UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Relación entre los precios de Opciones Europeas y de Opciones Americanas de tipo *Call* y de tipo *Put*, cuyos subyacentes no pagan dividendos

Apellidos, nombre	Burgos Simón, Clara; Cortés López, Juan Carlos; Navarro Quiles, Ana; (claburs i@posgrado.upv.es; jccortes@imm.upv.es; annaqui@posgrado.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo docente se estudia la relación entre los valores de las primas correspondientes a una opción financiera de tipo europeo y a una opción financiera de tipo americano en el caso en que ambas opciones se emiten sobre un mismo subyacente, el cual no paga dividendos, y tanto el precio de ejercicio como el vencimiento es común en ambos tipos de opciones. El estudio se realiza en dos casos: cuando las opciones son de compra (*Call*) y cuando las opciones son de venta (*Put*). Se concluye que la prima de la opción de venta americana debe ser mayor o igual que la correspondiente a la opción europea, mientras que en el caso de las opciones de compra, ambas primas deben ser iguales porque no es inteligente ejercer el derecho anticipado, es decir, antes del vencimiento, que otorga la opción americana.

2 Introducción

Las opciones financieras son contratos que, mediante el pago de una prima (*premium*) en un instante t_0 otorgan al propietario de la opción el derecho de comprar (*Call option*) o vender (*Put option*) un subyacente durante el período, digamos $[t_0, T]$, que tiene vigencia el contrato. El subyacente (*underlying*) puede ser una acción, un bien o cualquier otra cosa. El tiempo T se denomina vencimiento o expiración del contrato (*maturity*). Dependiendo de cuándo pueda ejercerse el derecho, dentro del período de vida de la opción, para la compra o la venta, las opciones se clasifican en:

- Opciones europeas: Si el derecho de compra o de vente solo se puede ejercer en el instante final, T, del vencimiento.
- Opciones americanas: Si el derecho de compra o de venta se puede ejercer en cualquier instante, t, durante la vida de la opción, es decir $t \in [t_0, T]$.

Si C^A, C^E, P^A y P^Edenotan las primas por la compra de una opción *Call* americana, *Call* europea, *Put* americana y *Put* europea, respectivamente, parece lógico que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$C^A \geq C^E, \quad P^A \geq P^E.$$

Ecuación1: Relaciones para las primas de opciones Call y Put europeas y americanas.

Es decir, que las primas de las opciones americanas deben mayores o iguales que las primas de las opciones europeas para un mismo subyacente, un mismo precio de ejercicio (*strike*) y un mismo vencimiento. Esto debe ser así, porque por su propia definición, las opciones americanas pueden ser ejercidas en cualquier instante t de la vida de la opción incluyendo el instante final T, el único en el que pueden ejercerse las opciones europeas, por lo que en principio se debería pagar más por un producto financiero (la opción americana) que "posibilita" obtener un beneficio igual o mayor que otro producto financiero, en este caso la opción europea.

Sin embargo, obsérvese que ello no asegura que, en la práctica, una opción americana proporcione un mayor beneficio, que su correspondiente opción europea. Esto es así porque, por ejemplo, imaginemos una acción con valor actual $S_{t_0} = 8€$ y dos inversores, A y B, adquieren sobre este subyacente una opción de compra americana y una opción de compra europea, respectivamente. Supongamos que ambas opciones expiran en dos meses. El inversor A puede ejercer el derecho de compra de la opción *Call* americana con precio de ejercicio, por ejemplo, $K = 10€$, un mes antes del vencimiento cuando el subyacente cotiza a $12€$, obteniendo un beneficio bruto (*pay-off*) de $12 - 10 = 2€$, y podría suceder que transcurrido el mes restante de vida de la opción, el propietario B de una opción *Call* europea sobre el mismo subyacente y vencimiento, ejerciera su derecho (solo al vencimiento) cuando el subyacente ha subido a $15€$, en cuyo caso su *pay-off* sería mayor, $15 - 10 = 5€$. Desde luego, el propietario de la *Call* americana también podría haber obtenido ese mismo *pay-off* si se hubiera esperado un mes más, es decir, al vencimiento del contrato, pero él no lo hizo porque no sabía si el subyacente subiría más allá de los $12€$ (se conformó con la subida de $12 - 8 = 4€$) desde que entró en el contrato de opción americana.

