MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING
Volume 2, *No.* 6, 2009.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Obtenció Dels Modes De Resonancia A Una Geometria Complexa: Proposta Didàctica De Modelització Amb Elements Finits

E. Fuster-Garcia, L.M. Garcia Raffi
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

V. Romero-Garcia*
UNIDAD ASOCIADA CSIC-UPV
* virogar1@mat.upv.es

Abstract

Els elements finits actualment constitueixen una eina fonamental per a resolució d'equacions diferencials en contextos reals. En aquest article presentem un bon exemple per al mètode: l'obtenció dels modes de ressonància sobre la tapa harmònica d'una guitarra, a partir de la resolució d'una equació d'autovalors amb el mètode dels elements finits. Per la facilitat de interpretació i contrastació experimental dels resultats obtinguts, pot oferir a mès una gratificació i motivació addicional, molt necessària en tot procès d'aprenentatge.

Finite Elements Method is a well established mathematical technique for solving Partial Derivative Differential Equations. In this article we present an example of application of Finite Elements Method: the harmonic resonance modes of a guitar obtained from the resolution of the eigenvalues equation via the Finite Elements Method. Graphical output and direct comparison with experiments facilitates the understanding of the method and an extra motivation, establishing a link between Mathematics and the resolution of real engineering problems than is specially necessary in the teaching of Mathematics in the engineering schools.

Keywords: *Acústica, resonáncia, autovalors, elements finits,* MATLAB

1 Introduction

Les tècniques i procediments de modelització han desenvolupat sempre un rol molt rellevant en l'exercici professional dels enginyers i científics emprant-se de forma habitual al càlcul de estructures o dissenys industrials complexos entre altres.

Tot i la rellevància que la modelització presenta a l'exercici professional, aquesta no es veu reflectida als continguts curriculars de les titulacions d'enginyeria. Per a suplir aquesta carència formativa als últims anys han segut distintes les propostes que han tractat d'introduir les eines de modelització i els seus procediments a distintes assignatures de les titulacions d'enginyeria, tant clàssiques com noves.

Aquestes tècniques no tan sols constitueixen unes eines d'ús professional, si no que alhora proporcionen uns recursos pedagògics molt útils per a la visualització i comprensió dels fenòmens físics continguts a la major part d'assignatures de caire científic-tecnològic. Aquest treball pretén contribuir en aquest aspecte mostrant aquesta vesant pedagògica de l'us de la modelització, proposant l'us del Mètode dels Elements Finits (MEF) per a l'estudi de les vibracions i dels sistemes vibrants.

Per una banda l'estudi de les vibracions i dels sistemes vibrants ocupa una part important tant als estudis de ciència bàsica com als estudis pròpiament d'enginyeria. Tot i l'important esforç que tradicionalment s'ha fet per afavorir la comprensió d'aquets tipus de fenòmens, tant des de els textos expositius i la classe magistral com des del punt de vista d'una bona programació de pràctiques de laboratori, sempre ha existit un cert buit entre el que ès el desenvolupament de la teoria amb el seu reflex dins del laboratori i la seua aplicació a sistemes complexos (més realistes).

Per altra banda el MEF actualment constitueix un dels mètodes mès potents i alhora mès emprats per a resolució d'equacions diferencials en contextos reals, en els quals, condicionaments com la pròpia geometria del problema, ens impossibilita l'obtenció senzilla de solucions analítiques. Considerant la importància del mètode, ès necessari, per tant, elaborar una sèrie de propostes didàctiques de forma que puguen permetre a l'estudiant en aquesta disciplina, no tan sols entendre la seua base matemàtica, sinó tambè la metodologia i la utilitat en la aplicació a casos reals. Per a aconseguir aquest objectiu em buscat un problema que desperte interès per part dels estudiants, alhora que constitueixca un bon exemple per al mètode: l'obtenció dels modes de ressonància sobre la tapa harmònica d'una guitarra, a partir de la resolució d'una equació d'autovalors amb el MEF. Per la facilitat de interpretació i contrastació experimental dels resultats obtinguts, pot oferir a mès una gratificació i motivació addicional, molt necessària en tot procès d'aprenentatge.

