligned}
AA^* &= U \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} U^* \left(U \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} U^* \right)^* \\
&= U \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} A_{11}A_{11}^* + A_{12}A_{12}^* & A_{11}A_{21}^* + A_{12}A_{22}^* \\ A_{21}A_{11}^* + A_{22}A_{12}^* & A_{21}A_{21}^* + A_{22}A_{22}^* \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} -A_{11}^2 + A_{12}A_{12}^* & A_{11}A_{12} - A_{12}A_{22} \\ -A_{12}^*A_{11} + A_{22}A_{12}^* & A_{12}^*A_{12} - A_{22}^2 \end{bmatrix} U^*
\end{aligned}$$

y procediendo de forma análoga se llega a la expresión

$$A^*A = U \begin{bmatrix} -A_{11}^2 + A_{12}A_{12}^* & -A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{12}^*A_{11} - A_{22}A_{12}^* & A_{12}^*A_{12} - A_{22}^2 \end{bmatrix} U^*.$$

Como A debe ser una matriz normal, de la igualdad de matrices se tiene que

- $A_{11}A_{12} - A_{12}A_{22} = -A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \Rightarrow 2A_{11}A_{12} = 2A_{12}A_{22} \Rightarrow A_{11}A_{12} = A_{12}A_{22}$.
- $-A_{12}^*A_{11} + A_{22}A_{12}^* = A_{12}^*A_{11} - A_{22}A_{22}^* \Rightarrow 2A_{22}A_{12}^* = 2A_{12}^*A_{11} \Rightarrow (A_{22}A_{12}^*)^* = (A_{12}^*A_{11})^* \Rightarrow A_{12}A_{22}^* = A_{11}^*A_{12} \Rightarrow -A_{12}A_{22} = -A_{11}A_{12} \Rightarrow A_{11}A_{12} = A_{12}A_{22}$.

En ambos casos se llega a la expresión $A_{11}A_{12} = A_{12}A_{22}$.

Lo probado se puede resumir en el siguiente teorema que da la estructura de las matrices A bajo las condiciones requeridas.

Teorema 3.2.1 *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ particionada como en (3.1). Entonces A es una matriz normal J-Hamiltoniana si y sólo si*

$$A = U \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} U^* \tag{3.4}$$

donde

$$A_{11}^* = -A_{11}, \qquad A_{22}^* = -A_{22} \qquad y \qquad A_{11}A_{12} = A_{12}A_{22}.$$

3.2.2 Problema de valor propio inverso para matrices J-Hamiltonianas

El próximo objetivo es resolver el Problema (I). Es decir, encontrar la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal J-Hamiltoniana que sea solución de la ecuación $AX = XD$. Las condiciones espectrales sobre la matriz A por ser, en particular, J-Hamiltoniana son, $\lambda \in \sigma(A)$ si y sólo si $-\bar{\lambda} \in \sigma(A)$, en consecuencia,

$$\lambda \in \sigma(A) \qquad \Longrightarrow \qquad \{\lambda, -\bar{\lambda}\} \subseteq \sigma(A).$$

En efecto, como la matriz J particionada como en (3.1) cumple $J^* = J^{-1} = -J$, entonces

$$(AJ)^* = AJ \;\Leftrightarrow\; J^*A^* = AJ \;\Leftrightarrow\; A = -JA^*J^{-1} \;\Leftrightarrow\; A = JA^*J.$$

Sea ahora $\lambda \in \sigma(A)$. Entonces, tomando determinantes, se tiene

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_n| &= |JA^*J - \lambda I_n| = |J(A^* + \lambda I_n)J| = |J^2||A^* + \lambda I_n| \\ &= (-1)^n|(A + \bar{\lambda} I_n)^*| = (-1)^n\overline{|A + \bar{\lambda} I_n|}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lambda \in \sigma(A) \Longrightarrow \{\lambda, -\bar{\lambda}\} \subseteq \sigma(A)$. Este hecho condiciona los valores de la diagonal que se pueden permitir a la matriz dato D.

Además, restringiendo el estudio a matrices reales, es decir si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se tiene que

$$\lambda \in \sigma(A) \qquad \Longrightarrow \qquad \{\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}\} \subseteq \sigma(A)$$

puesto que en polinomios con coeficientes reales, raíces complejas no reales siempre aparecen en parejas del tipo $a \pm bi$.

Notar que considerando

$$A = \begin{bmatrix} 2i & i \\ -i & 2i \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

la matriz compleja A es J-Hamiltoniana y $\sigma(A) = \{1+2i, -1+2i\}$. Se deduce pues que, en general, para matrices complejas $\lambda \in \sigma(A)$ no implica $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$.

Observación 3.2.1 *De la equivalencia* $(AJ)^* = AJ \;\Leftrightarrow\; A = JA^*J$ *se puede deducir que*

$$JA = J^2(J^*A)^* = -(-JA)^* = (JA)^*.$$

En consecuencia, la igualdad $JA = (JA)^*$ *da una definición equivalente de matriz* J*-Hamiltoniana.*

Métodos de resolución: En esta sección se presentan cuatro métodos distintos para resolver el Problema (I). En el primero, la resolución es directa usando inversas generalizadas. En el segundo, se recurre a la vectorización así como al producto de Kronecker. En el tercer método se dan infinitas soluciones del problema. Y, en el cuarto, mejorando los anteriores, se demuestra la existencia de todas las soluciones bajo condiciones necesarias y suficientes. Este último es el método más general y resuelve completamente el problema planteado. En los dos primeros métodos, se calculan soluciones A de la ecuación $AX = XD$, de entre las matrices normales J-Hamiltonianas, mientras que en los otros dos, bajo las mismas hipótesis, se encuentran condiciones para la existencia de la solución, además de presentar la expresión de las mismas.

Antes de presentar el primer método de resolución del problema de valor propio inverso se demostrará un lema que es necesario para hallar las soluciones.

Lema 3.2.1 *Sean las matrices* $M, N \in \mathbb{C}^{n\times m}$*. Entonces la ecuación* $YM = N$ *tiene una solución antihermítica* Y *si y sólo si*

$$NW_M^{(l)} = O \quad \text{y} \quad M^*N \;\; \text{es antihermítica.}$$

En este caso, la solución general está dada por

$$Y = NM^\dagger - (NM^\dagger)^* W_M^{(r)} + W_M^{(r)} Z W_M^{(r)}, \tag{3.5}$$

donde $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es una matriz antihermítica arbitraria.*

Demostración. Utilizando el Teorema 1.3.1, se puede afirmar que la ecuación $YM = N$ tiene una solución si y sólo si $N = NM^\dagger M$. Sea Y una matriz antihermítica que es solución de la ecuación $YM = N$. La matriz M^*N es antihermítica pues

$$(M^*N)^* = N^*M = (YM)^*M = M^*Y^*M = -M^*YM = -M^*N.$$

Este hecho permite deducir que $N^*M = (M^*N)^*$ e $Y_0 = NM^\dagger - (NM^\dagger)^* + (NM^\dagger)^* MM^\dagger$ son antihermíticas pues tanto la matriz $NM^\dagger - (NM^\dagger)^*$ como la matriz $(NM^\dagger)^* MM^\dagger = (M^\dagger)^*(N^*M)M^\dagger$ lo son. Además, Y_0 es una solución de $YM = N$.

La solución general antihermítica se puede obtener añadiendo Y_0 a la solución general antihermítica de la ecuación homogénea $YM = O$. Luego, usando el Corolario 1 del Lema 2.3.1 de [39] se puede deducir que la solución general de la ecuación $YM = N$ es la dada en (3.5). ■

Método 1

Usando el Teorema 1.3.1, la ecuación $AX = XD$ tiene solución si y sólo si $XDX^\dagger X = XD$ o equivalentemente

$$XDW_X^{(l)} = O.$$

Si se cumple esa condición, la solución viene dada por

$$A = XDX^\dagger + YW_X^{(r)}$$

donde $Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz arbitraria.

Entre las matrices encontradas se buscan las que son normales J-Hamiltonianas.

Método 2

Una otra forma de hallar la solución del Problema (I) es usando el producto de Kronecker.

Se recuerda que dada la matriz $V = (v_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $vec(V)$ es el vector columna que se obtiene listando los elementos de V:

$$vec(V) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} & v_{21} & v_{22} & \dots & v_{mn} \end{bmatrix}^T.$$

Aplicando vec a la ecuación $AX = XD$ se tiene que

$$vec(AX) = vec(I_n AX) = vec(XD).$$

Como $vec(I_n AX) = (I_n \otimes X^T)\, vec(A)$, la ecuación matricial se transforma en

$$(I_n \otimes X^T)\, vec(A) = vec(XD). \tag{3.6}$$

Usando el Teorema 1.3.1, la ecuación (3.6) tiene solución si y sólo si

$$(I_n \otimes X^T)(I_n \otimes X^T)^\dagger\, vec(XD) = vec(XD). \tag{3.7}$$

Como $(I_n \otimes X^T)^\dagger = (I_n)^\dagger \otimes (X^T)^\dagger = I_n \otimes (X^T)^\dagger$, la expresión (3.7) se escribe

$$\big(I_{mn} - (I_n \otimes X^T)(I_n \otimes (X^T)^\dagger)\big)\; vec(XD) = O. \tag{3.8}$$

Tomando conjugado en (3.8) se tiene que:

$$\begin{aligned} O &= \overline{(I_{mn} - (I_n \otimes X^T)(I_n \otimes (X^T)^\dagger))\; vec(XD)} \\ &= \Big(I_{mn} - (\overline{I_n \otimes X^T})\,\overline{(I_n \otimes (X^T)^\dagger)}\Big)\; \overline{vec(XD)} \end{aligned}$$

De las igualdades

$$\overline{I_n \otimes X^T} = \overline{I_n} \otimes \overline{X^T} = I_n \otimes X^*,$$

$$\overline{(I_n \otimes X^T)^\dagger} = \overline{I_n} \otimes \overline{(X^T)^\dagger} = I_n \otimes (X^\dagger)^*$$

y

$$\overline{vec(XD)} = vec(\overline{X}\ \overline{D}),$$

se tiene

$$\big(I_{mn} - (I_n \otimes X^*)(I_n \otimes (X^\dagger)^*)\big)\, vec(\overline{X}\ \overline{D}) = O.$$

Ahora, usando una propiedad del producto de Kronecker y luego propiedades de la inversa de Moore-Penrose, la condición para que exista la solución finalmente queda:

$$(I_{mn} - I_n \otimes X^\dagger X)\, vec(\overline{X}\ \overline{D}) = O. \tag{3.9}$$

Bajo esa condición, la solución de (3.6) está dada por

$$vec(A) = (I_n \otimes X^T)^\dagger\, vec(XD) + \big(I_{n^2} - (I_n \otimes X^T)^\dagger (I_n \otimes X^T)\big)\ Y,$$

donde $Y \in \mathbb{C}^{n^2\times 1}$ es una matriz arbitraria. Ahora tomando conjugado en la solución, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\overline{vec(A)} &= \overline{(I_n \otimes X^T)^\dagger\, vec(XD) + (I_{n^2} - (I_n \otimes X^T)^\dagger (I_n \otimes X^T))\ Y} \\
&= \overline{(I_n \otimes X^T)^\dagger}\ \overline{vec(XD)} + \overline{(I_{n^2} - (I_n \otimes X^T)^\dagger (I_n \otimes X^T))\, Y} \\
&= \big(I_n \otimes (X^\dagger)^*\big)\ vec(\overline{X}\,\overline{D}) + \big(I_{n^2} - (I_n \otimes (X^\dagger)^*)(I_n \otimes X^*)\big)\ \overline{Y} \\
&= \big(I_n \otimes (X^\dagger)^*\big)\ vec(\overline{X}\,\overline{D}) + \big(I_{n^2} - I_n \otimes (X^\dagger)^* X^*\big)\ \overline{Y} \\
&= \big(I_n \otimes (X^\dagger)^*\big)\ vec(\overline{X}\,\overline{D}) + \big(I_{n^2} - I_n \otimes X X^\dagger\big)\ \overline{Y}.
\end{aligned}$$

Entonces, volviendo a tomar conjugado

$$vec(A) = \big(I_n \otimes (X^T)^\dagger\big)\ vec(XD) + \Big(I_{n^2} - I_n \otimes \overline{XX^\dagger}\Big)\, Y, \tag{3.10}$$

con $Y \in \mathbb{C}^{n^2\times 1}$.