El objetivo de estas páginas es fundamentar, mediante razonamientos basados en arbitraje a partir de la construcción de carteras financieras, las relaciones mostradas en la Ec.1, y en particular mostrar un resultado sorprendente: No es inteligente ejercer una opción de compra americana sobre un subyacente que no paga dividendos antes del vencimiento, por lo que en ese caso $C^A = C^E$. Concretamente establecemos el siguiente:

RESULTADO PRINCIPAL

Supongamos un subyacente que no paga dividendos.

1. Para una opción de compra americana y una opción de compra europea emitidas en los mismos términos (mismo vencimiento y subyacente), se cumple

$$C^A = C^E.$$

2. Para una opción de venta

$$P^A \geq P^E,$$

siendo $P^A > P^E$ más probable.

Además, nunca es inteligente ejercer la opción de compra americana antes del vencimiento.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Analizar de forma razonada por qué cuando un subyacente no paga dividendos, las primas correspondientes a una opción de compra de tipo europeo y de tipo americana, con el mismo precio de ejercicio y la misma fecha de vencimiento deben coincidir, y por tanto, no es inteligente ejercer la opción de compra americana antes del vencimiento.
- Analizar de forma razonada por qué cuando un subyacente no paga dividendos, la prima de una opción de venta de tipo americano debe ser mayor o igual que la prima que se pague por una opción de venta de tipo

europeo, con el mismo precio de ejercicio y la misma fecha de vencimiento.

- Realizar razonamientos adecuados para la obtención de conclusiones relativas a las primas de opciones de compra y de venta, tanto europeas como americanas, sobre un mismo subyacente, precio de ejercicio y vencimiento basados en la construcción de carteras financieras apropiadas y en argumentos de arbitraje.

4 Análisis para las opciones de venta o tipo *Put*

Este apartado está dedicado a justificar la segunda parte del RESULTADO PRINCIPAL, por tanto, veamos en primer lugar que la prima de una opción de venta americana, P^A, *puede* exceder a la prima de su correspondiente opción de venta europea, P^E, es decir, $P^A > P^E$.

La intuición es la siguiente: El ejercicio temprano de la *Put* americana suministrará efectivo (el precio del ejercicio, K), con el que adquirir un bono a una tasa de interés libre de riesgo, digamos r. Si este interés es suficientemente alto, el beneficio generado al vencimiento, (gracias al ejercicio temprano de la *Put* americana), puede ser superior al que pueda proporcionar una opción *Put* europea, el cual recordemos, está limitado al precio del ejercicio K. Además, este valor K se consigue cuando el precio del subyacente a vencimiento es 0 (realmente muy bajo en la práctica).

Escribamos esta situación con formulación matemática: supongamos que se ejerce la *Put* americana en el instante $t = t_0$, y que a continuación el efectivo resultante, $K - S_{t_0}$, lo invirtiéramos, durante el plazo restante de la vida de la opción, $T - t_0$, al tipo de interés libre de riesgo r. Esto proporcionará el siguiente beneficio

$$\left(K - S_{t_0}\right) e^{r(T-t_0)}$$

(asumiendo una capitalización con tipo de interés compuesto continuo). Si se cumple que

$$\left(K - S_{t_0}\right) e^{r(T-t_0)} > K,$$

entonces la opción de venta americana tendrá más valor que su correspondiente opción de venta europea, lo que justifica que $P^A > P^E$. Esta situación se puede ilustrar con un ejemplo numérico que puede acontecer en el mercado real.