L'accessibilitat al software d'ús general a les aules de la Universitat Espanyola així com el desenvolupament dintre d'ella de tasques o assignatures dedicades a la modelització de sistemes reals senzills pot ajudar a omplir aquest forat i fer de pont entre el coneixement teòric i l'aplicació en un entorn real, descobrint alhora les seves potencialitats i limitacions. En aquest treball hem decidit utilitzar com a suport per a l'aplicació del mètode, un software matemàtic comú i a l'abast de qualsevol estudiant universitari, el MATLAB amb la seua toolbox PDE (Partial Diferential Equation). Aquest software ès presenta amb un entorn gràfic senzill on definir les geometries en 2-D que modelitzen el nostre problema, alhora que ens mostra les ferramentes bàsiques que definiran les condicions de contorn, l'equació diferencial a resoldre, i la creació automàtica d'un nombre major o menor d'elements per a la solució de l'equació.

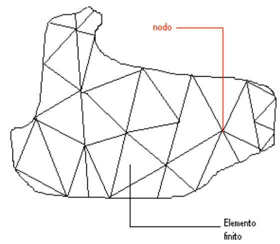


Figura 1

Figure 6.1: Mallat als elements finits

2 El camp acústic

El camp acústic ve determinat per l'equació escalar de propagació d'ones:

$$\nabla P = \frac{\rho}{\beta}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{6.1}$$

on P es la pressió acústica o camp de pressions, β representa el mòdul de compresibilitat adiabàtic i ρ es la densitat del medi en el qual es propaga l'ona. Amb aquestes propietats del medi de propagació, podem definir la velocitat de propagació del sò en eixe medi com:

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \tag{6.2}$$

per tant,

$$\nabla P = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{6.3}$$

Podem considerar variació harmònica temporal de la presió acústica, $P(x,t) = P(x)e^{i\omega t}$, amb ω la freqüència angular; que es relaciona amb la freqüència del só, ν, mitjantçant la relació $\omega = 2\pi\nu$. Per tant,

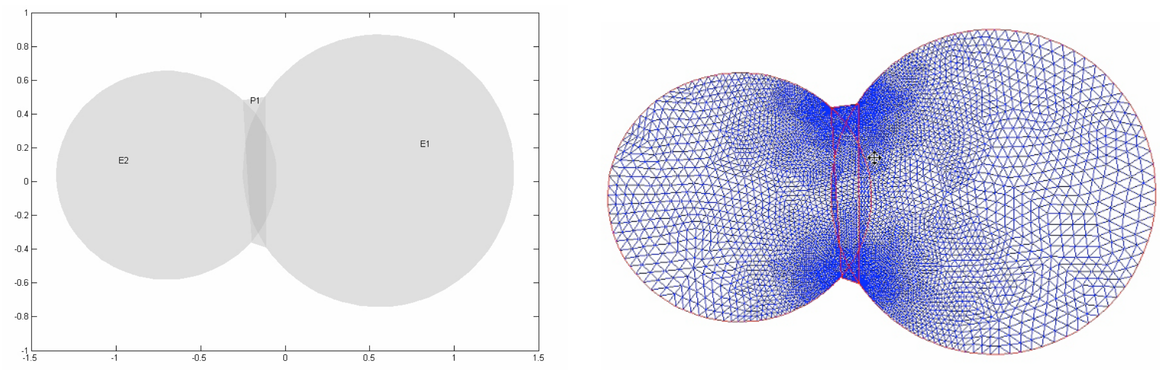
$$\nabla P = \frac{\omega^2}{c^2}P \tag{6.4}$$

Si tenim en compte que el nombre d'ona la ona acústica estudiada en la propagació amb l'equació es defineix com $k = \omega/c$, l'equació (6.4) queda de la forma

$$\nabla P = k^2 P \tag{6.5}$$

3 El Mètode dels Elements Finits

El MEF ès un dels mètodes mès potents utilitzats en la discretització de problemes continus, i des d'un punt de vista matemàtic, ès una eina eficaç per a resoldre problemes amb equacions diferencials en derivades parcials (EDDP). Molts problemes amb EDDP amb geometries



(a) Modelització de la caixa de resonància (b) Mallat establert per a la resolució

Figure 6.2: Comparació directa entre l'experiment al laboratori i els càlculs amb elements finits

complexes rarament poden expressar-se en funció de funcions elementals. Quan ens trobem en aquesta situació tenim dos problemes a resoldre:Primer, necessitem simplificar una geometria complicada subdividint-la en petits elements de geometries simples a partir d'un mallat. Segon, necessitem discretitzar el nostre problema en el mallat que hem efectuat prèviament i construir una equació per a l'aproximació discreta de la solució.