Resumiendo los resultados anteriores, se puede decir que existe una solución de (3.6) si y sólo si se cumple (3.9) y en este caso la solución está dada por (3.10). Luego se vuelve a formar la matriz A y las soluciones del Problema (I) son las matrices normales que cumplen $(AJ)^* = AJ$.

Método 3: Infinitas soluciones del Problema (I)

En el problema que se está considerando la matriz J es dada. Entonces se conoce la matriz U y, por lo tanto, también la matriz U^*X. Considérese la partición

$$U^*X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

siendo $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{k\times m}$.

De este modo se tiene que

$$X = U \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

siendo $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{k\times m}$.

Sea $A \in \mathcal{S}$. Ahora, sustituyendo (3.4) y (3.11) en $AX = XD$ se llega a

$$U \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} U^* U \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} D,$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} D.$$

Las operaciones entre matrices por bloques conducen al sistema matricial

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_{11}\, X_1 + A_{12}\, X_2 & = & X_1 D \\ A_{12}^*\, X_1 + A_{22}\, X_2 & = & X_2 D \end{array} \right. . \tag{3.12}$$

Se considera la expresión conjugada de la primera ecuación de (3.12), y sabiendo que A_{11} es antihermítica, se obtiene

$$-X_1^* A_{11} + X_2^* A_{12}^*\, X_1 = D^* X_1^*.$$

Postmultiplicando por X_1 la última expresión, se tiene que

$$-X_1^* A_{11} X_1 + X_2^* A_{12}^* X_1 = D^* X_1^* X_1. \tag{3.13}$$

Ahora, despejando el producto $A_{11} X_1$ de (3.12) y sustituyendo en (3.13) se obtiene

$$(X_1^* A_{12} X_2)^* + X_1^* A_{12} X_2 = D^* X_1^* X_1 + X_1^* X_1 D,$$

ecuación equivalente a

$$(X_1^* A_{12} X_2)^* + X_1^* A_{12} X_2 = 2H(X_1^* X_1 D). \tag{3.14}$$

Como $H(X_1^* X_1 D)$ es hermítica, el Teorema 1.3.2 asegura que la ecuación (3.14) puede resolverse obteniendo la siguiente expresión

$$X_1^* A_{12} X_2 = H(X_1^* X_1 D) + Z, \tag{3.15}$$

donde $Z \in \mathbb{C}^{m\times m}$ es tal que $Z^* = -Z$.

Ahora, repitiendo los mismos cálculos sobre la segunda ecuación de (3.12), es decir, postmultiplicando por X_2, despejando el producto $A_{22} X_2$ de (3.12) y sustituyendo en la expresión conseguida anteriormente, se obtiene

$$(X_1^* A_{12} X_2)^* + X_1^* A_{12} X_2 = D^* X_2^* X_2 + X_2^* X_2 D = 2H(X_2^* X_2 D).$$

Comparando con (3.14), se deduce la siguiente igualdad

$$H(X_1^* X_1 D) = H(X_2^* X_2 D).$$

Esta última igualdad da una condición necesaria de existencia de la solución del Problema (I).

Usando el Teorema 1.3.1, la ecuación (3.15) tiene solución en A_{12} si y sólo si

$$X_1^\dagger X_1 \left(H(X_1^* X_1 D) + Z\right) X_2^\dagger X_2 = H(X_1^* X_1 D) + Z \tag{3.16}$$

y en este caso se tiene que

$$A_{12} = (X_1^*)^\dagger \left(H(X_1^* X_1 D) + Z\right) X_2^\dagger + W_{X_1}^{(r)} Y_{12} X_2 X_2^\dagger, \tag{3.17}$$

donde $Y_{12} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ es una matriz arbitraria.

Sustituyendo (3.17) en la primera ecuación de (3.12) se debe resolver

$$A_{11}X_1 = X_1D - (X_1^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D) + Z)X_2^\dagger X_2 - W_{X_1}^{(r)}Y_{12}X_2.$$

Usando el Lema 3.2.1, esta ecuación tiene solución antihermítica en A_{11} si y sólo si

$$\left(X_1D - (X_1^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D) + Z)X_2^\dagger X_2 - W_{X_1}^{(r)}Y_{12}X_2\right) W_{X_1}^{(l)} = O, \qquad (3.18)$$

y la matriz

$$X_1^*\left(X_1D - (X_1^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D) + Z)X_2^\dagger X_2 - W_{X_1}^{(r)}Y_{12}X_2\right) \qquad (3.19)$$

es antihermítica. En ese caso, su solución general está dada por

$$\begin{aligned} A_{11} \;=\; & \left(X_1D - (X_1^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D) + Z)X_2^\dagger X_2 - W_{X_1}^{(r)}Y_{12}X_2\right) X_1^\dagger \\ & - \left[\left(X_1D - (X_1^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D) + Z)X_2^\dagger X_2 - W_{X_1}^{(r)}Y_{12}X_2\right) X_1^\dagger\right]^* W_{X_1}^{(r)} \\ & + W_{X_1}^{(r)}Y_{11}W_{X_1}^{(r)}, \end{aligned} \qquad (3.20)$$

donde $Y_{11} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ es una matriz antihermítica arbitraria.

Usando propiedades de la inversa de Moore-Penrose se tiene que

$$\begin{aligned} &\left[\left(X_1D - (X_1^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D) + Z)X_2^\dagger X_2 - W_{X_1}^{(r)}Y_{12}X_2\right) X_1^\dagger\right]^* W_{X_1}^{(r)} = \\ &= \left[W_{X_1}^{(r)}\left(X_1D - (X_1^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D) + Z)X_2^\dagger X_2 - W_{X_1}^{(r)}Y_{12}X_2\right) X_1^\dagger\right]^* \\ &= \left[W_{X_1}^{(r)}\left(-W_{X_1}^{(r)}Y_{12}X_2\right) X_1^\dagger\right]^* \\ &= -(X_1^\dagger)^*X_2^*Y_{12}^*W_{X_1}^{(r)}. \end{aligned}$$

Usando este último cálculo y (3.20) se obtiene una expresión simplificada para A_{11}, a saber,

$$\begin{aligned} A_{11} \;=\; & \left(X_1D - (X_1^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D) + Z)X_2^\dagger X_2 - W_{X_1}^{(r)}Y_{12}X_2\right) X_1^\dagger + \\ & +(X_1^\dagger)^*X_2^*Y_{12}^*W_{X_1}^{(r)} + W_{X_1}^{(r)}Y_{11}W_{X_1}^{(r)}. \end{aligned} \qquad (3.21)$$

Sustituyendo la expresión (3.17) de A_{12} en la segunda ecuación de (3.12) se llega a

$$\begin{aligned} A_{22}X_2 &= X_2D - \left((X_1^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D)+Z)X_2^\dagger + W_{X_1}^{(r)}Y_{12}X_2X_2^\dagger\right)^* X_1 \\ &= X_2D - (X_2^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D)-Z)X_1^\dagger X_1 - X_2X_2^\dagger Y_{12}^* W_{X_1}^{(r)} X_1 \\ &= X_2D - (X_2^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D)-Z)X_1^\dagger X_1. \end{aligned}$$

Las respectivas condiciones de existencia de solución antihermítica A_{22} para esta última ecuación son

$$\left(X_2D - (X_2^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D)-Z)X_1^\dagger X_1\right) W_{X_2}^{(l)} = O, \tag{3.22}$$

y que la matriz

$$X_2^*\left(X_2D - (X_2^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D)-Z)X_1^\dagger X_1\right) \tag{3.23}$$

sea antihermítica. Bajo estas condiciones, su solución general es

$$\begin{aligned} A_{22} &= \left(X_2D - (X_2^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D)-Z)X_1^\dagger X_1\right) X_2^\dagger - \\ &\quad - \left[\left(X_2D - (X_2^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D)-Z)X_1^\dagger X_1\right) X_2^\dagger\right]^* W_{X_2}^{(r)} + \\ &\quad + W_{X_2}^{(r)}Y_{22}W_{X_2}^{(r)}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

donde $Y_{22} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ es una matriz antihermítica arbitraria.

De nuevo, usando propiedades de la inversa de Moore-Penrose se tiene que

$$\begin{aligned} &\left[\left(X_2D - (X_2^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D)-Z)X_1^\dagger X_1\right) X_2^\dagger\right]^* W_{X_2}^{(r)} = \\ &= \left[W_{X_2}^{(r)}\left(X_2D - (X_2^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D)-Z)X_1^\dagger X_1\right) X_2^\dagger\right]^* \\ &= O. \end{aligned}$$

Usando este último resultado y (3.24) se obtiene una expresión simplificada para A_{22}, es decir,

$$\begin{aligned} A_{22} &= \left(X_2D - (X_2^*)^\dagger(H(X_1^*X_1D)-Z)X_1^\dagger X_1\right) X_2^\dagger + \\ &\quad + W_{X_2}^{(r)}Y_{22}W_{X_2}^{(r)}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Es fácil comprobar que al sustituir las matrices obtenidas en (3.17), (3.21) y (3.25) se obtienen soluciones del sistema (3.12).