Ejemplo 1: Supongamos que una acción vale $S_{t_0} = 1$€ y que sobre este subyacente se emiten dos opciones de venta, una de tipo europeo y otra de tipo americano, ambas con vencimiento en $T - t_0 = 18$ meses y mismo precio de ejercicio o *strike*, $K = 2$€. Si en el mercado el tipo de interés libre de riesgo es $r = 0.05$ mensual (¡un tipo de interés suficientemente alto!), entonces obsérvese que se cumple la condición anterior

$$\left(K - S_{t_0}\right) e^{r(T-t_0)} = (2-1)\, e^{0.05\times 18} = 2.4596 > 2 = K.$$

5 Análisis para las opciones de compra o tipo *Call*

Ahora justificaremos la segunda parte del RESULTADO PRINCIPAL la cual es, desde luego, más sorprendente.

La intuición es la siguiente: La propiedad de una *Call* europea permite, al propietario de esta opción pedir prestada una unidad del subyacente (acción) en cualquier instante de la vida de la opción (porque la *Call europea* le da derecho a ejercer la opción en el vencimiento T y a adquirir el subyacente y devolverlo), es decir, la opción *Call* cubre la posición corta en el instante T sobre el subyacente que se ha pedido prestado *hasta un valor máximo* del precio de ejercicio K.

Escribamos esta situación con formulación matemática: Supongamos que $C^A > C^E$ y veamos que, si el subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción, entonces $C^A = C^E$, es decir, que es mejor pagar el precio de ejercicio K al final de la vida de la opción americana, con lo cual ambas opciones son realmente de tipo europeo y debería pagarse la misma prima por la opción americana que por la opción europea. Para ello, vamos a construir la siguiente cartera (recuérdese que suponemos que $C^A > C^E$):

CARTERA INICIAL ($t = t_0$)

1. Posición corta *Call* americana: recibimos la prima C^A.
2. Posición larga *Call* europea: pagamos la prima C^E.
3. El dinero obtenido con las posiciones 1 y 2 anteriores, es decir $C^A - C^E > 0$, se invierte en un bono a un tipo de interés libre el riesgo r.

Obsérvese que la posición 2 se puede adoptar gracias a la posición 1 y a que $C^A > C^E$. Claramente

$$\text{Valor CARTERA INICIAL}(t = t_0) = \underbrace{C^A - C^E}_{\substack{\text{recibido por} \\ \text{posiciónes 1 y 2}}} - \underbrace{C^A - C^E}_{\substack{\text{gastado por} \\ \text{posición 3}}} = 0.$$

Ahora vamos a analizar las distintas posibilidades respecto del ejercicio de la *Call* americana.

- Escenario I: Si las *Calls* no se ejercen. En este caso, asumiendo un régimen de capitalización a interés compuesto continuo, r, se genera un beneficio garantizado por la inversión libre de riesgo del dinero invertido en el bono (posición 3).
- Escenario II: Si el propietario de la *Call* americana no ejerce su derecho hasta el vencimiento, $t = T$, entonces basta ejercer nuestro derecho de la *Call* europea. Es claro que el ejercicio a vencimiento de la *Call* americana implica el ejercicio (a vencimiento) de la *Call* europea. Esto equilibra nuestra posición corta con nuestra posición larga, y de nuevo la posición de inversión libre de riesgo en el bono nos garantiza un beneficio. En efecto,

$$\begin{aligned}\text{Valor CARTERA FINAL } (t=T) &\\ &= \text{posicion corta Call americana} + \text{posicion larga Call europea}\\ &+ \underbrace{(C^A - C^E)e^{r(T-T_0)}}_{\substack{\text{generado por inversión}\\ \text{en el bono}}} = -(S_T - K) + (S_T - K) + (C^A - C^E)e^{r(T-T_0)}\\ &= (C^A - C^E)e^{r(T-T_0)}.\end{aligned}$$