El procediment que es proposa amb l'apicació del MEF es resumeix als següents passos:

1. El domini es divideix mitjançant línies o superfícies en un nombre d'elements finits.Els punts d'intersecció entre els elements es denominen nodes. Els nodes no necessiten estar equiespaciats. (Veure figura 1)
2. Els desplaçaments dels nodes seran les incògnites fonamentals del nostre problema.
3. Elecció de funcions que descriguin de manera única el camp dintre de cada element finit en funció dels desplaçaments nodals d'aquest element.
4. Aplicació d'un mètode (generalment el de Galerkin) per separat a cada element per a interpolar entre els valors nodals extrems.
5. Quan l'anterior s'ha realitzat per a cada element, es tè un sistemes d'equacions que pot resoldre's, per als valors nodals desconeguts. (acoblament del sistema)
6. Aquest sistema d'equacions s'ajusta pera les condicions en la frontera i es resol pera obtenir la solució aproximada a $y(x)$.

Amb aquests punts a seguir veiem que el MEF no ès un procediment nou des del punt de vista matemàtic. Pot assimilar-se al procediment de residus ponderats de Galerkin o al mètode de Ritz, mètodes numèrics publicats mig segle abans que aparegués el MEF. L'innovador del MEF ès la forma sistemàtica i general que es dóna a aquests procediments numèrics, de manera que resulten fàcilment programables emprant un ordinador.

4 Metodologia

Per a aconseguir la modelització del nostre sistema, el primer que em de fer ès el definir la seva geometria. Per a açò ens farem servir de una composició de figures geomètriques senzilles, de forma que, tot i no representar el contorn exacte d'una guitarra, ens donarà una bona aproximació per a aquest tipus de càlculs.

Desprès de definir la geometria ja podem passar a la definició d'unes condicions de contorn, que representen el comportament del sistema físic que intentem modelitzar. Amb aquesta finalitat, les condicions de contorn que hem escollit es situen als bordes de la tapa harmònica de la guitarra. En aquests punts característics la pressió del camp acústic ès zero.

$$P_{ll} = 0 \tag{6.6}$$

on el subindex ll representa el llindar de la tapa.

Amb les condicions de contorn clares, ja podem passar a definir quina serà l'equació diferencial d'autovalors que proposem per a la modelització del camp acústic sobre la tapa de la guitarra. Per a açò utilitzarem l'equació d'ones clàssica:

$$\nabla^2 P_r = -\frac{\omega^2}{c^2} P_r = -k^2 P_r \tag{6.7}$$

per a la qual substituirem el nombre d'ones k^2 per λ o autovalor que busquem.

$$\nabla^2 P_r = -\lambda P_r \tag{6.8}$$

Així doncs de la resolució de (6.8), i relacionant amb (6.4), obtindrem els nombres d'ona (i per tant freqüències) associades als modes de vibració propis de la guitarra.

Per últim ja tan sols ens queda la divisió en elements finits de la superfície sobre la qual volem obtindre les solucions del camp. Aquesta divisió la fa la pròpia toolbox de forma automàtica, podent controlar des de el programa el nombre d'elements que volem emprar per a l'aproximació. En el nostre cas hem emprat la següent subdivisió de la geometria que apareix a la Figura 3

5 Resultats

Per a la verificació dels resultats obtinguts amb aquesta metodologia, farem referència a uns experiments de fàcil realització amb material molt a l'abast de qualsevol estudiant a la universitat. Col·loquem un bafle junt a la part inferior de la caixa de la guitarra connectat a un generador de funcions. Posem sorra en la tapa harmònica de la guitarra, i anant variant la freqüència del generador, trobarem els modes de ressonància, i a mès veurem com es dibuixen les formes de cada mode. La sorra es situarà en els nodes de cada mode. Ara tan sols ens cal comprovar els resultats obtinguts amb el nostre model amb els resultats que s'obtenen amb el mètode experimental descrit anteriorment. En aquest treball hem comparat els resultats obtinguts amb el MEF amb els resultats experimentals obtinguts per Fritz Mueller [6] que es mostren a les Figures 3 i 3 (marge esquerre). Com es veu a les Figures 3 i 3, la comprovació dels resultats ès visual i directa.