Notar que las condiciones que indican que (3.19) y (3.23) son antihermíticas son equivalentes a la condición que indica que la matriz $X_1^* X_1 D - X_2^* X_2 D$ es antihermítica. En efecto, aplicando la definición de matriz antihermítica en (3.19) y (3.23) y reordenando términos se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1^*(X_1 D - A_{12} X_2) = -(D^* X_1^* - X_2^* A_{12}^*) X_1 \\ X_2^*(X_2 D - A_{12}^* X_1) = -(D^* X_2^* - X_1^* A_{12}) X_2 \end{array} \right. .$$

Operando en las dos ecuaciones, se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1^* X_1 D + D^* X_1^* X_1 = X_1^* A_{12} X_2 + X_2^* A_{12}^* X_1 \\ X_2^* X_2 D + D^* X_2^* X_2 = X_1^* A_{12} X_2 + X_2^* A_{12}^* X_1 \end{array} \right. ,$$

y por tanto $X_1^* X_1 D + D^* X_1^* X_1 = X_2^* X_2 D + D^* X_2^* X_2$. Está última expresión es equivalente a $X_1^* X_1 D - X_2^* X_2 D = -D^* X_1^* X_1 + D^* X_2^* X_2$, es decir, la matriz $X_1^* X_1 D - X_2^* X_2 D$ es antihermítica.

Los resultados obtenidos se resumen en el teorema siguiente.

Teorema 3.2.2 *Sean $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$ una matriz diagonal y $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal tal que $J^2 = -I_n$ dada como en (3.1). Sea la partición*

$$X = U \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

donde $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{k\times m}$. Entonces existe al menos una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal J-Hamiltoniana tal que $AX = XD$ si se cumplen las condiciones (3.16), (3.18), (3.22), $X_1^* X_1 D - X_2^* X_2 D$ es antihermítica y $A_{11} A_{12} = A_{12} A_{22}$.

En este caso, las infinitas soluciones del problema anterior son

$$A = U \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} U^*,$$

donde las expresiones de A_{11}, A_{12} y A_{22} están dadas en (3.21), (3.17) y (3.25), respectivamente.

Método 4: Existencia de las soluciones del Problema (I)

El cuarto método que permite dar todas las soluciones del Problema (I) se diferencia del anterior en la forma de resolver el sistema siguiente encontrado en la página 68:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_{11}\,X_1 + A_{12}\,X_2 & = & X_1 D \\ A_{12}^*\,X_1 + A_{22}\,X_2 & = & X_2 D \end{array} \right. .$$

De la primera ecuación del sistema se tiene que

$$A_{11}\,X_1 = X_1 D - A_{12}\,X_2, \tag{3.26}$$

y por el Teorema 1.3.1, la ecuación (3.26) tiene solución (en A_{11}) si y sólo si

$$(X_1 D - A_{12}\,X_2) W_{X_1}^{(l)} = O, \tag{3.27}$$

o equivalentemente, si y sólo si

$$A_{12}\,X_2 W_{X_1}^{(l)} = X_1 D W_{X_1}^{(l)}. \tag{3.28}$$

Nuevamente, usando el Teorema 1.3.1, la ecuación (3.28) tiene solución (en A_{12}) si y sólo si

$$X_1 D W_{X_1}^{(l)} W_{X_2 W_{X_1}^{(l)}}^{(l)} = O. \tag{3.29}$$

En este caso la expresión general para A_{12} está dada por

$$A_{12} = X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger + Y_{12} W_{X_2 W_{X_1}^{(l)}}^{(r)}, \tag{3.30}$$

siendo $Y_{12} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ una matriz arbitraria.

Si se sustituye en la ecuación (3.26) la expresión de A_{12} dada en (3.30) se obtiene

$$A_{11}\,X_1 = X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger\,X_2 - Y_{12} W_{X_2 W_{X_1}^{(l)}}^{(r)}\,X_2. \tag{3.31}$$

Por el Lema 3.2.1, la ecuación (3.31) tiene una solución antihermítica en A_{11} si y sólo si se cumple que

$$\left[X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger X_2 - Y_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} X_2\right] W_{X_1}^{(l)} = O \tag{3.32}$$

y, además, si

$$X_1^* \left[X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger X_2 - Y_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} X_2\right] \tag{3.33}$$

es antihermítica. Entonces, la solución general de la ecuación (3.31) está dada por

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left(X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger X_2 - Y_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} X_2\right) X_1^\dagger \\ &\quad -(X_1^\dagger)^* \left[X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger X_2 - Y_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} X_2\right]^* W_{X_1}^{(r)} \\ &\quad + W_{X_1}^{(r)} Y_{11} W_{X_1}^{(r)}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

siendo $Y_{11} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ una matriz antihermítica arbitraria.

Usando propiedades de la inversa de Moore-Penrose se tiene que

$$\begin{aligned} &(X_1^\dagger)^* \left[X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger X_2 - Y_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} X_2\right]^* W_{X_1}^{(r)} = \\ &= (X_1^\dagger)^* \left[X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger X_2 - Y_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} X_2\right]^* (W_{X_1}^{(r)})^* \\ &= \left(W_{X_1}^{(r)} \left[X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger X_2 - Y_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} X_2\right] X_1^\dagger\right)^* \\ &= \left(W_{X_1}^{(r)} \left[-Y_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} X_2\right] X_1^\dagger\right)^* \\ &= -(X_1^\dagger)^* X_2^* W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} Y_{12}^* W_{X_1}^{(r)}. \end{aligned}$$

Usando este último cálculo y (3.34) se obtiene una nueva expresión más compacta para A_{11}, a saber,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left[X_1 D - X_1 D W^{(l)}_{X_1} (X_2 W^{(l)}_{X_1})^\dagger \, X_2 - Y_{12} W^{(r)}_{X_2 W^{(l)}_{X_1}} \, X_2\right] X_1^\dagger \\ &\quad + (X_1^\dagger)^* X_2^* W^{(r)}_{X_2 W^{(l)}_{X_1}} Y_{12}^* W^{(r)}_{X_1} + W^{(r)}_{X_1} Y_{11} W^{(r)}_{X_1}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Para determinar A_{22}, se sustituye la expresión de A_{12} obtenida en (3.30) en la segunda ecuación del sistema matricial (3.12) y se obtiene

$$A_{22}\, X_2 = X_2 D - (W^{(l)}_{X_1} X_2^*)^\dagger W^{(l)}_{X_1} D^* X_1^* X_1 - W^{(r)}_{X_2 W^{(l)}_{X_1}} Y_{12}^* X_1. \tag{3.36}$$

Las condiciones que deben cumplirse para que la ecuación (3.36) tenga una solución antihermítica en A_{22} dadas por el Lema 3.2.1 son

$$\left[X_2 D - (W^{(l)}_{X_1} X_2^*)^\dagger W^{(l)}_{X_1} D^* X_1^* X_1 - W^{(r)}_{X_2 W^{(l)}_{X_1}} Y_{12}^* X_1\right] W^{(l)}_{X_2} = O \tag{3.37}$$

y que la matriz

$$X_2^* \left[X_2 D - (W^{(l)}_{X_1} X_2^*)^\dagger W^{(l)}_{X_1} D^* X_1^* X_1 - W^{(r)}_{X_2 W^{(l)}_{X_1}} Y_{12}^* X_1\right] \tag{3.38}$$

sea antihermítica.

Luego, también por el Lema 3.2.1, la solución general está dada por

$$\begin{aligned} A_{22} &= \left[X_2 D - (W^{(l)}_{X_1} X_2^*)^\dagger W^{(l)}_{X_1} D^* X_1^* X_1 - W^{(r)}_{X_2 W^{(l)}_{X_1}} Y_{12}^* X_1\right] X_2^\dagger \\ &\quad - (X_2^\dagger)^* \left[X_2 D - (W^{(l)}_{X_1} X_2^*)^\dagger W^{(l)}_{X_1} D^* X_1^* X_1 - W^{(r)}_{X_2 W^{(l)}_{X_1}} Y_{12}^* X_1\right]^* W^{(r)}_{X_2} \\ &\quad + W^{(r)}_{X_2} Y_{22} W^{(r)}_{X_2}, \end{aligned}$$

siendo $Y_{22} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ una matriz antihermítica arbitraria.

Nuevamente, usando propiedades de la inversa de Moore-Penrose, la expresión anterior puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} A_{22} &= \left[X_2D - (W_{X_1}^{(l)}X_2^*)^\dagger W_{X_1}^{(l)}D^*X_1^*X_1 - W_{X_2W_{X_1}^{(l)}}^{(r)}Y_{12}^*X_1\right]X_2^\dagger \\ & \quad +(X_2^\dagger)^*\left[X_1^*X_1DW_{X_1}^{(l)}(X_2W_{X_1}^{(l)})^\dagger - X_1^*Y_{12}W_{X_2W_{X_1}^{(l)}}^{(r)}\right]W_{X_2}^{(r)} \\ & \quad +W_{X_2}^{(r)}Y_{22}W_{X_2}^{(r)}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Notar que las condiciones que indican que (3.33) y (3.38) son antihermíticas son las mismas que las expresadas, en el método 3, por (3.19) y (3.23).

El razonamiento anterior puede resumirse en el siguiente teorema en donde se dan las condiciones necesarias y suficientes para que el Problema (I) de la página 59 tenga solución así como también la expresión de la solución general.

Teorema 3.2.3 *Sean $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$ una matriz diagonal y $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz normal tal que $J^2 = -I_n$. Se considera la partición*

$$X = U\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

donde $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{k\times m}$. Entonces, existe una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal J-Hamiltoniana, tal que $AX = XD$ si y sólo si se cumplen las condiciones (3.29), (3.32), (3.37), $X_1^*X_1D - X_2^*X_2D$ es antihermítica y $A_{11}A_{12} = A_{12}A_{22}$.

Si se satisfacen estas condiciones, la solución general viene dada por

$$A = U\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}U^*,$$

donde las expresiones de A_{11}, A_{12} y A_{22} están dadas en (3.35), (3.30) y (3.39), respectivamente.

3.3 Problema de optimización de Procrustes

Dadas las matrices $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$ una matriz diagonal y $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz normal tal que $J^2 = -I_n$, se considera el conjunto $\mathcal{S}$ de todas las matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normales J-Hamiltonianas que son solución de la ecuación matricial

$$AX = XD.$$

Es decir,

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AA^* = A^*A, (AJ)^* = AJ, AX = XD\}.$$

Para realizar este estudio se supone que el conjunto $\mathcal{S}$ es no vacío. El caso en el que $\mathcal{S}$ es vacío puede ocurrir como puede comprobarse mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.1 *Se consideran las matrices*

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & -1+i \end{bmatrix} \quad y \quad J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

La solución de $AX = XD$ está dada por

$$A = \begin{bmatrix} -3+i & 4 \\ -2 & 3+i \end{bmatrix},$$

pero $(AJ)^* - AJ = \begin{bmatrix} -8i & 0 \\ 0 & 4i \end{bmatrix} \neq O.$

Se supone entonces que el conjunto $\mathcal{S}$ es no vacío. Dada una matriz $\widetilde{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, el Problema (II) consiste en hallar la matriz $\widehat{A} \in \mathcal{S}$ tal que

$$\min_{A\in\mathcal{S}} \|\widetilde{A} - A\|_F = \|\widetilde{A} - \widehat{A}\|_F. \tag{3.40}$$

Al igual que en el caso de las matrices hermíticas reflexivas del capítulo anterior, para hallar la matriz solución $\widehat{A}$, en primer lugar se transforma el problema en uno más sencillo.