- Escenario III: Si el propietario de la *Call* americana nos ejerce su derecho de compra antes del vencimiento (en el instante $\hat{t} \in [t_0, T[$), en ese caso, nuestra posición larga en la *Call* europea nos permite pedir prestado una unidad del subyacente (acción) y esto nos cubrirá de nuestra posición corta de la *Call* americana. En efecto, veamos la posición de nuestra cartera inicial en el instante $\hat{t}$:

CARTERA en $\hat{t} \in [t_0, T[$

1. Pedimos prestada una acción de valor $S_{\hat{t}}$.
2. Tenemos (posición larga) en una *Call* europea.
3. El valor de la inversión en el bono es $(C^A - C^E)e^{r(\hat{t}-t_0)}$.
4. Recibimos el precio de ejercicio K por el ejercicio de la *Call* americana.

Y ahora veamos la posición de nuestra cartera en el instante del vencimiento T:

CARTERA en $t = T$

1. La acción que pedimos prestada en $t \in [t_0, T[$ ahora vale S_T.
2. La posición larga en la *Call* europea vale $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$.
3. El valor de la inversión inicial en el bono vale $(C^A - C^E)e^{r(T-T_0)}$.
4. El precio de ejercicio K recibido de la *Call* americana invertido en el bono generará el valor $Ke^{r(T-\hat{t})}$.

En el vencimiento $t = T$ ejerceremos la posición larga de la *Call* europea para cubrir nuestra posición corta en el subyacente (acción), o si el precio de la acción, S_T, es menor que K, compraremos directamente la acción en el mercado libre para devolverla. Considerando ambas situaciones, respecto del precio de la acción a vencimiento, está claro que la posición corta en la acción está cubierta con un coste igual a $\min(K, S_T)$. Resumiendo

$$\text{Valor CARTERA FINAL } (t=T) = \underbrace{(C^A - C^E)}_{>0} e^{r(T-t_0)} + K\, e^{r(T-\hat{t})} - \min(K, S_T) > 0.$$

El signo de esta desigualdad se ha deducido de la siguiente manera:

- Si $K < S_T$, como $Ke^{r(T-\hat{t})} > K$, se cumplirá que

$$K\, e^{r(T-\hat{t})} - \min(K, S_T) = K\, e^{r(T-\hat{t})} - K > 0,$$

y por tanto

$$\text{Valor CARTERA FINAL } (t = T), \text{ será positivo.}$$

- Si $K > S_T$, es claro por la última desigualdad que

$$K\ e^{r(T-\hat{t})} - min(K - S_T) = K\ e^{r(T-\hat{t})} - S_T > K\ e^{r(T-\hat{t})} - K > 0,$$

  y por tanto de nuevo,

$$\text{Valor CARTERA FINAL } (t = T), \text{ será positivo.}$$

Resumiendo, en cualquiera de los tres escenarios, si $C^A > C^E$, podemos crear posiciones que nos arrojen ventajas, es decir, beneficio libre de riesgo. La existencia de este arbitraje justifica que si el subyacente no paga dividendos, entonces no es sabio ejercer una opción de compra americana antes del vencimiento. Por ello, la prima de una opción americana y una opción europea sobre el mismo subyacente que no paga dividendos y mismo vencimiento deben ser iguales.

6 Cierre

Con este trabajo se pretende mostrar al lector la gran potencia del lenguaje matemático para analizar problemas propios de las Finanzas que involucran conceptos sutiles cuyo análisis completo requiere conjugar la interpretación financiera con el razonamiento de las matemáticas. En particular, el trabajo presentado sirve como un primer paso para el analizar el estudio comparativo de los valores de las primas de opciones financieras de compra y de venta, tanto de tipo europeo como de tipo americano, en el caso de que el subyacente pague un dividendo durante el período de vida de la opción.

7 Bibliografía

[1] J.C. Hull: Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall, 5ª edición, 2003.

Se trata de un texto excelente donde puede encontrarse una introducción a las opciones financieras desde un enfoque que combina los aspectos cualitativos financieros con un nivel matemático elemental.