 ISSN 1988-3145

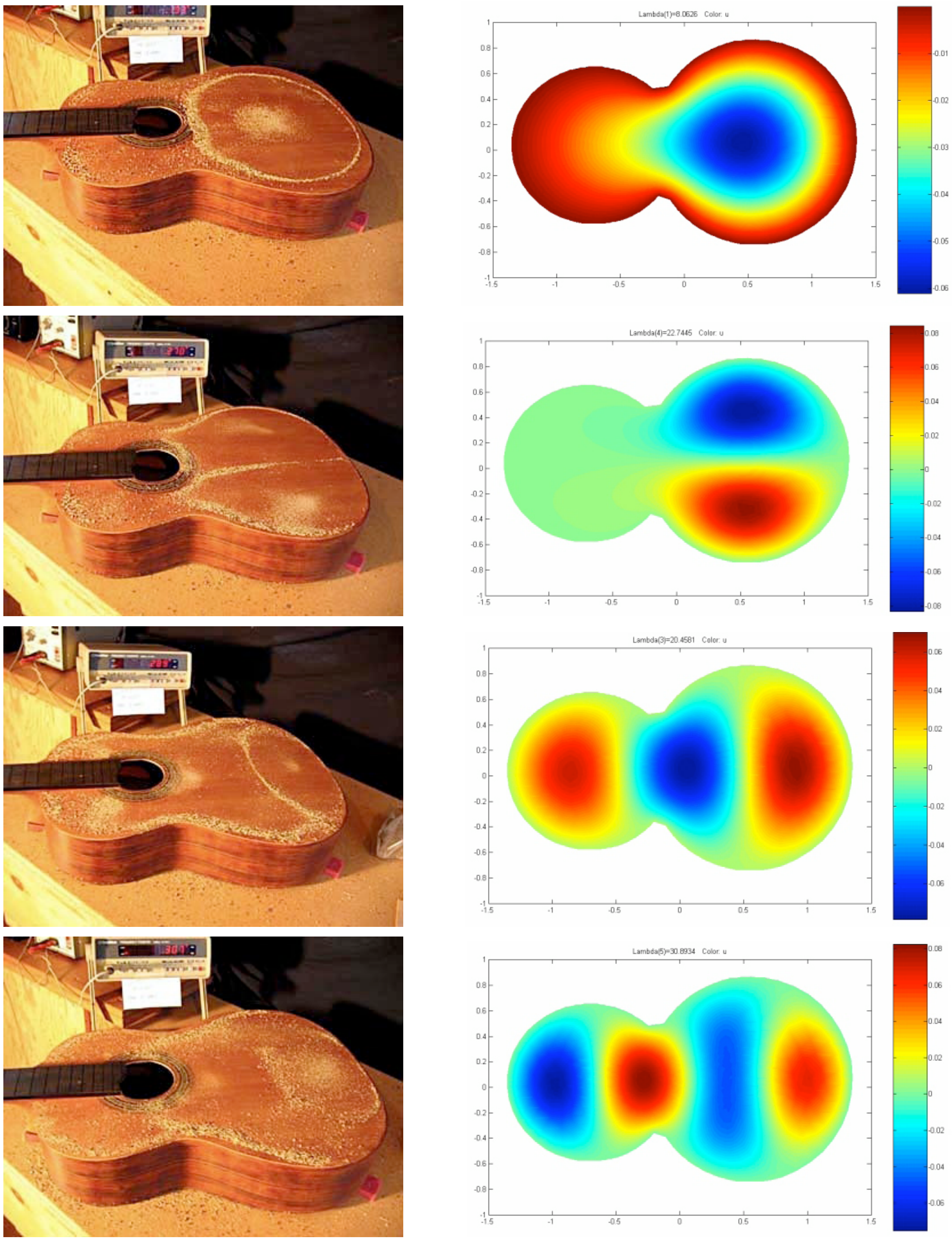


Figure 6.3: Comparació directa entre l'experiment al laboratori i els càlculs amb MEF