3.3.1 El problema simplificado

Sea $\widetilde{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz arbitraria dada, particionada de la forma

$$\widetilde{A} = U \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{bmatrix} U^*, \tag{3.41}$$

donde $\widetilde{A}_{ij} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ y U es la matriz de la partición de J dada en (3.1) en la página 60.

Debido a que la norma de Frobenius es invariante mediante transformaciones unitarias (ver Propiedad 1.3.1 en la introducción de la página 17), utilizando la forma de la solución $A \in \mathcal{S}$ dada como en (3.4) del Teorema 3.2.1 se tiene que

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{A} - A\|_F^2 = \\ &= \|U^*\widetilde{A}U - U^*AU\|_F^2 \\ &= \|\widetilde{A}_{11} - A_{11}\|_F^2 + \|\widetilde{A}_{12} - A_{12}\|_F^2 + \|\widetilde{A}_{21} - A_{12}^*\|_F^2 + \|\widetilde{A}_{22} - A_{22}\|_F^2. \end{aligned}$$

En la siguiente subsección se estudiarán cada una de estas normas por separado para poder dar la solución explícita de (3.40).

3.3.2 Forma explícita de la solución

Se necesitan los siguientes resultados para minimizar la norma de algunas matrices con estructuras especiales.

A continuación se recuerda el Lema 1 de [44] que se enuncia con una ligera modificación y, por una cuestión de completitud, se presenta una demostración.

Lema 3.3.1 *Sea $B \in \mathbb{C}^{q\times m}$ y sean $P_1 \in \mathbb{C}^{q\times q}$ y $P_2 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que $P_i^2 = P_i = P_i^*$ para $i = 1, 2$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *existe el mínimo de la expresión $\|B - P_1EP_2\|_F$ para E variando en el conjunto $\mathbb{C}^{q\times m}$.*

(b) *el valor $\min\limits_{E\in\mathbb{C}^{q\times m}} \|B - P_1EP_2\|_F$ se alcanza para las matrices $E \in \mathbb{C}^{q\times m}$ tales que $P_1(B - E)P_2 = O$.*

(c) $\min\limits_{E\in\mathbb{C}^{q\times m}} \|B - P_1EP_2\|_F = \|B - P_1BP_2\|_F$.

Demostración. A partir de

$$B - P_1EP_2 = (B - P_1BP_2) + P_1(B - E)P_2,$$

es claro que

$$\begin{aligned} &(B - P_1EP_2)^*(B - P_1EP_2) = \\ &\quad = (B - P_1BP_2)^*(B - P_1BP_2) + (P_1(B - E)P_2)^*P_1(B - E)P_2 + \\ &\qquad +(B - P_1BP_2)^*P_1(B - E)P_2 + (P_1(B - E)P_2)^*(B - P_1BP_2). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Llamando $V := (B - P_1BP_2)^*P_1(B - E)P_2$ sigue directamente que $V^* = (P_1(B - E)P_2)^*(B - P_1BP_2)$. Además, de $P_i^2 = P_i = P_i^*$, $i = 1, 2$, se tiene

$$\begin{aligned} V &= (B^* - P_2B^*P_1)P_1(B - E)P_2 \\ &= (B^*P_1 - P_2B^*P_1)(B - E)P_2 \\ &= (I - P_2)B^*P_1(B - E)P_2. \end{aligned}$$

Sea $\lambda \neq 0$ tal que $Vx = \lambda x$. Entonces

$$\lambda P_2x = P_2(\lambda x) = P_2Vx = P_2(I - P_2)B^*P_1(B - E)P_2x = 0,$$

de donde $P_2x = 0$. Luego,

$$\lambda x = Vx = (I - P_2)B^*P_1(B - E)P_2x = 0.$$

De aquí se llega a que $x = 0$. Se concluye que si $Vx = \lambda x$ con $x \neq 0$ entonces $\lambda = 0$, es decir, $\sigma(V) = \{0\}$. Teniendo en cuenta que la traza de una matriz coincide con la suma de sus valores propios, se tiene que $\mathrm{tr}(V) = \mathrm{tr}(V^*) = 0$. Tomando traza en (3.42) resulta que

$$\|B - P_1EP_2\|_F^2 = \|B - P_1BP_2\|_F^2 + \|P_1(B - E)P_2\|_F^2.$$

A partir de esta expresión se concluyen fácilmente las afirmaciones del enunciado por ser $B - P_1BP_2$ una matriz fija. ■

Lema 3.3.2 *Sea $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La ecuación matricial $W_M^{(r)}YW_M^{(r)} = O$ siempre tiene solución antihermítica no trivial $Y \in \mathbb{C}^{n\times m}$.*

Demostración. La demostración es inmediata. Basta aplicar el Teorema 2.4 de [24] a la matriz iX con $C = O$ y $A = B = W_M^{(r)}$. ■

Ahora se está en condiciones para poder dar la solución explícita del Problema de Procrustes (II) suponiendo que el problema (3.40) tiene solución.

Primero se estudia la norma $\|\widetilde{A}_{12} - A_{12}\|_F^2$ porque contiene la matriz arbitraria Y_{12} que aparece también en las expresiones de A_{11} y A_{22}.

Bajo la condición (3.29), usando la expresión (3.30) de A_{12}, el Lema 3.3.1 asegura que

$$\|\widetilde{A}_{12} - A_{12}\|_F^2 = \left\|\widetilde{A}_{12} - X_1DW_{X_1}^{(l)}\left(X_2W_{X_1}^{(l)}\right)^\dagger - Y_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}\right\|_F^2$$

alcanza su mínimo si y sólo si

$$\left[\widetilde{A}_{12} - X_1DW_{X_1}^{(l)}\left(X_2W_{X_1}^{(l)}\right)^\dagger - Y_{12}\right]W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} = O.$$

Como $\left(X_2W_{X_1}^{(l)}\right)^\dagger W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} = O$, la última igualdad queda como

$$(\widetilde{A}_{12} - Y_{12})W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} = O. \tag{3.43}$$

En este caso,

$$\min_{A_{12}\in\mathbb{C}^{k\times k}} \|\widetilde{A}_{12} - A_{12}\|_F^2 = \left\| \left[\widetilde{A}_{12}X_2 - X_1D\right] W_{X_1}^{(l)} \left(X_2W_{X_1}^{(l)}\right)^\dagger \right\|_F^2,$$

porque $R - RW_M^{(r)} = RMM^\dagger$ para matrices arbitrarias R y M de tamaños adecuados.

Recordando que la norma de Frobenius es invariante bajo traspuestas conjugadas y aplicando el último resultado a

$$\|\widetilde{A}_{21} - A_{12}^*\|_F^2 = \|((\widetilde{A}_{21})^* - A_{12})^*\|_F^2 = \|(\widetilde{A}_{21})^* - A_{12}\|_F^2$$

se obtiene

$$\min_{A_{12}\in\mathbb{C}^{k\times k}} \|(\widetilde{A}_{21})^* - A_{12}\|_F^2 = \left\| \left[(\widetilde{A}_{21})^*X_2 - X_1D\right] W_{X_1}^{(l)} \left(X_2W_{X_1}^{(l)}\right)^\dagger \right\|_F^2$$

si y sólo si

$$((\widetilde{A}_{21})^* - Y_{12})W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} = O. \tag{3.44}$$

Usando (3.30), la expresión del bloque que minimiza la norma anterior está dada por

$$\widehat{A}_{12} = X_1DW_{X_1}^{(l)} \left(X_2W_{X_1}^{(l)}\right)^\dagger + \widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}. \tag{3.45}$$

Es claro que de (3.43) y (3.44) se tiene que

$$\widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} = Y_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} = (\widetilde{A}_{21})^*W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}.$$

Recíprocamente, si $\widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} = (\widetilde{A}_{21})^*W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} =: Z$, multiplicando a derecha ambos lados por $W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}$ se consigue

$$\widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} = (\widetilde{A}_{21})^*W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} = ZW^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}.$$

Ahora, $Y_{12} := Z$ satisface (3.43) y (3.44).

Como $Y_{12}W_{X_2}^{(r)}W_{X_1}^{(l)} = \widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} = (\widetilde{A}_{21})^*W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}$, las condiciones (3.32) y (3.37) son equivalentes a

$$\left[X_1D - X_1DW_{X_1}^{(l)}(X_2W_{X_1}^{(l)})^\dagger X_2 - \widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} X_2\right] W_{X_1}^{(l)} = O \tag{3.46}$$

y

$$\left[X_2D - (W_{X_1}^{(l)}X_2^*)^\dagger W_{X_1}^{(l)}D^*X_1^*X_1 - W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}\widetilde{A}_{21}X_1\right] W_{X_2}^{(l)} = O, \tag{3.47}$$

respectivamente. Además, la expresión (3.35) permite escribir

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{A}_{11} - A_{11}\|_F^2 = \\ &= \left\|\widetilde{A}_{11} - \left[X_1D - X_1DW_{X_1}^{(l)}\left(X_2W_{X_1}^{(l)}\right)^\dagger X_2 - \widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} X_2\right] X_1^\dagger - \right. \\ &\quad \left. -(X_1^\dagger)^*X_2^*W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}\widetilde{A}_{21}W_{X_1}^{(r)} - W_{X_1}^{(r)}Y_{11}W_{X_1}^{(r)}\right\|_F^2. \end{aligned}$$

Denotando por R los términos fijos en la última norma, es decir,

$$\begin{aligned} R &= \widetilde{A}_{11} - \left[X_1D - X_1DW_{X_1}^{(l)}\left(X_2W_{X_1}^{(l)}\right)^\dagger X_2 - \widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}} X_2\right] X_1^\dagger - \\ &\quad -(X_1^\dagger)^*X_2^*W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}\widetilde{A}_{21}W_{X_1}^{(r)}, \end{aligned}$$

el Lema 3.3.1 asegura que $\|\widetilde{A}_{11} - A_{11}\|_F^2$ alcanza su mínimo si y sólo si

$$W_{X_1}^{(r)}(R - Y_{11})W_{X_1}^{(r)} = O$$

lo que es equivalente a

$$W_{X_1}^{(r)}(\widetilde{A}_{11} - Y_{11})W_{X_1}^{(r)} = O \tag{3.48}$$

pues $X_1^\dagger W_{X_1}^{(r)} = O$ y $W_{X_1}^{(r)}(X_1^\dagger)^* = O$. En este caso,

$$\min_{A_{11}\in\mathbb{C}^{k\times k}} \|\widetilde{A}_{11} - A_{11}\|_F^2 = \|R - W_{X_1}^{(r)}\widetilde{A}_{11}W_{X_1}^{(r)}\|_F^2.$$

Entonces, usando (3.35), el bloque $\widehat{A}_{11}$ que minimiza la norma $\|\widetilde{A}_{11} - A_{11}\|_F^2$ está dado por

$$\begin{aligned}\widehat{A}_{11} &= \left[X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} \left(X_2 W_{X_1}^{(l)}\right)^\dagger X_2 - \widetilde{A}_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} X_2\right] X_1^\dagger + \\ &\quad + (X_1^\dagger)^* X_2^* W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} \widetilde{A}_{21} W_{X_1}^{(r)} + W_{X_1}^{(r)} \widetilde{A}_{11} W_{X_1}^{(r)}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Según el Lema 3.3.2, la ecuación (3.48) tiene siempre una solución antihermítica $\widetilde{A}_{11} - Y_{11}$ para Y_{11} antihermítica. Luego, $\widetilde{A}_{11}$ es también antihermítica.

Recíprocamente, si $\widetilde{A}_{11}$ es antihermítica, la ecuación $W_{X_1}^{(r)} C W_{X_1}^{(r)} = O$ tiene solución antihermítica C. Llamando $Y_{11} := \widetilde{A}_{11} - C$, se tiene que Y_{11} es una matriz antihermítica que satisface (3.48).

Un razonamiento similar permite afirmar que el mínimo de $\|\widetilde{A}_{22} - A_{22}\|_F^2$ se alcanza si y sólo si $W_{X_2}^{(r)}(\widetilde{A}_{22} - Y_{22}) W_{X_2}^{(r)} = O$ lo que es equivalente a $\widetilde{A}_{22}$ es antihermítica. Finalmente, de (3.39), la última norma queda minimizada por

$$\begin{aligned}\widehat{A}_{22} &= \left[X_2 D - \left(W_{X_1)}^{(l)} X_2^*\right)^\dagger W_{X_1}^{(l)} D^* X_1^* X_1 - W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} \widetilde{A}_{21} X_1\right] X_2^\dagger + \\ &\quad + (X_2^\dagger)^* \left[X_1^* X_1 D W_{X_1}^{(l)} \left(X_2 W_{X_1}^{(l)}\right)^\dagger - X_1^* \widetilde{A}_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}}\right] W_{X_2}^{(r)} + \\ &\quad + W_{X_2}^{(r)} \widetilde{A}_{22} W_{X_2}^{(r)}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Los resultados obtenidos se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1 *Sea $\widetilde{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz particionada como en (3.41) y se supone que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Entonces el Problema (II) tiene solución $\widehat{A} \in \mathcal{S}$ si y sólo si $\widetilde{A}_{11}$, $\widetilde{A}_{22}$ y $X_1^* X_1 D - X_2^* X_2 D$ son antihermíticas, se satisfacen las condiciones (3.29), (3.46), (3.47) y $(\widetilde{A}_{12} - (\widetilde{A}_{21})^*) W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}} = O$ y si se definen $\widehat{A}_{11}$, $\widehat{A}_{12}$ y $\widehat{A}_{22}$ por (3.49), (3.45) y (3.50), respectivamente, deben satisfacer la ecuación $\widehat{A}_{11}\widehat{A}_{12} \neq \widehat{A}_{12}\widehat{A}_{22}$.*

En este caso, la única solución óptima es

$$\widehat{A} = U \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ (\widehat{A}_{12})^* & \widehat{A}_{22} \end{bmatrix} U^*. \tag{3.51}$$

Observación 3.3.1 *Usando la condición* $(\widetilde{A}_{12} - (\widetilde{A}_{21})^*)W^{(r)}_{X_2 W^{(l)}_{X_1}} = O$ *dada en el Teorema 3.3.1, notar que*

$$\widehat{A}_{12} = X_1 D W^{(l)}_{X_1} \left(X_2 W^{(l)}_{X_1} \right)^{\dagger} + (\widetilde{A}_{21})^* W^{(r)}_{X_2 W^{(l)}_{X_1}}$$

da una expresión alternativa para $\widehat{A}_{12}$.

3.4 Algoritmo y ejemplos

En esta sección se presentará un procedimiento que sistematiza los resultados encontrados anteriormente y se ilustrarán los mismos con algunos ejemplos.

3.4.1 Algoritmo

A continuación se presenta un algoritmo que resuelve el problema de Procrustes establecido en la Sección 3.3 suponiendo que el conjunto de soluciones $\mathcal{S}$ es no vacío.

ALGORITMO

Entradas: Las matrices $\widetilde{A}, J, X$ y D.

Salida: La matriz $\widehat{A}$.

Paso 1 Diagonalizar $J = U(iI_k \oplus -iI_k)U^*$.

Paso 2 Particionar $U^*X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$.

Paso 3 Particionar $U^*\widetilde{A}U = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{bmatrix}$.

Paso 4 Calcular $P = I_m - X_1^\dagger X_1$ y $T = I_m - X_2^\dagger X_2$.

Paso 5 Calcular $L = I_m - (X_2P)^\dagger X_2 P$ y $Q = I_k - X_2P(X_2P)^\dagger$.

Paso 6 Calcular $M = X_1D - X_1DP\,(X_2P)^\dagger\ X_2 - \widetilde{A}_{12}Q\,X_2$ y $N = X_2D - (PX_2^*)^\dagger\,PD^*X_1^*X_1 - Q\widetilde{A}_{21}X_1$.

Paso 7 Si $\widetilde{A}_{11}$ ó $\widetilde{A}_{22}$ no es antihermítica, ir al Paso 18.

Paso 8 Si $(\widetilde{A}_{12} - (\widetilde{A}_{21})^*)Q \neq O$ ó $X_1DPL \neq O$, ir al Paso 18.

Paso 9 Si $MP \neq O$ ó $NT \neq O$, ir al Paso 18.

Paso 10 Si $X_1^*X_1D - X_2^*X_2D$ no es antihermítica, ir al Paso 18.

Paso 11 Calcular $R = I - X_1X_1^\dagger$ y $S = I - X_2X_2^\dagger$.

Paso 12 Calcular $\widehat{A}_{11} = MX_1^\dagger + (X_1^\dagger)^*X_2^*Q\widetilde{A}_{21}R + R\widetilde{A}_{11}R$.

Paso 13 Calcular $\widehat{A}_{12} = X_1DP\,(X_2P)^\dagger + \widetilde{A}_{12}Q$.

Paso 14 Calcular $\widehat{A}_{22} = NX_2^\dagger + (X_2^\dagger)^*\left[X_1^*X_1DP\,(X_2P)^\dagger - X_1^*\widetilde{A}_{12}Q\right]S + S\widetilde{A}_{22}S$.

Paso 15 Si $\widehat{A}_{11}\widehat{A}_{12} \neq \widehat{A}_{12}\widehat{A}_{22}$, ir al Paso 18.

Paso 16 Calcular $\widehat{A} = U\begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ (\widehat{A}_{12})^* & \widehat{A}_{22} \end{bmatrix}U^*$.

Paso 17 Ir al fin.

Paso 18 "No existe una matriz normal J-Hamiltoniana $\widehat{A}$ tal que $\min\limits_{A\in\mathcal{S}} \|\widetilde{A} - A\|_F = \|\widetilde{A} - \widehat{A}\|_F$".

Fin

Este algoritmo puede implementarse fácilmente en un ordenador. Se utilizó el paquete MATLAB R2016b. A continuación, se presentan algunos ejemplos para mostrar el rendimiento del algoritmo y demostrar su aplicabilidad.

3.4.2 Ejemplos

En el primer ejemplo en realidad se presenta una familia de ejemplos puesto que la matriz $\widetilde{A}$ depende de un parámetro h.

Ejemplo 3.4.1 *Se considera la matriz*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} U^*$$

donde

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}i & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Además, se consideran las matrices

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

y

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1+i-h & -3i & -1+i-ih & 1 \\ -2+i & -6+i & -1+2i & 3 \\ -1+i-ih & 1 & 1+3i+h & 3i \\ -1+2i & -3 & 2-i & 6+i \end{bmatrix}$$

donde $h \in \mathbb{C}$.

Aplicando el Algoritmo se tiene que

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.5-0.5i & 0.5+0.5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.5+0.5i & 0.5-0.5i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5i & 0 \\ 0.5i & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5i & 0 \\ -0.5i & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5i & 0 \\ -0.5i & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.5+0.5i & -0.5+0.5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} -0.5+0.5i & 0.5+0.5i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad y \quad \widetilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$$

son antihermíticas, y además, $(\widetilde{A}_{12} - (\widetilde{A}_{21})^*)Q = O$ *y* $X_1DPL = O$ *donde*

$$\widetilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad \widetilde{A}_{21} = \begin{bmatrix} h & 2i \\ -i & 3 \end{bmatrix},$$

se satisfacen los Pasos 7 y 8. También, $MP = O$, $NT = O$, *y*

$$X_1^*X_1D - X_2^*X_2D = \begin{bmatrix} 0 & -1-i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

es antihermítica, luego se cumplen los Pasos 9 y 10.

Tras calcular $\widehat{A}_{11}$, $\widehat{A}_{12}$, *y* $\widehat{A}_{22}$ *se obtiene*

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede comprobar fácilmente que la matriz $\widehat{A}$ *es normal J-Hamiltoniana y satisface la ecuación* $AX = XD$. *Además, el valor de la norma es*

$$\|\widetilde{A} - \widehat{A}\|_F = \sqrt{(\mathrm{Im(h)} - 2)\mathrm{Im(h)} + \mathrm{Re(h)}^2 + 35}.$$

Si se define la función $f(x, y) = y(y-2)+x^2+35$, *es fácil ver que sus derivadas parciales son* $f_x(x, y) = 2x$ *y* $f_y(x, y) = 2y - 2$, *que claramente se anulan en el punto* $(0, 1)$. *Además, la matriz Hessiana en dicho punto tiene determinante*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

con $f_x(0, 1) = 2 > 0$. *Por lo tanto, el valor mínimo (absoluto, pues se trata de la ecuación* $z = f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 + 34$ *cuya gráfica es un paraboliode con vértice en* $(0, 1, 34)$*) de la norma anteriormente calculada se alcanza en* $h = i$ *y vale* $\sqrt{34} = 5.83095$.

Observación 3.4.1 *Para el par de matrices dadas* X, D, *se ha resuelto el problema de Procrustes asociado al problema de valor propio inverso* $AX = XD$ *obteniendo la solución única* $\widehat{A}$. *Notar que, en general,* $\sigma(D) \subseteq \sigma(\widehat{A})$. *Sin embargo, en el Ejemplo 3.4.1 se puede ver que* $\sigma(D) \subsetneq \sigma(\widehat{A})$.