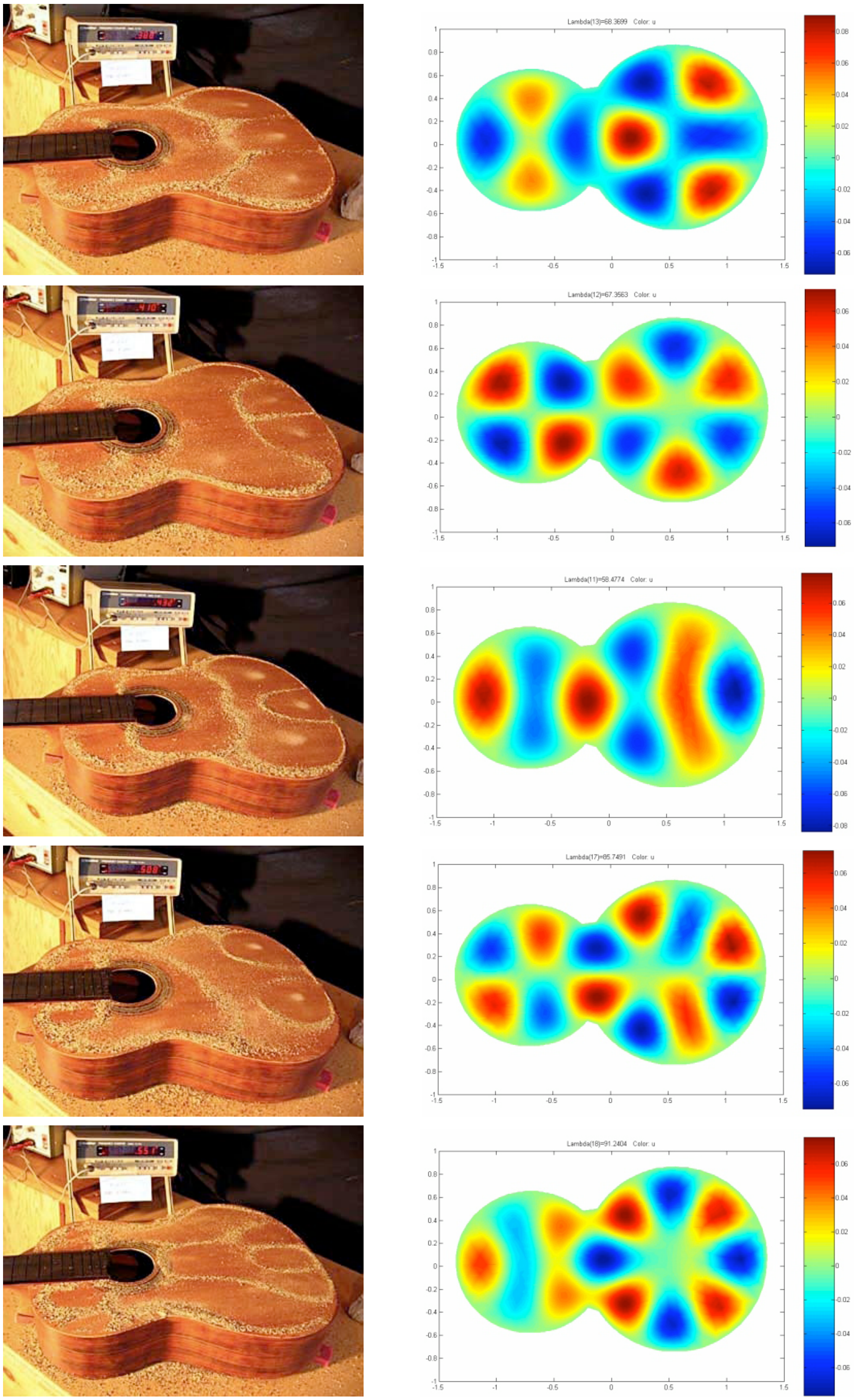


Figure 6.4: Comparació directa entre l'experiment al laboratori i els càlculs amb MEF

Referencias

[1] Goldstein, H *Mecánica Clásica*. Ed. Revertè, Barcelona, (1987).

[2] Zienkiewicz, Olgierd Cecil. The finite element method. Oxford: Butterworth-Heinemann , 2000, 5th ed.

[3] Strang, W.G., Fix, G.J. An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, 1973.

[4] Morse, Philip M. Theoretical acoustics. Princenton : Princeton University Press , 1968.

[5] Elies Fuster Garcia, Vicent Romero García, L.M. García Raffi, E. A. Sánchez Pèrez, J.V. Sánchez Pèrez, Mario Sopena Novales. Obtenció dels modes de resonància a una geometría complexa: Proposta didàctica de modelitzacció amb elements finits. VI Jornadas de Matemàtica Aplicada, Dep. Matemàtica Aplicada, Universidad Politècnica de Valencia. 2005.

[6] Fritz Mueller http://www.classicalguitars.ca/resonances.htm