Ejemplo 3.4.2 *Se consideran las matrices J, U y $\widetilde{A}$ dadas en el ejemplo anterior y también sean las matrices*

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}.$$

Se satisfacen los Pasos 7, 8 y 10, $MP = O$ pero como

$$NT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5+0.5i & -0.5+0.5i & 3i \end{bmatrix} \neq 0,$$

el Paso 9 es el único que no se cumple. Entonces, el algoritmo asegura que, en este caso, el Problema (II) no tiene solución.

Capítulo 4

Matrices J-antiHamiltonianas

4.1 Introducción

En el Capítulo 3 se ha estudiado, sobre el conjunto de las matrices normales J-Hamiltonianas, el problema de valor propio inverso y el problema de Procrustes asociado. En este capítulo se hará el estudio correspondiente para matrices normales J-antiHamiltonianas. A continuación se introduce la definición de matrices J-antiHamiltonianas.

Definición 4.1.1 *Sea $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz normal tal que $J^2 = -I_n$. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es J-antiHamiltoniana si AJ es antihermítica, es decir, si $(AJ)^* = -AJ$.*

Como para las matrices J-Hamiltonianas, una definición equivalente de matriz J-antiHamiltoniana está dada por $(JA)^* = -JA$.

A lo largo de este capítulo se utilizará la misma notación que en el Capítulo 3. Se desarolla la teoría correspondiente a matrices normales J-antiHamiltonianas donde se podrán observar las semejanzas y diferencias con las matrices normales J-Hamiltonianas.

De forma semejante al Teorema 3.2.1 se puede deducir que la estructura de una matriz normal J-antiHamiltoniana está dada por

$$A = U \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} U^*, \tag{4.1}$$

donde A_{11} y A_{22} son hermíticas y $A_{11}A_{12} = A_{12}A_{22}$.

A lo largo del capítulo, el conjunto $\mathcal{S}$ esta determinado por todas las soluciones de $AX = XD$ para A normal J-antiHamiltoniana, donde X y D son matrices dadas. Es decir

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ AA^* = A^*A,\ (AJ)^* = -AJ,\ AX = XD\}.$$

Como en el Capítulo 3, se llamará Problema (I) al problema de valor propio inverso $AX = XD$, donde se pretende hallar todas las matrices A normales J-antiHamiltonianas, es decir, encontrar todos los elementos de $\mathcal{S}$.

Las condiciones espectrales sobre las matrices J-antiHamiltonianas son $\lambda \in \sigma(A)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$, en consecuencia,

$$\lambda \in \sigma(A) \qquad \Longrightarrow \qquad \{\lambda, \bar{\lambda}\} \subseteq \sigma(A).$$

En efecto, como la matriz J particionada como en (3.1) cumple $J^* = J^{-1} = -J$, entonces

$$(AJ)^* = -AJ \ \Leftrightarrow\ J^*A^* = -AJ \ \Leftrightarrow\ -JA^* = -AJ \ \Leftrightarrow\ A = JA^*J^{-1}.$$

Sea ahora $\lambda \in \sigma(A)$. Entonces, tomando determinantes, se tiene

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_n| &= |JA^*J^{-1} - \lambda I_n| = |J(A^* - \lambda I_n)J^{-1}| = |A^* - \lambda I_n| \\ &= |(A - \bar{\lambda} I_n)^*| = \overline{|A - \bar{\lambda} I_n|}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lambda \in \sigma(A) \implies \{\lambda, \bar{\lambda}\} \subseteq \sigma(A)$. Este hecho condiciona los valores de la diagonal que se pueden permitir a la matriz dato D.

Para una matriz compleja, sin embargo, $\lambda \in \sigma(A)$ no siempre implica que $-\lambda \in \sigma(A)$. Para las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

se tiene que A es J-antiHamiltoniana, $1 \in \sigma(A) = \{1, 2\}$ pero $-1 \notin \sigma(A)$.

Notar que, restringiendo el estudio a matrices reales, es decir si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la implicación

$$\lambda \in \sigma(A) \qquad \implies \qquad \{\lambda, \bar{\lambda}\} \subseteq \sigma(A)$$

es siempre verificada puesto que en polinomios con coeficientes reales, raíces complejas no reales siempre aparecen en parejas del tipo $a \pm bi$.

Al igual que en el Capítulo 3, se llamará Problema (II) al problema siguiente:

Suponiendo que el conjunto $\mathcal{S}$ es no vacío, dada una matriz $\widetilde{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, este problema consiste en hallar la matriz $\widehat{A} \in \mathcal{S}$ tal que

$$\|\widetilde{A} - \widehat{A}\|_F = \min_{A\in\mathcal{S}} \|\widetilde{A} - A\|_F. \tag{4.2}$$

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 4.2, se presenta un teorema de existencia donde se proporcionan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones del Problema (I) así como la expresión general de dichas soluciones.

En la Sección 4.3, se investiga la existencia y unicidad de la aproximación optimal del Problema (II) con las restricciones espectrales correspondientes y, en el caso de que exista, se presenta la forma explícita de la matriz que proporciona la minimización.

Finalmente, en la Sección 4.4, se diseña un algoritmo para calcular la solución optimal aproximada. Este algoritmo puede ser implementado en MATLAB R2016b. Por último, se ilustra con algunos ejemplos que permiten mostrar el funcionamiento del Algoritmo.

En todo el capítulo, la matriz $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ considerada es una matriz normal tal que $J^2 = -I_n$.

4.2 Problema de valor propio inverso

Si bien este capítulo se podría desarrollar de forma paralela al Capítulo 3, para una exposición más simplificada se darán pruebas en las que se utilizan directamente los resultados obtenidos en el Capítulo 3.

En el siguiente teorema se dan las condiciones necesarias y suficientes para que el Problema (I) tenga solución así como la expresión de la solución general.

Teorema 4.2.1 *Sean $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$ una matriz diagonal y $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz normal tal que $J^2 = -I_n$. Se considera la partición*

$$X = U \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

donde $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{k\times m}$. Entonces, existe una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal J-antiHamiltoniana tal que $AX = XD$ si y sólo si se cumplen las condiciones $(X_1D - A_{12}\,X_2)W_{X_1}^{(l)} = O$,

$$\left[X_1D - X_1DW_{X_1}^{(l)}(X_2W_{X_1}^{(l)})^{\dagger}\,X_2 - Y_{12}W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}\,X_2\right]W_{X_1}^{(l)} = O,$$

$$\left[X_2D + (W_{X_1}^{(l)}X_2^*)^{\dagger}W_{X_1}^{(l)}D^*X_1^*X_1 + W^{(r)}_{X_2W_{X_1}^{(l)}}Y_{12}^*X_1\right]W_{X_2}^{(l)} = O,$$

$X_1^*X_1D - X_2^*X_2D$ es hermítica y $A_{11}A_{12} = A_{12}A_{22}$.

Si se satisfacen dichas condiciones, la solución general viene dada por

$$A = U \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} U^*,$$

donde las expresiones de A_{11}, A_{12} y A_{22} están dadas por

$$A_{12} = X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger + Y_{12} W_{X_2 W_{X_1}^{(l)}}^{(r)},$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left[X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger X_2 - Y_{12} W_{X_2 W_{X_1}^{(l)}}^{(r)} X_2 \right] X_1^\dagger \\ &\quad + (X_1^\dagger)^* X_2^* W_{X_2 W_{X_1}^{(l)}}^{(r)} Y_{12}^* W_{X_1}^{(r)} + W_{X_1}^{(r)} Y_{11} W_{X_1}^{(r)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= \left[X_2 D + (W_{X_1}^{(l)} X_2^*)^\dagger W_{X_1}^{(l)} D^* X_1^* X_1 + W_{X_2 W_{X_1}^{(l)}}^{(r)} Y_{12}^* X_1 \right] X_2^\dagger \\ &\quad + (X_2^\dagger)^* \left[X_1^* X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger + X_1^* Y_{12} W_{X_2 W_{X_1}^{(l)}}^{(r)} \right] W_{X_2}^{(r)} \\ &\quad + W_{X_2}^{(r)} Y_{22} W_{X_2}^{(r)}, \end{aligned}$$

siendo $Y_{11}, Y_{22} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ matrices hermíticas arbitrarias e $Y_{12} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ una matriz arbitraria.

Demostración. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz normal y J-antiHamiltoniana. Entonces es fácil ver que la matriz $B = iA$ es normal y J-Hamiltoniana. En efecto,

$$B^*B = (iA)^* iA = A^*A = AA^* = iA(iA)^* = BB^*$$

y

$$(BJ)^* = (iAJ)^* = -i(AJ)^* = -i(-AJ) = iAJ = BJ.$$

Además $AX = XD$ es equivalente a $BX = X(iD)$. Ahora el resultado se obtiene de aplicar el Teorema 3.2.3 a $B = iA$ y $\widetilde{D} = iD$. ■

4.3 Problema de optimización de Procrustes

Para las matrices dadas $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$ una matriz diagonal y $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz normal tal que $J^2 = -I_n$, se considera el conjunto $\mathcal{S}$ de todas las matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normales J-antiHamiltonianas que son solución de la ecuación matricial

$$AX = XD.$$

Para realizar este estudio se supone que el conjunto $\mathcal{S}$ es no vacío. El caso en el que $\mathcal{S}$ es vacío puede ocurrir como puede comprobarse mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.1 *Se consideran las matrices*

$$X = \begin{bmatrix} 1+i & -1-i \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad y \quad J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

La solución de $AX = XD$ está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2i & -1+i \\ 1+i & 3i \end{bmatrix}.$$

La matriz A es normal pero $(AJ)^* + AJ = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \neq O.$

El resultado principal de esta sección se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1 *Sea $\widetilde{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz particionada como en (3.41) y se supone que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Entonces el Problema (II) tiene solución $\widehat{A} \in \mathcal{S}$ si y sólo si las matrices $\widetilde{A}_{11}$, $\widetilde{A}_{22}$ y $X_1^* X_1 D - X_2^* X_2 D$ son hermíticas y se satisfacen las condiciones $(X_1 D - A_{12}\, X_2) W_{X_1}^{(l)} = O$,*

$$\left[X_1 D - X_1 D W_{X_1}^{(l)} (X_2 W_{X_1}^{(l)})^\dagger\, X_2 - \widetilde{A}_{12} W^{(r)}_{X_2 W_{X_1}^{(l)}}\, X_2 \right] W_{X_1}^{(l)} = O,$$

$$\left[X_2D + (W^{(l)}_{X_1}X_2^*)^\dagger W^{(l)}_{X_1}D^*X_1^*X_1 - W^{(r)}_{X_2W^{(l)}_{X_1}}\widetilde{A}_{21}X_1\right]W^{(l)}_{X_2} = O,$$

y $(\widetilde{A}_{12} + (\widetilde{A}_{21})^*)W^{(r)}_{X_2W^{(l)}_{X_1}} = O$.

En este caso, la solución optimal es única y está dada por

$$\widehat{A} = U\begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ -(\widehat{A}_{12})^* & \widehat{A}_{22} \end{bmatrix}U^*, \tag{4.3}$$

donde

$$\widehat{A}_{12} = X_1DW^{(l)}_{X_1}\left(X_2W^{(l)}_{X_1}\right)^\dagger + \widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W^{(l)}_{X_1}},$$

$$\begin{aligned}\widehat{A}_{11} &= \left[X_1D - X_1DW^{(l)}_{X_1}\left(X_2W^{(l)}_{X_1}\right)^\dagger X_2 - \widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W^{(l)}_{X_1}}X_2\right]X_1^\dagger + \\ &\quad +(X_1^\dagger)^*X_2^*W^{(r)}_{X_2W^{(l)}_{X_1}}\widetilde{A}_{21}W^{(r)}_{X_1} + W^{(r)}_{X_1}\widetilde{A}_{11}W^{(r)}_{X_1}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{A}_{22} &= \left[X_2D + \left(W^{(l)}_{X_1)}X_2^*\right)^\dagger W^{(l)}_{X_1}D^*X_1^*X_1 + W^{(r)}_{X_2W^{(l)}_{X_1}}\widetilde{A}_{21}X_1\right]X_2^\dagger + \\ &\quad +(X_2^\dagger)^*\left[X_1^*X_1DW^{(l)}_{X_1}\left(X_2W^{(l)}_{X_1}\right)^\dagger - X_1^*\widetilde{A}_{12}W^{(r)}_{X_2W^{(l)}_{X_1}}\right]W^{(r)}_{X_2} + \\ &\quad + W^{(r)}_{X_2}\widetilde{A}_{22}W^{(r)}_{X_2}.\end{aligned}$$

Demostración. Los resultados se obtienen de aplicar el Teorema 3.3.1 a $B = iA$ y $\widetilde{D} = iD$. ■

Observación 4.3.1 *Usando la condición* $(\widetilde{A}_{12} + (\widetilde{A}_{21})^*)W^{(r)}_{X_2W^{(l)}_{X_1}} = O$ *dada en el Teorema 4.3.1, notar que*

$$\widehat{A}_{12} = X_1DW^{(l)}_{X_1}\left(X_2W^{(l)}_{X_1}\right)^\dagger - (\widetilde{A}_{21})^*W^{(r)}_{X_2W^{(l)}_{X_1}}$$

da otra expresión alternativa para $\widehat{A}_{12}$.

4.4 Algoritmo y ejemplos

4.4.1 Algoritmo

En esta seccón se presenta un algoritmo que resuelve el problema de Procrustes establecido en la Sección 4.3. Suponiendo que el conjunto de soluciones $\mathcal{S}$ es no vacío, la matriz $\widehat{A}$, solución del Problema (II), se obtiene mediante los pasos siguientes:

ALGORITMO

Entradas: Las matrices $\widetilde{A}, J, X$ y D.

Salida: La matriz $\widehat{A}$.

Paso 1 Diagonalizar $J = U(iI_k \oplus -iI_k)U^*$.

Paso 2 Particionar $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = U^* X$.

Paso 3 Particionar $\begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{bmatrix} = U^* \widetilde{A} U$.

Paso 4 Calcular $P = I_m - X_1^\dagger X_1$ y $T = I_m - X_2^\dagger X_2$.

Paso 5 Calcular $L = I_m - (X_2 P)^\dagger X_2 P$ y $Q = I_k - X_2 P (X_2 P)^\dagger$.

Paso 6 Calcular $M = X_1 D - X_1 D P \left(X_2 P\right)^\dagger X_2 - \widetilde{A}_{12} Q \, X_2$ y $N = X_2 D + \left(P X_2^*\right)^\dagger P D^* X_1^* X_1 + Q \widetilde{A}_{21} X_1$.

Paso 7 Si $\widetilde{A}_{11}$ o $\widetilde{A}_{22}$ no es hermítica, ir al Paso 17.

Paso 8 Si $(\widetilde{A}_{12} + (\widetilde{A}_{21})^*)Q \neq O$ o $X_1 D P L \neq O$, ir al Paso 17.

Paso 9 Si $MP \neq O$ o $NT \neq O$, ir al Paso 17.

Paso 10 Si $X_1^* X_1 D - X_2^* X_2 D$ no es hermítica, ir al Paso 17.

Paso 11 Calcular $R = I - X_1 X_1^\dagger$ y $S = I - X_2 X_2^\dagger$.

Paso 12 Calcular $\widehat{A}_{11} = MX_1^{\dagger} + (X_1^{\dagger})^* X_2^* Q \widetilde{A}_{21} R + R \widetilde{A}_{11} R$.

Paso 13 Calcular $\widehat{A}_{12} = X_1 DP \left(X_2 P\right)^{\dagger} + \widetilde{A}_{12} Q$.

Paso 14 Calcular $\widehat{A}_{22} = NX_2^{\dagger} + (X_2^{\dagger})^* \left[X_1^* X_1 DP \left(X_2 P\right)^{\dagger} - X_1^* \widetilde{A}_{12} Q\right] S + S \widetilde{A}_{22} S$.

Paso 15 Calcular $\widehat{A} = U \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ -(\widehat{A}_{12})^* & \widehat{A}_{22} \end{bmatrix} U^*$.

Paso 16 Ir al fin.

Paso 17 "No existe una matriz normal J-antiHamiltoniana $\widehat{A}$ tal que $\min\limits_{A \in \mathcal{S}} \|\widetilde{A} - A\|_F = \|\widetilde{A} - \widehat{A}\|_F$".

Fin

El algoritmo puede implementarse fácilmente en un ordenador. Se utilizó el paquete MATLAB R2016b. Se presentan algunos ejemplos para analizar la eficiencia del algoritmo y su aplicabilidad.

4.4.2 Ejemplos

Ejemplo 4.4.1 *Se considera la matriz*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} U^*,$$

donde

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} i & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} i & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} i & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Además, se consideran las matrices

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2-i-h & 1-i & -1-ih & 1-i \\ -1-i & -1 & -1+i & -2i \\ -1+2i+ih & 1+i & 4+i+h & 1+5i \\ -1+3i & 2i & 3-3i & 10 \end{bmatrix}$$

donde $h \in \mathbb{C}$. *Aplicando el Algoritmo se tiene que*

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.5-0.5i & 0.5+0.5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0.5+0.5i & 0.5-0.5i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5i & 0 \\ 0.5i & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5i & 0 \\ -0.5i & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5i & 0 \\ -0.5i & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.5-0.5i & 0.5+0.5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0.5+0.5i & 0.5-0.5i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \widetilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

son hermíticas, y además, $(\widetilde{A}_{12} + (\widetilde{A}_{21})^*)Q = O$ *y* $X_1DPL = O$ *donde*

$$\widetilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad \widetilde{A}_{21} = \begin{bmatrix} h & 2i \\ -i & 3 \end{bmatrix},$$

por tanto se satisfacen los Pasos 7 y 8. También, $MP = O$, $NT = O$ *y*

$$X_1^*X_1D - X_2^*X_2D = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

es hermítica, luego se cumplen los Pasos 9 y 10.

Tras calcular $\widehat{A}_{11}$, $\widehat{A}_{12}$ *y* $\widehat{A}_{22}$ *se obtiene*

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se puede comprobar fácilmente que la matriz $\widehat{A}$ *es normal J-antiHamiltoniana y satisface la ecuación* $AX = XD$.

Además, el valor de la norma es

$$\|\widetilde{A} - \widehat{A}\|_F = \sqrt{|h|^2 + h + \bar{h} + 41},$$

su valor mínimo es alcanzado en $h = -1$ *y vale* $2\sqrt{10} = 6.32456$.

Ejemplo 4.4.2 *Se consideran las matrices* J, U *y* $\widetilde{A}$ *dadas en el ejemplo anterior y también sean las matrices*

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se satisfacen los Pasos 7 y 8, $MP = O$ *pero como*

$$NT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.5 - 0.5i & 0.5 - 0.5i & 3i \end{bmatrix} \neq O,$$

el Paso 9 no se cumple. Entonces, el algoritmo asegura que el Problema (II) no tiene solución.

Conclusiones y líneas futuras

El Análisis Matricial y sus aplicaciones constituyen un área importante de la Matemática Aplicada. En particular, el problema de valor propio inverso se presenta en diversas áreas de la ingeniería y, en la actualidad, el gran interés por este tema se ve reflejado en los múltiples artículos publicados.

El problema del valor propio inverso tiene como propósito la construcción de una matriz con una determinada estructura que posea cierto espectro predefinido. En la literatura, los problemas inversos de ese tipo introducen restricciones sobre la matriz a determinar.

En esta tesis se estudió el problema de valor propio inverso para tres tipos de matrices específicas, continuando con el problema de optimización asociado. A continuación se indican los problemas concretos que han sido desarrollados en esta memoria.

En primer lugar, en el Capítulo 2, se extendió el trabajo iniciado por L. Lebtahi y N. Thome sobre la resolución del problema de valor propio inverso para el caso de una matriz hermítica y reflexiva o antireflexiva con respecto a una matriz que cumple las condiciones de ser tripotente y hermítica. En este capítulo se consideró la extensión de ambas propiedades al caso de una matriz hermítica y reflexiva con respecto a una matriz $\{k+1\}$-potente y normal.

Uno de los resultados principales de este capítulo es el Teorema 2.2.1 en el que se dieron las condiciones bajo las cuales el problema tiene solución y, además, se proporcionó la forma explícita de la solución general.

Si el conjunto de soluciones del problema de valor propio inverso resulta no vacío, se demostró que el problema de optimización de Procustes asociado tiene una única solución y en el Teorema 3.3.1 se mostró la forma de tal solución.

En la Sección 2.4 se propuso un algoritmo implementado en MATLAB que resuelve el problema de Procrustes y también se dio un ejemplo numérico que constata la efectividad y prestaciones del mismo.

Como se mencionó en la memoria, las matrices Hamiltonianas y antiHamiltonianas surgen, entre otros, en la resolución de importantes problemas de la Teoría de Sistemas y Control, tales como el control óptimo cuadrático lineal, la optimización H_∞ y el problema de resolución de la ecuación algebraica de Riccati.

Z. Zhang, X. Hu y L. Zang en [48] estudiaron el problema de valor propio inverso para matrices hermíticas y Hamiltonianas generalizadas, mientras que Z. Bai resolvió en [2] el problema inverso para matrices antiHamiltonianas generalizadas. Con el propósito de extender los resultados de ambos trabajos, se han introducido en esta tesis las matrices J-Hamiltonianas y las J-antiHamiltonianas que constituyen una de las contribuciones originales de esta tesis. Se amplía el conocimiento de resultados para la matriz Hamiltoniana específica real cuya diagonal secundaria contiene I y $-I$ a todas las matrices ortogonalmente semejantes a ella.

En el Capítulo 3 se estudió el problema de valor propio inverso para matrices normales J-Hamiltonianas presentando cuatro métodos distintos para la resolución del problema. En el primer caso, las inversas generalizadas se utilizaron para la resolución directa del problema, mientras que, en el segundo, se empleó la vectorización y el producto de Kronecker. En el tercer método se mostraron las infinitas soluciones del problema y, por último, con el cuarto método, cuyos resultados se muestran en Teorema 3.2.3, se hallaron las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales existen todas las soluciones. En el teorema también se mostró la forma explícita de las soluciones.

Además, en este capítulo se consideró el problema de optimización de Procrustes asociado. En el caso en que el conjunto de soluciones del problema de valor propio inverso es no vacío, en el Teorema 3.3.1 se presentaron las condiciones bajo las cuales la solución existe y la forma de la solución.

Al igual que en el Capítulo 2, se propuso en la Sección 3.4 un algoritmo, implementado en MATLAB, que se utilizó en dos ejemplos numéricos que permitieron mostrar la efectividad del mismo.

En el último capítulo, el Capítulo 4, se abordó el problema de valor propio inverso para matrices J-antiHamiltonianas siguiendo los lineamientos de los dos capítulos anteriores. En el Teorema 4.2.1 se dieron condiciones necesarias y suficientes para que el problema de valor propio tenga solución, así como la expresión de la solución general. Las condiciones necesarias y suficientes para que el problema de optimización de Procrustes tenga solución fueron enunciadas en el Teorema 4.3.1, así como también la forma de la única solución del problema.

En la Sección 4.4 se presentó un algoritmo implementado en que resuelve el problema de Procrustes y una vez más se dieron ejemplos numéricos que mostraron su eficiencia.

Dos problemas que se estudiarán a futuro, como continuación de los problemas abordados en esta memoria, se citan a continuación:

- Realizar el análisis de existencia y solución y el correspondiente estudio del problema de Procrustes para problemas del valor propio inverso con vectores propios a derecha e izquierda para estructuras matriciales concretas. Es conocido que el estudio de vectores propios a derecha e izquierda es útil a la hora de realizar el análisis de perturbación de los valores propios de una matriz.

- Realizar un estudio en la línea de lo analizado en la tesis para el caso de matrices simplécticas. Se recuerda que una matriz de tamaño $2k \times 2k$ es simpléctica si verifica $A^* J_0 A = J_0$ donde J_0 es la matriz que tiene en la diagonal secundaria las matrices identidades I_n y $-I_n$ y el resto ceros. Esta clase de matrices es relevante desde el punto de vista matemático y por sus aplicaciones. Juegan un papel importante en Mecánica Clásica, en sistemas dinámicos Hamiltonianos, y aparecen también en la teoría de control lineal para sistemas discretos.

Tabla de símbolos

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$	conjunto de los números naturales y enteros.
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$	espacio euclideo real y complejo de dimensión n.
$\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{C}^{m\times n}$	espacio de matrices reales/complejas de tamaño $m \times n$.
I_n	matriz identidad de tamaño $n \times n$.
A^T	traspuesta de la matriz A.
A^*	traspuesta conjugada de A.
A^{-1}	inversa de A.
$\mathcal{N}(A)$	subespacio núcleo de A.
$\mathcal{R}(A)$	subespacio imagen de A.
$\det(A)$	determinante de A.
$\mathrm{tr}(A)$	traza de A.
$A^\dagger$	inversa de Moore-Penrose de A.
$\sigma(A)$	espectro o conjunto de valores propios de A.

$S^\perp$	subespacio ortogonal del subespacio S.
$\langle .,. \rangle$	producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

Bibliografía

[1] D. Akca. Generalized Procrustes Analysis and its applications in Photogrammetry. Technical report, ETS, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Institute of Geodesy and Photogrammetry, 2003.

[2] Z. Bai. The solvability conditions for the inverse eigenvalue problem of Hermitian and generalized skew-Hamiltonian matrices and its approximation. *Inverse Problems*, 19(5):1185–1194, 2003.

[3] V. Barcilon. On the Multiplicity of Solutions of the Inverse Problem for a Vibrating Beam. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37(3):605–613, 1979.

[4] A. Ben-Israel y T. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] P. Benner, D. Kesner y V. Mehrmann. Skew-Hamiltonian and Hamiltonian Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms and Applications. En *Actas del Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing*, pages 3–39, Brijuni, Croatia, 2005.

[6] D. Boley y G. H. Golub. A survey of matrix inverse eigenvalue problems. *Inverse Problems*, 3:595–622, 1987.

[7] H. C. Chen. Generalized Reflexive Matrices: Special Properties and Applications. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19(1):140–153, 1998.

[8] E. W. Cheney. *Introduction to Approximation Theory.* McGraw-Hill Book Co., New York, USA, 1966.

[9] M. T. Chu y G. H. Golub. Structured inverse eigenvalue problems. *Acta Numerica*, 11:1–70, 2002.

[10] F. Crosilla. *Procrustes Analysis and Geodetic Sciences*, pages 287–292. Springer, Heidelberg, 2003.

[11] D. S. Djordjević. Explicit solution of the operator equation $A^*X + X^*A = B$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200:701–704, 2007.

[12] M. G. Eberle y M. C. Maciel. Finding the closest Toeplitz matrix. *Computational & Applied Mathematics*, 22(1):1–18, 2003.

[13] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Un algoritmo de optimización en un problema de valor propio inverso matricial. *IV Congreso Latinoamericano de Matemáticos (IV CLAM 2012), Córdoba, Argentina.*

[14] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Existencia de la solución del problema del valor propio inverso para matrices J-hamiltonianas. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 4:509–512, 2013.

[15] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Inverse eigenvalue problem for normal J-hamiltonian matrices. *Applied Mathematics Letters*, 48:36–40, 2015.

[16] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Sobre las soluciones del problema del valor propio inverso para matrices J-hamiltonianas. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 5:345–348, 2015.

[17] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. The inverse eigenvalue problem for a Hermitian reflexive matrix and the optimization problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 291:449–457, 2016.

[18] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Problema del valor propio inverso de Procrustes para matrices normales J-Hamiltonianas. *Encuentro de la Red Temática de Álgebra Lineal, Análisis Matricial y Aplicaciones (ALAMA 2018), se celebrará del 30 de mayo al 1 de junio de 2018 en Sant Joan d'Alacant, España.*

[19] G. M. L. Gladwell. Inverse Problems in Vibration. *Applied Mechanics Reviews*, 39(7):1013–1018, 1986.

[20] G. M. L. Gladwell. *Inverse Problems in Vibration.* Springer Netherlands, United States, 2005.

[21] A. Herrero y N. Thome. Using the GSVD and the lifting tecnique to find $\{P, k+1\}$ reflexive and anti-reflexive solution of $AXB = C$. *Applied Mathematics Letters*, 24:1130–1141, 2011.

[22] X. Ibáñez-Català y M. I. Troparevsky. An Approximated Solution to the Inverse Problem of EEG. En *Actas de la 4th European Conference of the International Federation for Medical and Biological Engineering*, 2009.

[23] K. T. Joseph. Inverse eigenvalue problem in structural design. *AIAA Journal*, 30(12):2890–2896, 1992.

[24] C. G. Khatri y S. K. Mitra. Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 31(4):579–585, 1976.

[25] H. J. Landau. The inverse eigenvalue problem for real symmetric Toeplitz matrices. *Journal of the American Mathematical Society*, 7(3):749–767, 1994.

[26] A .Laub. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6):913–921, 1979.

[27] A. Laub. *Invariant Subspace Methods for the Numerical Solution of Riccati Equations*, pages 163–196. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[28] L. Lebtahi y N. Thome. The inverse eigenvalue problem for Hermitian reflexive (anti-reflexive) matrices with respect to a tripotent Hermitian matrix. En *Actas del Second ALAMA Meeting*, pages 1–6, Valencia, España, 2010.

[29] L. Lebtahi y N. Thome. El problema del valor propio inverso para cierta clase de matrices. En *Actas del III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, MACI 3*, pages 495–498, Bahía Blanca, Argentina, 2011.

[30] B. M. Levitan. *Inverse Sturm Liouville Problems.* VNU Science Press, 1987.

[31] N. Li. A Matrix Inverse Eigenvalue Problem and Its Application. *Linear Algebra and its Applications*, 266:143–152, 1997.

[32] M. L. Liang y L. F. Dai. The left and right inverse eigenvalue problems of generalized reflexive and anti-reflexive matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234:743–749, 2010.

[33] Z. Liu y H. Faßbender. An inverse eigenvalue problem and an associated approximation problem for generalized K-centrohermitian matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(1):578–585, 2007.

[34] V. L. Mehrmann. *The Autonomous Linear Quadratic Control Problem, Theory and Numerical Solution.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.

[35] C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM, New York, 2000.

[36] R. L. Parker. The magnetotelluric inverse problem. *Geophysical Surveys*, 6:5–25, 1983.

[37] R. L. Parker y K. A. Whaler. Numerical methods for establishing solutions to the inverse problem of electromagnetic induction. *Journal of Geophysical Research*, 86(B10):9574–9584, 1981.

[38] Z. Y. Peng. The inverse eigenvalue problem for Hermitian anti-reflexive matrices and its approximation. *Applied Mathematics and Computation*, 162(3):1377–1389, 2005.

[39] C. R. Rao y S. K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1971.

[40] P. H. Schönemann. A generalized solution of the orthogonal Procrustes problem. *Psychometrika*, 31(1):1–10, 1966.

[41] P.H. Schönemann y R. M. Carroll. Fitting one matrix to another under choice of a central dilation and rigid motion. *Psychometrika*, 35(2):245–255, 1970.

[42] V. Sima. *Algorithms for Linear-Quadratic Optimization*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

[43] W. F. Trench. Numerical Solution of the Inverse Eigenvalue Problem for Real Symmetric Toeplitz Matrices. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(6):1722–1736, 1997.

[44] W. F. Trench. Inverse eigenproblems and associated approximation problems for matrices with generalized symmetry or skew symmetry. *Linear Algebra and its Applications*, 380:199–211, 2004.

[45] S. J. Wang y S. Y. Chu. An algebraic approach to the inverse eigenvalue problem for a quantum system with a dynamical group. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(16):5655–5671, 1994.

[46] Y. Wei y H. Dai. An inverse eigenvalue problem for Jacobi matrix. *Applied Mathematics and Computation*, 251:633–642, 2015.

[47] J. Yang y Y. Deng. Procrustes Problems for General, Triangular, and Symmetric Toeplitz Matrices. *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 696019, 2013.

[48] Z. Zhang, X. Hu y L. Zhang. The solvability conditions for the inverse eigenproblem of Hermitian-generalized Hamiltonian matrices. *Inverse Problems*, 18:1369–1376, 2002.

[49] F. Z. Zhou, X. Y. Hu y L. Zhang. The solvability conditions for the inverse eigenvalue problems of centro-symmetric matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 364:147–160, 2003.

[50] K. Zhou, J. C. Doyle y K. Glover. *Robust and Optimal Control.* Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1996.